ТАРТУСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Институт чистой математики
Кафедра геометрии и топологии

ОЛЬГА БОГДАНОВА

Симметрии векторного поля на плоскости и их применение при решении обыкновенных дифференциальных уравнений

Магистерская работа

Руководитель : проф. М.Рахула

Тарту 2004

Содержание

Введение

Векторное поле X на плоскости определяет поток. В потоке точки перемещаются по своим траекториям и функции подвергаются изменениям. Вообще говоря, любое тензорное поле (векторное поле, дифференциальная форма и пр.) увлекается потоком и это увлечение может быть описано производными Ли этого поля относительно X и соответствующим рядом Маклорена.

Симметрией векторного поля X называется преобразование a, которое сохраняет поле X. При этом траектории поля X преобразуются в траектории этого же поля (с изменением параметризации), а инварианты поля X преобразуются в инварианты этого поля.

Векторное поле P, поток которого представляет собой 1-параметрическую группу симметрий векторного поля X, называется инфинитезимальной симметрией поля X. Наличие симметрий и инфинитезимальных симметрий особенно важно в теории дифференциальных уравнений.

С помощью симметрий находят новые решения и первые интегралы или размножают уже известные. Переход к инвариантным координатам поля P позволяет свести данное уравнение к простейшему виду. В этом заключается смысл различных подстановок при интегрировании дифференциальных уравнений.

В данной работе, кроме теоретического (реферативного) материала, разработан ряд примеров. В них показывается, какую роль играют инфинитезимальные симметрии при решении обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка, почему те или другие подстановки оказываются целесообразными и как в результате этих подстановок упрощается решение уравнений.

Всего разобрано 9 примеров. В Примере 1 рассматривается векторное поле X на плоскости uv с коомпонентами $(1, 2u)$. Показано, что в координатах (s, I), где $s = u$, $I = v - u^2$, поле X приобретает вид $\frac{\partial}{\partial s}$. Показано также, как в координатах (u, v) и (s, I) увлекается потоком поля X функция $f = uv$.

В Примерах 2-5 рассматриваются обыкновенные дифференциалдные уравнения 1-го порядка из книги [8]:

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy}, \quad yy' = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}y,$$
$$y' + py = q, \quad y' = \frac{y}{x+x^2+y^2}.$$

Хотя решения этиих уравнений известны, нашей целью является не их нахождение. Целью является показать, какую роль при этом играет векторное поле P, допускаемое данным уравнением. С уравнением ассоциируется векторное поле X и 1-форма ω, а поле P является их инфинитезимальной симметрией:

$$L_P X \parallel X, \quad L_P\omega \parallel \omega.$$

В Примере 6 показано, насколько проще нахождение инварианта поля X в координатах (ρ, φ), где ρ – канонический параметр поля P и φ – инвариант поля P. В Примере 7 рассматривается векторное поле X в пространстве xyz с компонентами (y, z, x). Описан поток этого поля. Пример служит иллюстрацией линейного векторного поля, определяемого матрицей C со свойством $C^3 = E$.
В Примерах 8 и 9 динамическая система $U' = CU$ (линейное векторное поле X) соотносится к базису из собственных векторов матрицы C. В этом базисе поток поля X описывается значительно проще.

Примечание

Во избежание недоумений, которые могут возникнуть при чтении работы, мы обусловимся о следующем. Все наши действия, касающиеся дифференцирования функций и (тензорных) полей, существования решений дифференциальных уравнений, сходимости рядов и проблемы локально-глобального, считаются допустимыми.

1. Когда мы дифференцируем (на плоскости, в пространстве) некоторую функцию f относительно векторного поля X, считаем, что функция f дифференцируема. При этом дифференцируемость функции не должна пониматься в смысле существования непрерывных частных производных. Функция f должна быть "гладкой" на тракториях поля X. Это имеется в виду и при дифференцировании тензорных полей относительно X, т.е. при вычислении производных Ли.

2. Когда мы говорим о решениях системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u' &= x(u,v) \\ v' &= y(u,v) \end{aligned},$$

то, естественно, предполагаем, что функции x и y в правых частях удовлетворяют условиям теоремы существования, см. [3], стр. 266. Из теории дифференциальных уравнений известно (см. там же), что общее решение данной системы определяет семейство траекторий и вдоль траектории – движение точек, короче, определяется поток. Говоря о потоке векторного поля, имеется в виду, что на дифференцируемом многообразии – это 1-параметрическая (псевдо-)группа локальных преобразований. Для нас наглядно выражаясь, векторное поле это "стоп-кадр" движения.

3. Мы не входим в термины комплекса де Рама, где замкнутые и точные дифференциальные формы называются коциклами и кограницами, см. [6], т.III, стр. 203. Однако, мы знаем, что на плоскости xy 1-форма $\omega = P\ dx + Q\ dy$ при условии

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

замкнута, т.е. ее внешний дифференциал $d\omega$ равен нулю, и что замкнутая форма (при определенных условиях на коэффициенты P и Q) локально точна. В некоторой окрестности форма ω тогда совпадает с дифференциалом функции I – инварианта векторного поля X: $\omega = dI$. Для восстановления функции I пользуются известным приемом, см. Следствие из формулы Грина [9], стр. 348. В таком случае пишем $I = \int \omega$ и считаем эту запись эквивалентной записи $\omega = dI$.

4. Когда тензорное поле f увлекатся в потоке $a_t = \exp tX$, мы пользуемся разложением Маклорена-Ли
$$f_t = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} \frac{t^k}{k!},$$
где $f^{(k)}$ – производные Ли поля f относительно векторного поля X. При этом предполагается, что коэффициенты $f^{(k)}$ реально вычисляются, т.е. поле f дифференцируемо клсса C^∞, и что степенной ряд в каждой фиксированной точке некоторой окрестности на плоскости (в пространстве) сходится. Анализ соответствующих ситуаций, которые при этом возникают, целью нашей работы не является.

5. Работая в координатах, что важно для конкретных приложений, мы понимаем, что все это может происходить на локальной карте общего дифференцируемого многообразия. Проблема глобального не затрагивается, хотя на каждом шагу она неявно присутствует. Сознаем, что тензорные методы имеют характер более чем локальный и что инвариантное исчисление Ли-Картана относиться по сути к глобальному анализу.

6. Термины и понятия, касающиеся тензоров и производных Ли, можно найти в доступных пособиях. К сожалению, "трехтомник Фихтенгольца" по исчислению Ли-Картана отсутствует. Поэтому ссылаемся на 5-томную "Математическую энциклопедию" и ее 6-томное издание в переводе на английский язык, см. [6] и [11].

1 Векторное поле на плоскости

В главе I показывается, как в потоке данного векторного поля X увлекаются различные тензорные поля, в том числе векторные поля и дифференциальные формы. Увлечение тензорных полей изучается с помощью производных Ли. Вырабатывается техника дифференцирования Ли (основные правила, деривационные формулы). Показано, как вычислить инварианты поля X на плоскости и как этому способствует наличие инфинитезимальной симметрии.

Сведения о тензорах, тензорных полях и операциях над ними, о дифференцируемых многообразиях и дифференцируемых отображениях, расслоениях и касательном функторе T можно найти в следующих пособиях [2], [4], [5], [7].

1.1 Поток векторного поля X

На плоскости uv задано векторное поле в виде дифференциального оператора

$$X = x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}. \tag{1}$$

Его компоненты (x, y) являются функциями[1] координат (u, v).

Обусловимся обозначать производную функции f относительно векторного поля X штрихом: $f' = Xf$, а частные производные по координатам – нижними индексами:

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Следующая запись означает, что к функции f применен оператор (1):

$$f' = f_1 x + f_2 y. \tag{2}$$

Производным координатных функций соответствуют компоненты x и y.

[1]Дифференцируемость функций предполагается. Предполагаем также отсутствие особых точек, где обе компоненты x и y одновременно обращаются в нуль.

В результате образуется система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u' = x(u,v) \\ v' = y(u,v) \end{cases}. \tag{3}$$

Решение системы (3) определяет 1-параметрическую группу преобразований плоскости или, как говорят, поток векторного поля X

$$a_t : (u,v) \mapsto (u_t, v_t). \tag{4}$$

В потоке a_t точки плоскости движутся по своим траекториям, и функции увлекаются по закону композиции:

$$f_t = f \circ a_t. \tag{5}$$

Параметр t трактуется как время. При этом

$$(f \circ a_t)'_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f_t - f) = f'.$$

1.2 Разложение увлекаемой функции в степенной ряд

Функция f_t разлагается в ряд Маклорена по степеням t:

$$f_t = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} \frac{t^k}{k!}. \tag{6}$$

Коэффициенты $f^{(k)}, k = 1, 2, ...$ – производные функции f, вычисляемые по правилу (2).

Если $f^{(n)} \neq 0$ и $f^{(k)} = 0$ для $\forall k > n$, тогда будем говорить, что функция f ведет себя в потоке a_t как полином степени n, например, при $n = 1$ – как линейная функция: $f_t = f + f't$, при $n = 2$ – как квадратичная функция: $f_t = f + f't + f''\frac{t^2}{2}$, и т.д. При $n = 0$ функция f постоянна на траекториях поля X, $f_t = f$.

Может представиться, что производные $f^{(k)}$ между собой связаны. Тогда имеем обыкновенное дифференциальное уравнение и функция f_t определяется как решение этого уравнения. Например, когда $f'' + f = 0$, наблюдается пульсирующее скалярное поле $f_t = f\cos t + f'\sin t$.

Функция, постоянная на траекториях векторного поля X, называется *инвариантом* этого поля. Функция s, производная которой относительно поля X равна единице: $s' = 1$ (первообразная единицы), называется *каноническим параметром* поля X.

Канонический параметр определяется с точностью до инварианта. Действительно, если s_1 и s_2 – два канонических параметра, то $s_1 - s_2 = I$ – инвариант, $I' = 0$, и $s_1 = s_2 + I$. Наоборот, если s_2 – канонический параметр и I – инвариант, то $s_1 = s_2 + I$ – канонический параметр.

Предложение 1. Если s – канонический параметр и I – инвариант векторного поля X, то в системе координат (s, I) поле X становится оператором $\frac{\partial}{\partial s}$.

В системе (s, I) поток поля X

$$a_t : (s, I) \mapsto (s_t, I_t)$$

описывается системой

$$\begin{cases} s_t = s + t \\ I_t = I \end{cases}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразование координат $(u, v) \mapsto (s, I)$,

$$\begin{cases} s = s(u, v) \\ I = I(u, v) \end{cases},$$

влечет за собой изменение натурального базиса, репера и корепера:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial s} & \dfrac{\partial}{\partial I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ I_1 & I_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} ds \\ dI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ I_1 & I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

Якобиева матрица определяет переход от корепера (du, dv) к кореперу (ds, dI), см. правую формулу, и та же матрица определяет переход от репера $\left(\frac{\partial}{\partial s}\ \frac{\partial}{\partial I}\right)$ к реперу $\left(\frac{\partial}{\partial u}\ \frac{\partial}{\partial v}\right)$, см. левую формулу. Обе формулы представлены в матричной записи.

