

TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Füüsika instituut

**Kommentaare interaktsioonide toomisest Poincaré
algebrasse ja lainefunktsioonide katmisest**

Magistritöö (30 EAP)

Füüsika eriala

Priidik Gallagher

Juhendaja: Stefan Groote, PhD

Tartu 2020

Kommentaare interaktsioonide toomisest Poincaré algebrasse ja lainefunktsioonide katmisest

On teada, et minimaalselt interakteeruv Rarita-Schwingeri teooria on vastuoluline. „Dünaamiliste vastasmõjude“ meetodit on proovitud kasutada kooskõlalise kõrgema spinni teooria konstrueerimiseks, viies interaktsiooni kalibratsiooniväljaga puhtalt Poincaré algebrasse ja nii genereerides mitte minimaalse asenduse. Magistritöö käigus aga tehakse kindlaks „dünaamiliste vastasmõjude“ olemuslikud probleemid, mis takistavad sel saamast terviklikuks ja täielikuks kõrgema spinni teooriaks nii klassikalisel kui ka kvanttasemel: vastasmõju täpse kuju ja teooria õigsuse teadmine ainult tasalainelisel erijuhul, lagranžiaani kõrvalejätmine ja spiinorite kesksus. Pakutakse välja võimalikud, kuid kahjuks mitte lõpuni kindlad lahendusviisid kõigile probleemidele, uurides operaatorvõrrandeid, pseudodiferentsiaaloperaatoreid, mitmeväärtuselisi funktsioone, diferentsiaalvõrrandite diferentsiaalgeomeetrist teooriat, interaktsioonidega Diraci võrrandi lahendamist ja muud. Lõpuks selgub, milliseid uurimisküsimusi võiks edasi uurida nii „dünaamiliste vastasmõjude“ piires kui ka väljaspool seda.

Märksõnad: Spinn, Poincaré algebra, Rarita-Schwingeri teooria, Diraci võrrand, dünaamilised vastasmõjud.

CERCS: **P210** — Elementaarosakeste füüsika, kvantväljade teooria.

Comments on introducing interactions to the Poincaré algebra and covering wavefunctions

It is known that the minimally interacting Rarita-Schwinger theory is inconsistent. The method of “Dynamical interactions” has been used to attempt to create a consistent higher spin theory by introducing the gauge field interactions purely into the Poincaré algebra and thus generating a nonminimal coupling. In the thesis, however, the fundamental issues of the “dynamical interactions” are identified, that prevent it from becoming a complete higher spin theory: knowing the precise form of interactions and the theory’s correctness only in the plane-wave case, neglecting the Lagrangian and strong spinor bias. Several possible, although not fully certain, solution methods are proposed for all problems, investigating operator equations, pseudodifferential operators, multivalued functions, the differential geometric theory of differential equations, solving the interacting Dirac equation, and more. Ultimately, possible avenues of investigation both in “dynamical interactions” and outside of it are considered.

Keywords: Spin, Poincaré algebra, Rarita-Schwinger theory, Dirac equation, dynamical interactions.

CERCS: **P210** — Elementary particle physics, quantum field theory.

Sisukord

Sissejuhatus	7
1 Rarita-Schwingeri teooria ja dünaamilised vastasmõjud	9
1.1 Rarita-Schwingeri teooria	9
1.2 Probleemid interakteerivas Rarita-Schwingeri teoorias	11
1.3 Dünaamilised vastasmõjud	13
1.3.1 Dünaamiliste vastasmõjude ülesehitus	13
1.3.2 Volkovi lahend	15
1.3.3 Probleemid dünaamiliste vastasmõjude konstruktsioonis	18
2 Lagranžiaani olemasolust, leidmisest ja tarvilikkusest	21
2.1 Tarvilikud ja piisavad tingimused lagranžiaani olemasoluks	22
2.1.1 Helmholtzi tingimused	23
2.1.2 Anderson-Duchamp-Krupka võrrandid	24
2.2 Vainberg-Tonti lagranžiaan	26
2.3 Lagranžiaani tarvilikkusest kvantväljateoorias	28
3 Interaktsioonioperaatori üldistamine	32
3.1 Dünaamiliste vastasmõjude madalaspinniline kooskõla	32
3.1.1 Sylvesteri võrrand	33
3.2 Wilsoni jooned	36
3.2.1 Wilsoni joonte teooria alused	37
3.2.2 Mandelstami tingimus	38
3.2.3 Wilsoni joontega seotud tuletised	39
3.3 Pseudodiferentsiaaloperaatorid	41
3.3.1 Pseudodiferentsiaaloperaatorite teooria alged	41
3.3.2 Eksponentsiaalne <i>ansatz</i>	43
3.4 Alternatiivsed meetodid	46
3.4.1 Algebralised muudatused	47
3.4.2 Greeni funktsiooni meetod	49
3.4.3 Mitmeväärtuselised funktsioonid	50

4	Võimalikud edasised uurimissuunad	53
4.1	Tasalainelise tausta edasine analüüs	54
4.1.1	Lainepakettide areng laserväljas	54
4.1.2	Mittelineaarsed protsessid laserväljas	55
4.1.3	Volkovi lahendid teistes teooriates	57
4.2	Diraci võrrandi lahendamine	58
4.3	Teisendusoperaatori \mathcal{V} laiendamine	59
4.4	Muud arendussuunad	60
	Kokkuvõte	63
	Kasutatud kirjandus	65

Sissejuhatus

Magistrandile antud esialgne ülesanne oli arvutada Comptoni hajumise mõjuristlõige „dünaamiliste vastasmõjude“ teooria ennustuste järgi jätkuna autori bakalaureusetööle [1] samast protsessist Rarita-Schwingeri teoorias. Käesoleva magistritöö pealkirjast on aga näha, et see eesmärk ei ole kahjuks õnnestunud. Antud töös käsitletakse kõiki selles suunas tehtud katseid, mida kokkuvõtvalt võib nimetada interaktsioonide toomiseks puhtalt Poincaré algebrasse või lainefunktsioonide katmiseks interaktsioonidega, s.o interaktsioonipanuse eemaldamist lagranžiaanist või võrranditest ja selle asemel ta paigutamist lainefunktsioonidesse.

Dünaamiliste vastasmõjude teooria (hilisem artikkel [2]) on üks kõrgema spinni teooria kandidaat, mis tugineb Rarita-Schwingeri teooriale [3]. On teada, et elektromagnetväljaga minimaalselt interakteeruv Rarita-Schwingeri teooria on vastuoluline, tuntuimad probleemid on seotud kausaalsusega (Velo-Zwanziger), kommutatsiooniseostega (Johnson-Sudarshan) ja vabadusastmetega (Cox). Dünaamiliste vastasmõjude teooria püüab konstrueerida RS vektorspiinoritel (ja üldiselt ka tensorspiinoritel) põhineva kooskõlalise teooria, paigutades teatud operaatori abil kalibratsioonivälja Poincaré algebrasse nii, et kommutatsiooniseosed jääksid endiselt samaks, samas muutes ka väljavõrrandeid ja lainefunktsioone — kokku moodustatakse nn dünaamiline esitus. Tulemusena muudetakse nii aegruumi geometriat kui ka väljavõrrandeid, mis kõrgema spinni juhul saavad mitteminimaalse kalibratsioonipanuse.

Kahjuks ei ole teooria täielik, vaid ta sisaldab põhimõttelisi, olemuslikke probleeme. Teoorias vajaminev operaator on teada ainult tasalainelise EM-taustvälja erijuhul, pole uuritud lagranžiaani, pole eksplitsiitset kooskõla kontrolli üldjuhul ning pole selget viisi, kuidas näeksid välja kalibratsioonivälja (Maxwelli) võrrandid selles dünaamilises ehituses, teooria on spiinoritekeskne. Kuna tegu on klassikalise teooriaga, siis mõjuristlõigete arvutamiseks tuleks enne ka teooria kvantiseerida, mis kalibratsioonivälja ilmumise tõttu lainefunktsioonidesse ja lagranžiaani puudumise tõttu pole sugugi lihtne. Pole aga võimalik alustada kvantiseerimisega, sest erijuhuliste võrrandite tõttu ei saa kindlustada, et tulemus on õige.

Seega võttiski autor esimeseks ülesandeks proovida lahendada dünaamiliste vastasmõjude teooria jaoks tegelikult olulised probleemid. Kahjuks ei ole dünaamiliste vastasmõjude artiklites leida ettepanekuid, mis meetodil tuleks läheneda ühelegi neljast nimetatud probleemist. Neid probleeme pole ka nii kokkuvõtvalt sõnastatud, kui üldsegi mainitud (lagranžiaani, üldjuhu

kontrolli ja kalibratsioonivälja võrrandite probleeme pole artiklites esile toodud). Seetõttu on valdav osa probleemikäsitlusest ja lahendusideedest originaalne töö, tuginedes võimalikult palju dünaamiliste vastasmõjude algteooria ideedele ning proovides kasutada teisi füüsikalisi ja matemaatilisi teooriaid dünaamiliste vastasmõjude põhiküsimuste lahendamiseks. On kahju, et proovitud meetoditega ei ole veel õnnestunud kindlat lahendust leida.

Töö on jaotatud neljaks suuremaks peatükiks. Kuna tarvis on olnud vaadata palju erinevaid teooriaid, on lühiduse huvides toodud teoreetilist tausta jooksvalt ja ainult minimaalselt. Peatükk 1 tutvustab Rarita-Schwingeri väljateooriat ning dünaamiliste vastasmõjude teooriat, lõpetades täpsema ülevaatega dünaamiliste vastasmõjude seisust ning vajaminevast tööst. Sealjuures selgub (mis on mainimata dünaamiliste vastasmõjude artiklites), et dünaamiliste vastasmõjude mõte genereerida EM-väli teatud operaatori abil on väga sarnane nn Furry pildi ideega see sama väli kaotada lagranžiaanist ja paigutada lainefunktsioonidesse: kasutatav operaator on täpselt sama. 2. peatükis uuritakse lagranžiaani küsimust, sest osutub, et sel probleemil leidub võimalik lahendus. Seega jääb üle proovida lahendada dünaamiliste vastasmõjude teooria kõige olulisemat probleemi põhiküsimuste seast, see on teooria operaatori laiendamise probleemi, mida on käsitletud peatükis 3. Tutvustatakse kõiki erinevaid proovitud teooriaid ja meetodeid: teatud erilise kujuga operaatorvõrrandeid (Sylvesteri võrrand), Wilsoni jooni, Diraci võrrandi lahendamist Greeni funktsioonidega, pseudodiferentsiaaloperaatoreid, mitmeväärtuselisi funktsioone jm. Töö käigus selgus ka uurimisküsimusi, mida kas saaks lahendada vahetult dünaamiliste vastasmõjude teoorias või mis kasvasid välja tehtud uurimusest — arendusvõimalusi tutvustatakse 4. peatükis.

Enne kui dünaamiliste vastasmõjude teooria saab tegelikult kandideerida täielikuks kõrgema spinni teooriaks, on kindlasti tarvis lahendada nimetatud neli probleemi. Kuigi käesolev magistritöö ei lahenda neid ära, toob ta vähemalt välja probleemid, mida tuleks teooria edasise elu jaoks lahendada, ning suunad, mida kas võiks edasi uurida või mille edasisel uurimisel ei paista olevat kuigipalju mõtet. Sealjuures on töös pakutud välja mitu (vähemalt autori teadmist mööda) originaalset ideed, näiteks interaktsioonidega Diraci võrrandi lahendamisest mitmeväärtuseliste funktsioonidega, kommutaatorvõrrandite lahendamisest pseudodiferentsiaaloperaatoritega, lisaks väiksematele ettepanekutele, mis võivad väärida ka edasist põhjalikumalt ja rangemat uurimist. Autor loodab, et magistritöö vähemalt annab ülevaate ja selguse uuritud teooriast ning et pakutud ideed võivad leida kasutust või pakuvad mingitki inspiratsiooni edasiseks teadustööks.

Magistritöö autor soovib tänada oma juhendajat dr Stefan Grootet kogu abi eest töö valmimisel.

1. Rarita-Schwingeri teooria ja dünaamilised vastasmõjud

Terviklikkuse ja probleemi püstitamise eesmärgil on esimesena tutvustatud kõrgema (poolarvulise) spinniga osakesi kirjeldavat Rarita-Schwingeri (edaspidi ka RS) teooriat¹, kitsamalt spinn-3/2 juhul, ja Rarita-Schwingeri teoorial baseeruvat „dünaamiliste vastasmõjude“ teooriat, mis oli magistrیتöö põhiline uurimisobjekt. Olgu märgitud, et Rarita-Schwingeri teooriat ei ole edasises töös enam otseselt kasutatud, kuna lahenduskatsed ei jõua kõrgema spinni probleemideni — kõrgema spinni teooriad peavad üldistama spinn-1/2 tulemusi ning dünaamiliste vastasmõjude teooria ideestik peaks ka üldjuhul olema formuleeritav spinn-1/2 juhul, mistõttu lihtsuse ja üldistamise huvides on põhiliselt uurimise all olnud Diraci spinn-1/2 teooria (mida võib teatud mõttes käsitleda Rarita-Schwingeri teooria erijuhuna). „Dünaamiliste vastasmõjude“ teooria (tihti on edaspidi öeldud lühiduse huvides „dünaamilised vastasmõjud“) on küll uuritav teooria, kuid ka teooria autorite pakutud dünaamilist esitust ise läheb töö põhiosas vaja võrdlemisi vähe.

1.1 Rarita-Schwingeri teooria

Rarita-Schwingeri teooria [3] kirjeldab elementaarseid kõrgema poolarvulise spinniga osakesi, fermione. Vaba teooria põhivõrrandid on

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = 0, \quad \gamma^\rho\Psi_{\rho\mu_2\dots\mu_n} = 0, \quad (1.1.1)$$

millest järelduvad lisatingimused

$$\partial^\rho\Psi_{\rho\mu_2\dots\mu_n} = 0, \quad \Psi^\rho_{\rho\mu_3\dots\mu_n} = 0. \quad (1.1.2)$$

Käesoleva magistrیتöö autori bakalaureusetöö [1] juba käsitles Rarita-Schwingeri teooriat ning praegu antav ülevaade baseerub bakalaureusetöös esitatul (ja sealsetel viidetel). Spinn-3/2 teooria põhjalikuma konstrueerimis- ja kvantiseerimiskäigu võib leida Nykerki doktoritööst [4], millele on ülevaate kirjutamisel samuti tuginetud.

¹Töös kasutatakse loomulikke ühikuid $c = \hbar = 1$.

Rarita-Schwingeri teooria võib püstitada mitmel erineval viisil. Näiteks võib RS põhivõrranditeni jõuda Bargmann-Wigneri multispiinoritest ja võrranditest (nt [4] ja [5] ptk 5.6). Rühmateoreetilistel kaalutlustel (nt [6] ptk 5.6 või [7]) on teooria põhisuurusteks üldiselt tensorspiinorid (tensorindeksites sümmeetrilised), s.o spinn-3/2 erijuhul on teooria põhiobjektideks vektorspiinorid, mis teisenevad esituses

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \oplus \left(1, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (1.1.3)$$

Kõrgemat järku tensorspiinoresitusi saab moodustada jätkuvalt otsekorrutise võtmisega, misjuhul jõutakse vastavalt veel kõrgema spinniga osakesteni. Rarita ja Schwinger pakkusid välja teooria spinni kontrollimiseks kas leida tasalaineliste lahendite koguarv $2(n + \frac{1}{2}) + 1$ või arvutada osakese taustsüsteemis sisemise impulsimomendi ruut $(n + \frac{1}{2})(n + \frac{3}{2})$.

Olgu märgitud, et vektorspiinorite esituse valemist (1.1.3) on ka näha, miks elementaarse kõrgema spinni RS teooria jaoks on tarvis lisatingimusi. Spinn-3/2 sektori kõrval leidub spinn-1/2 komponent nii sektoris $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ kui ka sektoris $(\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2})$. RS vektorspiinorite teooria põhivõrrandid on vastavalt

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi_\mu = 0, \quad \gamma^\rho \Psi_\rho = 0. \quad (1.1.4)$$

Peale gammamaatriksitega ahendamist järeldub Diraci võrrandist $(i\cancel{\partial} - m)\Psi_\mu = 0$ massipinnal võrdus

$$\partial^\rho \Psi_\rho = 0. \quad (1.1.5)$$

Lisakitsendused (ingl *constraints*) on aga paljuski interakteeruva Rarita-Schwingeri teooria probleemide lähtepunktiks, nagu selgub (kõige tuntumalt) Johnson-Sudarshani [8], Velo-Zwanzigeri [9] ja Coxi [10] analüüsist.

Spinn-3/2 teooria vektorspiinorite võrrandid on tuletatavad lagranžiaanipõhiselt. Tüüpiliselt kasutatakse kirjanduses ühe tundmatu konstandiga lagranžiaani

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}^\mu \left[(i\cancel{\partial} - m)g_{\mu\nu} + A(i\gamma_\mu \partial_\nu + i\gamma_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1)i\gamma_\mu \cancel{\partial} \gamma_\nu + \right. \\ \left. + (3A^2 + 3A + 1)m\gamma_\mu \gamma_\nu \right] \Psi^\nu = \bar{\Psi}^\mu (\Lambda_0)_{\mu\nu} \Psi^\nu, \quad (1.1.6)$$

kus on kasutusele võetud vaba välja lagranžiaani tensor $(\Lambda_0)_{\mu\nu}$. Samas on pakutud välja ka üldisemaid lagranžiaane [11]. Konstanti A piirab propagaatori arvutamisest tulenev nõue $A \neq -\frac{1}{2}$, kuid muus osas on tegu suvalise konstandiga. Propagaatori avaldis ise on oluliselt lihtsam, kui valida $A = -1$.

Rarita-Schwingeri vektorspiinorite teooria lagranžiaan on invariantne nn punktteisenduste

$$\Psi_\mu \rightarrow \Psi'_\mu = \Psi_\mu + a\gamma_\mu \gamma_\rho \Psi^\rho = (g_{\mu\rho} + a\gamma_\mu \gamma_\rho) \Psi^\rho = R_{\mu\rho}(a) \Psi^\rho, \\ A \rightarrow A' = \frac{A - 2a}{1 + 4a} \quad (1.1.7)$$

korral, kus $a \neq -\frac{1}{4}$ on suvaline konstant. Konstanti A võib tõlgendada kui tegurit, mis määrab, kuidas on spinn-1/2 komponent $\gamma^\rho \Psi_\rho$ segunenud ülejäänud väljadega, ning invariantsusest tuleneb teooria füüsikalise olemuse sõltumatus konstanti väärtusest [12]; rangem käsitlus Kamefuchi *et al.* [13] ekvivalentsusteoreemi põhjal. Punktteisenduste sümmeetria säilib ka peale minimaalset asendust [1].

1.2 Probleemid interakteerivas Rarita-Schwingeri teoorias

Puhtalt vabal väljateoorial ei ole niisugust ennustavat jõudu kui interakteerival teoorial. Minimaalne asendus on lihtsaim viis, kuidas tuua sisse interaktsioonid mõne kalibratsiooniväljaga. Sel juhul nõutakse lagranžiaani invariantsust välja lokaalsete kalibratsioonirühma teisenduste all — invariantsus on tagatud minimaalsete interaktsioonipanuste lisamisega tuletisse; teisenevad nii kalibratsiooniväli kui ka osakeseväli.

Käsitleme lihtsuse huvides elektromagnetismi $U(1)$ sümmeetriat, sest vastav kalibratsioonirühm on Abeli rühm (vrd elektronõrk teooria, kvantkromodünaamika). Seega on tarvis teha asendus impulssides, s.o võtta kasutusele kalibratsiooni kovariantne tuletis

$$i\partial_\mu \rightarrow iD_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu, \quad (1.2.1)$$

kus siin on q osakese elektrilaeng ja A_μ on elektromagnetiline (EM) 4-potentsiaal. Spinn-3/2 lagranžiaanist (1.1.6) saab (nõudes lihtsuse huvides $A = -1$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{RS} = & \bar{\Psi}^\mu \left[(i\partial - m)g_{\mu\nu} - (i\gamma_\mu\partial_\nu + i\gamma_\nu\partial_\mu) + \gamma_\mu(i\partial + m)\gamma_\nu \right] \Psi^\nu - \\ & - q\bar{\Psi}^\mu \left[Ag_{\mu\nu} - (\gamma_\mu A_\nu + \gamma_\nu A_\mu) + \gamma_\mu A \gamma_\nu \right] \Psi^\nu. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Tõepoolest on teooria invariantne lokaalsete $U(1)$ teisenduste all, kui

$$\begin{aligned} \Psi^\mu & \rightarrow e^{iq\lambda(x)}\Psi^\mu, \\ A_\mu & \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\lambda(x). \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Võib jätkata interakteeruva spinn-3/2 teooria uurimist, arendada kvantväljateooriat (kanoonilise kvantiseerimise, ületeeintegraalide kaudu vms), arvutada mõjuristolõikeid mõnes protsessis või kasutada RS-vektorspiinoreid mõnes efektiivses teoorias (nt Δ^+ -barüonide jaoks [14]). Et aga *elementaarset* spinn-3/2 osakesi ei ole avastatud ja RS-teooria vahetu rakendamine elementaarosakeste fenomenoloogia jaoks ei anna õigeid tulemusi (vt nt Δ^+ -barüonide Comptoni hajumist [1]), on teooria õigsuse hindamiseks oluline, et ta oleks seesmiselt kooskõlaline. Kahjuks interakteeruv Rarita-Schwingeri teooria rikub kausaalsust [9], kommutatsiooniseoseid [8] ja ilmuvad vabadusastmete probleemid [10].

Velo-Zwanzigeri (edaspidi ka VZ) [9] probleem klassikalises Rarita-Schwingeri teoorias seisneb mittekauusaalsete lainete levikus. Selle probleemi näitamiseks viisid Velo ja Zwanziger läbi

Rarita-Schwingeri kitsenduste (mittetäieliku) analüüsi: RS võrrand teisendati algtingimustega hüperboolsete osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemiks, mille jaoks võib leida lainefrondiid ja kiirte levikukiirused (Couranti [15] eeskujul).

Velo ja Zwanziger lähtusid Rarita-Schwingeri võrrandite kujust

$$\begin{aligned}(\Gamma \cdot \pi - B)_{\mu\rho} \Psi^\rho &= 0, \\ \bar{\Psi}^\rho (\Gamma \cdot \pi - B)_{\rho\mu} &= 0.\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

kus siin $\pi^\mu = i\partial^\mu - qA^\mu$ ja

$$\begin{aligned}(\Gamma \cdot \pi)_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} \gamma \cdot \pi - (\gamma_\mu \pi_\nu + \pi_\mu \gamma_\nu) + \gamma_\mu (\gamma \cdot \pi) \gamma_\nu, \\ B_{\mu\nu} &= m(g_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu).\end{aligned}\tag{1.2.5}$$

Osa võrranditest (1.2.4) on kitsendused, s.o ei sisalda ajalisi tuletisi; konkreetset annab võrrandite $\mu = 0$ komponent primaarse kitsendusvõrrandi. Vektorspiinori komponendi Ψ^0 jaoks ei moodustu võrrandit enne (1.2.4) diferentseerimist.

Võib jätkata, määrates sekundaarse kitsenduse ja hermiitilises kujus kitsendusi säilitava hüperboolse liikumisvõrrandi

$$\begin{aligned}(\gamma \cdot \pi - m) \Psi_\mu + (\pi_\mu + \frac{1}{2} m \gamma_\mu) \frac{2}{3} i (-q) m^{-2} \gamma^5 \gamma^\rho F_{\rho\sigma}^d \Psi^\sigma + \frac{2}{3} i (-q) m^{-2} F_{\mu\rho}^d \gamma^\rho \gamma^5 (\pi_\sigma + \frac{1}{2} m \gamma_\sigma) \Psi^\sigma + \\ + \frac{2}{3} i (-q) m^{-2} F_{\mu\rho}^d \gamma^\rho \gamma^5 (\gamma \cdot \pi + 2m) \frac{2}{3} i (-q) m^{-2} \gamma^5 \gamma^\kappa F_{\kappa\lambda}^d \Psi^\lambda = 0,\end{aligned}\tag{1.2.6}$$

mis määrab iga Ψ^μ ajalise tuletise. Siin on

$$F_{\mu\nu}^d = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}.\tag{1.2.7}$$

Antud liikumisvõrrandi lahend on ka esialgse RS võrrandi lahendiks, kui ta vähegi rahuldab kitsendusi. Tüüpiliste meetodite abil (vt Courant [15]) võib määrata karakteristiklike pindade normaalid n^μ . Hüperboolsete võrrandite korral on signaalide leviku suurim kiirus karakteristiklike pindade tõus. Mitte kõik võrrandi poolt määratud karakteristiklikud pinnad ei puutu aga valguskoonust ja ruumisarnased karakteristiklikud pinnad läbivad punkte, kus $F_{\mu\nu}$ on mittekaduv. Seega võib järeldada, et võrrand lubab signaalide levikut valgusest kiiremini.

Johnson ja Sudarshan (edaspidi ka JS) [8] näitasid, et elektromagnetiliselt minimaalselt interakteeruvate vektorspiinorväljade kommutatsioonireeglid ei ole kooskõlalised. Selleks viidi analoogiliselt VZ-analüüsiga läbi kitsenduste analüüs, kuid kommutatsioonireeglite seisukohast. Nimelt Johnson ja Sudarshan näitasid, et kinemaatilist sõltuvate RS-välja komponentide jaoks peab kehtima (JS kokkulepetes)

$$\left\{ \gamma_k \Psi^k(x), \Psi_l^{3/2}(y) \right\} = \left(m + \frac{2}{3} \gamma \cdot \pi \right) \Delta \pi^m \left(\delta_{ml} + \frac{1}{3} \gamma_m \gamma_l \right) \delta(x - y),\tag{1.2.8}$$

$$-\left\{ \gamma_k \Psi^k(x), \gamma_l \Psi^l(y) \right\} = \frac{3}{2} \left[\left(m + \frac{2}{3} \gamma \cdot \pi \right) \Delta \left(m - \frac{2}{3} \gamma \cdot \pi \right) - 1 \right] \delta(x - y).\tag{1.2.9}$$

Siin $\Delta = (m^2 - \frac{2}{3}(-q)\sigma \cdot H)^{-1}$, $\Psi_\mu^{3/2} = (\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu)\Psi^\nu$, $\sigma_{kl} = \frac{i}{2}[\gamma_k, \gamma_l]$ ja H on magnetvälja tugevus. Võrduse paremal pool olevad maatriksid peavad olema positiivselt määratud (sest võrduse vasakul pool olevad Ψ_μ on hermiitilised operaatorid), kuid see kehtib ainult juhul $\frac{2}{3}|(-q)H| < m^2$. Samas on alati võimalik leida taustsüsteem, kus see tingimus on rikutud.

Nii VZ kui ka JS analüüsi võib kritiseerida kitsenduste analüüsi mittetäielikkuse osas. Nimelt teatud (VZ ja JS probleemid sama) väljaväärtuste korral muutub sekundaarne kitsendus kõdunuks (ei määra kõiki Ψ^0 komponente) ning ilmub tertsiaarne kitsendus, mis aga väljendab vektorspiinorvälja füüsikaliste vabadusastmete arvu kadumist, nagu näitasid Cox [10] ning Hasumi jt [16]. Seega on VZ ja JS probleemidel ühine lähtepunkt, mis on seotud vabadusastmete kadumisega, nagu on uurinud ka Takahashi ja Kobayashi [17, 18].

1.3 Dünaamilised vastasmõjud

Rarita-Schwingeri probleemide lahendusi on samuti välja pakutud erinevaid, vrd nt [19–22]. Käesolevas töös uuritav dünaamiliste vastasmõjude teooria [23] (praegune ülevaade põhineb artiklil [2]) pakub RS-välja jaoks mitteminimaalse interaktsiooni, muutes Poincaré algebrat teatud operaatori (dünaamiliste teisenduste operaatori) abil. Avaldades nii saadud suurused vaba välja operaatorite kaudu, saadakse nn dünaamiline esitus. Dünaamiliste vastasmõjude kausaalsust on kontrollitud RS teoorias [23] ja samuti on näidatud, et dünaamilised vastasmõjud annavad güromagnetilise suhte (g -tegur) $g = 2$ [24].

