Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Artur Tuttar

# Järjekorrasüsteemide tutvustus ja lahendamine kasutades rakendustarkvara R

Matemaatilise statistika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Meelis Käärik (PhD)

Tartu 2020

## Järjekorrasüsteemide tutvustus ja lahendamine kasutades rakendustarkvara R

## Bakalaureusetöö


## Artur Tuttar



**Lühikokkuvõte.** Bakalaureusetöö eesmärk on tutvustada erinevaid järjekorrasüsteeme ning luua tööriist, mis lihtsustaks järjekorrasüsteeme kirjeldavate suuruste leidmist. Töö teoreetilises osas antakse ülevaade järjekorrasüsteemidega seotud juhuslikest protsessidest ning tutvustatakse $M/M/\ldots$ järjekorrasüsteeme ning süsteeme kirjeldavaid suuruseid ja nende valemeid iga süsteemi jaoks. Töö praktilises osas tutvustatakse programmi, mille abil leitakse kirjeldavaid suurusi ja mida rakendatakse näidisülesannete lahendamiseks.



**Võtmesõnad:** juhuslikud protsessid, järjekorrateooria, programmeerimine, R

**CERCS teaduseriala:** P160 Statistika, operatsioonanalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika


## Introduction to queueing systems and solving them using R software

## Bachelor's thesis


## Artur Tuttar



**Abstract.** The aim of the thesis is to introduce some queueing systems and develop a tool that makes it easier to calculate performance measures for each queueing system. The theoretical part gives an overview of the stochastic processes necessary to understand queueing theory and introduction to $M/M/\ldots$ types of queues with formulas to calculate the means and variance of performance variables. In the practical part the tool is introduced and explained. It is also used to solve example problems about $M/M/\ldots$ queues.



**Keywords:** stochastic processes, queueing theory, programming, R

**CERSC research specification:** P160 Statistics, operation research, programming, actuarial mathematics

# Sisukord

# Sissejuhatus

Järjekorrad on tänapäeva ühiskonnas üsna levinud nähtus, ent selleks, et neid matemaatiliselt kirjeldada, tuleb omandada mitmeid erinevaid teadmisi tõenäosusteooriast. Järjekorrasüsteemid on osa juhuslikest protsessidest, mida annab nende omaduste põhjal veelgi klassifitseerida, kuid kõige kergem on eeldada, et kliendid sisenevad süsteemi ning lahkuvad sealt mingi tõenäosusliku jaotuse kohaselt ning neid teenindatakse ühe või mitme teenindaja poolt. Neist kõige kergem on uurida neid järjekorrasüsteeme, kus sisenemise ja väljumise jaotused on eksponentjaotused.

Antud töö eesmärk on tutvustada ning selgitada selliseid järjekorrasüsteeme, kus sisenemise ja väljumise jaotused on eksponentsiaalsed. Viimased on tuntud ka kui Markov/Markov järjekorrasüsteemid ehk süsteemid, kus sisenemise ja lahkumise protsessid on Markovi ahelad (tähistusega $M/M/\dots$). Töös uuritakse neid süsteeme ning luuakse ka tööriist, mille abil on võimalik leida neid süsteeme kirjeldavaid suurusi. See tööriist on loodud abistamaks õppejõude ja/või praktikumide juhendajaid järjekorrasüsteemide ülesannete välja mõtlemisel ning lahendamisel.

Töö koosneb kolmest osast. Esimeses osas antakse taustateadmisi juhuslikest protsessidest, mis on tugevalt seotud järjekorrasüsteemidega. Sealjuures tuletatakse omadusi ning tulemusi, mida järjekorrasüsteemide juures kasutatakse. Töö teises osas tutvustatakse kuut $M/M/\dots$ tüüpi järjekorrasüsteemi ning tuuakse välja süsteeme kirjeldavate suuruste valemeid iga süsteemi jaoks. Kolmas osa on töö praktiline osa, kus tutvustatakse programmi, mille abil eelnevalt kirjeldatud süsteeme ja nende suurusi arvutatakse. Programmi rakendatakse ka näidisülesannete lahendamiseks.

Töö praktiline osa on kirjutatud rakendustarkvaras `R` ning kasutatakse seal tarkvaras juba olemas olevat paketti `queueing` [1].

# 1 Üldtaust

Selles peatükis anname lugejale taustteadmised, mis on vajalikud selleks, et aru saada $M/M/\ldots$ tüüpi järjekorrasüsteemidest.

## 1.1 Juhuslik protsess

Järgnev osa põhineb S. Rossi raamatu [6] leheküljel 84.

Alustuseks selgitame, mis on *juhuslik protsess*. *Juhuslikuks protsessiks* nimetame juhuslike suuruste peret $\{X(t) : t \in T\}$, kus iga liige $X(t)$ on juhuslik suurus. Hulka $T$ nimetatakse *indekshulgaks* ja see koosneb üksikutest ajamomentidest $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (sellisel juhul on juhuslik protsess *diskreetse* ajaga) või on intervall reaaltelje positiivsest osast, näiteks $T = [0, 1]$ (sellist juhuslikku protsessi nimetatakse *pideva* ajaga protsessiks). Kõiki olekuid $X(t)$ nimetatakse *seisundite hulgaks*. Viimane saab olla nii lõplik kui ka lõpmatu.

## 1.2 Markovi ahel

Järgnev osa põhineb S. Rossi raamatu [6] lehekülgedel 191–192.

Järjekorrasüsteemide üks tähtsamaid protsesse on Markovi ahel. Alustuseks defineerime diskreetse ajaga ahela.

**Definitsioon 1.2.1** (**Markovi ahel**) Juhuslike suuruste jada $\{X_n\}$, kus $n$ võib omada lõpliku või loenduva arvu väärtusi, nimetatakse *Markovi ahelaks*, kui kehtib

$$P\{X_n = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{n-2} = k_{n-2}, X_{n-1} = k_{n-1}\} = P\{X_n = j | X_{n-1} = k_{n-1}\}.$$

Markovi ahela $n$-da seisundi $X_n$ võimalikud *seisundid* on hulk $\{E_1, E_2, \ldots\}$. Tõenäosus, et Markovi ahel läheb seisundist $i$ seisundisse $j$ sammul $n$, on $P = \{X_n = j | X_{n-1} = i\} := p_{ij}^{(n)}$, mida nimetatakse *üleminekutõenäosuseks*. Viimane tõenäosus sõltub aga sellest, mis hetkel ($n$-dal sammul) ahel läheb seisundist $E_i$ üle seisundisse $E_j$. Kui Markovi ahela üleminekutõenäosus ei sõltu $n$-i väärtusest ehk $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}$, siis nimetatakse sellist ahelat *homogeenseks*.

**Definitsioon 1.2.2** (**Üleminekumaatriks**) Maatriksit

$$P = (p_{ij}),$$

mis koosneb üleminekutõenäosustest vastavatesse seisunditesse, nimetatakse *üleminekumaatriksiks*.

## 1.3 Chapman-Kolmogorovi võrrand

Järgnev osa põhineb S. Rossi raamatu [6] lehekülgedel 195–196.

Eelnevalt sõnastatud üleminekutõenäosus sisaldab informatsiooni vaid üleminekust ühe sammu jooksul ehk $(n-1)$-st sammust $n$-ndasse sammu, kuid palju rohkem informatsiooni Markovi ahela käitumise kohta saame siis, kui vaatame, kui tõenäoliselt alustades seisundist $E_i$ jõuame $k$ sammu jooksul seisundisse $E_j$.
Selle tõenäosuse uurimiseks olgu meil homogeenne Markovi ahel, mille üleminekumaatriks on $P = (p_{ij})$. Meid huvitab järgmine tõenäosus:

$$P\{\text{seisundist } i \text{ seisundisse } j,\ k \text{ sammu jooksul}\} \coloneqq p_{ij}(k).$$

Teades, et $P(AB) = P(B)P(A|B)$, kust omakorda saab näidata, et $P(AB|C) = P(B|C)P(A|BC)$, paneme kirja meie soovitud tõenäosuse:

$$\begin{aligned} p_{ij}(k) = P\{X_{s+k} = j | X_s = i\} &\overset{\text{s on suvaline}}{=} P\{X_k = j | X_0 = i\} \\ &\overset{\text{vahesammu lisamine}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} P\{X_k = j, X_m = l | X_0 = i\} \\ &\overset{\text{korrutuslause}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} P\{X_m = l | X_0 = i\} \cdot P\{X_k = j | X_m = l, X_0 = i\} \\ &\overset{\text{Markovi ahel}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} p_{il}(m) p_{lj}(k-m). \end{aligned} \tag{1}$$

Saadud võrrandit nimetatakse Chapman-Kolmogorovi võrrandiks. Tähistades $P(k) = (p_{ij}(k))$, saame selle võrrandiga, et $P(k) = P(m)P(k-m)$. Valides $m = 1$, saame $P(k) = P(1)P(k-1)$ ja edasi saame näidata, et $P(2) = P \cdot P = P^2$ ja $P(3) = P \cdot P^2 = P^3$ ning üldiselt $P(k) = P^k$.

## 1.4 Piirtõenäosused

Järgnev osa põhineb S. Rossi raamatu [6] lehekülgedel 214-216.

Markovi ahela käitumist on võimalik kirjeldada üleminekumaatriksi $P$ abil, kuid üldjuhul kirjeldab see vaid ahela kulgu lõplikul sammude arvul. Lastes sammude arvul kasvada $(n \to \infty)$, võib ahel käituda oodatust teistmoodi. Järgnevalt vaatamegi sellist olukorda, kus Markovi ahel on läbinud väga palju samme ning millised on üleminekutõenäosused siis.
Olgu meil Markovi ahel, mis on toiminud juba kaua ($n$ on suur). Tähistame tõenäosuse, et $n$

sammu läbimisel oleme olnud seisundis $j$ järgmiselt:

$$P\{X_n = j\} \coloneqq p_j(n).$$

Selgub, et kehtib

$$p_j(n+1) = \sum_i p_i(n) \cdot p_{ij}(1).$$

Viimast võrdust maatriksi kujul kirjutades ($\pi_n = (p_1(n), p_2(n), \dots)$) näeme, et $\pi_{n+1} = \pi_n P = \pi_{n-1} P^2 = \dots = \pi_0 P^{n+1}$, kus $\pi_0 = (p_1(0), p_2(0), \dots)$ on Markovi ahela algseis ehk igasse seisundisse sattumise tõenäosus esimesel sammul. Kuna $n$ kasvab, siis mingil hetkel võib juhtuda nii, et $p_i(n+1) = p_i(n)$ ehk tõenäosus, et $(n+1)$ sammul oleme olnud seisundis $i$, on sama, mis $n$-ndal sammul. Selline olukord aga tagab selle, et kõik järgnevad tõenäosused $i$-s seisundis olemise kohta on samad.
Viimane väide on kasulik, sest leides n-ö piirtõenäosused, on Markovi ahela kirjeldamine pikemas perspektiivis stabiilne ning kindel, mistõttu oskame kergemalt ennustada, kuhu ning mis tõenäous usega Markovi ahel mingisse seisundisse satub.

## 1.5 Pideva ajaga Markovi ahel

Järgnev osa põhineb S. Rossi raamatu [6] lehekülgedel 371–373, 384–386 ja 389–392.

Eelnevates peatükkides käsitlesime diskreetse ajaga Markovi ahelaid ehk indeksitehulk oli $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ ning seisundid $X_n = X(n)$ olid defineeritud vaid hulga $T$ elementidel. Nüüd aga uurime lähemalt diskreetse ajaga Markovi ahela edasiarendust, kus ahela käitumine on kirjeldatav kogu reaalteljel.

**Definitsioon 1.5.1** (**Pideva ajaga Markovi ahel**) Öeldakse, et juhuslik protsess $\{X(t), t \geq 0\}$ on *pideva ajaga Markovi ahel*, kui suvalise $s$, $t \geq 0$ ja suvaliste mittenegatiivsete täisarvude $i$, $j$, $x(u)$, $0 \leq u < s$ korral kehtib võrdus

$$P\{X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u),\ 0 \leq u < s\} = P\{X(t+s) = j | X(s) = i\}.$$

See definitsioon kirjeldabki just sellist juhuslikku protsessi, millel on Markovi omadus ehk ajahetkel $(t+s)$ ei sõltu protsessi väärtus olekutest, mis jäävad ajahetkesse $u$, $0 \leq u < s$, vaid sõltub ainult sellest, mis juhtus ajahetkel $s$.
Sarnaselt diskreetse ajaga Markovi ahelale on pideva ajaga ahelal homogeensuse ehk statsionaarsuse omadus.

