Professor Dr. *G. Paucker's*

A B C

der

Arithmetik

für

Examinanden.

XIX. — XXI. Cursus.

Mitau, auf Kosten des Verfassers.

1842. October.

Preis 50 Kop. S.

Druck von Joh. Friedr. Steffenhagen und Sohn.

Das ABC
der
Arithmetik
für
Examinanden.

Eine Zugabe zum practischen Rechenbuch
vom
Professor Dr. *G. Paucker.*

XIX.

Neunzehnter Cursus.

Die ganze Zahl und der Bruch.

Mitau 14/26 August 1842.

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.
Riga, am 28. August 1842.

Dr. *C. E. Napiersky*,
Censor.

1.

Eine ganze Zahl ist das Enthaltenseyn der Einheit in der Mehrheit, oder der durch die Einheit ausgedrückte Werth der Mehrheit.

Jede *als Ganzes gedachte* Gröſse heiſst nämlich eine *Einheit.* Mehrere als gleichartig angenommene Einheiten bilden eine *Mehrheit.* Die ganze Zahl drückt aus, wie viel Einheiten die Mehrheit ausmachen, oder wie viel Einheiten in der Mehrheit enthalten sind.

Bezeichnet oder benennt man die angenommene Einheit, so heiſst die Zahl eine concrete oder benannte Zahl.

Das Enthaltenseyn der Einheit in sich selbst, heiſst *Eins* oder *ein Einer.* Eine ganze Zahl, deren Einheit ein Einer ist, heiſst eine abstracte, reine, oder unbenannte Zahl oder eine *Anzahl von Einern.*

Der Unterschied zwischen den Raumgröſsen und Zahlgröſsen besteht darin, daſs sich die Zahlgröſse nur um Einheiten ändert, die Raumgröſse sich aber in unmerklicher Abstufung nach dem Gesetze der Stetigkeit (Continuität) verändert. Jede Raumgröſse kann aber als Maaſs oder Einheit mehrerer Raumgröſsen derselben Art angenommen werden. Sobald die Geometrie zu messen oder zu zählen anfängt, geht die Raumgröſse in eine Zahlgröſse, die Geometrie in die Arithmetik über.

2.

Jede noch so groſse ganze Zahl kann durch zehn Ziffern oder Zahlzeichen ausgedrückt werden. Die den einzelnen Ziffern entsprechenden Zahlen heiſsen Stellen. Jede Stelle bedeutet eine entsprechende Ziferzahl, deren Einheit eine Ordnung von zehn ist. Die Zahl, welche dem Namen einer Ordnung von zehn entspricht, heiſst der Zeiger.

Die ersten neun ganzen Zahlen: ***Eins***, ***Zwei***, ***Drei***, ***Vier***, ***Fünf***, ***Sechs***, ***Sieben***, ***Acht***, ***Neun*** werden durch die Zifern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bezeichnet. Die zehnte Zifer ist 0. Diese ersten neun ganzen Zahlen heissen ***Ziferzahlen.***

Eine als Einheit angesehene Zahl erhält die Endung ***er***, z. B. ein Zweier, Dreier, Fünfer, Sechser, Zwanziger u. s. w. Eine Mehrheit gleicher ***Zifern*** wird durch die Endung ***en*** bezeichnet, z. B. die Nullen, Einsen, Neunen u. s. w.

Die Zahl ***Zehn*** wird bezeichnet durch 10, und heiſst auch ***die erste Ordnung von zehn.*** Wird aber die Zahl ***Zehn*** als ein Ganzes oder eine Einheit angesehen, so heisst sie ein ***Zehner.*** Zwei, drei, vier fünf Zehner heiſsen zwanzig, dreiſsig, vierzig, funfzig u. s. w., und werden bezeichnet durch 20, 30, 40, 50 u. s. w. Zehn Zehner heiſsen ***Hundert*** oder die ***zweite Ordnung von Zehn.*** Diese Zahl wird durch 100 bezeichnet. Wird aber die Zahl ***Hundert*** als ein Ganzes oder eine Einheit angesehen, so heiſst sie ein ***Hunderter.***

Zwei, drei, vier, fünf u. s. w. Hunderte heiſsen zweihundert, dreihundert, vierhundert, fünfhundert u. s. w., und werden bezeichnet durch 200, 300, 400, 500 u. s. w.

Zehn Hunderte heiſsen ***Tausend*** oder die ***dritte Ordnung von zehn.*** Diese Zahl wird durch 1000 bezeichnet. Wird aber die Zahl ***Tausend*** als ein Ganzes oder eine Einheit angesehen, so heiſst sie ein ***Tausender.*** Zwei, drei, vier, fünf u. s. w. Tausende werden bezeichnet durch 2000, 3000, 4000, 5000 u. s. w.

Nach diesem Systeme, welches das ***Decimalsystem*** heiſst, wird jede ganze Zahl ausgesprochen und bezeichnet, indem man angiebt, wie viel Einer und wie viel Ordnungen von zehn jedes Namens in ihr enthalten sind. Z. B. die Zahl ***Achtunddreiſsigtausend siebenhundertfünf*** wäre zu bezeichnen durch

$$\left.\begin{array}{r}30000\\8000\\700\\00\\5\end{array}\right\}$$

Der Kürze wegen rückt man aber die einzelnen Zifern in eine Linie zusammen, und schreibt die Zahl auf folgende Art:

38705

Die Ziferzahlen, welche den einzelnen Zifern entsprechen, heiſsen ***Stellen.*** Die Einheiten dieser Ziferzahlen oder Stellen sind die verschiedenen Ordnungen von zehn. Z. B. in der obigen Zahl bedeutet die erste Zifer 3 drei Einheiten, deren jede die vierte Ordnung von zehn ist. Die zweite Zifer 8 bedeutet acht Einheiten, deren jede die dritte Ordnung von zehn ist. Die dritte Zifer 7 bedeutet sieben Einheiten, deren jede die zweite Ordnung von zehn ist. Die vierte Zifer 0 bedeutet, dafs aufserdem kein Zehner vorhanden ist. Die niedrigste oder Endzifer 5 bedeutet fünf Einer.

Für die Ausführung der verschiedenen Rechnungsarten ist es zweckmäfsig, über jede Stelle die Zahl zu schreiben, welche dem Namen der Ordnung von zehn entspricht. Diese Zahl heifst der *Zeiger*. Die erste Ordnung von zehn hat also 1, die zweite 2, die dritte 3 u. s. w. zum Zeiger. Der Zeiger der Einer ist hiernach 0. Z. B.

$$\text{Zeiger} \ldots \begin{array}{c} \scriptstyle 4\;3\;2\;1\;0 \\ \hline 3\,8\,7\,0\,5 \end{array}$$

Eine andre Bedeutung der Stellen einer ganzen Zahl wird weiter unten (10) angegeben werden.

Die höhern Ordnungen von zehn haben auch besondere Benennungen. Die 6te Ordnung heifst eine *Million*, die 9te Ordnung eine *Milliarde*, die 12te Ordnung eine *Billion*, die 18te Ordnung eine *Trillion*, die 24ste Ordnung eine *Quadrillion* u. s. w.

3.

Die Addition der zweiten Zahl zur ersten giebt dieselbe Summe wie die Addition der ersten Zahl zur zweiten.

Zusammenzählen (addiren) heifst nämlich, aus zwei Zahlen (Summanden) einen *Betrag* (Summe) bilden, welche jene Zahlen (Summanden) in sich enthält. Dieses geschieht, indem man zu der ersten Zahl der Reihe nach so viele Einer hinzufügt, als die zweite Zahl deren enthält. In diesem Betrage (Summe) sind nun beide Zahlen vereinigt enthalten. Fügt man aber zu der zweiten Zahl so viele Einer der Reihe nach hinzu, als die erste Zahl deren enthält, so sind in diesem Betrage wiederum beide Zahlen vereinigt enthalten. Also giebt das Hinzufügen der zweiten Zahl zur ersten soviel als das Hinzufügen der ersten Zahl zur zweiten.

Das Zeichen der Addition ist ein $+$.

Beispiel. Um zu 3 die Zahl 5 hinzuzufügen, zählt man der Reihe nach 4, 5, 6, 7, 8. Der Betrag ist 8. Um zu 5 die Zahl 3 hinzuzufügen, zählt man der Reihe nach 6, 7, 8. Der Betrag ist wieder 8. Also ist $3 + 5 = 5 + 3$.

Um die Addition schneller zu verrichten, lernt man den Betrag je zweier Ziferzahlen auswendig.

2	1+1								
3	1+2								
4	1+3	2+2							
5	1+4	2+3							
6	1+5	2+4	3+3						
7	1+6	2+5	3+4						
8	1+7	2+6	3+5	4+4					
9	1+8	2+7	3+6	4+5					
10	1+9	2+8	3+7	4+6	5+5				
11	—	2+9	3+8	4+7	5+6				
12	—	—	3+9	4+8	5+7	6+6			
13	—	—	—	4+9	5+8	6+7			
14	—	—	—	—	5+9	6+8	7+7		
15	—	—	—	—	—	6+9	7+8		
16	—	—	—	—	—	—	7+9	8+8	
17	—	—	—	—	—	—	—	8+9	
18	—	—	—	—	—	—	—	—	9+9

4.

Um die Summe mehrstelliger Zahlen zu erhalten, addirt man die gleichnamigen Stellen, d. h. diejenigen, welche einerlei Zeiger haben.

Man kann nämlich nur solche Zahlen zu einer Summe vereinigen, welche eine gemeinschaftliche Einheit haben. Die Summe der Zahlen hat alsdann dieselbe Einheit. Die gleichnamigen Stellen verschiedener Zahlen sind diejenigen, deren Ziferzahlen (2) einerlei Ordnung von zehn zur Einheit haben. Diese gleichnamigen Stellen werden durch einerlei Zeiger bezeichnet. Addirt man daher die Ziferzahlen der gleichnamigen Stellen zusammen, so hat die niedrigste Stelle in der Summe dieser Ziferzahlen denselben Zeiger, die nächsthöhere einen um 1 gröſsern Zeiger. Z. B. 8, 9, 7, 5, achte Ordnungen machen zusammen 29 achte Ordnungen, oder 9 achte Ordnungen und 2 neunte Ordnungen. Wenn sich also aus der Summirung der gleichnamigen Ziferzahlen eine Summe ergiebt welche mehrere Stellen hat, so hat die niedrigste denselben Zeiger, die Ziferzahlen der höhern Stellen werden zu den

Ziferzahlen der gleichnamigen höhern Stellen der Summanden hinzugefügt. Aus diesem Grunde fängt man die Addition bei der niedrigsten Stelle der Summanden an.

Beispiel.	Man sagt hier:		3210
3210	6, 9, 8, 3, 7,	Einer geben	3
3506	3, 4, 7, 9, 8,	erste Ordnungen geben	1
649	3, 5, 6, 5, 2,	zweite Ordnungen geben. .	1
578	2, 3 —	dritte Ordnungen geben .	5
293			5113
87			
5113			

5.

Um den Unterschied mehrstelliger Zahlen zu erhalten, bestimmt man den Unterschied der gleichnamigen Stellen, d. h. derjenigen, welche einerlei Zeiger haben.

Man hann nur dann eine Zahl von einer andern wegnehmen oder abziehen, wenn beide eine gemeinschaftliche Einheit haben. Die übrigbleibende Zahl, welche der *Ueberschuſs* oder *Unterschied* (Differenz, Rest) heiſst, hat alsdann dieselbe Einheit. Die gröſsere Zahl, von welcher weggenommen werden soll, heiſst der *Minuendus*, die kleinere Zahl, welche weggenommen werden soll, heiſst der *Subtrahendus*. *Der Minuendus muſs immer gleich dem Betrage des Subtrahendus mit dem Reste seyn.* Das Zeichen der Subtraction ist ein —.

Um die Subtraction schneller zu verrichten, lernt man die Unterschiede der Ziferzahlen und der ersten 18 Zahlen auswendig.

Unterschied									
1	2—1	3—2	4—3	5—4	6—5	7—6	8—7	9—8	10—9
2	3—1	4—2	5—3	6—4	7—5	8—6	9—7	10—8	11—9
3	4—1	5—2	6—3	7—4	8—5	9—6	10—7	11—8	12—9
4	5—1	6—2	7—3	8—4	9—5	10—6	11—7	12—8	13—9
5	6—1	7—2	8—3	9—4	10—5	11—6	12—7	13—8	14—9
6	7—1	8—2	9—3	10—4	11—5	12—6	13—7	14—8	15—9
7	8—1	9—2	10—3	11—4	12—5	13—6	14—7	15—8	16—9
8	9—1	10—2	11—3	12—4	13—5	14—6	15—7	16—8	17—9
9	10—1	11—2	12—3	13—4	14—5	15—6	16—7	17—8	18—9

Beispiel. Es soll der Unterschied von 98275 und 75162 gefunden werden. Hier ist der Minuendus 98275, der Subtrahendus 75162.

$$\begin{array}{lcccccl}
 & 4\,3\,2\,1\,0 & & 4\,3\,2\,1\,0 & & 4\,3\,2\,1\,0 \\
\text{Also ist} & ....5 & - & ....2 & = & ....3 \\
 & ...7 & - & ...6 & = & ...1 \\
 & ..2 & - & ..1 & = & ..1 \\
 & .8 & - & .5 & = & .3 \\
 & 9 & - & 7 & = & 2 \\
 & & & \text{Also ist der Rest} & = & 23113
\end{array}$$

Wenn die Stelle des Minuendus kleiner als die gleichnamige Stelle des Subtrahendus ist, so fügt man dieser Stelle des Minuendus 10 hinzu, und vermindert gleichzeitig die nächsthöhere Stelle des Minuendus um 1. Z. B.

$$53 - 8 = 40 + 13 - 8 = 40 + 5 = 45$$
$$50 - 8 = 40 + 10 - 8 = 40 + 2 = 42$$

Wenn die um 1 zu vermindernde Stelle des Minuendus 0 ist, so setzt man statt der 0 eine 9, und vermindert die nächsthöhere um 1. Ist diese wieder 0, so verfährt man auf dieselbe Art. Z. B.

$$503 - 8 = 400 + 100 + 3 - 8 = 400 + 90 + 10 + 3 - 8 = 490 + 13 - 8 = 490 + 5 = 495.$$
$$5003 - 8 = 4000 + 1000 + 3 - 8 = 4000 + 990 + 10 + 3 - 8 = 4000 + 990 + 13 - 8 = 4000 + 990 + 5 = 4990 + 5 = 4995.$$

Aus diesem Grunde fängt man auch die Subtraction bei der niedrigsten Stelle an.

Beispiel. Es soll der Unterschied von 90205 und 45678 gefunden werden, so ist die Rechnung:

$$\begin{array}{cccccl}
4\,3\,2\,1\,0 & & 4\,3\,2\,1\,0 & & 4\,3\,2\,1\,0 \\
...15 & - & ....8 & = & ....7 \\
...9 & - & ...7 & = & ...2 \\
.11 & - & ..6 & = & ..5 \\
.9 & - & .5 & = & .4 \\
8 & - & 4 & = & 4 \\
 & & \text{Also ist der Rest} & = & 44527
\end{array}$$

6.

Das Product des Multiplicandus mit dem Multiplicator ist gleich der Summe der Producte der Theile des Multiplicandus mit den Theilen des Multiplicators.

Die Summe mehrerer gleichen Summanden heifst ein *Vielfaches des Summandus*, oder ein *Product*. Die Bestimmung dieses Products heifst die *Multiplication*. Der mehrmals addirte

Summandus heifst der *Multiplicandus.* Die Anzahl der gleichen Summanden heifst der *Multiplicator.* Das Zeichen der Multiplication ist ein (.). Der Multiplicandus wird links, der Multiplicator rechts gesetzt.

Eine Zahl mit Eins multipliciren, heifst also nichts anders, als diese Zahl selbst nehmen. Folglich ist ein Product, dessen Multiplicator 1 ist, dem Multiplicandus gleich.

Die Zahl Eins mit einer ganzen Zahl multipliciren heifst die Summe mehrerer Einer finden, deren Anzahl dem Multiplicator gleich ist. Diese Summe ist offenbar dem Multiplicator gleich. Folglich ist ein Product, dessen Multiplicandus 1 ist, dem Multiplicator gleich.

Wenn der Multiplicandus aus verschiedenen Theilen besteht, so wird bei mehrmaliger Addition des Multiplicandus auch jeder seiner Theile eben so oft addirt. Also ist das Product des Multiplicandus mit dem Multiplicator gleich der Summe der Producte der verschiedenen Theile des Multiplicandus mit demselben Multiplicator.

Z. B. das Product $12 \, . \, 2 = 12 + 12$
Aber $12 = 5 + 4 + 3.$
Also $12 \, . \, 2 = 5 + 4 + 3 + 5 + 4 + 3$
oder $12 \, . \, 2 = 5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3$
also $12 \, . \, 2 = 5 \, . \, 2 + 4 \, . \, 2 + 3 \, . \, 2.$

Wenn der Multiplicator aus verschiedenen Theilen besteht, so kann die mehrmalige Addition des Multiplicandus so bewerkstelligt werden, dafs man die Summanden in einzelne Reihen vertheilt, wo jede Reihe so viel Summanden als der entsprechende Theil des Multiplicators Einer enthält. Folglich ist das Product des Multiplicandus mit dem Multiplicator gleich der Summe der Producte des Multiplicandus mit den Theilen des Multiplicators.

Z. B. $8 \, . \, 12 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$
$+ 8 + 8 + 8 + 8.$
Aber $12 = 5 + 4 + 3.$
Also $8 \, . \, 12 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8$
$+ 8 + 8 + 8 + 8$
$+ 8 + 8 + 8.$
Also $8 \, . \, 12 = 8 \, . \, 5 + 8 \, . \, 4 + 8 \, . \, 3.$

Aus diesen beiden Sätzen folgt nun der allgemeine Satz: Wenn sowohl der Multiplicandus als der Multiplicator aus verschiedenen Theilen bestehen, so ist ihr Product gleich der Summe der Producte der Theile des Multiplicandus mit den Theilen des Multiplicators.

Man multiplicirt nämlich jeden Theil des Multiplicandus mit dem ersten Theile des Multiplicators; dann jeden Theil des Multiplicandus mit dem zweiten Theile des Multiplicators; dann jeden Theil des Multiplicandus mit dem dritten Theile des Multiplicators, u. s. w.

Beispiel. Das Product von 12 . 10 zu finden, wenn $12 = 6 + 4 + 2$, $10 = 5 + 3 + 2$.

Hier ist
$$\begin{aligned} 12 \,.\, 10 = {} & 6 \,.\, 5 + 4 \,.\, 5 + 2 \,.\, 5 \\ & + 6 \,.\, 3 + 4 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3 \\ & + 6 \,.\, 2 + 4 \,.\, 2 + 2 \,.\, 2. \end{aligned}$$

7.

Das Product des Multiplicandus mit dem Multiplicator ist gleich dem Product des Multiplicators mit dem Multiplicandus.

Erster Beweis. Man zerlege den Multiplicandus in Einer. Die Anzahl derselben ist dem Multiplicandus gleich. Man bilde so viel Reihen von diesen Einern, als der Multiplicator Einer hat. Dann ist die Summe aller Einer in allen Reihen zufolge der Erklärung (6) dem Producte gleich. Aber die Summe der ersten Einer jeder Reihe ist dem Multiplicator gleich; die Summe der zweiten Einer jeder Reihe ist gleichfalls dem Multiplicator gleich, u. s. w. Also ist die ganze Summe gleich einer Summe gleicher Zahlen, deren jede der Multiplicator ist, und deren Anzahl dem Multiplicandus gleich ist. Also ist das Product der ersten Zahl mit der zweiten dem Product der zweiten Zahl mit der ersten gleich.

Beispiel. $4 \,.\, 3 = 4 + 4 + 4.$

$$\begin{aligned} \text{Also } 4 \,.\, 3 = {} & 1 + 1 + 1 + 1 \\ & + 1 + 1 + 1 + 1 \\ & + 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Also $4 \,.\, 3 = 3 + 3 + 3 + 3.$

Also $4 \,.\, 3 = 3 \,.\, 4.$

Zweiter Beweis. Wenn die kleinere Zahl von der gröſsern abgezogen wird, so erhält man ein neues Zahlenpaar. Die eine Zahl ist die kleinere von jenen beiden, die andere ist der Unterschied. Aus diesen bildet man auf gleiche Weise ein drittes Zahlenpaar. So fährt man fort, und kommt zuletzt nothwendig immer auf zwei gleiche Zahlen. Folglich läſst sich jedes Product zweier ungleichen Zahlen in eine Reihe von Producten auflösen, in welchen der Multiplicandus und Multiplicator einander gleich sind. Also bleibt das Product zweier ungleichen Zahlen bei Vertauschung dieser Zahlen, welche Factoren heiſsen, unverändert.

Beispiel. Die Factoren seyen 8, 13. Hieraus bildet man 5, 8; hieraus 3, 5; hieraus 2, 3; hieraus 1, 2; hieraus 1, 1. Also ist:

$$
\begin{aligned}
13.8 &= 8.8 + 5.8 \\
&= 8.8 + 5.5 + 5.3 \\
&= 8.8 + 5.5 + 3.3 + 2.3 \\
&= 8.8 + 5.5 + 3.3 + 2.2 + 2.1 \\
&= 8.8 + 5.5 + 3.3 + 2.2 + 1.1 + 1.1 \\
8.13 &= 8.8 + 8.5 \\
&= 8.8 + 5.5 + 3.5 \\
&= 8.8 + 5.5 + 3.3 + 3.2 \\
&= 8.8 + 5.5 + 3.3 + 2.2 + 1.2 \\
&= 8.8 + 5.5 + 3.3 + 2.2 + 1.1 + 1.1
\end{aligned}
$$

Also ist $13.8 = 8.13$.

8.

Das Product dreier Factoren bleibt unverändert, wenn man den zweiten Factor mit dem dritten, und den dritten mit dem zweiten vertauscht.