1.3.1 Dünaamiliste vastasmõjude ülesehitus

Dünaamiliste vastasmõjude teooria muudab Poincaré rühma $\mathcal{P}_{1,3} = \mathcal{T}_{1,3} \odot \mathcal{L}$ (kus $\mathcal{T}_{1,3}$ on aegruumi nihete rühm ja \mathcal{L} on ortokroonsete Lorentzi omateisenduste rühm) generaatoreid välisest kalibratsiooniväljast sõltuvaks nii, et vastava Lie' algebra kommutatsioonireeglid

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}), \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu), \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

jäävad muutumatuks. Siin $M_{\mu\nu} = \ell_{\mu\nu} + s_{\mu\nu}$ (kus $\ell_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$) on Lorentzi rühma ja P_μ on Minkowski aegruumi $\mathbb{E}_{1,3}$ nihete rühma generaatorid, s.o üldine lõplik Lorentzi teisendus on kirjutatav parametrizeeritud kujul $\tau(\Lambda(\omega)) = \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu})$ ja aegruumi nihete rühma element kujul $\exp(+ia_\mu P^\mu)$.

Lihtsaim viis algebra $p_{1,3}$ kommutatsioonireeglite säilitamiseks, mida kasutatakse ka dünaamiliste vastasmõjude teoorias, on kasutada mittesingulaarset teisendust $\mathcal{V}(A)$ nii, et

$$\text{Ad}_{\mathcal{V}(A)} : p_{1,3} \rightarrow p_{1,3}^d(A) = \mathcal{V}(A)p_{1,3}\mathcal{V}^{-1}(A), \tag{1.3.2}$$

nagu pakkusid välja Chakrabarti [25] ning Beers ja Nickle [26]. Vastavalt ka muudetakse lainevõrrandit ja lainefunktsioone,

$$\mathcal{V}(A) : D(\partial)\psi(x) = 0 \rightarrow D^d(\partial, A)\Psi(x, A) = 0, \quad (1.3.3)$$

kus uus liikumisvõrrandi operaator on $D^d(\partial, A) = \mathcal{V}(A)D(\partial)\mathcal{V}^{-1}(A)$ (vrd Diraci operaator) ja uus lainefunktsioon on $\Psi(x, A) = \mathcal{V}\psi(x)$.

Kovariantse funktsiooni teisenemine Lorentzi teisenduste $\Lambda \in \mathcal{L}$ puhul on määratud kommutatiivse diagrammiga

$$\begin{array}{ccc} \psi : & x \in \mathbb{E}_{1,3} & \longrightarrow & \psi(x) \\ \tau(\Lambda) \downarrow & \downarrow \Lambda & & \downarrow T(\Lambda) \\ \tau(\Lambda)\psi : & \Lambda x & \longrightarrow & T(\Lambda)\psi(x), \end{array} \quad (1.3.4)$$

see on

$$T(\Lambda)\psi(x) = (\tau(\Lambda)\psi)(\Lambda x). \quad (1.3.5)$$

Kalibratsiooni kovariantsus tuuakse sisse analoogiliselt Lorentzi kovariantsusega, s.o diagrammi (tähistades $\Psi(A) = \Psi(x, A)$)

$$\begin{array}{ccc} \Psi : & A & \longrightarrow & \Psi(A) \\ g(\lambda) \downarrow & \downarrow \lambda & & \downarrow G(\lambda) \\ \Psi^\lambda : & A + \partial\lambda & \longrightarrow & G(\lambda)\Psi(A) \end{array} \quad (1.3.6)$$

kommuteeruvusega, see on

$$\Psi^\lambda(A + \partial\lambda) = G(\lambda)\Psi(A). \quad (1.3.7)$$

Operaatori $\mathcal{V}(A)$ täpsustamiseks nõutakse esmalt teoorias kogu dünaamilise Poincaré algebra $p_{1,3}^d(A)$ invariantsust,

$$p_{1,3}^d(A + \partial\lambda)G(\lambda) = G(\lambda)p_{1,3}^d(A). \quad (1.3.8)$$

Valemi (1.3.2) järgi saab peale paremalt suurusega $G(\lambda)^{-1}$ korrutamist

$$\mathcal{V}(A + \partial\lambda)p_{1,3}\mathcal{V}^{-1}(A + \partial\lambda) = G(\lambda)\mathcal{V}(A)p_{1,3}(G(\lambda)\mathcal{V}(A))^{-1}. \quad (1.3.9)$$

Seega on esimene nõue täidetud, kui

$$\mathcal{V}(A + \partial\lambda) = G(\lambda)\mathcal{V}(A). \quad (1.3.10)$$

Arvestades et $\Psi(x, A) = \mathcal{V}(A)\psi(x)$ ja $\Psi^\lambda(x, A + \partial\lambda) = G(\lambda)\Psi(A)$, siis ka

$$\mathcal{V}^\lambda(A + \partial\lambda)\psi(x) = G(\lambda)\mathcal{V}(A)\psi(x), \quad (1.3.11)$$

mistõttu $\mathcal{V}^\lambda = \mathcal{V}$. Teiseks nõutakse, et $\mathcal{V}(A)$ peab olema Lorentzi tüüpi, s.o generaatorite $s_{\mu\nu}$ jaoks peab

$$\mathcal{V}(A)s^{\mu\nu}\mathcal{V}^{-1}(A) = V^\mu_\rho(x, A)V^\nu_\sigma(x, A)s^{\rho\sigma}, \quad (1.3.12)$$

kusjuures $V_{\mu\nu}(x, A)$ on välise välja A poolt genereeritud lokaalne Lorentzi teisendus.

1.3.2 Volkovi lahend

Dünaamiliste teisenduste operaatori kuju on teada ainult tugeva tasalainelise tausta erijuhul. Sel juhul (nagu juba näitas Taub [27]) on lokaalne Lorentzi teisendus

$$V_{\mu\nu}(A) = g_{\mu\nu} - \frac{q}{k \cdot P}(k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu) - \frac{q^2}{2(k \cdot P)^2} A^2 k_\mu k_\nu. \quad (1.3.13)$$

Vastavat EM-tasalainet kirjeldab lainevektor k_μ , $k^2 = 0$ ja polarisatsioonivektor a^μ , mille jaoks $a^2 = -1$ ning $ka = 0$. Operaator $k_P = k \cdot P$ kommuteerub teoorias kõigi teiste operaatoritega ning $\frac{1}{k_P}$ on massiivsete osakeste jaoks hästi defineeritud ($k_P \neq 0$; teistel juhtudel eeldatakse, et $\frac{1}{k_P}$ eksisteerib).

Huvipakkuv $\mathcal{V}(A)$ on kirja pandav kujul $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}_0(A)\mathcal{V}_s(A)$, kus

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0(A) &= \exp\left(-i \int \frac{d\xi}{2k_P}(2q(AP) - q^2 A^2)\right), \\ \mathcal{V}_s(A) &= \exp\left(-\frac{iq}{2k_P} G_{\mu\nu} s^{\mu\nu}\right), \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

kus $\xi = k_\mu x^\mu$ ja $G_{\mu\nu} = k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu$. Vastava operaatori tuletamine põhineb Volkovi lahendi [28] leidmise meetodil, lihtsasti esitatud Browne ja Kibble'i poolt [29], aga ka artiklis [30] ja raamatus [31]. Selleks lähtutakse teist järku Diraci võrrandist

$$(\gamma \cdot \pi + m)(\gamma \cdot \pi - m)\psi = \left(\pi^2 - m^2 + \frac{1}{2}q\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\psi = 0, \quad (1.3.15)$$

mis erineb skalaarvälja Kleini-Gordoni võrrandist

$$(\pi^2 - m^2)\phi = 0 \quad (1.3.16)$$

ainult spinniga seotud osa poolest. Lihtsuse ja lühiduse huvides on Volkovi lahendi tuletamist vaadatud ainult skalaarvälja juhul; spinn-1/2 juht on analoogiline ja erineb ainult spinniga seotud osa poolest.

Arvutuste lihtsustamiseks valitakse kalibratsioon, kus $k \cdot A = 0$. Tasalainelisuse eelduse tõttu $A_\mu = A_\mu(\xi)$. Huvi pakub olukord, kus minevikus $x_0 \rightarrow -\infty$ (mis ei ole üldiselt sama, kui $\xi \rightarrow -\infty$ [25]) on väli samuti tasalaineline, s.o huvipakkuv lahend on kujul $\phi(x) = e^{-ip \cdot x} f(\xi)$ algtingimusega $f(\xi) \rightarrow 1$, kui $\xi \rightarrow -\infty$. Vahetult asendades *ansatz*'i Kleini-Gordoni võrrandisse, jääb järele

$$\begin{aligned} m^2 e^{-ip \cdot x} f(\xi) + 2ik_\mu p^\mu e^{-ip \cdot x} \frac{df(\xi)}{d\xi} - 2qA \cdot p e^{-ip \cdot x} f(\xi) + e^2 A^2 e^{-ip \cdot x} f(\xi) - m^2 e^{-ip \cdot x} f(\xi) = \\ = 2ik_P e^{-ip \cdot x} \frac{df(\xi)}{d\xi} - 2qA \cdot p e^{-ip \cdot x} f(\xi) + q^2 A^2 e^{-ip \cdot x} f(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

ehk

$$i \frac{df(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2k_P} (2qA \cdot p - q^2 A^2) f(\xi), \quad (1.3.18)$$

mille lahendamine on juba otsene. Analoogilise meetodiga võib ka leida spinooritele vastava operaatori \mathcal{V} , kasutades lihtsalt maatriksväärtuselisi funktsioone; vastavalt lisandub spinnist sõltuv operaator avaldises (1.3.14).

Siiski kirjandusest ei selgu, miks lähtuda just teist järku Diraci võrrandist ja mitte tavalisest Diraci võrrandist. Täiesti analoogilisel viisil võiks alustada tavalisest Diraci võrrandist

$$(i\mathcal{D} - q\mathcal{A} - m)\psi = 0, \quad (1.3.19)$$

otsida lahendit *ansatz*'iga $\psi = e^{-ip \cdot x} g(\xi)u$, kus u on konstantne spinoor ja $g(\xi)$ on maatriks-funktsioon, mis kindlustab, et minevikus oli tegu tasalainega, s.o $g(\xi) \rightarrow 1$, kui $\xi \rightarrow -\infty$. Peale vahetut arvutust on

$$e^{-ip \cdot x} \left(\not{p} - q\mathcal{A} + i\mathcal{k} \frac{d}{d\xi} - m \right) g(\xi)u = 0, \quad (1.3.20)$$

millest

$$\mathcal{k} \frac{dg(\xi)}{d\xi} = i(\not{p} - q\mathcal{A} - m)g(y). \quad (1.3.21)$$

Paneme aga tähele, et \mathcal{k} ei ole pööratav maatriks, sest $k^2 = 0$. Tõepoolest, Diraci algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ tõttu $\mathcal{k}\mathcal{k} = k^2 = 0$. Kui \mathcal{k} oleks pööratav, siis peaks leiduma \mathcal{k}^{-1} nii, et $\mathcal{k} = \mathcal{k}(\mathcal{k}\mathcal{k}^{-1}) = (\mathcal{k}\mathcal{k})\mathcal{k}^{-1} = 0$, mis aga ei kehti. Seda probleemi aga ei teki teist järku Diraci võrrandi korral.

Operaatori olemasolu korral võib vahetult arvutada liikumisvõrrandid dünaamilises esituses. Mõjudes väljavõrrandile, tuleb EM-tasalainelises taustas liikumisvõrrand ($\mathcal{F} = \sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$)

$$D^d(A)\Psi(A) = (\Gamma^\mu(A)\Pi_\mu(A) - m)\Psi(A) = \left(\gamma^\mu D_\mu - \frac{q}{2k_P} \mathcal{k}\mathcal{F} - m \right) \Psi(A) = 0. \quad (1.3.22)$$

Tegu on esimest järku mitteminimaalselt interakteeruva võrrandiga. Spinn-1/2 välja korral taandub aga võrrand minimaalselt interakteeruvaks. Spinn-3/2 teoorias, kui kasutada RS teooria generaatoreid, on väljavõrrand (sisaldab kõiki tuletisi $D_\mu\Psi_\nu$)

$$\left\{ (\mathcal{D} - m)g_{\mu\nu} - \frac{iq}{k_P} \mathcal{k}F_{\mu\nu} \right\} \Psi^\nu = 0, \quad (1.3.23)$$

$$\gamma_\mu \Psi^\mu = 0, \quad (1.3.24)$$

kus $\Psi^\mu = \mathcal{V}_{RS}\psi^\mu$. Muude kitsendustena ilmuvad Feynman-Gell-Manni võrrand

$$\left\{ (\mathcal{D}^2 - m^2)g_{\mu\nu} - 2iqF_{\mu\nu} \right\} \Psi^\nu = 0 \quad (1.3.25)$$

ja kinemaatiline kitsendus

$$\left\{ D_\mu - \frac{iq}{4k_P} (F^{\rho\sigma} \gamma_\rho \gamma_\sigma) k_\mu \right\} \Psi^\mu = 0. \quad (1.3.26)$$

Olgu veel mainitud, et on samuti leitud mitu interakteeruva Diraci võrrandi mitte-Volkovi lahendit. Ülevaade Volkovi lahendist ja Volkovi spinoorite omadustest on antud nt Boca ja Florescu

artiklis [32]. Tasalainelises taustas liikuva Diraci fermioni jaoks on ka teisi lahendeid [33–35] ning Becker vaatab seda küsimust isegi kõrgema spinni teooria kontekstis [36].

Oluline on märkida, et dünaamiliste teisenduste konstruktsioon on praktilises mõttes sarnane sellega, mida kasutatakse Furry pildi [37] konstrueerimisel, spinn-1/2 dünaamiliste teisenduste operaator laserväljaga vastasmõju jaoks aga langeb kokku Furry pildi üleminekuoperaatoriga [38]. Dünaamiliste teisenduste seisukohast lähedasim käsitus on antud Seipti doktoritöös [38], millel ka praegune esitus eelkõige põhineb.

Furry pildis võetakse fermioni interaktsioon tugeva taustaga arvesse mittehäirituslikult. Selleks on otstarbekas eraldada üldine EM-väli tugevaks taustväljaks A_μ ja kiirgusväljaks \mathcal{A}_μ (nii et $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$), misjuhul minimaalselt interakteeruv spinn-1/2 lagranžiaan on kujuga

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_g}(\partial \cdot \mathcal{A})^2 - q\bar{\psi}(\not{\mathcal{A}} + \not{A})\psi, \quad (1.3.27)$$

kus selgelt eraldub spinoorvälja ja kiirgusvälja kineetiline osa, kalibratsiooni kinnitamise panus ning interaktsioonilagranžiaan; taustväljal puudub kineetiline panus. Olgu märgitud, et A_μ on ilma laetud osakeste vooluta Maxwelli võrrandite lahend. Furry pilti üleminekul teisendatakse spinoorfunktsioone nii, et EM-taustväli läheb spinoorvälja koosseisu (EM-väli katab lainefunktsiooni), s.o unitaarse teisenduse $\Omega = \mathcal{V}$ abil teisendatakse spinoorfunktsioone $\psi = \Omega\chi$, $\bar{\psi} = \bar{\chi}\Omega^{-1}$ nii, et uute (laservälja korral Volkovi) lainefunktsioonide kirja pildis jääb järele üksnes vaba välja lagranžiaan

$$\bar{\psi}(\not{p} - q\not{A} - m)\psi = \bar{\chi}(\not{p} - m)\chi. \quad (1.3.28)$$

Ületeeintegraalide keeles võib veel märkida, et integreerimismõõt on invariantne sellisel teisendusel. Operaatorvõrduse seisukohast on oluline visandada võrrand

$$\Omega^{-1}(\not{p} - q\not{A} - m)\Omega = \not{p} - m. \quad (1.3.29)$$

Kuna dünaamiliste teisenduste operaator annab spinn-1/2 juhul minimaalse interaktsiooni, võib praktilises mõttes käsitleda dünaamiliste teisenduste ideed vastupidiselt Furry pildi konstrueerimisele — kalibratsiooniväljade kaotamise asemel need tekitatakse, s.o visandatult spinn-1/2 juhul

$$(\not{p} - q\not{A} - m) = \mathcal{V}(\not{p} - m)\mathcal{V}^{-1}. \quad (1.3.30)$$

Operaatori pööratuvuse tõttu ei ole oluline \mathcal{V} ja \mathcal{V}^{-1} absoluutne paiknemine, sest see on ümberdefineerimise kaudu vahetatav. Seni pole veel aga võimalik rääkida dünaamiliste vastasmõjude teooria lagranžiaanist, sest seda ei ole algautorid esitanud. Dünaamiliste teisenduste operaator ja Furry pildi operaator osutuvad aga spinn-1/2 juhul samadeks.

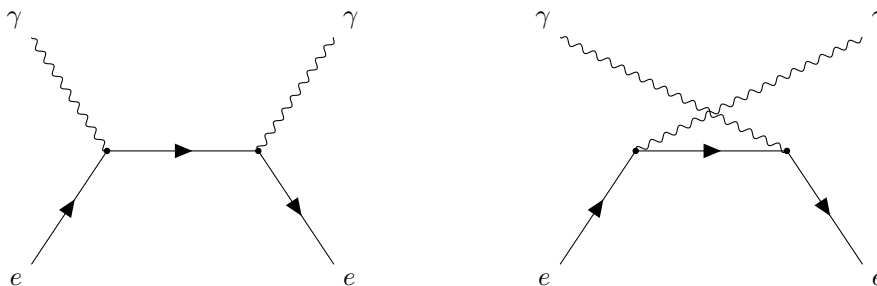
Furry pildi ja Volkovi lainefunktsioonide teooriat on jällegi võimalik edasi arendada, pikemalt vt Seipti doktoritööd ka kvantväljateoreetiliste protsesside jaoks [38]. Seni on leitud Volkovi lahendi analooge ainult kitsa klassi võrdlemisi kõrge sümmeetriaga taustade jaoks, näiteks EM-tasalainelise tausta, ristuvate tasalainete ja Coulombi potentsiaali kujulise tausta korral [39]

jm (Redmondi konfiguratsiooni kohta nt [40]). Edasise töö kahjuks aga ei paista kirjanduses leiduvat (vähemalt mitte dünaamiliste vastasmõjude jaoks) sobivat viisi interaktsioonidega Diraci võrrandi üldlahendi kirjapanekuks.

1.3.3 Probleemid dünaamiliste vastasmõjude konstruktsioonis

Nagu öeldud, magistritöö autori esialgne ülesanne oli arvutada Rarita-Schwingeri spinn-3/2 osakeste Comptoni hajumise mõjuristlõige dünaamilise vastasmõjude teoorias, nagu see tehti näiteks bakalaureusetöös RS-teoorias [1] või Delgado-Acosta ja Napsuciale artiklis [41] Napsuchiale–Kirchbach–Rodrigueze formalismi [19] jaoks.

Mõjuristlõigete (ja üleminekuamplituudide) arvutamine on kvantväljateoorias üsnagi standardiseeritud protseduur, vähemalt kui väljateooria on hästi formuleeritud — piisab hajumisprotsessile vastavate Feynmani diagrammide ja üleminekuamplituudide arvutamisest (ülevaade mistahes kvantväljateooria õpikus — näiteks Peskin & Schroeder [42]). Vähegi keerulisemate üleminekuamplituudide arvutamiseks on aga välja töötatud spetsiaalsed arvutiprogrammid (või liidesed), nt FORM [43] või FeynCalc [44]. Liikudes eeltöö ahelat pidi edasi, on Feynmani diagrammide arvutamiseks esmalt vaja formuleerida Feynmani reeglid, mis on üldiselt juba kvantväljateooria lagranžiaanist välja loetavad. Soovi korral võib aga ka arvutada pika tee asümptootilistest seisunditest, Dysoni ridadest ja Wicki teoreemist. Kui on teada interaktsioonipanuste täpne kuju, on võimalik ka täpsemini kindlaks määrata häiritusarvutuses huvipakkuvad Feynmani diagrammid (täpsemini kui lihtsalt seisundite üleminekuna, nt $e\gamma \rightarrow e\gamma$; kvantelektrodünaamika ja RS-teooria Comptoni hajumise skeemid on näidatud joonises 1.1). Niisugune protseduur on hamiltoniaanipõhine, Legendre'i teisenduse kaudu varjatult ka lagranžiaanipõhine. Dünaamiliste vastasmõjude teooria satub aga seda skeemi järgides raskustesse.



Joonis 1.1: Comptoni hajumise puu tasemel diagrammid Diraci ja RS teoorias. Erinevus spinn-1/2 ja spinn-3/2 teooriate vahel on üksnes fermionjoonele ja verteksitele vastavates avaldistes. Comptoni hajumise diagrammide kuju dünaamiliste vastasmõjude teoorias pole kindlalt teada.

1. Dünaamiliste vastasmõjude teooria on täpselt formuleeritud ainult tugeva EM-tasalainelise tausta korral. Ei ole avaldatud teooria formuleeringut üldise EM-välja (või vähemalt üldise taustagi) korral — mõni varajane artikkel [23] rõhutab, et puudub üldine eeskiri dünaamilise esituse operaatori konstrueerimiseks, samas kui viimases artiklis [2] on see jäetud tuleviku tööks. Samas ilma üldise interaktsioonipanusega on võimatu ennustada, millised verteksid ilmuvad kvantiseerimisprotseduuris. Ilma taustvälja eeldusest vabanemiseta on aga võimatu anda kalibratsiooniväljale fermionitest sõltuv dünaamika. Praktiliselt tähendab see, et on võimatu kirja panna kõiki Feynmani reegleid, samas kui dünaamiliselt tähendab see, et teooria ei fikseeri täpselt, kuidas kalibratsiooniväli üldiselt areneb koos fermionväljaga (ja mitte temast sõltumatult).
2. Teooria ei ole formuleeritud lagranžiaani kaudu ning lagranžiaani ei ole teooria formuleeringus eraldi vaadatud. See tähendab, et Feynmani reeglite väljalugemine on raske, kui mitte võimatu. Minimaalselt oleks Dysoni ridade arendamiseks vaja vähemalt hamiltoniaani. On pakutud vahetult viia tekke- ja kaooperaatorid dünaamilisse esitusse, kuid arvestades esimest punkti, ei viiks niisugune operatsioon Comptoni hajumise mõjuristlõigete arvutamisele lähemale. Parimal juhul, kui õnnestub niisugune protsess ilma lagranžiaani ja hamiltoniaanita õigesti teha, õnnestuks leida mingi Seipti-analoogiline [38] (klassikalise taustaga) pool-kvantteooria, kuid selle rakendus on piiratud — parimal juhul õnnestuks kvantiseerida ainult tugevas tasalainelises taustas liikuvate fermionite teooria, mis aga ei interakteeruks nõrkade mitte-taustaliste footonitega (sest teooria ei ennusta vastavate interaktsioonide kuju, ilma väga keeruliste modifikatsioonide ja ümbertõlgendamisteta).
3. Teooria kooskõla analüüs on läbi viidud ainult tasalainelise tausta erijuhul. Kausaalsust on eraldi kontrollitud laine frontide analüüsi meetodil artiklis [23], algebraline kooskõla on põhjendatud viimati [2], kus samas mainitakse, et lokaalsuse analüüsi ei ole läbi viidud (operaator $\frac{1}{k_P}$ ei ole tingimata lokaalne), kuigi on öeldud, et see on põhimõtteliselt võrreldav teiste tulemustega [45, 46].

Olgu märgitud, et Deser *et al.* [46] näitasid, et suur hulk mitte minimaalseid spinn-3/2 vastasmõjusid on siiski ebakõlalised. Seda on kommenteeritud dünaamiliste vastasmõjude seisukohast [24], rõhutades, et Deser *et al.* käsitlesid eelkõige efektiivset teooriat ning ei vaatanud võimalikku dünaamilist sümmeetriaprintsiipi.

Samas peab arvestama, et Poincaré algebra ja Poincaré rühm defineerivad aegruumi geometria. Osakeseväljade areng on aga kirjeldatud vastavate väljavõrrandite, diferentsiaalvõrrandite kaudu. Näiteks võib pakkuda mõnele väljale ilmselt vale liikumisvõrrandi, mis rikub kausaalsust (näiteks rikkudes valguse kiiruse kordajat) mistahes geometria korral. Väljade õige käitumine on määratud ainult koos nii liikumisvõrrandite kui ka vastava geometria analüüsiga (laine frontide levik, lokaalsus jne). Dünaamilised vastasmõjud

püüavad niisugusest problemaatikast kõrvale pääseda, modifitseerides paralleelselt nii algebrat kui ka liikumisvõrrandeid (kui dünaamilises esituses operaatoreid ei ole arendatud vaba välja operaatorite kaudu, moodustuvad vaba välja võrrandid uute suuruste kaudu; mitteminimaalsus ilmneb vanade, vaba välja operaatorite arenduses). Siiski, kuna üldjuhul ei ole teoorias tulemusi kontrollitud, on võimatu olla absoluutselt veendunud igas väites.

4. Teooria on väga spiinoritekeskne ning ei ole selget viisi, kuidas puhtas dünaamiliste vastasmõjude konstruktsioonis formuleerida näiteks Maxwelli võrrandeid vm. See on dünaamiliste vastasmõjude teooria ehituse olemuslik probleem, millest väljuda on raske. Muuhulgas on spiinoritekesksus ka seotud tasalainelise erijuhu probleemiga, sest selge eeskiri, mille järgi toimuks fermion- ja bosonväljade koosareng, ei nõuaks enam üldkuulise operaatori (väljavõrrandite üldlahendi) ilmutatud esitamist, vaid üksnes eeskirja kooskõlalistsust. Selle probleemi lahendamine on raske ka seetõttu, et erinevate väljade paralleelsete liikumisvõrrandite sissetoomine tähendab praktiliselt uue teooria kirjutamist. Praktiliselt võib olla lihtsam leida teooria ideedest järelduvad interaktsioonipanused, mis seejärel üle tuua tavalisse lagranžiaanipõhisesse väljateooriasse.

Seega näitab ülesandepüstituse põhjalikum ülevaade, et magistritöö alguses antud probleem on oluliselt keerulisem, kui esialgu võib paista. Siiski on täiesti võimalik anda ette konkreetne tee, mille peab läbima esialgse ülesande täitmiseks.

1. Esiteks tuleb üldistada dünaamiliste teisenduste operaatorit väljaspoole oma kitsast esialgset rakenduspiirkonda. Seda on käsitletud peatükis 3. Olgu märgitud, et ootus oli, et peale operaatori põhivõrrandi formuleerimist ja lahendamist spinn-1/2 erijuhul, õnnestub ta (osaliselt) arendada spinn-1/2 (Lorentzi) generaatorite kaudu ja kontrollida kooskõla dünaamiliste vastasmõjude poolt esitatud nõuetega. Eksplitsiitne generaatorite kasutuselevõtt annaks aga võimaluse üldistada operaator spinn-3/2 juhule.
2. Tuleb konstrueerida lagranžiaan. Erinevaid lagranžiaaniga seonduvaid tulemusi on käsitletud peatükis 2.
3. Määrata Feynmani reeglid, Feynmani diagrammid ja arvutada üleminekuamplituudid standardsetele viisidele tuginedes.
4. Vastavalt võimalustele kontrollida teooria õigsust üldjuhul.

Iga õnnestunud samm oleks uuritava teooria seisukohast juba märkimisväärne tulemus. Magistritöö keskendubki kõigele vajaminevale, et saaks uurida dünaamiliste vastasmõjude teooria fenomenoloogiat.

2. Lagranžiaani olemasolust, leidmisest ja tarvilikkusest

Dünaamiliste vastasmõjude teooria ei ole lagranžiaanipõhine väljateooria. Siiski on dünaamiliste vastasmõjude lagranžiaani küsimus vähemalt põhimõtteliselt lahendatav diferentsiaalgeomeetria raames: vastavat meetodit (Vainberg-Tonti lagranžiaani) on käesolevas peatükis tutvustatud. Peatüki lõpus on vaadatud kvantväljateooria lagranžiaani olemasolu tarvidust võimaliku teoreemina. See-eest ei ole uuritava teooria lagranžiaani küsimusega mõttekas põhjalikumalt tegeleda enne, kui ei ole lahendatud olulisem interaktsiooni üldkuju küsimus, mille lahendatavus ei ole isegi kindel.