**Definitsioon 1.5.2** (**Statsionaarsed üleminekutõenäosused**) Kui tõenäosus $P\{X(t+s) = j|X(s) = i\}$ ei sõltu $s$ väärtusest, siis öeldakse, et pideva ajaga Markovi ahelal on *statsionaarsed* (e *homogeensed*) *üleminekutõenäosused.*

Kasutades eelnevat statsionaarsete üleminekutõenäosustega pideva ajaga Markovi ahela definitsiooni, näitame, et seisundisse $i$ sattumisel on seal seisundis veedetud aeg $T_i$ eksponentjaotusega. Olgu $s$, $t \in [0, \infty)$ suvalised. Olgu Markovi ahel selline, et ta sattus ajahetkel 0 seisundisse $i$ ning ei ole sealt $s$ ajaühiku jooksul lahkunud. Vaatame tõenäosust, et ta ei lahku järgneva $t$ ajaühiku jooksul. Sisuliselt otsime tõenäosust $P\{T_i \geq (t+s)|T_i \geq s\}$. Markovi omaduse tõttu mõjutab seda tõenäosust vaid see teadmine, et hetkes $s$ on ahel seisundis $i$, siis

$$\begin{aligned}
P\{T_i \geq (t+s)|T_i \geq s\} &= P\{X(s^*) = i,\ 0 \leq s^* \leq (t+s)|X(s^*) = i,\ 0 \leq s^* \leq s\} \\
&= P\{X(s^*) = i,\ s \leq s^* \leq (t+s)|X(s^*) = i,\ 0 \leq s^* \leq s\} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} P\{X(s^*) = i,\ s \leq s^* \leq (t+s)|X(s) = i\} \\
&= P\{X(s^*) = i,\ 0 \leq s^* \leq t|X(0) = i\} = P\{T_i \geq t\}.
\end{aligned}$$

Seega saime, et $P\{T_i \geq (t+s)|T_i \geq s\} = P\{T_i \geq t\}$, kust lemma 4.1.1 põhjal $T_i \sim Exp(\lambda)$. Viimase tulemuse põhjal saamegi kirja panna teise võimaliku definitsiooni pideva ajaga Markovi ahela jaoks.

**Definitsioon 1.5.3** (**Pideva ajaga Markovi ahel**) *Pideva ajaga Markovi ahel* on juhuslik protsess, mis

1. sattudes seisundisse $i$, jääb sinna ajaks $T_i \sim Exp(\lambda_i)$, kusjuures seisundites viibimise ajad on sõltumatud juhuslikud suurused;

2. väljudes seisundist $i$, siseneb ta teatava tõenäosusega $P_{ij}$ seisundisse $j$, kusjuures üleminekutõenäosused $P_{ij}$ rahuldavad tingimusi $P_{ii} = 0$ ja $\sum_j P_{ij} = 1$ iga $i$ korral.

Sellest definitsioonist on palju kergem aru saada kui esimesest ning sarnasused ja erinevused diskreetse ning pideva ajaga ahelate vahel paistavad kergemalt välja. Lisaks sellele näeme, et seisunditevaheliste liikumiste tõenäosused moodustavad täissüsteemi, kus on eraldi välja toodud see, et aeg seisundi muudatuste vahel on eksponentjaotusega ning iga seisundis veedetud aeg on sõltumatu teistes seisundites veedetud ajast.
Edasi sõnastame kaks lemmat, mida kasutades saab tuletada Kolmogorovi taha- ja ettesuunatud võrrandid.

**Lemma 1.5.1** Kehtivad seosed

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-P_{ii}(h)}{h} = \lambda_i$$

ja

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}}{h} = \lambda_i P_{ij}, \text{ kui } i \neq j.$$

**Lemma 1.5.2** (**Chapman-Kolmogorovi võrrand**) Suvaliste $s$, $t \geq 0$ korral

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) \cdot P_{kj}(s).$$

See on pideva ajaga analoog eelnevalt tuletatud diskreetse ajaga Markovi ahela võrrandile (1). Kasutades Chapman-Kolmogorovi võrrandit ning eelnevaid omadusi, saame tuletada järgmise teoreemi.

**Teoreem 1.5.1** (**Kolmogorovi tahasuunatud võrrand**) Iga $i$, $j$, $t \geq 0$ korral

$$P'_{ij}(t) = \lambda_i \sum_{k\neq i} P_{ik} P_{kj}(t) - \lambda_i P_{ij}(t).$$

Selgub, et tuletise $P'_{ij}(t)$ leidmiseks saab tuletada veel ühe võrrandi, kuid selleks peab juhuslik protsess täitma üht kolmest tingimusest:

1. vaadeldaval protsessil on ainult lõplik arv seisundeid;
2. iga $i$ korral nende $j$ hulk, mille korral on $P_{ij} > 0$, on lõplik;
3. koodumine $\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = \lambda_i P_{ij}$ on ühtlane üle kõigi $i$, $(i \neq j)$.

Siis aga kehtib järgmine teoreem.

**Teoreem 1.5.2** (**Kolmogorovi ettesuunatud võrrandid**) Kui on täidetud üks tingimustest 1–3, siis iga $i$, $j$, $t \geq 0$ korral

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} \lambda_k P_{kj} P_{ik}(t) - \lambda_j P_{ij}(t).$$

Eelnevad funktsioonid on üldiselt analüütiliselt raskesti leitavad, mistõttu uurime nende asümptootilist kuju ehk olukorda, kus $t \to \infty$. Tähistame $p_j := \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$. Sarnaselt diskreetse ajaga ahela piirtõenäosustele võiks arvata, et suure $t$ korral tõenäosused stabiliseeruvad, mis omakorda võimaldab kergemini leida Kolmogorovi võrrandite lahendeid. Arvestades, et kui $t \to \infty$, siis $P'_{ij}(t) \approx 0$, saame, et suure $t$ korral

$$0 = \sum_{k \neq i} \lambda_k P_{kj} p_k - \lambda_j p_j$$

ja

$$0 = \lambda_i \sum_{k \neq i} P_{ik} p_j - \lambda_i p_j,$$

kust saamegi võrrandisüsteemi lahendades leida n-ö *tasakaaluseisundi tõenäosused*.

## 1.6 Tekke ja kao protsessid

Järgnev osa põhineb S. Rossi raamatu [6] lehekülgedel 374, 392–393.

Järgnevas peatükis defineerimine tekke ja kao protsessi, mis on kitsendustega pideva ajaga Markovi ahel. Võib öelda, et järjekorrasüsteemid on tekke ja kao protsessi edasiarendus.

**Definitsioon 1.6.1** (**Tekke ja kao protsess**) Pideva ajaga Markovi ahelat $\{X(t), t \geq 0\}$ seisundite hulgaga $\{0, 1, 2, \dots\}$ nimetatakse tekke ja kao (ka sünni ja surma) protsessiks, kui seisundist $n$ on võimalik üle minna üksnes naaberseisunditesse $n-1$ ja $n+1$.

Definitsioonist on selge, et tekke ja kao protsesside puhul seisundite tõenäosused on nullist erinevad vaid siis, kui indeksite vahe $|i-j| < 2$. Samuti selgub, et $P_{n,n-1} + P_{n,n+1} = 1$, sest eelduse kohaselt ei ole võimalik minna seisundist $n$ seisundisse $n$ ehk $P_{nn} = 0$.
Tähistame suurused, mida edaspidi kasutame

$$\begin{aligned}
\nu_0 &\coloneqq 0, \\
\nu_n &\coloneqq \lambda_n P_{n,n-1}, n \geq 1, \\
\mu_n &\coloneqq \lambda_n P_{n,n+1}, n \geq 0,
\end{aligned}$$

siit on selge, et $\mu_n + \nu_n = \lambda_n$, kus $\lambda_n$ on $n$-ndas seisundis keskmine viibimisaeg, sest $T_n \sim Exp(\lambda_n)$. Selguse mõttes mainime, et $\nu_n$ on $n$-ndast seisundist lahkumise intensiivsus ning $\mu_n$ on $n+1$-sse seisundisse sattumise intensiivsus.
Kuna tekke ja kao protsess on sisult pideva ajaga Markovi ahel, siis kehtivad ka kõik eelnevalt mainitud tulemused. Järgnevalt uurime selle protsessi tasakaaluvõrrandit ning leiame piirtõenäosuste $p_k$ valemi.

Arvestades tekke ja kao protsesside definitsiooni, siis näeme, et protsess täidab tingimust (2), sest fikseerides $i$, saab protsess minna positiivse tõenäosusega vaid seisunditesse $i-1$ või $i+1$ ehk $j$-tide hulk on kujul $\{i-1, i+1\}$. Selle põhjal võime kasutada Kolmogorovi ettesuunatud valemit

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} \lambda_k P_{kj} P_{ik}(t) - \lambda_j P_{ij}(t).$$

Otsides stabiilset süsteemi, teame, et süsteem peaks olema tasakaaluolekus ($t$ on suur), mistõttu kehtivad

$$P_{ij}(t) \to p_j, \forall i,$$

ja

$$P'_{ij}(t) \to 0.$$

Asendame need suurused ettesuunatud võrrandisse ja saame, et

$$0 = \sum_{k \neq j} \lambda_k P_{kj} p_k - \lambda_j p_j, j = 0, 1, 2, \ldots$$

ehk

$$\lambda_j p_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k P_{kj} p_k, j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Arvestades, et $P_{kj} = 0$, kui $|k-j| \geq 2$ ning tekke ja kao protsessi definitsiooni (tuletus on leitav [6, lk 392–393]), saame, et kehtib üldvalem

$$p_k = \left( \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_{i-1}}{\nu_i} \right) p_0. \tag{2}$$

Arvestades, et tegu on tõenäosustega, siis peab kehtima $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, kust eelnevat arvestades saame avaldada, et

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_{i-1}}{\nu_i}}. \tag{3}$$

Kokkuvõttes leidsime tasakaaluoleku tõenäosuste üldkuju ning samuti ka viisi, kuidas arvutada 0-nda seisundi tasakaaluoleku tõenäosust. Tasub mainida, et tasakaaluoleku tõenäosuse üldkuju $p_k$ ehk $p_0$ leidmiseks peab lõpmatu summa $\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_{i-1}}{\nu_i}$ koonduma. Samuti tasub mainida, et kui populatsioon saab kasvada vaid mingi arvuni $K$ ehk $\mu_i = 0$, kui $i \geq K$, siis on tasakaaluoleku tõenäousused samuti leitavad (see kehtib, kuna tekke ja kao protsess täidab pideva ajaga Markovi ahela ettesuunatud võrrandi tingimust (1)).

# 2 Järjekorrasüsteemid

Järjekorrasüsteemid on sisult tekke ja kao protsessid, kus tehakse lisaeeldusi sisenemise ja väljumise jaotustele, nende intensiivsustele, klientide ehk populatsiooni arvule süteemis ning populatsiooni kasvu kitsendustele. Selles peatükis kirjeldame neid järjekorrasüsteeme ning meid huvitavaid suuruste valemeid. Praktilises osas kasutame rakendustarkvara R, et neid suurusi süsteemide jaoks arvutada. Tähtis on mainida, et kõikide süsteemide puhul tulemused kehtivad, kui süsteem on tasakaaluolekus.

## 2.1 Järjekorrasüsteem $M/M/1$ ja arvutatavad suurused

Järgnev osa põhineb L. Kleinrocki raamatu [3] lehekülgedel 94–99.

Alustuseks defineerime kõige algelisema järjekorrasüsteemi ning anname valemid, mille abil leida süsteemi kirjeldavaid suurusi.

Järjekorrasüsteemis $M/M/1$ teenindatakse korraga üht klienti, sisenemise ja väljumise protsessid on Markovi ahelad, mis tähendab, et kahe kliendi sisenemise vaheline aeg on eksponentjaotusega juhuslik suurus ning ühe kliendi teenindamiseks kuluv aeg on samuti eksponentjaotusega juhuslik suurus (lisaks eeldatakse, et süsteemis saab korraga oodata lõpmatu arv kliente). Seda järjekorda kirjeldab tekke ja kao protsess, mille korral

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mu \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \nu_k &= \nu \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

ehk tekke- ja kaointensiivsused on konstantsed iga seisundi $k$ jaoks. Kasutades tekke ja kao protsesside valemeid (2) ja (3), saame, et sellise järjekorrasüsteemi tasakaaluseisundite tõenäosused avalduvad kujul

$$p_k = p_0 \cdot \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^k$$

ja

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^k}.$$

Selge on, et tõenäosused leiduvad vaid juhul, kui $\frac{\mu}{\nu} < 1$ ehk $\mu < \nu$. Viimane on ka intuitiivselt selge, sest kui süsteemi tuleb rohkem kliente, kui neid sealt lahkuda jõuab, siis järjekord aina kasvab, mistõttu tõenäosus näha klientide arvu $n$ kahaneb kiiresti 0-ks.

Olgu $\mu < \nu$, siis tähistades $\rho := \frac{\mu}{\nu}$, on selge, et kehtib $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$, kust saame, et $p_0 = 1 - \rho$. Lisaks saame, et $p_k = (1-\rho)\rho^k$.

Järjekorrasüsteemi juures huvitavad meid tõenäosused $p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, kuid lisaks sellele saab välja arvutada ka teisi kirjeldavaid suuruseid. Üks tähtsamaid tuletatavaid suurusi on keskmine klientide arv süsteemis. Tõestame järgmise lemma.

**Lemma 2.1.1** Olgu juhuslik suurus $X$ klientide arv $M/M/1$ järjekorrasüsteemis. Siis kehtivad valemid

$$EX = \frac{\rho}{1-\rho}$$

ja

$$DX = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Need tulemused on toodud ilma tõestuseta Kleinrock'i raamatus [3, lk 97], tõestused on läbi tehtud autori poolt.