Man bilde eine Reihe von Summanden, deren jeder dem ersten Factor gleich ist, und deren Anzahl dem zweiten Factor gleich ist. Man bilde so viel solcher Reihen, als der dritte Factor Einer enthält. Dann ist die Summe aller Summanden in allen Reihen, zufolge der Erklärung (6) dem Product der drei Factoren gleich. Aber die Summe der ersten Summanden jeder Reihe ist dem Product des ersten Factors mit dem dritten gleich. Die Summe der zweiten Summanden jeder Reihe ist ebenfalls diesem Producte gleich u. s. w. Also ist die ganze Summe gleich dem Producte des ersten Factors mit dem dritten und mit dem zweiten. Also bleibt das Product unverändert dasselbe, wenn man den zweiten und dritten Factor mit einander vertauscht.

Beispiel. Die Factoren seyen 8, 5, 4.

$$
\begin{aligned}
8 \,.\, 5 \,.\, 4 = 8 &+ 8 + 8 + 8 + 8 \\
+ 8 &+ 8 + 8 + 8 + 8 \\
+ 8 &+ 8 + 8 + 8 + 8 \\
+ 8 &+ 8 + 8 + 8 + 8
\end{aligned}
$$

Also $8 \,.\, 5 \,.\, 4 = 8 \,.\, 4 + 8 \,.\, 4 + 8 \,.\, 4 + 8 \,.\, 4 + 8 \,.\, 4$

Also $8 \,.\, 5 \,.\, 4 = 8 \,.\, 4 \,.\, 5$.

9.

Das Product mehrerer Factoren bleibt unverändert, wie man auch die Reihenfolge der Factoren verändern mag.

Dieser Satz wird bewiesen durch abwechselnde Anwendung der Sätze (7) und (8).

Die Factoren seyen z. B. 8, 5, 4. Vertauscht man den ersten und zweiten Factor, so ist (7) $8 . 5 . 4 = 5 . 8 . 4$. Vertauscht man den zweiten und dritten Factor, so ist nach (8) $5 . 8 . 4 = 5 . 4 . 8$. Dann ist nach (7) wieder $5 . 4 . 8 = 4 . 5 . 8$. Dann ist nach (8) wieder $4 . 5 . 8 = 4 . 8 . 5$. Dann ist nach (7) wieder $4 . 8 . 5 = 8 . 4 . 5$. Folglich bleibt das Product in allen sechs Versetzungen der drei Factoren unverändert.

Auf gleiche Art beweiset man durch (7) und (8), dafs bei 4 Factoren das Product in allen 24 Versetzungen unverändert bleibt, u. s. w.

10.

Jede Stelle erhält einen 10 mal gröfsern oder 10 mal kleinern Werth, je nachdem man ihren Zeiger um 1 vermehrt oder um 1 vermindert.

Nach (2) ist der Werth jeder Stelle die entsprechende Ziferzahl, deren Einheit diejenige Ordnung von zehn ist, welche durch den Zeiger der Stelle benannt wird. Der Werth der Stelle ist also die Summe mehrerer gleichen Summanden, deren Anzahl der Ziferzahl gleich ist, wobei jeder Summandus die durch den Zeiger benannte Ordnung von zehn ist. Folglich ist der Werth der Stelle gleich einem Product, dessen Multiplicandus die Ordnung von zehn, dessen Multiplicator die Ziferzahl ist. Da aber (7) die Versetzung der Factoren das Product nicht ändert, so ist der Werth der Stelle auch gleich einem Product, dessen Multiplicandus die Ziferzahl, dessen Multiplicator die Ordnung von zehn ist. Z. B. in der Zahl $\overset{43210}{38705}$ ist

$$\begin{array}{lrrr}
\text{die erste Stelle} = & 30000 = & 10000 \,.\, 3 = & 3 \,.\, 10000 \\
\text{die zweite Stelle} = & 8000 = & 1000 \,.\, 8 = & 8 \,.\, 1000 \\
\text{die dritte Stelle} = & 700 = & 100 \,.\, 7 = & 7 \,.\, 100.
\end{array}$$

Wenn also der Zeiger einer Stelle um 1 vermehrt oder vermindert wird, so wird der Multiplicator ihrer Ziferzahl 10 mal gröfser oder 10 mal kleiner, also auch der Werth der Stelle 10 mal gröfser oder 10 mal kleiner.

Auf gleiche Weise erhellet: Wenn der Zeiger der Stelle um 2 vermehrt oder vermindert wird, so wird der Werth der Stelle 100 mal gröfser oder kleiner.

11.

Die pythagoräische Tafel oder das Einmaleins enthält die Producte je zweier Ziferzahlen.

Wenn man zu einer Ziferzahl dieselbe Ziferzahl addirt, so erhält man das Doppelte der Ziferzahl, d. h. (6) das Product dieser Ziferzahl mit 2, oder (7) das Product von 2 mit dieser Ziferzahl.

Wenn man zum Doppelten der Ziferzahl dieselbe Ziferzahl addirt, so erhält man das Dreifache der Ziferzahl, d. h. (6) das Product dieser Ziferzahl mit 3, oder (7) das Product von 3 mit dieser Ziferzahl. Indem man auf diese Weise fortfährt, bildet man die nachstehende pythagoräische Tafel oder das Einmaleins:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
		3	9	12	15	18	21	24	27
			4	16	20	24	28	32	36
				5	25	30	35	40	45
					6	36	42	48	54
						7	49	56	63
							8	64	72
								9	81

12.

Das Product zweier Ordnungen von zehn ist eine Ordnung von zehn, deren Zeiger gleich der Summe der Zeiger der Factoren ist.

Das Product einer Ordnung von zehn mit 10 heifst (6) eine Summe von zehn solcher Ordnungen. Aber nach (2) machen zehn Ordnungen von zehn die nächsthöhere Ordnung von zehn. Folglich wird durch Multiplication einer Ordnung von zehn mit 10, ihr Zeiger um 1 vermehrt.

Wenn man also eine Ordnung mit 10, und dann wieder mit 10, multiplicirt, so wird ihr Zeiger um 2 vermehrt. Eine Zahl mit 10 und dieses Product wieder mit 10 multipliciren, heifst aber (9) soviel als diese Zahl mit 10 . 10 d. h. mit 100, d. h. mit der zweiten Ordnung von zehn multipliciren. Durch die Multiplication einer Ordnung von zehn mit der 2ten Ordnung von zehn, wird also ihr Zeiger um 2 vermehrt.

Auf gleiche Weise erhellet, dafs durch Multiplication einer Ordnung von zehn mit der 3ten Ordnung von zehn, ihr Zeiger um 3 vermehrt wird.

Folglich hat überhaupt das Product zweier Ordnungen von zehn einen Zeiger, welcher gleich der Summe der Zeiger der Factoren ist.

Beispiel.
$$\overset{4}{\overline{10000}} \,.\, \overset{1}{\overline{10}} = \overset{5}{\overline{100000}}$$
$$\overset{4}{\overline{10000}} \,.\, \overset{2}{\overline{100}} = \overset{6}{\overline{1000000}}$$
$$\overset{4}{\overline{10000}} \,.\, \overset{3}{\overline{1000}} = \overset{7}{\overline{70000000}}.$$

13.

In dem Product zweier Stellen hat die niedrigste Stelle des Products der Ziferzahlen einen Zeiger, welcher gleich der Summe der Zeiger der Factoren ist.

Der Werth einer Stelle ist (10) ein Product ihrer Ziferzahl mit derjenigen Ordnung von zehn, welche durch den Zeiger dieser Stelle benannt wird. Der Werth des Products zweier Stellen ist also gleich dem Product ihrer Ziferzahlen multiplicirt mit dem Product der beiden Ordnungen von zehn. Dieses letztere Product hat aber (12) zum Zeiger die Summe der Zeiger der Factoren. Folglich ist der Werth des Products zweier Stellen gleich dem Product ihrer Ziferzahlen mit derjenigen Ordnung von zehn, deren Zeiger gleich der Summe der Zeiger der Factoren ist. Hat also das Product der Ziferzahlen nur eine Stelle, so ist ihr Zeiger gleich der Summe der Zeiger der Factoren. Hat aber das Product der Ziferzahlen zwei Stellen, so ist der Zeiger der niedrigsten Stelle gleich der Summe der Zeiger der Factoren.

Beispiel. Die Zahlen seyen $\overset{43210}{\overline{38000}}$ und $\overset{3210}{\overline{2734}}$.

Die beiden ersten Stellen sind
$$\overset{43210}{\overline{30000}} = 3 \,.\, \overset{4}{\overline{10000}}$$
$$\text{und}\quad 2000 = 2 \,.\, \overset{3}{\overline{1000}}$$
$$\text{ihr Product ist} = 6 \,.\, \overset{7}{\overline{10000000}} = \overset{7}{\overline{60000000}}.$$

Die beiden zweiten Stellen sind:

$$\overset{3210}{\overline{8000}} = 8 . \overset{3}{\overline{1000}}$$

$$\text{und}\quad 700 = 7 . \overset{2}{\overline{100}}$$

$$\text{ihr Product ist} = 56 . \overset{5}{\overline{100000}} = \overset{65}{\overline{5600000}}.$$

14.

Zwei mehrstellige Zahlen mit einander zu multipliciren.

Nach (6) mufs jeder Theil des Multiplicandus mit jedem Theile des Multiplicators multiplicirt werden. Die Theile sind hier die einzelnen Stellen, aus denen die beiden Zahlen bestehen. Man multiplicirt also der Reihe nach jede Stelle des Multiplicandus mit jeder Stelle des Multiplicators. Dieses geschieht, indem man mit Hülfe der pythagoräischen Tafel (11) das Product der Ziferzahlen dieser Stellen bildet, und dieses Product so stellt, dafs (13) der Zeiger der niedrigsten Stelle des Products, der Summe der Zeiger der Factoren gleich ist. Man fängt daher, wie bei der Addition, die Multiplication bei der niedrigsten Stelle des Multiplicandus an, um die höhere Stelle des niedrigern Products mit der niedrigsten Stelle des nächsthöhern Products vereinigen zu können. Es ist gleichgültig, ob man die Multiplication mit der niedrigsten oder höchsten Stelle des Multiplicators beginnt. Aber wegen der folgenden Rechnungsarten (Division, abgekürzte Multiplication der Decimalzahlen, Wurzelausziehung) ist es zweckmäfsiger die Multiplication mit der ersten oder höchsten Stelle des Multiplicators anzufangen. Z. B.

```
9876543210
....973968
....  8573
----------
7791744
 4869840
  6817776
   2921904
----------
8349827664
```

Der Zeiger der höchsten Stelle des Products ist gleich der Summe der Zeiger der Factoren, oder um 1 gröfser.

15.

Eine mehrstellige Zahl mit einer andern zu dividiren.

Dividiren heifst, bei der Theilung einer ganzen Zahl in eine Anzahl gleicher Theile, den Werth oder die Gröfse jedes Theils finden. Die Zahl, welche getheilt werden soll, heifst der *Dividendus*, die Anzahl der Theile heifst der *Divisor*, und die Zahl, welche die Gröfse oder den Werth jedes Theils in derselben Einheit, welche der Dividendus hat, ausdrückt, heifst der *Quotient.*

Wenn z. B. die Zahl 12 in 3 gleiche Theile getheilt werden soll, so ist der Dividendus gleich 12, der Divisor gleich 3, der Quotient gleich 4.

Wenn die Division blofs angezeigt werden soll, so schreibt man, wie bei der Multiplication, den Dividendus links, den Divisor rechts, und zwischen dieselben das Divisionszeichen (:) oder man setzt den Dividendus oben, den Divisor unten, und zwischen dieselben das Divisionszeichen (—). Z. B. Um die Division von 12 mit 3 anzuzeigen, schreibt man 12:3 oder $\frac{12}{3}$.

Da alle Theile zusammen den Dividendus ausmachen, die einzelnen Theile aber einander gleich sind, und ihre Anzahl dem Divisor gleich ist, so kann nach der Erklärung der Multiplication (6) der Quotient als Multiplicandus, der Divisor als Multiplicator angesehen werden. Das Product mufs den Dividendus geben. Aber nach (7) bleibt das Product unverändert, wenn die Factoren vertauscht werden. Folglich kann man auch den Divisor als Multiplicandus, den Quotienten als Multiplicator ansehen. Dann ist der Divisor der Theil des Dividendus, und der Quotient ist die Anzahl der gleichen Theile.

Hieraus ergiebt sich die zweite Erklärung der Division, als Bestimmung einer *Zahl, welche anzeigt, wie vielmal der Divisor im Dividendus enthalten sey.* Diese Zahl heifst dann der Quotient. Aus dieser zweiten Erklärung erhellet das Mittel, den Quotienten zu finden. Man zieht nämlich den Divisor zuerst vom Dividendus, dann vom Rest, dann vom folgenden Rest u. s. w. ab, bis entweder nichts übrig bleibt, oder eine Zahl welche kleiner als der Divisor ist. Diese zuletzt übrigbleibende Zahl heifst der *Divisionsrest*, und die Anzahl der Subtractionen ist die ganze Zahl des Quotienten.

Hieraus folgt nun der Satz: *Wenn zum Product des Divisors mit der ganzen Zahl des Quotienten der Divisionsrest addirt wird, so ergiebt sich der Dividendus.*

Das Verfahren, den Quotienten durch fortgesetzte Subtraction des Divisors zu finden, läfst sich durch folgenden Satz abkürzen: Wenn statt mehrerer Zahlen ihre Summe, oder statt mehrerer gleichen Zahlen ihr Product abgezogen wird, so bleibt der Rest derselbe. Z. B.

73 — 8 — 9 — 7 ist gleich 73 — 24. Oder
73 — 8 — 8 — 8 ist gleich 73 — 8 . 3.

Es kommt also darauf an, vom Dividendus das nächstkleinere Vielfache des Divisors abzuziehen. Da aber nicht alle Stellen des Quotienten zugleich gefunden werden können, so bestimmt man zuerst die erste oder höchste Stelle des Quotienten. Man schneidet also von den höhern Stellen des Dividendus entweder eben so viel Stellen ab, als der Divisor deren hat, oder, wenn die abgeschnittene Zahl kleiner als der Divisor ist, noch eine Stelle mehr. Alsdann bestimmt man mit Hülfe der pythagoräischen Tafel diejenige Ziferzahl, welche als Multiplicator mit dem Divisor als Multiplicandus ein Product giebt, welches der abgeschnittenen Zahl am nächsten kommt. Dieses Product wird von der abgeschnittenen Zahl abgezogen. Der Rest mufs kleiner als der Divisor seyn. Der gefundene Multiplicator ist die Ziferzahl der ersten oder höchsten Stelle des Quotienten. Hieraus folgt, dafs *der Zeiger des Quotienten entweder gleich dem Unterschied der Zeiger des Dividendus und Divisors, oder um 1 kleiner ist.*

An den Rest setzt man die Ziferzahl der nächstniedrigern Stelle des Dividendus, und bestimmt auf dieselbe Art durch die pythagoräische Tafel die Ziferzahl der zweiten Stelle des Quotienten u. s. w.

Beispiel. Es soll 975318246 mit 98756 dividirt werden.

```
43210  876543210  3210
98756|975318246|9876 Quotient
     |888804   |
      865142
      790048
       750944
       691292
        596526
        592536
Divisionsrest ..3990
```

Probe durch Multiplication.

```
                 876543210
Quotient . . . . .    9876
Divisor  . . . . .   98756
                 88884
                  79008
                   69132
                    49380
                     59256
Divisionsrest . . . . 3990
Dividendus       975318246
```

16.

Benannte Zahlen zu addiren.

Die bei den benannten Zahlen vorkommenden gröfsern und kleinern Einheiten oder Benennungen sind von der Beschaffenheit, dafs jede gröfsere Einheit eine ganze Anzahl der nächstkleinern Einheiten enthält. Diese ganze Zahl heifst die

Maaſszahl. Z. B. das Pfund enthält 96 Solotnik, die Maaſszahl ist also 96.

Eben so wie bei der Addition unbenannter Zahlen nur die Ziferzahlen gleichnamiger Stellen addirt werden, da sie einerlei Ordnung von zehn zur Einheit haben, so werden auch bei den benannten Zahlen nur diejenigen Zahlen addirt, welche einerlei Benennung, also eine gemeinschaftliche Einheit haben. Ferner eben so wie, wegen der Reduction der niedrigern Stellen auf höhere, bei den unbenannten Zahlen zuerst die Ziferzahlen der Einer, dann die Ziferzahlen der ersten Ordnung, dann die der zweiten Ordnung u. s. w. addirt werden, so wird auch bei den benannten Zahlen die Addition bei den Zahlen der kleinsten Benennung angefangen. Diese Summe wird durch die erste Maaſszahl dividirt. Der Quotient giebt eine Anzahl Einheiten der nächsthöhern Art. Diesen Quotienten addirt man also zu den gegebenen Zahlen derselben Benennung. Der Rest der Division zeigt die Zahl der übrigbleibenden kleinern Einheiten an. Die zweite Summe wird durch die zweite Maaſszahl dividirt, u. s. w. Z. B.

	Berkowez.	Pud.	Pfund.	Solotnik.	
	3	9	38	94	1 Pfund = 96 Sol.
	5	8	34	75	1 Pud = 40 Pfd.
	4	6	36	87	1 Berk. = 10 Pud.
	(2)	(2)	(2)		
Summa	14	5	30	64	

Die erste Summe 256 mit der ersten Maaſszahl 96 dividirt, giebt zum Rest 64 Solotnik, zum Quotienten 2 Pfund. Die zweite Summe 110 mit der zweiten Maaſszahl 40 dividirt giebt zum Rest 30 Pfund, zum Quotienten 2 Pud. Die dritte Summe 25 mit der dritten Maaſszahl 10 dividirt, giebt zum Rest 5 Pud, zum Quotienten 2 Berkowez. Die vierte und letzte Summe ist also 14 Berkowez.

17.

Benannte Zahlen zu subtrahiren.

Wenn im Minuendus die Anzahl der Einheiten irgend einer Benennung kleiner als die Anzahl der Einheiten derselben Benennung im Subtrahendus ist, so addirt man zur Zahl des Minuendus diejenige Maaſszahl, durch welche diese Benennung auf die nächstgröſsere gebracht wird. Von dieser Summe zieht man die Zahl des Subtrahendus ab. Gleichzeitig vermindert man die Zahl der nächsthöhern Benennung im Minuendus um 1. Aus diesem Grunde wird auch die Subtraction bei der kleinsten Benennung angefangen.

Beispiel.	Berkowez.	Pud.	Pfund.	Solotnik.
Minuendus	5	8	34	75
Subtrahendus	3	9	38	94
Rest	1	8	35	77.

Zu 75 Solotnik addirt man die Maafszahl 96, welches 171 giebt; hievon 94 abgezogen, bleiben 77 Solotnik. Die 34 um 1 vermindert, und um die Maafszahl 40 vermehrt, giebt 73; hievon 38 abgezogen, bleiben 35 Pfund. Die 8 um 1 vermindert und um die Maafszahl 10 vermehrt, giebt 17; hievon 9 abgezogen bleiben 8 Pud. Die 5 wird also um 1 vermindert, und davon 3 abgezogen, bleibt 1 Berkowez.

18.

Benannte Zahlen zu multipliciren.

Wenn der Multiplicandus eine benannte, der Multiplicator eine unbenannte Zahl ist, so multiplicirt man nach (6) die Zahlen aller Benennungen des Multiplicandus einzeln mit dem Multiplicator. Hierauf macht man die Reduction durch die Maafszahlen wie bei der Addition, indem man bei der kleinsten Benennung anfängt.

Beispiel.	Pud.	Pfund.	Solotnik.	Doli.
Multiplicandus	5	36	40	75
Multiplicator 32)				
Product	160	1152	1280	2400
Reducirtes Product	189	5	57	0.

2400 mit der Maafszahl 96 dividirt, giebt zum Rest 0 Doli, zum Quotienten 25 Solotnik. 1280 um 25 vermehrt und mit der Maafszahl 96 dividirt, giebt zum Rest 57 Solotnik, zum Quotienten 13 Pfund. 1152 um 13 vermehrt und mit der Maafszahl 40 dividirt, giebt zum Rest 5 Pfund, zum Quotienten 29 Pud. 160 um 29 vermehrt, giebt 189 Pud.

Wenn die benannten Zahlen Längen- oder Flächenmaafse sind, so kann der Fall vorkommen, dafs sowohl der Multiplicator als Multiplicandus benannte Zahlen sind. Alsdann bringt man beide auf die kleinste Benennung. Man multiplicirt nämlich die Zahl der gröfsten Benennung mit der Maafszahl, und addirt die Zahl der nächstkleinern Benennung hinzu. Mit dieser Summe verfährt man auf gleiche Art. Nachdem beide Factoren auf die kleinste Benennung gebracht sind, bildet man das Product, welches ein Flächen- oder Körpermaafs seyn wird. Dieses reducirt man sodann durch die entsprechenden Maafszahlen auf gröfsere Benennungen.

Beispiel.

Höhe	18 Saschen	6 Fufs	9 Zoll
Grundfläche ...	45 □Saschen	48 □Fufs	120 □Zoll
Product od. körperlicher Inhalt .	872 Cb.-Saschen	100 Cb.-Fufs	648 Cb.-Zoll.

Nämlich 18 Saschen mit der Maafszahl 7 multiplicirt und um 6 vermehrt, geben 132 Fufs. Diese mit der Maafszahl 12 multiplicirt und um 9 vermehrt, geben 1593 Zoll.

45 □Saschen mit der Maafszahl 49 multiplicirt und um 48 vermehrt, geben 2253 □Fufs. Diese mit der Maafszahl 144 multiplicirt, und um 120 vermehrt, geben 324552 □Zoll.

Das Product von 1593 Zoll mit 324552 □Zoll giebt 517011336 Cubikzoll. Diese Zahl mit der Maafszahl 1728 dividirt, giebt zum Rest 648 Cubikzoll, zum Quotienten 299196 Cubikfufs. Diese Zahl mit der Maafszahl 343 dividirt, giebt zum Rest 100 Cubikfufs, zum Quotienten 872 Cubiksaschen.

19.

Benannte Zahlen zu dividiren.