Alustades spinn-1/2 teooriast, võiks lihtsuse huvides naiivselt püüda otsida *ansatz*'i mõju $S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi$ muutmise jaoks, asendades suurusid neile vastavate dünaamiliste vastasmõjude analoogidega. Olgu aga märgitud, et kui vähegi (mistahes) pööratav assotsiatiivne operaator (näiteks teisendusmaatriks) \mathcal{V} on avaldises rakendamise suunast sõltumatu, siis naiivselt asendatud lagranžiaan jääb muutumatuks,

$$\mathcal{L}^d = \bar{\Psi} D^d(\partial, A)\Psi = \bar{\psi} \mathcal{V}^{-1} \mathcal{V} D(\partial) \mathcal{V}^{-1} \mathcal{V} \psi = \bar{\psi} D(\partial) \psi = \mathcal{L}. \quad (2.0.1)$$

Siin on eeldatud \mathcal{V} -operaatori H -unitaarsust [47, 48]: lõplikku esitust T nimetatakse H -unitaarseks, kui leidub mittesingulaarne hermiitiline maatriks $H = H^\dagger$ nii, et

$$T^\dagger(\Lambda)H = HT^{-1}(\Lambda) \Leftrightarrow s_{\mu\nu}^\dagger H = H s_{\mu\nu}. \quad (2.0.2)$$

Spinn-1/2 teoorias $H = \gamma^0$. Interaktsioonidega mõju muutumatus aga tähendab, et osakese trajektoor justkui ei muutuks, mis loomulikult pole interakteeruva teooria jaoks tõsi.

Ainuke lootus niisugust naiivset lähenemist jätkata oleks muuta ka integreerimismõõtu mõjus $S = \int d^4x \mathcal{L}$, võttes mõõdu jaoks kasutusele koordinaatide dünaamilise vaste $x^\mu \rightarrow \xi^\mu = \mathcal{V}x^\mu \mathcal{V}^{-1} = x^\mu + [\mathcal{V}, x^\mu] \mathcal{V}^{-1}$ (vt [2]). See võimaldaks pakkuda *ansatz*-mõju

$$S^d = \int d^4\xi \mathcal{L}^d. \quad (2.0.3)$$

Kui uued suurused ξ^μ oleksid hästi käituvad koordinaadid ning kehtiks

$$\partial_\mu^d := \mathcal{V} \partial_\mu \mathcal{V}^{-1} = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}, \quad (2.0.4)$$

saaks tavalise väljateooria varieerimisskeemi järgi mõju statsionaarsusest

$$\delta S^d = \int d^4\xi \left[\frac{\partial \mathcal{L}^d}{\partial \Psi} - \partial_\mu^d \frac{\partial \mathcal{L}^d}{\partial (\partial_\mu^d \Psi)} \right] \delta \Psi = 0 \quad (2.0.5)$$

tavalised Euleri-Lagrange'i võrrandid

$$\frac{\partial \mathcal{L}^d}{\partial \Psi} - \partial_\mu^d \frac{\partial \mathcal{L}^d}{\partial (\partial_\mu^d \Psi)} = 0, \quad (2.0.6)$$

mille kaasvõrrand annab otsitava lainevõrrandi

$$D^d(\partial, A)\Psi = 0. \quad (2.0.7)$$

Endiselt on kahetimõistetavus $\mathcal{L}^d = \mathcal{L}$, aga selle probleemi lahendamiseks õigete mõõduga kooskõlaliste koordinaatide ξ^μ kasutuselevõtt. Niisugune konstruktsioon meenutab Weyli esialgset gravitatsiooni ja elektromagnetismi ühendava kalibratsiooniteooria katset [49].

Et ξ^μ oleksid head koordinaadid, peaks kehtima ortogonaalsusomadus

$$\frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^\mu} = \delta_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (2.0.8)$$

Juhul kui kehtib tuletise Leibnizi reegel ka operaatorile \mathcal{V} mõjumisel, peaks lihtsa arvutuse järel

$$\delta_\mu^\nu = \mathcal{V}(\partial_\mu x^\nu) \mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}(\partial_\mu \mathcal{V}^{-1} \mathcal{V} x^\nu) \mathcal{V}^{-1} = \partial_\mu^d \xi_d^\nu - \xi_d^\nu \partial_\mu^d = [\partial_\mu^d, \xi_d^\nu]. \quad (2.0.9)$$

Lagranžiaani konstrueerimiseks on olemas hästi välja arendatud meetodid, mistõttu ei ole tegelikult tarvis arendada dünaamiliste vastasmõjude tarbeks omaette lagranžiaani teooriat — neist diferentsiaalgeomeetristest meetoditest on siin peatükis antud lühike ülevaade. Olgu aga rõhutatud, et lagranžiaani analüüsi on tutvustatud eelkõige terviklikkuse huvides, sest nende meetodite rakendamine on dünaamiliste vastasmõjude hajumisprobleemide jaoks sisukas ainult juhul, kui õnnestub lahendada operaatori üldkuju küsimus.

2.1 Tarvilikud ja piisavad tingimused lagranžiaani olemasoluks

Variatsiooniarvutuse pöördülesanne on määrata, kas ette antud diferentsiaalvõrrandeid saab tuletada variatsioonprintsibist, ning võimalusel leida sobiv lagranžiaan. Mitte iga diferentsiaalvõrrand, sealhulgas füüsikaliselt tõepärane liikumisvõrrand, ei ole variatsioonprintsibist tuletatav. Tänapäevaks on aga välja töötatud meetodid variatsioonilisuse küsimuste lahendamiseks.

Lagranžiaani konstrueerimiseks või tema olemasolu määramiseks on erinevaid meetodeid, mis on erineva üldisusastmega, vrd nt [50] ja [51, 52]. Käesoleva peatüki kirjutamisel on eelkõige lähtutud väljateoreetilistest vajadustest, milleks sobivad diferentsiaalgeomeetriselised vahendid, kus pöördülesande olemusest on lühike ülevaade ka artikli [53] alguses. Variatsiooniarvutuse küsimuste kohta on palju materjale, kuid antud ülevaates on eelkõige lähtutud Krupka ja Krupkova

raamatutest [54–56], vajadusel täpsustades küsimusi mõne teise viitega. Lühiduse huvides on aga paljuski eeldatud diferentsiaalgeomeetria aluste teadmist; variatsioonarvutuse seisukohast on antud ülevaade raamatutes [54–56], sissejuhatus diferentsiaalgeomeetrias üldiselt nt [57] ja väljateooria diferentsiaalgeomeetria konstruksioon nt [58].

2.1.1 Helmholtzi tingimused

Lagranžiaani olemasolu tingimused teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi jaoks on tuntud Helmholtzi tingimustena [59]. Kui on antud m võrrandist koosnev diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$B_{\mu\nu}(t, q^\rho, \dot{q}^\rho) \ddot{q}^\nu + A_\mu(t, q^\rho, \dot{q}^\rho) = 0, \quad (2.1.1)$$

kus aeg on t ja koordinaadid q^μ ($1 \leq \mu, \nu, \rho, \sigma \leq m$), siis tegu on teatud lagranžiaani L Euleri-Lagrange'i võrranditega, kui on täidetud tingimused

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= B_{\nu\mu}, \\ \frac{\partial B_{\mu\rho}}{\partial \dot{q}^\sigma} &= \frac{\partial B_{\mu\sigma}}{\partial \dot{q}^\rho}, \\ \frac{\partial A_\mu}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial \dot{q}^\mu} &= 2 \frac{dB_{\mu\nu}}{dt}, \\ \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial \dot{q}^\mu} \right). \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Need tingimused on lagranžiaani olemasoluks nii piisavad kui ka tarvilikud.

Olgu märgitud, et Helmholtzi tingimusi võib esitada mitmel erineval viisil ning vastavalt on ka nende tõlgendus erinev. Võrrandid (2.1.2) on tingimused teatud teist järku diferentsiaalvõrrandite, sh Newtoni liikumisvõrrandite süsteemi elementide jaoks (nt suurust $A_\mu(t, q^\nu, \dot{q}^\nu)$ on võimalik tõlgendada jõuna). Diferentsiaalgeomeetria lähenedes tulenevad Helmholtzi tingimused teatud diferentsiaalvormi (nn dünaamilise vormi) suletuse (*closedness*) nõudest; lähtudes raamatust [56], viitega allikatele [60, 61], võib defineerida dünaamilise vormi (kaksvormi)

$$E = E_\mu dq^\mu \wedge dt \quad (2.1.3)$$

ja vaadata, millal leidub kaksvorm

$$F = F_{\mu\nu}(dq^\mu - \dot{q}^\mu dt) \wedge (dq^\nu - \dot{q}^\nu dt) + G_{\mu\nu}(dq^\mu - \dot{q}^\mu dt) \wedge (d\dot{q}^\nu - \ddot{q}^\nu dt), \quad (2.1.4)$$

nii et diferentsiaalvorm

$$\alpha = E + F \quad (2.1.5)$$

on suletud, kusjuures võib eeldada $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Nõudest $d\alpha = 0$ moodustuvad võrrandid

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\mu}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial E_\nu}{\partial \dot{q}^\mu} &= 0, \\ \frac{\partial E_\mu}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial E_\nu}{\partial \dot{q}^\mu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_\mu}{\partial \ddot{q}^\nu} + \frac{\partial E_\nu}{\partial \ddot{q}^\mu} \right) &= 0, \\ \frac{\partial E_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial E_\nu}{\partial q^\mu} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_\mu}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{\partial E_\nu}{\partial \dot{q}^\mu} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

mis osutuvad ekvivalentseteks võrranditega (2.1.2). Niisugusel kujul väljendavad variatsioonilise tingimused teatud diferentsiaalvormi omadusi.

Variatsioonarvutuse pöördülesandega on seotud küsimus, millal on võrrandid (2.1.1) *ekvivalentsed* mingite Euleri-Lagrange'i võrranditega (võrdluseks kas võrrandid ise on tuletatud variatsioonprintsibist). Nagu väidab [56], ei ole sel probleemil veel üldist lahendust. Lihtsustamiseks võib kitsendada analüüsi teatud ekvivalentsete võrrandite klassi piirsesse,

$$w_\mu^\nu (A_\nu + B_{\nu\rho} \ddot{q}^\rho) = 0, \quad (2.1.7)$$

eeldades, et w_μ^ν on kõikjal regulaarne maatriks, nn variatsiooniline integreerimistegur või variatsiooniline kordaja (*variational integrating factor* või *variational multiplier*). Vastavalt tekib ka kolmas viis Helmholtzi võrrandite kirjapanekuks, vaadates neid kui nõudeid sellele teisendusmaatriksile, mis teisendab diferentsiaalvõrrandid (2.1.1) Euleri-Lagrange'i võrranditeks. Newtoni liikumisvõrrandite (mass $m = 1$)

$$\ddot{q}^\mu = A^\mu(q^\nu, \dot{q}^\nu, t) \quad (2.1.8)$$

korral, nagu kasutab [62], on need tingimused

$$\begin{aligned} w_{\mu\nu} &= w_{\nu\mu}, \\ \frac{\partial w_{\mu\nu}}{\partial \dot{q}^\rho} &= \frac{\partial w_{\mu\rho}}{\partial \dot{q}^\nu}, \\ \frac{d}{dt} w_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} w_{\mu\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial \dot{q}^\nu} - \frac{1}{2} w_{\nu\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial \dot{q}^\mu}, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(w_{\mu\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial \dot{q}^\nu} - w_{\nu\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial \dot{q}^\mu} \right) &= w_{\mu\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial q^\nu} - w_{\nu\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial q^\mu}, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

kus täistuletis on arvatud massipinnal.

2.1.2 Anderson-Duchamp-Krupka võrrandid

Helmholtzi tingimused käsitlevad teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteeme, kuid variatsioonilisuse nõudeid on võimalik laiendada üldisemate diferentsiaalvõrrandite ja kihtkondade jaoks. Olgu esiteks lihtsuse huvides käsitletud kihtkonda $\pi : Y \rightarrow X$, $\dim X = 1$, $\dim Y = m + 1$. Diferentsiaalgeomeetrisest seisukohast võib vaadata diferentsiaalvõrrandeid (ja Euleri-Lagrange'i

võrrandeid kitsamalt) kui teatud diferentsiaalvormi (Euleri-Lagrange'i vormi), s.o s -järku dünaamilise vormi

$$E = E_\sigma(t, q^\mu, \dots, q_s^\mu) dq^\sigma \wedge dt \quad (2.1.10)$$

integraallõigetest $\gamma = \gamma^\mu$, $E \circ J^s \gamma = 0$, tulenevaid võrrandeid. Lokaalselt vastab sellele harilike $s \geq 1$ järku diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$E_\sigma \left(t, \gamma^\mu, \frac{d\gamma^\mu}{dt}, \dots, \frac{d^s \gamma^\mu}{dt^s} \right) = 0, \quad 1 \leq \sigma \leq m, \quad (2.1.11)$$

kasutades Krupkova [56] (ptk 4) esitust.

Väga täpselt öelduna on [56] järgi nimetatud s -järku dünaamiliseks vormiks s -jugade ruumi $J^s Y$ üks-kontakt kaksvormide mooduli $\Lambda_Y^{1,1}(J^s Y)$ elementi, mis on horisontaalne projektsiooni $\pi_{s,0}$ suhtes. Näiteks Newtoni mehhaanika dünaamiline vorm on

$$E = \delta_{\mu\nu}(m\ddot{q}^\mu - A^\mu) dq^\nu \wedge dt. \quad (2.1.12)$$

Edasise tarbeks on oluline mainida, et Helmholtzi tingimuste järgi on E lokaalselt variatsiooniline parajasti siis, kui jõud A^μ on potentsiaalne, s.o $A^\mu = \partial^\mu V$.

Võib eristada lokaalset ja globaalset variatsioonilisust. Olgu s -järku dünaamiline vorm E . Siis E on variatsiooniline (globaalselt), kui leidub täisarv r ja $J^r Y$ lagranžiaan λ nii, et $E = E_\lambda$. Vastavalt on E lokaalselt variatsiooniline, kui leidub $J^s Y$ lahtine kate, et E iga kitsendus kattelemendile on variatsiooniline vorm. Osutub (vt [56] ptk 4.3), et s -järku dünaamiline vorm E on lokaalselt variatsiooniline parajasti siis, kui tema kihikaardi komponentide (*fiber-chart components*) E_σ ($1 \leq \sigma \leq m$) jaoks iga $0 \leq l \leq s$ ja $1 \leq \sigma, \nu \leq m$ korral kehtib

$$\frac{\partial E_\sigma}{\partial q_l^\nu} - (-1)^l \frac{\partial E_\nu}{\partial q_l^\sigma} - \sum_{k=l+1}^s (-1)^k \binom{k}{l} \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} \frac{\partial E_\nu}{\partial q_k^\sigma} = 0. \quad (2.1.13)$$

Need on Anderson-Duchamp-Krupka (ADK) tingimused [63, 64]. Klassikalise mehhaanika juhul $\dim X = 1$ ja $s = 2$ avalduvad neist jällegi Helmholtzi tingimused, antud juhul ADK kujul

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\sigma}{\partial \ddot{q}^\nu} - \frac{\partial E_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} &= 0, \\ \frac{\partial E_\sigma}{\partial \dot{q}^\nu} + \frac{\partial E_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} - 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial E_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} &= 0, \\ \frac{\partial E_\sigma}{\partial q^\nu} - \frac{\partial E_\nu}{\partial q^\sigma} + \frac{d}{dt} \frac{\partial E_\nu}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial E_\nu}{\partial \ddot{q}^\sigma} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Üldistamiseks võiks veel tuua sisse Lepage'i vormid, nagu seda on tehtud Krupkova õpikus [56]: kaksvorm α on Lepage'i vorm, kui $d\alpha = 0$ ja $\pi_{s,s-1}^* \alpha = E + F$, kus E on dünaamiline vorm ja F on kaks-kontakt kaksvorm, kuid väljateooria seisukohast on otstarbekam vaadata ADK võrrandite üldisemat kuju, praegu lähtudes allikatest [65, 66] ja [55] ptk 4.

Olgu nüüd kihtkond $\pi : Y \rightarrow X$, kus Y ja X on diferentseeruvad muutkonnad dimensiooniga $\dim X = n$, $\dim Y = m + n$. Võib tõlgendada X aegruumi muutkonnana, millel kihid Y

on väljamuutujad. Samuti olgu defineeritud piisavalt kõrget k -järku joa kihtkonnad $J^k(Y)$. Väljavõrrandid võib analoogiliselt sisse tuua diferentsiaalvormide abil. Olgu T mingi $(n + 1)$ -vorm, s.o nimetatud s -järku diferentsiaalvõrrandiks, mis on kohalikes koordinaatides

$$T = \mathcal{T}_A d\psi^A \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n, \quad (2.1.15)$$

kus $\mathcal{T}_A(q^\mu, \psi^A, \psi_\mu^A, \dots, \psi_{\mu_1, \dots, \mu_s}^A)$ on mingi sile funktsioon (ülimalt s -järku komponentidest $\psi_{\mu_1, \dots, \mu_s}^A$).

Olgu diferentsiaaloperaator

$$\partial_A^{\mu_1, \dots, \mu_l} = \frac{r_1! \dots r_l!}{l!} \frac{\partial}{\partial \psi_{\{\mu_1, \dots, \mu_l\}}^A}, \quad (2.1.16)$$

kus r_i on kordade arv, kui indeks i esineb jadas μ_1, \dots, μ_l . Olgu täistuletise operaator

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \sum_{l \geq 0} \psi_{\nu_1, \dots, \nu_l}^A \partial_A^{\nu_1, \dots, \nu_l} \quad (2.1.17)$$

ning olgu veel $D_{\mu_1, \dots, \mu_l} = D_{\mu_1} \dots D_{\mu_l}$. Analoogiliselt varasemaga võib nimetada diferentsiaalvõrrandit T lokaalselt variatsiooniliseks (ehk ka Euleri-Lagrange'i tüüpi) parajasti siis, kui leidub lokaalne funktsioon \mathcal{L} , nii et

$$\mathcal{T}_A = \mathcal{E}_A(\mathcal{L}) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l D_{\mu_1, \dots, \mu_l} (\partial_A^{\mu_1, \dots, \mu_l} \mathcal{L}). \quad (2.1.18)$$

Funktsiooni \mathcal{L} nimetatakse sel juhul lokaalseks lagranžiaaniks ja diferentsiaalvormi $L = \mathcal{L} dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$ lokaalseks Lagrange'i vormiks. Oluline on, et s -järku diferentsiaalvõrrand T on lokaalselt variatsiooniline parajasti siis, kui kehtivad (üldisemal kujul) Anderson-Duchamp-Krupka võrrandid

$$\partial_A^{\mu_1, \dots, \mu_l} \mathcal{T}_B = \sum_{p=l}^s (-1)^p C_p^l D_{\mu_{l+1}, \dots, \mu_p} \partial_B^{\mu_1, \dots, \mu_p} \mathcal{T}_A, \quad l = 0, \dots, s. \quad (2.1.19)$$

2.2 Vainberg-Tonti lagranžiaan

Esmast huvi võib pakkuda võrrandite variatsioonilisuse kontroll, kuid on välja töötatud ka konkreetseid meetodeid, kuidas konstrueerida antud diferentsiaalvõrranditele vastav lagranžiaan või vähemalt teatud lähenduslagranžiaan. Selle peatükiga järelikut näidatakse, et lagranžiaani küsimus on dünaamiliste vastasmõjude teooria jaoks põhimõtteliselt lahenduv, olgugi et mitte triviaalselt, sest dünaamilised vastasmõjud kalduvad veidi kõrvale tavalisest (vektor)spiinorväljade diferentsiaalgeomeetrisest teooriast (ning dünaamiliste vastasmõjude teooriat ei ole ka diferentsiaalgeomeetriselt esitatud, mis nõuab lisatööd). Peamine probleem on aga endiselt üldkujulise operaatori ja seega üldise teooria puudumine, mis kaotab lagranžiaani küsimuste põhjalikuma uurimise mõtte.

Kui võrrandisüsteemi (2.1.1) jaoks on Helmholtzi tingimused täidetud, siis võib konstrueerida Volterra lagranžiaani

$$\mathcal{L} = q^\mu \int_0^1 E_\mu(t, \lambda q^\nu, \lambda \dot{q}^\nu, \lambda \ddot{q}^\nu) d\lambda. \quad (2.2.1)$$

Volterra valem on üldistatav teiste diferentsiaalvõrrandite jaoks — nii moodustatakse lokaalsetes koordinaatides Vainberg-Tonti lagranžiaan [51, 52, 67]

$$\mathcal{L}_{VT} = \int_0^1 \psi^A \mathcal{T}_A(q^\mu, \lambda \psi^A, \lambda \psi_\mu^A, \dots, \lambda \psi_{\mu_1, \dots, \mu_s}^A) d\lambda \quad (2.2.2)$$

diferentsiaalvõrrandi

$$\mathcal{T}_A(q^\mu, \psi^A, \psi_\mu^A, \dots, \psi_{\mu_1, \dots, \mu_s}^A) = 0 \quad (2.2.3)$$

jaoks. Näide Vainberg-Tonti meetodi rakendamisest on artiklis [68]. Seda lagranžiaani kasutatakse loomulikul viisil ADK võrrandite piisavuse ja tarvilikkuse tõestuses: kui diferentsiaalvõrrandi (2.1.15) komponendid rahuldavad ADK võrrandeid, võib otsese arvutuse abil näidata, et \mathcal{T}_A langeb kokku Vainberg-Tonti lagranžiaanile vastava Euleri-Lagrange'i vormi komponentidega, s.o $\mathcal{T}_A = \mathcal{E}_A(\mathcal{L}_{VT})$, s.o T on lokaalselt variatsiooniline. Siin on Euleri-Lagrange'i võrrandid

$$\mathcal{E}_A(\mathcal{L}) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l D_{\mu_1, \dots, \mu_l} (\partial_A^{\mu_1, \dots, \mu_l} \mathcal{L}). \quad (2.2.4)$$

Vainberg-Tonti lagranžiaan on sama järku kui talle vastav diferentsiaalvõrrand. Samas on võimalik, et erinevad, sealhulgas erinevat järku, lagranžiaanid annavad sama Euleri-Lagrange'i võrrandi, st on ekvivalentsed. Madalaimat järku lagranžiaani olemasolu uurimine on nn järgu vähendamise probleemi osa. Tõepoolest on vähemalt klassikalise mehhaanika konstruktsioonis võimalik iga lagranžiaani lokaalselt vähendada madalaima järguni $s/2$, kui Euleri-Lagrange'i võrrandi järk s on paaris, ja $(s+1)/2$, kui s on paaritu, kuid väljateoorias ei kehti analoogilist teoreemi, vt [56] ptk 4.5.

Diferentsiaalvõrrandid võivad, aga ei pruugi olla variatsioonilised. Samas on olemas ka meetodid, kuidas teisendada (või täpsemini öeldes lähendada) diferentsiaalvõrrandite süsteem variatsioonprintsibiist tuletatavaks, nt variatsiooniliste kordajate meetod [69]. Vainberg-Tonti lagranžiaanist lähtub nn võrrandite kanooniline variatsiooniline täiendamine (*canonical variational completion of differential equations*) [70].

Kanoonilise variatsioonilise täiendamise käigus lisatakse diferentsiaalvõrranditele parandusliige, et vajadusel muuta nad variatsioonilisteks, kasutades Vainberg-Tonti lagranžiaani. Seega diferentsiaalvõrrandisüsteemi $\mathcal{T}_A = 0$ kanooniline variatsiooniline täiendus on

$$\mathcal{E}_A(\mathcal{L}_{VT}) = 0. \quad (2.2.5)$$

Erinevust esialgse võrrandisüsteemi ja tema variatsioonilise täienduse vahel (s.o erinevust variatsioonilisusest) võib mõõta Helmholtzi vormi

$$H_A = \mathcal{E}_A(\mathcal{L}_{VT}) - \mathcal{T}_A \quad (2.2.6)$$

abil. Üsna loomulikult, diferentsiaalvõrrandisüsteem on lokaalselt variatsiooniline parajasti siis, kui $H_A = 0$ igas kohalikus kaardis [70].

Seega on dünaamiliste vastasmõjude lagranžiaani küsimus vähemalt põhimõtteliselt lahendatav. Kuigi naiivne lähenemine võimaldaks teistsugust interaktsioonide tõlgendamist, siis diferentsiaalgeomeetrilised meetodid annavad kindla võimaluse kontrollida, kas dünaamiliste vastasmõjude väljavõrrandid on variatsioonilised ning konstrueerida kas täpselt mingi lagranžiaan või vähemalt lähendada dünaamiliste vastasmõjude väljavõrrandid variatsioonilisteks.

Peamine probleem selle meetodi kasutamises on aga tema ennatlikkuses. Vajadusel võrrandeid variatsiooniliselt täiendades on tõepoolest võimalik kirjutada Vainberg-Tonti lagranžiaan (2.2.2), kuid dünaamiliste vastasmõjude praeguse seisjuures oleks niisuguse lagranžiaani mõttekus ja kasulikkus kahtlust äratav. Seni on teada interaktsioon ainult tasalainelise EM-taustaga — kui dünaamiliste vastasmõjude väljavõrrandid ei ole variatsioonilised, annaks variatsiooniline täiendamine lisapanuse, mis võib rikkuda teooria kooskõla. Sõltumata variatsioonilisusest, annaks aga Vainberg-Tonti lagranžiaan ainult erijuhu lagranžiaani, mida ei saaks kindlalt kasutada näiteks teooria kvantiseerimises ja mõne hajumisprotsessi arvutamises, s.o endiselt on lahendamata peamine probleem interaktsioonide üldkuju osas.

Teine probleem seisneb selles, et dünaamiliste vastasmõjude teorias veidi muutub väljateooria tavaline diferentsiaalgeomeetiline konstruktsioon (vt nt [58]), kuna muudetakse Poincaré algebra generaatoreid ja lainefunktsioone,

$$D(\partial)\psi = 0 \rightarrow D^d(\partial, A)\Psi = \mathcal{V}D(\partial)\mathcal{V}^{-1}\mathcal{V}\psi = 0. \quad (2.2.7)$$

Seega tuleks esmalt üle vaadata diferentsiaalgeomeetrilised erisused. Kuigi see probleem nõuab uurimist, on see jällegi põhimõtteliselt lahenduv (kui talle eelnevad probleemid on samuti lahendatud): kuigi esialgses interpretatsioonis muudetakse vaba välja lainefunktsioone ψ , siis praktilises mõttes võiks proovida tõlgendada $D^d(\partial, A)\Psi = 0$ kui liikumisvõrrandit, mis määrab omaette lainefunktsioonid Ψ , s.o proovida vaadata teooriat, kus interaktsioonid on samad, aga ei ole modifitseeritud lainefunktsioone (s.o $D^d(\partial, A)\Psi = 0 \sim D^d(\partial, A)\psi = 0$; vrd algse teisendamisega $\mathcal{V}D(\partial)\psi = 0$). Diferentsiaalvõrrandite ja lainefrontide seisukohast peaks analüüs jääma sarnaseks, kui mitte samaks, kuid see ei ole range väide. Spinn-3/2 teooria diferentsiaalgeomeetriliseks ehituseks tuleks kasutusele võtta spiinorväärtuselised üksvormid, vt nt [71].

2.3 Lagranžiaani tarvilikkusest kvantväljateoorias

Seni edukaim kvantväljateooria, standardmudel, on lagranžiaanipõhine. Kvantväljateooria kursustes käsitletakse väljateooria lagranžiaanipõhist formuleeringut, mis lubab lihtsasti säilitada ja uurida teooria põhisümmeetriaid. Kalibratsiooniteooriates standardselt alustatakse lagranžiaani invariantsuse nõudega. Kvantteooria Feynmani ületeeintegraalide formalism kasutab mõju, mis

aga vahetult kasutab lagranžiaani; ka Hamiltoni formalismist, nt kanoonilise kvantiseerimise juures, on üldiselt võimalik Legendre'i teisenduste abil üle minna lagranžiaanile. Kui aga tahta nt arvutada kvantväljateoreetilisi hajumisprotsesse, ilmuvad Feynmani diagrammidesse massipinnast eemal liikuvad virtuaalosakesed ning lagranžiaan just annab teavet ka osakeste iseloomust väljaspool massipinda. Lisaks veel alustatakse uute väljateooriate konstrueerimisel (näiteks tumeaine mudelites) tihti lagranžiaanist. Seda kõike arvestades on erijuhu liikumisvõrranditel tuginev dünaamiliste vastasmõjude teooria üsna erandlikus olukorras.