*Tõestus.* Lähtume tasakaaluseisundite jaotusest $p_k$ ning keskmise definitsioonist. Saame, et

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-\rho)\rho^k = \rho(1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \rho^{k-1} = \rho(1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} (\rho^k)' \\ &= \rho(1-\rho) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \right)' = \rho(1-\rho) \left( \frac{1}{1-\rho} \right)' = \rho(1-\rho) \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}. \end{aligned} \tag{4}$$

Dispersiooni leidmisel lähtume teadmisest, et $DX = EX^2 - (EX)^2$. Saame, et

$$\begin{aligned}
DX &= EX^2 - (EX)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot p_k - (EX)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(k(k+1) - k) \cdot p_k - (EX)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) \cdot p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k - (EX)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) \cdot \rho^k(1-\rho) - EX - (EX)^2 \\
&= \rho(1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) \cdot \rho^{k-1} - EX - (EX)^2 = \rho(1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty}(k+1) \cdot (\rho^k)' - EX - (EX)^2 \\
&= \rho(1-\rho)(\sum_{k=1}^{\infty}(k+1) \cdot \rho^k)' - EX - (EX)^2 = \rho(1-\rho)(\sum_{k=1}^{\infty}(\rho^{k+1})')' - EX - (EX)^2 \\
&= \rho(1-\rho)((\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k+1})')' - EX - (EX)^2 = \rho(1-\rho)((\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k - \rho - 1)')' - EX - (EX)^2 \\
&= \rho(1-\rho)((\frac{1}{1-\rho} - \rho - 1)')' - EX - (EX)^2 \\
&= \rho(1-\rho)\frac{2}{(1-\rho)^3} - \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

□

Teine huvipakkuv suurus, mis on seotud eelmisega, on järjekorra pikkus. Järjekorrasüsteemi $M/M/1$ puhul on kerge näha, et kui süsteemis on rohkem kui üks klient, mille tõenäosus on $P\{X > 1\} = 1 - (p_1 + p_0) = p_2 + p_3 + \dots$, siis peab süsteemis olema järjekord. Kasutades seda teadmist, sõnastame ning tõestame järgmise lemma.

**Lemma 2.1.2** Tähistagu suurus $X_q$ klientide arvu $M/M/1$ süsteemi järjekorras ehk $X_q = \max(X - 1, 0)$. Siis kehtivad

$$EX_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

ja

$$DX_q = \frac{\rho^2(-\rho^2 + \rho + 1)}{(1-\rho)^2}.$$

*Tõestus.* Tõestuskäik on analoogiline eelmise lemma (2.1.1) tõestusega. Lähtudes keskväärtuse definitsioonist, saame, et

$$EX_q = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^{k+1}(1-\rho) = \rho^2(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^{k-1} \stackrel{(4)}{=} \rho^2(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Kasutades valemit $DX_q = EX_q^2 - (EX_q)^2$, saame, et

$$DX_q = EX_q^2 - (EX_q)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p_{k+1} - (EX_q)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \cdot p_{k+1} -$$
$$- \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_{k+1} - (EX_q)^2 = \rho^2(1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \cdot \rho_{k-1} - EX_q - (EX_q)^2 \stackrel{(5)}{=}$$
$$= \rho^2(1-\rho)\frac{2}{(1-\rho)^3} - \frac{\rho^2}{1-\rho} - \frac{\rho^4}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2(-\rho^2+\rho+1)}{(1-\rho)^2}.$$

□

Eelnevad tulemused on sõnastatud ning tõestatud autori poolt. Viimane klientide arvuga seotud suurus, mis kirjeldab järjekorrasüsteemi, on järjekorra keskmine pikkus tingimusel, et järjekord on olemas. Tähistagu seda suurust $X_{qq}$. Teisiti võime kirja panna, et $X_{qq} = X_q | X_q > 0$. Selleks, et leida selle juhusliku suuruse keskmist, peame leidma vastavad tinglikud tõenäosused. Meid huvitab järgmine tõenäosus: $P\{X_{qq} = k\} = P\{\text{Järjekorras on } k \text{ klienti} | \text{ Süsteemis on järjekord}\} = P\{X_q = k | X_q > 0\} = P\{X = k+1 | X_q > 0\} = P\{X = k+1 | X > 1\} := p_k^t$. Kasutades tingliku tõenäosuse valemit saame, et

$$p_k^t = \frac{P\{X = k+1, X > 1\}}{P(X > 1)}.$$

Eelnevalt teame, et $P\{X > 1\} = p_2 + p_3 + \cdots = 1 - (p_1 + p_0)$. Lisaks saame, et $P\{X = k+1, X > 1\} = P\{X = k+1\} = p_{k+1}$. Nii saamegi, et korral $p_k^t = \frac{p_{k+1}}{1-(p_1+p_0)}$.

**Lemma 2.1.3** Tähistagu tinglik juhuslik suurus $X_{qq}$ klientide arvu järjekorras tingimusel, et järjekord on olemas ehk $X_{qq} = X_q | X_q > 0$. Siis kehtib

$$EX_{qq} = \frac{1}{1-\rho}.$$

.

*Tõestus.* Lähtudes keskväärtuse definitsioonist saame, et

$$\begin{aligned} EX_{qq} &= \sum_{k=1}^{\infty} k p_k^t = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{p_{k+1}}{1-(p_1+p_0)} = \frac{1}{1-(p_1+p_0)} \sum_{k=1}^{\infty} k p_{k+1} = \frac{1}{1-(p_1+p_0)} EX_q \\ &= \frac{1}{1-(\rho(1-\rho)+(1-\rho))} \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{(1-(1-\rho^2))(1-\rho)} = \frac{1}{1-\rho}. \end{aligned} \tag{6}$$

□

See tulemus on samuti sõnastatud ning tõestatud autori poolt.

Lisaks klientide arvuga seotud juhuslikele suurustele on oluline ka süsteemis ning järjekorras veedetud aeg.

**Lemma 2.1.4** Tähistagu juhuslik suurus $T$ järjekorrasüsteemis $M/M/1$ veedetud aega ning $T_q$ selle süsteemi järjekorras veedetud aega. Siis kehtivad

$$ET = \frac{1}{\nu(1-\rho)}$$

ja

$$ET_q = \frac{\mu}{\nu^2(1-\rho)}.$$

Tulemus $ET$ kohta on leitav ka Kleinrock'i raamatus [3, lk 98]

*Tõestus.* Olgu meil $M/M/1$ järjekorrasüsteem järgmine: iga klient, kes on süsteemis, peab iga ajaühiku kohta tasuma kindla summa. Olgu ühe süsteemis veedetud tunni hind üks euro. Sellise süsteemi keskmine sissetulek ajahetkeks $T$ (tähis $EB$) sõltub sellest, kui sagedasti kliente juurde tuleb (tähis $\lambda_a$) ning kui palju iga klient keskmiselt maksma peab (tähis $ET$) ning intuitiivselt

$$EB = \lambda_a \cdot ET. \tag{7}$$

Saadud valem on tuntud ka kui *Little'i valem* ning see kehtib peaaegu kõikide järjekorrasüsteemide korral. Tähtis on mainida, et antud kontekstis näitab $\lambda_a$ süsteemi efektiivset tekkeintensiivsust (kirjanduses *effective arrival rate*) ehk see ei ole alati võrdne tekkeintensiivsusega, vaid see arvestab ka klientide sisenemisele seatud kitsendusi. Süsteemi $M/M/1$ kirjeldusest teame, et süsteemi siseneb igas tunnis keskmiselt $\mu$ klienti. Kuna klientide saabumisel ei ole kitsendusi, siis $\lambda_a = \mu$. Kuid kuna ühe tunni hind on üks euro, siis keskmiselt makstud summa on sama, mis keskmiselt veedetud aeg ($ET$), ning keskmine sissetulek ei ole muu kui keskmine klientide arv süsteemis, mistõttu saame avaldada keskmise süsteemis veedetud aja $ET$ järgmiselt:

$$ET = \frac{EB}{\lambda_a} = \frac{EX}{\mu} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\mu} = \frac{1}{\nu(1-\rho)}. \tag{8}$$

Kasutades sarnast arutelu, aga maksustades ainult neid kliente, kes ootavad järjekorras, saame tuletada, et järjekorras veedetud aja keskmine avaldub sarnaselt eelmisele

$$ET_q = \frac{EX_q}{\mu} = \frac{\frac{\rho^2}{1-\rho}}{\mu} = \frac{\mu}{\nu^2(1-\rho)}. \tag{9}$$

□

Viimase kahe suuruse tõestusarutelu põhineb Rossi raamatul [6, lk 498–500].

Seejuures tasub mainida, et

$$ET = \frac{\mu}{\nu^2(1-\rho)} + \frac{1}{\nu} = ET_q + ES = E(T_q + S),$$

kus $S$ tähistab teenindamiseks kuluvat aega, mis on eelduste kohaselt eksponentjaotusega. Seega keskmine süsteemis veedetud aeg on keskmise järjekorras veedetud aja ja keskmise teeninduseks kuluva aja summa, mis on kooskõlas süsteemi sisemise loogikaga: süsteemis veedetud aeg on järjekorras veedetud aja ja teenindusaja summa.

Järjekorras veedetud aja juures saab samuti uurida tinglikku keskmist tingimusel, et klient, kes süsteemi saabub, peab ootama. Klient peab ootama $1 - p_0$ osa ajast.

**Lemma 2.1.5** Tähistagu $T_{qq}$ järjekorras veedetud aega tingimusel, et peab järjekorras ootama ehk $T_{qq} = T_q | T_q > 0$. Siis

$$ET_{qq} = \frac{ET_q}{1-p_0} = ET.$$

*Tõestus.* Kuna süsteemis on ainult üks teenindaja, siis teame, et ta on hõivatud $1 - p_0$ osa ajast. Võttes arvesse, et (kogu) tekkeintensiivsus on $\mu$ ja et tõenäosusega $1 - p_0$ peab saabuv klient minema järjekorda, saame, et efektiivne tekkeintensiivsus on $\mu(1 - p_0)$. Kasutades valemitega (8) ja (9) analoogilist arutluskäiku ja maksustades neid kliente, kes peavad ootama järjekorras, saame Little'i (7) valemi põhjal, et

$$ET_{qq} = \frac{EX_q}{\mu(1-p_0)} = \frac{ET_q}{1-p_0} = \frac{1}{\nu(1-\rho)} = ET. \tag{10}$$

□

Tasub mainida, et tingimus, mis kehtis $X_{qq}$ puhul, ei ole sama, mis $T_{qq}$ puhul. Üht uuritakse järjekorra olemasolu tingimusel ehk $X_q > 0$ korral, teist uuritakse omakorda tingimusel, et peab süsteemis ootama ehk $T_q > 0$ korral.

Viimaseks uurime süsteemis ning järjekorras veedetud aegade dispersioone.

**Lemma 2.1.6** Tähistagu juhuslik suurus $T$ järjekorrasüsteemis $M/M/1$ veedetud aega ning $T_q$ selle süsteemi järjekorras veedetud aega. Siis kehtivad

$$DT = \frac{1}{(\nu(1-\rho))^2}$$

ja

$$DT_q = \frac{\rho(2-\rho)}{(\nu(1-\rho))^2}.$$

*Tõestus.* Selleks, et tuletada süsteemis ja järjekorras veedetud aja dispersiooni, peame uurima vastavaid jaotusi. Lähenedes probleemile nii, et kliendi, kes süsteemi siseneb ning näeb enda ees süsteemis $n \geq 0$ klienti, ooteaeg on $n+1$ sõltumatu juhusliku suuruse summa, kusjuures iga juhuslik suurus on eksponentjaotusega, mille keskmine on $\frac{1}{\nu}$ ehk ooteaeg $T$ avaldub kujul

$$T = \begin{cases} U + S_1 + S_2 + \cdots + S_n, & n \geq 1 \\ S_1, & n = 0 \end{cases},$$

kus $U$ on uue kliendi sisenemisel parasjagu teenindatava kliendi teenindamiseks järele jäänud aeg ja $S_i$ on järjekorras $i$-nda teenindamiseks kuluv aeg. Seejuures on $U$ jaotus eksponentjaotuse mälutuse omaduse tõttu sama, mis algne jaotus ehk eksponentjaotus keskmisega $\frac{1}{\nu}$. Seda kasutades saame tuletada, et süsteemis veedetud aeg $T$ on tihedusega $f_T(t) = \nu(1-\rho)e^{-\nu(1-\rho)t}$ ehk süsteemis veedetud aeg on eksponentjaotusega juhuslik suurus keskmisega $\frac{1}{\nu(1-\rho)}$. Täies mahus tuletus on näha Harrisoni artiklis [2].