Wenn der Dividendus eine benannte Zahl, der Divisor eine unbenannte Zahl ist, so verfährt man wie bei der Division der unbenannten Zahlen. Man dividirt nämlich die Zahl der höchsten Benennung mit dem Divisor. Der Quotient ist eine Zahl der höchsten Benennung. Den Rest multiplicirt man mit der Maafszahl und addirt zum Product die Zahl der nächstniedrigern Benennung im Dividendus. Diese Summe dividirt man wiederum mit dem Divisor, und fährt so fort.

Beispiel.	Pud.	Pfund.	Solotnik.
Dividendus . .	21	38	87
Divisor . 15)			
Quotient . . .	1	18	57.

Hier giebt 21 mit 15 dividirt zum Quotienten 1 Pud, zum Rest 6 Pud. 6 mit der Maafszahl 40 multiplicirt, um 38 vermehrt und mit 15 dividirt, giebt zum Quotienten 18 Pfund und zum Rest 8 Pfund. 8 mit der Maafszahl 96 multiplicirt, um 87 vermehrt, und mit 15 dividirt, giebt zum Quotienten 57 Sol.

Wenn sowohl der Dividendus als der Divisor benannte Zahlen, aber beide von gleicher Art sind, so bringt man sie beide auf ihre kleinste gemeinschaftliche Benennung oder Einheit, und dividirt dann die Zahl des Dividendus mit der Zahl des Divisors. Der Quotient ist eine unbenannte Zahl.

Beispiel.	Pud.	Pfund.	Solotnik.
Dividendus . .	21	38	87
Divisor	1	18	57
Quotient . 15)			

Hier giebt 21 mit der Maafszahl 40 multiplicirt und um 38 vermehrt, die Zahl 878. Diese Zahl mit der Maafszahl 96 multiplicirt, und um 87 vermehrt, giebt die Zahl 84375.

Ferner giebt 1 mit der Maafszahl 40 multiplicirt und um 18 vermehrt die Zahl 58. Diese Zahl mit der Maafszahl 96 multiplicirt und um 57 vermehrt, giebt die Zahl 5625.

Der Dividendus ist nun 84375 Solotnik, der Divisor 5625 Solotnik. Der Quotient ist also die unbenannte Zahl 15.

Wenn die benannten Zahlen geometrische Gröfsen sind, so können der Dividendus und Divisor Benennungen von ungleicher Art enthalten, z. B. der Dividendus Körpermaafse, der Divisor Flächen- oder Längenmaafse; oder der Dividendus Flächenmaafse, der Divisor Längenmaafse. Alsdann bringt man beide auf ihre kleinsten Benennungen, wobei man wahrzunehmen hat, dafs beide eine gemeinschaftliche Seite haben müssen. Z. B. Wenn der Dividendus ein Körpermaafs und auf Cubikzoll gebracht worden ist, der Divisor aber ein Flächenmaafs ist, so mufs er auf Quadratzoll gebracht werden. Die gemeinschaftliche Seite ist hier der Zoll. Der Quotient ist dann eine benannte Zahl, welche durch die entsprechenden Maafszahlen auf gröfsere Benennungen gebracht wird.

Beispiel.

Körp. Inhalt . .	76 Cub.-Saschen	131 Cub.-Fufs	128 Cub.-Zoll
Höhe	5 Saschen	6 Fufs	8 Zoll
Grundfläche . .	12 □Saschen	40 □Fufs	112 □Zoll.

Hier giebt 76 mit der Maafszahl 343 multiplicirt und um 131 vermehrt, die Zahl 26199. Diese mit der Maafszahl 1728 multiplicirt, und um 128 vermehrt, giebt 45272000 Cubikzoll.

Ferner giebt 5 mit der Maafszahl 7 multiplicirt und um 6 vermehrt, die Zahl 41. Diese mit der Maafszahl 12 multiplicirt und um 8 vermehrt, giebt 500 Zoll.

Der Dividendus enthält also 45272000 Cubikzoll, der Divisor 500 Zoll, also der Quotient 90544 Quadratzoll. Diese geben mit der Maafszahl 144 dividirt, den Rest 112 Quadratzoll und den Quotienten 628 Quadratfufs. Diese geben mit der

Maaſszahl 49 dividirt den Rest 40 Quadratfuſs und den Quotienten 12 Quadratsaschen.

20.

Den gröſsten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden.

Wenn eine Zahl in eine andere bei der Division aufgeht, so daſs kein Rest übrig bleibt, so heiſst die erste Zahl ein *Theiler* oder Factor der zweiten, die zweite aber heiſst ein *Vielfaches* der ersten. Wenn also eine Zahl mit irgend einer andern multiplicirt wird, so ist das Product sowohl ein Vielfaches der ersten als der zweiten Zahl, und beide sind Theiler des Products.

Z. B. $6 \,.\, 9 = 54$, also ist 54 ein Vielfaches von 6, und auch ein Vielfaches von 9; und die Zahlen 6 und 9 sind Theiler der Zahl 54.

Wenn also eine Zahl ein Theiler einer andern ist, so ist sie auch ein Theiler aller Vielfachen der zweiten Zahl.

Z. B. 6 ist ein Theiler von 54, also auch ein Theiler von $108 = 54 \,.\, 2$, ein Theiler von $162 = 54 \,.\, 3$, ein Theiler von $378 = 54 \,.\, 7$ u. s. w. Aus gleichem Grunde ist auch die Zahl 9, weil sie ein Theiler von 54, auch ein Theiler von 108, 162, 378 u. s. w.

Jede Zahl hat zum Theiler die Zahl 1 (6), jede Zahl hat auch sich selbst zum Theiler. Eine Zahl, welche keinen andern Theiler als 1 und sich selbst hat, heiſst eine *Primzahl*. Die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 u. s. w. sind Primzahlen.

Jede Zahl, deren Theiler 2 ist, heiſst eine *grade Zahl*. Z. B. 2, 4, 6, 8, 10 u. s. w. sind grade Zahlen.

Jede Zahl, deren Theiler 2 nicht ist, giebt mit 2 dividirt, den Rest 1, und heiſst eine *ungrade Zahl*. Z. B. 3, 5, 7, 9 u. s. w. sind ungrade Zahlen.

Hieraus folgt, daſs das Product zweier graden Zahlen oder einer graden und ungraden Zahl eine grade Zahl, und das Product zweier ungraden Zahlen eine ungrade Zahl ist.

Jede Zahl ist entweder eine Primzahl oder ein Product mehrerer gleichen oder ungleichen Primzahlen. Um also die Theiler einer Zahl zu erhalten, dividirt man sie so oft als es angeht durch die Primzahlen 2, 3, 5, 7 u. s. w. Alle Zahlen welche aus den Divisoren durch Multiplication gebildet werden, sind Theiler jener ersten Zahl.

Z. B. $441000 : 2 = 220500$, $220500 : 2 = 110250$, $110250 : 2 = 55125$, $55125 : 3 = 18375$, $18375 : 3 = 6125$, $6125 : 5 = 1225$, $1225 : 5 = 245$, $245 : 5 = 49$, $49 : 7 = 7$. Folglich sind 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7 also auch alle aus diesen 10 Zahlen durch Multiplication gebildeten Zahlen, Theiler der Zahl 441000.

Ein Theiler einer Zahl ist der gröſste gemeinschaftliche Theiler der Zahl und ihres Theilers. Z. B. 7 ist der gröſste gemeinschaftliche Theiler von 7 und 14, oder von 7 und 21, oder von 7 und 28 u. s. w.

Der gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen ist auch ein Theiler ihrer Summe, ihres Unterschiedes, ihrer Vielfachen, der Summe ihrer Vielfachen und des Unterschiedes ihrer Vielfachen, kann also nicht gröſser als der Unterschied ihrer Vielfachen seyn.

Z. B. der gemeinschaftliche Theiler von 21 und 35 ist auch ein Theiler ihrer Summe 56, und ihres Unterschiedes 14, er ist auch ein Theiler ihrer Vielfachen 63 und 70, also auch ein Theiler der Summe 133, und des Unterschiedes 7, kann also nicht gröſser als 7 seyn. Also ist 7 der gröſste gemeinschaftliche Theiler von 21 und 35.

Hierauf beruht folgendes Verfahren, den gröſsten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden: Man mache die kleinere Zahl zum Divisor, die gröſsere zum Dividendus. Dann mache man den ersten Divisionsrest zum Divisor, den ersten Divisor zum Dividendus. Dann mache man den zweiten Divisionsrest zum Divisor, den ersten Divisionsrest zum Dividendus, und fahre so fort. Haben nun die beiden zuerst angenommenen Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler, so ist diese Zahl auch ein Theiler aller auf einander folgenden Divisionsreste, und kann also nicht gröſser als diese Divisionsreste seyn. Ist also ein Divisionsrest ein Theiler des vorhergehenden, so ist er der gröſste gemeinschaftliche Theiler je zweier auf einander folgenden Divisionsreste, also auch der beiden zuerst angenommenen Zahlen.

Beispiel. Es sey der gröſste gemeinschaftliche Theiler von 731 und 2709 zu finden.

731	2709	3
516	2193	1
215	516	2
172	430	2
43	86	2
	86	
	0	

Hier sind: der erste Divisionsrest 516, der zweite 215, der dritte 86, der vierte 43. Da 43 ein Theiler von 86 ist, so ist 43 der gröſste gemeinschaftliche Theiler von 43 und 86, von 86 und 215, von 215 und 516, von 516 und 731, von 731 und 2709.

21.

Ein Bruch kann entweder als die Summe einer Anzahl gleicher einfacher Theile des Einers, oder auch als der einfache Theil einer ganzen Zahl erklärt werden.

Die ganze Zahl ist (1) das Enthaltenseyn der Einheit in der Mehrheit, und der Einer das Enthaltenseyn der Einheit in sich selbst. Hierbei wird die Einheit, also auch der Einer als ein ungetheiltes Ganzes angesehen. Aber jede Einheit kann mehrere einander gleiche Bestandtheile enthalten. Also kann auch der Einer in mehrere einander gleiche kleinere Zahlen getheilt gedacht werden, deren Summe dem Einer gleich ist. Jeder einzelne dieser einander gleichen kleinern Zahlen heifst alsdann ein *einfacher Theil*, und die Anzahl der in dem Einer enthaltenen einfachen Theile heifst der *Nenner* des einfachen Theils. Ein solcher einfacher Theil wird bezeichnet durch das Setzen des Nenners unter 1. Z. B. der einfache Theil, deren 5 den Einer machen, wird bezeichnet durch $^1/_5$.

Die *Summe* mehrerer einander gleichen einfachen Theile heifst ein *Bruch*, die Anzahl derselben heifst der *Zähler* des Bruchs, die Anzahl derjenigen derselben, deren Summe dem Einer gleich ist, heifst der *Nenner* des Bruchs. Der Bruch wird bezeichnet durch das Setzen des Nenners unter den Zähler.

Z. B. Wenn die Summe von $^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5 = 1$ ist, so ist $^2/_5$ die Summe von $^1/_5 + {}^1/_5$, $^3/_5$ die Summe von $^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5$, $^4/_5$ die Summe von $^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5$ u. s. w.

Nach dieser ersten Ansicht ist also der Bruch *die Summe einer bestimmten Anzahl einander gleichen Zahlen, welche die Beschaffenheit haben, dafs die Summe einer andern bestimmten Anzahl derselben dem Einer gleich ist.*

Nach der Erklärung der Multiplication (6) heifst die Summe mehrerer gleichen Summanden ein Product, der Summandus heifst der Multiplicandus, die Anzahl der Summanden heifst der Multiplicator. Diese Erklärung galt ursprünglich für den Fall, wo der Multiplicandus eine ganze Zahl ist, es liegt aber nichts widersprechendes darin, sie auch auf den Fall auszudehnen, wo der Multiplicandus eine beliebige Zahl ist. Alsdann ist, vermöge der obigen Erklärung des einfachen Theils und des Bruchs, *der einfache Theil eine Zahl, deren Product mit dem Nenner den Einer giebt, und der Bruch eine Zahl, welche durch Multiplication des einfachen Theils mit dem Zähler entsteht.* Man löse den Bruch in seine einfachen Theile auf, und wiederhole diese Reihe so oft, dafs die Anzahl der

Reihen dem Nenner gleich ist. Alsdann giebt die Summe der ersten einfachen Theile in jeder Reihe den Einer; eben so giebt die Summe der zweiten einfachen Theile den Einer u. s. w. Also ist die ganze Summe dem Zähler gleich. Diese Summe ist aber auch gleich der Summe mehrer gleichen Summanden, deren jeder der Bruch ist, deren Anzahl dem Nenner gleich ist, folglich gleich dem Product des Bruchs mit dem Nenner. *Also ist das Product des Bruchs mit seinem Nenner, dem Zähler gleich.*

Z. B. $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$
$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}.$

Also $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = 1 + 1 + 1 = 3.$
Aber $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \,.\, 5.$
Also $\frac{3}{5} \,.\, 5 = 3.$

Auf denselben Satz gelangt man, wenn man den Bruch auf folgende Art erklärt: *Ein Bruch ist ein einfacher Theil einer ganzen Zahl.* Man denke sich nämlich eine ganze Zahl in mehrere einander gleiche Theile getheilt, so ist die Summe derselben dieser ganzen Zahl gleich. Man nenne nun jeden solchen Theil einen Bruch, die Anzahl derselben den Nenner des Bruchs, und die eingetheilte ganze Zahl den Zähler des Bruchs.

Da alle Summanden einander gleich sind, so ist jeder Summandus, d. h. der Bruch selbst, der Multiplicandus; die Anzahl derselben, d. h. der Nenner, ist der Multiplicator. Nach dieser Erklärung ist also ebenfalls das Product des Bruchs mit seinem Nenner dem Zähler gleich. Folglich stimmen beide Erklärungen mit einander überein.

Z. B. die Zahl 3 soll in 5 gleiche Theile getheilt werden, so ist 3 der Zähler, 5 der Nenner, und der Bruch wird bezeichnet durch $\frac{3}{5}$. Vermöge der zweiten Erklärung ist also

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = 3.$$

Aber $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \,.\, 5.$
Also $\frac{3}{5} \,.\, 5 = 3.$

22.

Ein Bruch ist der Werth des Quotienten der nicht ausgeführten Division des Zählers durch den Nenner.

Vermöge der Erklärung der Division läfst sich der Quotient als Multiplicandus, der Divisor als Multiplicator ansehen, und ihr Product giebt den Dividendus. Diese Erklärung galt ursprünglich für den Fall, wo der Quotient eine ganze Zahl ist. Es liegt aber nichts widersprechendes darin, sie auch auf den Fall auszudehnen, wo der Quotient eine beliebige Zahl ist. Man denke sich also eine beliebige Zahl von der Beschaffenheit, dafs sie als Multiplicandus genommen, und mit einer ersten ganzen Zahl, welche der Multiplicator ist, multiplicirt, zum Product eine zweite ganze Zahl giebt, so ist jene beliebig angenommene Zahl der Werth des Quotienten der Division der zweiten ganzen Zahl durch die erste ganze Zahl. Nun wurde in (21) aus beiden Erklärungen des Bruchs bewiesen, dafs, wenn ein Bruch zum Multiplicandus angenommen, und mit seinem Nenner, welcher der Multiplicator ist, multiplicirt wird, das Product den Zähler des Bruchs giebt. Folglich ist der Bruch als der Werth des Quotienten der Division des Zählers durch den Nenner anzusehen.

Z. B. der Bruch $^3/_5$ giebt mit 5 multiplicirt zum Product 3. Folglich ist der Bruch $^3/_5$ der Werth des Quotienten der Division der ganzen Zahl 3 durch die ganze Zahl 5.

Wenn der Dividendus oder Zähler kleiner als der Divisor oder Nenner ist, so heifst der Bruch ein *ächter*, wenn aber der Zähler gröfser als der Nenner ist, so heifst der Bruch ein *unächter*. Z. B. $^3/_5$ heifst ein ächter, $^{23}/_5$ ein unächter Bruch.

Der unächte Bruch läfst sich also immer in eine ganze Zahl und einen ächten Bruch auflösen. Beide zusammen heifsen eine *gemischte Zahl.* Denn da bei dem unächten Bruch der Zähler gröfser als der Nenner ist, so ergiebt sich durch Division die ganze Zahl als Quotient, der Divisionsrest giebt den Zähler des ächten Bruchs. Z. B. der unächte Bruch sey $^{23}/_5$, so ist $^{23}/_5 = {^{20}/_5} + {^3/_5}$. Aber $^{20}/_5 = 4$, also $^{23}/_5 = 4 + {^3/_5}$.

Umgekehrt läfst sich jede gemischte Zahl auf einen unächten Bruch bringen, welcher mit dem ächten Bruch der gemischten Zahl einerlei Nenner hat. Um nämlich den Zähler des unächten Bruchs zu erhalten, multiplicirt man die ganze Zahl mit dem Nenner, und addirt den Zähler des ächten Bruchs hinzu. Diese Reduction heifst die *Einrichtung* der gemischten Zahl. Z. B. die gemischte Zahl sey $4^3/_5$. Man multiplicirt 4 mit 5 und addirt 3 hinzu, so ergiebt sich der Zähler des unächten Bruchs gleich 23. Denn da $4 = {^{20}/_5}$, so ist $4^3/_5 = {^{20}/_5} + {^3/_5} = {^{23}/_5}$.

23.

Einen Bruch zu resolviren.

Da nach (22) der Zähler eines Bruchs als Dividendus, der Nenner als Divisor angesehen werden hann, so läfst sich der Zähler des Bruchs auch als irgend eine benannte Zahl denken, deren Einheit eine Anzahl kleinerer Einheiten enthält. Den Werth des Bruchs in Einheiten der zweiten Benennung ausdrücken, heifst den Bruch *resolviren.* Multiplicirt man den Zähler mit der Maafszahl, so hat das Product die kleinere Benennung zur Einheit. Also mufs dieses Product mit dem Nenner dividirt werden, um im Quotienten die dem Werth des Bruchs entsprechende Anzahl kleinerer Einheiten finden zu lassen.

Z. B. der Bruch $^3/_5$ soll $^3/_5$ eines Pfundes bedeuten, so bedeutet er auch den 5ten Theil von 3 Pfund (die Maafszahl ist 96), also den 5ten Theil von 288 Solotnik, also $57^3/_5$ Sol.

24.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Zähler mit dieser ganzen Zahl multiplicirt, und den Nenner beibehält.

Das Product eines Bruchs mit einer ganzen Zahl heifst eine Summe gleicher Summanden, deren jeder der Bruch ist, deren Anzahl dem Multiplicator gleich ist. Der Bruch selbst ist aber (21) eine Summe gleicher einfachen Theile, deren Anzahl dem Zähler gleich ist. Man erhält also so viel Reihen einfacher Theile, als der Multiplicator Einer hat, und in jeder Reihe so viel einfache Theile, als der Zähler Einer hat. Die Anzahl der einfachen Theile in allen Reihen ist also gleich dem Product des Zählers mit dem Multiplicator. Durch Multiplication des Zählers mit dem Multiplicator wird also der Bruch so viel Mal gröfser, als der Multiplicator Einer enthält.

Beispiel. $^3/_5 \cdot 4 = {}^3/_5 + {}^3/_5 + {}^3/_5 + {}^3/_5.$

Also $^3/_5 \cdot 4 = {}^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5$
$+ {}^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5$
$+ {}^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5$
$+ {}^1/_5 + {}^1/_5 + {}^1/_5$

also $^3/_5 \cdot 4 = {}^{12}/_5.$

25.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man seinen Nenner mit dem Divisor multiplicirt, und den Zähler beibehält.

Ein Bruch ist (21) ein einfacher Theil einer ganzen Zahl. Die Anzahl dieser einfachen Theile ist der Nenner des Bruchs. Durch Vergröfserung des Nenners wird also die Anzahl der in derselben Zahl, dem Zähler, enthaltenen einfachen Theile vergröfsert, wodurch der Werth jedes einfachen Theils kleiner wird. Denkt man sich einen zweiten Bruch von gleichem Zähler mit dem gegebenen, dessen Nenner aber ein Vielfaches von dem Nenner des gegebenen Bruchs ist, so ist die Anzahl der in dem Zähler enthaltenen einfachen und einander gleichen Theile der zweiten Art dasselbe Vielfache von der Anzahl der in demselben Zähler enthaltenen einfachen und einander gleichen Theile der ersten Art. Also ist auch der erste Bruch dasselbe Vielfache des zweiten Bruchs. Der Multiplicator des Nenners des ersten Bruchs, durch welchen sich der Nenner des zweiten Bruchs ergiebt, zeigt also an, wie viel Mal der zweite Bruch in dem ersten enthalten ist. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl dividiren, heifst aber einen Bruch finden, welcher so viel Mal in dem gegebenen Bruch enthalten ist, als der Multiplicator Einer enthält. Folglich wird ein Bruch mit einer ganzen Zahl dividirt durch Multiplication des Nenners mit dieser ganzen Zahl. Dieser neue Bruch ist so viel Mal kleiner als der erste Bruch, als der Multiplicator Einer enthält.

Beispiel. Es soll $^3/_4$ mit 2 dividirt werden, d. h. es soll ein Bruch gefunden werden, welcher 2mal in $^3/_4$ enthalten ist, oder dessen Product mit 2 den Bruch $^3/_4$ giebt. Dieser Bruch ist gleich $^3/_8$. Denn nach (21) ist $^3/_4 . 4 = 3$ und $^3/_8 . 8 = 3$. Also $^3/_4 . 4 = {}^3/_8 . 8$. Also $^3/_4 = {}^3/_8 . 2$, also $^3/_4 : 2 = {}^3/_8$.

26.

Der Werth eines Bruchs bleibt unverändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben ganzen Zahl multiplicirt.

Wenn der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, bei unverändertem Nenner, so ist der entstehende zweite Bruch (24) so viel Mal gröfser wie der gegebene erste Bruch, als der Multiplicator Einer enthält. Wenn der Nenner des zweiten Bruchs, welcher auch der Nenner des ersten Bruchs ist, mit derselben ganzen Zahl multiplicirt wird, so ist (25) der entstehende dritte Bruch so viel Mal kleiner wie der zweite Bruch, als der Multiplicator Einer enthält. Also ist der dritte Bruch dem ersten Bruche an Werth gleich.