Osutub, et Maxwelli võrranditeni (täpsemini: osani neist) on võimalik jõuda, kasutades Newtoni liikumisvõrrandeid ning koordinaadi ja kiiruse kommutatsiooniseoseid, nagu avastas Feynman ja esitas Dyson [72] (vahetu kriitika juba [73–76]). Sarnasel viisil osutub, et kvantmehhaanilistest koordinaadi ja impulsi kommutatsiooniseostest järeldub Helmholtzi tingimuste täidetus klassikaliste liikumisvõrrandite kontekstis. Selleks lähtuvad Hojman ja Shepley (HS) [62] klassikalistest liikumisvõrranditest (jällegi $m = 1$)

$$\ddot{x}^i = f^i(x, \dot{x}, t) \quad (2.3.1)$$

ning Helmholtzi tingimuste kujust (2.1.9), s.o konstrueeritakse variatsiooniline kordaja. HS uurivad ja „kvantiseerivad“ vahetult klassikalist liikumisvõrrandit (2.3.1); vrd tavalises kvantiseerimiskäigus Schrödingeri (või Heisenbergi vms) võrrandi kasutuselevõtuga, hamiltoniaani ja Poissoni sulgude muutmise ja jne. Kvantiseerimisprotsessis seatakse koordinaadile ja kiirusele vastavusse operaatorid X^i ja \dot{X}^i mingis Hilberti ruumis, alustades tingimusest

$$[X^i, X^j] = 0. \quad (2.3.2)$$

Kui võtta võrdusest ajaline tuletis, moodustub sümmeetriline maatriks (HS tõestuse jaoks selles peatükis $\hbar \neq 1$)

$$[X^i, \dot{X}^j] = i\hbar G^{ij} = i\hbar G^{ji}. \quad (2.3.3)$$

Edasi näidatakse tõestuses, et G^{ij} klassikalise analoogi g^{ij} pöördmaatriks just sobib otsitavaks variatsiooniliseks kordajaks. HS defineerivad kvantmehhaanilise suuruse klassikalise analoogi kui \hbar madalaima astme kordaja, klassikalise funktsiooni suurustest x^i, \dot{x}^i, t , mis tähendab vaikimisi eeldust, et niisugune piirjuht on teoreemi rakenduspiirkonnas üldsegi mõttekas.

HS tõestuses on põhimõttelise tähtsusega kommutaator koordinaadi X^i ja üldise operaatorite korrutise $\dot{X}^s A \dot{X}^t B \dots \dot{X}^u$ vahel, kus A, B, \dots on ainult koordinaadioperaatoritest X^i sõltuvad funktsioonid. Tulemuseks on

$$[X^i, \dot{X}^s A \dot{X}^t B \dots \dot{X}^u] = i\hbar \left(G^{is} A \dot{X}^t B \dots \dot{X}^u + \dot{X}^s A G^{it} B \dots \dot{X}^u + \dots + \dot{X}^s A \dot{X}^t B \dots G^{iu} \right), \quad (2.3.4)$$

mille „klassikaline analoog“ on

$$g^{ik} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (a b \dots \dot{x}^s \dot{x}^t \dots \dot{x}^u). \quad (2.3.5)$$

Olgu aga rõhutatud, et HS *eeldavad*, et kõik huvipakkuvad suurused (nt HS kasutatav kvantmehhaaniline jõu operaator F) avalduvad tüüpiliikmete $\dot{X}^s A \dot{X}^t B \dots \dot{X}^u$ abil, mis on oluline kitsendus (lisaks nt on tarvis saada kommuteerida $[X^i, A] = 0$). Paljuski see sarnaneb polünomiaalsus- või analüütilisusnõudega ning võib olla üldjuhul liiga kitsas.

Pöördmaatriksi tuletise võib siduda maatriksi endaga kui

$$\partial w_{ij} = -w_{is} \partial g^{st} w_{tj}. \quad (2.3.6)$$

Sellega on olemas kõik tõestuses vajaminevad arvutusvalemid. HS tõestus seisneb edasi otseses kommutatsioonireeglite teisendamises ja klassikaliste analoogide kirjapanekus. Näiteks Jacobi identisusest

$$\left[X^i, \left[X^j, \dot{X}^k \right] \right] + \left[\dot{X}^k, \left[X^i, X^j \right] \right] + \left[X^j, \left[\dot{X}^k, X^i \right] \right] = 0 \quad (2.3.7)$$

järeldub

$$\left[X^i, G^{jk} \right] = \left[X^j, G^{ik} \right], \quad (2.3.8)$$

mille klassikalisest analoogist

$$g^{is} \frac{\partial g^{jk}}{\partial \dot{x}^s} = g^{js} \frac{\partial g^{ik}}{\partial \dot{x}^s} \quad (2.3.9)$$

järeldub Helmholtzi tingimuste valem

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial w_{ik}}{\partial \dot{x}^j}. \quad (2.3.10)$$

Edasises on HS veel eeldanud, et kasutatud kvantmehhaaniline jõu operaator F^i langeb kokku koordinaadi operaatori teist järku tuletisega (massipinna eeldus).

HS uurisid ainult tavalise kvantmehhanika juhtu, mitte kvantväljateooria jaoks, ning tõestus sisaldab küsitava põhjendatusega eeldusi. Ei paista, et analoogiline teoreem oleks kirja pandud kvantväljateooria jaoks; HS ise üksnes mainivad üldistamisvõimalust. Samuti pole kindel, kas niisugune teoreem isegi üldistuks väljateooria juhule. Siiski, arvestades kvantväljateooria kanoonilise kvantiseerimise sarnasust tüüpilise kvantmehhanika konstruktsiooniga, on kasulik vähemalt mainida võimalikku tõestuse skeemi, olgugi et kahjuks antud töös seda tõestust ei ole.

Väljateoorias on kasutusel Helmholtzi tingimuste asemel ADK võrrandid (2.1.19), s.o teoreemi siht peaks olema kas näidata ADK võrrandite täidetust, konstrueerima eksplitsiitse lagranžiaani või variatsioonilise kordaja, mis teisendaks väljavõrrandid variatsioonilisteks. Probleem on aga teoreemi mittetriviaalsuse säilitamises. Tuntuimate väljavõrrandite jaoks, näiteks Kleini-Gordoni võrrand või Diraci võrrandi jaoks, on teada neile vastav lagranžiaan. Mittetriviaalne teoreem järelikult ei tohi fikseerida diferentsiaalvõrrandi kuju — võib-olla isegi mitte võrrandi järku.

Diraci bispiinorite teoorias on aga palju sarnasusi HS tõestusega, mis võivad viidata üldistamisvõimalusele. Lihtsuse huvides olgu taas $\hbar = 1$. Diraci propagaator G on leitav lagranžiaani vaba välja osa pööramise teel,

$$(i\rlap{/}\partial - m)G = i\delta^{(4)}(x - x'), \quad (2.3.11)$$

mis annab impulsiruumis

$$G = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}. \quad (2.3.12)$$

Seos paistab väga tugev just seetõttu, et Diraci võrrandi (diferentsiaaloperaatori) osa ilmub vahetult ka lagranžiaanis $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$. Diraci deltafunktsioonid ilmuvad ka otse antikommutaatoris spiinorkomponentide ψ_a ja impulsitiheduse komponentide π_b vahel,

$$\{\psi_a(x), \pi_b(y)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{i}{2E(\mathbf{p})} [(\not{p} + m)\gamma^0 e^{-ip(x-y)} + (\not{p} - m)\gamma^0 e^{ip(x-y)}]_{ab}, \quad (2.3.13)$$

mis samaaegsel juhul $x_0 = y_0$ annavad

$$\{\psi_a(t, \mathbf{x}), \pi_b(t, \mathbf{y})\} = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.3.14)$$

Siit võib juba oletada seost (anti)kommutaatorsuhte ja propagaatori vahel.

Probleem on, nagu öeldud, aga mittetriviaalsuses. Ei saa eeldada, et propagaator moodustatakse lagranžiaani pööramisele, sest see muudaks tõestuse triviaalseks — propagaatori olemasolu tähendaks otsekohe lagranžiaani olemasolu. Tarvis on näidata, et väljavõrrandid rahuldavad ADK võrrandeid, või konstrueerida variatsiooniline kordaja. Kumbki ei ole aga lihtne — tuleb käsitleda väljateooria diferentsiaalgeomeetrilist konstruktsiooni koos distributsioonide teooriaga muutkondadel, kusjuures tekib näiteks juba meelevaldsus diferentsiaalvõrrandi järgu valimisel. Sealjuures ei ole isegi kindel, et teoreemi hüpotees — (anti)kommutaatorsuhete kehtimisest järeldub lagranžiaani olemasolu — üldiselt kehtib, vähemalt väljaspool väljateooria tuntud juhte. Samuti on üsnagi kaheldav väljateooria klassikalise analoogi defineerimine, sest klassikaline Diraci bispiinorväljateooria on juba olemuslikult mitteklassikaline, kuna temas juba ilmub Plancki konstant; arendamine Plancki konstandi astmete järgi ei oleks sisukas. Lootusrikkam oleks kvantväljateooria klassikalises analoogis vähendada väljaoperaatorid lihtsalt tavalisteks suurusteks ilma kommuteerimisreegliteta.

Ei saa praegu absoluutse kindlusega väita, et füüsikas on liikumise kirjeldamiseks lagranžiaan tingimata fundamentaalseim objekt; autori arvates füüsika jaoks fundamentaalseim on objektide muutumine kas ajas või põhjustades aja tekke, kuid arvestades kasvõi kvantteooria Feynmani funktsionaalintegraalide formalismi või virtuaalosakeste ilmumist, on tänapäeva füüsikas vaja vähemalt mingit meetodit, mis kirjeldaks ka liikumise iseloomu väljaspool massipinda, väljaspool liikumisvõrrandite lahendeid. Väljateooria lagranžiaanipõhine ülesehitus on selleks üks lihtsamatest ja arendatuimatest viisidest. On ka kvantiseerimiskeeme, mis käsitlevad mitte-lagranžiaanipõhiseid väljateooriaid, vt nt [77], kuid esitatu põhjal äratub kahtlust lagranžiaani vältimise õigsus dünaamiliste vastasmõjude teooria konstrueerimisel.

3. Interaktsioonioperaatori üldistamine

Dünaamiliste vastasmõjude teooria on oma senises esituses kirjeldanud ainult vektorspiinorvälja interaktsiooni tugeva tasalainelise taustaga. See on ka dünaamiliste vastasmõjude peamine puudujääk, kui tahta temast arendada üldist kõrgema spinni teooriat. Ilma üldise interaktsioonipanuseta on võimatu öelda, kas tasalaine-interaktsioonide teadmised piisaks Comptoni hajumise või mõne muu protsessi kirjeldamiseks — eksplitsiitne lainevektori ilmumine operaatoris k_P interaktsioonipanusel näitab, et interaktsioon tasalainega ei saa olla sama, mis üldine interaktsioon (vrd bispiinorteooria minimaalne asendus), ning vastavalt pole kindel, millised verteksid ilmuksid kvantiseerimisel. Teooria terviklikkuse huvides on erijuhust üldistumine põhimõttelise tähtsusega — see on ainuke viis, kuidas lõplikult saaks hinnata teooria õigsust.

3.1 Dünaamiliste vastasmõjude madalaspinniline kooskõla

Dünaamiliste vastasmõjude teooria üldistamise jaoks on tarvis leida operaator \mathcal{V} , mis viiks interaktsioonid Poincaré algebrasse ja genereeriks kooskõlalise kõrgema spinni interaktsiooni. Kahjuks ei paista selleks olevat pakutud selget leidmiseeskirja — Volkovi lahendi meetod ei üldistu lihtsasti teistsuguste väljakonfiguratsioonide juhule ning väljaspoole tugevaid taustasid.

Peatükis 1.3.1 ja artiklis [2] esitatud tingimustest ei moodustu selget võrrandit, mille lahendamine annaks otsitava operaatori, vaid pigem nad määravad operaatori kasutusviisi ning kitsendavad (võimalikku) lahendit. Siiski on aga võimalik anda väga otsene võrrand, mida ka dünaamilised vastasmõjud püüavad rahuldada — genereerida spinn-1/2 juhul $\mathcal{V}_{p_{1,3}}\mathcal{V}^{-1}$ viisil väljavõrranditesse minimaalne asendus, s.o nõrgal (lainefunktsioonidega koos) kujul võrrand \mathcal{V} jaoks

$$\mathcal{V}(i\cancel{\partial} - m)\mathcal{V}^{-1}\Psi = (i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\Psi, \quad (3.1.1)$$

mis operaatortasemel on vastavalt

$$\mathcal{V}(i\cancel{\partial} - m)\mathcal{V}^{-1} = (i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m). \quad (3.1.2)$$

Olgugi et dünaamiliste vastasmõjude teooria kõrgema spinni EM-interaktsioonide üldkuju ei ole teada, on mõistlik eeldada, et spinn-1/2 juhul, s.o madalaspinnilisel juhul, taandub interaktsioon

minimaalseks, et säilitada võimalikult lihtne kooskõla eksperimentaalandmetega ning samuti lihtsustada arvutusi.

Kalibratsiooniinvariantsuse nõudest üksi ei saa tingimata järeldada, et madalaspinniline interaktsioon on minimaalne, kuid seni on just minimaalne asendus andnud parima ja lihtsaima spinn-1/2 spinnorteooria eksperimentaalse kooskõla. Mitteminimaalsed panused peaksid nihutama märgatavaid parandeid just väga kõrge energia piirkonda, eksperimentide mõõtapiirkonnast eemale. Võrrandi klassifitseerimise ja vastavalt ka lahendamiskatsete seisukohast muudaksid mitteminimaalsed panused eelkõige avaldisi ja arvutusi keerulisemaks, kuid üldiselt ei muudaks lähenemist olulisel määral, kui vähegi ei muutu võrrandi klassifikatsioon. Seega võib öelda, et võrrandid (3.1.1) ja (3.1.2) on dünaamiliste vastasmõjude jaoks madalaspinnilise kooskõla võrrandid.

Lõpuks olgu märgitud, et Rarita-Schwingeri võrrandid langevad kokku Diraci võrrandiga iga vektorspiinori vektorkomponendi jaoks. Kui isegi suuta ära lahendada (3.1.1) või (3.1.2), võib kasutada just sama operaatorit \mathcal{V} , et genereerida ka Rarita-Schwingeri võrrandis minimaalne asendus,

$$\mathcal{V}(i\rlap{-}\partial - m)\mathcal{V}\Psi_\mu = (i\rlap{-}\partial - q\rlap{-}\mathcal{A} - m)\Psi_\mu, \quad (3.1.3)$$

mis annaks sama operaatorvõrrandi (3.1.2) kui spinn-1/2 teooriaga. Minimaalne asendus viib aga otseteed vastuoludeni — dünaamilise vastasmõju korral modifitseeritaks ka kitsendusvõrrandit $\gamma^\mu\psi_\mu = 0 \rightarrow \Gamma^\mu\Psi_\mu = 0$, kuid kooskõla vajaks põhjalikumat kitsenduste analüüsi, nagu seda tegid Cox, Velo ja Zwanziger ning teised. Mitteminimaalsuse sissetoomiseks tuleks \mathcal{V} spinn-1/2 teooria lahendis avaldada gammamaatriksid spinni generaatorite $s^{\mu\nu}$ kaudu, misjärel spinn-3/2 teoorias saaks kasutada kõrgema spinni generaatoreid. Tulemusena saaks vähemalt mingigi üldistusvariandi dünaamiliste vastasmõjude jaoks; praktiliselt on kasulikum see, et nii õnnestub üldistada Furry pildi üleminekuoperaatorit. Võimalus genereerida minimaalne asendus isegi interaktsioonide viimisel Poincaré algebrasse aga näitab, et dünaamiliste vastasmõjude meetodit tuleks üldjuhul tingimata kontrollida vastuolude suhtes — ei ole kindel, et üldjuhul moodustub õige probleemivaba interaktsioonidega teooria.

3.1.1 Sylvesteri võrrand

Võrrandid (3.1.1) ja (3.1.2) peaksid kehtima ka väljaspool massipinda, et kindlustada, et virtuaalsete protsesside mõju ei muutu, mis muidu võib anda ebafüüsikalise panuse. Seega võiks huvi pakkuda eelkõige operaatorvõrdus (3.1.2): kui eeldada, et minimaalne asendus genereeritakse ka väljaspool massipinda, siis ei ole lainefunktsiooni ψ kuju põhimõtteliselt oluline, sest võrdus peab ühtlasi kehtima mistahes teise ψ korral, s.o tegu on operaatorvõrdusega. Vastavalt ei ole tingimata oluline nõuda dünaamiliste vastasmõjude stiilis lainefunktsiooni teisendust $\mathcal{V}\psi = \Psi$ ning Furry pildiga seostamise huvides on isegi parem, kui seda eeldust mitte teha: vastavalt on

edaspidi tihti kirjutatud Ψ asemel ψ .

On mõistlik eeldada, et (Lorentzi) skalaare nagu mass võib vabalt kommuteerida läbi operaatori \mathcal{V} , s.o $m\mathcal{V} = \mathcal{V}m$. Siis võib operaatorvõrrandi (3.1.2) otseteed kirjutada ümber kujul

$$\mathcal{V}i\cancel{\partial} = (i\cancel{\partial} - q\cancel{A})\mathcal{V} \quad (3.1.4)$$

ehk

$$[\mathcal{V}, i\cancel{\partial}] = -q\cancel{A}\mathcal{V}. \quad (3.1.5)$$

Niisugusel kujul on tegu kommutaatorit $[\mathcal{V}, i\cancel{\partial}]$ sisaldava võrrandiga. Tarvis oleks leida sellise võrrandi mittetriviaalsed lahendid, sest ilmselt $\mathcal{V} = 0$ küll rahuldab võrrandeid (3.1.4) ja (3.1.5), kuid on võõrlahend (pole pööratav). Olgu rõhutatud, et antud võrrandeid ei saa lahendada naiivselt Fourier' ruumis, sest \cancel{A} ei ole konstantne funktsioon ja annab Fourier' pöördes konvolutsiooni, kui eraldada teda spinoorfunktsioonist.

Kommutaatorvõrrandite lahendamise kohta paistab olevat materjale võrdlemisi vähe, lisaks on antud juhul segatud sisse diferentsiaalvõrrandi osa. Tüüpilised arvutiprogrammid, nt Mathematica, paistavad samuti andvat kätte ainult triviaalse lahendi või ei suuda 16 diferentsiaalvõrrandiga süsteemi (3.1.4) ära lahendada.

Üldkujulise lahendi leidmise seisukohast ei ole oluline, kas \mathcal{V} osutub lihtsalt Diraci algebra väärtuseliseks funktsiooniks, integraaloperaatoriks või millekski muuks, kuid see muudab lahenduskeemi. Üldiselt oleks lihtsaim, kui \mathcal{V} oleks mingi maatriksfunktsioon — sel juhul sarnast operaatorvõrrandit

$$AX - XB = C \quad (3.1.6)$$

nimetatakse (algebraliseks) Sylvesteri võrrandiks, kus A, B, X, C on kõik operaatorid, lineaarsed teisendused lõplikumõõtmelises vektorruumis või tõkestatud lineaarsed teisendused Banachi ruumis [78]. Märgid on üldkujus ebaolulised, võrdlemisi harilik on kirjutada Sylvesteri võrrandiks

$$AX + XB + C = 0 \quad (3.1.7)$$

või mõni muu sarnane kuju, nagu on seda teinud nt [79]. Behr jt [79] järgi võib veel nimetada diferentsiaalseks Sylvesteri võrrandiks süsteemi

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + X(t)B + C, \\ X(t_0) &= D. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Vahel on nimetatud neid võrrandeid Ljapunovi võrranditeks [80], samas kui Ljapunovi võrranditeks on nimetatud ka sümmeetrilist juhtu $A = B$.

Võrrand (3.1.4), vrd antuna lähedasemal kujul

$$(i\cancel{\partial} - q\cancel{A})\mathcal{V} - \mathcal{V}i\cancel{\partial} = 0, \quad (3.1.9)$$

ei ole kahjuks klassikaline Sylvesteri võrrand, mille lahendite olemasolu, ühesuse ja leidmise küsimus on lõplikumõõtmelisel juhul põhjalikult uuritud, vt Bhatia ja Rosenthal [78]:

Teoreem (Sylvester-Rosenblum). *Kui A ja B on niisugused operaatorid, et $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, siis võrrandil $AX - XB = C$ on ühene lahend X iga operaatori C jaoks.*

Siin on $\sigma(X)$ operaatori X spekter — lõplikumõõtmelisel juhul on see X omaväärtuste hulk; funktsionaalanalüüsis on kasutusel keerulisem definitsioon, kus komplekssses Banachi ruumis defineeritud tõkestatud lineaarse operaatori X spekter $\sigma(X)$ on hulk kõigist $\lambda \in \mathbb{C}$, et $X - \lambda\mathbb{1}$ ei ole pööratav. Väljaspool klassikalisi teoreeme, nt lõikuvate spektrite $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$ juhul, ei ole aga Sylvesteri võrrandit lõpuni veel läbi uuritud [81].

Bhatia ja Rosenthal annavad ka valiku erinevatest (3.1.6) lahendi kirjutusviisidest. Näiteks kui A ja B on niisugused, et $\sigma(B) \subset \{z : |z| < \rho\}$ ja $\sigma(A) \subset \{z : |z| > \rho\}$ mingi $\rho > 0$ jaoks, siis (3.1.6) lahend on

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1} C B^n, \quad (3.1.10)$$

mille õigsuse kontroll on vahetu, tähelepanu nõuab koonduvus. Kahjuks ei kandu see lahend võrrandile (3.1.9) üle, mis on homogeenne, s.o $C = 0$. Muud lõpmatud read, nt stiilis

$$\mathcal{V} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(i\partial - qA)^{-n-1} (i\partial)^n + (i\partial - qA)^n (i\partial)^{-n-1} \right] \quad (3.1.11)$$

tekitavad aga otsekohe koonduvus- ja summeerimisprobleeme, olgugi et kui vähegi on reas võimalik liikmeid ümber paigutada nii, et summa ei muutu, rahuldaks lahendikandidaat (3.1.11) võrrandit (3.1.9). Lõpmatute ridade analüüsis piisab rea absoluutsest koondumisest selleks, et võib rea liikmeid ümber järjestada summat muutmata. Kandidaadi (3.1.11) korral tuleks jätkata analüüsi diferentsiaal-integraaloperaatorridade koonduvuse uurimise osas. Mõneti trivialiseeriv on juba kirjutis $(i\partial - qA)^{-1}$, sest 4-potentsiaali liige on parajasti see, mis muudab interakteeruva Diraci võrrandi lahendamise keeruliseks, s.o ka niisuguse avaldise pööramine ei ole lihtne. Lootuses leida mõni muu lihtsam lähenemine ei ole koonduvusanalüüsi käesolevas magistriöös tehtud, vaid on jätkatud teiste meetoditega.

Kahjuks ka teised Bhatia ja Rosenthali esitatud lahendid ei paista lihtsasti üle kanduvat huvipakkuvale diferentsiaaljuhule. Näiteks kui operaatorite A ja B spektrid asuvad vastavalt paremas ja vasakus lahtises pooltasandis, siis $AX - XB = C$ lahend on kirjutatav kujul

$$X = \int_0^{\infty} e^{-tA} C e^{tB} dt. \quad (3.1.12)$$

Kui $\sigma(A)$ ja $\sigma(B)$ on lõikumatud, on võimalik veel üks kirjaviis. Olgu Γ kõikide suletud kontuuride ühend, mil on ümberkäigu arv (*winding number*) 1 ümber $\sigma(A)$ ja 0 ümber $\sigma(B)$. Sel juhul on lahend kirjutatav kujul

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (A - \zeta)^{-1} C (B - \zeta)^{-1} d\zeta. \quad (3.1.13)$$

Lõpuks olgu hermiitiliste operaatorite A ja B spektrid lõikumatud, $\sigma(A) \cap \sigma(B) = 0$. Olgu $f \in L^1(\mathbb{R})$ niisugune funktsioon, mille Fourier' pöörde

$$\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} f(t) dt \quad (3.1.14)$$

jaoks $\hat{f}(s) = 1/s$, kui $s \in \sigma(A) - \sigma(B)$ (hulk kõigist vahedest). Sel juhul on lahend kirjutatav kujul

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itA} C e^{itB} f(t) dt. \quad (3.1.15)$$

Diferentsiaalse Sylvesteri võrrandi (3.1.8) jaoks pakuvad [79] välja lahendi

$$X(t) = D + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathcal{S}^k(D) + \mathcal{S}^{k-1}(C)), \quad (3.1.16)$$

kus $\mathcal{S}(X) = AX + XB$ ja $t_0 = 0$.

Sylvesteri võrrandi lahendite kohta on tulemusi palju, kuid lahendite üldistamine vajalikule juhule ei ole ühegi variandi korral lihtne, kui üldsegi võimalik, ning operaatori \mathcal{V} lahendi leidumisel on oluline leida ka tema pöördoperaator \mathcal{V}^{-1} . Seda arvestades on praegu proovitud otsida mõnd teist lihtsamat lähenemist.

3.2 Wilsoni jooned

Tavalises Diraci teoorias on spiinorite faasiteisendus $\psi(x) \rightarrow e^{iq\lambda}\psi(x)$. Seda valemit võib proovida interpreteerida dünaamiliste vastasmõjude seisukohast, misjuhul see vastaks teisendus-
ele

$$\mathcal{V}(A)\psi(x) = \Psi(x, A) \rightarrow \Psi(x, A + \partial\lambda) = \mathcal{V}(A + \partial\lambda)\psi(x) = e^{iq\lambda}\mathcal{V}(A)\psi(x). \quad (3.2.1)$$

Siit võib proovida konstrueerida operaatorvõrrandi, viies läbi kalibratsiooniteisenduse nullise kalibratsiooniväljaga, s.o võiks

$$\mathcal{V}(0 + \partial\lambda) = e^{iq\lambda}\mathcal{V}(0). \quad (3.2.2)$$

On mõistlik eeldada, et kalibratsioonivälja puudumisel jätab dünaamiliste teisenduste operaator fermionvälja muutumatuks, s.o $\mathcal{V}(0) = \mathbb{1}$, mistõttu moodustub võrrand

$$\mathcal{V}(\partial\lambda) \sim e^{iq\lambda}. \quad (3.2.3)$$

Olgu veel märgitud, et analoogilist tulemust võiks oodata võrrandist (3.1.5), kui vähegi võib rakendada \mathcal{V} suhtes Leibnizi reeglit ja kommuteerida γ^μ välja, s.o kui kehtiks

$$[\mathcal{V}, i\partial_\mu] = -qA_\mu\mathcal{V}, \quad (3.2.4)$$

millest järeljub $\gamma^\mu[\mathcal{V}, i\partial_\mu] = -\gamma^\mu q A_\mu \mathcal{V}$.

Lähtudes vektorväljade gradienditeoreemi üldistusest nelivektoritele,

$$\int_a^b dx^\mu \partial_\mu f(x) = f(b) - f(a), \quad (3.2.5)$$

ja asendades $\partial_\mu \lambda \rightarrow A_\mu$, võiks pakkuda välja, et üldiselt on võrrandi (3.2.3) lahend seotud eksponentsiaalse joonintegraaliga

$$\mathcal{V}(A) \sim \exp\left(iq \int_\gamma A_\mu dx^\mu\right). \quad (3.2.6)$$

Niisugune objekt on väga sarnane Wilsoni joontega, mille teooriat on antud peatükis tutvustatud, eriti kuna see oli tükk aega seotud ühe katsega üldistada dünaamiliste teisenduste operaatorit. Siiski peab rõhutama, et gradienditeoreem rakendub ainult konservatiivsetele vektorväljadele.