Воспользуемся левой формулой:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ I_1 & I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $s_1 x + s_2 y = s' = 1, \quad I_1 x + I_2 y = I' = 0$, выявляется: $X = \frac{\partial}{\partial s}$. Поток a_t определяется в координатах (s, I) системой вида (3) и ее решением:

$$\begin{cases} s' = 1 \\ I' = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_t = s + t \\ I_t = I \end{cases}.$$

$\sqcap$

Предостережение. Запись $X = \frac{\partial}{\partial s}$ не совсем корректна. Правильнее было бы писать $X = T\varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial s}$, имея в виду преобразование координат

$$\varphi \quad : \quad (u, v) \quad \mapsto \quad (s, I).$$

Уточним это в следующем примере.

Пример 1. На плоскости uv дано векторное поле

$$X = \frac{\partial}{\partial u} + 2u\frac{\partial}{\partial v}.$$

Определяем поток $a_t \ : \ (u, v) \quad \mapsto \quad (u_t, v_t)$,

$$\begin{cases} u' = 1 \\ v' = 2u \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_t = u + t \\ v_t = v + 2ut + t^2 \end{cases},$$

а также канонический параметр $s = u$ и инвариант $I = v - u^2$. При замене координат (u, v) координатами (s, I),

$$\begin{cases} s \circ \varphi = u \\ I \circ \varphi = v - u^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u \circ \varphi^{-1} = s \\ v \circ \varphi^{-1} = I + s^2 \end{cases},$$

происходит преобразование репера и корепера:

$$T\varphi^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} ds \\ dI \end{pmatrix} \circ T\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2u & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

Во второй формуле имеем якобиеву матрицу преобразования φ, в первой формуле – обратную ей матрицу. При этом $T\varphi^{-1}\ \frac{\partial}{\partial s} = X, \quad T\varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial v}$ и поток a_t упростится:

$$a_t \ : \ (s, I) \ \rightarrow \ (s_t, I_t), \qquad s_t = s + t, \qquad I_t = I.$$

Пусть дана функция $f = uv$. Ее увлечение потоком a_t в координатах (u, v) описывается формулой

$$f_t = u_t v_t = (u + t) \cdot (v + 2ut + t^2),$$

и в координатах (s, I) – формулой

$$(f \circ \varphi^{-1})_t = (I_t + s_t^2)s_t = [I + (s + t)^2] \cdot (s + t).$$

В обоих случаях функция f увлекается как полином третьей степени относительно параметра t. В первом случае коэффициентами в разложении (6) служат функция uv и ее производные $X(uv) = v + 2u^2, \quad X^2(uv) = 6u, \quad X^3(uv) = 6$, во втором случае – функция $(I+s^2)s$ и ее производные по параметру s: $I+3s^2, \ \ 6s, \ \ 6$. Очевидно, эти коэффициенты связаны подстановкой φ. Важно, однако, заметить, как они увлекаются потоком a_t. Во втором случае происходит простой сдвиг аргумента $s \rightarrow s + t$, в первом случае это не так.

1.3 Производные Ли

Потоком a_t увлекаются не только функции, см. (4) и (5), но и тензорные поля[2], в первую очередь векторные поля и 1-формы.
Увлечение векторного поля $Y \mapsto Y_t$ определяется формулой

$$Y_t f_t = (Yf)_t, \tag{7}$$

или, что то же, формулой

$$Y_t(f \circ a_t) = (Yf) \circ a_t, \tag{8}$$

[2]Что касается увлечения потоком a_t векторного поля Y, то при любом преобразовании a движение точки $M \ \rightarrow \ b_\tau(M)$ в потоке b_τ поля Y преобразуется в движение точки $b(M) \ \rightarrow \ ab_\tau a^{-1}(a(M))$, поток b_τ поля Y преобразуется в поток $ab_\tau a^{-1}$ поля TaY. В потоке a_t поток b_τ подвергается изменению $a_t b_\tau a_{-t}$ и векторное поле Y увлекается по закону $Y_t = Ta_t Y$.

где f – произвольная функция.

Увлечение 1-формы $\Phi \mapsto \Phi_t$ определяется формулой

$$\Phi_t(Y_t) = (\Phi(Y))_t, \tag{9}$$

где Y – произвольное векторное поле.

Векторное поле Y_t и 1-форма Φ_t определяются формулами (7) и (9) однозначно.

Примечание. Пусть дано дифференцируемое отображение одного дифференцируемого многообразия в другое

$$\varphi : \widetilde{V} \longrightarrow V. \tag{10}$$

Будем называть *φ-связанными* заданные на многообразиях $\widetilde{V}$ и V соответственно – функции $\widetilde{f}$ и f, если имеет место равенство

$$\widetilde{f} = f \circ \varphi; \tag{11}$$

– векторные поля $\widetilde{Y}$ и Y, если для любых φ-связанных функций $\widetilde{f}$ и f φ-связаны производные $\widetilde{Y}\widetilde{f}$ и Yf,

$$\widetilde{Y}\widetilde{f} = (Yf) \circ \varphi; \tag{12}$$

– 1-формы $\widetilde{\Phi}$ и Φ, если для любых φ-связанных векторных полей $\widetilde{Y}$ и Y φ-связаны функции $\widetilde{\Phi}(\widetilde{Y})$ и $\Phi(Y)$,

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{Y}) = (\Phi(Y)) \circ \varphi. \tag{13}$$

Тогда, исходя из определений (11), (12) и (13), функция f_t, см. (5), определяется как функция, a_t-связанная с функцией f; векторное поле Y_t, см. (7), определяется как векторное поле, a_t-связанное с векторным полем Y, а 1-форма Φ_t, см. (9), – как 1-форма, a_t-связанная с 1-формой Φ.

Вообще, два (p, q)-тензорных поля $\widetilde{S}$ и S на многообразиях $\widetilde{V}$ и V соответственно будем называть при отображении (10) φ-связанными, если для любых соответственно φ-связанных 1-форм $\widetilde{\Phi}^1, ..., \widetilde{\Phi}^p$ и $\Phi^1, ..., \Phi^p$ и векторных полей

$\widetilde{Y}_1, ..., \widetilde{Y}_q$ и $Y_1, ..., Y_q$ имеет место равенство[3]:

$$\widetilde{S}(\widetilde{\Phi}^1, ..., \widetilde{\Phi}^p; \widetilde{Y}_1, ..., \widetilde{Y}_q) = (S(\Phi^1, ..., \Phi^p; Y_1, ..., Y_q)) \circ \varphi. \tag{14}$$

Увлечение тензорного поля S потоком a_t описывается тензорным полем S_t, которое a_t-связано с полем S.

Операции с φ-связанными тензорными полями на многообразиях $\widetilde{V}$ и V, такие как: свертывание, симметрирование, альтернирование, тензорное произведение и линейные комбинации однотипных тензорных полей, а также скобочные операции векторных полей и внешнее дифференцирование дифференциальных форм, – приводят в результате к φ-связанным тензорным полям. Сказанное относится и к a_t-связанным тензорным полям. К этим свойствам мы прибегаем при выводе основных правил дифференцирования Ли.

Производная Ли тензорного поля S в потоке векторного поля X определяется формулой[4]:

$$S' = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(S_t - S). \tag{15}$$

Изложим вкратце основные правила дифференцирования по Ли.

Предложение 2. Линейные комбинации[5] векторных полей и 1-форм дифференцируются по обычным правилам:

$$Y = R_i y^i \quad \Rightarrow \quad Y' = R_i(Xy^i) + (R_i)'y^i, \tag{16}$$

$$\Phi = \varphi_i \theta^i \quad \Rightarrow \quad \Phi' = (X\varphi_i)\theta^i + \varphi_i(\theta^i)'. \tag{17}$$

Производная Ли векторного поля Y равна скобкам двух полей X и Y:

$$Y' = [XY]. \tag{18}$$

---

[3]Как известно, тензор типа (p, q) является полилинейной функцией $(p+q)$ аргументов, p ковекторов и q векторов.

[4]Производные Ли относительно векторного поля X обозначаются штрихом $S' = L_X S$. Существование производных, т.е. дифференцируемость тензорных полей, предполагается.

[5]В выражениях вида $R_i y^i$ имеется в виду суммирование по повторяющемуся индексу i (правило А. Энштейна); при этом суммирование исключает дифференцирование.

Производная Ли 1-формы Φ определяется формулой

$$\Phi'(Y) = (\Phi(Y))' - \Phi(Y') \tag{19}$$

или, если освободиться от аргумента, формулой

$$\Phi' = d\Phi(X, .) + d(\Phi(X)). \tag{20}$$

Оператор дифференциала d перестановочен с производной Ли:

$$(df)' = df', \tag{21}$$

$$(d\Phi)' = d\Phi'. \tag{22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линейные комбинации φ-связанных векторных полей и 1-форм на многообразиях $\widetilde{V}$ и V с соответственно φ-связанными коэффициентами φ-связаны. Это следует из определений (12) и (13). Поэтому

$$(R_i y^i)_t = (R_i)_t (y_i)_t, \quad (\varphi_i \theta^i)_t = (\varphi_i)_t (\theta_i)_t.$$

В результате дифференцирования обеих частей каждого равенства по определению (15) получаем формулы (16) и (17).

Далее, из формулы (12) имеем

$$Y_t f_t = (Yf)_t$$

и в результате дифференцирования обеих частей этого равенства получаем

$$Y'f + YXf = XYf,$$

или же

$$Y'f = (XY - YX)f = [XY]f.$$

Так как f – произвольная функция, выводим отсюда формулу (18).

Таким же образом из (13) имеем

$$\Phi_t(Y_t) = (\Phi(Y))_t,$$

откуда в результате дифференцирования получаем формулу (19). Внешний дифференциал 1-формы Φ определяется как 2-форма формулой

$$d\Phi(X, Y) = X(\Phi(Y)) - Y(\Phi(X)) - \Phi([XY]).$$

Отсюда, учитывая (19) и опуская аргумент Y, получаем формулу (20). Из (20), когда $\Phi = df$ и $d\Phi = 0$, получаем формулу (21). Наконец, чтобы убедиться в равенстве (22), дифференцируем относительно векторного поля X обе части равенства

$$d\Phi(Y,Z) = Y(\Phi(Z)) - Z(\Phi(Y)) - \Phi([YZ]),$$

учитывая при этом тождество Якоби $[YZ]' = [Y'Z] + [YZ']$. После упрощений получаем

$$(d\Phi)'(Y,Z) = d\Phi'(Y,Z),$$

что, в виду произвольности аргументов Y, Z , дает (22). $\sqcap$

1.4 Деривационные формулы

В пространстве R^n имеем координаты u^i и натуральный базис. Операторы частного дифференцирования $R_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ образуют в каждой точке репер, а дифференциалы координатных функций $\theta^i = du^i$ – дуальный корепер $(i = 1, 2, ..., n)$.

Тензорное поле типа (p, q) определяется в натуральном базисе формулой

$$S = R_{i_1} \otimes ... \otimes R_{i_p} s^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} \theta^{j_1} \otimes ... \otimes \theta^{j_q}, \tag{23}$$

с коэффициентами

$$s^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = S(\theta^{i_1}, ..., \theta^{i_p}; R_{j_1}, ...R_{j_q}) \tag{24}$$

Положим, что тензорное поле (23) увлекается потоком векторного поля $X = R_i x^i$. Чтобы вычислить производную Ли $S' = L_X S$, нужно определить, как изменяется базис (R, Θ) в потоке поля X и каковы будут производные Ли для репера и для корепера. Пользуемся матричной (безиндексной) записью формул[6].