Kasutades seda tulemust, saame kirja panna, et

$$DT = \frac{1}{(\nu(1-\rho))^2}. \tag{11}$$

Sarnase argumentatsiooniga on võimalik leida, et $F_{T_q}(t) = 1 - \rho e^{-\nu(1-\rho)t}$. Paneme tähele, et jaotusfunktsioon ei ole pidev punktis 0 ehk punktis 0 on positiivne tõenäosus $1-\rho$. Tuletist võttes saame, et vastav kombineeritud tõenäosus-/tihedusfunktsioon on

$$f_{T_q}(t) = \begin{cases} 1-\rho & t = 0 \\ \rho(\nu(1-\rho))e^{-\nu(1-\rho)t} & t > 0. \end{cases}$$

Siit edasi lähtume dispersiooni üldvalemist juhuslike suuruste jaoks. Arvestades $T_q$ jaotust, saame, et

$$DT_q = \int_0^\infty t^2 f_{T_q}(t)dt - (ET_q)^2 = \frac{2\rho}{(\nu(1-\rho))^2} - \frac{\rho^2}{(\nu(1-\rho))^2} = \frac{\rho(2-\rho)}{(\nu(1-\rho))^2}.$$

$\square$

Tulemus $DT_q$ kohta on autori sõnastatud ja tõestatud.

Sellega oleme esitanud kõikide huvipakkuvate suuruste valemid koos tuletusega $M/M/1$ süsteemi jaoks. Järgnevate süsteemide puhul anname ainult valemi ilma täieliku tuletuseta, kuna kõigi valemite tuletamine jääb bakalaurerusetöö mahust välja.

## 2.2 Järjekorrasüsteem $M/M/\infty$

Järgnev osa põhineb L. Kleinrocki raamatu [3] lehekülgedel 100–101.

$M/M/\infty$ süsteem käitub väga saranaselt $M/M/1$ süsteemile, ent ainus erinevus on see, et teenindajate arv ei ole piiratud. Kuigi see süsteem on ainult teoreetiline, sest ei ole võimalik korraga teenindada lõpmatut arvu kliente, on selle süsteemi uurimine kasulik selliste süsteemide jaoks, kus teenindajaid on palju rohkem, kui kliente olla saab, näiteks veebiteenus, mida külastavad ainult kümme või vähem klienti korraga, kuid süsteem oleks suuteline vastu pidama ka kümnete kui mitte sadade tuhandete klientide korral. Teoreetilises mõttes on see järjekorrasüsteem tekke ja kao protsess, kus

$$\mu = \mu, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\nu_k = k\nu, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Seega kliendid sisenevad süsteemi konstantse intensiivsusega $\mu$, kuid süsteemist lahkumise intensiivsus kasvab baasintensiivsuse $\nu$ suhtes võrdeliselt klientide arvuga süsteemis. Sisuliselt tähendab see seda, et mida rohkem kliente korraga süsteemis on, seda kiiremini klient sealt lahkub. Tasakaaluolek on võimalik saavutada, kui $\frac{\mu}{\nu} < 1$. Kasutades tekke ja kao protsessi valemeid (2) ja (3), saame, et tasakaaluseisundi tõenäosused avalduvad kujul

$$p_n = p_0 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\mu}{\nu_k}\right) = p_0 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\mu}{k\nu}\right) = p_0 \frac{\mu^n}{\nu^n n!},$$
$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{\nu^k k!}} = \frac{1}{e^{\frac{\mu}{\nu}}} = e^{-\frac{\mu}{\nu}}.$$

Viimases võrduste ahelas kasutasime eksponentfunktsiooni Taylori rida, $f(x) = e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Kuna nüüd teame järjekorrasüsteemi tõenäosuslikku jaotust, saame seda kasutades leida kõik ülejäänud huvitavad suurused.

**Lemma 2.2.1** Tähistagu $X$ klientide arv $M/M/\infty$ süsteemis. Siis kehtivad

$$EX = \frac{\mu}{\nu}$$

ja

$$DX = \frac{\mu}{\nu}.$$

Tulemus $EX$ kohta on olemas ka Kleinrock'i raamatus [3, lk 101]. Lemma tõestus on analoogne lemma (2.1.1) tõestusele, ent tuleb jälgida vaid vastavat $p_k$ jaotust.

Kasutades sarnast Little'i valemiga (7) tuletuskäiku nagu $M/M/1$ süsteemi puhul (8), saaks tõestada järgmise lemma:

**Lemma 2.2.2** Olgu $T$ järjekorrasüsteemis $M/M/\infty$ veedetud aeg. Siis kehtivad

$$ET = \frac{1}{\nu}$$

ja

$$DT = \frac{1}{\nu^2}.$$

Tulemus $ET$ kohta on välja toodud ka Kleinrock'i raamatus [3, lk 101]. Teine võimalik arutelu selle tõestamiseks on arusaamine, et kui $M/M/\infty$ süsteemi puhul klient satub süsteemi, siis hakatakse teda kohe teenindama, mistõttu süsteemis on klient ainult teeninduspunktis ning lahkub sealt eksponentjaotuse (keskmisega $\frac{1}{\nu}$) kohaselt.

Kuna süsteemis on lõpmatu arv teenindajaid, siis ei saa süsteemi tekkida ka järjekorda, mistõttu defineerides sarnaselt $M/M/1$ süsteemiga $X_q = \max(X - \infty, 0)$, on näha, et viimane on alati 0. Seega $EX_q = DX_q = ET_q = DT_q = 0$ ning tinglike keskväärtuste ja süsteemis veedetud aja leidmine on võimatu, sest järjekorda ei saa süsteemis olla.

## 2.3 Järjekorrasüsteem $M/M/c$

Järgnev osa põhineb L. Kleinrocki raamatu [3] lehekülgedel 102–103.

Järjekorrasüsteem $M/M/c$ on selline, kus klientide saabumiste vaheline aeg on eksponentjaotusega ning ühe kliendi teenindamisele kuluv aeg on eksponentjaotusega (mõlemad protsessid on Markovi ahelad), kuid korraga on võimalik teenindada kuni $c \geq 1$ klienti (lisaks eeldatakse, et süsteemis saab korraga oodata lõpmatu arv kliente). See süsteem on inimeste jaoks üsna loomulik, sest puutume sellega kokku igapäevaselt näiteks toidupoodides või söögikohtades, ent selleks, et need teeindussüsteemid toimiksid täpselt nagu $M/M/c$ järjekord, peaks teenindusele ette seadma mõned piirangud.

Sisuliselt on tegu tekke ja kao protsessiga, kus

$$\mu_k = \mu, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\nu_k = \min(k\nu, c\nu).$$

Seega sarnaselt eelmise kahega tekib süsteemi uusi kliente konstantse intensiivsusega $\mu$, kuid kaointensiivsus kasvab lineaarselt baasparameetri $\nu$ suhtes, kui süsteemis on vähem kui $c$ klienti. Vastasel juhul on kaointensiivsus konstantselt $c\nu$ ehk peale mingit hetke kliente ei lahku süsteemist kiiremini, nii nagu on omane $M/M/\infty$ süsteemile. Tasub mainida, et süsteemis leidub tasakaaluolek parajasti siis, kui $\frac{\mu}{c\nu} < 1$. Tasakaaluseisundi tõenäosused avalduvad selle süsteemi jaoks järgmiselt (lähtume valemitest (2) ja (3)):

kui $k \leq c$, siis

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\mu_i}{\nu_{i+1}} = p_0 \frac{\mu^k}{k!\nu^k}.$$

Kui $k \geq c$, siis

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{c-1} \frac{\mu_i}{\nu_{i+1}} \prod_{j=c}^{k-1} \frac{\mu_j}{\nu_{j+1}} = p_0 \frac{\mu^k}{\nu^k} \frac{1}{c!c^{k-c}}.$$

Võttes viimased kaks võrdust kokku, saame, et

$$p_k = \begin{cases} p_0 \frac{(c\rho)^k}{k!} & k < c \\ p_0 \frac{\rho^k}{c!} c^c & k \geq c \end{cases},$$

kus $\rho = \frac{\mu}{c\nu}$. Algseisundi tõenäosuse $p_0$ leidmiseks võtame lõpmatu summa lahti kaheks ning saame, et

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \sum_{k=c}^{\infty} \frac{(c\rho)^k}{c!} \frac{1}{c^{k-c}}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}}.$$

Selleks, et leida teisi süsteemi kirjeldavaid suuruseid, uurime kõigepealt tõenäosust, et klient, kes süsteemi siseneb, satub järjekorda. Tähistame $p_q \coloneqq P\{\text{Satub järjekorda}\} = P\{X \geq c\}$. Saame, et

$$p_q = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \sum_{k=c}^{\infty} p_0 \frac{(c\rho)^k}{c!} \frac{1}{c^{k-c}} = p_0 \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} = \frac{\frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}}.$$

See valem on tuntud ka kui Erlang'i C valem.

Uurime edasi süsteemi kirjeldavaid suurusi. Tähtis on mainida, et kõik järgnevad tulemused on pärit paketist `queueing` [1]. Klientide arvuga seotud suurusi kirjeldab järgmine lemma.

**Lemma 2.3.1** Olgu $X$ klientide arv $M/M/c$ järjekorrasüsteemis ning $X_q$ järjekorra pikkus selles süsteemis ehk $X_q = \max(X - c, 0)$. Siis kehtivad

$$\begin{aligned} EX_q &= \frac{p_q \rho}{1-\rho}, \\ EX &= \frac{p_q \rho}{1-\rho} + \frac{\mu}{\nu}, \\ DX_q &= \frac{\rho p_q (1 + \rho - \rho p_q)}{(1-\rho)^2} \end{aligned}$$

ja

$$DX = DX_q + \frac{\mu}{\nu}(1 + p_q).$$

Kasutades Little'i valemit (7) ning sama argumentatsiooni nagu $M/M/1$ süsteemi puhul (8), saame sõnastada lemma.

**Lemma 2.3.2** Tähistagu $T$ süsteemis $M/M/c$ veedetud aega ning $T_q$ selle süsteemi järjekorras veedetud aega. Siis kehtivad

$$ET = \frac{EX}{\mu} = \frac{p_q}{c\nu(1-\rho)} + \frac{1}{\nu}$$

ja

$$ET_q = \frac{EX_q}{\mu} = \frac{p_q}{c\nu(1-\rho)}.$$

Näeme, et jääb kehtima $ET = ET_q + ES$ ehk keskmine süsteemis veedetud aeg on järjekorras veedetud aja ja teenindusaja keskmiste summa.

Selleks, et leida süsteemis veedetud aja dispersiooni, peame taas leidma veedetud aja jaotuse (nagu (11) puhul). Saab leida, et $F_T(t) = 1 + \frac{(\frac{\mu}{\nu} - c + 1 - p_q)e^{-\nu t} + p_q e^{-c\nu(1-\rho)t}}{(c - 1 - \frac{\mu}{\nu})}$ ning $F_{T_q}(t) = 1 - p_q e^{-c\nu(1-\rho)t}$. Eelnevad on saadud paketist `queueing` [1]. Võttes tuletise ning integreerides jaotusfunktsioone, saame tuletada järgmise tulemuse.

**Lemma 2.3.3** Olgu $T$ süsteemis $M/M/c$ veedetud aeg ning $T_q$ selle süsteemi järjekorras veedetud aeg. Nende dispersioonid avalduvad siis

$$DT = \frac{2p_q(1 - c^2(1-\rho)^2)}{(\frac{\mu}{\nu} + 1 - c)c^2(1-\rho)^2\nu^2} + \frac{2}{\nu^2} - (ET)^2$$

ja

$$DT_q = \frac{(2 - p_q)p_q}{\nu^2 c^2 (1-\rho)^2}.$$

Lisaks saame leida tingliku keskmise klientide arvu järjekorras tingimusel, et süsteemis on järjekord, ning tingliku keskmise järjekorras veedetud aja tingimusel, et peab järjekorras ootama.

**Lemma 2.3.4** Olgu $M/M/c$ järjekorrasüsteemi tinglikud juhuslikud suurused $X_{qq}$ ja $T_{qq}$ järgmised $X_{qq} = X_q|X_q > 0 = X_q|X > c$ ja $T_{qq} = T_q|T_q > 0$. Siis nende keskmised avalduvad

$$EX_{qq} = \frac{1}{(1-\rho)}$$

ja

$$ET_{qq} = \frac{1}{c\nu(1-\rho)}.$$

Sellega oleme ära vaadanud kõik järjekorrasüsteemid, kus eeldatakse, et ruum klientide jaoks on lõpmatu. Järgnevalt uurime sama käitumisega süsteeme, kuid nüüd saab korraga süsteemis oodata vaid lõplik arv kliente. Valemite tuletustes lähtume suuresti juba eelnevalt tehtust, kuid peame seda rakendama lõplikule summale.

## 2.4 Järjekorrasüsteem $M/M/1/K$

Järgnev osa põhineb L. Kleinrocki raamatu [3] lehekülgedel 103–105.