3.2.1 Wilsoni joonte teooria alused

Wilsoni jooned ja kinniste kontuuride korral Wilsoni silmused on radajärjestatud (*path-ordered*) eksponentsiaalsed joonintegraalid

$$W_C(x, y) = \mathcal{P} \exp\left(iq \int_C dz^\mu A_\mu(z)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iq)^n \mathcal{P} \int_C dz_n^{\mu_n} \cdots dz_1^{\mu_1} A_{\mu_n}(z_n) \cdots A_{\mu_1}(z_1), \quad (3.2.7)$$

kus C on ette antud (pidev) tee otspunktidega x ja y , üldiselt mitte-Abeli kalibratsiooniteoorias $A_\mu = A_\mu^a t^a$ koos kalibratsioonirühma generaatoritega ja \mathcal{P} tähistab radajärjestust. Kui kontuur C parametrizeerida, s.o $C : z^\mu(\lambda)$, kus λ muutub mingites rajades a kuni b , siis võib kirjutada radajärjestuseks

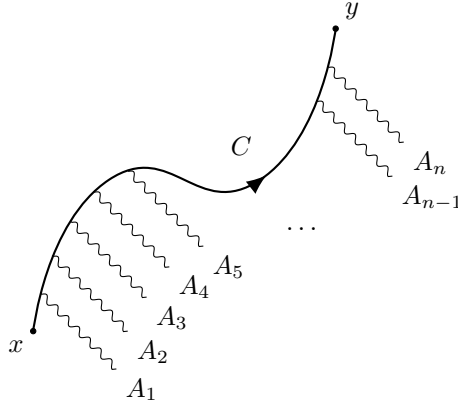
$$\mathcal{P} A_{\mu_1}(z_1) \cdots A_{\mu_n}(z_n) = \sum_{\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \theta(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \right) A_{\mu_1}(\lambda_1) \cdots A_{\mu_n}(\lambda_n), \quad (3.2.8)$$

kus summeerimine toimub üle kõikvõimalike λ_i permutatsioonide ja θ tähistab Heaviside'i astmefunktsiooni.

Algselt pakkus K. G. Wilson niisugused objektid välja kvarkvangistuse kirjeldamiseks, kuid hiljem on neid kasutatud näiteks silmuskvantgravitatsiooni teooria arendamisel (hiljem kasutusel nt spinnvõrgustikud või spinnvaht, nn *spin foam*), mittehäirituslikus kvantkromodünaamikas, kalibratsiooniteooriate formuleerimisel võrel, eriti eikonaalse lähendi juures, aga ka mujal. Antud juhul on Wilsoni joonte teooria tutvustamisel lähtunud eelkõige eriti der Vekeni, aga ka Mertensi ja Tšerednikovi töödest [82–84], kuid on leida ka teisi lühemaid ülevaateid, nt [85].

Vahetu Wilsoni joone (3.2.7) tõlgendus tema astmerea arenduse põhjal seisneb kalibratsiooniväljade kiirgamises üle kogu kontuuri, s.o n . järku avaldis tähendab n kalibratsioonibosoni kiirgamist. Radajärjestus tähendab, et kõik kiiratud kalibratsiooniväljad peavad jääma samasse

järjekorda, s.o boson A_i kiiratakse bosonite A_{i-1} ja A_{i+1} vahel, nagu muuhulgas paistab joonisest 3.1. Nagu kirjutab [82] (ptk 6.1), väljendab Wilsoni joon täielikku kalibratsiooni mõju üle mingi tee.



Joonis 3.1: Wilsoni joone $W_C(x, y)$ reaksarenduse n . järku liikme tõlgendus, kohandatud tööst [82]. Kalibratsioonibosonid võivad olla kiiratud joonel mistahes punktist, kuid jäävad radajärjestuse tõttu alati samasse järjekorda.

3.2.2 Mandelstami tingimus

Olgu märgitud, et gradienditeoreem kehtib ainult konservatiivsete vektorväljade jaoks, s.o ainult juhul kui $A_\mu = \partial_\mu \lambda$, mis tähendab, et A_μ peab olema puhtalt kalibratsiooniline (kalibratsiooniliselt ekvivalente nulliga). Teisisõnu elektromagnetvälja tugevuse tensor $F_{\mu\nu}$ peab olema nulline suurus. Tõepoolest, diferentseerides võrdust kovariantselt, saab

$$\partial_\mu A_\nu = \partial_\mu \partial_\nu \lambda. \quad (3.2.9)$$

Eeldades osatuletiste kommuteerumist (nim. Clairaut' või Schwarzzi teoreemiks; on tarvis teist järku osatuletiste pidevust, kuid füüsikas tihti eeldatakse isegi funktsioonide siledust), saab vahetult

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu \partial_\mu \lambda = 0. \quad (3.2.10)$$

Tingimust $A_\mu = \partial_\mu \lambda$, täpsemini tema analoogi Wilsoni joone $W(x, y)$ jaoks, s.o $\frac{\partial}{\partial y^\mu} W(x, y) = -igA_\mu(y)W(x, y)$, on ka nimetatud Mandelstami tingimuseks [86] (mitte sama kui Mandelstami kitsendused, *Mandelstam constraints*), viitega Mandelstami artiklile [87]. Äsjane triviaalne arvutus on esitatud teoreemina artiklis [86], vt ka [88]; vaatamata sellele, [89] ikkagi möödaminnes väidab, et Wilsoni joonte analoogial saab genereerida interaktsioonipanuse (vt seal valem (31)).

3.2.3 Wilsoni joontega seotud tuletised

Wilsoni joontel on mitmesuguseid omadusi. Olgu esitatud neist mõned.

1. Wilsoni jooned on unitaarsed, s.o $W_C(W_C)^\dagger = \mathbf{1}$.
2. Tee pööramine vastab hermiitilisele konjugeerimisele, $W_C = (W_{-C})^\dagger$.
3. Wilsoni jooned on tee-transitiivsed, s.o kui $C = C_1 + C_2$, siis $W_C = W_{C_1}W_{C_2}$.
4. Wilsoni joon teiseneb otspunktide funktsioonina,

$$W(x, y) \rightarrow e^{iq\alpha^a(y)t^a} W_{x,y} e^{-iq\alpha^a(x)t^a}. \quad (3.2.11)$$

5. Wilsoni silmus on kalibratsiooniinvariantne.

Märkimisväärne on, et Wilsoni jooned ilmuvad paralleeltranspordi võrrandi lahenditena. Lähtudes [82] ptk 2 esitusest, võib esmalt panna tähele, et tuletis on bilokaalne operaator, kuna ta on määratud kahes aegruumi punktis: tuletis vektori n^μ suunas on defineeritud kui

$$n^\mu \partial_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\psi(x + \epsilon n) - \psi(x)). \quad (3.2.12)$$

Seega on tarvis mingit viisi, kuidas viia erinevad aegruumi punktid kokku. Osutub, et Wilsoni joon just vastab paralleeltransportija (*parallel transporter*) nõuetele, mis paljuski langevad kokku äsja toodud loetelu omadustega. Seega võib konstrueerida kovariantse tuletise, mis Wilsoni joone (nim ka kalibratsiooni lülks, *gauge link*) abil ühendab erinevaid ruumipunkte:

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\psi(x + \epsilon n) - W(x, x + \epsilon n) \psi(x)). \quad (3.2.13)$$

Lähendades lõpmata väikest kaugust ϵn ainult esimese järguni, on

$$W(x, x + \epsilon n) \approx \mathcal{P} e^{\pm ieqn^\mu A_\mu(x + \frac{1}{2}\epsilon n)} \approx 1 \pm ieqn^\mu A_\mu(x), \quad (3.2.14)$$

mis samuti viib kovariantse tuletise tavalise definitsioonini,

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \mp iqA_\mu^a t^a \psi. \quad (3.2.15)$$

Tuletise analüüs on oluline, kuna Wilsoni jooned ei saa tegelikult vastata dünaamiliste vastasmõjude operaatori üldistusele, vt ptk 3.2.2. Wilsoni joonte teooriat saab olulisemalt kaugemale viia, nagu viidatud doktoritööd ja raamat ka teevad, näiteks arendades häiritusteooriat, uurides tüüpintegraale, transversaalse impulsitiheduse formalismi, segamisalgebrat (*shuffle algebra*), eikonaalset lähendit, uurida üldistatud silmusruumi (*generalized loop space*) vms. Antud juhul pakub huvi aga kahjuks väga piiratud küsimusteriing väga rikkas teooriate ringis — kas on võimalik rakendada Wilsoni jooni dünaamiliste vastasmõjude laiendamises, interaktsioonide viimises Poincaré algebrasse või lainefunktsioonide katmises.

Wilsoni joonte jaoks on võimalik defineerida veel mõned tuletised, vt [84] ptk 4, n.ö teetuletised (*path derivative*) ja pindtuletised (*area derivative*). Terviklikkuse huvides on need esitatud, kuna nad olid seotud ebaõnnestunud katsega asendada tavaline osatuletis võimalikult sarnase objektiga, mis vahest võimaldaks genereerida 4-potentsiaali. Need ebatavalised tuletised aga kahjuks ei andnud seda lahendit, sest nad ei anna lihtsal viisil kätte 4-vektoreid, olgugi et neid saab kasutada üldistatud tee- ja silmusruumi liikumisvõrrandite formuleerimisel.

Võib defineerida nn lõpetava kovariantse lõpppunkti tuletise (*terminal covariant endpoint derivative*). Olgu antud parametrizeeritud tee C lõpppunkti $q = C(1)$ lähedal vektorväli V , nii et $V(C(1)) = v \in T_{C(1)}M$. Vastavalt see lokaalne vektorväli tekitab lõpppunktist (parametrizeeritud kui $s = 0$) algava lokaalse integraalkõvera. Olgu see integraalkõver tähistatud η_s^V . Olgu $C_s = C + \eta_s^V$ uus kontuur, mis moodustub algsest teest C ja talle järgnevast integraalkõverast, olgu $q_s = C_s(1)$ kombineeritud tee lõpppunkt. Sel juhul on funktsionaalile W_C rakendatud lõpetav kovariantne lõpppunkti tuletis defineeritud kui

$$\nabla_V^T(q_s)W_C = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{W_{C_s+\Delta} - W_{C_s}}{\Delta}. \quad (3.2.16)$$

Asendades C_s teega $(-\eta_s^V) + C$, saab defineerida alustava (*initial*) kovariantse lõpppunkti tuletise. Oma olemuselt käitub see operaator suunatuletisena. Kui $s = 0$, võib defineerida lihtsalt lõpppunkti tuletise (*terminal endpoint derivative*)

$$\partial_v^T W_C = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{W_{C_\Delta} - W_C}{\Delta}. \quad (3.2.17)$$

Võib jätkata pindtuletiste ja Frechet' tuletise defineerimisega, kuid antud juhul pakub kitsast huvi ainult küsimus, kas need objektid on kasutatavad dünaamiliste vastasmõjude konstruktsiooni laiendamisel. Rakendades lõpppunkti tuletist paralleeltransportijale (Wilsoni joonele), kehtib

$$\partial_u^T W_C = W_C \omega(u), \quad (3.2.18)$$

kus

$$\omega = A_\mu(x) dx^\mu. \quad (3.2.19)$$

Kommutaator annab aga tavalise EM-välja tugevuse tensori,

$$[\nabla_{u_1}^T, \nabla_{u_2}^T] W_C = W_C \cdot F_{\mu\nu}(u_1^\mu \wedge u_2^\nu). \quad (3.2.20)$$

Valemi (3.2.18) põhjal võib näida, et on jõutud lähedale dünaamiliste vastasmõjude (või lainefunktsioonide katmise, Furry pildi) üldistamisele, s.o tuletiseni mille abil saaks genereerida EM-välja 4-potentsiaali. Kahjuks on aga siit jätkamine väga mittetriviaalne, 4-potentsiaali ei tekitata vahetu 4-vektorina. Esitatud objekt on otseselt seotud kontuuridega, samas kui Diraci võrrandis ilmuv osatuletis rakendub väljale. Otspunkti tuletised ei asu Poincaré algebras. Seega oleks tarvis liikumisvõrrandid põhimõtteliselt ümber kirjutada, võib-olla kasutades kontuure ka

osakesteväljade jaoks, ja väljateooriat teisiti tõlgendada — see viiks aga ka põhimõtteliselt uue teooria kirjutamiseni, mitte aga esialgu soovitud formalismide laiendamiseni, ja oleks üsnagi keeruline.

On seega ilmne, et Wilsoni joontega seotud katse ei ole lihtsasti võimeline üldistama dünaamiliste teisenduste operaatorit väljaspoole puhtalt kalibratsioonilisi väljasid ilma ulatuslikemate muudatusteta väljateooria konstruktsioonis. Põhjus on lihtne: elektromagnetiline 4-potentsiaal ei ole ise potentsiaalne väli. EM-välja tugevus ilmneb just 4-potentsiaali mittekonservatiivsuse tõttu. Võiks proovida muuta tuletise operaatorit, kuid niisugune muudatus ei oleks lihtne ja muudaks juba diferentsiaalvõrrandi iseloomu, eemaldudes tavalisest kvantväljateooria formuleeringust (kalibratsiooni kovariantne tuletis juba asendab osatuletise tehet). Alternatiivselt võiks proovida rikkuda osatuletiste kommuteeruvust, tuues sisse mittetriviaalseid konstruktsioone, vt ptk 3.4.3, kuid spekulatiivne arengusuund võiks olla ka mittekommutatiiitse geomeetriaga seotud [90].

3.3 Pseudodiferentsiaaloperaatorid

Paistab, et huvipakkuva võrrandi $\mathcal{V}i\cancel{\partial}\mathcal{V}^{-1}\psi = (i\cancel{\partial} - qA)\psi$ vahetu lahendamise ei ole lihtne. Samas võib võrrand lihtsustuda või anda mõne teise lihtsama võrrandi, kui otsida lahendeid sobival kujul. Käesolevas peatükis vaadatakse eksponentsiaalset *ansatz*'i ja vaja olnud pseudodiferentsiaaloperaatoreid, kuigi ka see meetod ei vii lihtsa lahendini.

3.3.1 Pseudodiferentsiaaloperaatorite teooria alged

Pseudodiferentsiaaloperaatorid (tihti lühendatakse Ψ DO) on diferentsiaaloperaatorite üldistus, mis modifitseerib funktsioone Fourier' ruumis. Kuigi võrdlemisi uus matemaatiline konstruktsioon (kaasaegne esitus valmis möödunud sajandi kuuekümnendatel), on neil palju rakendusi kaasaegses matemaatikas ja ka matemaatilises füüsikas, eriti elliptiliste operaatorite analüüsis, elliptiliste operaatorite indeksteoorias ja spektraalteoorias, aga ka mittelineaarsete osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teoorias. Praeguseks on Ψ DO-teooriat käsitlevat kirjandust väga palju; võib soovitada näiteks raamatuid [91–93], aga ka konspekte [94–96]. Kahjuks jääb praegune esitus väga lühikeseks, sest Ψ DO-de rakendust on antud töö mõttes tulnud võtta väga kitsalt.

Esmalt tuleb defineerida funktsiooniruum, millele Ψ DO-d mõjuvad. Schwartzi ruum $S = S(\mathbb{R}^n)$ on hulk siledatest funktsioonidest $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, nii et iga $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ja $N \geq 0$ jaoks

$$|\partial_x^\alpha u(x)| \leq C_{\alpha N} \langle x \rangle^{-N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.3.1)$$

s.o nõutakse piisavat kiiret funktsiooni ja tema tuletiste kadumist lõpmatusele lähenemisel, kus [94] eeskujul

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}. \quad (3.3.2)$$

Vastavalt on n -mõõtmeline funktsiooni $u \in S$ Fourier' pööre ja tagasipööre

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} u(x) \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (3.3.3)$$

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) \, d\xi. \quad (3.3.4)$$

Pseudodiferentsiaaloperaator $a(x, D)$ sümboliga $a \in S^{\mu, m}$ on defineeritud võrdusega

$$a(x, D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\xi e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi), \quad (3.3.5)$$

kus $u \in S$. Ühtlasi tähistatakse $\text{Op}(a) = a(x, D)$. Siin $S^{\mu, m}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ on hulk siledatest funktsioonidest $a : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ (antud juhul μ ja m on kumbki omaette \mathbb{R}^n indeks), nii et kõigi $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ jaoks

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} \langle x \rangle^\mu \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3.6)$$

Edasise jaoks on märkimisväärne, et Ψ DO-de jaoks kehtivad lihtsad kommutatsioonireglid tuletisoperaatori ja koordinaadiga:

$$[\text{Op}(a), -i\partial_j] = i\text{Op}(\partial_j a), \quad (3.3.7)$$

$$[\text{Op}(a), x_i] = -i\text{Op}(\partial_i a). \quad (3.3.8)$$

Tõestus seisneb vahetus kontrollis, arvestades et $-i\widehat{\partial_i u}(\xi) = \xi_i \hat{u}(\xi)$.

Praegu pakub huvi lihtne pseudodiferentsiaaloperaatorite üldistus, kus muudetakse Ψ DO sümbol Diraci algebra väärtuseliseks ja rakendatakse operaatorit ennast spiinorfunktsioonidele. Niisuguse üldistuse kogu matemaatilise struktuuri uurimine oleks omaette matemaatiline uurimisprobleem, kuid antud juhul pakub huvi üksnes tema rakendatavus teatud kommutaatorprobleemide lahendamisel. Analoogiliselt valemiga (3.3.7), saab otseselt tuletada

$$[i\rlap{-}\partial, \text{Op}(a)]\psi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\xi e^{ix \cdot \xi} \left[a(x, \xi)\rlap{-}\partial - \rlap{-}\partial a(x, \xi) + (i\rlap{-}\partial a(x, \xi)) \right] \hat{\psi}(\xi). \quad (3.3.9)$$

Pseudodiferentsiaaloperaatoreid Diraci operaatori analüüsis on samuti uuritud, vt nt [97] ptk 5, mis vaatab teistsugust lähenemist. Antud üldistuskatse nõuaks aga matemaatiliselt rangemat uurimist, mis kahjuks ei ole antud töö põhiline eesmärk.

Ψ DO-de teooria ise on lai, samas kui praegu läheb vaja üksnes kitsast osa. Saaks kirjeldada ja uurida Ψ DO-de kompositsiooni, sümboli ühesust, ligikaudset pööramist, s.o nn parameetriksi (*parametrix*) leidmist, Ψ DO-de pseudolokaalsust jne. Huvitav on aga märkida, et võrrand

$$0 = (i\rlap{-}\partial - m)\mathcal{V}\psi = (i\rlap{-}\partial - qA - m)\psi \quad (3.3.10)$$

ja tema teist järku Diraci võrrandi analoog

$$0 = (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\mathcal{V}\psi = \left((i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu - qA^\mu) - m^2 + \frac{1}{2}q\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right) \psi \quad (3.3.11)$$

paistavad võimaldavat lahendikatset Ψ DO-de abil, kui otsida lahendit pseudodiferentsiaal-*ansatz*'iga

$$\mathcal{V}\psi = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_M d\xi e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{\psi}(\xi) \quad (3.3.12)$$

ja lubada maatriksväärtuselist (Diraci algebra väärtuselist) sümbolit $a(x, \xi)$, mille jaoks paistab moodustuvat algebraline võrrand. Alternatiivselt võiks kirjutada võrrandisüsteemi lahti spiinori komponentide jaoks. Kui aga tegu on piisavalt heade omadustega funktsioonidega, siis tõepoolest võiks uurida Diraci võrrandi lahendamise võimalust stiilis

$$(i\partial - m) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\xi e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{\psi}(\xi) = (i\partial - qA - m) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\xi e^{ix \cdot \xi} \hat{\psi}(\xi), \quad (3.3.13)$$

mis moodustab võrrandi

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d\xi e^{ix \cdot \xi} (-\not{\xi} a(x, \xi) + i(\not{\partial} a(x, \xi)) - ma(x, \xi) + \not{\xi} + qA(x) + m) \hat{\psi}(\xi) = 0. \quad (3.3.14)$$

Kui on rahuldatud sümboli jaoks võrrand

$$-\not{\xi} a(x, \xi) + i(\not{\partial} a(x, \xi)) - ma(x, \xi) + \not{\xi} + qA(x) + m = 0, \quad (3.3.15)$$

on rahuldatud ka (3.3.13). Võrrand (3.3.15) peaks olema aga lahendatav Fourier' ruumis $x \rightarrow \zeta$ algebralisel teel. Kuna vaba Diraci võrrandi

$$(i\partial - m)\mathcal{V}\psi = 0 \quad (3.3.16)$$

lahendid on tasalainete superpositsiooni kujul teada, võib interakteeruva Diraci võrrandi lahendiks kirjutada $\psi = \mathcal{V}^{-1}(\mathcal{V}\psi)$, kui vähegi \mathcal{V}^{-1} eksisteerib ja on leitav. Ligikaudses lähenduses viiks see uuesti *parametrixi* küsimuse juurde. Elliptilisusprobleemi korral võib olla otstarbekam vaadata just teist järku Diraci võrrandit.

3.3.2 Eksponentsiaalne *ansatz*

Võrrandi (3.1.2) vahetu lahendamine ei paista olevat kuigi edukas. Võib-olla otsides teatud tüüpi lahendeid, s.o valides sobiva *ansatz*'i, on lahendusmetoodika lihtsam. Mõistlik on proovida otsida eksponentsiaalset lahendit

$$\mathcal{V} = \exp(U), \quad (3.3.17)$$

sest tuntud dünaamiliste vastasmõjude operaator on eksponentsiaalne (eksponentide korrutis, vt Baker-Campbell-Hausdorffi valem), eksponendi pööramine on lihtsam kui üldiselt operaatorite pööramine ning eksponentlahend viiks probleemi Lie' rühmade teooriale lähemale (eksponentkujutus).

Sümmeetriakaalutlustel võib proovida lahendada nii võrrandit, mis genereerib interaktsiooni-liikme, s.o esialgset võrrandit (3.1.2),

$$\mathcal{V}i\partial\mathcal{V}^{-1}\psi = (i\partial - qA)\psi, \quad (3.3.18)$$

kui ka võrrandit, mis eemaldab interaktsioonid,

$$i\partial\psi = \mathcal{V}^{-1}(i\partial - q\mathcal{A})\mathcal{V}\psi. \quad (3.3.19)$$

Reaksarenduse ümbergrupeerimisel saame

$$(i\partial + [i\partial, U] + \frac{1}{2!}[[i\partial, U], U] + \dots)\psi = (i\partial - q\mathcal{A})\psi, \quad (3.3.20)$$

$$(i\partial - q\mathcal{A} + [i\partial - q\mathcal{A}, U] + \frac{1}{2!}[[i\partial - q\mathcal{A}, U], U] + \dots)\psi = i\partial\psi. \quad (3.3.21)$$

Valemi $e^X Y e^{-X} = \text{Ad}_{e^X}(Y) = e^{\text{ad}_X}(Y)$, kus $e^{\text{ad}_X}(Y) = Y + [X, Y] + \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + \dots$, tõestamine on väike ülesanne raamatus [98], ptk 3.5, aga on reaksarenduse liikmete ümberpaigutamise abil vahetult kontrollitav.

Kahjuks ei ole võrrandite (3.3.20) ja (3.3.21) lahendamine siiski lihtne, sest faktoriaalsed tegurid takistavad lihtsa võrrandi moodustamist, ilma kogu rida summeerimata. Kui tegu oleks geomeetrilise reaga kommutaatoritest, siis (3.3.21) analoogi

$$(i\partial - q\mathcal{A} + [i\partial - q\mathcal{A}, Y] + [[i\partial - q\mathcal{A}, Y], Y] + [[[i\partial - q\mathcal{A}, Y], Y], Y] + \dots)\psi = i\partial\psi \quad (3.3.22)$$

jaoks võib pakkuda välja lahendi pseudodiferentsiaaloperaatorina, samas kui (3.3.20) analoogi

$$(i\partial + [i\partial, Y] + [[i\partial, Y], Y] + [[[i\partial, Y], Y], Y] + \dots)\psi = (i\partial - q\mathcal{A})\psi \quad (3.3.23)$$

jaoks on see oluliselt mittetriviaalsem (ei moodustu algebralist võrrandit, vaid konvolutsioon jääb sisse). Seega kui vähegi leidub pööratav operaator E , mis teisendab eksponentrea (3.3.21) operaatori U geomeetrilise rea (3.3.22) operaatoriks $Y = E(U)$, oleks otsitav operaator $\mathcal{V} = \exp(E^{-1}(Y))$.

Tavalise algebralise geomeetrilise rea summa valem on tuntud, nagu on ka summa valemite tuletamine. Operaatoritasemel üldistub see tõestus üsna vahetult ka kommutaatorreale. Antud juhul on võrrandist (3.3.22) vahetult järelduv võrrand

$$S = (-q\mathcal{A} + [i\partial - q\mathcal{A}, Y] + [[i\partial - q\mathcal{A}, Y], Y] + [[[i\partial - q\mathcal{A}, Y], Y], Y] + \dots)\psi = 0 \quad (3.3.24)$$

rahuldatud, kui

$$[i\partial, Y] = q\mathcal{A}, \quad (3.3.25)$$

kui vähegi rida (3.3.24) koondub piisavalt hästi (vahetu arvutus).

Oluline on, et võrrand (3.3.25) annab pseudodiferentsiaaloperaatori (üldistuse) $Y(a)$ sümboli $a(x, \xi)$ jaoks puhtalt algebralise võrrandisüsteemi. Tõepoolest, vahetu kontroll annab

$$[i\partial, Y(a)]\psi = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\xi e^{ix\xi} \left[a(x, \xi)\xi - \xi a(x, \xi) + (i\partial a(x, \xi)) \right] \hat{\psi}(\xi), \quad (3.3.26)$$

$$\mathcal{A}(x)\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\xi e^{ix\xi} \mathcal{A}(x)\hat{\psi}(\xi). \quad (3.3.27)$$

Seega võime kirjutada, et suvalise spiniiri ψ jaoks peab kehtima

$$\left([i\partial, Y] - q\hat{A}\right)\psi = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\xi e^{ix\xi} \left[a(x, \xi)\not{\xi} - \not{\xi}a(x, \xi) + (i\partial a(x, \xi)) - q\hat{A}(x) \right] \hat{\psi}(\xi) = 0. \quad (3.3.28)$$

See on alati rahuldatud mistahes spiniiri ψ jaoks, kui nõuda

$$a(x, \xi)\not{\xi} - \not{\xi}a(x, \xi) + (i\partial a(x, \xi)) - q\hat{A}(x) = 0. \quad (3.3.29)$$

See on diferentsiaalvõrrandite süsteem $a(x, \xi)$ komponentide jaoks, kuid ei ole mingit sõltuvust neist funktsioonidest, millele peab pseudodiferentsiaaloperaator mõjuma, erinevalt sellest, mis juhtuks rea (3.3.23) korral. Kui see võrrandisüsteem on vähegi lahenduv, on leitud puhas pseudodiferentsiaaloperaator iga ette antud tugeva klassikalise tausta $\hat{A}(x)$ korral.

Võrrandit (3.3.29) võib lahendada Fourier' ruumis, kuna tuletiseoperaator on seotud ainult otsitava sümboliga $a(x, \xi)$ ja mitte teiste suurustega. Sel juhul saab uutes x^μ -dega seotud impulsikoordinaatides ζ^μ võrrandi

$$\not{\zeta}\hat{a} = [\hat{a}, \not{\zeta}] - q\hat{A}, \quad (3.3.30)$$

sest Fourier' pöörde lineaarsuse tõttu $\widehat{\not{\zeta}a(x, \xi)}(\zeta, \xi) = \not{\zeta}\hat{a}(\zeta, \xi)$, $\widehat{a\not{\zeta}}(\zeta, \xi) = \hat{a}(\zeta, \xi)\not{\zeta}$ ja $\widehat{\hat{A}(x)} = \hat{A}(\zeta)$, samas kui $\widehat{i\partial a(x, \xi)} = -\not{\zeta}\hat{a}(\zeta, \xi)$. Võrrand (3.3.30) on algebraalne võrrand, mille võib lahendada vahetult arvuti algebraprogrammide abiga. Tulemuseks on

$$a(x, \xi) = - \int \frac{d^4\zeta}{(2\pi)^4} e^{i\zeta x} \frac{-\not{\zeta}q\hat{A} - 2q\hat{A} \cdot \xi}{\zeta^2 + 2\zeta \cdot \xi}, \quad (3.3.31)$$

kui vähegi see Fourier' tagasipööre koondub. Märkimisväärne on võrrandi (3.3.30) kokkulangemine Sylvesteri võrrandiga.