Предложение 3. Производные Ли для репера R и дуального корепера Θ определяются (*деривационными*) формулами

$$R' = -RC, \qquad \Theta' = C\Theta. \tag{25}$$

[6]В записях вида (25) символ R означает матрицу-строку из элементов R_i, а символ Θ – матрицу-столбец из элементов θ^i. В записи $X = Rx$ имеем матрицу-столбец x из компонент x^i, а в записи $\Phi = \varphi\Theta$ – матрицу-строку из компонент φ_i, $i = 1, ..., n$.

В натуральном базисе матрица C состоит из частных производных компонент векторного поля X

$$x^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial u^j.} \tag{26}$$

В неголономном базисе, с объектом неголономности c^i_{jk}:

$$[R_i R_j] = R_k c^i_{jk}, \quad d\theta^i = -\frac{1}{2} c^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k, \tag{27}$$

матрица C образована из элементов

$$C^i_j = R_j x^i + c^i_{jk} x^k. \tag{28}$$

Доказательство. Во-первых, каков бы ни был базис (R, Θ), голономный или неголономный, в обеих формулах (25) имеем одну и ту же матрицу C. Действительно, если предположить, что матрицы в этих формулах разные:

$$R' = -R\widetilde{C}, \quad \Theta' = C\Theta,$$

то учитываем, что $\Theta(R) = E$ – единичная матрица (свойство дуальности репера и корепера), и дифференцируем это равенство слева и справа: $\Theta'(R) + \Theta(R') = 0$. Отсюда следует $C - \widetilde{C} = 0$ и $\widetilde{C} = C$.

Неголономный базис (R, Θ) обладает объектом неголономности, отличным от нуля, и имеют место формулы (27). Покажем, что из формулы слева $[R_i R_j] = R_k c^i_{jk}$ следует правая формула:

$$d\theta^i(R_j, R_k) = R_j(\theta^i(R_k)) - R_k(\theta^i(R_j)) - \theta^i([R_j R_k]) =$$

$$= -\theta^i([R_j R_k]) = -c^i_{jk} = -\frac{1}{2} c^i_{pq} \theta^p \wedge \theta^q(R_j, R_k),$$

так как (пользуемся символами Кроникера)

$$\theta^p \wedge \theta^q(R_j, R_k) = \theta^p(R_j)\theta^q(R_k) - \theta^p(R_k)\theta^q(R_j) = \delta^p_j \delta^q_k - \delta^p_k \delta^q_j,$$

и

$$c^i_{pq} \theta^p \wedge \theta^q(R_j, R_k) = c^i_{pq}(\delta^p_j \delta^q_k - \delta^p_k \delta^q_j) = c^i_{jk} - c^i_{kj} = 2c^i_{jk}.$$

С учетом объекта неголономности производные Ли R' вычисляются следующим образом:

$$(R_i)' = [XR_i] = -[R_i, R_j x^j] = -[R_i R_k]x^k - R_j(R_i x^j) =$$

$$= -R_j(c^j_{ik}x^k + R_j x^j).$$

Отсюда имеем формулу (28) для матрицы C. Если базис голономный (натуральный): $c^i_{jk} = 0$, $\theta^i = du^i$, $R_j = \frac{\partial}{\partial u^j}$, то матрица (28) обращается в якобиеву матрицу для компонент x^i, см. (26).

Кстати, формула $\Theta' = C\Theta$ для натурального корепера $\theta^i = du^i$ выводится и с использованием свойства (21):

$$(\theta^i)' = (du^i)' = d(u^i)' = dx^i = x^i_j du^j = x^i_j \theta^j.$$

$\sqcap$

С помощью деривационных формул (25) легко вычисляется производная Ли S' тензорного поля (23). Компоненты тензорного поля S' имеют вид:

$$S'(\theta^{i_1}, ..., \theta^{i_p}; R_{j_1}, ...R_{j_q}) =$$

$$= Xs^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} - C^{i_1}_k s^{k...i_p}_{j_1...j_q} - ... - C^{i_p}_k s^{i_1...k}_{j_1...j_q} + s^{i_1...i_p}_{k...j_q} C^k_{j_1} + ... + s^{i_1...i_p}_{j_1...k} C^k_{j_q}. \qquad (29)$$

Это выясняется путем дифференцирования либо из равенства (23), либо из равенства (24).

В частности, формулы (16) и (17) записываются теперь в матричной записи следующим образом:

$$Y = Ry \quad \Rightarrow \quad Y' = R(y' - Cy), \qquad (30)$$

$$\Phi = \varphi\Theta \quad \Rightarrow \quad \Phi' = (\varphi' + \varphi C)\Theta. \qquad (31)$$

Примечание. На плоскости uv, где векторное поле X задано формулой (1), деривационные формулы для натурального базиса имеют вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}' = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

является якобиевой для компонент x и y. Ее след равен дивергенции векторного поля X:

$$\mathrm{tr}\ C = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} = \mathrm{div}\ \ X. \tag{34}$$

1.5 Форма ω и интегрирующий множитель

С векторным полем $X = x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}$ на плоскости uv ассоциируется 1-форма

$$\omega = -y\ du + x\ dv. \tag{35}$$

Предложение 4. Если 1-форма ω точна, то она является дифференциалом инварианта векторного поля X:

$$\omega = dI, \qquad I = \int \omega. \tag{36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, поле X аннулирует 1-форму ω

$$\omega(X) = 0.$$

Поэтому, если существует функция I, дифференциалом которой 1-форма ω является: $\omega = dI$, то

$$\omega(X) = dI(X) = XI = I' = 0$$

т.е. I – инвариант поля X. Инвариант вычисляется путем интегрирования: $I = \int \omega$. ⊓

Предложение 5. Внешний дифференциал 1-формы ω имеет вид

$$d\omega = \mathrm{div}\ X \cdot (du \wedge dv). \tag{37}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$dx = x_1\ du + x_2\ dv, \qquad dy = y_1\ du + y_2\ dv$$

то, дифференцируя внешне (35), имеем

$$d\omega = dx \wedge dv - dy \wedge du = (x_1 + y_2) \cdot (du \wedge dv),$$

где $x_1 + y_2 = \mathrm{div}\ X$, см. (34). $\sqcap$

Следствие. Для соленоидального поля X, когда $\mathrm{div}\ X = 0$, инвариант вычисляется непосредственно формулой (36).

Предложение 6. При умножении 1-формы ω на функцию η ее внешний дифференциал примет вид

$$d(\eta\ \omega) = (\eta' + \eta \mathrm{div}\ X) \cdot (du \wedge dv). \tag{38}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя 1-форму $\eta\ \omega$ внешне, имеем:

$$d(\eta\ \omega) = d\eta \wedge \omega + \eta d\omega,$$

где $d\omega$ имеет вид (37). Расписывая, получаем

$$d(\eta\ \omega) = (\eta_1\ du + \eta_2\ dv) \wedge (-y\ du + x\ dv) + \eta \mathrm{div}\ X \cdot (du \wedge dv) =$$

$$= (\eta_1\ x + \eta_2\ y + \eta \mathrm{div}\ X) \cdot (du \wedge dv),$$

где $\eta_1\ x + \eta_2\ y = \eta'$. $\sqcap$

Следствие. Если 1-форма ω не точна, то ее следует умножить на функцию η, удовлетворяющую условию

$$\eta' + \eta \mathrm{div}\ X = 0. \tag{39}$$

В результате инвариант векторного поля определится интегралом

$$I = \int \eta\, \omega. \tag{40}$$

Функция η, удовлетворяющая условию (39), называется *интегрирующим множителем* 1-формы ω.

Предложение 7. Производная Ли 1-формы ω относительно векторного поля X имеет вид

$$\omega' = (\mathrm{div}\ X) \cdot \omega. \tag{41}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируем выражение (35) относительно X:

$$\omega' = -y'\ du + x'\ dv - y\ dx + x\ dy =$$

$$= -(y_1 x + y_2 y)du + (x_1 x + x_2 y)dv - y(x_1\ du + x_2\ dv) + x(y_1\ du + y_2\ dv) =$$

$$= (x_1 + y_2) \cdot (-y\ du + x\ dv) = (\mathrm{div}\ X) \cdot \omega.$$

⊓

Предложение 8. Пусть векторное поле X и 1-форма ω увлекаются потоком некоторого векторного поля P. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$L_P X \parallel X \quad \Leftrightarrow \quad L_P \omega \parallel \omega. \tag{42}$$

где знак коллинеарности $\parallel$ означает равенство с точностью до коэффициента пропорциональности. При этом траектории поля X составляют систему импримитивности в потоке поля P и любой инвариант поля X преобразуется в инвариант поля X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, из того, что $\omega(X) = 0$, следует

$$L_P\omega(X) + \omega(L_P X) = 0,$$

и поэтому

$$L_P X \parallel X \quad \Leftrightarrow \quad L_P\omega(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_P\omega \parallel \omega,$$

$$L_P\omega \parallel \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega\ (L_P X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_P X \parallel X.$$

Эквивалентность условий (42) доказана. Пусть $L_P X = \alpha X$, где α – коэффициент пропорциональности. Тогда

$$[PX] = \alpha X, \quad [P[PX]] = (P\alpha + \alpha^2)X, \ \ldots$$

т.е. все производные Ли поля X в потоке поля P остаются коллинеарными полю X. Точно также из $L_p\omega = \beta\omega$, где β – коэффициент пропорциональности, следует:

$$L_p\omega = \beta\omega, \quad L_p^2\omega = (P\beta + \beta^2)\omega, \ \ldots$$

т.е. все производные Ли 1-формы ω в потоке поля P остаются коллинеарными 1-форме ω. Пусть b_τ – поток поля P, увлекающий векторное поле $X \to X_\tau$ и 1-форму $\omega \to \omega_\tau$. Как векторное поле X_τ, так и 1-форма ω_τ разлагаются в ряд по примеру (6), где каждый член ряда коллинеарен векторному полю X, или соответственно 1-форме ω. Следовательно, $X_\tau \parallel X$ и $\omega_\tau \parallel \omega$. Поэтому траектории поля X_τ совпадают, с точностью до параметризации (если $\alpha \neq 0$, то с изменением параметра), с траекториями поля X. Инвариант I поля X увлекается потоком b_τ в инвариант I_τ поля X. Действительно,

$$I' = 0 \quad \Rightarrow \quad (PI)' = P'I + PI' = [XP]I = -\alpha I' = 0,$$

все производные инварианта I относительно поля P, входящие в разложение функции I_τ в степенной ряд по степеням τ, см. (6), равны нулю. В целом $(I_\tau)' = 0$ и I_τ – инвариант поля X. $\sqcap$

При выполнении условия $L_P X \parallel X$ говорят, что векторное поле P является *инфинитезимальной симметрией*[7] векторного поля X, или что векторное поле X *допускает* векторное поле P. Такое поле играет особую роль при определении интегрирующего множителя.

[7] Имеется в виду частный случай следующей ситуации. Для распределения Δ, заданного на многообразии V, любая иммерсия $\varphi : W \to V$ является *решением*, если $Im\, T\varphi \subset \Delta$, и любая субмерсия $\psi : V \to W$ является *интегралом*, если $Ker\, T\psi \supset \Delta$. *Симметрией* распределения Δ называется диффеоморфизм $b : V \to V$, такой, что $Tb\Delta = \Delta$. Симметрия преобразует решение φ в решение $b\circ\varphi$ и интеграл ψ в интеграл $\psi\circ b$. Векторное поле P называется *инфинитезимальной симметрией* распределения Δ, когда его поток b_τ представляет собой 1-параметрическую группу симметрий распределения Δ.