Beispiel. Der gegebene Bruch sey $^3/_5$. Multiplicirt man seinen Zähler mit 2, so ist (24) $^6/_5$ das Doppelte von $^3/_5$. Multiplicirt man den Nenner mit 2, so ist (25) $^6/_{10}$ die Hälfte von $^6/_5$. Also ist $^6/_{10} = {}^3/_5$.

27.

Der Werth eines Bruchs bleibt unverändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben ganzen Zahl dividirt.

Wenn der Zähler und Nenner eines Bruchs einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so können beide mit demselben ohne Rest dividirt werden. Wenn man den Zähler und Nenner des neuen Bruchs mit demselben Theiler multiplicirt, so bleibt sein Werth (26) unverändert. Er erhält aber hiedurch wieder die Form des ersten Bruchs. Folglich ist der zweite Bruch dem ersten an Werth gleich.

Vermöge dieses Satzes wird ein Bruch bei unverändertem Werth auf die einfachste Form gebracht, wenn man seinen Zähler und Nenner mit ihrem gröſsten gemeinschaftlichen Theiler (20) dividirt.

Beispiel. Der gegebene Bruch sey $^{731}/_{2709}$. Der gröſste gemeinschaftliche Theiler des Zählers und Nenners ist 43. Dividirt man also beide mit diesem Theiler, so ist $^{731}/_{2709} = {}^{17}/_{63}$.

28.

Brüche von gleichem Nenner, werden mit Beibehaltung des Nenners, durch Addition oder Subtraction der Zähler addirt oder subtrahirt.

Wenn Brüche von gleichem Nenner in ihre einfachen Theile aufgelöst werden, so sind alle diese einfachen Theile einander gleich. Die Summe jener Brüche ist gleich der Summe aller einfachen Theile. Die Anzahl der einfachen Theile ist gleich der Summe der Zähler jener Brüche. Die Summe aller einfachen Theile hat also die Summe jener Zähler zum Zähler. Also hat auch die Summe jener Brüche die Summe ihrer Zähler zum Zähler, und den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner.

Beispiel. Es sollen die Brüche $^2/_7$, $^3/_7$, $^4/_7$ addirt werden. Es ist aber $^2/_7 = {}^1/_7 + {}^1/_7$, $^3/_7 = {}^1/_7 + {}^1/_7 + {}^1/_7$, $^4/_7 = {}^1/_7 + {}^1/_7 + {}^1/_7 + {}^1/_7$. Die Anzahl aller einfachen Theile ist hier $2 + 3 + 4 = 9$. Also ist die Summe aller einfachen Theile $= {}^9/_7$. Also ist $^2/_7 + {}^3/_7 + {}^4/_7 = {}^9/_7$.

Eben so wird der Satz für die Subtraction bewiesen. Es sey ein Bruch von einem andern, welcher gleichen Nenner hat, abzuziehen. Man löse den Minuendus und Subtrahendus in ihre einfachen Theile auf, so sind wegen des gleichen Nenners alle einfachen Theile einander gleich. Bei der Subtraction heben sich also im Minuendus so viele einfachen Theile auf, als der Subtrahendus deren hat. Die Anzahl der übrigbleibenden einfachen Theile ist also gleich dem Unterschied der Zähler des Minuendus und Subtrahendus. Also ist der Unterschied des Minuendus und Subtrahendus gleich einem Bruch, dessen Zähler der Unterschied der Zähler, dessen Nenner der gemeinschaftliche jener beiden Brüche ist.

Beispiel. Von $^5/_7$ soll $^2/_7$ abgezogen werden.
Aber $^5/_7 = {^1/_7} + {^1/_7} + {^1/_7} + {^1/_7} + {^1/_7}$, $^2/_7 = {^1/_7} + {^1/_7}$.
Also $^5/_7 - {^2/_7} = {^1/_7} + {^1/_7} + {^1/_7} = {^3/_7}$

29.

Zwei Brüche von verschiedenem Nenner auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Eine Zahl, welche durch beide Nenner ohne Rest dividirt werden kann, heifst ein gemeinschaftlicher Nenner. Das Product beider Nenner ist ein gemeinschaftlicher Nenner, aber dann nicht der kleinste, wenn die beiden Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Um den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu erhalten, mufs man das Product der beiden Nenner mit ihrem gröfsten gemeinschaftlichen Theiler (20) dividiren. Jenes Product ist nämlich durch diesen Theiler theilbar, weil jeder Factor durch den Theiler theilbar ist. Der Quotient des Products der Nenner durch ihren Theiler, ist aber auch durch jeden Nenner theilbar. Denn er ist ein Product des einen Nenners mit dem Quotienten der Division des andern Nenners durch den Theiler.

Man bringt also beide Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, wenn man den Zähler und Nenner jedes Bruchs mit dem Quotienten multiplicirt, welchen die Division des andern Nenners durch den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler giebt.

Beispiel. Die Brüche seyen $^5/_8$, $^7/_{12}$. Das Product der Nenner ist 96, ihr gröfster gemeinschaftlicher Theiler 4, also ist der Quotient $96 : 4 = 24$ der kleinste gemeinschaftliche Nenner, und mufs sowohl durch 8 als durch 12 theilbar seyn. Denn $96 = 8 \,.\, 12$. Aber $8 = 4 \,.\, 2$ und $12 = 4 \,.\, 3$, also ist $96 = 4 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 3$. Also ist $96 : 4 = 2 \,.\, 4 \,.\, 3$. Also ist $96 : 4 = 8 \,.\, 3$ und auch $96 : 4 = 12 \,.\, 2$. Also ist der Quotient $96 : 4$ durch 8 und 12 theilbar. Da $24 : 8 = 3$, und $24 : 12 = 2$, so multiplicirt man den Zähler und Nenner von $^5/_8$ mit 3, den Zähler und Nenner von $^7/_{12}$ mit 2. Dadurch erhält man die Brüche $^{15}/_{24}$, $^{14}/_{24}$, welche (26) den Brüchen $^5/_8$, $^7/_{12}$ gegenseitig gleich sind.

Die Summe der Brüche $^5/_8$, $^7/_{12}$ ist also gleich $^{29}/_{24} = 1^5/_{24}$, ihr Unterschied $= ^1/_{24}$.

30.

Mehrere Brüche von verschiedenem Nenner auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Nach (29) bestimmt man zum ersten und zweiten Nenner den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, zu diesem und dem dritten Nenner wieder den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, und so fort bis zum letzten Nenner. Der letzte gemeinschaftliche kleinste Nenner ist auch der gemeinschaftliche kleinste Nenner aller Nenner. Man dividirt denselben mit den einzelnen Nennern, und multiplicirt den Zähler und Nenner der einzelnen Brüche mit diesen Quotienten.

Beispiel. Die Brüche seyen $^{11}/_{75}$, $^{19}/_{100}$, $^{31}/_{80}$, $^{15}/_{96}$. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist:

zu 75 und 100, gleich 300
zu 300 und 80, gleich 1200
zu 1200 und 96, gleich 2400.

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner aller Nenner ist also 2400. Diese Zahl giebt, mit den Nennern 75, 100, 80, 96 dividirt, die Quotienten 32, 24, 30, 25. Nun erhält man:

durch 32 . . . $^{11}/_{75} = ^{352}/_{2400}$
durch 24 . . . $^{19}/_{100} = ^{456}/_{2400}$
durch 30 . . . $^{31}/_{80} = ^{930}/_{2400}$
durch 25 . . . $^{15}/_{96} = ^{375}/_{2400}$.

Die Summe ist also $^{11}/_{75} + ^{19}/_{100} + ^{31}/_{80} + ^{15}/_{96} = ^{2113}/_{2400}$.

31.

Eine ganze Zahl wird mit einem Bruch multiplicirt, wenn man sie mit dem Zähler des Bruchs multiplicirt, und das Product mit dem Nanner des Bruchs dividirt.

Das Product eines Bruchs mit seinem Nenner ist (21) dem Zähler des Bruchs gleich. Der Zähler des Bruchs ist also so viel Mal gröfser wie der Bruch, als der Nenner Einer enthält. Multiplicirt man also irgend einen Multiplicandus mit dem Zähler des Bruchs, so hat man den Multiplicandus mit einer Zahl multiplicirt, welche so viel Mal gröfser wie der Bruch ist, als der Nenner desselben Einer enthält. Um also einen Multiplicandus mit einem Bruche zu multipliciren, mufs man den Multiplicandus mit dem Zähler des Bruchs multipliciren, und dieses Product mit dem Nenner des Bruchs dividiren.

Hieraus folgt, dafs das Product einer ganzen Zahl mit einem Bruche, dem Product des Bruchs mit der ganzen Zahl (24) gleich ist.

Beispiel. Fs soll 2 mit $^3/_5$ multiplicirt werden. Aber 3 ist 5 Mal gröfser als $^3/_5$, also 2 . 3 oder 6, ist 5 Mal gröfser als 2 . $^3/_5$. Folglich ist 2 . $^3/_5$ 5 Mal kleiner als 6. Aber $^6/_5$ ist 5 Mal kleiner als 6. Also ist $2 \,.\, ^3/_5 = {^6/_5} = 1^1/_5$.

32.

Ein Bruch wird mit einem Bruch multiplicirt, wenn man den Zähler des Multiplicandus mit dem Zähler des Multiplicators, und den Nenner des Multiplicandus mit dem Nenner des Multiplicators multiplicirt.

Nach (31) wird ein Multiplicandus mit einem Bruche multiplicirt, wenn man den Multiplicandus mit dem Zähler des Bruchs multiplicirt, und das Product mit dem Nenner des Bruchs dividirt. Ist nun der Multiplicandus ebenfalls ein Bruch, so wird er mit dem Zähler des Multiplicators multiplicirt, durch (24) Multiplication seines Zählers mit dem Zähler des Multiplicators, und Beibehaltung des Nenners. Dieser neue Bruch mufs nun mit dem Nenner des Multiplicators dividirt werden. Dieses geschieht (25) durch Multiplication seines Nenners mit dem Nenner des Multiplicators.

Beipiel. Es sey $^6/_7$ mit $^3/_5$ zu multipliciren, so ist $^6/_7$ mit 3 zu multipliciren, und das Product mit 5 zu dividiren. Aber (24) $^6/_7 \,.\, 3 = {^{18}/_7}$. Also ist $^{18}/_7$ mit 5 zu dividiren. Aber (25) $^{18}/_7 : 5 = {^{18}/_{35}}$. Also ist $^6/_7 \,.\, {^3/_5} = {^{18}/_{35}}$.

33.

Das Product zweier gemischten Zahlen ist gleich der Summe der Producte jedes Theils des Multiplicandus mit jedem Theile des Multiplicators.

Man bringe beide gemischte Zahlen auf unächte Brüche (22), und bilde (32) das Product dieser beiden unächten Brüche. Jeder Zähler besteht aus zwei Theilen. Der eine Theil ist das Product der ganzen Zahl mit dem Nenner des Bruchs, der andre Theil ist der Zähler des Bruchs. Das Product der Zähler besteht also aus vier Theilen. Jeder dieser vier Theile mufs nun mit dem Producte der beiden Nenner dividirt werden. Hiedurch erhält man also vier Glieder, nämlich das Product der beiden ganzen Zahlen; das Product der zweiten ganzen Zahl mit dem ersten Bruch, das Product der ersten ganzen Zahl mit dem zweiten Bruch, und das Product der beiden Brüche.

Beispiel. Es sey $3\frac{6}{7}$ mit $2\frac{3}{5}$, also $\frac{27}{7}$ mit $\frac{13}{5}$ zu multipliciren. Das Product ist $\frac{351}{35} = 10\frac{1}{35}$.

Aber $27 = 3 \,.\, 7 + 6$, $13 = 2 \,.\, 5 + 3$, also $27 \,.\, 13 = 3 \,.\, 7 \,.\, 2 \,.\, 5 + 2 \,.\, 6 \,.\, 5 + 3 \,.\, 3 \,.\, 7 + 6 \,.\, 3$.

Also $3\frac{6}{7} \,.\, 2\frac{3}{5} = 3 \,.\, 2 + 2 \,.\, \frac{6}{7} + 3 \,.\, \frac{3}{5} + \frac{6}{7} \,.\, \frac{3}{5}$.

Also $3\frac{6}{7} \,.\, 2\frac{3}{5} = 6 + 1\frac{5}{7} + 1\frac{4}{5} + \frac{18}{35}$.

Also $3\frac{6}{7} \,.\, 2\frac{3}{5} = 8 + \frac{25}{35} + \frac{28}{35} + \frac{18}{35} = 10\frac{1}{35}$.

34.

Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche dividirt, wenn man sie mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, und das Product mit dem Zähler des Bruchs dividirt.

Das Product eines Bruchs mit seinem Nenner ist (21) dem Zähler gleich. Der Zähler des Bruchs ist also so viel Mal gröſser wie der Bruch, als der Nenner Einer enthält. Dividirt man also irgend einen Dividendus mit dem Zähler des Bruchs, so hat man den Dividendus mit einer Zahl dividirt, welche so viel Mal gröſser wie der Bruch ist, als der Nenner desselben Einer enthält. Um also einen Dividendus mit einem Bruche zu dividiren, muſs man den Dividendus mit dem Zähler des Bruchs dividiren und diesen Quotienten mit dem Nenner des Bruchs multipliciren. Offenbar erlangt man dasselbe Resultat, wenn man den Dividendus zuerst mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, und dieses Product sodann mit dem Zähler des Bruchs dividirt.

Hieraus folgt, daſs der Quotient der Division einer ganzen Zahl mit einem Bruche, dem Product dieser ganzen Zahl mit dem umgekehrten Bruche, oder (24) dem Producte des umgekehrten Bruchs mit der ganzen Zahl gleich ist.

Man kann aber auch den Dividendus, welcher eine ganze Zahl ist, auf eine Bruchform bringen, indem man ihr denselben Nenner giebt, welchen der Divisor hat. Alsdann sind die einfachen Theile des Dividendus denen des Divisors gleich, und der Divisor ist also so viel Mal in dem Dividendus enthalten, als die Anzahl seiner einfachen Theile in der Anzahl der einfachen Theile des Dividendus. Man darf also nur den Zähler des Dividendus in seiner Bruchform, mit dem Zähler des Divisors dividiren, wobei die gleichen Nenner unberücksichtigt bleiben.

Beispiel. Es sey 7 mit $\frac{3}{5}$ zu dividiren. Dividirt man 7 mit 3, was $2\frac{1}{3}$ giebt, so hat man mit einer Zahl dividirt, welche 5mal gröſser als der Bruch ist. Man muſs also den Quotienten noch mit 5 multipliciren, was $11^2/_3$ giebt. Dieselbe Zahl erhält man durch Multiplication von 7 mit $^5/_3$, was $^{35}/_3$ oder $11^2/_3$ giebt. Oder man setzt $7 = {}^{35}/_5$, so ist $7 : {}^3/_5 = {}^{35}/_5 : {}^3/_5 = 35 : 3 = 11^2/_3$.

35.

Ein Bruch wird mit einem Bruche dividirt, wenn man den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors multiplicirt, und das erste Product mit dem zweiten dividirt; oder wenn man den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt.

Nach (34) wird ein Dividendus mit einem Bruche dividirt, wenn man den Dividendus mit dem Zähler des Bruchs dividirt, und den Quotienten mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt. Also muſs (25) der Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors, und (24) der Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors multiplicirt werden.

Man kann aber auch (29) den Dividendus und Divisor auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen. Alsdann sind die einfachen Theile (21) des Dividendus denen des Divisors gleich, und der Divisor ist also so viel Mal im Dividendus enthalten, als die Anzahl seiner einfachen Theile in der Anzahl der einfachen Theile des Dividendus. Man darf also nur den neuen reducirten Zähler des Dividendus mit dem neuen reducirten Zähler des Divisors dividiren, wobei die gleichen Nenner unberücksichtigt bleiben.

Beispiel. Es sey $^3/_5$ mit $^2/_7$ zu dividiren. Dividirt man $^3/_5$ mit 2, was $^3/_{10}$ giebt, so hat man mit einer Zahl dividirt, welche 7mal gröſser als $^2/_7$ ist. Man muſs also den Quotienten $^3/_{10}$ mit 7 multipliciren, was $^{21}/_{10} = 2^1/_{10}$ giebt.

Oder man multiplictrt $^3/_5$ mit $^7/_2$, was $^{21}/_{10}$ giebt.

Oder man bringt beide auf einen gemeinschaftlichen Nenner, so ist $^3/_5 = {}^{21}/_{35}$, und $^2/_7 = {}^{10}/_{35}$, also ist $^3/_5 : {}^2/_7 = {}^{21}/_{35} : {}^{10}/_{35} = 21 : 10 = 2^1/_{10}$.

36.

Um die Division mit einer gemischten Zahl auszuführen, muſs sie auf einen unächten Bruch gebracht werden.

Denn obgleich bei der Multiplication mit einem aus verschiedenen Theilen zusammengesetzten Multiplicator, der Multiplicandus mit jedem Theile des Multiplicators multiplicirt wird (6, 33), so gilt doch nicht dasselbe für die Division mit einem zusammengesetzten Divisor (15). Denn der Dividendus muſs immer dem Producte des Divisors mit dem Quotienten gleich seyn. Wollte man nun die Division mit einem zweitheiligen Divisor in der Art bewerkstelligen, daſs man den Dividendus mit jedem Theile des Divisors einzeln dividirte, so würde das Product dieses zweitheiligen Quotienten mit dem zweitheiligen Divisor, zum Producte den doppelten Dividendus und noch zwei Glieder geben. Man kann also die Division mit einer gemischten Zahl nicht anders bewerkstelligen, als wenn man sie auf einen unächten Bruch bringt, und dann nach (34) oder (35) verfährt.

Beispiel. Es sey 4 mit $2^3/_5$ zu dividiren, so ergiebt sich der Quotient $4 : {}^{13}/_5 = {}^{20}/_{13} = 1^7/_{13}$.

Es sey $3^1/_2$ mit $2^3/_5$ zu dividiren, so ergiebt sich der Quotient ${}^7/_2 : {}^{13}/_5 = 35 : 26 = 1^9/_{26}$.

Das ABC
der
Arithmetik
für
Examinanden.

Eine Zugabe zum practischen Rechenbuch

vom

Professor Dr. *G. Paucker*.

XX.

Zwanzigster Cursus.

Die Decimalzahl, Quadrat- und Cubikwurzel.

Mitau $\frac{\text{20. August}}{\text{1. September}}$ 1842.

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.
Riga, am 28. August 1842.

Dr. *C. E. Napiersky*,
Censor.

37.

Die Decimalzahl ist ein ächter oder unächter Bruch, dessen Nenner eine Ordnung von zehn ist.

Theilt man den Einer in zehn einander gleiche einfache Theile, so heifst jeder Theil ein *Zehntel.* Ein Bruch, dessen Zähler eine Ziferzahl, und dessen Nenner 10 ist, heifst die erste Decimalstelle und ist (21) zehn Mal kleiner als diese Ziferzahl. Da nun in der Numeration der ganzen Zahlen jede Stelle einen 10mal kleinern Werth erhält, wenn (10) ihr Zeiger um 1 vermindert wird, so setzt man die Zifer der ersten Decimalstelle rechts neben die niedrigste oder Endzifer der ganzen Zahl, und trennt sie von derselben durch ein Komma, das Decimalzeichen. Da der Nenner der ersten Decimalstelle die erste Ordnung von 10 ist, so ist der Zeiger der ersten Decimalstelle 1.

Theilt man das Zehntel in zehn einander gleiche einfache Theile, so heifst jeder Theil ein *Hundertel.* Ein Bruch, dessen Zähler eine Ziferzahl und dessen Nenner 100 ist, heifst die zweite Decimalstelle und ist (25) 10mal kleiner als ein Bruch von gleichem Zähler, dessen Nenner 10 ist. Also wird aus dem schon angeführten Grunde (10) die Zifer der zweiten Decimalstelle rechts neben die Zifer der ersten Decimalstelle gesetzt. Da der Nenner der zweiten Decimalstelle die zweite Ordnung von 10 ist, so ist der Zeiger der Hundertel 2 u. s. w.

Beispiel. Die Zahl $3 + {}^{7}/_{10} + {}^{4}/_{100} + {}^{8}/_{1000}$ wird bezeichnet durch 3, 748. Die einzelnen Decimalstellen sind hier, die erste $= {}^{7}/_{10}$, die zweite $= {}^{4}/_{100}$, die dritte $= {}^{8}/_{1000}$.

Jede Decimalstelle kann als eine Ziferzahl angesehen werden, deren Einheit ein einfacher Theil ist, welcher zum Nenner eine Ordnung von zehn hat.

Der Name der Ordnung von zehn, welche den Nenner der Decimalstelle bildet, entspricht dem Zeiger dieser Decimalstelle.

Wenn zu den Decimalstellen keine ganze Zahl gehört, so schreibt man an Stelle derselben links vom Decimalzeichen eine Null. Die Decimalstellen bilden alsdann einen ächten Bruch.

Beispiel. $0,748$ ist $= \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{700}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{8}{1000} = \frac{748}{1000}$.

Der unächte Decimalbruch besteht aus einer ganzen Zahl und Decimalstellen. Der Kürze wegen heifst aber jede mit Decimalstellen versehene Zahl, mag nun eine ganze Zahl dabei seyn oder nicht, eine *Decimalzahl. Die Decimalzahl kann als ein Bruch angesehen werden, dessen Zähler die aus allen Stellen mit Weglassung des Decimalzeichens bestehende Zahl, und dessen Nenner die ihrer niedrigsten Decimalstelle entsprechende Ordnung von 10 ist.*

Beispiel. $3,748 = 3 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{3000}{1000} + \frac{700}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{8}{1000} = \frac{3748}{1000}$.

Während die Zeiger der verschiedenen Stellen der ganzen Zahl von der Linken zur Rechten abnehmen, nehmen die Zeiger der Decimalstellen von der Linken zur Rechten zu. Z. B.

$$\text{Zeiger } \frac{6\;5\;4\;3\;2\;1\;0\;1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8\;9}{9\;6\;8\;7\;3\;5,0\;0\;2\;8\;9\;7\;4\;6\;3}.$$

38.