Võimalus niisugust lähenemist jätkata sõltub sellest, kas eksponentrida geomeetriseliseks reaks teisendavat operaatorit E leidub. Kahjuks ei ole niisuguse operaatori üldine olemasolu kindel. Siiski annab lootust olukord reaalmuutuja funktsioonide teoorias, mis teisendab muutuja x talle vastavaks integraaloperaatoriks (vrd kvantväljateooria ajaline korrastus), s.o

$$E(x) = \int_0^x dx'. \quad (3.3.32)$$

Sel juhul eksponentrida tõepoolest langeb kokku geomeetriselise reaga integraaloperaatoritest,

$$1 + \int_0^x dx' + \int_0^x dx' \int_0^{x'} dx'' + \int_0^x dx' \int_0^{x'} dx'' \int_0^{x''} dx''' + \dots = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (3.3.33)$$

Kuigi operatsiooni E on nimetatud kujutuseks, ei ole see matemaatilises mõttes range. Isegi reaalmuutuja funktsioonide korral nõuab niisugune tehe sobival viisil korrutamise ümbersõnastamist integraaloperaatorite ruumis, s.o $E(x^2) = \int_0^x dx' \int_0^{x'} dx''$, mitte $\int_0^x dx' \int_0^x dx''$ jne. Pööramist

tuleks mõista väga kitsas tähenduses $E^{-1}(\int_0^x dx') = x$ ning oleks õigem tähistada mitte E^{-1} , vaid G (sõnadest eksponentsiaalne vs geomeetriline). Samuti ei ole selge, kuidas sellist operatsiooni üldistada (Lie' algebra) kommutaatorite juhule. Võiks proovida vaadata üle Lie' algebra väärtuseliste funktsioonide integreerimisteooria, kuid võiks ka proovida maatrikskorrutised lahti kirjutada ja uurida komponente.

Lõpuks veel on alternatiivne võimalus proovida läheneda operaatorlogaritmi seisukohast, uurides avaldist

$$e^{\text{ad}_U}(i\phi) = (i\phi - qA), \quad (3.3.34)$$

mida tuleks käsitleda võrrandina U suhtes, kuid see põrkab otsekohe kahe probleemi otsa: tuleb vaadata üle operaatorlogaritmi kasutusvõimalused (diferentsiaaloperaatorite kõrval) ja leida sobiv viis liikuda kaasesitusest U juurde üle. Vastavalt ei ole ka see lähenemine kuigi lihtne, kusjuures lahenduvus jällegi ei ole kindel. Üldiselt võib kahjuks öelda, et pseudodiferentsiaaloperaatoritega seotud katse jääb kinni matemaatilise teooria arendamise ja matemaatiliste nüansside taha, kusjuures huvipakkuvad matemaatilised küsimused ei pruugi olla lahendatavad.

3.4 Alternatiivsed meetodid

Teooria üldkuju probleemi lahendamiseks on võimalik veel välja mõelda hulk lahendusideeid, mõni spekulatiivsem kui teine, mis on koondatud sellesse peatükki. Üks ühine joon kõigil neil katsetel on selles, et nad genereerivad ainult minimaalse asenduse ilma selge üldistusega mitteminimaalse asenduse juhule, kuigi see tunnus oli ka mitmel eelkirjeldatud mõttel. Seega ei ole antud katsed kahjuks selgel viisil võimelised lahendama dünaamiliste vastasmõjude probleeme.

Ilma oluliselt süvenemata on ka näiteks kaalutud ideed tõlgendada kalibratsioonivälja väärtusi sõltumatute koordinaatidena kõrgemamõõtmelises ruumis, mis on muuhulgas [2] kokkuvõtte üsna sõnasõnaline tõlgendus. Kui olla väljaspool massipinda, siis ei ole veel kindlaid seoseid erinevate väljade ja aegruumi punktide vahel, mis ka viib ideeni proovida tuua sisse (mitte ainult kalibratsiooniga seotud) väljad esialgu sõltumatute koordinaatidena ning väljalaadne iseloom anda alles näiteks massipinnale lähenemisel. Kahjuks ei ole ka selle ideega jätkamine lihtne ja kalduks magistritöö eesmärgist oluliselt kõrvale.

Ühelt poolt peaks see konstruktsioon mittetriviaalselt erinema tavalisest diferentsiaalgeomeetrisest väljateooria konstruktsioonist, kus väljasid tõlgendatakse lõigetena kihtkondades — enne lõike moodustamist võib käsitletava vaatenurga järgi tõlgendada kihi koordinaate just soovitud viisil. Teiselt poolt pole aga selge, mida täpselt (mis trajektoori) tuleks liikumise kirjeldamiseks varieerida. Lähim mõte oli proovida väljasid tõlgendada mingite hüperpindadena, mis saavad väljaiseloomu vabal arenemisel $4 + d$ -mõõtmelises ruumis (d on väljakoordinaatide arv), kusjuures näiteks aja mõõtme suunaline potentsiaal sunniks pinna võtma sobiva kuju. Sel juhul oleks aga tarvis kontrollida näiteks Lorentzi invariantust. Mõju printsiibi kirjapanekul võiks

vahest saada inspiratsiooni stringiteooriast, kuigi lahendus poleks ikkagi ilmne ja ei lahendaks praegu vaadatud probleeme, vaid laiendaks üht dünaamiliste vastasmõjude ideed.

3.4.1 Algebraised muudatused

Võrdlemisi ekstreemne variant probleemi lahendamiseks oleks teistsuguse algebraise struktuuri ja korrutamistehte sissetoomine. Interaktsioonide genereerimine korrutamistehte

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) * (a, b, c, d) = (\alpha a, \beta b, \gamma c, \delta d) \quad (3.4.1)$$

jaoks ei valmistaks probleeme. Ühe nelivektori komponendi jaoks peaks ühemõõtmeline potentsiaal leiduma diferentsiaal- ja integraalarvutuse põhiteoreemi järgi, kui komponent on vähegi integreeruv. Valides mingi suvalise fikseeritud punkti 0, saaks nt kirjutada ühemõõtmelise potentsiaali

$$U_0 = \int_0^{x^0} A_0(x') dx'^0, \quad (3.4.2)$$

nii et $\partial_0 U_0 = A_0$. Eksponentsiaalpotentsiaali $V_0 = \exp(U_0)$ korral saaks $\partial_0 V_0 = A_0 V_0$; analoogiliselt võib jätkata teiste komponentide jaoks. Siis saaks väga lihtsasti realiseerida huvipakkuva konstruktsiooni analoogi:

$$(V_0^{-1}, V_1^{-1}, V_2^{-1}, V_3^{-1}) * (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) * (V_0, V_1, V_2, V_3) = (A_0, A_1, A_2, A_3), \quad (3.4.3)$$

millele tuleks lisada juurde spiinoritele mõjumise osa. Lihtsam „potentsiaal“ mittekonserveerivale väljale A_μ oleks

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) * (U_0, U_1, U_2, U_3) = (A_0, A_1, A_2, A_3). \quad (3.4.4)$$

Kui soovida genereerida minimaalset asendust $i\partial_\mu$ jaoks, võib lihtsalt lisada imaginaarühiku eksponendi argumenti.

Igasuguseid algebraisi ümbertõlgendusi saaks muidugi jätkata. Näiteks kui $V_\mu = \exp(iU_\mu)$, saaks Leibnizi reeglit arvestades

$$i\cancel{\partial} - q\cancel{A} = V_0^{-1}\gamma^0 i\partial_0 V_0 + V_1^{-1}\gamma^1 i\partial_1 V_1 + V_2^{-1}\gamma^2 i\partial_2 V_2 + V_3^{-1}\gamma^3 i\partial_3 V_3, \quad (3.4.5)$$

mis võimaldaks tõlgendada, et minimaalne asendus tekib mittekovariantsest asendusest

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &\rightarrow V_\mu^{-1}\gamma^\mu, \\ \partial_\mu &\rightarrow \partial_\mu V_\mu \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Võiks spekulatiivselt väita, et see annab minimaalsele asendusele uue tõlgenduse, kuid sel oleks väärtust ainult siis, kui sel korrutisel tegelikult oleks märkimisväärne tõlgendus (nagu on skalaarkorrutisel). Antud juhul aga ei oleks üldiselt tegu isegi kovariantse objektiga, 4-vektoriga.

\times	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Tabel 3.1: Kvaternioonide baasidelementide korrutustabel.

Sarnase tulemuse saab saavutada väljateooria laiendamisel hüperkompleksruumi. Ilmselt kõige enam arendatud hüperkompleksteooriatest üle reaalarvude on kvaternioonide \mathbb{H} oma; kvaternioonid moodustavad assotsiatiivse neljamõõtmelise jagamisega algebra üle reaalarvude, mille baasidelementide korrutised on antud tabelis 3.1. Kvaternioonide teooriat, sh kvaternioonset analüüsi, on võimalik jätkata oluliselt kaugemale, kuid antud juhul on kvaternioone kasutatud puhtalt selleks, et lisada märgi 4-vektori komponentidele külge, mis kvaternioonse reaaloosa võtmisel (kvaterniooni komponent, mis on seotud baasidelemendiga 1) annab soovitud 4-vektori komponendid; analoogiline konstruktsioon sobiks ka mõne teise hüperkomplekslaienduse korral. Bikvaternioonid, mida on ka antud juhul kasutatud, on vastavalt kvaternioonide algebra üle kompleksarvude (vrd reaalarvude).

Lisades tavalisele 4-tuletisele hüperimaginaarsed komponendid juurde, tuginedes Grassmanni algebra analoogiale (miinusmärk tuleneks praegu justkui pööramisnõudest $e_i \frac{1}{e_i} = 1 = e_i(-e_i)$),

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \rightarrow \partial_\mu^H = (\partial_0, -e_1\partial_1, -e_2\partial_2, -e_3\partial_3), \quad (3.4.7)$$

on lihtne realiseerida „hüperpotentsiaali“ mittekonserveeriva A_μ jaoks:

$$\mathcal{U} = U_0 + e_1U_1 + e_2U_2 + e_3U_3, \quad (3.4.8)$$

nii et

$$A_\mu = \text{Re } \partial_\mu^H \mathcal{U}. \quad (3.4.9)$$

Sobival viisil suurus kas ümber tõlgendades või muutes, saaks realiseerida kvaternioonse Diraci võrrandi analoogi, mille reaalmõõde langeb kokku tavalise Diraci võrrandiga.

Niisuguse konstruktsiooni puhul on lähtunud mõttest, et Feynmani diagrammide verteksites kaduvad osakesed võivad ajutiselt ilmuda imaginaarsesse ruumi ning tekkivad osakesed võivad pärineda imaginaarsest ruumist, samas kui realselt jälgitavad protsessid toimuvad reaaloosale vastavas mõõtmes. Hüperimaginaarsetes mõõtmetes toimuvaid protsesse saaks võib-olla kasutada tumeainega seotud mudelites. Olgu märgitud, et see idee ei ole sama, mida on vaatanud nt Adler [99], kes on pigem vaatanud kvaternioonsete komponentidega kvantteooriat (vrd kompleksarvude ja kvaternioonide faasiostsilleerumist). Praegu esitatud idee korral ei oleks väljavõrrandi reaaloosa eristatav tavalise kvantelektrodünaamika omast; kvaternioonse väljateooria eksperimentaalse kontrolli kohta vt nt [100–102].

Samas, et jõuda tegelikult töötava teooriani, nõuaks selle hüperkompleksidee jätkamine palju vaeva. Esiteks tuleks hüperimaginaarühikute lisamisel üldsegi üle vaada Lorentzi kovariantsuse nõuded: üldjuhul mitu korrutist ei pruugi üldsegi anda õigeid tulemusi; kovariantsus on seotud põhimõttelise uuritava füüsikalise ruumi etteseadmisega. Lisaks oleks tarvis muuta Diraci võrrandi komponente (kas tuletist, gammamaatrikseid või muud) põhimõttelisel viisil, millega läheb kaduma tavaline tõlgendus (eriti oluline nt ahenduste ja skalaarkorrutiste mõttes).

Võib küll öelda, et on pakutud alternatiivseid algebralisi meetodeid, kuidas tuua teooriasse minimaalne asendus või kontrueerida nt hüperkompleksarvude abil „hüperpotentsiaal“, ei ole neist kuigipalju kasu ilma selge tõlgenduseta ja kovariantsuse kontrollita. Arvestades veel seda, et praegu on genereeritud ainult minimaalne asendus, ei ole neist ka kõrgema spinni teoorias kasu. Vahest üksnes mittekonserveerivate vektorväljade analüüs kõrgemamõõtmelises (hüperkompleks)ruumis pakuks mõningast matemaatilist huvi.

3.4.2 Greeni funktsiooni meetod

Osutub, et on võimalik välja pakkuda formaalne interakteeruva Diraci võrrandi lahend, mis sisaldab operaatorit, mis meenutab dünaamiliste vastasmõjude operaatori kuju. Vastavat meetodit on kirjeldatud konverentsiettekandes [103].

Olgu siis $\psi(x, A)$ interakteeruva Diraci võrrandi

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x, A) = q\cancel{A}(x)\psi(x, A) \quad (3.4.10)$$

lahend ja olgu $\psi(x, 0)$ vaba Diraci võrrandi

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x, 0) = 0 \quad (3.4.11)$$

lahend. Siis võib kirjutada iteratiivseks asendamiseks

$$\psi(x, A) = \psi(x, 0) - \int S_F(x - x') i q \cancel{A}(x') \psi(x', A) d^4 x', \quad (3.4.12)$$

kus Feynmani propagaator, seega ka Greeni funktsiooni jaoks kehtib

$$(i\cancel{\partial} - m)G(x - x') = i\delta^{(4)}(x - x'). \quad (3.4.13)$$

Valemi (3.4.12) itereerimisel saab

$$\begin{aligned} \psi(x, A) &= \psi(x, 0) + \int d^4 x' G(x - x') (-i q \cancel{A}(x')) \psi(x', 0) + \\ &+ \int d^4 x' G(x - x') (-i q \cancel{A}(x')) \int d^4 x'' G(x' - x'') (-i q \cancel{A}(x'')) \psi(x'', 0) + \dots = \\ &= \mathcal{T} \left\{ \exp \left(- \int d^4 x' G(x - x') i q \cancel{A}(x') \right) \right\} \psi(x', 0) =: \mathcal{V}_G \psi(x', 0). \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Ajaline korrastus suunab propagaatorid valguskoonuses ettepoole.

Kahjuks ei ole antud lahend siiski vahetult kasutatav uuritava problemaatika juures. Esiteks, operaator \mathcal{V}_G ei genereeri ega kaota interaktsioonipanuseid lagranžiaanist või väljavõrrandist, vaid teisendab vaba Diraci võrrandi lahendi interakteeruva võrrandi lahendiks. Ühtlasi on \mathcal{V}_G lõpmatu rida integraaloperaatoritest ja võrdlemisi keeruline objekt, võrreldes näiteks lihtsalt maatriksiga, ja nõuaks koonduvuse kontrollimist. Operaatoriseloos ühtlasi annab suunasõltuvuse: integreerimine toimub avaldises suunas paremale, mis tähendab, et kaasoperaatori uurimine nõuaks jällegi rohkem tööd. Seega ei ole kahjuks selge, kuidas niisugust operaatorit üle kanda dünaamiliste vastasmõjude ja interaktsioonide tekitamise probleemide juurde, olgugi et \mathcal{V}_G annaks näiteks võimaluse ümber tõlgendada kalibratsiooniteisenduste konteksti — osutub, et $\psi(x, A - \partial\alpha) = \exp(iq\alpha(x))\psi(x, A)$, s.o kalibratsiooniteisendusest järelduks ka faasiteisendus.

3.4.3 Mitmeväärtuselised funktsioonid

Nagu juhtis tähelepanu dr Groote, on võimalik Mandelstami tingimusest mööda pääseda, kasutades dr Kleinerti eeskujul mitteholonoomsust [104], ptk 12. Lähtudes nn mitteholonoomse kalibratsiooniinvariantsuse printsiibist, võib postuleerida, et dünaamika jääb õigeks ka juhul, kui lubada mitmeväärtuselisi kalibratsioonifunktsioone $\Lambda(x)$, mis rikuvad Schwarzi integreeruvus-tingimust, s.o

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\Lambda(x) \neq 0, \quad (3.4.15)$$

mistõttu

$$A_\mu(x) = \partial_\mu\Lambda(x) \quad (3.4.16)$$

ja $F_{\mu\nu} \neq 0$, vahetult pääsedes mööda peatükis 3.2.2 esitatud probleemist. Seega võib kasutada mitteholonoomseid kalibratsiooniteisendusi elektromagnetinteraktsioonide sissetoomiseks.

Mitmeväärtuseliste funktsioonide kasutamist füüsikas on pikemalt käsitletud teises Kleinerti raamatus [105], kus on vaadatud mitmeväärtuseliste funktsioonide rakendusi elektromagnetismis ja magnetmonopoolide, ülijuhtide ja ülivoolavate vedelike teooriates, gravitatsiooniteoorias ning aegruumi kõveruse ja väände uurimisel. Selles raamatus on põhimõtteliselt puudu mitmeväärtuseliste funktsioonide *matemaatiline* teooria, mis ei ole triviaalne. Kui „funktsiooni“ argumendile võib seada vastavusse mitu väärtust, tekib otsekohe küsimus, kuidas defineerida niisuguste objektide summa, korrutis jne. Kleinert võtab aga mitmeväärtuseliste funktsioonide teooriat peaaegu iseenesest mõistetavana.

Kleinert on näiteks vabalt kasutanud eksponenti $e^{i\Lambda(x)}$ mitmeväärtuselise funktsioonist (vt [105]). Kui mitmeväärtuline funktsioon käitub vähegi tavalistele funktsioonidele omasel viisil, siis potentsiaalsuse omadust (3.4.16) arvestades, saaks otseteed näiteks lahendada Diraci võrrandi. Tõepoolest, siis oleks triviaalselt

$$0 = (i\cancel{D} - qA - m)\psi = e^{-i\Lambda}(i\cancel{D} - m)e^{i\Lambda}\psi = e^{-i\Lambda}(i\cancel{D} - m)\Psi. \quad (3.4.17)$$

Kui vähegi (mitmeväärtuselist) diferentsiaalvõrrandit

$$(i\partial - m)e^{i\Lambda}\psi = (i\partial - m)\Psi = 0 \quad (3.4.18)$$

saab lahendada tüüpilise vaba väljavõrrandi lahendamise kombel, s.o tasalaineliste lahendite otsimise moel, võiks võrrandi (3.4.17) põhjal tasalainelise lahendi $e^{i\Lambda}\psi = \Psi \sim e^{-ip \cdot x}$ teisendada interakteeruva Diraci võrrandi lahendiks $\psi = e^{-i\Lambda}\Psi$.

Mitmeväärtuseliste funktsioonide teooria on aga oluliselt keerulisem, kui võib eelneva põhjal paista, ning on mitmel erineval viisil arendatav: võib vaadata Riemanni pindasid (nagu paistab kasutavat Kleinert), kuid võib ka vaadata kimpe (*sheaf*) või üheväärtuselisi harusid (*branch*), aga samuti võiks vaadata funktsiooni väärtusi hulkadena vms. Samas ei ole Kleinerti lähenemine rakendatav dünaamiliste vastasmõjude kõrgema spinni tarbeks, sest ta genereerib minimaalse asenduse. Küsimus, kas mitmeväärtuseliste funktsioonide teooria oleks rakendatav oluliselt praktilisemas tugeva välja kvantelektrodünaamikas, jääb lahtiseks, sest see lähenemine nõuaks keerulise konstruktsiooni sissetoomist, mis ei pruugi lihtsustada tegelikke arvutusi (vrd teiste meetoditega, kasvõi numbrilise lahendamisega). Bradford jt näiteks kirjutavad, et „Riemanni pinnad on ilus kontseptuaalne skeem, aga hetkel ei ole nad arvutuslikud skeemid“¹ [106], muuhulgas rõhutades mitmeväärtuseliste funktsioonide kombineerimise raskusi. Lõpuks jääb veel mitteholonoomse potentsiaali, mis rahuldaks nõuet (3.4.16), konstrueerimise probleem. Samuti peab vaatama mitmeväärtuseliste funktsioonide diferentsiaalvõrrandite teooriat (vt nt [107]).

Terviklikkuse huvides olgu antud näiteks Riemanni pinna definitsioon. Matemaatiliselt terviklikuma ülevaate võib leida näiteks konspektidest [108, 109]. Lühiduse huvides ilma lisamõistete definitsioonide ahelat jätkamata võib öelda, et Riemanni pinna saab defineerida analoogiliselt kompleksmuutkonnaga, nagu see on ka antud äsja viidatud konspektides.

Definitsioon. *Riemanni pind on sidus Hausdorffi topoloogiline ruum X , millel on lahtine kate U_i ja kogum homöomorfisme $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$, nii et leiduvad analüütilised kujutused g_{ij} , mis rahuldavad igal hulgal $U_{ij} = U_i \cap U_j$ nõuet*

$$f_i = g_{ij} \circ f_j.$$

Samas [108] nõuab lisaks, et topoloogiline ruum rahuldaks teist loenduvusaksioomi. Analoogiat muutkondade teooriaga saab jätkata, defineerides vajalikke kujutusi Riemanni pindade vahel.

Definitsioon. *Olgu U_1, U_2 Riemanni pinnad, kus pinnal U_1 leidub atlas, mis koosneb ainult ühest kaardist $f_1 : U_1 \rightarrow V_1$, ja pinnal U_2 leidub atlas, mis koosneb ainult kaardist $f_2 : U_2 \rightarrow V_2$, kusjuures $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}$ on lahtised. Siis kujutust $g : U_1 \rightarrow U_2$ nimetatakse holomorfseks, kui kujutus $f_2 \circ g \circ f_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$ on holomorfne.*

¹ „Riemann surfaces are a beautiful conceptual scheme, but at the moment they are not computational schemes.“

Definitsioon. Olgu X ja Y kaks Riemanni pinda. Kujutust $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse pidevaks kujutuseks, kui X atlase (U_i, g_i) ja Y atlase (V_j, h_j) jaoks

$$f^{-1}(V_j) \cap U_i \xrightarrow{f} V_j$$

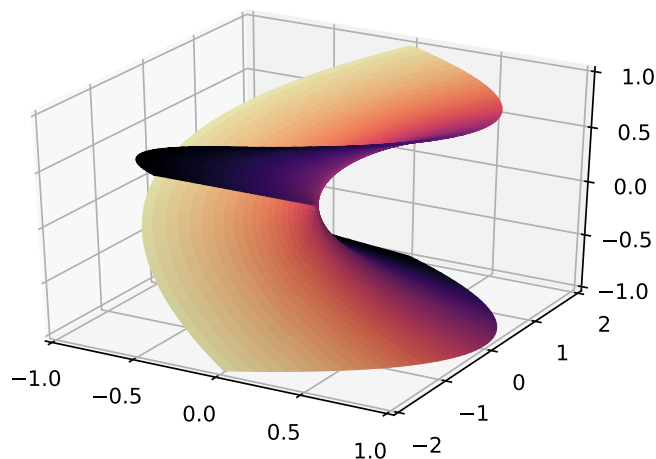
on holomorfned kõigi i, j jaoks.

Matemaatilist teooriat saaks jällegi oluliselt kaugemale viia, kuid paratamatult tekib küsimus, kas see lihtsustab uuritavaid füüsikalisi probleeme. Näide Riemanni pinnast on antud joonises 3.2.

Lihtsam viis Riemanni pindade mõiste tutvustamiseks on analüütilise jätkamise meetodil, nagu seda on tehtud Ahlforsi [110] ja Knoppi [111, 112] raamatutes.

Teoreem. Olgu regulaarne (s.o analüütiline) kompleksmuutuva funktsioon $f_1(z)$ defineeritud hulgal U_1 ja olgu U_2 hulk, mille piirkonnaga U_1 on ühine ainult hulk V . Siis kui leidub funktsioon $f_2(z)$, mis on regulaarne hulgal U_2 ja langeb kokku funktsiooniga $f_1(z)$ hulgal V , on ta üheselt määratud, kusjuures neid funktsioone nimetatakse teineteise analüütilisteks jätkudeks.

Seega sõnaliselt, Knoppi [112] (ptk 17) järgi, võib Riemanni pinna moodustamiseks liita kokku koondumisringe. Alustades mingist elemendist ja talle vastavast astmerea, võib määramispiirkonda laiendada mingi teise astmerea ja talle vastava koondumisringiga, mis liidetakse üheks kokku esialgse koondumispiirkonnaga, kui vähegi funktsiooni väärtused langevad samuti kokku. Nii võib jätkata, kuni viimase astmerea ja talle vastava koondumisringiga jõutakse mõne varasema koondumisringi juurde. Nüüd kui laiendatud funktsiooni väärtused langevad ikkagi kokku varem defineeritud väärtustega, võib need hulgad kokku liita üheks, aga kui väärtused ei ühti, tuleb neid eristada (justkui hoida paberilehte varasema kohal ja mitte liimida varasema külge). Tulemusena on igal ühel koondumisringil või kihil (lehel) üheselt määratud funktsiooni väärtus. On aga ilmne, et niisugune sõnaline tutvustus ei ole piisav vaadatud probleemide lahendamiseks.



Joonis 3.2: Lõige funktsiooni $f(z) = \sqrt{z}$ Riemanni pinnast. Pinna värv vastab imaginaarosale.

4. Võimalikud edasised uurimissuunad

Dünaamiliste vastasmõjude teooria põhiprobleem vajamineva operaatori üldkuju osas, st ka teooria üldkuju osas, on endiselt lahendamata ning autori arvates kõrvalised dünaamiliste vastasmõjudega seotud uurimused ei ole asjakohased enne, kui üldkuju probleem on lahendatud; üldkuju probleem on põhiküsimus, ilma mida lahendamata ei saa dünaamiliste vastasmõjude teooria olla täielik kõrgema spinni teooria kandidaat. Siiski on aga võimalik pakkuda välja uurimissuundasid, mille lahendamine peaks olema oluliselt lihtsam, kui magistritöö ülesanne osutus olevat.

Vaatamata põhiprobleemide lahtisusele, on ikkagi võimalik pakkuda uurimisküsimusi, mille lahendamiseks ei ole tarvis üldkuju küsimuse vastuse teadmist. Sel juhul jääb küsimuse asjalikkus hinnata tema lahendajale. Samas on aga võimalik välja pakkuda uurimisküsimusi, mis kasvavad välja antud töös katsetatud meetoditest. Huvi pakub eelkõige uurimissuuna muutmine nii alternatiivsete küsimuste endi seisukohast, aga ka dünaamiliste vastasmõjude seisukohast, sest paistab, et dünaamiliste vastasmõjude teooria enda arendamine seisab temaga seotud laiemate küsimuste taga kinni.

Magistritöös ei ole mõnd lähenemist eraldi vaadatud, näiteks võrrandite ligikaudset või numbrilist lahendamist. Põhjus on selles, et madalaspinniliste võrrandite lahendite üldistamiseks kõrgema spinni juhule peaks ligikaudse meetodi arvutusrida summeeruma piisavalt selgele kujule, millest kõrgema spinni analoogi väljalugemine on piisavalt lihtne. Ligikaudsete meetodite korral ei ole kindlust, et häiritusrida esitub sobival kujul, kui lahend üldsegi koondub, juhul kui sobiv ligikaudne meetod üldsegi leidub. Lisaks veel näiteks magistritöös ette tulnud diferentsiaalvõrrandite numbriline lahendamine ei ole ilmselt lihtsam ega mõistlikum kui vahetult interakteeruva Diraci võrrandi numbriline lahendamine ka tugeva välja kvantelektrodünaamika tarbeks. Kaheldamatult saaks proovida erinevaid meetodeid, kuid tuleb silmas pidada nende otstarbekust — kui on juba tarvis ligikaudselt lahendada, ei pruugi erikujuliste võrrandite uurimine enam midagi kasulikku anda. Puhtalt edasiarendamisküsimuste seisukohast on ligikaudne lahendamine aga jällegi võimalik jätkusuund.

4.1 Tasalainelise tausta edasine analüüs

Üks võimalus on üldsegi mitte eemalduda tasalainelisest erijuhust. Kuigi nii kitsal juhul kõrgema spinni teooria uurimine on kaheldava väärtusega, on ta põhimõtteliselt teostatav teooria juba olemasoleva ehitusega. Vastasmõju üldkuju teadmist on tarvis, kui vähegi soovida arendada dünaamiliste vastasmõjude teooria terviklikuks kõrgema spinni teooriaks. Siiski annab teooria oma praegusel kujul juba konkreetse vastasmõju kuju tugeva tasalainelise tausta korral. Lõpuks küll tasalainelist tausta uurivad, aga mitte dünaamiliste vastasmõjude teooriaga seotud uuringud võivad isegi anda märkimisväärsed tulemusi.