Предложение 9. Если P – инфинитезимальная симметрия векторного поля X, то величина $\omega(P)$ является обратной величиной интегрирующего множителя для 1-формы ω. В таком случае инвариант поля X определяется формулой

$$I = \int \frac{\omega}{\omega(P)}. \tag{43}$$

При этом инвариант I является каноническим параметром векторного поля P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой, см. (19),

$$(\omega(P))' = \omega'(P) + \omega(P').$$

Второе слагаемое равно нулю: $P' = [XP] \parallel X, \quad \omega(P') = 0$. Первое слагаемое, ввиду (41), равно $\omega'(P) = (\mathrm{div}\ X) \cdot \omega(P)$. Поэтому для величины $\omega(P)$ имеет место равенство

$$(\omega(P))' = (\mathrm{div}\ X) \cdot \omega(P).$$

Обратная величина

$$\eta = \frac{1}{\omega(P)} \tag{44}$$

удовлетворяет условию (39) и формула (40) совпадает с формулой (43).

Наконец, $dI = \frac{\omega}{\omega(P)}$ и $PI = 1$, т.е. инвариант I векторного поля X является каноническом параметром векторного поля P. $\sqcap$

Примечание. Для системы 1-форм $\theta^i, \quad i = 1, ..., n$, можно говорить об *интегрирующей матрице* (η^i_j), обращающей эти формы в точные дифференциалы:

$$\eta^i_j \theta^j = du^i.$$

Когда в расслоении $\pi : V_1 \to V$ задана структура связности $\Delta_h \oplus \Delta_v$ с вертикальным распределением $\Delta_v = \mathrm{Ker}\ T_\pi$, касательным к слоям, и горизонтальным распределением $\Delta_h \quad (\dim \Delta_h = \dim V = n;\ \dim \Delta_v = r)$, на каждой координатной окрестности $U \subset V_1$, с базисными координатами u^i и слоевыми

u^α $(i = 1, ..., n;\ \alpha = n+1, ..., n+r)$, определяется *адаптированный базис*, см. [10], стр. 22,

$$(X_i\ X_\alpha) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u^j} & \dfrac{\partial}{\partial u^\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_i^j & 0 \\ \Gamma_i^\beta & \delta_\alpha^\beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \omega^i \\ \omega^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -\Gamma_j^\alpha & \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du^j \\ du^\beta \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Векторные поля

$$X_i = \frac{\partial}{\partial u^i} + \Gamma_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{46}$$

образующие базис распределения Δ_h, допускаются распределением Δ_v и проектируются при $T\pi$ на окрестность $\overline{U} = \pi(U) \subset V$ в натуральный репер $\overline{\partial_i} = \frac{\partial}{\partial \overline{u}^i}$, $u^i = \overline{u}^i \circ \pi$. Тогда, каков бы ни был кобазис θ^i вертикального распеределения Δ_v, матрица $\theta^i(X_j)$ является обратной матрицей интегрирующей матрицы для системы форм θ^i. Действительно, при переходе к натуральному кобазису $\theta^i = \mu_j^i du^j$ появляется матрица $\mu_j^i = \theta^i(X_j)$. В безиндексной записи:

$$\mu = \Theta(X), \qquad \Theta = \mu du, \qquad \mu^{-1}\Theta = du.$$

Матрица $\eta = \mu^{-1}$ является интегрирующей матрицей.

Заключаем: если для вертикального распределения Δ_v известны инфинитезимальные симметрии X, при $T\pi$ проектирующиеся на базу V в голономный репер, то для любого кобазиса Θ распределения Δ_v имеет место интегрирующая матрица $\eta = \mu^{-1}$, где $\mu = \Theta(X)$. В Предложении 9 описан тривиальный случай, когда $n = r = 1$.

Спрашивается, как определить инфинитезимальную симметрию векторного поля X, см. (1).

Для этого представим искомое векторное поле в виде

$$P = \xi \frac{\partial}{\partial u} + \lambda \frac{\partial}{\partial v}. \tag{47}$$

Требуется определить компоменты (ξ, λ). Вычислим производные Ли векторного поля (1) и 1-формы (35) относительно P:

$$L_P X = (Px - X\xi)\frac{\partial}{\partial u} + (Py - X\lambda)\frac{\partial}{\partial v},$$

$$L_P\omega = -Py\ du + Px\ dv - y\ d\xi + x\ d\lambda =$$

$$= (x\lambda_1 - y\xi_1 - Py)\ du + (x\xi_2 - y\lambda_2 + Px)\ dv$$

и потребуем, чтобы выполнялись условия (42). В обоих случаях приходим к одному равенству

$$(Px - X\xi)\ y - (Py - X\lambda)\ x = 0. \tag{48}$$

Условие (48) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, которому должны удовлетворять компоненты (ξ, λ):

$$\lambda_1 x^2 + (\lambda_2 - \xi_1)xy - \xi_2 y^2 + (x_1 y - y_1 x)\xi + (x_2 y - y_2 x)\lambda = 0. \tag{49}$$

При $x = 1$ векторное поле X и 1-форма ω записываются в виде:

$$X = \frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}; \quad \omega = dv - y\ du, \tag{50}$$

и уравнение (49) упрощается:

$$\lambda_1 + (\lambda_2 - \xi_1)y - \xi_2 y^2 - y_1\xi - y_2\lambda = 0. \tag{51}$$

Если вместо λ ввести функцию

$$\mu = \lambda - \xi y, \tag{52}$$

а это значит, что искомое поле (47) представится в виде

$$P = \xi X + \mu\frac{\partial}{\partial v}, \tag{53}$$

тогда уравнение (51) еще упростится и примет вид:

$$\mu' - \mu \cdot \operatorname{div} X = 0, \tag{54}$$

где $\operatorname{div} X = y_2$. Обратная величина $\eta = \frac{1}{\mu}$ удовлетворяет условию (39). Это естественно, так как из (50) и (53) следует $\mu\ = \omega(P)$, см. Предложение 9.

Подытожим сказанное.

Предложение 10. Для того, чтобы векторное поле (1) допускало векторное поле (47), нужно, чтобы его компоненты (ξ, λ) удовлетворяли дифференциальному уравнению (49). При $x = 1$ уравнение (49) упрощается и принимает вид (51). Если при этом поле P ищется в виде (53), то его компонента $\mu\ = \omega(P)$ должна удовлетворять условию (54) или, что равносильно, обратная величина μ^{-1} должна быть интегрирующим множителем для 1-формы ω.

1.6 Инфинитезимальная симметрия P

В следующих примерах будет демонстрирована важность инфинитезимальной симметрии P при решении обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Пример 2, см. [8], стр.1. Дано однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Этому уравнению соответствуют векторное поле X и 1-форма ω, см.(1) и (35)

$$X = xy\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = -(x^2 + y^2)\ dx + xy\ dy.$$

1-форма не точна:

$$d\omega = 3y dx \wedge dy,$$

однако, поле X допускает оператор гомотетий

$$P = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

В потоке поля P

$$\begin{cases} x_\tau = xe^\tau \\ y_\tau = ye^\tau \end{cases}$$

дифференциальное уравнение сохраняет свой вид:

$$\frac{dy_\tau}{dx_\tau} = \frac{x_\tau^2 + y_\tau^2}{x_\tau y_\tau}.$$

кроме того, см. (42),

$$L_P X = X, \quad L_P\omega = 3\omega, \quad \omega(P) = -x^3.$$

В соответствии с формулой (43) вычисляем инвариант:

$$I = \int \frac{\omega}{\omega(P)} = \int \frac{(x^2 + y^2)\ dx - xy\ dy}{x^3} = \int \left[\frac{dx}{x} - \frac{y}{x} d\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \ln|x| - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Найденный инвариант I является первым интегралом дифференциального уравнения.

Примечание.

Тот же результат получим, если ввести инвариант $u = \frac{y}{x}$ поля P. В ходе подстановки разделяются переменные:

$$y = xu, \quad dy = u\ dx + x\ du, \quad x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}, \quad \frac{dx}{x} = u\ du,$$
$$d\ln|x| = \frac{1}{2}\ du^2, \quad \int d\ln|x| = \frac{1}{2}\int du^2, \quad \ln|x| = \frac{1}{2}u^2 + I$$

и постоянная интегрирования I играет роль инварианта поля X:

$$I = \ln|x| - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Еще лучше ввести инвариант $u = \frac{y}{x}$ прямо в 1-форму

$$\omega = -x^3 d\left(\ln|x| - \frac{u^2}{2}\right)$$

и в результате $\omega = 0$ прийти к инварианту I.

Пример 3, см. [8], стр. 3. Дано дифференциальное уравнение

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}y.$$

Определяем векторное поле X и 1-форму ω, см. (1) и (35):

$$X = x^3 y\frac{\partial}{\partial x} + (2 - 3xy)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = -(2 - 3xy)\ dx + x^3 y\ dy.$$

Инфинитезимальной симметрией является векторное поле

$$P = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},$$

его поток

$$\begin{cases} x_\tau = xe^\tau \\ y_\tau = ye^{-\tau} \end{cases}$$

сохраняет дифференциальное уравнение. Кроме того,

$$L_P X = X, \qquad X_\tau = Xe^\tau,$$

$$L_P\omega=\omega,\qquad \omega_\tau=\omega e^\tau,$$

$$\omega(P)=-x(xy-1)(xy-2).$$

Поле P обладает инвариантом $u=xy$. Введем этот инвариант в 1-форму ω и в выражение $\omega(P)$:

$$\omega=-(u-1)(u-2)\;dx+xu\;du,$$

$$\omega(P)=-x(u-1)(u-2),$$

вычислим инвариант:

$$\frac{\omega}{\omega(P)}=\frac{dx}{x}-\frac{u}{(u-1)(u-2)}du=\frac{dx}{x}+(\frac{1}{(u-1)}-\frac{2}{(u-2)})du=d\;\ln x\frac{u-1}{(u-2)^2},$$

$$I=x\frac{xy-1}{(xy-2)^2}.$$

Пример 4, см. [8], стр. 31. Линейное обыкновенное уравнение 1-го порядка

$$y'+p(x)y=q(x)$$

решается, при начальных условиях (x_0,y_o), методом неопределенного коэффициента. Записывают решение однородного уравнения с коэффициентом C и, полагая этот коэффициент зависящим от аргумента x:

$$y'+p(x)y=0,\quad y(x)=C(x)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt},\quad C(x_0)=y_0,$$

подставляют $y(x)$ в неоднородное уравнение; определяют коэффициент $C(x)$:

$$C'=q(x)e^{\int_{x_0}^x p(t)dt},\quad C(x)=y_0+\int_{x_0}^x q(s)e^{\int_{x_0}^s p(t)dt}ds$$

и получают решение неоднородного уравнения:

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}\left[y_0+\int_{x_0}^x q(s)e^{\int_{x_0}^s p(t)dt}ds\right].$$

Это решение хорошо известно, см. напр. [1], стр. 10. Запишем его в более удобной для нас форме. Пусть $\varphi(x)$ – первообразная для функции $p(x)$ и $\psi(x)$ – первообразная для функции $q(x)e^{\varphi(x)}$. Тогда, опуская аргумент x, имеем

$$\varphi' = p, \quad \psi' = qe^{\varphi},$$

$$\int_{x_0}^{x} p(t)dt = \varphi - \varphi_0, \quad \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\varphi(s)}ds = \psi - \psi_0,$$

$$\varphi_0 = \varphi(x_0), \quad \psi_0 = \psi(x_0),$$

и решение представляется в виде

$$y(x) = e^{-\varphi}(\psi + y_0 e^{\varphi_0} - \psi_0).$$

Векторное поле X и 1-форма ω в данном случае имеют вид

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + (q - py)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = (py - q)\ dx + dy.$$