Nüüd keskendume sellistele süsteemidele, kus korraga saab süsteemis oodata vaid lõplik arv kliente – lõplikud järjekorrasüsteemid. Olgu meie süsteemis ülempiiriks $K$ klienti. Kehtima jääb see, et kliendid saabuvad järjekorrasüsteemi ning lahkuvad sealt Markovi ahela kohaselt. Lisaks uurides süsteemi $M/M/1/K$, on meil sarnaselt süsteemiga $M/M/1$ vaid üks teenindaja, kes kõiki kliente teenindab. Tasub mainida, et kui süsteemi peaks saabuma klient ning nägema süsteemis juba $K$ klienti, siis ei saa ta süsteemiga liituda, mistõttu läheb klient n-ö kaduma. Sisuliselt on n-ö ruumipiiranguga süsteemid käitumise poolest täpselt samad nagu lõpmatud süsteemid, ent peaaegu kõik summad on lõplikud, mis kohati lihtsustab suuruste leidmist.

Järjekorrasüsteem $M/M/1/K$ on kergesti kirjeldatav tekke ja kao protsessina, kus

$$\mu_k = \begin{cases} \mu & k < K \\ 0 & k \geq K \end{cases},$$

$$\nu_k = \nu \quad k = 1, 2, \ldots, K.$$

Siin näemegi, et peale seda hetke, kui süsteemis on $K$ klienti, on tekkeintensiivsus 0 ehk kliente ei saa juurde tekkida (kaointensiivsust see ei mõjuta, kuid pole mõtet vaadata ka olukorda, kus $k > K$). Kui süsteemis on kliente vähem kui $K$, siis on tekke- ja kaointensiivsused konstantselt $\mu$ ja $\nu$. Arvestades seda saame kergesti välja kirjutada tasakaaluseisundi tõenäosuste jaotuse, sest need avalduvad vahetult valemitest (2) ja (3). Saame, et

$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_{i-1}}{\nu_i} = p_0 \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^k, \quad k \leq K.$$

Selge on, et kui $k \geq K$ siis $\mu_k = 0$, mistõttu on $p_k = 0$, kui $k > K$. Kasutades seda saame, et

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{K} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^k} = \frac{1}{\frac{1-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{K+1}}{1-\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1-\frac{\mu}{\nu}}{1-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{K+1}}.$$

Viimane kehtib iga $\mu \neq \nu$ korral, sest leiame geomeetrilise jada $K+1$ esimese liikme summa, mis on lõplik. Kui $\mu = \nu$, siis $p_0 = p_1 = \cdots = p_K = \frac{1}{K+1}$.

Kokkuvõttes saame, et

$$p_k = \begin{cases} \frac{1-\frac{\mu}{\nu}}{1-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{K+1}} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^k & 0 \leq k \leq K \\ 0 & k > K \end{cases}.$$

Järgnevalt vaatame süsteemi kirjeldavaid suurusi, kui $K > 1$. Järjekorrasüsteem $M/M/1$ on üks lihtsamaid süsteeme, millest aru saada, kuid selle suuruste valemite tuletamine on kohati tülikas, sest peab arvestama lõpmatute summadega. Süsteem $M/M/1/K$ on käitumiselt sama, ent selleks, et leida keskmist klientide arvu süsteemis, peame leidma vaid lõpliku summa väärtuse, mis on teoreetiliselt kergem, kuid tihti ei ole võimalik anda suurustele ühtset valemit kogu süsteemi jaoks (vaata valemit (4) või (5)), vaid tuleb piirduda tõenäosuste jaotusest $p_k$ sõltuva valemiga, sest need on arvutuse mõttes kergemad ja arusaadavamad. Järgnevad tõestused on läbi tehtud autori poolt. Tähistame $\frac{\mu}{\nu} = \rho$ ning vaatame järgmist lemmat.

**Lemma 2.4.1** Olgu $X$ järjekorrasüsteemi $M/M/1/K$ klientide arv ($X \in \{0, 1, \ldots, K\}$). Siis kehtivad valemid

$$EX = \frac{\rho(1 + K\rho^{K+1} - (K+1)\rho^K)}{(1-\rho^{K+1})(1-\rho)}$$

ja

$$DX = \sum_{k=0}^{K} k^2 \cdot p_k - \left(\frac{\rho(1 + K\rho^{K+1} - (K+1)\rho^K)}{(1-\rho^{K+1})(1-\rho)}\right)^2.$$

*Tõestus.* Lähtume keskväärtuse definitsioonist

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{K} k \cdot p_k = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \sum_{k=0}^{K} k\rho^k = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho \sum_{k=0}^{K} k\rho^{k-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho \sum_{k=0}^{K} \left(\rho^k\right)' \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho \left(\sum_{k=0}^{K} \rho^k\right)' = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho \left(\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\right)' \\
&= \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{K+1}} \cdot \frac{-(K+1)\rho^K(1-\rho) + 1 \cdot (1-\rho^{K+1})}{(1-\rho)^2} \\
&= \frac{\rho(1-\rho^{K+1} + (K+1)\rho^{K+1} - (K+1)\rho^K)}{(1-\rho^{K+1})(1-\rho)} = \frac{\rho(1 + K\rho^{K+1} - (K+1)\rho^K)}{(1-\rho^{K+1})(1-\rho)}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Selleks, et leida klientide arvu dispersiooni, lähtume taas teadmisest, et $DX = EX^2 - (EX)^2$. Nii saamegi, et

$$
DX = EX^2 - (EX)^2 = \sum_{k=0}^{K} k^2 \cdot p_k - \left(\frac{\rho(1 + K\rho^{K+1} - (K+1)\rho^K)}{(1-\rho^{K+1})(1-\rho)}\right)^2. \tag{13}
$$

□

Kuigi summat $\sum_{k=0}^{K} k^2 p_k$ on võimalik lihtsustada sarnaselt $M/M/1$ klientide arvu dispersiooni tuletusele (5), ei ole saadav kuju arvutuse mõttes kergem. Arusaadavam on leida lõpliku summa iga tegur ning need kokku liita. Samuti tasub märkida, et kui vaatame olukorda, kus $K \to \infty$, näeme, et $EX = \frac{\rho(1+K\rho^{K+1}-(K+1)\rho^K)}{(1-\rho^{K+1})(1-\rho)} \to \frac{\rho}{1-\rho}$, mis on $M/M/1$ süsteemi keskmine klientide arv. See ongi oodatav tulemust, sest $M/M/1$ järjekorrasüsteemis on ruumi lõpmata palju.

Täpselt samamoodi saame tuletada ka keskmise ja dispersiooni järjekorra pikkuse jaoks.

**Lemma 2.4.2** Tähistagu $X_q$ järjekorra pikkust $M/M/1/K$ süsteemis ehk $X_q = \max(X-1, 0)$. Siis kehtivad

$$
EX_q = \frac{\rho^2(1 + (K-1)\rho^K - K\rho^{K-1})}{(1+\rho^{K+1})(1-\rho)}
$$

ja

$$
DX_q = \sum_{k=1}^{K-1} k^2 \cdot p_{k+1} - \left(\frac{\rho^2(1 + (K-1)\rho^K - K\rho^{K-1})}{(1-\rho^{K+1})(1-\rho)}\right)^2.
$$

*Tõestus.* Keskväärtuse leidmisel lähtume definitsioonist

$$
\begin{aligned}
EX_q &= \sum_{k=1}^{K-1} k \cdot p_{k+1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \sum_{k=1}^{K-1} k\rho^{k+1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^2 \sum_{k=1}^{K-1} k\rho^{k-1} \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^2 \sum_{k=1}^{K-1} \left(\rho^k\right)' = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^2 \left(\sum_{k=1}^{K-1} \rho^k\right)' \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^2 \left(\sum_{k=0}^{K-1} \rho^k - 1\right)' = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^2 \left(\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - 1\right)' \\
&= \frac{(1-\rho)\rho^2}{1-\rho^{K+1}} \cdot \frac{-K\rho^{k-1}(1-\rho) + 1 - \rho^K}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2(1+(K-1)\rho^K - K\rho^{K-1})}{(1-\rho^{K+1})(1-\rho)}.
\end{aligned}
$$

Dispersioon avaldub

$$
DX_q = EX_q^2 - (EX_q)^2 = \sum_{k=1}^{K-1} k^2 \cdot p_{k+1} - \left(\frac{\rho^2(1+(K-1)\rho^K - K\rho^{K-1})}{(1-\rho^{K+1})(1-\rho)}\right)^2.
$$

□

Lisaks saab näidata, et $EX = EX_q + 1 - p_0$. Sarnaselt eelmise valemiga (13) on summat $\sum_{k=1}^{K-1} k^2 \cdot p_{k+1}$ võimalik lihtsustada, kuid see ei kergenda arvutusprotsessi ning kergem ja arusaadavam on leida lõplik summa. Siin on samuti näha, et kui $K \to \infty$, siis $EX_q = \frac{\rho^2(1+(K-1)\rho^K - K\rho^{K-1})}{(1+\rho^{K+1})(1-\rho)} \to \frac{\rho^2}{1-\rho}$, kus viimane on $M/M/1$ süsteemi keskmine järjekorra pikkus.

Vaadates keskmist süsteemis ja järjekorras veedetud aega, saame sõnastada järgmise lemma.

**Lemma 2.4.3** Olgu $T$ järjekorrasüsteemis $M/M/1/K$ veedetud aeg ning $T_q$ selle süsteemi järjekorras veedetud aeg. Kehtivad järgmised valemid nende keskmise leidmiseks:

$$
ET = \frac{EX}{\mu(1-p_K)}
$$

ja

$$
ET_q = \frac{EX_q}{\mu(1-p_K)}.
$$

*Tõestus.* Süsteemis ja järjekorras veedetud aja keskmise tuletamisel lähtume taas Little'i valemist (7), kuid peame lähemalt uurima, kuidas süsteemi kliente juurde tuleb. Me teame, et kui $k < K$, siis on tekkeintensiivsus $\mu$, vastasel juhul on see 0. Teame, et süsteemi saab kliente juurde saabuda $1-p_K$ osa ajast. Arvestades, et kitsendusega süsteemi tekkeintensiivsus on $\mu$, saame, et süsteemi saabuvad kliendid efektiivse tekkeintensiivsusega $\mu(1-p_K)$. Seda arvestades saamegi Little'i valemi (7) abil, et

$$ET = \frac{EX}{\mu(1-p_K)}$$

ja

$$ET_q = \frac{EX_q}{\mu(1-p_K)}.$$

□

Selleks, et leida süsteemis ning järjekorras veedetud aja dispersiooni, peame taas kord leidma nende jaotusfunktsiooni.

**Lemma 2.4.4** Olgu $T$ järjekorrasüsteemis $M/M/1/K$ veedetud aeg ning $T_q$ selle süsteemi järjekorras veedetud aeg. Nende suuruste dispersioonid on

$$DT = 2\int_0^\infty t(1-F_T(t))dt - (ET)^2$$

ja

$$DT_q = 2\int_0^\infty t(1-F_{T_q}(t))dt - (ET_q)^2,$$

kus $F_T(t) = 1 - \sum_{k=0}^{K-1} \frac{p_k}{1-p_K} e^{-\nu t} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\nu t)^i}{i!}$ ning $F_{T_q}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{K-2} \frac{p_{k+1}}{1-p_K} e^{-\nu t} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\nu t)^i}{i!}$.

Jaotusfunktsioonid on saadud paketi `queueing` [1] abiga.

Viimaseks uurime tinglikke keskväärtusi. Tingliku keskmise järjekorra pikkuse ning tingliku keskmise süsteemis veedetud aja tuletus ei erine eelnevatest (vaata valemeid (6) ja (10)).

**Lemma 2.4.5** Olgu $M/M/1/K$ süsteemi tinglikud juhuslikud suurused $X_{qq}$ ning $T_{qq}$ nii, et $X_{qq} = X_q | X_q > 0$ ja $T_{qq} = T_q | T_q > 0$. Siis

$$EX_{qq} = \frac{EX_q}{\rho(1-p_K-p_0)}$$

ja

$$ET_{qq} = \frac{EX_q}{\mu(1-p_K-p_0)}.$$

Kui nüüd $K = 1$, siis on olukord, kus süsteemis saab korraga viibida ainult see klient, keda teenindatakse ning kõik ülejäänud potentsiaalsed kliendid lähevad kaduma. Jäävad kehtima eelnevalt toodud valemid $EX$, $DX$, $ET$ ja $DT$ jaoks, kuid sarnaselt $M/M/\infty$ süsteemile $EX_q = DX_q = ET_q = DT_q = 0$ ning $EX_{qq}$ ja $ET_{qq}$ leidmine ei ole võimalik, sest sellises süsteemis ei ole järjekorda ehk $X_q = 0$ alati.

## 2.5 Järjekorrasüsteem $M/M/c/K$

Järgnevad tulemused on leitavad paketist `queueing` [1], kuid on autori poolt sõnastatud ja kohati tõestatud.