Das Ansetzen mehrerer Nullen rechts an die niedrigste Decimalstelle verändert den Werth einer Decimalzahl nicht, und giebt daher das Mittel, Decimalzahlen auf einen gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Denn durch das Ansetzen mehrerer Nullen rechts wird sowohl der Zähler als der Nenner der Decimalzahl mit einer und derselben Ordnung von 10, multiplicirt, mithin der Werth der Decimalzahl nicht verändert (26).

Beispiel. $3,748 = \frac{3748}{1000}$

$3,74800 = \frac{374800}{100000} = \frac{3748}{1000} \cdot \frac{100}{100} = \frac{3748}{1000}$

also $3,748 = 3,74800$.

39.

Die Summe oder der Unterschied der Decimalzahlen wird durch Addition oder Subtraction der gleichnamigen Decimalstellen bestimmt.

Denn die gleichnamigen, d. h. mit einerlei Zeiger versehenen Decimalstellen sind (37) Brüche, welche einerlei Ordnung von 10 zum Nenner haben, und nur Brüche von einerlei Nenner können (28) durch Addition oder Subtraction der Zähler addirt oder subtrahirt werden.

Beispiel. Es seyen die Decimalzahlen 3, 748; 0, 26; 2, 00319 zu addiren, und die dritte von der ersten zu subtrahiren. Der Bequemlichkeit wegen schreibt man sie so unter einander, dafs die gleichnamigen Stellen unter einander stehen.

$$\text{Zeiger}\quad \begin{array}{l} 0\;\;1\;\;2\;\;3\;\;4\;\;5 \\ \hline 3,748 \\ 0,26 \\ 2,00319 \\ \hline 6,01119 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 0\;\;1\;\;2\;\;3\;\;4\;\;5 \\ \hline 3,748 \\ 2,00319 \\ \hline 1,74481 \end{array}$$

Die fehlenden Decimalstellen rechts können auch mit Nullen ausgefüllt werden (38).

40.

Eine Decimalzahl wird mit einer Ordnung von zehn multiplicirt oder dividirt, durch Versetzung des Decimalzeichens nach der rechten oder linken Seite, um eine dem Zeiger des Multiplicators gleiche Anzahl von Stellen.

Denn (37) die Decimalzahl ist ein Bruch, dessen Zähler die aus allen Stellen mit Weglassung des Decimalzeichens bestehende Zahl, dessen Nenner diejenige Ordnung von 10 ist, welche der niedrigsten Decimalstelle entspricht. Durch Versetzung des Decimalzeichens wird also der Zähler nicht geändert. Der Nenner aber wird durch Versetzung des Decimalzeichens um eine, oder zwei oder drei u. s. w. Stellen rechts, 10 oder 100, oder 1000 u. s. w. Mal kleiner, also die Decimalzahl dadurch 10, 100, 1000 u. s. w. Mal gröfser. Eben so wird durch Versetzung des Decimalzeichens um eine, zwei, drei u. s. w. Stellen links, der Nenner 10, 100, 1000 u. s. w. Mal gröfser, also die Decimalzahl 10, 100, 1000 u. s. w. Mal kleiner.

Beispiel.

$$\begin{array}{rcl}
3,748 \,.\, 10 & = & 37,48 \\
3,748 \,.\, 100 & = & 374,8 \\
3,748 \,.\, 1000 & = & 3748, \\
3,748 \,.\, 10000 & = & 37480, \\
 & \text{u. s. w.} & \\
3,748 : 10 & = & 0,3748 \\
3,748 : 100 & = & 0,03748 \\
3,748 : 1000 & = & 0,003748 \\
3,748 : 10000 & = & 0,0003748
\end{array}$$

41.

Bei der Multiplication einer Stelle der ganzen Zahl mit einer Decimalstelle ist der Zeiger der niedrigsten Stelle des Products ihrer Ziferzahlen gleich dem Unterschied der Zeiger der Factoren.

$$\begin{array}{rl} \text{Zeiger} & \overline{3\ 2\ 1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5} \\ \text{Multiplicandus} & 9\,7\,6\,5,8\,2\,3\,7\,6 \\ \text{Multiplicator}\ . & \ \ 8\,7\,9,6\,4\,5\,3 \\ \hline & 5\,4\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ & .\,.\,.\,.\,.\,4\,8\,.\,. \end{array}$$

Die 9 des Multiplicandus hat zum Zeiger 3; die Decimalstelle 6 des Multiplicators hat zum Zeiger 1. Ihr Product ist also

$$9 \,.\, 1000 \,.\, 6 \,.\, \tfrac{1}{10} = 54 \,.\, 100$$

Der Unterschied der Zeiger ist $3 - 1 = 2$, das Product der Ziferzahlen ist 54, die niedrigste Stelle 4 wird also so gesetzt, dafs sie dem Zeiger 2 entspricht.

Die 8 des Multiplicators hat zum Zeiger 2; die Decimalstelle 6 des Multiplicandus hat zum Zeiger 5. Ihr Product ist also

$$8 \,.\, 100 \,.\, 6 \,.\, \tfrac{1}{100000} = 48 \,.\, \tfrac{1}{1000}$$

Der Unterschied der Zeiger ist $5 - 2 = 3$, das Product der Ziferzahlen ist 48, die niedrigste Stelle 8 wird also so gesetzt, dafs sie dem Zeiger 3 entspricht.

42.

Bei der Multiplication einer Decimalstelle mit einer Decimalstelle ist der Zeiger der niedrigsten Stelle des Products der Ziferzahlen gleich der Summe der Zeiger der Factoren.

$$\begin{array}{rl} \text{Zeiger} & \overline{3\ 2\ 1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8} \\ \text{Multiplicandus} & 9\,7\,6\,5,8\,2\,3\,7\,6 \\ \text{Mulsiplicator}\ . & \ \ 8\,7\,9,6\,4\,5\,3 \\ \hline & .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,2\,4\,.\,.\,. \end{array}$$

Die Decimalstelle 6 des Multiplicandus hat zum Zeiger 5, die Decimalstelle 4 des Multiplicators hat zum Zeiger 2, ihr Product ist also

$$6 \,.\, \tfrac{1}{100000} \,.\, 4 \,.\, \tfrac{1}{100} = 24 \,.\, \tfrac{1}{10000000}.$$

Die Summe der Zeiger ist $5 + 2 = 7$, das Product der Ziferzahlen ist 24, die niedrigste Stelle 4 wird daher so gesetzt, dafs sie dem Zeiger 7 entspricht.

43.

Bei der vollständigen Multiplication der Decimalzahlen ist der Zeiger der niedrigsten Decimalstelle des Products gleich der Summe der Zeiger der niedrigsten Stelle der Factoren.

Denn da jede Decimalzahl (37) zum Nenner diejenige Ordnung von zehn hat, welche ihrer niedrigsten Decimalstelle entspricht, so hat das Product der Decimalzahlen eine Ordnung von 10 zum Nenner, welche das Product jener beiden Ordnungen ist. Dieses Product der Nenner ist auch der Nenner der niedrigsten Decimalstelle in dem Product der Decimalzahlen. Das Product zweier Ordnungen von 10 hat aber (12) zum Zeiger die Summe der Zeiger der Factoren.

Hieraus folgt, dafs das vollständige Product zweier Decimalzahlen so viel Decimalstelleu hat, als beide Factoren zusammen haben. Die Multiplication fängt man wie bei mehrstelligen ganzen Zahlen, bei der niedrigsten Stelle des Multiplicandus und mit der höchsten des Multiplicators an. Die niedrigste Stelle jeder Productreihe setzt man nach der Regel von (41) und (42). Hiedurch erhält das Decimalzeichen in der ersten Reihe seine richtige Stellung und behält dieselbe in den folgenden Reihen bei.

Zeiger	4 3 2 1 0 1 2 3 4 5
Multiplicandus	97,3968
Multiplicator .	857,3
	77917,44
	4869,840
	681,7776
	29,21904
Product	83498,27664.

44.

Die abgekürzte Multiplication der Decimalzahlen zu machen.

Bei der abgekürzten Multiplication bestimmt man eine gewisse Grenze für die Decimalstellen des Products, und läfst die niedrigern Decimalstellen weg. Man fängt die Multiplication mit der höchsten Stelle des Multiplicators an, und giebt in der ersten Reihe dem Decimalzeichen seine richtige Stellung nach den Regeln (41) und (42). Damit das Decimalzeichen in jeder folgenden Reihe dieselbe Stellung behalte, fängt man jede Reihe, welche einer niedrigern Stelle des Multiplicators entspricht, bei der um eben so viel höhern Stelle des Multiplicandus an. Denn alsdann bleibt die Summe oder der Unterschied der Zeiger unverändert.

Beispiel. Zeiger	4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6
Multiplicandus	7 8 6 5 3,5
Multiplicator .	0,0 5 7 6 9 2
	3 9 3 2,6 7 5
	5 5 0,5 7 4
	4 7,1 9 2
	7,0 7 9
	0,1 5 7
Product	4 5 3 7,6 7

Hier entspricht die dritte Decimalstelle jeder Reihe, nach (42) den Zeigern im Multiplicandus und Multiplicator 1 und 2, 0 und 3, und nach (41) den Zeigern 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6.

45.

Ein gewöhnlicher Bruch wird in eine Decimalzahl verwandelt, wenn man den Zähler mit einer Ordnung von zehn multiplicirt, und das Product mit dem Nenner dividirt.

Multiplicirt man nämlich den Zähler und Nenner des Bruchs mit 10, 100, 1000 überhaupt mit irgend einer Ordnung von zehn, so bleibt (26) der Werth des Bruchs unverändert. Dividirt man den Zähler und Nenner des neuen Bruchs mit dem vorigen Nenner, so bleibt (27) der Werth des Bruchs wiederum unverändert, der neue Bruch hat aber nun eine Ordnung von zehn zum Nenner, ist also eine Decimalzahl.

Beispiel. Es sey $^8/_{13}$ in eine Decimalzahl zu verwandeln, so ist

$$\tfrac{8}{13} = \tfrac{80}{130} = \tfrac{6}{10} = 0,6$$
$$\tfrac{8}{13} = \tfrac{800}{1300} = \tfrac{61}{100} = 0,61$$
$$\tfrac{8}{13} = \tfrac{8000}{13000} = \tfrac{615}{1000} = 0,615$$

```
13 | 80 | 0,61538
   | 78 |
    ‾‾20
      13
      ‾‾70
        65
        ‾‾50
          39
          ‾‾110
            104
```

Gewöhnlich setzt man an den Zähler eine Null, an den Rest wieder eine Null, u. s. w. wie nebenstehend.

46.

Um eine Decimalzahl mit einer andern zu dividiren, bringt man beide auf einen gemeinschaftlichen Nenner, und

dividirt den Zähler des Dividendus mit dem Zähler des Divisors.

Denn wenn beide Decimalzahlen nach (38) auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht sind, so sind (21) die einfachen Theile des Dividendus denen des Divisors gleich. Der Divisor ist also so viel Mal im Dividendus enthalten, als sein reducirter Zähler im reducirten Zähler des Dividendus. Die Division bei Decimalzahlen stimmt hierin mit der Division bei gewöhnlichen Brüchen (35) überein. Ist der reducirte Zähler des Dividendus kleiner als der reducirte Zähler des Divisors, so ist der Quotient ein ächter Bruch, welcher entweder in dieser Form gelassen oder nach (45) in eine Decimalzahl verwandelt werden kann.

Beispiel. Dividendus 0,000043
Divisor 78,239
oder (38) Divisor . 78,239000

also der Quotient $= \frac{43}{78239000}$

Wenn, wie hier, der Divisor weniger Decimalstellen als der Dividendus hat, so verfährt man zur bequemern Reduction des Quotienten in eine Decimalzahl, gewöhnlich so, dafs man nach (26) den Dividendus und Divisor mit derjenigen Ordnung von 10 multiplicirt, welche der niedrigsten Decimalstelle des Divisors entspricht. Dadurch fallen die Decimalstellen im Divisor weg, und das Decimalzeichen des Dividendus wird um so viel Stellen weiter rechts gerückt (40), als der Divisor Decimalstellen hatte.

Beispiel. Dividendus 0,000043
Divisor . . 78,239

Da der Divisor 3 Decimalstellen hat, so werden Dividendus und Divisor mit der dritten Ordnung von 10 multiplicirt. Hiedurch wird der Quotient der Division nicht verändert (26).

Nämlich Dividendus 0,043
Divisor . . 78239,

Um nun die Division auszuführen, setzt man an den Dividendus rechts so viel Nullen, dafs die Anzahl der Stellen der des Divisors gleich oder um eine gröfser ist (15). Hiedurch erhält man den Zeiger der höchsten Stelle des in eine Decimalzahl verwandelten Quotienten.

Nämlich $\overline{^{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}}$
Dividendus . . . 0,0430000
Divisor . 78239,

```
                                1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
78239 | 430000 | 0,0000005496
      | 391195 |
        388050
        312956
         750940
         704151
          467890
          469434 etwas zu grofs.
```

47.

Eine periodische Decimalzahl in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Eine periodische Decimalzahl ist eine solche, in welcher von einer bestimmten Stelle aus die Decimalzahlen in gleicher Folge wiederkehren. Die aus den wiederkehrenden Stellen gebildete Zahl heifst die Periode. Z. B. in der Decimalzahl 0, 34087087087 ... tritt mit der dritten Stelle die Periode 087 ein.

Man multiplicirt die periodische Decimalzahl mit derjenigen Ordnung von 10, deren Zeiger der Anzahl der Stellen der Periode gleich ist, und zieht hievon die periodische Decimalzahl ab, so hebt sich im Minuendus und Subtrahendus die Periode auf.

Beispiel.

$$\begin{aligned} x &= 0,34087087087 \\ 1000\,x &= 340,87087087087 \\ 999\,x &= 340,53 \\ 99900\,x &= 34053 \\ x &= \frac{34053}{99900} \end{aligned}$$

48.

Eine Decimalzahl in Näherungsbrüche zu verwandeln.

Man stellt die Decimalzahl als einen gewöhnlichen ächten oder unächten Bruch dar, dessen Nenner eine Ordnung von zehn ist. Sucht man zum Zähler und Nenner desselben nach dem in (20) angezeigten Verfahren den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler, so erhält man eine Reihe von Quotienten. Man denke sich nun einen andern Bruch, dessen Zähler und Nenner die Zahl 1 zum gröfsten gemeinschaftlichen Theiler haben, und bei der Bestimmung dieses Theilers dieselbe Folge von Quotienten liefern, wie der Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs, so heifst ein solcher Bruch ein *Näherungsbruch.*

Um die Näherungsbrüche zu finden, erwäge man die Verbindung, in welcher die bei Aufsuchung des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers vorkommenden Zahlen mit einander stehen. Es sey der gröfste gemeinschaftliche Theiler von 9752 und 31117 zu finden.

I.	9752	31117	3	*II.*	1861	9752	5
		29256				9305	
		1861				447	
III.	447	1861	4	*IV.*	73	447	6
		1788				438	
		73				9	
V.	9	73	8	*VI.*	1	9	9
		72				9	
		1				0	

In dieser Rechnung kommt jede Zahl höchstens drei Mal vor, nämlich als Rest, Divisor und Dividendus.

Die Zahl 1 in *VI.* als Divisor, in *V.* als Rest.

Die Zahl 9 in *VI.* als Dividendus, in *V.* als Divisor, in *IV.* als Rest.

Die Zahl 73 in *V.* als Dividendus, in *IV.* als Divisor, in *III.* als Rest.

Die Zahl 447 in *IV.* als Dividendus, in *III.* als Divisor, in *II.* als Rest.

Die Zahl 1861 in *III.* als Dividendus, in *II.* als Divisor, in *I.* als Rest.

Die Zahl 9752 in *II.* als Dividendus, in *I.* als Divisor.

Die Zahl 31117 in *I.* als Dividendus.

Nach dem Satz (15), dafs der Dividendus gleich dem Product des Divisors mit dem Quotienten, nebst dem Divisionsrest ist, erhält man also folgende Reihe von Gleichungen, wenn man von der letzten Division zur ersten zurückgeht.

	Div.		*Quot.*		*Rest.*		*Dividendus.*
VI.	1	.	9	+	0	=	9
V.	9	.	8	+	1	=	73
IV.	73	.	6	+	9	=	447
III.	447	.	4	+	73	=	1861
II.	1861	.	5	+	447	=	9752
I.	9752	.	3	+	1861	=	31117

Da der Bruch, dessen Näherungsbrüche gefunden werden sollen, gegeben ist, so erhält man aus der Entwickelung desselben die Quotienten, welche man in umgekehrter Ordnung nimmt. Vermöge der obigen Erklärung der Näherungsbrüche mufs in umgekehrter Ordnung der erste Rest 0, der zweite Rest 1, also auch der erste Divisor 1 seyn. Hieraus erhält man durch die obigen Gleichungen alle Dividenden. Die beiden letzten Dividenden sind die Zähler und Nenner des gesuchten Näherungsbruchs.

Beispiel. Die gegebene Decimalzahl sey $0,31831 = \frac{31831}{100000}$

$$\begin{array}{r|r|l}
31831 & 100000 & 3 \\
 & 95493 & \\ \hline
 & 4507 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|l}
4507 & 31831 & 7 \\
 & 31549 & \\ \hline
 & 282 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|l}
282 & 4507 & 15 \\
 & 282 & \\ \hline
 & 1687 & \\
 & 1410 & \\ \hline
 & 277 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l}
277 & 282 & 1 \\
 & 277 & \\ \hline
 & 5 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|l}
5 & 277 & 55 \\
 & 275 & \\ \hline
 & 2 &
\end{array}$$

Die Quotienten sind also 3, 7, 15, 1, 55.

Um den ersten Näherungsbruch zu finden, bildet man die Gleichung $1 . 3 + 0 = 3$. Der erste Näherungsbruch ist also $= \frac{1}{3}$.

Um den zweiten Näherungsbruch zu finden, bildet man die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl}
1 . 7 + 0 &=& 7 \\
7 . 3 + 1 &=& 22
\end{array} \qquad \text{Der zweite} = \tfrac{7}{22}$$

Um den dritten Näherungsbruch zu finden, bildet man die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl}
1 . 15 + 0 &=& 15 \\
15 . 7 + 1 &=& 106 \\
106 . 3 + 15 &=& 333
\end{array} \qquad \text{Der dritte} = \tfrac{106}{333}$$

Um den vierten Näherungsbruch zu finden, bildet man die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl}
1 . 1 + 0 &=& 1 \\
1 . 15 + 1 &=& 16 \\
16 . 7 + 1 &=& 113 \\
113 . 3 + 16 &=& 355
\end{array} \qquad \text{Der vierte} = \tfrac{113}{355}$$

Um den fünften Näherungsbruch zu finden, bildet man die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl}
1 . 55 + 0 &=& 55 \\
55 . 1 + 1 &=& 56 \\
56 . 15 + 55 &=& 895 \\
895 . 7 + 56 &=& 6321 \\
6321 . 3 + 895 &=& 19858
\end{array} \qquad \text{Der fünfte} = \tfrac{6321}{19858}$$

Die Näherungsbrüche sind also $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{106}{333}$, $\frac{113}{355}$, $\frac{6321}{19858}$.

Diese Brüche kommen dem gegebenen Bruche immer näher, und sind abwechselnd zu grofs und zu klein. Denn es ist

der gegebene Bruch		$= 0,31831$	
der erste N.-Br. .	$\frac{1}{3}$	$= 0,33333$	zu grofs
der zweite N.-Br.	$\frac{7}{22}$	$= 0,31818$	zu klein
der dritte N.-Br.	$\frac{106}{333}$	$= 0,318318$	zu grofs
der vierte N.-Br.	$\frac{113}{355}$	$= 0,318309$	zu klein
der fünfte N.-Br.	$\frac{6321}{19858}$	$= 0,31831$	

49.

Das Quadrat einer zweitheiligen Zahl besteht aus der Summe der Quadrate der Theile nebst dem doppelten Producte der Theile.

Das Product einer Zahl mit sich selbst oder das Product zweier gleichen Zahlen, heifst das *Quadrat* dieser Zahl. Diese letztere heifst die Grundzahl, und die Anzahl der beiden Factoren, nämlich 2, heifst der Exponent oder Name des Quadrats.

Z. B. $3^2 = 9$, $37^2 = 1369$ u. s. w.

Das Qradrat einer mehrstelligen Zahl kann nach dem Satze (6) gebildet werden, dafs jeder Theil des Multiplicandus mit jedem Theile des Multiplicators multiplicirt werden mufs. Die Theile seyen demnach a, b, also die Zahl gleich $a + b$, so ist

$$\begin{array}{rrrr} & a & + b & \\ & a & + b & \\ \hline & aa & + ab & \\ & & + ab & + bb \\ \hline \end{array}$$

das Quadrat von $a + b$ gleich $aa + 2ab + bb$

Um diesen Satz auf das Quadrat einer mehrstelligen Zahl anzuwenden, sieht man die Stellen der Zahl als ihre Theile an, unf fängt die Multiplication bei der höchsten, als der ersten Stelle an. Zuerst setzt man die erste Stelle für a, die zweite für b, und berechnet hiernach das Quadrat der aus den beiden ersten Stellen bestehenden Zahl. Dann setzt man die aus den beiden ersten Stellen bestehende Zahl für a, und die dritte Stelle für b, und fügt demgemäfs die Glieder $2ab + bb$ hinzu. Dann setzt man die aus den drei ersten Stellen bestehende Zahl für a, und die vierte Stelle für b, und fügt demgemäfs die beiden Glieder $2ab + bb$ hinzu, und fährt so fort.