Из равенства (см. полученное решение)

$$ye^{\varphi} - \psi = y_0 e^{\varphi_0} - \psi_0$$

следует, что функция

$$I = ye^{\varphi} - \psi$$

является инвариантом векторного поля X. Это легко проверяется:

$$XI = Xy \cdot e^{\varphi} + y\varphi' e^{\varphi} - \psi' = (q - py)e^{\varphi} + ype^{\varphi} - qe^{\varphi} = 0.$$

Инфинитезимальную симметрию поля X будем искать в виде

$$P = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta y\frac{\partial}{\partial y},$$

где ξ и η – подлежащие определению функции переменной x. Вычислим производные Ли:

$$L_P X = -\xi' X + [q'\xi + q\xi' - \eta q - (p'\xi + p\xi' + \eta')y]\frac{\partial}{\partial y},$$

$$L_P \omega = -[q'\xi + q\xi' - \eta q - (p'\xi + p\xi' + \eta')y]\ dx + \eta\omega,$$

и потребуем, чтобы выполнялись условия коллинеарности (42):

$$\begin{cases} q'\xi + q\xi' - \eta q = 0 \\ p'\xi + p\xi' + \eta' = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} (q\xi)' = \eta q \\ (p\xi)' + \eta' = 0 \end{cases}.$$

Второе уравнение дает

$$\eta + p\,\xi = C_1 - \mathrm{const},$$

первое уравнение превращается в линейное неоднородное уравнение

$$\xi' + \left(\frac{q'}{q} + p\right)\xi = C_1$$

и дает решение

$$\xi = \frac{1}{q}e^{-\varphi}(C_1\psi + C_2).$$

Тем самым коэффициенты ξ и $\eta = C_1 - \xi p$ найдены. Векторное поле P определено с произволом $C_1,\ C_2$.

Выпишем ряд формул, связанных с векторным полем P. Именно нас интересуют инвариант I векторного поля X, дифференциал dI и производная PI:

$$I = ye^{\varphi} - \psi, \quad dI = e^{\varphi}[(yp - q)\,dx + dy] = e^{\varphi}\omega, \quad PI = e^{\varphi}\omega(P),$$

еще производные:

$$L_P\omega = \eta\omega, \quad P(\omega(P)) = L_P\omega(P) = \eta\omega(P), \quad P^2 I = e^{\varphi}(\eta + P\xi)\omega(P) = C_1 PI,$$

$$PI = C_1 I - C_2, \quad P(I+\psi) = C_1(I+\psi),$$

величина

$$\omega(P) = e^{-\varphi}(C_1 I - C_2)$$

и инвариант $\widetilde{I}$ поля X согласно (43):

$$\widetilde{I} = \int \frac{\omega}{\omega(P)} = \int \frac{dI}{C_1 I - C_2} = \frac{1}{C_1}\ln(C_1 I - C_2);$$

канонические параметры поля P:

$$s_1 = \frac{1}{C_1}\ln(I+\psi), \quad s_2 = \frac{1}{C_1}\ln PI = \widetilde{I},$$

инвариант поля P

$$s_1 - s_2 = \ln\frac{PI}{I+\psi}$$

и канонические координаты (u, v):

$$u = \frac{PI}{I+\psi}, \quad v = \frac{1}{C_1}\ln(I+\psi).$$

Очевидно, эквивалентны записи:

$$\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dI = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(PI) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad du + C_1 u\ dv = 0.$$

Наше уравнение в координатах (u, v) записывается ввиде

$$\frac{du}{dv} = -C_1 u$$

Это уравнение допускает решение

$$u = u_0 e^{-C_1(v-v_0)},$$

что равносильно равенству

$$ue^{C_1 v} = u_0 e^{C_1 v_0}$$

или, что то же, $PI = const$.

Пример 5, см. [8], стр. 55.

На плоскости uv задано дифференциальное уравнение.

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u+u^2+v^2}.$$

Этому уравнению соответствуют векторное поле X и 1-форма ω:

$$X = (u+u^2+v^2)\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}, \quad \omega = -v\ du + (u+u^2+v^2)dv.$$

Инфинитезимальной симметрией является векторное поле

$$P = \frac{u}{v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}.$$

Действительно, при значениях

$$x = u+u^2+v^2, \quad y = v, \quad \xi = \frac{u}{v}, \quad \lambda = 1$$

условие (49) выполнено. Проверяем, что и условия (42) выполнены. Для этого выписываем деривационные формулы (32),

$$L_P\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad L_P\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}.$$

и вычисляем производные Ли в соответствии с формулами (30) и (31) :

$$L_PX = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix}\frac{u+2(u^2+v^2)}{v}\\ 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u+u^2+v^2\\ v\end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{v}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u+u^2+v^2\\ v\end{pmatrix} = \frac{1}{v}X,$$

$$L_P\omega = \left\{\begin{pmatrix}-1 & \dfrac{u+2(u^2+v^2)}{v}\end{pmatrix} + (-v \quad u+u^2+v^2)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{v}(-v \quad u+u^2+v^2)\cdot\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix} = \frac{2}{v}\omega.$$

Условия (42) выполнены:

$$L_PX = \frac{1}{v}X, \quad L_P\omega = \frac{2}{v}\omega.$$

Инвариант поля X определяется согласно формуле (43). Делим 1-форму ω на $\omega(P) = u^2+v^2$, получаем точную 1-форму

$$\frac{\omega}{\omega(P)} = \frac{u\ dv - v\ du}{u^2+v^2} + dv = d(v + \arctan\frac{v}{u})$$

и определяем инвариант:

$$I = v + \arctan\frac{v}{u}.$$

Поток поля P

$$b_\tau \;:\; (u,\ v) \;\mapsto (u_\tau,\ v_\tau)$$

определяется просто. Составляем систему (3) и находим ее решение:

$$\begin{cases} u' = \frac{u}{v} \\ v' = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_\tau = \frac{u}{v}(v+\tau) \\ v_\tau = v + \tau \end{cases}.$$

Убеждаемся, что в потоке b_τ соблюдаются условия коллинеарности

$$X_\tau \;\|\; X \qquad \omega_\tau \;\|\; \omega.$$

Увлечение натурального корепера определяется якобиевой матрицей преобразования b_τ, а увлечение натурального репера – обратной матрицей:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{v}{v+\tau} & \frac{u\tau}{v(v+\tau)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} \frac{v+\tau}{v} & -\frac{u\tau}{v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

Компоненты поля X и 1-формы ω увлекаются следующим образом:

$$x_\tau = (u + u^2 + v^2)_\tau = \frac{u(v+\tau)}{v} + \frac{(u^2+v^2)(v+\tau)^2}{v^2}, \quad y_\tau = v_\tau = v + \tau.$$

После этого определяем векторное поле X_τ и 1-форму ω_τ:

$$X_\tau = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}_\tau \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{v}{v+\tau} & \frac{u\tau}{v(v+\tau)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \end{pmatrix} =$$

$$= \left(1 + \frac{\tau}{v}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{\tau}{v}\right) X,$$

$$\omega_\tau = (-y_\tau \;\; x_\tau) \cdot \begin{pmatrix} \frac{v+\tau}{v} & -\frac{u\tau}{v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =$$

$$= \left(1 + \frac{\tau}{v}\right)^2 \cdot (-y \;\; x) \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{\tau}{v}\right)^2 \omega.$$

Условия коллинеарности выполнены:

$$X_\tau = \left(1 + \frac{\tau}{v}\right) X, \quad \omega_\tau = \left(1 + \frac{\tau}{v}\right)^2 \omega.$$

Только в первом случае коэффициент пропорциональности является линейной функцией относительно параметра τ, а во втором случае – квадратичной функцией. Дифференцируя по параметру τ при $\tau = 0$, см. (15), находим уже полученные производные Ли:

$$(X_\tau)'_{\tau=0} = \frac{1}{v} X, \quad (\omega_\tau)'_{\tau=0} = \frac{2}{v} \omega.$$

Инвариант I поля X увлекается потоком b_τ в инвариант этого поля

$$I = I + \tau.$$

Последняя формула имеет место еще потому, что I – канонический параметр поля P, так как $dI = \frac{\omega}{\omega(P)}$, $PI = dI(P) = \frac{\omega(P)}{\omega(P)} = 1$, см. Предложение 1.

Пример 6. Дана матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В координатах (x, y) имеем векторное поле X и 1-форму ω:

$$X = (x - y)\frac{\partial}{\partial x} + (x + y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = -(x + y)\, dx + (x - y)\, dy$$

Оператор гомотетий

$$P = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

является инфинитезимальной симметрией. Величина $\omega(P)$ совпадает, а точностью до знака, с вронскианом W:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}, \quad W = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x^2 + y^2,$$

$$\omega(P) = -(x+y)x + (x-y)y = -W.$$

Нахождение инварианта поля X сводится к вычислению интеграла:

$$I = \int \frac{\omega}{\omega(P)} = \int \frac{(x+y)\ dx - (x-y)\ dy}{x^2+y^2} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2+y^2) + y\ dx - x\ dy}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \int \frac{y\ dx - x\ dy}{x^2+y^2};$$

Интеграл берется подстановкой, где p – инвариант оператора P:

$$p = \frac{y}{x}, \quad y = px, \quad dy = x\ dp + p\ dx, \quad y\ dx - x\ dy = -x^2\ dp, \quad x^2+y^2 = x^2(1+p^2),$$
$$\int \frac{y\ dx - x\ dy}{x^2+y^2} = -\int \frac{dp}{1+p^2} = -\arctan p = -\arctan\frac{y}{x},$$

и инвариант поля X находим в виде

$$I = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x}.$$

В координатах (ρ, φ), где ρ – канонический параметр поля P и φ – инвариант этого поля, ситуация будет иная:

$$\begin{cases} x = e^\rho \cos\varphi \\ y = e^\rho \sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho = \ln\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} d\rho \\ d\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix};$$

Во-первых, убеждаемся, что $P\rho = 1$ и $P\varphi = 0$, что ρ – канонический параметр и φ – инвариант поля P; во-вторых, определяем компоненты поля X:

$$X\rho = 1, \quad X\varphi = 1.$$

В репере $\left(\frac{\partial}{\partial\rho} \ \ \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ поле X определяется как

$$X = \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Поток поля X определяется в координатах $(\rho,\ \varphi)$ системой

$$\begin{cases} \rho' = 1 \\ \varphi' = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_t = \rho + t \\ \varphi_t = \varphi + t \end{cases}$$

и инвариант выявляется непосредственно:

$$I = \rho - \varphi.$$

Для выявления геометрического смысла вводим величину $r = e^{\varphi}$ и переходим к другому инварианту

$$a = e^{I} = re^{-\varphi}$$

При фиксированном значении a определяется логарифмическая спираль

$$r = ae^{\varphi}.$$

Траектории поля X – логарифмические спирали, раскручивающиеся против часовой стрелки и удаляющиеся от начала координат.

2 Линейное векторное поле

В главе II сформулируется экспоненциальный закон, определяющий поток линейного векторного поля X, см. (55). Матрица C удовлетворяет формуле Гамильтона - Кэли, с помощью которой восстанавливается экспоненциал матрицы Ct, см. Предложения 3 и 4, а затем и поток поля X. Поток описывается проще в базисе из собственных векторов матрицы C (Примеры 8 и 9).