Jätkates süsteemidega, kus on korraga ruumi vaid lõplikule arvule klientidele, vaatame $M/M/c$ järjekorrasüsteemile vastavat lõplikku süsteemi. Süsteem käitub samamoodi nagu $M/M/c$ ehk kaointensiivsus suureneb lineaarselt, kui süsteemis on vähem kui $c$ klienti ning ta on konstantselt $c\nu$, kui süsteemis on rohkem kui $c$ klienti. Suurim erinevus on selles, kuidas kliendid süsteemi saabuvad. Kui süsteemis on vähem kui $K$ klienti, saabuvad uued kliendid intensiivsusega $\mu$, vastasel juhul on saabumise intensiivsus $\mu_{K+a} = 0, \quad a \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Järgides neid intensiivsusi, võime kirja panna, et $M/M/c/K$ on tekke ja kao protsess, kus

$$\mu_k = \begin{cases} \mu & k < K \\ 0 & k \geq K \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\nu_k = \begin{cases} k\nu & k < c \\ c\nu & k \geq c \end{cases}, k = 1, 2, 3, \dots.$$

Ilmne on, et süsteemid, kus $c > K$, on ebamõistlikud, sest siis on süsteemi on võimeline teenindama rohkem inimesi, kui sinna mahuks kliente, mistõttu osad teenindajad jäävad sisuliselt tööta ehk ressurss läheb raisku. Seetõttu vaatame ainult süsteeme, kus $c \leq K$.

Arvestades defineeritud tekke ja kao protsessi ning teades tekke ja kao protsessi tasakaaluseisundite valemeid (2) ja (3), saame välja kirjutada, et

kui $k \leq c$, siis

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\mu_i}{\nu_{i+1}} = p_0 \frac{\mu^k}{k!\nu^k}.$$

Kui $k \geq c$, siis

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{c-1} \frac{\mu_i}{\nu_{i+1}} \prod_{j=c}^{k-1} \frac{\mu_j}{\nu_{j+1}} = \begin{cases} p_0 \frac{\mu^k}{\nu^k} \frac{1}{c!c^{k-c}} & c \leq k \leq K \\ 0 & k > K \end{cases}.$$

Tähistades $\rho = \frac{\mu}{c\nu}$, võime mõlemad tingimused kirja panna ühte võrdusesse

$$p_k = \begin{cases} p_0 \frac{(c\rho)^k}{k!} & k < c, \\ p_0 \frac{\rho^k}{c!} c^c & c \leq k \leq K \\ 0 & k > K \end{cases}.$$

Selleks, et leida algseisundi tõenäosust $p_0$, lähtume taas teadmisest, et $\sum_{k=0}^{K} p_k = 1$. Saame, et

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \sum_{k=c}^{K} \frac{\rho^k}{c!} c^c} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{\rho^c c^c}{c!} \sum_{k}^{K-c} \rho^k} \\ &= \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{\rho^c c^c}{c!} \frac{1 - \rho^{K-c+1}}{1 - \rho}} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(\rho^c - \rho^{K+1}) c^c}{c!(1-\rho)}}. \end{aligned}$$

Kuigi summat $\sum_{k=1}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!}$ on võimalik lihtsustada, ei muuda see seda summat kuigi palju kergemaks, mistõttu jätame selle muutmata.

Kuna tasakaaluseisundite tõenäosused ei ole arvutuslikult ilusad, siis ei ole seda ka neist tuletatavad suurused, mistõttu ei hakka me lõplikuid summasid teisendama, nii nagu tegime $M/M/1$ süsteemi ja $M/M/1/K$ süsteemi puhul (vaata lemmad 2.1.1 ja 2.4.1). Alustuseks vaatame olukorda, kus $c < K$. Võime kirja panna järgmise lemma.

**Lemma 2.5.1** Olgu $X$ järjekorrasüsteemi $M/M/c/K$ klientide arv süsteemis ($X \in \{0, 1, \ldots, K\}$). Siis

$$EX = \sum_{k=0}^{K} k p_k$$

ja

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \sum_{k=0}^{K} k^2 p_k - (\sum_{k=0}^{K} k p_k)^2.$$

*Tõestus.* Tulemused tulevad vahetult keskväärtuse ning dispersiooni definitsioonist. □

Samamoodi ei ole mõttekas lihtsustada ka järjekorra pikkusega seotud suuruseid. Seda näitab järgmine lemma.

**Lemma 2.5.2** Tähistagu $M/M/c/K$ süsteemis juhuslik suurus $X_q$ järjekorra pikkust süsteemis. Siis $X_q = \max(X - c, 0)$ ning kehtib

$$EX_q = \sum_{k=1}^{K-c} k p_{k+c}$$

ja

$$DX_q = EX_q^2 - (EX_q)^2 = \sum_{k=1}^{K-c} k^2 p_{k+c} - (\sum_{k=1}^{K-c} k p_{k+c})^2.$$

*Tõestus.* Taas tulevad tulemused vahetult diskreetse juhusliku suuruse keskväärtuse ja dispersiooni definitsioonist. □

Süsteemis ja järjekorras veedetud aja keskmisi kirjeldab järgmine lemma.

**Lemma 2.5.3** Olgu $T$ järjekorrasüsteemis $M/M/c/K$ veedetud aeg ning $T_q$ selle süsteemi järjekorras veedetud aeg. Kehtivad valemid

$$ET = \frac{EX}{\mu(1 - p_K)}$$

ja

$$ET_q = \frac{EX_q}{\mu(1 - p_K)}.$$

*Tõestus.* Tõestus on analoogne lemma 2.4.3 tõestusele. □

Selleks, et uurida järjekorras veedetud aja dispesiooni, peame taas leidma $T_q$ jaotusfunktsiooni, sarnaselt valemile (11). Saab leida, et $F_{T_q}(t) = 1 - \sum_{k=c}^{K-1} \frac{p_k}{1 - p_K} e^{-c\nu t} \sum_{i=0}^{k-c} \frac{(c\nu t)^i}{i!}$. Viimane on saadud paketist `queueing` [1]. Järjekorras veedetud aja dispersioon on toodud järgmises lemmas.

**Lemma 2.5.4** Olgu $T_q$ järjekorrasüsteemis $M/M/c/K$ järjekorras veedetud aeg. Siis

$$DT_q = 2 \int_0^{\infty} t(1 - F_{T_q}(t))dt - (ET_q)^2,$$

kus $F_{T_q}(t) = 1 - \sum_{k=c}^{K-1} \frac{p_k}{1 - p_K} e^{-c\nu t} \sum_{i=0}^{k-c} \frac{(c\nu t)^i}{i!}$.

Viimaseks vaatame tinglikke keskmisi.

**Lemma 2.5.5** Olgu $M/M/c/K$ süsteemi tinglikud juhuslikud suurused $X_{qq}$ ja $T_{qq}$ järgmised $X_{qq} = X_q|X_q > 0 = X_q|X > c$ ja $T_{qq} = T_q|T_q > 0$. Siis nende keskmised avalduvad

$$EX_{qq} = \frac{EX_q}{\rho \sum_{k=c}^{K-1} p_k}$$

ja

$$ET_{qq} = \frac{EX_q}{\mu \sum\limits_{k=c}^{K-1} p_k}.$$

Kui $c = K$, siis sarnaselt $M/M/1/K$ süsteemiga on meil olukord, kus süsteem saab teenindada täpselt nii palju kliente, kui seal ooteruumi on. Kehtima jäävad $EX, DX, ET$ valemid, ent sarnaselt $M/M/1/K$ süsteemile on ilmne, et selles süsteemis ei saa järjekorda olla, sest $X_q = \max(X - c, 0) = 0$, sest $X \in \{0, 1, \ldots, K\}$ ehk $X - K \leq 0$. Seega $EX_q = DX_q = ET_q = DT_q = 0$ ning tinglikke keskmisi ei saa leida, sest järjekorras ootamise ja olemise tõenäosused on 0.

## 2.6 Järjekorrasüsteem $M/M/c/K/K$

Järgnevad tulemused on leitavad paketist `queueing` [1], kuid on autori poolt sõnastatud ja kohati tõestatud.

Viimane süsteem, mida töös tutvustatakse, on käitumiselt sama nagu eelnev $M/M/c/K$ süsteem, kuid lisaks tehakse eeldus, et kliente, kes süsteemi külastada soovivad, on $K$ tükki ehk sama palju, kui süsteemis ruumi on. Eelnevalt oleme eeldanud, et populatsioon (potentsiaalsete klientide arv) on lõpmatu, ent nüüd seame ka sellele piirangu. Võimalik on uurida süsteeme, kus populatsioon on mõnevõrra suurem kui järjekorrasüsteemi ruumipiirang, kuid $M/M/c/K/K$ süsteemidest on praktikas palju rohkem kasu.

Populatsiooni piirang mõjutab süsteemi tekkeintensiivsust, sest kui meil on süsteemis juba $k$ klienti, siis süsteemi juurde saab tulla vaid $K - k$ potentsiaalset klienti (kaointensiivsus selles süsteemis ei erine $M/M/c/K$ omast). Seda kasutades võime välja kirjutada, et $M/M/c/K/K$ järjekorrasüsteem on tekke ja kao protsess, kus

$$\mu_k = \begin{cases} (K-k)\mu & 0 \leq k < K \\ 0 & k \geq K \end{cases},$$

$$\nu_k = \begin{cases} k\nu & 0 \leq k < c \\ c\nu & c \leq k \leq K \end{cases}.$$

Kasutades valemeid (2) ja (3) saame, et

kui $k \leq c$

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\mu_i}{\nu_{i+1}} = p_0 \frac{K! \mu^k}{k!(K-k)! \nu^k} = p_0 \binom{K}{k} \frac{\mu^k}{\nu^k},$$

kus $\binom{K}{k}$ näitab kombinatsioonide arvu.

Kui $K \geq c$, siis

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{c-1} \frac{\mu_i}{\nu_{i+1}} \prod_{j=c}^{k} \frac{\mu_j}{\nu_{j+1}} = \begin{cases} \frac{K!}{(K-k)!c!c^{k-c}} \frac{\mu^k}{\nu^k} p_0 & c \leq k \leq K \\ 0 & k > K. \end{cases}$$

Asendades, sarnaselt eelmise süsteemiga, $\rho = \frac{\mu}{c\nu}$, võime kirja panna, et

$$p_k = \begin{cases} \binom{K}{k} (c\rho)^k p_0 & k < c \\ \frac{K!\rho^k c^c}{(K-k)!c!} p_0 & c \leq k \leq K \\ 0 & k > K. \end{cases}$$

Kasutades taas teadmist, et $\sum_{k=0}^{K} p_k = 1$, siis saame, et

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \binom{K}{k} (c\rho)^k + \sum_{k=c}^{K} \frac{K!\rho^k c^c}{(K-k)!c!}}.$$

Kuna mõlemad summad sisaldavad summast sõltuvat faktoriaali ning geomeetrilist jada, siis murru nimetaja lihtsustamine ei aitaks $p_0$ arvutamist ning antud kujul on arusaadavam ning kergem seda arvutada.

Vaadates süsteemi kirjeldavaid suurusi ning asjaolu, et tasakaaluseisundite tõenäosuste jaotus on raskelt lihtsustuv, siis anname suurused sarnasel kujul nagu $M/M/c/K$ süsteemis. Alustuseks vaatame taas olukorda, kus $c < K$.

**Lemma 2.6.1** Tähistagu $X$ järjekorrasüsteemi $M/M/c/K/K$ klientide arvu ($X \in \{0, 1, \ldots, K\}$). Siis

$$EX = \sum_{k=0}^{K} k p_k$$

ja

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \sum_{k=0}^{K} k^2 p_k - (\sum_{k=0}^{K} k p_k)^2.$$

*Tõestus.* Tulemused tulevad vahetult keskväärtuse ning dispersiooni definitsioonist. $\square$

Sama olukord on ka järjekorra pikkusega seotud suurustega.

**Lemma 2.6.2** Olgu $M/M/c/K/K$ süsteemis juhuslik suurus $X_q$, mis näitab süsteemi järjekorra pikkust. Siis $X_q = \max(X - c, 0)$ kehtivad järgmised valemid:

$$EX_q = \sum_{k=1}^{K-c} kp_{k+c}$$

ja

$$DX_q = EX_q^2 - (EX_q)^2 = \sum_{k=1}^{K-c} k^2 p_{k+c} - (\sum_{k=1}^{K-c} kp_{k+c})^2.$$

*Tõestus.* Taas tulevad tulemused vahetult keskväärtuse ja dispersiooni definitsioonist. $\square$

Keskmise süsteemis ning järjekorras veedetud aja leidmisel ei ole vaja samuti käituda erinevalt.

**Lemma 2.6.3** Olgu $T$ järjekorrasüsteemis $M/M/c/K/K$ veedetud aeg ning $T_q$ selle süsteemi järjekorras veedetud aeg. Kehtivad valemid

$$ET = \frac{EX}{\mu(K - EX)}$$

ja

$$ET_q = \frac{EX_q}{\mu(K - EX)}.$$

*Tõestus.* Teame, et $k$-s klient saabub süsteemi intensiivsusega $(K - k)\mu = (K - X)\mu$ (kuna $X$ näitab klientide arvu süsteemis, mistõttu sel hetkel $X = k$). Võttes viimasest keskmise, saame, et klient saabub süsteemi keskmiselt efektiivse intensiivsusega $E((K - X)\mu) = \mu(K - EX)$. Seega $\lambda_a = \mu(K - EX)$. Edasi on tõestus analoogne $M/M/1/K$ süsteemi lemmale 2.4.3. $\square$

Avaldades sarnasel viisil nagu valemi (11) puhul, saab leida, et $F_{T_q}(t) = 1 - \sum_{k=c}^{K} \frac{p_k(K - (k - 1))}{K - EX} \sum_{i=0}^{k-c} \frac{(c\nu t)^i}{i!} e^{-c\nu t}$. Viimane on saadud paketist `queueing` [1]. Sarnaselt $M/M/c/K$ süsteemiga (lemma 2.5.4) saame sõnastada lemma.