Beispiel. Es sey das Quadrat von 745,93 zu bilden.

```
Zeiger . .  43210 12
             745,93
             745,93
7.7 ....... 49
2.7.4 ....   56
  4.4 .....  16
2.74.5 .....  740
  5.5 ......   25
2.745.9 ....  1341,0
  9.9 .........   81
2.7459.3 ....   44,754
  3.3 ...........    9
          556411,5649
```

Das Quadrat der ersten Stelle der Grundzahl, hat in seiner niedrigsten Stelle den doppelten Zeiger. In dem obigen Beispiel ist der Zeiger von 7 gleich 2, in dem Quadrat von 7 hat also die niedrigste Stelle 9 den Zeiger 4. Das Quadrat der ersten Stelle der Grundzahl, hier 49, heifst die erste Classe. Die erste Classe kann eine oder zwei Stellen haben. Da die erste Stelle 7 den Zeiger 2, die zweite Stelle 4 den Zeiger 1 hat; so hat das doppelte Product 56 in seiner niedrigsten Stelle den Zeiger 3. Die zweite Stelle der Grundzahl, nämlich 4, hat den Zeiger 1, das Quadrat von 4 hat also in seiner niedrigsten Stelle den Zeiger 2. Die aus diesen beiden Gliedern gebildete zweite Classe hat also zwei Stellen.

Ueberhaupt sieht man leicht, dafs jede hinzukommende niedrigere Stelle der Grundzahl, in der Entwickelung des Quadrats zwei Glieder liefert, dafs die niedrigste Stelle jedes Gliedes einen Zeiger hat, welcher um 1 kleiner, als der Zeiger der niedrigsten Stelle des vorhergehenden Gliedes ist, und dafs also jede Classe des Quadrats aus zwei Stellen besteht.

Hat die Grundzahl Decimalstellen, so hat die Entwickelung des vollständigen Quadrats doppelt so viel Decimalstellen. Die Anzahl der Decimalstellen im Quadrat ist also immer eine grade Zahl, nämlich 2 oder 4 oder 6 u. s. w. Decimalstellen.

50.

Die Quadratwurzel aus einer Zahl auszuziehen.

Eine Zahl, deren Quadrat einer gegebenen Zahl gleich ist, heifst die *Quadratwurzel* der gegebenen Zahl.

Z. B. $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{1369} = 37$ u. s. w.

Um die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen, mufs man zuerst die höchste Stelle dieser Wurzel, sodann die nächstniedrigere oder zweite Stelle u. s. w. bestimmen. Da (49) jede niedrigere Stelle der Quadratwurzel in der Entwickelung ihres Quadrats eine Classe von zwei Stellen liefert, so mufs man zuvörderst die gegebene Zahl, ohne Rücksicht auf die zu ihr gehörigen Decimalstellen, in Classen von zwei Stellen von der Rechten zur Linken theilen. Die höchste oder erste Classe kann auch eine Stelle haben. Wenn die zu der gegebenen Zahl gehörigen Decimalstellen in ungrader Zahl vorhanden sind, so fügt man ihnen rechts an die niedrigste Stelle eine Null hinzu.

Hat die gegebene ganze Zahl einen gewöhnlichen Bruch bei sich, so verwandelt man denselben nach (45) in Decimalstellen und fügt diese der gegebenen Zahl hinzu.

Ist die gegebene Zahl ein ächter oder unächter gewöhnlicher Bruch, so verwandelt man denselben in eine Decimalzahl.

Man bildet nun eine Tafel der Quadrate der ersten neun Ziferzahlen.

Ziferzahl	Quadrat	Ziferzahl	Quadrat	Ziferzahl	Quadrat
1	1	4	16	7	49
2	4	5	25	8	64
3	9	6	36	9	81

Diejenige Ziferzahl, deren Quadrat nächstkleiner als die erste Classe der gegebenen Zahl ist, ist die Ziferzahl der höchsten Stelle der Quadratwurzel. Diese Ziferzahl sey gleich a. Mit Anwendung der Formel $a\,a + 2\,a\,b + b\,b$, zieht man das Quadrat $a\,a$ von der ersten Classe ab. An den Rest setzt man die erste Stelle der zweiten Classe. Den so vergröfserten Rest dividirt man mit $2\,a$. Der Quotient, welcher nicht gröfser als 9 genommen werden darf, giebt die Ziferzahl b der zweiten Stelle der Wurzel. Man zieht das Product $2\,a\,b$ ab, setzt an den Rest die zweite Stelle der Classe, und zieht von dem so vergröfserten Rest das Quadrat $b\,b$ ab. Man setzt nun die aus den beiden ersten Stellen der Quadratwurzel bestehende Zahl gleich a, und fährt auf die angezeigte Art in Bestimmung der folgenden Stellen fort, nach Anleitung der Entwickelung in (49).

Beispiel. Die gegebene Zahl sey 556411,5649.

	556411,5649 (745,93
7 . 7	49
	66
2 . 7 . 4 . . .	56
	104
4 . 4	16
	881
2 . 74 . 5 . . .	740
	1411
5 . 5	25
	13865
2 . 745 . 9 . . .	13410
	4556
9 . 9	81
	44754
2 . 7459 . 3 . . .	44754
	9
3 . 3	9
	0

Bei gröſserer Uebung kann man beide Glieder vereinigen, da die Summe $2ab + bb$ gleich dem Product von $2a + b$ mit b ist.

2 . 7 = 14		556411,5649 (745,93
4		49
144		664
4	. . . . .	576
1485		8811
5	. . . . .	7425
14909		138656
9	. . . .	134181
149183		447549
3	. . . .	447549

Es sey die Quadrat-Wurzel aus $5\frac{3}{7}$ auszuziehen:

2 . 2 = 4	5 (	2,329929
3	4	
43	142	
3 . . .	129	
462	1385	
2 . . .	924	
4649	46171	
9	41841	
46589	433042	
9	419301	
465982	1374185	
2	931964	
4659849	44222171	
9 . . .	41938641	
4659858	22835304	

Mit dem letzten Divisor dividirt man in den letzten Rest, wodurch sich die folgenden 7 Decimalstellen ergeben.

18639432	. . 4
4193873	. . 9
1864	. . 004
93	. . 2
42	. . 9
22835304	

$$\sqrt{5\tfrac{3}{7}} = 2{,}3299294900429.$$

2,3299294900429

4,6598589800858
6989788470129
465985898008
209693654104
20969365410
465985898
209693654
9319718
2096936
932
46
21

Probe . . 5,4285714285714 = $5\frac{3}{7}$.

51.

Der Cubus einer zweitheiligen Zahl besteht aus dem Cubus des ersten Theils, dem Product des dreifachen Quadrats des ersten Theils mit dem zweiten, dem Product des dreifachen Quadrats des zweiten Theils mit dem ersten, nebst dem Cubus des zweiten Theils.

Das Product einer Zahl mit ihrem Quadrat, oder das Product dreier gleichen Zahlen, heiſst der *Cubus* dieser Zahl, die Zahl selbst aber heiſst die Grundzahl, und die Anzahl der gleichen Factoren, nämlich 3, heiſst der Exponent oder Name des Cubus.

Z. B. $3^3 = 27$, $37^3 = 50653$ u. s. w.

Um den Cubus einer mehrstelligen Zahl zu erhalten, setzt man diese Zahl gleich $a + b$, bildet hievon das Quadrat (49) und multiplicirt dasselbe wieder mit $a + b$.

$$\begin{array}{rrrr} aa & + 2ab & + bb & \\ a & + b & & \\ \hline aaa & + 2aab & + abb & \\ & + aab & + 2abb & + bbb \\ \hline \end{array}$$

der Cubus von $a + b$ ist gleich $aaa + 3aab + 3abb + bbb$

Man setzt zuerst die erste Stelle der Zahl gleich a, die zweite gleich b, und berechnet nach dieser Formel den Cubus der aus den beiden ersten Stellen bestehenden Zahl. Hierauf setzt man die aus den beiden ersten Stellen bestehende Zahl gleich a, die dritte Stelle gleich b, und fügt die drei Glieder $3aab + 3abb + bbb$ hinzu. Alsdann setzt man die aus den drei ersten Stellen bestehende Zahl gleich a, die vierte Stelle gleich b, und fügt die entsprechenden drei Glieder hinzu. Jede neu hinzukommende Stelle der Grundzahl liefert also eine neue Classe von drei Stellen, die erste Classe aber kann auch eine oder zwei Stellen enthalten.

Der Zeiger der niedrigsten Stelle der ersten Classe ist das dreifache des Zeigers der ersten Stelle der Grundzahl. Der Zeiger der niedrigsten Stelle des Cubus der zweiten Stelle der Grundzahl ist um 3 kleiner, der Zeiger der niedrigsten Stelle des Cubus der dritten Stelle der Grundzahl ist wieder um 3 kleiner u. s. w. Hat die Grundzahl Decimalstellen, so hat die Entwickelung des vollständigen Cubus drei Mal so viel Decimalstellen.

Beispiel. Es sey der Cubus von 745,93 zu bilden

Zeiger	876543210 123456
	745,93
	745,93
	745,93
	343
3 . 7 . 7 . 4	588
3 . 7 . 4 . 4	336
4 . 4 . 4	64
3 . 74 . 74 . 5	82140
3 . 74 . 5 . 5	5550
5 . 5 . 5	125
3 . 745 . 745 . 9	14985675
3 . 745 . 9 . 9	181035
9 . 9 . 9	729
3 . 7459 . 7459 . 3	500730129
3 . 7459 . 3 . 3	201393
3 . 3 . 3	27
	415044078,605857.

52.

Die Cubikwurzel aus einer Zahl auszuziehen.

Eine Zahl, deren Cubus einer gegebenen Zahl gleich ist, heifst die Cubikwurzel der gegebenen Zahl.

$$\text{Z. B. } \sqrt[3]{27} = 3,\ \sqrt[3]{50653} = 37 \text{ u. s. w.}$$

Um die Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen, mufs man zuerst die höchste Stelle dieser Wurzel, sodann die nächstniedrigere oder zweite Stelle u. s. w. bestimmen.

Da jede niedrigere Stelle der Cubikwurzel in der Entwickelung ihres Cubus (51) eine Classe von drei Stellen liefert, so mufs man zuvörderst die gegebene Zahl, ohne Rücksicht auf die zu ihr gehörigen Decimalstellen, in Classen von drei Stellen von der Rechten zur Linken theilen. Die höchste oder erste Classe kann auch eine oder zwei Stellen enthalten. Wenn die Anzahl der zu der gegebenen Zahl gehörigen Decimalstellen nicht eine durch 3 theilbare Zahl ist, so setzt man der niedrigsten Decimalstelle rechts noch eine oder zwei Nullen hinzu.

Hat die gegebene ganze Zahl einen gewöhnlichen Bruch bei sich, so verwandelt man denselben nach (45) in Decimalstellen, und fügt diese der gegebenen Zahl hinzu.

Ist die gegebene Zahl ein ächter oder unächter Bruch, so verwandelt man denselben in eine Decimalzahl.

Man bildet nun eine Tafel der Cuben der ersten neun Ziferzahlen:

Ziferzahl	Cubus	Ziferzahl	Cubus	Ziferzahl	Cubus
1	1	4	64	7	343
2	8	5	125	8	512
3	27	6	216	9	729

Diejenige Ziferzahl, deren Cubus nächstkleiner als die erste Classe der gegebenen Zahl ist, ist die Ziferzahl der höchsten Stelle der Cubikwurzel. Diese Ziferzahl sey gleich a. Mit Anwendung der Formel

$$aaa + 3aab + 3abb + bbb$$

zieht man den Cubus aaa von der ersten Classe ab. An den Rest setzt man die erste Stelle der zweiten Classe. Den so vergröfserten Rest dividirt man mit $3aa$. Der Quotient, welcher nicht gröfser als 9 genommen werden darf, giebt die Ziferzahl b der zweiten Stelle der Wurzel. Man zieht das Product $3aab$ ab, setzt an den Rest die zweite Stelle der Classe, und zieht von dem so vergröfserten Rest das Product $3abb$ ab. An den Rest setzt man die dritte Stelle der Classe, und zieht von diesem vergröfserten Rest den Cubus bbb ab.

Man setzt nun die aus den beiden ersten Stellen der Cubikwurzel bestehende Zahl gleich a, und fährt auf die angezeigte Art in Bestimmung der folgenden Stellen fort, nach Anleitung der Entwickelung in (51).

Beispiel. Die gegebene Zahl sey 415044078,605857.

	415044078,605857 (745,93
7 . 7 . 7	343
	720
3 . 7 . 7 . 4	588
	1324
3 . 7 . 4 . 4	336
	9884
4 . 4 . 4	64
	98200
3 . 74 . 74 . 5	82140
	160607
3 . 74 . 5 . 5	5550
	1550578
5 . 5 . 5	125
	15504536
3 . 745 . 745 . 9 . . .	14985675
	5188610
3 . 745 . 9 . 9	181035
	50075755
9 . 9 . 9	729
	500750268
3 . 7459 . 7459 . 3 . . .	500730129
	201395
3 . 7459 . 3 . 3	201393
	27
3 . 3 . 3	27
	0

Um eine gröſsere Sicherheit in die Rechnung zu bringen, macht man zwei Nebenrechnungen für die Werthe von $3a$ und $3aa$ mit jeder hinzukommenden Stelle.

Beispiel. Nebenrechnung zur Cubikwurzel aus $5\frac{3}{7}$.

$3a$

3 . 1 . .	3
3 . 7	21
	51
3 . 5	15
	525
3 . 7	21
	5271
3 . 4	12
	52722
3 . 9	27
	527247
3 . 9	27
	5272497

$3aa$

3 . 1	3
3 . 2 . 7	42
3 . 7 . 7	147
	867
51 . 2 . 5	510
3 . 5 . 5	75
	91875
525 . 2 . 7	7350
3 . 7 . 7	147
	9261147
5271 . 2 . 4	42168
3 . 4 . 4	48
	926536428
52722 . 2 . 9	948996
3 . 9 . 9	243
	92663133003
527247 . 2 . 9	9490446
3 . 9 . 9	243
	9266408205003
5272497 . 2 . 4	42179976
3 . 4 . 4	48
letzter Divisor	926641242300108

Cubikwurzelausziehung.

	5
1 . 1 . 1 . . .	1
	4428
3 . 7	21
3 . 7 . 7	147
7 . 7 . 7	343
	515571
867 . 5	4335
51 . 5 . 5	1275
5 . 5 . 5 . . .	125
	69196428
91875 . 7	643125
525 . 7 . 7	25725
7 . 7 . 7 . . .	343
	4626335571
9261147 . 4	37044588
5271 . 4 . 4	84336
4 . 4 . 4	64
	921033347428
926536428 . 9	8338827852
52722 . 9 . 9	4270482
9 . 9 . 9	729
	87107856679571
92663133003 . 9	833968197027
527247 . 9 . 9	42707007
9 . 9 . 9	729
	3710609906072428
9266408205003 . 4	37065632820012
5272497 . 9 . 9	84359952
4 . 4 . 4	64
Rest	40457804716445

Rest u. Div.	40457804716445
004	37065649692004
3	2779923726900
6	555984745380
6	55598474538
0	0
	648077623

$$\sqrt[3]{5\frac{3}{7}} = 1{,}75749940043660$$

Probe.

	Vielfache der Wurzel.		
1	175749940043660	1 . .	175749940043660
2	351499880087320	7 . .	123024958030562
3	527249820130980	5 . .	8787497002183
4	702999760174640	7 . .	1230249580306
5	878749700218300	4 . .	70299976017
6	1054499640261960	9 . .	15817494604
7	1230249580305620	9 . .	1581749460
8	1405999520349280	4 . .	70299976
9	1581749460392940	004 . . .	70300
10	1757499400436600	3 . . .	5272
		6 . . .	1054
		6 . . .	105

Quadrat der Wurzel 308880414253499

3 . .	527249820130980
08 . .	14059995203493
8 . .	1405999520349
8 . .	140599952035
04 . .	702999760
1 . .	17574994
4 . .	7029998
2 . .	351500
5 . . .	87875
3 . . .	5272
4 . . .	703
9 . . .	158
9 . . .	16

Cubus der Wurzel 5,42857142857133 $= 5\frac{3}{7}$.

Das ABC
der
Arithmetik
für
Examinanden.

Eine Zugabe zum practischen Rechenbuch

vom

Professor Dr. *G. Paucker*.

XXI.

Einundzwanzigster Cursus.

Die Proportion.

Mitau $\frac{\text{22. August}}{\text{3. September}}$ 1842.

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.
Riga, am 28. August 1842.

Dr. *C. E. Napiersky*,
Censor.

53.

Ein Verhältnifs ist die Vergleichung zweier Mehrheiten durch ihre gemeinschaftliche Einheit.

Wenn sich zwei gleichartige Gröfsen durch eine dritte Gröfse in ganzen Zahlen ausmessen lassen, so können jene beiden als Mehrheiten, die dritte als Einheit angesehen werden, und die durch die Ausmessung erlangten ganzen Zahlen stellen das Verhältnifs jener beiden Gröfsen dar. Wenn die erste Zahl ein Vielfaches der zweiten Zahl ist, so ist die erste Gröfse dasselbe Vielfache der zweiten Gröfse. Wenn die zweite Zahl ein Vielfaches der ersten ist, so ist die zweite Gröfse dasselbe Vielfache der ersten Gröfse. Ueberhaupt verhalten sich die Gröfsen in Rücksicht ihres Werths zu einander, wie die ihnen entsprechenden Zahlen.

Beispiel. Um das Gewicht von 3 Pfund 92 Solotnik, mit dem Gewichte von 4 Pfund 36 Solotnik zu vergleichen, nimmt man den Solotnik zur Einheit an. Dieses kleinere Gewicht ist in dem ersten 380 Mal, in dem zweiten 420 Mal enthalten; das Verhältnifs dieser Gewichte wird also durch die Zahlen 380, 420 dargestellt.

Um ein Verhältnifs zu bezeichnen, setzt man die Glieder desselben, d. h. die Zahlen, welche das Verhältnifs ausdrücken, neben einander, getrennt durch das Zeichen (:), hier also 380:420.

Statt die beiden verglichenen Gröfsen durch ihre gemeinschaftliche Einheit in ganzen Zahlen auszumessen, kann man auch die zweite als Einheit annehmen. Dann ist jene frühere Einheit ein einfacher Theil (21) der zweiten Gröfse, und das erste Glied des Verhältnisses stellt den Zähler, das zweite den Nenner eines Bruchs dar. Dieser Bruch drückt den Werth der ersten Gröfse aus, wenn die zweite zur Einheit angenommen wird.

Beispiel. In dem zweiten Gewichte von 4 Pfund 36 Sol., sind 420 Solotnik enthalten. Wenn also jenes zweite Gewicht die Einheit ist, so enthält diese Einheit 420 einfache Theile. Das erste Gewicht von 3 Pfund 92 Solotnik enthält dann 380 solcher einfachen Theile. Folglich ist das erste Gewicht $\frac{380}{420}$ des zweiten Gewichts. Der Bruch $\frac{380}{420}$ oder (27) $\frac{19}{21}$ drückt also den Werth des ersten Gewichts aus, wenn das zweite zur Einheit angenommen wird.

Hieraus ergiebt sich der Satz: *Das Verhältniſs kann als ein Bruch angesehen werden, dessen Zähler das erste Glied, dessen Nenner das zweite Glied des Verhältnisses ist.*

Der Divisions-Quotient (22), der Bruch und das Verhältniſs, sind also ursprünglich gleichbedeutende Zahlen, und nur der Form nach verschieden. Was bei dem Quotienten der Dividendus und Divisor, beim Bruch der Zähler und Nenner ist, das sind beim Verhältniſs das erste und zweite Glied. Die Verhältnisse lassen sich also ganz denselben Rechnungsoperationen unterwerfen, wie die Brüche, und die bei den Brüchen geltenden Sätze lassen sich unmittelbar auf die Verhältnisse übertragen.

54.

Ein Verhältniſs wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man das erste Glied mit dieser Zahl multiplicirt nnd das zweite Glied beibehält.

Das Verhältniſs sey $a:b$, oder in Bruchform $\frac{a}{b}$. Aber (24) der Bruch $\frac{a\,.\,n}{b}$ ist n Mal gröſser als der Bruch $\frac{a}{b}$. Also ist auch das Verhältniſs $a\,.\,n:b$ n Mal gröſser als das Verhältniſs $a:b$.

Beispiel. Das Verhältniſs $6:7$ ist 2 Mal so groſs, als das Verhältniſs $3:7$.

55.

Ein Verhältniſs wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man das zweite Glied mit dieser Zahl multiplicirt und das erste Glied beibehält.

Das Verhältniſs sey $a:b$, oder in Bruchform $\frac{a}{b}$. Aber (25) der Bruch $\frac{a}{b\,.\,n}$ ist n Mal kleiner als der Bruch $\frac{a}{b}$. Also ist auch das Verhältnifs $a : b\,n$ n Mal kleiner als das Verhältnifs $a : b$.

Beispiel. Das Verhältnifs 3 : 14 ist 2 Mal kleiner als das Verhältnifs 3 : 7.

56.

Der Werth eines Verhältnisses bleibt unverändert, wenn man beide Glieder mit einer und derselben ganzen Zahl multiplicirt.

Das Verhältnifs sey $a : b$, oder in Bruchform $\frac{a}{b}$. Aber (26) der Bruch $\frac{a\,n}{b\,n}$ ist dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich. Also ist das Verhältnifs $a\,n : b\,n$ dem Verhältnifs $a : b$ gleich.

Dieser Satz dient, um ein Verhältnifs, dessen Glieder gemischte Zahlen sind, auf ein Verhältnifs von ganzen Zahlen zu bringen, indem man beide Glieder mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner der Brüche multiplicirt.

Beispiel. Das Verhältnifs sey $3\frac{1}{2} : 4\frac{1}{3}$, der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist 6. Multiplicirt man mit demselben die Glieder, so erhält man das Verhältnifs der ganzen Zahlen 21 : 26, welches dem gegebenen $3\frac{1}{2} : 4\frac{1}{3}$ gleich ist.

57.

Der Werth eines Verhältnisses bleibt unverändert, wenn man beide Glieder mit einer und derselben ganzen Zahl dividirt.

Das Verhältnifs sey $a : b$, oder in Bruchform $\frac{a}{b}$. Aber (27) der Bruch $\frac{a : n}{b : n}$ ist dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich. Also ist das Verhältnifs $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ dem Verhältnifs $a : b$ gleich.