2.1 Экспоненциальный закон

Векторное поле на плоскости uv

$$X = x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}$$

называется *линейным векторным полем*, если его компоненты (x, y) являются однородными линейными функциями координат (u, v):

$$\begin{cases} x = c_1 u + c_2 v \\ y = c_3 u + c_4 v \end{cases}.$$

Поток линейного поля X определяется *экспоненциальным законом*:

$$U' = CU \qquad \Rightarrow \qquad U_t = e^{Ct}U, \tag{55}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

и e^{Ct} – экспоненциал матрицы Ct,

$$e^{Ct} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ct)^k}{k!}. \tag{56}$$

Элементы матрицы C – действительные числа. Само векторное поле X

представится матричной формулой

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{57}$$

При этом

$$\text{div } X = \text{tr } C = c_1 + c_4. \tag{58}$$

Запись $U' = CU$ означает систему

$$\begin{cases} u' = c_1 u + c_2 v \\ v' = c_3 u + c_4 v \end{cases}. \tag{59}$$

Импликация (55) трактуется следующим образом. Равенство $U' = CU$ понимается как матричное дифференциальное уравнение и $U_t = e^{Ct}U$ при фиксированном U – как решение этого уравнения. Этим решением определяется поток

$$a_t \quad : \quad U \quad \to \quad U_t.$$

Точка U начинает движение со скоростью U' и в момент t ее положение на траектории определено точкой U_t.

Под влиянием потока a_t увлекаются не только точки, но и функции (скалярные поля), векторные поля, дифференциальные формы и, вообще, любые тензорные поля.

Предложение 1. Для натурального базиса

$$R = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}, \qquad \Theta = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \tag{60}$$

имеют место деривационные формулы

$$R' = -RC, \qquad \Theta' = C\Theta. \tag{61}$$

Увлечение натурального базиса описывается формулами

$$R_t = Re^{-Ct}, \qquad \Theta_t = e^{Ct}\Theta. \tag{62}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определяемая здесь матрица C совпадает с якобиевой матрицей компонент x и y, см. (33). Поэтому деривационные формулы (61) совпадают с деривационными формулами (32), см. также (25). Таким же образом как импликация (55), имеют место импликации

$$R' = -RC \quad \Rightarrow \quad R_t = Re^{-Ct}, \quad \Theta' = C\Theta \quad \Rightarrow \quad \Theta_t = e^{Ct}\Theta.$$

Экспоненциальный закон (55) распространяется на формулы (61) и (62). $\sqcap$

2.2 Формула Гамильтона – Кэли

С использованием формул (60) и (61) легко вычисляются производные Ли тензорных полей в базисе (R, Θ), см. (23) и (29).

Ввиду того, что 2×2 – матрица C удовлетворяет равенству Гамильтона – Кэли (Hamilton – Cayley):

$$C^2 - \mathrm{tr}\ C \cdot C + \det C \cdot E = 0 \tag{63}$$

(E – единичная матрица), высшие производные могут быть сведены к низшим. Например, величины U удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$U'' - \mathrm{tr}\ C \cdot U' + \det C \cdot U = 0, \tag{64}$$

и производные U'' могут быть выражены через величины U и $U' = CU$. Чтобы убедиться в справедливости равенства (64), достаточно приписать к выражению (63) справа символ U и учесть, что $EU = U$, $CU = U'$, $C^2U = U''$.

Точно так же, с учетом (61), выводятся дифференциальные уравнения для репера R и корепера Θ:

$$R'' + \mathrm{tr}\ C \cdot R' + \det C \cdot R = 0, \tag{65}$$

$$\Theta'' - \mathrm{tr}\ C \cdot \Theta' + \det C \cdot \Theta = 0, \tag{66}$$

Предложение 2. Для векторного поля $Y = Ry$ имеют место следующие импликации:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad Y'' + \mathrm{tr}\, C \cdot Y' + \det C \cdot Y = 0, \tag{67}$$

$$Y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' - \mathrm{tr}\, C \cdot y' + \det C \cdot y = 0, \tag{68}$$

Для 1-формы $\Phi = \varphi\Theta$ имеют место импликации:

$$\varphi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi'' - \mathrm{tr}\, C \cdot \Phi' + \det C \cdot \Phi = 0, \tag{69}$$

$$\Phi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'' + \mathrm{tr}\, C \cdot \varphi' + \det C \cdot \varphi = 0, \tag{70}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производная Ли векторного поля $Y = Ry$ имеет вид, см. (33): $Y' = R(y' - Cy)$. Если компоненты y постоянны на траекториях векторного поля X, $y' = 0$, то $Y' = -RCy, \;\; Y'' = RC^2y$ и векторное поле Y, когда оно увлекается потоком a_t, удовлетворяет дифференциальному уравнению (67). Если же поле Y инвариантно в потоке поля X, т.е. $Y' = 0$, то $y' = Cy, \;\; y'' = C^2y$, и его компоненты y удовлетворяют дифференциальному уравнению (68).

Производная Ли 1-формы $\Phi = \varphi\Theta$ имеет вид, см. (31): $\Phi' = (\varphi' + \varphi C)\Theta$. Если $\varphi' = 0$, то $\Phi' = \varphi C\Theta, \;\; \Phi'' = \varphi C^2\Theta$, и 1-форма Φ удовлетворяет дифференциальному уравнению (69). Если же $\Phi' = 0$, то $\varphi' = -\varphi C, \;\; \varphi'' = \varphi C^2$ и ее компоненты φ удовлетворяют дифференциальному уравнению (69).

$\sqcap$

Примечание 1. Заметим, что если запись $U' = CU$ означает систему дифференциальных уравнений (59), то (64) дает нам два самостоятельных дифференциальных уравнения на каждую компоненту u и v в отдельности:

$$u'' - \mathrm{tr}\, C \cdot u' + \det C \cdot u = 0,$$

$$v'' - \mathrm{tr}\, C \cdot v' + \det C \cdot v = 0$$

Сказанное относится таким же образом и к дифференциальным уравнениям (68) и (70).

Примечание 2. Уравнения (65) и (67) эквивалентны в следующем смысле: поскольку (67) имеет место для любого векторного поля Y при $y' = 0$, то оно имеет место и для каждого из операторов, составляющих репер R, т.е. из (67) следует (65); и наоборот, если к (64) приписать справа y, то при условии $y' = 0$ имеем $Ry = Y$, $R'y = Y'$, $R''y = Y''$, из (65) следует (67). В таком же смысле равносильны уравнения (66) и (69).

Примечание 3. Если λ_1 и λ_2 – собственные значения матрицы C, т.е. корни ее характеристического уравнения

$$|C - \lambda E| = 0,$$

то эти же величины λ_1 и λ_2 являются корнями характеристических уравнений линейных дифференциальных уравнений (64), (68) и (69), а с противоположными знаками величины $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$ являются корнями характеристических уравнений линейных дифференциальных уравнений (65) и (67). В этом заключается двойственность уравнений (67) и (68) и также уравнений (69) и (70).

2.3 Экспоненциал матрицы Ct

Для дальнейшего нам понадобятся величины:

$$\text{tr } C = c_1 + c_4 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \det\ C = c_1c_4 - c_2c_3 = \lambda_1\lambda_2,$$

$$\Delta = \text{tr}^2\ C - 4\det\ C = (c_1 - c_4)^2 + 4c_2c_3 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2. \tag{71}$$

Величина Δ является дискриминантом характеристического уравнения $|C - \lambda E| = 0$.

Предложение 3. В зависимости от того, являются ли собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы C комплексными числами ($\Delta < 0$), действительными различными ($\Delta > 0$) либо равными ($\Delta = 0$), для экспоненциала матрицы Ct могут представиться следующие случаи:

1) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\text{tr } C = 2\alpha$, $\det\ C = \alpha^2 + \beta^2$, $\Delta = -\beta^2$,

$$e^{tC} = e^{\alpha t}\left\{E\cos\beta t + (C - \alpha E)\frac{\sin\beta t}{\beta})\right\}; \tag{72}$$

2) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta, \quad \mathrm{tr}\ C = 2\alpha, \quad \det\ C = \alpha^2 - \beta^2, \quad \Delta = \beta^2,$

$$e^{tC} = e^{\alpha t} \left\{ E \cosh \beta t + (C - \alpha E) \frac{\sinh \beta t}{\beta}) \right\}; \tag{73}$$

3) $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha, \quad \mathrm{tr}\ C = 2\alpha, \quad \det\ C = \alpha^2, \quad \Delta = 0,$

$$e^{At} = e^{\alpha t} \left\{ E + (C - \alpha E)t \right\}. \tag{74}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим экспоненциал матрицы Ct в виде

$$e^{Ct} = e^{\alpha t}\ e^{(C-\alpha E)t} \tag{75}$$

Это возможно потому, что две матрицы αE и $C - \alpha E$ перестановочны и поэтому

$$e^{\alpha E t}\ e^{(C-\alpha E)t} = e^{Ct},$$

и еще потому, что

$$e^{\alpha E t} = e^{\alpha t} E.$$

Экспоненциал матрицы $(C - \alpha E)t$ определяется проще. Так как (см. (63) и (71))

$$(C - \alpha E)^2 = \Delta \cdot E, \tag{76}$$

матрицы E и $C - \alpha E$ в разложении экспоненциала $e^{(C-\alpha E)t}$ чередуются, см. (56):

$$e^{(C-\alpha E)t} = E + (C - \alpha E)t \mp E \frac{(\beta t)^2}{2} \mp (C - \alpha E) \frac{1}{\beta} \frac{(\beta t)^3}{3!} + E \frac{(\beta t)^4}{4!} + ... =$$

$$= E \left\{ 1 \mp \frac{(\beta t)^2}{2} + \frac{(\beta t)^4}{4!} \mp ... \right\} + (C - \alpha E) \frac{1}{\beta} \left\{ \beta t \mp \frac{(\beta t)^3}{3!} + \frac{(\beta t)^5}{5!} \mp ... \right\}.$$

Члены с матрицей E, собранные вместе, образуют слагаемое $E \cos \beta t$ в случае 1, и слагаемое $E \cosh \beta t$ – в случае 2.

Члены с матрицей $C - \alpha E$, собранные вместе, образуют слагаемое $(C - \alpha E)\frac{\sin \beta t}{\beta}$ в случае 1, и слагаемое $(C - \alpha E)\frac{\sinh \beta t}{\beta}$ – в случае 2.

С учетом (75) формулы (72) и (73) установлены. В предельном переходе $\beta \to 0$, ввиду того, что

$$\lim_{\beta \to 0} \cos \beta t = \lim_{\beta \to 0} \cosh \beta t = 1, \qquad \lim_{\beta \to 0} \frac{\sin \beta t}{\beta} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\sinh \beta t}{\beta} = t,$$

из формул (72) и (73) выводится формула (74). $\sqcap$

Опишем более общую ситуацию. Пусть C – матрица порядка $n \times n$ и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – ее собственные значения. Тогда по этим собственным значениям, воспользовавшись экспоненциальным законом

$$U' = CU \quad \Rightarrow \quad U_t = e^{Ct}U,$$

можно восстановить экспоненциал матрицы Ct. Это равносильно тому, что матица C, как элемент алгебры Ли линейной группы $GL(n, R)$, порождает в группе $GL(n, R)$ 1-параметрическую подгруппу e^{Ct}. Матрица C определяет в R^n (пространстве представления) линейное векторное поле, а экспоненциал e^{Ct} – соответствующий поток $a_t : U \to U_t$..