4.1.1 Lainepakettide areng laserväljas

Roman jt [113] on kirjutanud artikli, kus nad uurivad elektroni kirjeldava lainepaketi arengut ja deformeerumist tugevas laserväljas. Selleks nad lähtuvad Volkovi lainefunktsioonidest, mis on tuletatud tüüpilisel viisil, s.o lähtutakse tasalainelisest spinnor-*ansatz*'ist teist järku interakteeruva Diraci võrrandi jaoks. Tulemusena moodustub neli Volkovi lahendit fikseeritud impulsi p jaoks, eksplitsiitsel kujul

$$\psi_{\mathbf{p}}^r(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E}} \left(1 + \varepsilon^r \frac{q \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}}{2k \cdot p} \right) u^r(\mathbf{p}) e^{iS}, \quad (4.1.1)$$

kus $r = 1, 2, 3, 4$ ja

$$S = -\varepsilon^r p \cdot x - \int_{-\infty}^{k \cdot x} \left[\frac{q}{k \cdot p} (p \cdot A(\xi)) - \varepsilon^r \frac{q^2 A^2(\xi)}{2k \cdot p} \right] d\xi. \quad (4.1.2)$$

Siin veel Roman jt eeskujul $u^r(\mathbf{p})$ on vaba Diraci võrrandi lahendid ning $\varepsilon^r = +1$, kui $r = 1, 2$ (positiivse energiaga osake tasalainelises EM-taustas) ja $\varepsilon^r = -1$, kui $r = 3, 4$ (negatiivse energiaga osake). Lokaliseeritud osakese kirjeldamiseks moodustatakse lainepakett, s.o koos faasikordajatega

$$\Psi(x, t) = \int d^3p \sum_{r=1}^4 [c^r(\mathbf{p}) \psi^r(\mathbf{p}, x)]. \quad (4.1.3)$$

Nõudest, et lainepakett on Gaussi-kujuline, järeldeb spinn-ülesse suunatud relativistlikku elektroni jaoks algtingimus

$$\Psi(\mathbf{x}, t_0) = N e^{-|\mathbf{x}|^2/2d^2} \psi^1(\mathbf{q} = 0, \mathbf{x}, t_0); \quad (4.1.4)$$

$\mathbf{q} = 0$ tähendab, et ilma laserväljata puuduks elektronil impulss. Edasi arvutatakse faasikordaja c^r täpne kuju, Volkovi funktsioonide korrutis, lainepaketi normeerimiskordaja, mis lubab vaadata lainepaketi arengut laserväljas. Nagu selgub, avaldab magnetväli olulist mõju juba madalate energiatega juures ning relativistlikus režiimis paistab lainepakett surutavat kokku.

Tegu on analüütilise uurimisega, millel on arvuti abi vaja üksnes graafikute joonistamisel. On uuritud üksnes EM-tasalainelist tausta ja kvantefekte pole uuritud, mistõttu vähemalt olemuslikult

langeb uurimuse tüüp dünaamiliste vastasmõjude rakenduspiirkonda. Dünaamiliste vastasmõjude teooria teeb konkreetse ennustuse vabade lainefunktsioonide teisenemisest interakteeruvale juhule. Moodustades analoogilise vektorspiinor-lainepaketi saaks uurida hüpoteetiliste elementaarsete spinn-3/2 laetud osakeste lainepakettide arengut laserväljas. Täpset analüüsi tuleks muidugi kohandada RS vektorspiinorite juhule, nt spinn-3/2 osakese polarisatsioone on rohkem ning on oodata, et integraalid võtavad keerulisema kuju, kuid analüüsi idee ei välju dünaamiliste vastasmõjude rakenduspiirkonnast.

4.1.2 Mittelineaarsed protsessid laserväljas

Käesolevas töös ei ole esitatud dünaamiliste vastasmõjude (poolikut) kvantteooriat, sest see ei ole probleem, mida teoorias on praeguses etapis tegelikult tarvis lahendada. Dünaamiliste vastasmõjude peamine probleem on ikkagi tema üldisuse ebakindluses. Kui aga olla nõus teooria jätma piiratud rakendusalaselle, võib proovida kasutada elemente Seipti doktoritööst [38], et arendada „poolikut“ kvantteooriat spinn-3/2 osakesest tugevas laserväljas, kuid rangelt võttes teadmata häirituslikke kõikumisi tasalainelise tausta ümber.

Täpsem lagranžiaan tugeva välja kvantelektrodünaamikas on

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (4.1.5)$$

kus taustaga koos fermionlagranžiaan on \mathcal{L}_f , kalibratsioonivälja lagranžiaan \mathcal{L}_g ja interaktsiooni-lagranžiaan \mathcal{L}_{int} . Kalibratsiooniväli on eraldatud taustväljaks A_μ ja häirituslikuks kiirgusväljaks \mathcal{A}_μ (s.o $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$), kokku

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(i\hat{\mathcal{D}} - q\mathcal{A} - m)\psi, \quad (4.1.6)$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_g}(\partial_\mu \mathcal{A}^\mu)^2, \quad (4.1.7)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -q\bar{\psi}\mathcal{A}\psi. \quad (4.1.8)$$

Ka hajumisoperaator Furry pildis (tähistatud alaindeksiga F) on teada, vt [114]

$$\hat{S}[A] = \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int d^4x H_{\text{int}} \right\} = \mathcal{T} \exp \left\{ -iq \int d^4x : \hat{\psi}_F \gamma^\mu \hat{\mathcal{A}}_\mu \hat{\psi}_F : \right\}. \quad (4.1.9)$$

Siin $: \dots :$ tähistab normaalkorrastust ja \mathcal{T} ajalist korrastust. Kvantteooriasse üleminekuks võib tuua sisse kanoonilised (anti)kommutatsioonireeglid elektronide ($\hat{c}_{\mathbf{p}r}$), positronide ($\hat{d}_{\mathbf{p}r}$) ja footonite ($\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$) tekke- ja kaooperaatorite jaoks

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] = 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = -(2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') g_{\lambda\lambda'}, \quad (4.1.10)$$

$$\{\hat{c}_{\mathbf{p}r}, \hat{c}_{\mathbf{p}'r'}\} = 0, \quad \{\hat{c}_{\mathbf{p}r}^\dagger, \hat{c}_{\mathbf{p}'r'}^\dagger\} = 0, \quad \{\hat{c}_{\mathbf{p}r}, \hat{c}_{\mathbf{p}'r'}^\dagger\} = (2\pi)^3 2\omega_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rr'}, \quad (4.1.11)$$

$$\{\hat{d}_{\mathbf{p}r}, \hat{d}_{\mathbf{p}'r'}\} = 0, \quad \{\hat{d}_{\mathbf{p}r}^\dagger, \hat{d}_{\mathbf{p}'r'}^\dagger\} = 0, \quad \{\hat{d}_{\mathbf{p}r}, \hat{d}_{\mathbf{p}'r'}^\dagger\} = (2\pi)^3 2\omega_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rr'}, \quad (4.1.12)$$

kuid Furry pildis on ka ilmekas lähtuda Feynmani integraalide formalismist, kus genereeriv funktsionaal

$$Z[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] \int \mathcal{D}\mathcal{A}_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L} + J_\mu \mathcal{A}^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta] \right\}. \quad (4.1.13)$$

Unitaarse teisenduse $\psi = \mathcal{V}\chi$, $\bar{\psi} = \bar{\chi}\mathcal{V}^{-1}$ abil jääb funktsionaali integreerimismõõt muutumatuks, aga fermionlagranžiaanist (4.1.6) kaob ära taustaliige, s.o $\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\psi = \bar{\chi}(i\cancel{\partial} - m)\chi$.

Need valemid on laserväljas elektroni liikumise kirjeldamise alus Furry pildis. Edasi saaks juba uurida rakendusi, arendada Feynmani reegleid (nii seestmistele kui välimistele fermionjoonetele vastavad suurused tuleb asendada laserkaetud analoogidega) jne. Kahjuks ei ole ükski neist lihtsasti vahetult ülekantav dünaamiliste vastasmõjude juhule, kuid kui teooriat veidi muuta, on need ideed rakendatavad.

Olgu veel kord rõhutatud, et dünaamiliste teisenduste operaator langeb spinn-1/2 juhul kokku Furry pilti teisendava operaatoriga, mis lubab pakkuda välja, et analoogia säilib ka spinn-3/2 juhul. Rangelt võttes tuleb seda postuleerida, sest puudub üldine interakteeruv spinn-3/2 teooria, millest operaator \mathcal{V} tuletada. Kuigi dünaamiliste vastasmõjude teooriasse saaks lagranžiaani sisse tuua Vainberg-Tonti lagranžiaani abil, on lihtsam mitte kasutada kogu dünaamilise esituse iseärasust, vaid vaadata üksnes liikumisvõrrandit

$$D^d(A)\Psi(A) = (\Gamma^\mu(A)\Pi_\mu(A) - m)\Psi(A) = \left(\gamma^\mu D_\mu - \frac{q}{2k_P} \cancel{k} \cancel{F} - m \right) \psi^\mu = 0, \quad (4.1.14)$$

$$\gamma_\mu \psi^\mu = 0$$

ja eraldada sealt interaktsioonipanus, mille saaks lisada tavalise RS-teooria lagranžiaani. Diferentsiaalvõrrandite seisukohast peaks jääma laine frontide analüüs samaks, kuigi rangelt võttes peab seda kontrollima, eriti arvestades paljude mitteminimaalsete panuste probleemidest [46].

Kui dünaamiliste vastasmõjude teoorias ennustatud vastasmõju panus on just sellise kujuga, mida tuleb kasutada interakteerivas spinn-3/2 teoorias, on aga käes lasertaustaga fermionlagranžiaani (4.1.6) spinn-3/2 analoog. Kalibratsioonivälja lagranžiaan (4.1.7) võib oletatavasti jääda muutumatuks, kuna spinn-1 bosonite teooria omaette on võrdlemisi probleemidevaba. Põhimure on aga häiritusliku kiirguslagranžiaaniga (4.1.8), mille täielikku spinn-3/2 kuju dünaamilised vastasmõjud ei ennusta — see on ka üks põhjustest, miks niisugust kvantiseerimisskeemi on nimetatud „poolikuks“. Ilmselt ei saa see sisaldada ainult lainevektorit sisaldavat panust, sest üldise EM-välja jaoks ei saa defineerida lihtsalt ainult üht lainevektorit (vt Fourier' ruumi üleminek). Võib spekuloida, et võib-olla saab interaktsioonilagranžiaani lähendada minimaalsest asendusest saaduga, kuid niisuguse lähenduse õigsus (mitteminimaalsed liikmed võivad olla suurusjärguliselt võrreldavad minimaalse liikmega) ja rakenduspiir (ei ole selge, millises energiavahemikus võiks kasutada niisugust eeldust) pole kindel.

Mingigi kindlusega saaks seega arendada ainult poolikut teooriat. Võib arvutada Rarita-

Schwinger-Volkovi propagaatori (kohandatuna Dirac-Volkovi propagaatorist)

$$\mathcal{G}(x, y|A) = \frac{1}{Z_f[0, 0]} \frac{\delta^2 Z_f[\eta, \bar{\eta}]}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)} \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} = \mathcal{V}(x)G_0(x-y)\mathcal{V}^{-1}(y), \quad (4.1.15)$$

uurida spinn-3/2 Volkovi vektorspiinorite täielikkust [32, 115] jne. Kvantväljateooria olulisima eksperimentaalse väljundi, s.o mõjuristolõigete arvutamine ei ole aga arvatavasti võimalik — vähemalt ei saa öelda, et tulemus on tegelikult õige ja kooskõlaline.

4.1.3 Volkovi lahendid teistes teooriates

Volkovi lahendi tuletamise viis ei ole kuigi eriline: eeldades tugevat tasalainelist tausta, uuritakse osakesevälja tasalainelist *ansatz*'i. Vastavalt on põhjendatud Volkovi lahendi uurimine ka teistsuguste interaktsioonide jaoks. Huvitav on, et näiteks gravitatsiooniteooria raames ei ole lihtne kirjandusest leida Volkovi lahendi analoogi, kui seda on üldse uuritud, s.o ei paista olevat materjale tasalainelistest lahenditest tasalainelaadses kõveras aegruumis (vrd tugevad gravitatsioonilained tekkeallika lähedal). Kogumikud Diraci võrrandi analüütilistest lahenditest käsitlevad valdavalt elektromagnetinteraktsiooni [116, 117], samas kui kõveras aegruumis on vaadatud muid, mitte tasalainelisi meetrikaid (vt nt [118], mis käsitleb kahe suvalise funktsiooniga sfäärilist meetrikat $ds^2 = e^{2f(r)} dt^2 - e^{2g(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$, ja sealseid viiteid).

Olgugi et valmis kvantgravitatsiooni teooriat ei ole veel kirja pandud, on see-eest Diraci spiinorite teooriat kõveras aegruumis võimalik arendada, vt nt [119–121], mis käsitlevad ka kvantväljateooriat kõveras aegruumis. Üks viis on üldistada Diraci algebra aegruumipunktidest sõltuvaks,

$$\gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x)\gamma^\mu(x) = 2g^{\mu\nu}(x), \quad (4.1.16)$$

spiinor-afinne seostus $\Gamma_\nu(x)$ defineeritakse $\gamma^\mu(x)$ maatriksite kovariantse tuletise kadumisega,

$$\nabla_\mu \gamma_\nu := \partial_\mu \gamma_\nu(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \gamma_\lambda(x) - \Gamma_\mu \gamma_\nu(x) + \gamma_\nu(x) \Gamma_\mu = 0. \quad (4.1.17)$$

Aegruumipunktist sõltuvate $\gamma^\mu(x)$ jaoks saab anda esituse tasase aegruumi maatriksite γ^μ kaudu, kui tuua sisse tetraad (*vierbein*) $e^a{}_\mu(x)$, mis on defineeritud kui

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e^a{}_\mu(x) e^b{}_\nu(x), \quad (4.1.18)$$

kus η_{ab} on Minkowski meetrika, nii et

$$\gamma^\mu(x) = e_a{}^\mu(x) \gamma^a. \quad (4.1.19)$$

Väljateooriat kõveras aegruumis on üldiselt mugavam arendada tetraadformalismis. Kovariantse tuletise mõju spiinorväljale ψ on kokku antud kujul

$$\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu - \Gamma_\mu) \psi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{4} \omega_\mu{}^{ab} s_{ab} \right) \psi, \quad (4.1.20)$$

kus ω_μ^{ab} on spinn-seostuse komponendid ja $s_{ab} = \frac{i}{2}[\gamma_a, \gamma_b]$. Diraci võrrand üldistub otseteed,

$$(i\gamma^\mu(x)\nabla_\mu - m)\psi(x) = (i\gamma^a e_a^\mu \nabla_\mu - m)\psi = 0, \quad (4.1.21)$$

mis ilmub lagranžiaanist

$$\mathcal{L} = |g|^{1/2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu(x)\nabla_\mu - m)\psi. \quad (4.1.22)$$

Edasi saab näiteks arendada kvantelektrodünaamika teooriat kõveras aegruumis, kui diferentsiaalgeomeetiline konstruktsioon on täpsemini esitatud.

Kuigi tasalainelise gravitatsioonilise-meetrilise tausta kasutuselevõtt võib muuta tavalise Volkovi lahendi analüüsi võimatuks või vähemalt keeruliseks, väärib see küsimus ikkagi tähelepanu. Edukas uurimus pakuks eelkõige teoreetilist huvi, arvestades jälgitud gravitatsioonilainete nõrkust Volkovi lahendi nõuetega võrreldes, kuid oleks ka uudse teadusliku väärtusega. Kui osutub, et Volkovi lahend ei üldistu kõverasse aegruumi lihtsasti, oleks ka see (väike) omaette märkimisväärne tulemus. Igal juhul nõuab see sügavamalt kirjanduse ülevaadet ja hoolikat aegruumi kõverust arvestava väljateooria analüüsi.

4.2 Diraci võrrandi lahendamine

Kui õnnestuks lahendada operaatoritasemel madalaspinnilise kooskõla võrrand (3.1.2), oleks võimalik sel meetodil uurida laiemat klassi interakteeruva Diraci võrrandi lahenditest, võib-olla isegi üldlahendit. See nüanss tegelikult rõhutab ka kogu probleemi keerulisust. Antud juhul tuleb otsida lahendit teatud erikujulise võrrandi jaoks, mille lahendamine oleks küll märkimisväärne edasisamm, kuid jätkamine selles suunas oleks pigem formaalselt võimalik, kui lihtne või praktiliselt kasulik (vrd näiteks ajalise arengu operaatori kasutus).

Operaatoritasemel (sh kui on lubatud vabalt muuta lainefunktsiooni Ψ nõrgemas võrrandis (3.1.1)) on interaktsioonide genereerimine (dünaamilised vastasmõjud) ja interaktsioonide kaotamine (Furry pilt) antud samaväärsete operaatoritega, pöördoperaatori täpsuseni:

$$\mathcal{V}(i\cancel{\partial} - m)\mathcal{V}^{-1} = (i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m) \Leftrightarrow (i\cancel{\partial} - m) = \mathcal{V}^{-1}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\mathcal{V}. \quad (4.2.1)$$

Huvi pakub just interaktsioonidega Diraci võrrand \mathcal{V} -genereerival kujul

$$(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\psi = \mathcal{V}(i\cancel{\partial} - m)\mathcal{V}^{-1}\psi = 0, \quad (4.2.2)$$

mis vasakult korrutades operaatoriga \mathcal{V}^{-1} annab

$$\mathcal{V}^{-1}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\psi = (i\cancel{\partial} - m)\mathcal{V}^{-1}\psi = 0. \quad (4.2.3)$$

See jaguneb kaheks diferentsiaalvõrrandiks

$$\mathcal{V}^{-1}(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - m)\psi = 0, \quad (4.2.4)$$

$$(i\cancel{\partial} - m)\mathcal{V}^{-1}\psi = 0, \quad (4.2.5)$$

millest teine (4.2.5) on olemuse poolest vaba Diraci võrrand välja $\Psi = \mathcal{V}^{-1}\psi$ jaoks. Vaba Diraci võrrandi lahend on teada tasalainete superpositsioonina,

$$\Psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{E_p}} (a_{\mathbf{p}s} u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}s}^\dagger v^s(p) e^{ip \cdot x}), \quad (4.2.6)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{E_p}} (a_{\mathbf{p}s}^\dagger \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}s} \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x}), \quad (4.2.7)$$

kus $u^s(p)$, $v^s(p)$ on tuntud impulsist ja spinnist sõltuvad bispiinor-erilahendid ning $a_{\mathbf{p}s}$, $b_{\mathbf{p}s}$ väljendavad klassikalisel tasemel Fourier' moodi osakaalu või tugevust (amplituudi). Nagu mitmeväärtuseliste funktsioonide peatükis juba mainitud, on interakteeruva Diraci võrrandi lahend $\psi = \mathcal{V}\Psi$. Olgu märgitud, et siit järeldub, et operaatori \mathcal{V} abil saab mistahes vaba Diraci võrrandi lahendi teisendada interakteeruva Diraci võrrandi lahendiks (vähemalt etteantud tausta korral) ning mistahes interakteeruva võrrandi lahendi teisendada vaba välja lahendiks.

Tähelepanek, et operaatoril \mathcal{V} põhinev lähenemine võimaldaks lahendada interakteeruva Diraci võrrandi analüütiliselt, on oluline, sest see väljendab uuritava teooria arendamise tegelikku keerulisust. Kui vaba Diraci võrrandi saab lahendada Fourier' analüüsi meetodil, siis interakteeruv Diraci võrrand on põhimõtteliselt erinev — ta sisaldab kalibratsioonivälja, s.o aegruumist sõltuvat funktsiooni, mis rikub Fourier' meetodi kasutamise ära (ilmuvad konvolutsioonid). Dünaamiliste vastasmõjude tarbeks on aga just vaja teada analüütilisel kujul antud üldlahendit. Antud magistritöös on uuritud interakteeruva Diraci võrrandiga samaväärseid võrrandeid ja seega kaudselt proovitudki lahendada interakteeruvat Diraci võrrandit üldkujul, mis on moment, mis kahjuks ei ilmnenu magistritöö teostamise käigus väga varakult. Võib pakkuda välja jätkata nende lahendusmeetodite uurimist ning tõesti iga edasimineku kas vastasmõjudega Diraci võrrandi algkuju või operaatoriga \mathcal{V} kuju osas oleks märkimisväärne ja oluline, kuid tehtud töö ka ilmekustab selle probleemi keerulisust.

4.3 Teisendusoperaatori \mathcal{V} laiendamine

Võib öelda, et käesoleva töö põhieesmärk oli laiendada dünaamiliste vastasmõjude teooria täielikuks kõrgema spinni teooriaks, et oleks võimalik jätkata arendamist kvanttasemel ja uurida teooria fenomenoloogiat. Olulisim ülesanne oli leida dünaamiliste teisenduste operaatori üldkuju. Kuna see ülesanne jäi lahendamata, on ta endiselt dünaamiliste teisenduste olulisim küsimus. Nagu selgus, pakuks uuritud küsimus laiemat huvi ka väljaspool kõrgema spinni teooriat — vastav operaator võimaldaks arendada tugeva välja kvantelektrodünaamika teooriat, aga ühtlasi anda analüütilise lahendi Diraci võrrandile.

Sel eesmärgil on vaadatud palju erinevaid võimalikke arendusteid. Olgugi et seni pole nad viinud sihile, on ometi võimalik pakkuda mõtteid, mida võiks proovida edasi uurida.

1. Sylvesteri võrrandil põhinev algebraline lähenemine jäi matemaatilise teooria taha kinni. Kui vähegi on Sylvesteri võrrandi matemaatilist teooriat arendatud, et ka diferentsiaal- ja integraaloperaatoreid kaasata (nt lõppmatamõõtmelised funktsiooniruumid), võib vaadata lähenemise üle. Ilmselt ei ole aga vaadatud läbi kõik algebralised skeemid, sealhulgas nt ligikaudsed, mille rakendamist saaks uurida edasi.
2. Wilsoni joonte teooria ei ole vahetult rakendatav antud küsimuse tarbeks, kuid tuletise operaatori asendamine (lõpppunkti tuletis), interaktsioonide sissetoomine ja sellega seotud väljateooria ümberkirjutamine võib siiski pakkuda huvi.
3. Greeni funktsiooni meetod annab viisi, kuidas lahendada interakteeruvat Diraci võrrandit, kuid leitud operaator ei ole kahjuks vahetult rakendatav dünaamiliste teisenduste teooriasse. Siiski võib proovida seda ideed jätkata, arvestades, et sarnane konstruktsioon ilmus ka nt Wilsoni joonte juures sama probleemistiku uurimise käigus.
4. Pseudodiferentsiaaloperaatorite rakendamine dünaamiliste vastasmõjude tarbeks jääb kinni eksponentsiaalrea ehituse tõttu — faktoriaalsete liikmete tõttu ei ole mingi rekursiivse valemi kirja panemine ilmne. Kui aga õnnestuks arendada viis, kuidas muuta eksponentrida geomeetriliseks, oleks see meetod lahenduv. Alternatiivselt võiks vaadata operaatorlogaritmid ehitust täpsemini või uurida teisi eksponentrea summeerimisviise.
5. Mitmeväärtuseliste funktsioonide teooria on väga mittetriviaalne. Pole kahjuks täiesti kindel, kas mitteholonoomse potentsiaaliga pakutud operatsioonid on tegelikult kooskõlalised ning kuidas täpselt konstrueerida see potentsiaal etteantud konfiguratsiooni $A_\mu(x)$ jaoks. Igal juhul genereeritakse minimaalne asendus. Kui aga vaadata mitmeväärtuseliste funktsioonide täpne teooria üle, on sellega võimalik lahendada nii interakteeruv Diraci võrrand kui ka pakkuda välja Furry pilti laiendav operaator, kui vähegi olla valmis mitmeväärtuselisi funktsioone kasutama füüsikateooriates. Tegelik rakendatavus sõltub aga paljuski moodustunud teooria lihtsusest.

4.4 Muud arendussuunad

Magistritöö käigus jõuti mitme kõrvalise matemaatilise-füüsikalise struktuurini, mis küll ei võimalda lahendada esialgu ette seatud ülesannet, kuid võivad pakkuda omaette matemaatilist või ka füüsikalist huvi. Täielikkuse huvides on siin esitatud veel valim võimalikest ideedest (osaliselt varem mainitud), mida võib proovida uurida, kuid mille üksikasju ei ole veel lõpuni läbi vaadatud.

Mitu korda on esile tulnud võimalus väljateooria ümberkirjutamisest. Üks variant on proovida kirjutada ka fermionväljasid Wilsoni joonte eeskujul, üldistades tuletisi sobival viisil. Võib-olla

on võimalik siin eeskuju võtta kas stringiteooriast või silmuskvantgravitatsiooni teooriast, kuid õnnestumine ei ole kindel.

Arvestades lainevektori k ilmumist dünaamiliste vastasmõjude RS-võrrandis, võib spekuloida, kuidas mitte minimaalne liige $-\frac{iq}{k_P} \not{k} F_{\mu\nu}$ ilmub üldjuhul. Lihtsaim oletus on, et on tarvis integreerida üle lainevektori k_μ väärtuste, lisada EM-välja Fourier' arendusega $\hat{A}_\mu(k_\nu)$ seotud kordaja $a(\hat{A}_\mu)$, nii et mitte minimaalne üldpanus on $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} a(\hat{A}) \frac{-iq}{k_P} \not{k} F_{\mu\nu}$, ning jätta kitsendusvõrrand $\gamma_\mu \psi^\mu = 0$ muutmata. Kordaja $a(\hat{A}_\mu)$ täpne kuju pole aga kindlalt teada — tasalainelisel (monokromaatsel) erijuhul võiks $a(\hat{A}_\mu)$ anda Diraci deltadistributsiooni, mis trivialiseerib välise k -integraali. Kordajale a on võib-olla vaja anda vahetu sõltuvus laine- ja polarisatsioonivektorist, s.o $a = a(k_\mu, \epsilon_\mu, \hat{A}_\mu)$. Oluline on aga rõhutada, et paljuski on see lihtsalt mitte minimaalse vastasmõju-*ansatz*'i spekulatsioon, mis vajab üldist õigsuse kontrolli. Kuna pole kasutatud dünaamilist esitust, ei saa ka lihtsalt tugineda dünaamiliste vastasmõjude seisukohtadele ning meetod ei anna ka selget viisi dünaamilisi vastasmõjusid üldistada. Lõpuks jääb sisse meelevaldsus kordaja a määramisel — mitte minimaalseid asendusi saab aga spekuloida palju, mis igaüks võib igas sammus tekitada mingi vastuolu nii kalibratsiooniinvariantsuses, kausaalsus, kitsenduste analüüsis kui ka kvantteoorias unitaarsuses või renormeerimises. Õige tulemus pole absoluutselt kindel.

Magistritöös on ka mainitud võimalust nõrgendada väljateooria variatsioonilist ehitust, tuginedes mõttele, et välja jaoks ranged seosed tulevad alles massipinnal, mistõttu enne võiks proovida käsitleda välja väärtusi sõltumatute koordinaatidena. Sel juhul tuleb proovida vältida triviaalselt diferentsiaalgeomeetria ümberkirjutamist. Võib-olla väljalaadse (kuid mitte tingimata igas aegruumi punktis defineeritud) hüperpinna trajektoori varieerimine kõrgemamõõtmelises ruumis annab võimaluse selle idee arendamiseks, kuid see nõuab muuhulgas liikumist suunava potentsiaali või jõu uurimist (võib olla on siin vajalik liige, mis kallutab liikumise näiteks aja suunda), aga samuti Lorentzi kovariantsuse jne kontrollimist. Eeskuju võib jälle saada stringiteooriast (vrd stringi liikumine ja maailmaleht, *worldsheet*).