**Lemma 2.6.4** Olgu $T_q$ järjekorrasüsteemi $M/M/c/K/K$ järjekorras veedetud aeg. Siis kehtib, et

$$DT_q = 2\int_0^\infty t(1 - F_{T_q}(t))dt - (ET_q)^2,$$

kus $F_{T_q}(t) = 1 - \sum_{k=c}^{K} \frac{p_k(K-(k-1))}{K-EX} \sum_{i=0}^{k-c} \frac{(c\nu t)^i}{i!} e^{-c\nu t}$.

Viimasena vaatame taas tinglikku keskmist järjekorra pikkust tingimusel, et järjekord on olemas, ning tinglikku keskmist järjekorras veedetud aega tingimusel, et peab ootama järjekorras.

**Lemma 2.6.5** Olgu $M/M/c/K/K$ süsteemi tinglikud juhuslikud suurused $X_{qq}$ ja $T_{qq}$, kus $X_{qq} = X_q|X_q > 0 = X_q|X > c$ ja $T_{qq} = T_q|T_q > 0$. Siis nende keskmised avalduvad

$$EX_{qq} = \frac{EX_q}{\rho(K - EX - (\sum_{k=0}^{c-1} p_k(K-(k-1)))}$$

ja

$$ET_{qq} = \frac{EX_q}{\mu(K - EX - (\sum_{k=0}^{c-1} p_k(K-(k-1)))}.$$

Eelneva kahe lemma sõnastus põhineb paketil `queueing` [1].

Kui nüüd $c = K$, siis sarnaselt $M/M/1/K$ ja $M/M/c/K$ süsteemidega, on järjekorra pikkus $X_q = \max(X - c, 0) = 0$, sest alati on $X - K \leq 0$, mistõttu $EX_q = DX_q = ET_q = DT_q = 0$ ning tinglikke keskmisi ei ole võimalik leida. Kehtima jäävad $EX$, $DX$, $ET$ ja $DT$ valemid.

Sellega on kõik töö praktilises osas kasutatavad süsteemid tutvustatud ning antud on ka neid kirjeldavate suuruste valemid. Järgmisena vaatame töö praktilist osa.

# 3 Praktiline osa

Selles peatükis tutvustame selle töö peamist praktilist tulemust, milleks on rakendustarkvara R programm, mille abil on kergem lahendada eelmises peatükis kirjeldatud järjekorrasüsteeme. Peatüki lõpus tuuakse ka näidisülesanded ning nende näidislahendused nimetatud programmiga.

## 3.1 Programm

Programm põhineb suuresti rakendustarkvaras R juba olemasoleval paketil nimega `queueing` [1], [5]. Pakett ongi loodud järjekorrasüsteemide ja nendega seotud võrkude lahendamiseks ning seal on kõik meid huvitavate süsteemide arvutusvalemid juba implementeeritud. Ent selleks, et väljund vastaks meie teoreetilistele tähistustele ning oleks kasutajasõbralik, oli vaja luua programm, mis paketi väljundeid muudab ning vastavalt ka väljastab. Lisaks valiti ka sobilikud vaikeväärtused parameetritele.

Selleks, et lahendada (arvutada välja eelmises peatükis toodud suurused) järjekorrasüsteem, on loodud eraldi funktsioon `Lahenda()`, mis võtab kasutajalt sisendiks kuni kuus parameetrit. Need parameetrid on

- Parameeter `JKSYS`, mis näitab, millist järjekorrasüsteemi lahendada soovitakse. Parameetri väärtuseks peaks olema süsteemi tähise lühendatud kuju (sõne) – $M/M/1$ süsteemi jaoks `MM1`, $M/M/\infty$ jaoks `MMInf`, $M/M/c$ jaoks `MMC` ning vastavad lõplikud süsteemid on `MM1K, MMCK, MMCKK`. Parameetri vaikeväärtuseks on `MM1`.
- Parameeter `mu`, mis näitab järjekorrasüsteemi tekkeintensiivsust (teoorias tähisega $\mu$). Parameetri väärtuseks oodatakse reaalarvu. Selle vaikeväärtuseks on 1.
- Parameeter `nu`, mis näitab järjekorrasüsteemi kaointensiivsust (teoorias tähisega $\nu$). Parameetri väärtuseks oodatakse reaalarvu. Selle vaikeväärtuseks on 2.
- Parameeter `c`, mis näitab järjekorrasüsteemi teenindajate arvu (teoorias tähisega $c$). Parameetri väärtuseks oodatakse naturaalarvu. Selle vaikeväärtuseks on 1.
- Parameeter `k`, mis näitab järjekorrasüsteemi ruumi piirangut (teoorias tähisega $K$). Parameetri väärtuseks oodatakse naturaalarvu. Selle vaikeväärtuseks on 1.
- Parameeter `n`, mille abil seatakse lõpmatute süsteemide puhul ülemine piir, milleni tasakaaluseisundi tõenäosusi arvutatakse. Parameetri väärtuseks oodatakse naturaalarvu või null.

Parameetri vaikeväärtuseks on 10. Eelnevad parameetrid kirjeldavad järjekorrasüsteeme, kuid see parameeter on rohkem seotud programmi endaga.

Lähtuvalt järjekorrasüsteemi tähisest (parameeter JKSYS) valib funktsioon kasutaja sisestatud väärtuste ja/või vaikeväärtuste seast järjekorrasüsteemi kirjeldavad parameetrid ning rakendab neile paketi `queueing` meetodeid, et lahendada soovitud järjekorrasüsteem. Tasub mainida, et lõplike süsteemide puhul lähtub funktsioon parameetrist $k$ ning parameetril $n$ ei ole seal mingit mõju, ning süsteemide jaoks, kus on teenindajad, tuleks parameeter $c$ vajadusel defineerida.

Funktsioon `Lahenda()` väljastab vastavalt järjekorrasüsteemile 16 või 17 elemendilise listi, mis sisaldab sisestatud parameetreid vastavate võtmetega, suurust $\rho$ (teenindajatega süsteemide korral $\rho = \frac{\mu}{c\nu}$ ($c$ on teenindajate arv), vastasel juhul $\rho = \frac{\mu}{\nu}$), arvutatavaid suurusi vastavate võtmetega ning tabelit (võtmeks on *tabel*), kus veergudes on seisundid, seisundis olemise tõenäosus $p_k$ ning kordaja $\frac{p_k}{p_0}$. Täies mahus on funktsioon `Lahenda()` ning tema abifunktsioonid nähtavad lisades 2 ja 3.

Abifunktsioonis `Koostalist()` on autor eraldi defineerinud valemid $M/M/c/K$ ning $M/M/c/K/K$ süsteemide järjekorra pikkuse dispersiooni arvutamiseks. Abifunktsioon `LeiaDT()` leiab $M/M/1/K$, $M/M/c/K$ ning $M/M/c/K/K$ süsteemide järjekorras veedetud aja dispersiooni ($M/M/1/K$ süsteemi korral ka süsteemis veedetud aja dispersioon). Töö käigus selgus, et paketis toodud R-i funktsioonides on tehtud vigu. Vigadest on paketi haldajat teavitatud ning samuti on talle saadetud parandusettepanekud.

## 3.2 Näited ja lahendused

Nüüd, kui teame, kuidas programm töötab, vaatame, kuidas seda kasutada, kui tuleks lahendada mõni järjekorrasüsteemidega seotud ülesanne.

Alustuseks vaatame kerget ülesannete $M/M/1$ süsteemiga. Järgmine ülesanne on pärit juhuslike protsesside ülesannete kogust (ülesanne 4.2 ülesannete kogus [4]). Ülesande tekst on järgmine:

**Ülesanne 3.2.1** Vaatleme järjekorrasüsteemi $M/M/1$, kus saabumiste intensiivsus on 5 isikut tunnis ja keskmine teenindusaeg on 10 minutit. Oletame, et süsteem on töötanud juba pikka aega (on tasakaalus). Leia

(a) keskmine järjekorra pikkus;

(b) tõenäosus, et järjekorda pole;

(c) tõenäosus, et järjekorras on 10 inimest.

Kuna me teame, kuidas $M/M/1$ süsteemi puhul $p_0$ ja $p_k$ avalduvad ning kuidas leida keskmist järjekorra pikkust, siis ülesande kirjalik lahendamine ei ole väga tülikas, kuid kasutades programmi, piisab järgmistest käskudest

```
systeem <- Lahenda(JKSYS="MM1",mu=5,nu=6,n=11)
```

Seejärel on ülesandele vastav süsteem lahendatud ning edasi saab leida vastused käskudega

```
a <- systeem$EXq
#4,1667
tabel <- systeem$tabel
b <- tabel[1,"Tõenäosused"]+ tabel[2,"Tõenäosused"]
#reas 1 on seisundile k=0 vastavad suurused
#0,3056
c <- 1 - sum(tabel[,"Tõenäosused"])#P(X>11) = 1-P(X <= 11)
#0,1122
```

Nii saamegi viie koodireaga selle sama ülesande lahendatud.

Töö käigus valminud tööriist on aga pigem suunatud õppejõududele ja praktikumide juhendajatele, kes peavad ülesandeid ise välja mõtlema ja läbi tegema. Ent kasutades seda tööriista, ei tule läbi teha pikki arvutusi, et saada mingi ettekujutus vastusest ning tänu sellele on praktikumides võimalik tudengeid õige vastuse poole suunata (tasub mainida, et programm ei asenda korrektse lahenduse läbitegemist, vaid pigem abistab lahenduse leidmist). Vaatame järgmisena autori välja mõeldud järjekorrasüsteemide ülesannet. Järgnevalt on toodud ülesande tekst.

**Ülesanne 3.2.2** Telefoni kiirparanduse töökojas on võimalik korraga parandada kuni nelja telefoni. Töökoda on väike ning seetõttu on seal võimalik korraga oodata kuni kuuel kliendil (kaasa arvatud need, kelle telefone parandatakse). Ajapikku on selgunud, et telefonide parandamiseks kuluv aeg on ekponentjaotusega ning keskmiselt läheb parandamisega 15 minutit (kõigi parandajate jaoks) ning töökoda külastab keskmiselt kuus klienti tunnis (saabumistevaheline aeg on eksponentjaotusega). Vaatame olukorda, kus töökoda on töötanud juba mõnda aega (on tasakaalus). Soovitakse teada

(a) keskmist järjekorra pikkust;

(b) järjekorra pikkuse hajuvust;

(c) kaua veedab klient keskmiselt töökojas aega (järjekorras ja parandust oodates);

(d) kui suure osa ajast ei parandata töökojas telefone;

(e) kui tihti läheb klient kaduma (ei saa süsteemi juurde tulla).

Selge on, et tegemist on $M/M/4/6$ süsteemiga ($c = 4, K = 6$), kus $\mu = 6$ ja $\nu = 4$. Ülesande lahenduseks piisab järgmistest koodiridadest

```
systeem <- Lahenda("MMCK", mu=6, nu=4, c=4, k=6)
a <- systeem$EXq
#0,0307
b <- sqrt(systeem$DXq)
#0,1931
c <- systeem$ET
#0,2552
tabel <- qm$tabel
d <- tabel[1,"Tõenäosused"]#Ei parandata, kui ei ole kliente
#0,2219
e <- tabel[7,"Tõenäosused"]#Kaduma läheb, kui on kuus klienti
#0,0066
```

Ainuüksi selleks, et leida $a$ ja $b$ osa lahendusi, tuleks leida kaks lõplikku (kuue liikmega) summat, rääkimata tõenäosusliku jaotuse leidmisest. See programm tegi aga kogu raske arvutustöö meie eest ära ning nüüd on meil ettekujutus sellest, millised need vastused olema peaks.

Viimaseks ülesandeks vaatame veel üht autori välja mõeldud ülesannet.

**Ülesanne 3.2.3** Vaatame suurettevõtte serveriruumi, kus on kuus serverit. Kõiki servereid kasutatakse, et kuvada ettevõtte veebilehte selle külastajatele. Ent tihti (keskmiselt iga nelja tunni tagant) tekib mõnes serveris tõrge ning neid tuleb parandada. Ettevõttes on kaks vastava hariduse ning töökogemusega inimest, kes suudavad servereid parandada (üht serverit saab parandada üks inimene). Teada on, et iga serveri tõrgetevaheline aeg on eksponentjaotusega ning nende paranduseks kuluv aeg on samuti eksponentjaotusega, keskmiselt kulub kaks tundi (mõlema parandaja puhul sama jaotusega). Ettevõte soovib ühe parandajatest vallandada ning selleks, et otsust teha, soovitakse teada, kui suure osa ööpäevast ei pea parandajad üldse tööd tegema, kui tihti on tööd ainult ühele parandajale ning kui palju tõuseb keskmine katkiste serverite arv (ööpäevas), kui tööl oleks vaid üks parandaja.