Предложение 4. Если собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы C различны, т.е. среди них нет кратных, то экспоненциал матрицы Ct определяется формулой

$$e^{Ct} = \left(e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n t}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E \\ C \\ \vdots \\ C^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для матрицы C имеет место формула Гамильтона – Кэли

$$(C - \lambda_1 E)(C - \lambda_2 E) \cdot \ldots \cdot (C - \lambda_n E) = 0.$$

или, если эту формулу расписать, то

$$\sigma_0 C^n + \sigma_1 C^{n-1} + \sigma_2 C^{n-2} + \ldots + \sigma_n E = 0, \tag{78}$$

с коэффициентами $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n$ – симметрическими полиномами из корней $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$:

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n), \quad \sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + ... + \lambda_{n-1}\lambda_n, \quad ..., \sigma_n = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n.$$

Введем символ U, значение которого нам известно, и определяем производные:

$$U' = CU, \quad U'' = C^2U, \quad ..., \quad U^{(n)} = C^nU. \tag{79}$$

Приписывая к выражению (78) справа символ U, получим линейное дифференциальное уравнение порядка n:

$$U^{(n)} + \sigma_1 U^{(n-1)} + \sigma_2 U^{(n-2)} + \ldots + \sigma_n U = 0. \tag{80}$$

Согласно теории, общее решение дифференциального уравнения (80) имеет вид:

$$U_t = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + K_n e^{\lambda_n t}. \tag{81}$$

Коэффициенты $K_1, K_2, ..., K_n$, вообще говоря, произвольны, но их можно выразить через начальные данные; в данном случае через величины $U_0, U_0', ..., U_0^{(n-1)}$. Здесь U_0 – произвольная точка пространства R^n с n координатами, а следующие величины $U_0', U_0'', ...$ определяются по формулам (79). Таким образом, общее решение (81) определяется с точностью до n произвольных констант.

Для того, чтобы выразить коэффициенты $K_1, K_2, ..., K_n$ через величины $U_0, U_0', ..., U_0^{(n-1)}$, дифференцируем решение (81) по параметру t $n-1$ раз, полагая каждый раз $t = 0$. Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} K_1 + K_2 + \ldots + K_n = U_0 \\ \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \ldots + \lambda_n K_n = U_0' \\ \lambda_1^2 K_1 + \lambda_2^2 K_2 + \ldots + \lambda_n^2 K_n = U_0'' \\ \ldots \\ \lambda_1^{n-1} K_1 + \lambda_2^{n-1} K_2 + \ldots + \lambda_n^{n-1} K_n = U_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Представим ее в матричном виде. Появляется матрица Вандермонда для величин $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, которая при условии, что нет кратных корней, обратима.

Решаем систему:

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_0' \\ \vdots \\ U_0^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Теперь умножаем матрицу–строку $(e^{\lambda_1 t} \quad e^{\lambda_2 t} \quad .. \quad e^{\lambda_n t})$ на полученную матрицу–столбец, выносим вправо символ U_0, как общий множитель, и получаем решение (81) в виде $U_t = e^{Ct}U_0$, где e^{Ct} имеет вид (77). $\sqcap$

Следствие 1. При $n = 2$ экспоненциал матрицы Ct имеет вид:

$$e^{Ct} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left\{(C - \lambda_2 E)e^{\lambda_1 t} + (C - \lambda_1 E)e^{\lambda_2 t}\right\}. \tag{83}$$

В зависимости от знака дискриминанта Δ, отсюда следует одна из формул (72) или (73).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (77) записывается в виде

$$e^{Ct} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t}\right)\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}$$

что дает формулу (83). Рассмотрим случаи:

1) $\Delta < 0, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2i\beta, \quad C - \lambda_{1,2}E = C - \alpha E \mp i\beta E,$ $e^{\lambda_{1,2}t} = e^{\alpha t}e^{\pm i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm i\sin\beta t),$

$$e^{Ct} = \tfrac{e^{\alpha t}}{2i\beta}\left\{(C - \alpha E + i\beta E)e^{i\beta t} - (C - \alpha E - i\beta E)e^{-i\beta t}\right\} =$$

$$= \tfrac{e^{\alpha t}}{2i\beta}\left\{i\beta E(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}) + (C - \alpha E)(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})\right\} =$$

$$= e^{\alpha t}\left\{E\cos\beta t + (C - \alpha E)\tfrac{\sin\beta t}{\beta}\right\};$$

2) $\Delta < 0, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2\beta, \quad C - \lambda_{1,2}E = C - \alpha E \mp \beta E,$
$e^{\lambda_{1,2}t} = e^{\alpha t}e^{\pm\beta t} = e^{\alpha t}(\cosh\beta t \pm \sinh\beta t),$

$$e^{Ct} = \tfrac{e^{\alpha t}}{2\beta}\left\{(C - \alpha E + \beta E)e^{\beta t} - (C - \alpha E - \beta E)e^{-\beta t}\right\} =$$

$$= \tfrac{e^{\alpha t}}{2\beta}\left\{\beta E(e^{\beta t} + e^{-\beta t}) + (C - \alpha E)(e^{\beta t} - e^{-\beta t})\right\} =$$

$$= e^{\alpha t}\left\{E\cosh\beta t + (C - \alpha E)\tfrac{\sinh\beta t}{\beta}\right\}. \qquad \sqcap$$

Следствие 2. При $n = 3$ экспоненциал матрицы Ct выразится формулой:

$$e^{Ct} = \frac{(C - \lambda_2E)(C - \lambda_3E)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}e^{\lambda_1 t} + \frac{(C - \lambda_1E)(C - \lambda_3E)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}e^{\lambda_2 t} + \frac{(C - \lambda_1E)(C - \lambda_2E)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}e^{\lambda_3 t}. \tag{84}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим обратную матрицу для матрицы Вандермонда:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)}\begin{pmatrix} (\lambda_3 - \lambda_2)\lambda_2\lambda_3 & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ (\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_1\lambda_3 & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix}, \tag{85}$$

а затем коэффициенты (82):

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)}\begin{pmatrix} (\lambda_3 - \lambda_2)[U_0'' - (\lambda_2 + \lambda_3)U_0' + \lambda_2\lambda_3U_0] \\ (\lambda_1 - \lambda_3)[U_0'' - (\lambda_1 + \lambda_3)U_0' + \lambda_1\lambda_3U_0] \\ (\lambda_2 - \lambda_1)[U_0'' - (\lambda_1 + \lambda_2)U_0' + \lambda_1\lambda_2U_0] \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)} \begin{pmatrix} (\lambda_3-\lambda_2)(A-\lambda_2 E)(A-\lambda_3 E) \\ (\lambda_1-\lambda_3)(A-\lambda_3 E)(A-\lambda_1 E) \\ (\lambda_2-\lambda_1)(A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E) \end{pmatrix} U_0.$$

В соответствии с формулой (81)

$$U_t = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + K_3 e^{\lambda_3 t}$$

приходим к формуле (84). ⊓

Следствие 3. Если матрица C порядка 3×3, возведенная в куб, дает единичную матрицу, т.е.

$$C^3 = E,$$

то экспоненциал матрицы Ct имеет вид

$$e^{Ct} = \frac{1}{3}(\Theta_t C^2 + \Theta'_t C + \Theta''_t E), \tag{86}$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_t &= e^t + 2e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + \tfrac{2\pi}{3}\right), \\ \Theta'_t &= e^t + 2e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t - \tfrac{2\pi}{3}\right), \\ \Theta''_t &= e^t + 2e^{-\frac{t}{2}} \cos \tfrac{\sqrt{3}}{2}t. \end{aligned} \tag{87}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (86) может быть выведена из формулы (84). Однако, здесь собственные значения матрицы C – кубические корни из единицы:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_3 = 1,$$

и обратная матрица Вандермонда пишется сразу в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1^2 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2^2 & \lambda_2 \\ 1 & \lambda_3^2 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Это легко проверить, если учесть, что

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\quad \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=0,\quad \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3=3.$$

Экспоненциал матрицы Ct определяется формулой (77):

$$e^{Ct}=\frac{1}{3}\left(e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t}e^{\lambda_3 t}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & \lambda_1^2 & \lambda_1\\ 1 & \lambda_2^2 & \lambda_2\\ 1 & \lambda_3^2 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ C\\ C^2\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем формулу (86), с коэффициентами

$$\begin{aligned}\Theta_t&=\lambda_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2e^{\lambda_2 t}+\lambda_3e^{\lambda_3 t},\\ \Theta_t'&=\lambda_1^2e^{\lambda_1 t}+\lambda_2^2e^{\lambda_2 t}+\lambda_3^2e^{\lambda_3 t},\\ \Theta_t''&=e^{\lambda_1 t}+e^{\lambda_2 t}+e^{\lambda_3 t}.\end{aligned}$$

Все три функции, как и функции (87), являются решениями дифференциального уравнения $\Theta'''=\Theta$. Последние функции совпадают:

$$e^{\lambda_1 t}+e^{\lambda_2 t}+e^{\lambda_3 t}=e^t+e^{-\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}ti}+e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}ti}\right)=e^t+2e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Следовательно, совпадают и производные, т.е. первые функции, и вторые. $\sqcap$

Примечание. Случай кратных корней в Предложении 4 не затрагивается. Сошлемся на Предложение 3, где в предельном переходе при $\beta\to 0$ приходим к случаю $\lambda_1=\lambda_2$. Таким же образом нужно начинать анализ общего уравнения (80).

Пример 7. Формула (86) получает хорошее геометрическое истолкование. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве, с координатами xyz, задано векторное поле:

$$X=y\frac{\partial}{\partial x}+z\frac{\partial}{\partial y}+x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Поток a_t определяется экспоненциальным законом

$$U' = CU, \quad \Rightarrow \quad U_t = e^{Ct}U,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}, \quad U'' = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix},$$

а именно, формулой

$$U_t = \frac{1}{3}e^t(U+U'+U'')+\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\left[U\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + U'\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2\pi}{3}\right) + U''\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Функция $f = x + y + z$ увлекается потоком a_t по закону

$$f' = f \quad \Rightarrow \quad f_t = fe^t.$$

Это означает, что плоскости $f = f_0 \neq 0$ удаляются от плоскости $f = 0$, которая неподвижна. Инвариантом поля X является функция

$$I = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx);$$

легко проверить: $I' = 0$.

Поверхность уровня $I = I_0 \neq 0$ – поверхность вращения с осью $x = y = z$. Действительно, линия пересечения поверхности $I = I_0$ с плоскостью $f = f_0$ та же, что линия пересечения плоскости $f = f_0$ со сферой
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, где $R^2 = \frac{2}{3}\frac{I_0}{f_0} + \frac{1}{3}f_0^2$.
Последнее соотношение, задающее R^2, получено из системы

$$\begin{cases} I_0 = f_0 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ f_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}.$$

Таким образом, сечение поверхности $I = I_0$ с плоскостью, перпендикулярной прямой $x = y = z$, – окружность. Радиус окружности равен $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, где

$d = \frac{\sqrt{3}}{3} f_0$ – расстояние плоскости $f = f_0$ от начала $x = y = z = 0$; следовательно, $r = \sqrt{\frac{2I}{3f}}$. Учитывая закон $f_t = fe^t$, узнаем, что r изменяется по закону $r_t = re^{-\frac{t}{2}}$. При удалении от начала радиус окружности стягивается.