On vaadatud mitut konstruktsiooni, mille matemaatilist tagamaad ei ole tegelikult vajalikus ulatuses uuritud. Näiteks on pakutud välja Lie' algebra väärtuseliste sümboolitega pseudodiferentsiaaloperaatorite konstruktsioon, kuid see nõuab rangemat korrektsuse kontrolli. Saaks uurida niisuguste Ψ DO-de rakendust diferentsiaalvõrrandite teoorias, kuid nagu paistab, ka väljaspool seda, sest seda Ψ DO üldistust sai kasutada geomeetrilise kommutaatorrea analüüsis. Sellega seotud oli ka kujutus, mis asendas eksponentsiaalrea $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$ „geomeetrilise“ reaga integraaloperaatoritest $1 + \int_0^x dx' + \int_0^x dx' \int_0^x dx'' + \dots$. Võib uurida selle kujutuse üldistamist, näiteks Lie' algebra väärtuseliste kommutaatorite juhule, kuid ka muid rakendusi (nt eksponentfunktsiooni omadusi) ja algebralist struktuuri (integraaloperaatorite ruumi ehitust jne). Võiks uurida täpset matemaatilist ehitust, mida kasutavad muudetud korrutised, või kas hüperkompleksruumis saab lihtsustada mittekonserveerivate vektorväljade analüüsi vms.

Näiliselt hüljav suhtumine oleks soovitada millegi muuga tegelemist, kas kõrgema spinni teorias või väljaspool seda. Siiski peab arvestama, et kindlasti mitte kõik võimalikud lähene-mised ei ole käesolevas magistritöös ammendatud. Võib isegi öelda, et praegu esitatud meetodid on üsna tagasihoidlikud, sest nad ei muuda teooria olemuslikku ehitust, vaid proovivad üksnes laiendada tema rakenduspiirkonda. Näiteks ei ole vaadatud kõiki võimalusi, kuidas dünaami-listesse vastasmõjudest tuua kalibratsioonivälja liikumisvõrrandeid. Kahjuks ei ole ka ilmne, milline peaks kalibratsioonivälja dünaamiline eeskiri välja nägema.

Töös vaadatud madalaspinnilise kooskõla võrrand on kõige sõnasõnalisem tõlgendus dünaa-miliste vastasmõjude üldisele kujule, kuid on vaieldav, kas pakutud võrrandit või konstruktsiooni saab muuta Maxwelli võrranditega ekvivalentseks. Lisaks ei ole kindlasti ammendatud kõiki kõrgema spinniga seotud uurimisküsimusi üldiselt — võrdlemisi hiljuti ilmunud artiklid [21, 22] vihjavad, et probleem võib olla Rarita-Schwingeri väljade massis või massimehhanismis (vrd Higgsi mehhanism standardmudel). Seega on täiesti põhjendatud soovitada otsida mõnd täiesti uut meetodit kõrgema spinni probleemide lahendamiseks, mis võib kitsamas vaates aidada ka dünaamiliste vastasmõjude teooriat jätkata.

Kokkuvõte

Magistritöös on kindlaks tehtud dünaamiliste vastasmõjude teooria olemuslikud probleemid ning on proovitud palju erinevaid lähenemisi, mis aga siiski ei anna vajaminevat lahendust just teooria laiendamise osas, mis on suurim takistus teooria edasiarendamisel. Vaadatud probleemid on üsna spetsiifilised ning ei ole kahjuks kuigi laialt tuntud ja uuritud, eriti dünaamiliste vastasmõjude ideede seisukohast, mistõttu ei ole leida kuigipalju muid abimaterjale. Autori enda pakutud uued lähenemisteed ei lahendanud küll neile seatud probleeme, kuid see-eest on välja pakutud mitu edasist uurimisküsimust, mis ei paista veel olevat lahendatud. Kokkuvõtlikult öelduna, vaatamata uuritud probleemide lahtisusele, on magistritööga antud ülevaade dünaamiliste vastasmõjude teooria olukorrast, kindlaks tehtud põhiprobleemid, pakutud välja hulk erinevaid lahendusideesid (mida võib tulevikus kas proovida jätkata või juba varakult kõrvale jätta) ning pakutud välja mitu küsimust, mida edasi uurida, nii vana teooria piirides kui ka väljaspool.

Võib öelda, et magistritöö üks põhitulemustest oli dünaamiliste vastasmõjude teooria täpse olukorra kindlaks tegemine, mida teooria artiklid ei ole kokkuvõtlikult sõnastanud ega vastavalt pole ka lahendusmeetodeid pakkunud. Teoorias on neli põhiprobleemi: teooria on kirja pandud ainult tugeva EM-taustvälja tasalainelisel erijuhul, temas pole uuritud lagranžiaani, ei ole üldise kooskõla eksplitsiitset tõestust (muuhulgas ainult erikuju teadmise tõttu) ning ei ole selge, kuidas kalibratsioonivälja liikumisvõrrandid ilmuvad teoorias, st teooria on väga spinnoritekeskne. Kui vähegi tahta dünaamiliste vastasmõjude teooriat arendada täielikuks kõrgema spinni teooriaks, on tarvis kõigile neile küsimustele vastata.

Selgus, et lagranžiaani probleem on vähemalt põhimõtteliselt diferentsiaalvõrrandite diferentsiaalgeomeetrilise teooria abil lahendatav, kuid lagranžiaani pole mõtet konstrueerida enne, kui ei ole lahendatud üldjuhu probleem. On vaadatud teoreemi, mis vihjab, et kvantteoorias on põhimõtteliselt vaja lagranžiaani. Kuigi selle rangus tekitab kõhkusi ja väljateoreetiline üldistus pole selge, on mõistlik vähemalt arvata, et kvantteoorias on tarvis viisi, kuidas vajadusel iseloomustada liikumist väljaspool massipinda.

Sama moodi pole teooria tegelik kooskõla teada enne, kui pole selgeid üldjuhulisi ennustusi. Välja pakutud madalaspinnilise kooskõla võrrand aga vihjab, et dünaamiliste vastasmõjude seisukohtadesse peab suhtuma ettevaatlikult, sest selle kooskõla võrrandi lahendamisel on Rarita-Schwingeri ja Diraci võrrandi sarnasuse tõttu võimalik genereerida minimaalne interaktsioon ka

kõrgema spinni juhul. See tähendab, et teooria kooskõla peab tingimata kontrollima ka üldjuhul.

Tähtsaim ülesanne on aga üldistada teooria väljaspoole tasalainelise taustvälja erijuhtu. Ilma selleta pole võimalikki, et dünaamilised vastasmõjud tegelikult annavad täieliku kõrgema spinni teooria. Selle küsimuse lahendamiseks pakuti välja dünaamiliste vastasmõjude madalaspinnilise kooskõla võrrand, mille lahendit võiks proovida üldistada kõrgema spinni juhule. Kahjuks selle võrrandi lahendamine osutus väga keeruliseks: ei Sylvesteri võrrandi, Wilsoni joonte (milleni saab jõuda ka dünaamiliste vastasmõjude teooria enda seisukohti tõlgendades), mitmeväärtuseliste funktsioonide või pseudodiferentsiaaloperaatorite teooria ei andnud lahendust. Suuremad muutused võrrandite ehituses (näiteks osatuletiste asendamine lõpppunkti tuletistega) nõuaksid kas väljateooria kapitaalset ümbertegemist, mis võib üldsegi ebaõnnestuda, või tekitaksid kooskõla ja tõlgendusprobleeme juurde. Paljuski on probleemi keerukuse põhjus selles, et üldkujulise operaatori leidmine tähendab ühtlasi interaktsioonidega Diraci võrrandi üldlahendi leidmist.

Töö käigus pakuti välja uusi konstruktsioone (näiteks Ψ DO-de sümboli üldistamine), arendussuundasid (näiteks hüperpindade varieerimisest tulenev väljateooria või interaktsioonidega Diraci võrrandi lahendamine mitmeväärtuseliste funktsioonide abil). Pakuti välja konkreetseid küsimusi, mida saaks edasi uurida. Näiteks dünaamiliste vastasmõjude enda piirides saaks uurida lainepakettide deformeerumist laserväljas liikumisel. Pooliku kvantteooria saaks arendada tugeva välja kvantelektrodünaamika eeskujul, kuid ei ole kindel, kuidas peaksid välja nägema kiirguslikud häiritused. Volkovi lahendit võiks uurida näiteks kõveras aegruumis. Ka proovitud meetodeid saaks huvi korral edasi uurida, näiteks vaadates Lie' algebra väärtuseliste sümbolitega Ψ DO-de matemaatiliste teooriat või eksponentrea teisendamist geomeetriliseks reaks.

Vaatamata sellele, et magistritöös on täpsustatud, selgitatud ja proovitud lahendada dünaamiliste vastasmõjude teooria põhiprobleeme, on need küsimused endiselt lahtised, mis jätab pessimistliku vaate teooria osas. Arvestades üldise kõrgema spinni teooria enda teoreetilist ja eksperimentaalset seisu, tekivad samuti kahtlused kõrgema spinni teooria tuleviku osas. Siiski ei oleks täielik loobumine võib-olla õige lähenemine: see jätkaks probleemi mõlemal juhul lahtiseks, vastamata kõrgema spinniga osakeste ja teooriate olemasolu, tarvilikkuse või võimalikkuse küsimusele. Üks kindel järeldus on, et dünaamiliste vastasmõjude probleemid kitsamalt ja kõrgema spinni küsimused üldiselt vajavad mingit uut lähenemist, mis autori arvates peaks jätkamiseks olema põhimõtteliselt uus. Kõik lähenemised ei ole veel ammendatud, isegi selles magistritöös on pakutud mitu uut varianti. Autor loodab, et käesolev magistritöö vähemalt annab ülevaate dünaamiliste vastasmõjude teooria olemuslikest küsimustest. Proovitud meetodite ning saadud tulemuste kasulikkus, vajalikkus ja olulisus jääb üksnes tuleviku otsustada.

Kasutatud kirjandus

- [1] P. Gallagher, *Spin-3/2 osakeste Comptoni hajumine Rarita-Schwingeri teoorias*, bakalaureusetöö (Tartu Ülikool, Tartu, 2018).
- [2] R. Saar *et al.*, „Dynamical” interactions and gauge invariance,“ *Physical Review D* **84**, 065022 (2011).
- [3] W. Rarita ja J. Schwinger, „On a Theory of Particles with Half-Integral spin,“ *Physical Review* **60**, 61 (1941).
- [4] M. D. Nykerk, *Quantizing Spin 3/2 Fields*, doktoritöö (Nationaal Instituut voor Kernfysica en Hoge Energiefysica, Amsterdam, 1994).
- [5] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations* (Springer, Berliin, 2000).
- [6] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Foundations*, kd 1 (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [7] H. Haberzettl, „Propagation of a massive spin-3/2 particle,“ versioon 2, arXiv: 9812043 [nucl-th] (1998).
- [8] K. Johnson ja E. C. G. Sudarshan, „Inconsistency of the Local Field Theory of Charged Spin 3/2 Particles,“ *Annals of Physics* **13**, 126–145 (1961).
- [9] G. Velo ja D. Zwanziger, „Propagation and Quantization of Rarita-Schwinger Waves in an External Electromagnetic Potential,“ *Physical Review* **186**, 1337–1341 (1969).
- [10] W. Cox, „On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita-Schwinger field coupled to an external electromagnetic field,“ *Journal of Physics A* **22**, 1599–1608 (1989).
- [11] A. E. Kaloshin ja V. P. Lomov, „The Rarita-Schwinger field: Renormalization and phenomenology,“ *International Journal of Modern Physics A* **22**, 4495–4518 (2007).
- [12] L. M. Nath, B. Etemadi ja J. D. Kimel, „Uniqueness of the Interaction Involving Spin- $\frac{3}{2}$ Particles,“ *Physical Review D* **3**, 2153–2161 (1971).
- [13] S. Kamefuchi, L. O’Raifeartaigh ja A. Salam, „Change of variables and equivalence theorems in quantum field theories,“ *Nuclear Physics* **28**, 529–549 (1961).

- [14] Y. Zhang ja K. Savvidy, „Proton Compton scattering in a unified proton- Δ^+ model,“ *Physical Review C* **88**, 064614 (2013).
- [15] R. Courant ja D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Wiley-Interscience, New York, 1962).
- [16] A. Hasumi, R. Endo ja T. Kimura, „Dirac quantisation of a massive spin- $\frac{3}{2}$ particle coupled with a magnetic field,“ *Journal of Physics A* **12**, L217–L221 (1979).
- [17] M. Kobayashi ja Y. Takahashi, „Origin of the Gribov ambiguity,“ *Physics Letters B* **78**, 241–242 (1978).
- [18] M. Kobayashi ja Y. Takahashi, „The Rarita-Schwinger paradoxes,“ *Journal of Physics A* **20**, 6581–6589 (1987).
- [19] M. Napsuciale, K. M. ja S. Rodriguez, „Spin- $\frac{3}{2}$ beyond the Rarita-Schwinger framework,“ *European Physical Journal A* **29**, 289–306 (2006).
- [20] M. Porrati, R. Rahman ja A. Sagnotti, „String Theory and the Velo–Zwanziger problem,“ *Nuclear Physics B* **846**, 250–282 (2011).
- [21] S. L. Adler, „Classical gauged massless Rarita-Schwinger fields,“ *Physical Review D* **92**, 085022 (2015).
- [22] S. L. Adler, „Quantized gauged massless Rarita-Schwinger fields,“ *Physical Review D* **92**, 085022 (2015).
- [23] R. Saar, R.-K. Loide ja I. Ots, „‘Dynamical’ representation of the Poincaré algebra for higher-spin fields in interaction with plane waves,“ *Journal of Physics A* **32**, 2499–2508 (1999).
- [24] I. Ots *et al.*, „‘Dynamical’ non-minimal higher-spin interaction gyromagnetic ratio $g = 2$,“ *Europhysics Letters* **56**, 367–371 (2001).
- [25] A. Chakrabarti, „Exact Solution of the Dirac-Pauli Equation for a Class of Fields: Precession of Polarization,“ *Il Nuovo cimento*, 604–624 (1968).
- [26] B. Beers ja H. H. Nickle, „Algebraic Solution for a Dirac Electron in a Plane-Wave Electromagnetic Field,“ *Journal of Mathematical Physics* **13**, 1592–1595 (1972).
- [27] A. H. Taub, „A Special Method for Solving the Dirac Equations,“ *Reviews of Modern Physics* **21**, 388–392 (1949).
- [28] D. M. Volkov, „Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung,“ *Zeitschrift für Physik* **94**, 250–260 (1935).
- [29] L. S. Brown ja T. W. B. Kibble, „Interaction of Intense Laser Beams with Electrons,“ *Physical Review* **133**, A705–A719 (1964).

- [30] M. Pardy, „Volkov Solution for an electron in the two wave fields,“ arXiv: 0408288 [hep-ph] (2004).
- [31] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц ja Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1989).
- [32] M. Boca ja V. Florescu, „The completeness of volkov spinors,“ *Romanian Journal of Physics* **55**, 511–525 (2014).
- [33] V. Bagrov ja D. Gitman, „Non-Volkov solutions for a charge in a plane wave,“ *Annalen der Physik (Leipzig)* **14**, 467–478 (2005).
- [34] W. Becker ja H. Mitter, „Relativistic theory of nucleons in laser fields,“ *Journal of Physics A* **7**, 1266–1273 (1974).
- [35] J. Bergou ja S. Varro, „Wavefunctions of a free electron in an external field and their application in intense field interactions. II. Relativistic treatment,“ *Journal of Physics A* **13**, 2823–2837 (1980).
- [36] W. Becker, „Solutions of higher-spin wave equations in external electromagnetic plane-wave fields,“ *Journal of Physics A* **9**, 149–157 (1976).
- [37] W. H. Furry, „On Bound States and Scattering in Positron Theory,“ *Physical Review* **81**, 115–124 (1951).
- [38] D. Seipt, *Strong-Field QED Processes in Short Laser Pulses*, doktoritöö (Technischen Universität Dresden, Dresden, 2012).
- [39] S. Porto, A. Hartin ja G. Moorthat-Pick, „Methods for evaluating physical processes in strong external fields at e^+e^- colliders: Furry picture and quasi-classical approach,“ kogumikus *Proceedings of the Corfu Summer Institute 2012*, (Proceedings of Science, 2012).
- [40] V. G. Bagrov, D. M. Gitman ja P. Lavrov, „The electron in the quantum field of a plane wave and the classical field of Redmond configuration,“ *Soviet Physics Journal* **17**, 787–790 (1974).
- [41] E. G. Delgado-Acosta ja M. Napsuciale, „Compton scattering off elementary spin $\frac{3}{2}$ particles,“ *Physical Review D* **80**, 054002 (2009).
- [42] M. E. Peskin ja D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, Boulder, 1995).
- [43] J. Kuipers *et al.*, „FORM version 4.0,“ *Computer Physics Communications* **184**, 1453–1467 (2013).
- [44] V. Shtabovenko, R. Mertig ja F. Orellana, „FeynCalc 9.3: New features and improvements,“ versioon 1, arXiv: 2001.04407 [hep-ph] (2020).

- [45] M. Porrati ja R. Rahman, „Causal propagation of a charged spin 3/2 field in an external electromagnetic background,“ *Physical Review D* **80**, 025009 (2009).
- [46] S. Deser, A. Waldron ja V. Pascalutsa, „Massive spin 3/2 electrodynamics,“ *Physical Review D* **62**, 105031 (2000).
- [47] U. H. Niederer ja L. O’Raifeartaigh, „Realizations of the Unitary Representations of the Inhomogeneous Space-Time Groups I,“ *Fortschritte der Physik* **22**, 111–129 (1974).
- [48] U. H. Niederer ja L. O’Raifeartaigh, „Realizations of the Unitary Representations of the Inhomogeneous Space-Time Groups II,“ *Fortschritte der Physik* **22**, 131–157 (1974).
- [49] H. Weyl, „Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie,“ *Annalen der Physik* **59**, 101–133 (1919).
- [50] M. C. Nucci ja P. G. L. Leach, „Lagrangians galore,“ *Journal of Mathematical Physics* **48**, 123510 (2007).
- [51] E. Tonti, „Variational formulation of nonlinear differential equations I,“ *Bulletin de la Classe des Sciences* **55**, 137–165 (1969).
- [52] E. Tonti, „Variational formulation of nonlinear differential equations II,“ *Bulletin de la Classe des Sciences* **55**, 262–278 (1969).
- [53] O. Krupkova, „On the Inverse Problem of the Calculus of Variations for Ordinary Differential Equations,“ *Mathematica Bohemica* **118**, 261–276 (1993).
- [54] D. Krupka, *The Inverse Problem of the Calculus of Variations: An Introduction* (Lepage Research Institute, Prešov, 2013).
- [55] D. Krupka, *Introduction to Global Variational Geometry* (Springer, Berlin, 2015).
- [56] O. Krupkova, *The Geometry of Ordinary Variational Equations* (Springer, Berlin, 1997).
- [57] M. Fecko, *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [58] G. Giachetta, L. Mangiarotti ja G. Sardanashvily, *Advanced Classical Field Theory* (World Scientific, Singapur, 2009).
- [59] H. Helmholtz, „Ueber die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung,“ *J. für die reine u. angewandte Math.* **100**, 137–166 (1887).
- [60] O. Štepankova, *The inverse problem of the calculus of variations in mechanics*, diplomitöö (Charlesi Ülikool, Praha, 1984).
- [61] L. Klapka, „Euler-Lagrange expressions and closed two-forms in higher order mechanics,“ *Proceedings of the Conference on Differential Geometry and Its Applications*, 149–153 (1984).

- [62] A. Hojman ja L. C. Shepley, „No Lagrangian? No quantization!“ *Journal of Mathematical Physics* **32**, 142–146 (1991).
- [63] I. M. Anderson ja T. Duchamp, „On the Existence of Global Variational Principles,“ *American Journal of Mathematics* **102**, 781–868 (1980).
- [64] D. Krupka, „On the local structure of the Euler-Lagrange mapping of the calculus of variations,“ *Proceedings of the Conference on Differential Geometry and Its Applications*, 181–188 (1981).
- [65] D. R. Grigore, „Variational Equations and Symmetries in the Lagrangian Formalism,“ *Journal of Physics A* **28**, 2921–2937 (1995).
- [66] D. R. Grigore, „Variational Equations and Symmetries in the Lagrangian Formalism; Arbitrary Vector Fields,“ *Fortschritte der Physik* **45**, 727–751 (1997).
- [67] M. M. Vainber, *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, original vene keeles ilmunud 1956. a (Holden-Day, San Francisco, 1964).
- [68] M. Hohmann, C. Pfeifer ja N. Voicu, „Finsler gravity action from variational completion,“ *Physical Review D* **100**, 064035 (2019).
- [69] I. M. Anderson, „Aspects of the inverse problem to the calculus of variations,“ *Archivum Mathematicum*, 181–202 (1988).
- [70] N. Voicu ja D. Krupka, „Canonical variational completion of differential equations,“ *Journal of Mathematical Physics* **56**, 043507 (2015).
- [71] Ü. Ertem, „Spin Geometry and Some Applications,“ versioon 2, arXiv: 1801.06988 [math-ph] (2019).
- [72] F. J. Dyson, „Feynman’s proof of the Maxwell equations,“ *American Journal of Physics* **58**, 209–211 (1990).
- [73] N. Dombey, „Comment on “Feynman’s proof of the Maxwell equations,” by D. J. Dyson,“ *American Journal of Physics* **59**, 85 (1991).
- [74] R. W. Brehme, „Comment on “Feynman’s proof of the Maxwell equations,” by D. J. Dyson,“ *American Journal of Physics* **59**, 85–86 (1991).
- [75] J. L. Anderson, „Comment on “Feynman’s proof of the Maxwell equations,” by D. J. Dyson,“ *American Journal of Physics* **59**, 86 (1991).
- [76] I. E. Farquhar, „Comment on “Feynman’s proof of the Maxwell equations,” by D. J. Dyson,“ *American Journal of Physics* **59**, 87 (1991).
- [77] S. L. Lyakhovich ja A. A. Sharapov, „Quantizing non-Lagrangian gauge theories: an augmentation method,“ *Journal of High Energy Physics* **2007**, 047 (2007).

- [78] R. Bhatia ja P. Rosenthal, „How and Why to Solve the Operator Equation $AX - XB = Y$,“ *Bulletin of the London Mathematical Society* **29**, 1–21 (1997).
- [79] M. Behr, P. Benner ja J. Heiland, „Solution Formulas for Differential Sylvester and Lyapunov Equations,“ versioon 1, arXiv: 1811.08327 [math.NA] (2018).
- [80] E. L. Rabkin, „Full investigation of the matrix equation $AX + XB = C$ and specifically of the equation $AX - XA = C$,“ *St. Petersburg Mathematical Journal* **26**, 165–184 (2014).
- [81] N. Dinčić, „Solving the Sylvester Equation $AX - XB = C$ when $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$,“ *Electronic Journal of Linear Algebra* **35**, 1–23 (2019).
- [82] F. V. der Veken, *Wilson Lines: Applications in QCD*, doktoritöö (Department Fysica Universiteit Antwerpen, Antwerpen, 2014).
- [83] T. Mertens, *Wilson Loops: Mathematical Foundations with applications in Quantum Chromodynamics*, doktoritöö (Department Fysica Universiteit Antwerpen, Antwerpen, 2014).
- [84] I. O. Cherednikov, T. Mertens ja F. V. der Veken, *Noncommutative Geometry* (De Gruyter, Berliin/Boston, 2014).
- [85] Y. M. Makeenko, „Brief introduction to Wilson loops and large N ,“ *Physics of Atomic Nuclei* **73**, 878–894 (2010).
- [86] A. L. Licht, „The Mandelstam-Terning Line Integral in Unparticle Physics: A Reply to Galloway, Martin and Stancato,“ versioon 1, arXiv: 0802.4310 [hep-th] (2008).
- [87] S. Mandelstam, „Quantum electrodynamics without potentials,“ *Annals of Physics* **19**, 1–24 (1962).
- [88] A. L. Licht, „Wilson Line Integrals in the Unparticle Action,“ versioon 1, arXiv: 0805.3849 [hep-th] (2008).
- [89] J. D. Jackson ja L. B. Okun, „Historical roots of gauge invariance,“ *Reviews of Modern Physics* **73**, 663–680 (2001).
- [90] A. Connes, *Noncommutative Geometry* (Academic Press, San Diego, 1994).
- [91] M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, tõlk. S. I. Andersson (Springer, Berliin, 2001).
- [92] M. Taylor, *Pseudodifferential Operators and Nonlinear PDE* (Springer, Berliin, 1991).
- [93] X. S. Raymond, *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators* (CRC Press, Boca Raton, 1991).
- [94] J.-M. Bouclet, *An introduction to pseudo-differential operators*, loengukonspekt (Université de Toulouse, Toulouse, 2019).

- [95] H. Abels, *Pseudodifferential Operators*, loengukonspekt (Universität Regensburg, Regensburg, 2011).
- [96] N. Lerner, *A First Course on Pseudo-Differential Operators*, loengukonspekt (Université Pierre et Marie Curie, Pariis, 2017).
- [97] J. C. Varilly, *Dirac Operators and Spectral Geometry*, loengukonspekt (2006).
- [98] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations* (Springer, Berliin, 2015).
- [99] S. L. Adler, *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields* (Oxford University Press, Oxford, 1995).
- [100] L. M. Procopio *et al.*, „Single-photon test of hyper-complex quantumtheories using a metamaterial,“ *Nature Communications* **8**, 15044 (2017).
- [101] S. L. Adler, „Peres experiment using photons: No test for hypercomplex (quaternionic) quantum theories,“ *Physical Review A* **95**, 060101 (2017).
- [102] L. M. Procopio *et al.*, „Comment on “Peres experiment using photons: No test for hypercomplex(quaternionic) quantum theories”,“ *Physical Review A* **8**, 036101 (2017).
- [103] S. Groote, R. Saar ja H. Liivat, „Lorentz invariance and gauge equivariance,“ *Journal of Physics: Conference Series* **532**, 012007 (2014).
- [104] H. Kleinert, *Particles and Quantum Fields* (World Scientific, Singapur, 2015).
- [105] H. Kleinert, *Multivalued Fields* (World Scientific, Singapur, 2008).
- [106] R. Bradford *et al.*, „Reasoning about the elementary functions of complex analysis,“ *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* **36**, 303–318 (2002).
- [107] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations* (De Gruyter, Berliin, 1992).
- [108] A. Landesman, *Riemann Surfaces*, loengukonspekt (2018).
- [109] C. McMullen, *Complex Analysis on Riemann Surfaces*, loengukonspekt (2020), url: <http://people.math.harvard.edu/~ctm/papers/home/text/class/harvard/213b/course/course.pdf>.
- [110] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis* (McGraw-Hill, New York, 1966).
- [111] K. Knopp, *Theory of Functions*, kd 1 (Dover, New York, 1945).
- [112] K. Knopp, *Theory of Functions*, kd 2 (Dover, New York, 1947).
- [113] J. S. Roman, L. Roso ja H. R. Reiss, „Evolution of a relativistic wavepacket describing a free electron in a very intense laser field,“ *Journal of Physics B* **33**, 1869–1880 (2000).
- [114] H. Mitter, „Quantum Electrodynamics in Laser Fields,“ *Acta Physica Austriaca Supplementum* **14**, 397–468 (1975).

- [115] A. D. Piazza, „Completeness and orthonormality of the Volkov states and the Volkov propagator in configuration space,“ *Physical Review D* **97**, 056028 (2018).
- [116] V. G. Bagrov ja D. M. Gitman, *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990).
- [117] V. G. Bagrov ja D. M. Gitman, *The Dirac Equation and its Solutions* (De Gruyter, Berlin, 2014).
- [118] M. D. de Oliveira ja A. G. M. Schmidt, „Exact solutions of Dirac equation on a static curved space-time,“ *Annals of Physics* **401**, 21–39 (2019).
- [119] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [120] L. Parker ja D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
- [121] P. Collas ja D. Klein, *The Dirac Equation in Curved Spacetime: A Guide for Calculations* (Springer, Berlin, 2019).

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Ernest Michael Priidik Gallagher,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose
Kommentaare interaktsioonide toomisest Poincaré algebrasse ja lainefunktsioonide katmisest,
mille juhendaja on Stefan Groote,
reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autori-
õiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli
veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY
NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning
keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete
kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Ernest Michael Priidik Gallagher

01.06.2020.