Vaadates servereid kui potentsiaalseid kliente, kes vajavad teenindamist, siis saame aru, et tegemist on $M/M/2/6/6$ süsteemiga, kus $\mu = \frac{1}{4}, \nu = \frac{1}{2}$ (ööpäevas tekib keskmiselt $\frac{24}{6} = 4$ tõrget ning ööpäevas saab parandada $\frac{24}{12} = 2$ serverit). Selleks, et antud süsteemi lahendada, piisab koodireast

```
systeem <- Lahenda("MMCKK",mu=24/4,nu=24/2,c=2,k=6)
```

Edasi teame, et kumbki tööline ei pea tööd tegema, kui ükski server ei ole katki, seega $p_0$ osa ajast. Selle leiame järgmiste koodiridade abil.

```
tabel <- systeem$tabel
p_0 <- tabel[1,"Tõenäosused"]#Tabeli reale 1 vastab seisund k=0
#0,0622
```

Ainult üht parandajat on vaja siis, kui ei ole midagi teha või ainult ühel serveril on tõrge. Saame selle leida järgmiselt.

```
p_1 <- tabel[2,"Tõenäosused"]
p_0+p_1
#0,2489
```

Selleks, et leida, kui palju erineb keskmine tõrgete arv, kui tööl oleks ainult üks parandaja, peame leidma $M/M/2/6/6$ ning $M/M/1/6/6$ (samad $\mu$ ja $\nu$) süsteemide keskmised klientide arvud. See on kergesti lahendatav programmi abil.

```
EX1 <- systeem$EX
#2,6223
systeem2 <- Lahenda("MMCKK", mu=24/4,nu=24/2,c=1,k=6)
EX2 <- systeem2$EX
#4,0242
EX2-EX1
#1,4019
```

Sellega oleme vastanud kõikidele ülesande küsimustele.

Oleme ära näidanud, milline on töö raames valminud programm, mida see väljastab ning kuidas neid väljundeid kasutada, et lahendada järjekorrasüsteemidega seotud ülesandeid. Saadud programm on abiks õppejõududele ning praktikumide juhendajatele, kes peavad välja mõtlema ja läbi lahendama uusi järjekorrasüsteemidega seotud ülesandeid.

# Kokkuvõte

Järjekorrad on juhuslikud protsessid, millel saab välja tuua teatud omadusi. Nende abil on võimalik kirjeldada süsteeme, kus on kindlad eeldused klientide käitumise, süsteemi sisenemise ning lahkumise kohta. Tihti võib olla nende süsteemide matemaatiline kirjeldamine küllaltki tülikas.

Antud töö andis teoreetilised teadmised selleks, et aru saada $M/M/\ldots$ tüüpi järjekorrasüsteemidest ehk järjekordadest, kus klientide sisenemiste vaheline aeg ning nende teenindusaeg on eksponentjaotusega.

Töö eesmärk oli anda ülevaade kuuest $M/M/\ldots$ tüüpi järjekorrast ning samuti tuua välja neid järjekordi kirjeldavaid suurusi. Need suurused said $M/M/1$ süsteemi puhul täielikult tuletatud ning tõestatud ning teiste süsteemide juures toodi tulemused esile.

Kui süsteemid olid kirjeldatud, loodi rakendustarkvara R [5] ning selles oleva paketi `queueing` [1] abil programm, mille abil on võimalik iga töös käsitletud $M/M/\ldots$ süsteemi lahendada ehk leida tasakaaluseisundite tõenäouste jaotus ning arvutada jaotusest tulenevad kirjeldavad suurused.

Saadud programmi demonstreeriti ning katsetati kolmel erineval ülesandel, mis on pärit aine „Juhuslikud protsessid" praktikumi materjalidest või on autori enda välja mõeldud. Kuna autori välja mõeldud ülesannete lahendamine ei osutunud probleemiks, siis on loodud tööriist hea abiline praktikumide materjalide ja kontrolltööde koostamisel.

# Kasutatud kirjandus


[1] Canadilla, Pedro. 2019. *Analysis of Queueing Networks and Models.* https://cran.r-project.org/web/packages/queueing/queueing.pdf (viimati vaadatud 14.05.2020)

[2] Harrison, Peter G. 1993. *Response Time Distributions in Queueing Network Models.* Performance Evaluation of Computer and Communication Systems, toimetanud Lorenzo Donatiello ja Randolph Nelson, 729:147–64. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/BFb0013852.

[3] Kleinrock, Leonard. 1975. *Queueing Systems: Volume I-Theory.* https://doi.org/10.2307/2285630.

[4] Pärna, Kalev ja Käärik, Meelis. 2019. *Juhuslikud protsessid (MTMS.02.003). Praktikumiülesanded.* https://courses.ms.ut.ee/MTMS.02.003/2019_fall/uploads/Main/juhprotsessid_prax.pdf (viimati vaadatud 14.05.2020)

[5] R Core Team. 2020. *R: A language and environment for statistical computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. https://www.R-project.org/.

[6] Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models.* 10th ed, Academic Press.

# Lisad

## Lisa 1. Eksponentjaotuse karakteristlik omadus

**Lemma 4.1.1** (**Eksponentjaotuse karakteristlik omadus**) Pidev juhuslik suurus $T$ on eksponentjaotusega $T \sim Exp(\lambda)$ parajasti siis, kui $\mathbf{P}\{T \geq t + s | T \geq s\} = \mathbf{P}\{T \geq t\}$ [6, lk 294].

## Lisa 2. `Lahenda()` funktsioon

```
library(queueing)
Lahenda <- function(JKSYS="MM1",mu=1, nu=2,c=1,k=1,n=10){#vaikeväärtus
  kasktekst <- paste("NewInput.",JKSYS,sep="")
  kask <- match.fun(kasktekst)
  df <- NULL
  loplik <- FALSE
  teenindajad <- FALSE
  if(grepl("K",JKSYS)){
    loplik <- TRUE
  }
  if(grepl("C",JKSYS)){
    teenindajad <- TRUE
  }
  if(loplik){
    if(teenindajad){
      if(c > k){
        print("Vigane c või k parameeter (c>k). Teenindajaid on rohkem kui ruumi.")
        return(NULL)
      }else{
      M <- kask(lambda = mu, mu = nu,c=c,k=k)}
    }else{
      M <- kask(lambda = mu, mu = nu, k=k)
    }
  }else{
    if(teenindajad){
      if(mu >= c*nu){
```

```
        print("Vigane mu, c või nu parameeter (mu >= c*nu). Järjekorrasüsteem ei
koondu.")
        return(NULL)
      }else{M <- kask(lambda = mu, mu = nu,c=c,n=n)}
    }else{
      if(mu >= nu){
        print("Vigane mu või nu parameeter (mu >= nu). Järjekorrasüsteem ei koondu.")
        return(NULL)
      }else{M <- kask(lambda = mu, mu=nu,n=n)}
      }
  }
  JKM <- QueueingModel(M)
  tabel <- Koostatabel(JKM=JKM,loplik=loplik)
  valja <- Koostalist(JKM=JKM,tabel=tabel,JKSYS=JKSYS)
  return(valja)
}
```

## Lisa 3. Lahenda() funktsiooni abifunktsioonid

```
Koostatabel <- function(JKM,loplik){
  sisend <- Inputs(JKM)
  if(loplik){
    seisundid <- 0:sisend$k
  }else{
    seisundid <- 0:sisend$n
  }
  tn <- Pn(JKM)
  df <- as.data.frame(matrix(c(seisundid,tn),ncol=2))
  colnames(df) <- c("Seisundid","Tõenäosused")
  df["Kordaja"] <- df[,"Tõenäosused"]/df[1,"Tõenäosused"]
  return(df)
}
Koostalist <- function(JKM,tabel,JKSYS){
  sisse <- Inputs(JKM)
  if(is.element("method",names(sisse))){
```

```
    sisse["method"] <- NULL
  }
  names(sisse)[1:2] <- c("mu","nu")
  if(JKSYS == "MMC" || JKSYS == "MMCK" || JKSYS == "MMCKK"){
    ro <- sisse$mu/(sisse$c*sisse$nu)
  }
  else{
    ro <- sisse$mu/sisse$nu
  }
  EX <- L(JKM)
  EXq <- Lq(JKM)
  EXqq <- Lqq(JKM)
  DX <- VN(JKM)
  if(JKSYS == "MMCK" || JKSYS == "MMCKK"){
    DXq <- sum(c(rep(0,sisse$c+1),1:(sisse$k-sisse$c))^2*
        tabel[,"Tõenäosused"])-(EXq^2)
  }else{
    DXq <- VNq(JKM)
  }
  ET <- W(JKM)
  ETq <- Wq(JKM)
  ETqq <- Wqq(JKM)
  Disp <- LeiaDT(JKM,tabel,JKSYS,sisse)
  DT <- Disp$DT
  DTq <- Disp$DTq
  koos <- list(JKSYS = JKSYS,Ro = ro, EX=EX,EXq =EXq,EXqq=EXqq,
    DX=DX,DXq=DXq,ET=ET,ETq=ETq,ETqq =ETqq,DT=DT,DTq=DTq,tabel=tabel)
  return(c(sisse,koos))
}
LeiaDT <- function(JKM,tabel,JKSYS,sisse){
  ET <- W(JKM)
  ETq <- Wq(JKM)
    if(JKSYS == "MM1K"){
      Pn <- tabel[,"Tõenäosused"]
      Qn <- Pn[seq(1, sisse$k, 1)]/(1 - Pn[sisse$k + 1])
```

```
FW <- function(t) {
  aux <- function(i) {
    Qn[i] * ppois(i - 1, sisse$nu * t)
  }
  1 - sum(sapply(seq(1, sisse$k, 1), aux))
}
if (sisse$k == 1)
  FWq <- function(t) {
    0
  }
else {
  FWq <- function(t) {
    aux <- function(i, t) {
      Qn[i + 1] * ppois(i - 1, sisse$nu * t)
    }
    1 - sum(sapply(seq(1, sisse$k - 1, 1), aux, t))
  }
}
xFWc <- function(t) {
  t*(1-Vectorize(FW)(t))
}
xFWqc <- function(t) {
  t*(1-Vectorize(FWq)(t))
}
FWInt <- integrate(xFWc, 0, Inf)
if (FWInt$message == "OK"){
  DT <- (2 * FWInt$value) - (ET^2)
}else{
  DT <- NA
}
if(sisse$k == 1){
  DTq <- 0
}else{
  FWqInt <- integrate(xFWqc, 0, Inf)
  if (FWqInt$message == "OK"){
```

```
      DTq <- (2 * FWqInt$value) - (ETq^2)
    }else {DTq <- NA}
  }
} else if(JKSYS == "MMCK"){
  DT <- NA
  Pn <- tabel[,"Tõenäosused"]
  Qn <- Pn[seq(1, sisse$k, 1)]/(1 - Pn[sisse$k + 1])
  auxFwq <- function(n, t) {
    Qn[n] * ppois(n - sisse$c - 1, sisse$c * sisse$nu * t)
  }
  if (sisse$c == sisse$k)
    FWq <- 0
  else FWq <- function(t) {
    1 - sum(sapply(seq(sisse$c + 1, sisse$k, 1), auxFwq, t))
  }
  xFWqc <- function(t) {
    t*(1-Vectorize(FWq)(t))
  }
  if (sisse$c == sisse$k){
    DTq <- 0
  }else {
    FWqInt <- integrate(xFWqc, 0, Inf)
    if (FWqInt$message == "OK"){
      DTq <- (2 * FWqInt$value) - (ETq^2)
    }else {DTq <- NA}
  }
} else if(JKSYS == "MMCKK"){
  DT <- NA
  EX <- L(JKM)
  Pn <- tabel[,"Tõenäosused"]
  QnAux <- function(n) {
    Pn[n] * (sisse$k - (n - 1))/(sisse$k - EX)
  }
  Qn <- sapply(1:sisse$k, QnAux)
  if (sisse$c == sisse$k){
```

```
        FWq <- function(t) {
          0
        }
      }else {
        FWq <- function(t) {
          aux <- function(n) {
            Qn[n + sisse$c] * ppois(n - 1, sisse$c * sisse$nu * t)
          }
          1 - sum(sapply(seq(1, sisse$k - sisse$c, 1), aux))
        }
      }
      xFWqc <- function(t) {
        t*(1-Vectorize(FWq)(t))
      }
      if (sisse$c == sisse$k){
        DTq <- 0
      }else {
        FWqInt <- integrate(xFWqc, 0, Inf)
        if (FWqInt$message == "OK"){
          DTq <- (2 * FWqInt$value) - (ETq^2)
        }else {DTq <- NA}
      }
    } else{
      DT <- VT(JKM)
      DTq <- VTq(JKM)
    }
    return(list(DT = DT,DTq = DTq))
}
```

**Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Artur Tuttar,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Järjekorrasüsteemide tutvustus ja lahendamine kasutades rakendustarkvara R", mille juhendaja on Meelis Käärik, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teose üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonnas, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Artur Tuttar
**18.05.2020**