Dieser Satz dient, um ein in ganzen Zahlen gegebenes Verhältnifs auf die einfachste Form zu bringen, indem man beide Glieder mit ihrem gröfsten gemeinschaftlichen Theiler dividirt.

Beispiel. Das Verhältnifs sey 111 : 148, der gröfste gemeinschaftliche Theiler der Glieder ist 37, also ist die einfachste Form des Verhältnisses gleich 3 : 4.

58.

Eine Zahl wird mit einem Verhältniſs multiplicirt, wenn man sie mit dem ersten Gliede des Verhältnisses multiplicirt und das Product mit dem zweiten Gliede dividirt.

Die Zahl c sey mit dem Verhältnisse $a:b$ zu multipliciren. Dieses heiſst so viel, als sie mit dem Bruche $\frac{a}{b}$ multipliciren. Also ist das Product (31) gleich $\frac{ca}{b}$.

Beispiel. Das Product der Zahl 8 mit dem Verhältniſs $5:7$ giebt die Zahl $5^5/_7$.

59.

Eine Zahl wird mit einem Verhältnisse dividirt, wenn man sie mit dem zweiten Gliede multiplicirt und das Product mit dem ersten Gliede dividirt.

Die Zahl c sey mit dem Verhältnisse $a:b$ zu dividiren. Dieses heiſst soviel, als sie mit dem Bruche $\frac{a}{b}$ dividiren. Also ist der Quotient (34) gleich $\frac{cb}{a}$.

Beispiel. Der Quotient der Zahl 8, durch Division mit dem Verhältniſs $4:7$ ist die Zahl 14.

60.

Das Product zweier Verhältnisse ist gleich dem Verhältniſs der Producte der gleichnamigen Glieder.

Die Verhältnisse seyen $a:b$ und $c:d$. Die beiden ersten Glieder a, c, heiſsen gleichnamige Glieder. Eben so heiſsen die beiden zweiten Glieder b, d, gleichnamige Glieder.

Die Verhältnisse in Bruchform ausgedrückt sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Das Product dieser Brüche ist (32) gleich dem Bruche $\frac{ac}{bd}$. Also ist auch das Product der Verhältnisse $a:b$, und $c:d$, gleich dem Verhältniſs $ac:bd$.

Die Multiplication zweier Verhältnisse heiſst auch *Zusammensetzung*, und ihr Product das *zusammengesetzte* Verhältniſs.

Wenn die Gegenglieder gleich sind, so fallen sie bei der Zusammensetzung heraus. Nämlich das aus den Verhältnissen

$a:b$ und $b:c$ zusammengesetzte Verhältnifs ist $ab:bc$ oder (57) $a:c$. Eben so ist das aus den Verhältnissen $a:b$ und $c:a$ zusammengesetzte Verhältnifs $ac:ba$, oder (57) $c:b$.

Beispiel. Aus den Verhältnissen $2:3$ und $5:7$ entsteht das zusammengesetzte Verhältnifs $10:21$. Aus den Verhältnissen $2:3$ und $3:4$ entsteht das zusammengesetzte $1:2$.

61.

Der Quotient zweier Verhältnisse ist gleich dem Verhältnifs der Producte der wechselnamigen Glieder.

Die Verhältnisse seyen $a:b$ und $c:d$. Hier heifsen diejenigen Glieder beider Verhältnisse, von denen das eine das erste, das andere das zweite ist, *wechselnamige* Glieder. Nämlich a, d, und eben so b, c, heifsen wechselnamige Glieder.

Die Verhältnisse in Bruchform ausgedrückt sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Aber der Quotient der Division des ersten Bruchs durch den zweiten ist (35) der Bruch $\frac{ad}{bc}$. Also ist auch der Quotient der Division des ersten Verhältnisses mit dem zweiten gleich dem Verhältnifs $ad:bc$.

Die Division des Verhältnisses $a:b$ mit dem Verhältnifs $a:c$ giebt das Verhältnifs $c:b$. Die Division des Verhältnisses $a:b$ mit dem Verhältnifs $c:b$ giebt das Verhältnifs $a:c$.

Beispiel. Das Verhältnifs $2:3$ mit dem Verhältnifs $5:7$ dividirt giebt das Verhältnifs $14:15$.

62.

Die Gleichheit zweier Verhältnisse heifst eine Proportion.

Da jedes Verhältnifs einem Bruche gleichbedeutend ist (53), und Brüche an Werth gleich seyn können, so können auch Verhältnisse einander gleich seyn, und diese Gleichheit derselben heifst eine Proportion. Sie ist also ursprünglich nichts anders, als die Gleichheit zweier Brüche oder zweier Divisionsquotienten. Daher können alle Sätze, welche für die Gleichheit zweier Brüche oder Divisionsquotienten gültig sind, unmittelbar auf die Proportion übertragen werden.

Die Proportion wird bezeichnet, indem man zwischen die gleichen Verhältnisse das Gleichheitszeichen (=) setzt. Wenn also die Verhältnisse $a:b$ und $c:d$ einander gleich sind, so geben sie die Proportion

$$a:b=c:d.$$

63.

Wenn zwei Verhältnisse einem dritten Verhältnifs gleich sind, so sind sie einander gleich und bilden also eine Proportion.

Es sey jedes der beiden Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ dem dritten Verhältnisse $f : g$ gleich, so ist auch jeder der beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ dem dritten Bruche $\frac{f}{g}$ gleich. Also sind die beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich. Also sind auch die beiden Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ einander gleich. Oder mit andern Worten:

Aus der Proportion $a : b = f : g$
und der Proportion $c : d = f : g$
folgt die Proportion $a : b = c : d$

Da der Werth eines Verhältnisses unverändert bleibt, wenn man (56, 57) beide Verhältnisse mit einer und derselben ganzen Zahl multiplicirt oder dividirt, so lassen sich hiedurch aus einem gegebenen Verhältnisse unzählige Proportionen bilden.

Beispiel. Da $1 : 2 = 3 : 6$
und $1 : 2 = 4 : 8$
so ist $3 : 6 = 4 : 8$.

64.

In einer Proportion sind die beiden Producte der wechselnamigen Glieder einander gleich.

Aus der Proportion $a : b = c : d$ folgt die Bruchgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Man bringe beide Brüche auf den gemeinschaftlichen Nenner $b\,d$, so ist $\frac{a\,d}{b\,d} = \frac{b\,c}{b\,d}$.

Da nun die Nenner gleich sind, und die Brüche gleich sind, so müssen auch die Zähler gleich seyn, also $a\,d = b\,c$.

Dieser Satz läfst sich auch auf folgende Art aussprechen: *Aus der Gleichheit zweier Quotienten folgt die Gleichung der Producte, und umgekehrt aus der letztern Gleichung die erste Gleichheit. Wenn also zwei Proportionen eine und dieselbe Gleichung geben, und die eine Proportion richtig ist, so ist auch die andre richtig.*

65.

Eine Proportion bleibt richtig, wenn die innern oder äufsern Glieder vertauscht werden.

Die Proportion sey $a:b = c:d$

so ist (64) $ad = bc$.

Alle Proportionen, welche dieselbe Gleichung der Producte geben, sind also richtig, nämlich:

$$a:c = b:d \qquad b:a = d:c$$
$$b:d = a:c \qquad c:a = d:b$$
$$c:d = a:b \qquad d:b = c:a$$
$$d:c = b:a$$

66.

Eine Proportion bleibt richtig, wenn man die gleichnamigen Glieder mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

Die Proportion sey $a:b = c:d$

so ist (64) $ad = bc$.

Alle Proportionen, welche dieselbe Gleichung der Producte geben, sind also richtig. Nämlich:

$$an:b = cn:d$$
$$an:bn = c:d$$
$$a:bn = c:dn$$
$$a:b = cn:dn.$$

Denn aus jeder dieser vier Proportionen folgt (64) die Gleichung

$$adn = bcn$$

also auch $ad = bc$.

Eben so sind folgende vier Proportionen richtig:

$$\frac{a}{n}:b = \frac{c}{n}:d$$
$$\frac{a}{n}:\frac{b}{n} = c:d$$
$$a:\frac{b}{n} = c:\frac{d}{n}$$
$$a:b = \frac{c}{n}:\frac{d}{n}$$

Denn aus jeder dieser vier Proportionen folgt (64) die Gleichung $\frac{ad}{n} = \frac{bc}{n}$

also auch $ad = bc$.

67.

Eine Proportion bleibt richtig, wenn von zwei wechselnamigen Gliedern das eine mit einer Zahl multiplicirt, das andre mit derselben Zahl dividirt wird.

Die Proportion sey $a : b = c : d$
so ist (64) $a\,d = b\,c$.

Alle Proportionen, welche dieselbe Gleichung der Producte geben, sind also richtig, nämlich:

$$a : \frac{b}{n} = cn : d$$

$$a : bn = \frac{c}{n} : d$$

$$an : b = c : \frac{d}{n}$$

$$\frac{a}{n} : b = c : dn$$

Denn aus diesen vier Proportionen folgt (64) die Gleichung

$$a\,d = b\,c\,\frac{n}{n}$$

oder $a\,d\,\frac{n}{n} = b\,c$

Also in beiden Fällen $a\,d = b\,c$.

68.

In einer Proportion verhält sich das erste Glied zum zweiten, wie die Summe des ersten und dritten zur Summe des zweiten und vierten Gliedes.

Die Proportion sey $a : b = c : d$
so ist (64) $a\,d = b\,c$.

Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches.
Also ist $a\,b + a\,d = a\,b + b\,c$.

Setzt man die Proportion
$$a : b = a + c : b + d,$$
so folgt aus (6) und (64) die Gleichung
$$a\,b + a\,d = a\,b + b\,c,$$
also ist die Proportion richtig.

Der Satz kann auch auf folgende Art bewiesen werden:
Aus der Proportion $a : b = c : d$
folgt (65) die Proportion $c : a = d : b$
also die Bruchgleichung $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

aber $1 = \frac{a}{a}$, $1 = \frac{b}{b}$, also $\frac{a}{a} = \frac{b}{b}$.

Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches, und Brüche von gleichem Nenner werden durch Addition der Zähler addirt (28) also:

$$\frac{a + c}{a} = \frac{b + d}{b}$$

Hieraus folgt die Proportion

$$a + c : a = b + d : b$$

oder (65) $$a : b = a + c : b + d.$$

Vertauscht man hier b mit c und c mit b, so ist

$$a : c = a + b : c + d.$$

Vertauscht man hier a mit d und d mit a, so ist

$$d : c = b + d : a + c.$$

Vertauscht man hier b mit c und c mit b, so ist

$$d : b = c + d : a + b.$$

69.

In einer Proportion verhält sich das erste Glied zum zweiten wie der Unterschied des ersten und dritten zum Unterschied des zweiten und vierten Gliedes.

Die Proportion sey $a : b = c : d$,
so ist (64) $ad = bc$.

Gleiches von Gleichem abgezogen giebt Gleiches, also ist

$$ab - ad = ab - bc.$$

Setzt man die Proportion:

$$a : b = a - c : b - d,$$

so folgt aus ihr nach (64) die Gleichung

$$ab - ad = ab - bc.$$

Also ist die Proportion richtig.

Wenn man in der als richtig bewiesenen Proportion

$$a : b = a - c : b - d$$

b mit c und c mit b vertauscht, so ist

$$a : c = a - b : c - d.$$

Vertauscht man hier a mit d und d mit a, so ist

$$d : c = d - b : c - a.$$

Vertauscht man hier b mit c und c mit b, so ist

$$d : b = d - c : b - a.$$

70.

In einer Proportion sind die Summen und Unterschiede der gleichnamigen Glieder proportionirt.

Die Proportion sey $a : b = c : d$
so ist (68) $a : b = a + c : b + d$
und (69) $a : b = a - c : b - d$
also ist (63) $a + c : b + d = a - c : b - d$.
Eben so ist (68) $a : c = a + b : c + d$
und (69) $a : c = a - b : c - d$
also ist (63) $a + b : c + d = a - b : c - d$.

Anwendungen.

71.

Bei der graden Regeldetri steht die Wirkung im graden Verhältnisse der Ursache, und jede Ursache mit ihrer Wirkung in den gleichnamigen Gliedern einer Proportion.

Wenn zwei Gröfsen verschiedener Art von einander abhängen, so dafs jede Veränderung der einen eine Veränderung der andern zur Folge hat, so heifst die eine die *Ursache*, die andre die ***Wirkung***.

Die einfachste Art der gegenseitigen Abhängigkeit ist das grade Verhältnifs. Man denke sich, dafs die Ursache durch ihre Einheit in der ganzen Zahl a gemessen werde, und dafs die beiden Wirkungen, welche jener Ursache, und der Einheit der Ursache entsprechen, von der Einheit der Wirkung in den ganzen Zahlen c und n gemessen werden. Wenn nun zwischen der Ursache und ihrer Wirkung eine derartige Abhängigkeit besteht, dafs unter allen Umständen die Gleichung

$$a = \frac{c}{n}$$

gültig ist, so sagt man, dafs die Wirkung im *graden Verhältnifs* der Ursache stehe.

Es sey also eine zweite Ursache von der Einheit der Ursache in der ganzen Zahl b, und die entsprechende Wirkung von der Einheit der Wirkung in der ganzen Zahl d gemessen, so wird auch die Gleichung

$$b = \frac{d}{n}.$$

gültig seyn. Aus diesen beiden Gleichungen folgt nach (35) die Bruchgleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und hieraus nach (62) die Proportion

$$a : b = c : d$$

oder (65) $a : c = b : d$.

In der ersten Proportion steht die erste Ursache mit ihrer Wirkung im ersten und dritten Gliede, welche gleichnamig sind, die zweite Ursache mit ihrer Wirkung im zweiten und vierten Gliede, welche ebenfalls gleichnamig sind.

In der zweiten Proportion steht die erste Ursache mit ihrer Wirkung im ersten und zweiten Gliede, welche gleichnamig sind, die zweite Ursache mit ihrer Wirkung im dritten und vierten Gliede, welche ebenfalls gleichnamig sind.

Die Aufgabe, *aus drei gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden*, heifst die *Regeldetri*. Sie heifst die *grade Regeldetri*, wenn die Wirkung im *graden* Verhältnifs der Ursache steht.

Aus der obigen Proportion folgt nach (64)

$$a d = b c.$$

Jedes der vier Glieder läfst sich also aus den drei andern berechnen, nämlich:

$$a = \frac{b c}{d}, \quad b = \frac{a d}{c}$$

$$c = \frac{a d}{b}, \quad d = \frac{b c}{a}.$$

Beispiel. Von einer gewissen Waare kostet der Solotnik 24 Kopeiken. Die Waare sey hier als Ursache, der Preis als Wirkung angesehen. Die Einheit der Ursache ist also der Solotnik, die Einheit der Wirkung ist die Kopeike. Die Wirkung welche der Einheit der Ursache entspricht, ist also hier 24 Kopeiken, also $n = 24$.

2	Solotnik	kosten	48	Kopeiken
3	—	—	72	—
4	—	—	96	—
5	—	—	120	—

u. s. w.,

also ist $2 = {}^{48}/_{24}$, $3 = {}^{72}/_{24}$, $4 = {}^{96}/_{24}$ u. s. w. Also steht die Wirkung im graden Verhältnifs der Ursache.

Man weifs nun, dafs 3 Pfund oder 288 Solotnik Rubel 69,12 oder 6912 Kopeiken kosten, und fragt, wie viel für Rubel 85 oder für 8500 Kopeiken kommen?

Hier ist $a = 288$, $c = 6912$, $d = 8500$. Man hat also die Proportion

$$288 : b = 6912 : 8500$$

$$\text{also } b = \frac{288 \,.\, 8500}{6912} = 354\tfrac{1}{6} \text{ Solotnik}$$

$$\text{oder } b = 3 \text{ Pfund } 66\tfrac{1}{6} \text{ Solotnik.}$$

Probe.	3 Pfund	kosten	6912	Kopeiken
	66 Solotnik	—	1584	—
	$\frac{1}{6}$ —	—	4	—
			8500	

72.

Bei der verkehrten Regeldetri steht die Wirkung im verkehrten Verhältnisse der Ursache, und jede Ursache mit ihrer Wirkung in den wechselnamigen Gliedern einer Proportion.

Eine zweite Art der Abhängigkeit zwischen zwei Gröfsen, von denen die eine die Ursache, die andere die Wirkung heifst, ist das verkehrte Verhältnifs. Man denke sich, dafs die Ursache durch ihre Einheit in der ganzen Zahl a gemessen werde, und dafs die beiden Wirkungen, welche jener Ursache und der Einheit der Ursache entsprechen, von der Einheit der Wirkung in den ganzen Zahlen c und n gemessen werden. Wenn nun zwischen der Ursache und ihrer Wirkung eine solche Abhängigkeit besteht, dafs unter allen Umständen die Gleichung

$$a = \frac{n}{c}$$

gültig ist, so sagt man, dafs die Wirkung im *verkehrten Verhältnifs* der Ursache stehe.

Es sey also eine zweite Ursache von der Einheit der Ursache in der ganzen Zahl b, und die entsprechende Wirkung von der Einheit der Wirkung in der ganzen Zahl d gemessen, so wird auch die Gleichung

$$b = \frac{n}{d}$$

gültig seyn. Aus diesen beiden Gleichungen folgt nach (35) die Bruchgleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$

und hieraus nach (62) die Proportion

$$a : b = d : c.$$

Hier steht die erste Ursache mit ihrer Wirkung im ersten und vierten Gliede, welche wechselnamige Glieder heifsen. Eben so steht die zweite Ursache mit ihrer Wirkung im zweiten und dritten Gliede, welche wechselnamige Glieder heifsen.

Die Aufgabe, aus drei gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden, wenn die Gröfsen der einen Art, oder die

Ursachen mit den Gröfsen der andern Art, oder den Wirkungen, im verkehrten Verhältnisse stehen, heifst die *verkehrte Regeldetri.*

Aus der obigen Proportion folgt nach (64)

$$a\,c = b\,d.$$

Jedes der vier Glieder läfst sich also aus den drei andern berechnen, nämlich:

$$a = \frac{b\,d}{c}, \quad b = \frac{a\,c}{d}$$

$$c = \frac{b\,d}{a}, \quad d = \frac{a\,c}{b}.$$

Beispiel. Ein Capital von einem Rubel bringt in 100 Jahren einen Zins von 4 Rubeln. Das Capital wird hier als Ursache, die Zeit als Wirkung angesehen. Die Einheit der Ursache ist hier also der Rubel, die Einheit der Wirkung das Jahr, und die Wirkung, welche der Einheit der Ursache entspricht, ist die Zeit von 100 Jahren, also $n = 100$. Der Zins von vier Rubeln wird also gebracht von

1	Rubel	in	100	Jahren
2	Rubeln	in	50	—
3	—	„	$33\frac{1}{3}$	—
4	—	„	25	—
5	—	„	20	—

u. s. w.

$$\text{also ist } 2 = \frac{100}{50},\ 3 = \frac{100}{33\frac{1}{3}},\ 4 = \frac{100}{25},\ 5 = \frac{100}{20}$$

u. s. w. Also steht die Wirkung im verkehrten Verhältnifs der Ursache.

Man weifs nun, dafs 2590 Rubel in $6\frac{1}{2}$ Jahren Rubel 673,40 Zinsen bringen, und fragt, in welcher Zeit 3500 Rubel denselben Zins bringen?

Hier ist $a = 2590$, $c = 6\frac{1}{2}$, $b = 3500$.

Man hat also die Proportion:

$$2590 : 3500 = d : 6\tfrac{1}{2}$$

$$\text{also } d = \frac{2590 \,.\, 6\frac{1}{2}}{3500} = \text{Jahre } 4{,}81$$

Probe. 3500 Rubel in

1	Jahre	140
4	—	560
0,8	—	112
0,01	—	1,40
	Rubel	673,40.

73.

Die gesuchte Wirkung findet sich aus der gegebenen, bei der graden Regeldetri durch Multiplication mit dem Ursachverhältniſs, bei der verkehrten Regeldetri durch Division mit dem Ursachverhältniſs.

Man theilt die in der Aufgabe vorkommenden Gröſsen in zwei Sätze ab, indem man in jedem Satze die zusammengehörigen Gröſsen vereinigt. Der erste Satz ist derjenige, in welchem die Ursache a und die entsprechende Wirkung c gegeben sind. Der Fragesatz ist derjenige, in welchem die Ursache b gegeben ist, und die entsprechende Wirkung d gesucht wird. Nun ist in der graden Regeldetri (71)

$$a : b = c : d, \text{ also } d = c \cdot \frac{b}{a}$$

in der verkehrten Regeldetri (72)

$$a : b = d : c, \text{ also } d = c \cdot \frac{a}{b}.$$

Also ist bei der graden Regeldetri die gesuchte Wirkung d gleich dem Producte der gegebenen Wirkung c mit dem Ursachverhältniſs $\frac{b}{a}$, und bei der verkehrten Regeldetri gleich dem Quotienten der Division der gegebenen Wirkung c mit dem Ursachverhältniſs $\frac{b}{a}$. Bei dem Ursachverhältniſs $\frac{b}{a}$ bezeichnet aber das erste Glied b immer dasjenige, welches der gesuchten Wirkung d entspricht.

Wenn also d gröſser als c seyn soll, so muſs man c mit der gröſsern der beiden Ursachen multipliciren, mit der kleinern das Product dividiren.

Wenn aber d kleiner als c seyn soll, so muſs man c mit der kleinern der beiden Ursachen multipliciren, mit der gröſsern das Product dividiren.

Beispiele. 3 Pfund kosten Rubel 69,12, wie viel kommen für Rubel 85? ***Grade Regeldetri.***

Erster Satz: 6912 Kop. $= a$, 288 Sol. $= c$.
Fragesatz: 8500 Kop. $= b$, $= d$.

$$d = 288 \cdot \frac{8500}{6912} = 354\tfrac{1}{6}.$$

In welcher Zeit bringen 3500 Rubel denselben Zins wie 2590 Rubel in $6\tfrac{1}{2}$ Jahren? ***Verkehrte Regeldetri.***

Erster Satz: 2590 Rubel $= a$, $6\frac{1}{2}$ Jahr $= c$.
Fragesatz: 3500 Rubel $= b$, — $= d$.

$$d = 6\tfrac{1}{2}\,\frac{2590}{3500} = 4{,}81.$$

74.