Это подтверждается коэффициентами e^t и $e^{-\frac{t}{2}}$ в формуле для U_t: точка U^t удаляется вместе с плоскостью $f_t = fe^t$ и, вместе с тем, вращаясь вокруг оси $x = y = z$ (по правилу левого винта), приближается к ней по закону $r_t = re^{-\frac{t}{2}}$. По правилу левого винта потому, что тройка векторов N, U, U', где N – вектор нормали к плоскости $f = 0$, имеет левую ориентацию:

$$(N, U, U') = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y & z \\ 1 & z & x \end{vmatrix} =$$

$$= xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2 = -\frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] < 0.$$

2.4 Приведение матрицы C к диагональному виду.

Известно, что матрица C приводится к диагональной форме $\widetilde{C}$, с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ на главной диагонали. Переход от матрицы C к матрице $\widetilde{C}$ и, наоборот, от матрицы $\widetilde{C}$ к матрице C, осуществляется по формулам:

$$\widetilde{C} = V^{-1}CV, \quad C = V\widetilde{C}V^{-1}. \tag{88}$$

Матрица V составлена из столбцов, собственных векторов матрицы C. Экспоненциал диагональной матрицы $\widetilde{C}t$, является тоже диагональной матрицей, но с элементами

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t}$$

на главной диагонали. Экспоненциалы матриц Ct и $\widetilde{C}t$ связаны между собой формулами

$$e^{\widetilde{C}t} = V^{-1}e^{Ct}V, \quad e^{Ct} = Ve^{\widetilde{C}t}V^{-1}. \tag{89}$$

Поэтому, когда известны собственные векторы матрицы C и из них составлена матрица V, по второй формуле (89) легко вычисляется экспоненциал e^{Ct}.

Таким образом, для $n = 2$ результат (83) может быть получен прямо; полагаем $c_2 \neq 0$:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_4 & c_4 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -c_2 & -c_2 \\ c_1 - \lambda_1 & c_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{c_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} -c_1 + \lambda_2 & -c_2 \\ c_1 - \lambda_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

$$e^{Ct} = Ve^{\widetilde{C}t}V^{-1} = \frac{1}{c_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} -c_2 & -c_2 \\ c_1 - \lambda_1 & c_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_1 + \lambda_2 & -c_2 \\ c_1 - \lambda_1 & c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \begin{pmatrix} c_1 - \lambda_2 & c_2 \\ c_3 & c_4 - \lambda_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} - \begin{pmatrix} c_1 - \lambda_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 - \lambda_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \right\}. \tag{90}$$

Пример 8. Дана матрица

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Будем действовать по шагам.

1. Выпишем для матрицы C характеристический полином и находим собственные значения:

$$|C - \lambda E| = -(1+\lambda)(2-\lambda), \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}.$$

2. Определяем собственные векторы матрицы C, образуем матрицу V и ей обратную V^{-1}:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Включаем собственные векторы в новый базис и определяем формулы преобразования координат:

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4. Осуществляем преобразование корепера и репера:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

5. Представим векторное поле X в старом и новом репере:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

6. Определяем поток векторного поля X в новых координатах:

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = 2v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_t = ue^{-t} \\ v_t = ve^{2t} \end{cases},$$

и, для сравнения, в старых координатах, см. (19):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = e^{-\frac{t}{2}} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cosh \frac{3}{2}t + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2y - x \\ y \end{pmatrix} \sinh \frac{3}{2}t \right].$$

В новых координатах (u, v) поток определяется проще, в старых (x, y) значительно сложнее.

7. Инвариант в координатах (u, v) определяется непосредственно:

$$I = u^2 v,$$

в координатах (x, y) поступаем следующим образом:

$$x'' = y' - x' \quad \leftrightarrow \quad x'' - x' - 2x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (x' + x)' = 2(x' + x) \\ (x' - 2x)' = -(x' - 2x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_t' + x_t = (x' + x)e^{2t} \\ x_t' - 2x_t = (x' - 2x)e^{-t} \end{cases},$$

получаем инвариант

$$\widetilde{I} = (x' + x)(x' - 2x)^2 = y(y - 3x)^2,$$

совпадающий, с точностью до множителя, с инвариантом I:

$$\widetilde{I} = 9I.$$

8. На плоскости происходит гиперболический поворот, подвергающийся гомотетии с коэффициентом $e^{-\frac{t}{2}}$, в начале координат наблюдается особенность седло.

Пример 9. Дана матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Повторим те же шаги, проделанные в Примере 8.

1. $|C - \lambda E| = (1-\lambda)(2-\lambda), \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}.$

2. $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3. $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$

4. $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5. $X = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$

6. $\begin{cases} u' = u \\ v' = 2v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_t = ue^t \\ v_t = ve^{2t} \end{cases},$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = e^{-\frac{3}{2}t} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cosh \frac{t}{2} + \begin{pmatrix} 2y - x \\ y \end{pmatrix} \sinh \frac{t}{2} \right];$

7. Получаем инвариант в координатах (u, v):

$$I = \frac{u^2}{v},$$

и, более сложным путем, тот же инвариант в координатах (x, y):

$$x''-3x'+2x=0 \ \Rightarrow \ \left\{ \begin{array}{c} (x'-x)'=2(x'-x) \\ (x'-2x)'=-(x'-2x) \end{array} \right. \ \Rightarrow \ \left\{ \begin{array}{c} x'_t-x_t=(x'-x)e^{2t} \\ x'_t-2x_t=(x'-2x)e^{t} \end{array} \right. ,$$

$$I=\frac{(x'-2x)^2}{x'-x}=\frac{(x-y)^2}{y}=\frac{u^2}{v}.$$

8. Судя по выражению в 6, см. квадратные скобки [...], на плоскости происходит, так же как в Примере 8, гиперболический поворот, но здесь ситуация иная: гомотетия с коэффициентом $e^{-\frac{3}{2}t}$ обращает гиперболы в параболы и седло превращается в узел.

Список литературы

1. Зайцев, В. Ф., Полянин, А. Д., *Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям*, М., "Факториал", 1997, 512 стр.

2. Зуланке, Р., Винтген, П., *Дифференциальная геометрия и расслоения*, М., "Мир", 1975, 348 стр.

3. Степанов, В. В., *Курс дифференциальных уравнений* , М., Физматгиз, 1959, 468 стр.

4. Стернберг, С., *Лекции по дифференциальной геометрии*, М., "Мир", 1970, 412 стр.

5. Широков, П. А., *Тензорное исчисление*, изд. Казанского университета, 1961, 448 стр.

6. *Математическая энциклопедия*, I-V, М., 1977-1985.

7. Godbillon, C., *Geometrie differentielle et mecanique analytique*, Hermann, Paris, 1969, 148 p.

8. Hill, J. M., Differential Equations and Group Methods, CRC Press, 1992, 202 p.

9. Kangro, G., *Matemaatiline analűűs*, II, Tln., "Valgus", 1968, 522 lk.

10. Rahula, M., *New Problems in Differential Geometry.* World Scientific Publishing, 1993, 172 p.

11. *Encyclopaedia of Mathematics*, vol. I-VI, Kluwer, 1995.

Vektorvälja sümmetriad tasandil ja nende rakendused harilike diferentsiaalvõrrandite lahendamisel

Olga Bogdanova

Resümee

1. On näidatud, kuidas tasandil vektorväli X määrab voo $a_t = \exp tX$. Voo mõjul punktid liiguvad piki trajektoore,

$$a_t : u \to u_t = a_t(u),$$

ja funktsioonid teisenevad vastavalt kompositsioonile

$$f \to f_t = f \circ a_t.$$

Voos teisenevad ka tensorväljad ja diferentsiaalvormid.

2. Funktsiooni f_t on võimalik (teatud tingimustel) arendada astmeritta

$$f_t = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} \frac{t^k}{k!},$$

kus kordajaks $f^{(k)}$ on funktsiooni f tuletised vektorvälja X suhtes. Samamoodi kehtib Lie-Maclaurini rida suvalise tensorvälja puhul, kuid kordajaks on Lie tuletised.

3. Hariliku diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

seondub vektorväli X ja diferentsiaalvorm ω.

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \omega = dy - f\ dx, \qquad \omega(X) = 0.$$

Kui 1-worm ω on täpne, s.t. $\omega = dI$, siis sellega on määratud vektorvälja

X invariant I – diferentsiaalvõrrandi 1. integraal ja ka üldlahend. Võrrandi integraaljoonteks on funktsiooni I tasemejooned, mis moodustavad vektorvälja X faasiportree.

4. Kui 1-vorm ω pole täpne, siis võib teda muuta täpseks, korrutades integreeruvusteguriga η, mis peab rahuldama tingimust

$$X\eta + \eta\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

5. Vektorväli P on vektorvälja X, 1-vormi ω ja diferentsiaalvõrrandi infinitesimaalne sümmetria, kui

$$L_P X \parallel X \qquad \Leftrightarrow \qquad L_P\omega \parallel \omega,$$

kus L_P tähendab Lie tuletist ja märk $\parallel$ võrdust kordaja täpsusega. Siis osutub, et $\omega(P)$ on integreeruvusteguri pöördväärtus. Seega 1-vorm $\eta\omega$ on täpne, kui $\eta = [\omega(P)]^{-1}$.

6. Integraalide arvutamine ja differentsiaal võrrandite lahendamine lihtsustub, kui kasutada vektorvälja P invariante. Näiteks, diferentsiaalvõrrandid

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}, \qquad y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}y,$$

ei muutu vektorvälja

$$P = x\frac{\partial}{\partial x} \pm y\frac{\partial}{\partial y}$$

voos (vt. vastavalt ülemisele ja alumisele märgile), kuna

$$\begin{array}{llll} P = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, & \omega = xy\;dy - (x^2+y^2)\;dx & \Rightarrow & L_P\omega = 3\omega, \\ P = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, & \omega = x^3y\;dy - (2-3xy)\;dx & \Rightarrow & L_P\omega = \omega. \end{array}$$

Asendusel $u = \frac{y}{x}$ või vastavalt $u = xy$ ülesanne lihtsustub, sest mõlemal juhul on tegemist vektorvälja P invariandiga.

7. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi puhul

$$y' + p(x)y = q(x)$$

vektorvälja X invariant on leitud kujul $I = ye^{\varphi} - \psi$, kus φ ja ψ on vastavalt funktsiooni p ja $q(x)e^{\varphi}$algfunktsioon, ning võrdus $I = I_0$, e. $ye^{\varphi} - \psi = y_0 e^{\varphi_0} - \psi_0$, annab otsekohe lahendi antud algtingimustel.

8. Lineaarse vektorvälja voog a_t on määratud eksponentsiaalseadusega

$$U' = CU \qquad \Rightarrow \qquad U_t = e^{tC}U,$$

kus C on konstantne Jacobi maatriks. Sel juhul on näidatud, kuivõrd lihtsaks muutub olukord, kui teljestik on ehitatud maatriksi C omavektoritele.

9. Antud tőős, võrreldes raamatuga [8], on diferentsiaalvõrrandite sűmmetriate kãsitlemine lihtsam, sest siis kasutatakse Lie diferentseerimistehnikat.

10. Jooniste saamiseks on kasutatud arvutiprogrammi "MAPLE V Release 4" ja "Paint".