Den Ansatz der graden Regeldetri durch die Gleichung zu machen.

Erste Art.

Die Bestimmung, daſs zwei Gröſsen von verschiedener Art ihrem innern Werthe nach einander gleich seyn sollen, heiſst eine *Gleichung*. Die grade Regeldetri giebt zwei solche Gleichungen, in deren einer die gesuchte Gröſse enthalten ist. Man setzt diese Gleichungen so unter einander, daſs die gleichartigen Gröſsen einander gegenüber stehen, und bringt diese auf eine gemeinschaftliche Einheit, welche dann aus der Rechnung herausfällt. Dadurch werden die Gleichungen reine Zahlengleichungen.

Wenn aber gleiche Zahlen mit gleichen Zahlen multiplicirt werden, so müssen auch die Producte gleich seyn. Man multiplicirt also die unter einander stehenden Zahlen, und dividirt das Product mit der Gegenzahl, so ergiebt sich im Quotienten die gesuchte Zahl.

Beispiel. 3 Pfund kosten Rubel 69,12, wie viel kommen für Rubel 85?

Solotnik 288 $=$ 6912 Kopeiken
Kopeiken 8500 $=$ x Solotnik

$$8500 \cdot 288 = 6912 \cdot x$$
$$354\tfrac{1}{6} = x$$

Zweite Art.

Man geht von einer Gleichung, welche die gegebenen Gröſsen enthält, aus, und gelangt von dieser durch Multiplication oder Division zu einer Gleichung, welche auf die gesuchte Gröſse führt.

Beispiel. 3 Pfund kosten Rubel 69,12, wie viel kommen für Rubel 85?

$$\text{Kopeiken } 6912 = 288 \text{ Solotnik}$$

$$\text{Kopeike } 1 = \frac{288}{6912} \text{ Solotnik}$$

$$\text{Kopeiken } 8500 = \frac{288 \cdot 8500}{6912} \text{ Solotnik.}$$

$$\text{Aber Kopeiken } 8500 = x \text{ Solotnik}$$

$$\text{also } x = \frac{288 \cdot 8500}{6912} = 354^1/_6.$$

Dritte Art.

Man geht von einer Gleichung aus, welche die gesuchte Gröſse enthält, und gelangt von dieser durch Multiplication oder Division zu einer Gleichung, welche auf die gegebene Gröſse führt.

Beispiel. 3 Pfund kosten Rubel 69,12, wie viel kommen für Rubel 85?

$$\text{Kopeiken } 8500 = x \text{ Solotnik}$$

$$\text{Kopeike } 1 = \frac{x}{8500} \text{ Solotnik}$$

$$\text{Kopeiken } 6912 = \frac{6912}{8500} \cdot x \text{ Solotnik.}$$

$$\text{Aber Kopeiken } 6912 = 288 \text{ Solotnik.}$$

$$\text{Also } \frac{6912}{8500} \cdot x = 288.$$

$$\text{Also } x = \frac{288 \cdot 8500}{6912} = 354^1/_6.$$

75.

Den Ansatz der verkehrten Regeldetri durch die Gleichung zu machen.

Da bei der verkehrten Regeldetri die Wirkung (72) im verkehrten Verhältniſs der Ursache steht, so muſs das Product von Ursache und Wirkung im ersten Satze dem Product im Fragesatze gleich seyn. Man schreibt also beide Factoren unter einander, und dividirt das Product durch die Gegenzahl.

Beispiel. In welcher Zeit bringen 3500 Rubel denselben Zins wie 2590 Rubel in $6^1/_2$ Jahren?

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Rubel} & 3500 \\ \text{Jahre} & x\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll}2590 & \text{Rubel} \\ 6^1/_2 & \text{Jahre}\end{array}\right.$$

$$3500 \cdot x = 2590 \cdot 6^1/_2$$

$$x = \frac{2590 \cdot 6^1/_2}{3500} = 4{,}81$$

76.

Bei der Theilungsrechnung verhält sich jeder Antheil zur Dividende, wie die Einlage zur Summe der Einlagen.

Die Gesellschaftsrechnung, Vermischungsrechnung, Theilungsrechnung, gehören zu einer und derselben Art von Aufgaben, bei welcher es darauf ankommt, eine gegebene Gröfse S, welche die ***Dividende*** heifst, in einzelne Antheile zu theilen, welche sich wie gegebene Zahlen a, b, c, d u. s. w. verhalten. Diese Zahlen heifsen die ***Einlagen.***

Der erste Antheil verhält sich zum zweiten wie $a:b$, der zweite zum dritten wie $b:c$ u. s. w. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn jeder Antheil gleich dem Producte der entsprechenden Einlage mit einem gewissen zu bestimmenden Factor x ist, welcher für alle Einlagen und Antheile derselbe seyn mufs. Demnach ist der erste Antheil gleich ax, der zweite gleich bx u. s. w. Wenn also die Summe aller Einlagen gleich n ist, so mufs nach (6) die Summe aller Antheile gleich nx seyn. Aber diese Summe der Antheile mufs der ganzen Dividende S gleich seyn. Also ist

$$S = nx$$

$$\text{also } \frac{S}{n} = x.$$

Demnach ist der erste Antheil $= S \,.\, \frac{a}{n}$, der zweite $= S \,.\, \frac{b}{n}$, der dritte $= S \,.\, \frac{c}{n}$ u. s. w. Hieraus folgt der Satz: jeder Antheil verhält sich zur Dividende S, wie die diesem Antheil entsprechende Einlage zur Summe der Einlagen n.

Beispiel. Die Dividende sey 270 Rubel, die Einlagen 400, 600, 200, 300 Rubel.

Hier ist $S = 270$, $a = 400$, $b = 600$, $c = 200$, $d = 300$, also $n = 1500$, also $\frac{a}{n} = \frac{4}{15}$, $\frac{b}{n} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, $\frac{c}{n} = \frac{2}{15}$, $\frac{d}{n} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Also der	erste	Antheil	$270 \,.\, \frac{4}{15}$	$= 72$	Rubel
—	zweite	—	$270 \,.\, \frac{2}{5}$	$= 108$	—
—	dritte	—	$270 \,.\, \frac{2}{15}$	$= 36$	—
—	vierte	—	$270 \,.\, \frac{1}{5}$	$= 54$	—
			Dividende S	$= 270$	—

77.

Die Kettenregel ist die Verbindung mehrerer einfachen Gleichungen durch Multiplication.

Der Zweck des Kettensatzes ist, aus der Vergleichung mehrerer auf einander folgenden Gröſsen eine Vergleichung zwischen der ersten und letzten zu erhalten.

Dieses geschieht, indem man, wie bei der Regeldetri (74), je zwei Gröſsen, welche entweder ihrem innern oder ihrem Handelswerth nach einander gleich sind, in Form einer Gleichung neben einander setzt. Wenn nun alle auf der einen Seite vorkommenden Benennungen auch auf der andern Seite vorkommen, so heben sie bei der Multiplication einander auf, und man erhält eine reine Zahlengleichung. Die Division des Products der Gegenzahlen mit dem Product der Factoren der gesuchten Zahl, giebt diese letztere. Wenn aber alle Benennungen einander aufheben, bis auf eine auf der einen, und eine auf der andern Seite, so erhält man eine Gleichung zwischen diesen beiden Benennungen.

Beispiel. Es soll die englische Troyunze Standardsilber mit russischen Goldkopeiken verglichen werden. Man vergleicht also die Troyunze Standardsilber nach ihrem Handelswerth mit englischen Pence Sterling, diese nach ihrem Münzwerth mit der englischen Unze Standardgold, diese mit der englischen Unze feinen Goldes, diese mit dem englischen Troypfunde feinen Goldes, diese mit den Doli (Theilen) eines russischen Pfundes feinen Goldes, diese mit russischen Goldkopeiken.

Goldkopeiken	x	= 1 Troyunze Standardsilber
Troyunze Stand.-Silber	1	= 60 Pence Sterling
Pence Sterling	$934\frac{1}{2}$	= 1 Troyunze Stand.-Gold
Troyunzen Stand.-Gold	12	= 11 Troyunzen fein Gold
Troyunzen fein Gold	12	= 8399,68 Doli fein Gold
Doli fein Gold	135	= 500 Goldkopeiken
	x . 151389	= 23099120
	x	= 152,58

d. h. die Troyunze Standardsilber hat den Werth von Goldkopeiken 152,58.

Läſst man aber die erste Gleichung weg, so erhält man eine Gleichung von benannten Zahlen, nämlich:

Troyunzen Stand.-Silber 151389 = 23099120 Goldkopeiken
oder Troyunze Stand.-Silber 1 = 152,58 Goldkopeiken.

78.

Bei der zusammengesetzten Verhältnifsregel wird die gesuchte Wirkung aus der gegebenen Wirkung durch Multiplication oder Division derselben mit gegebenen Ursachverhältnissen gefunden.

Bei dieser Regel wird wie bei der graden und verkehrten Regeldetri vorausgesetzt, dafs eine Gröfse, welche die Wirkung heifst, mit andern Gröfsen, welche Ursachen heifsen, in gradem oder verkehrtem Verhältnisse stehe. Man theilt daher die in der Aufgabe vorkommenden Gröfsen in zwei Sätze ab, indem man in jeden Satz die zusammengehörigen Gröfsen bringt. Derjenige Satz, in welchem alle Gröfsen gegeben sind, heifst der *erste Satz*, derjenige aber, in welchem eine der Gröfsen die gesuchte ist, heifst der *Fragesatz*. Diese gesuchte Gröfse, so wie die ihr gleichartige im ersten Satze, heifst die *Wirkung*, jede der andern gegebenen Gröfsen heifst eine *Ursache*. Das Verhältnifs einer Ursache des Fragesatzes zur gleichartigen Ursache des ersten Satzes, heifst das *Ursachverhältnifs*. Wenn nun die Wirkung in gradem Verhältnifs der Ursache steht, so mufs die gegebene Wirkung mit dem Ursachverhältnifs multiplicirt werden (73), wenn sie aber in verkehrtem Verhältnifs der Ursache steht, so mufs sie (73) mit dem Ursachverhältnifs dividirt werden.

Beispiele. Wenn die englische Troyunze Standardsilber 60 Pence Sterling kostet, und der Wechselcours 39 Pence Sterling pr. 1 RS. ist, so kostet ein rigisches Loth zwölflöthiges Silber $52\frac{1}{2}$ Kop. Silber. Was wird der rigische Silberpreis seyn, wenn der englische 56, und der Wechselcours 38 ist?

	Ursache	Ursache	Wirkung
Erster Satz:	60,	39,	$52\frac{1}{2}$
Fragesatz:	56,	38,	x

Bei unverändertem Wechselcours steht der rigische Silberpreis in gradem Verhältnisse des englischen Silberpreises.

Der Wechselcours zeigt den Preis des Silberrubels in englischem Gelde an. Je höher der Wechselcours, desto theurer ist der Silberrubel, desto weniger zahlt man also in diesem Gelde für die Waare. Mithin steht bei unverändertem englischen Silberpreise der rigische Silberpreis in verkehrtem Verhältnifs des Wechselcourses.

Erstes Ursachverhältnifs $\frac{56}{60}$

Zweites Ursachverhältnifs $\frac{38}{39}$

mit dem ersten wird also multiplicirt, mit dem zweiten dividirt. Demnach ist der gesuchte Preis $52\frac{1}{2} \cdot \frac{56}{60} \cdot \frac{39}{38} = 50{,}29$.

Man kann die Aufgabe in einzelne Regeldetrisätze zerlegen:

Wenn der englische Silberpreis 60, der Wechselcours 39 ist, so ist der rigische Silberpreis $52\frac{1}{2}$. Was ist dieser, wenn der englische Preis 56, der Wechselcours 39 ist?

$$52\frac{1}{2} \cdot \frac{56}{60} = 49.$$

Wenn der englische Silberpreis 56, der Wechselcours 39 ist, so ist der rigische Silberpreis 49. Was ist dieser, wenn der englische Silberpreis 56, der Wechselcours 38 ist?

$$49 \cdot \frac{39}{38} = 50{,}29.$$

79.

Von zwei verglichenen Zahlen verhält sich die kleinere Zahl zum Unterschied der Zahlen wie 100 *zu den Procenten auf* 100. *Die gröſsere Zahl verhält sich zum Unterschied wie* 100 *zu den Procenten in* 100.

Die gröſsere Zahl sey a, die kleinere b, ihr Unterschied c, die Procente auf 100 seyen p, die Procente in 100 seyen r, so ist

$$b : c = 100 : p,$$
$$a : c = 100 : r.$$

Hieraus folgt (60) $a : b = p : r$

(68) $b : a = 100 : 100 + p$

(69) $a : b = 100 : 100 - r$

(70) $pr = 100\,p - 100\,r$

Durch diese Proportionen lassen sich alle hieher gehörigen Aufgaben auflösen.

Beispiele. Die berliner Elle hält russische Zoll 26,259, deren die Arschin 28 hat. Wie viel Procent auf und in 100?

$$26{,}259 : 1{,}741 = 100 : p, \quad p = 6{,}630$$
$$28 : 1{,}741 = 100 : r, \quad r = 6{,}218.$$

Die berliner Elle ist kürzer als die Arschin um 6,630 Procent auf 100, wie viel machen 1500 Arschinen in berliner Ellen?

$$1500 + 15 \cdot 6{,}630 = 1599{,}45.$$

Die berliner Elle ist kürzer als die Arschin um 6,218 Procent in 100, wie viel machen 1500 berliner Ellen in Arschin?

$$1500 - 15 \cdot 6{,}218 = 1406{,}73.$$

Der londoner Cours sey Pence Sterling $38^{21}/_{64}$ pr. RS. 1 Wie viel Procent auf und in 100 gegen den Cours 40?

$$38^{21}/_{64} : 1^{43}/_{64} = 100 : p, \quad p = 4{,}362$$
$$40 : 1^{43}/_{64} = 100 : r, \quad r = 4{,}1796.$$

Der londoner Cours sey niedriger als der Cours 40 um 4,362 Procent auf 100, wie viel machen Livres Sterling 1500 in Silberrubeln?

$$\begin{array}{rcl} \text{RS. } x & = & 1500 \text{ L. St.} \\ 1 & = & 240 \text{ P. St.} \\ 40 & = & 1 \text{ RS.} \\ 100 & = & 104{,}362 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1500 \\ 6 \\ \hline 9000 \\ 392{,}58 \\ \hline \text{RS. } 9392{,}58 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43{,}62 \\ 9 \\ \hline 392{,}58 \end{array}$$

Der londoner Cours sey niedriger als der Cours 40 um 4,1796 Procent in 100, wie viel machen RS. 1500 in Livres Sterling?

$$\begin{array}{rcl} \text{Livres St. } x & = & 1500 \text{ RS.} \\ 1 & = & 40 \\ 100 & = & 100 - 4{,}1796 \\ 240 & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6)\,1500 \\ \hline 250 \\ -\ 10{,}45 \\ \hline \text{L. St. } 239{,}55 \\ \text{L. St. } 239.11\ d. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{,}1796 \\ 2{,}50 \\ \hline 83592 \\ 20898 \\ \hline 10{,}45 \end{array}$$

80.

Verzeichniſs der in der Arithmetik bewiesenen Sätze, welche allgemein, d. h. für jeden ganzen Zahlwerth und jeden Bruchwerth der Zahl, gültig sind.

3. $a + b = b + a$
5. Wenn $a - b = c$, so ist $a = b + c$
6. $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$
7. $ab = ba$
8. $abc = acb$
9. $abc = acb = cab = cba = bca = bac$
24. $\frac{b}{c} \cdot a = \frac{ba}{c} = \frac{ab}{c}$
25. $\frac{b}{c} : a = \frac{b}{ca} = \frac{b}{ac}$
26. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

27. $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$

28. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$

31. $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a\,b}{c} = \frac{b\,a}{c}$

32. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$

34. $a : \frac{b}{c} = \frac{a\,c}{b}$

35. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,c}$

49. $(a + b)\,(a + b) = a\,a + 2\,a\,b + b\,b$

51. $(a + b)\,(a + b)\,(a + b) = aaa + 3aab + 3abb + bbb$

63. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{f}{g}$, $\frac{c}{d} = \frac{f}{g}$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

64. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $a\,d = b\,c$

65. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

68. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{a + c}{b + d}$

69. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{a - c}{b - d}$

70. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d}$

und $\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d}$.

Anhang, enthaltend Uebungsbeispiele für die Ausziehung der Wurzeln.

Quadratwurzeln.

Grundzahl	*Wurzel*	*Grundzahl*	*Wurzel*
2	1,4142135	79	8,8881944
3	1,7320508	83	9,1104335
5	2,2360679	89	9,4339811
6	2,4494897	91	9,5393920
7	2,6457513	96	9,7979589
8	2,8284271	99	9,9498743
10	3,1622776	0,087	0,2949576
11	3,3166247	$\frac{5}{12}$	0,6454972
13	3,6055512	$\frac{3}{7}$	0,6546536
14	3,7416573	0,793	0,8905054
15	3,8729833	$1\frac{1}{3}$	1,1547005
17	4,1231056	$1\frac{1}{2}$	1,2247448
19	4,3588989	1,6	1,2649110
21	4,5825756	1,8	1,3416407
30	5,4772255	2,5	1,5811388
34	5,8309518	3,5	1,8708286
35	5,9160797	4,5	2,1213203
37	6,0827625	5,5	2,3452078
41	6,4031242	$8\frac{3}{7}$	2,9032002
43	6,5574385	28,4	5,3291650
47	6,8556546	$30\frac{1}{2}$	5,5226805
53	7,2801098	$37\frac{3}{4}$	6,1441028
59	7,6811457	299,7	17,3118456
61	7,8102496	$351\frac{5}{6}$	18,7572208
67	8,1853527	$354\frac{1}{3}$	18,8237438
70	8,3666002	365,047	19,1062031
71	8,4261497	$573\frac{1}{3}$	23,9443799
73	8,5440037		

$$aa + bb = cc$$

a	b	c
35	46	57,8013
$41\frac{2}{3}$	$57\frac{1}{4}$	70,8072
$15\frac{3}{4}$	$82\frac{1}{2}$	83,9899
$66\frac{1}{7}$	$79\frac{1}{8}$	103,1292

Fallhöhe in der ersten Secunde im leeren Raum, in Mitau 16,1025 engl. oder russ. Fuſs $= g$

	Wurzel		*Wurzel*
$\frac{1000}{g}$	7,8804922	$\frac{2000}{g}$ . .	11,1446990
$\frac{3000}{g}$	13,6494129	$2000 . g$	179,4575158

Deſsätine □Saschen	2400 . .	48,9897948
— □Fuſs	117600	342,9285639
kurl. Tonnstelle	56000	236,6431913
Warschauer Morgen	60265	245,4893073
ehstländ. Tonnstelle	67500	259,8076211
preuſs. Morgen	27485	165,7860066

π	3,141592653589793	1,77245385
$\frac{1}{\pi}$	0,318309886183790	0,56418958
$2 \pi \pi$	19,739208802178717	4,44288293
$\frac{1}{2} \pi$	1,570796326794896	1,25331413
$\frac{2}{\pi}$	0,636619772367581	0,79788456

Cubikwurzeln.

Grundzahl	*Wurzel*	*Grundzahl*	*Wurzel*
2	1,2599210	25	2,9240177
3	1,4422495	30	3,1072325
4	1,5874010	35	3,2710663
5	1,7099759	40	3,4199518
6	1,8171205	45	3,5568933
7	1,9129311	50	3,6840314
9	2,0800838	55	3,8029524
10	2,1544346	60	3,9148676
11	2,2239800	65	4,0207257
12	2,2894284	70	4,1212852
13	2,3513346	75	4,2171633
14	2,4101422	80	4,3088693
15	2,4662120	85	4,3968296
16	2,5198420	90	4,4814047
17	2,5712815	95	4,5629026
18	2,6207413	100	4,6415888
19	2,6684016	0,38	0,7243156
20	2,7144176	$\frac{3}{7}$	0,7539474

Grundzahl	*Wurzel*	*Grundzahl*	*Wurzel*
0,79	0,9244335	$15\frac{7}{8}$	2,5132628
$1\frac{1}{4}$	1,0772173	$30\frac{4}{1}$	3,1158398
$1\frac{1}{3}$	1,1006424	$97\frac{1}{6}$	4,5973309
$1\frac{1}{2}$	1,1447142	365,047	7,1468762
1, 6	1,1696070	$712\frac{3}{8}$	8,9310575
$2\frac{1}{2}$	1,3572088	$\frac{7}{1331}$	0,1739028
$3\frac{1}{2}$	1,5182944	$\frac{1}{10000}$	0,0464158
$7\frac{11}{13}$	1,9870964	$\frac{800}{123}$	1,8666445
$8\frac{3}{7}$	2,0350948	$\frac{1}{0,000624}$	11,7023155

Siehe Rechenb. II. 253.

			Grundzahl	*Wurzel*
Eine Dolä Wasser Cubikzoll			$a = \frac{1}{368,361}$	0,1395003
Ein Pfund	—	—	9216 a	. . 2,9247557
Ein Stoof		—	27648 a	. . 4,2182277
Ein Garnez		—	73728 a	. . 5,8495115
Ein Wedro		—	276480 a	. . 9,0878962
Ein Tschetwerik		—	589824 a	11,6990231
Ein Tschetwert		—	4718592 a	23,3980462
Last von 16 Tschetw. Cbfufs			$43690\frac{2}{3}$ a	4,9132818
Rigische Roggenlast		—	$109\frac{169}{384}$	4,7832766
Revalsche Tonne		Cubikzoll	7757,7	19,7960098
Rigisches Loof		—	4202,5	16,1374870
Rigisches Oxhoft		—	$14008\frac{1}{3}$	24,1062037

π	3,141592653589793 . .	1,46459188
$\pi\pi$	9,869604401089358	2,145029397
$\frac{6}{\pi}$	1,909859317102744	1,24070098
$6\pi\pi$	59,217626406536151	3,89777708
36π	113,097335529232556	4,83597586.