TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Kati Metsalu-Smotrova

ENDOPRIMAALSED VÄÄNDETA ABELI RÜHMAD ASTAKUGA 3

Magistritöö

Juhendaja: prof. Kalle Kaarli

Autor: ....

Juhendaja: ....

Lubatud kaitsmisele

Matemaatika instituudi juhataja: ....

TARTU 2010

Sisukord

Sissejuhatus

Vaatleme universaalalgebrat A ja temal defineeritud n-kohalist tehet ω. Endomorfismiks universaalalgebral A nimetatakse funktsiooni $\varphi\colon A \to A$, mis iga universaalalgebra A tehte $\omega\colon A^n \to A$ ja elementide $a_1, \ldots, a_n \in A$ korral rahuldab tingimust

$$\varphi(\omega(a_1, \ldots, a_n)) = \omega(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))\,.$$

Selle kohta öeldakse, et funktsioon φ kommuteerub funktsioonidega ω.

Termfunktsioonideks universaalalgebral A nimetatakse tema põhitehete ja projektsioonide kompositsioone. On kerge näha, et universaalalgebra A endomorfismid kommuteeruvad tema termfunktsioonidega.

Universaalalgebrat nimetatakse endoprimaalseks, kui ainult tema termfunktsioonid kommuteeruvad tema kõikide endomorfismidega. Nimetame lõpliku aarsusega funktsiooni f universaalalgebral A lühidalt *universaalalgebra A endofunktsiooniks*, kui ta kommuteerub A kõigi endomorfismidega, see tähendab, $\varphi(f(a_1, \ldots, a_n)) = f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ iga universaalalgebra A endomorfismi φ ja suvaliste elementide $a_1, \ldots, a_n \in A$ korral. Seega on universaalalgebra endoprimaalne parajasti siis, kui tema kõik endofunktsioonid on termfunktsioonid.

Ülevaade endoprimaalsuse uurimisest erinevatel struktuuridel on toodud artiklis [1].

Artiklis [2] on tõestatud, et ükski väändeta Abeli rühm astakuga 1 ei ole endoprimaalne ning et väändeta Abeli rühm astakuga 2 on endoprimaalne parajasti siis, kui ta on kahe astakuga 1 Abeli rühma otsesumma, mille tüübid on võrreldavad ja väiksem tüüp ei sisalda lõpmatust. Käesoleva töö eesmärk on näidata, et kuigi juba astaku 3 puhul on olukord palju komplitseeritum, on siiski ka siin võimalik kindlaks teha, millised Abeli rühmad on endoprimaalsed.

Mugavuse mõttes vaatleme Abeli rühmi kui mooduleid üle nende tuumaringi N ja uurime nende moodulite endoprimaalsust. Kui A on väändeta Abeli rühm, siis tema tuumaringiks N on $\mathbb{Q}$ selline alamring, mis on moodustatud niisuguste p^{-1} poolt, mille korral A on p-jaguv algarvu p jaoks. Seega Abeli rühmal A on tuumaringiks $\mathbb{Z}$ parajasti siis, kui A ei ole ühegi p jaoks p-jaguv, ning $\mathbb{Q}$ parajasti siis, kui A on jaguv. Paneme tähele, et kui $p^{-1} \in N$, siis A ei saa olla Abeli rühmana endoprimaalne, kuna funktsioon $x \mapsto p^{-1}x$ on endofunktsioon, aga pole Abeli rühma termfunktsioon.

Edaspidi, kui ütleme, et A on endoprimaalne, peame silmas tema endoprimaalsust just moodulina üle tema tuumaringi N. Seos A kui Abeli rühma ja A kui N-mooduli endoprimaalsuse vahel seisneb selles, et A on Abeli rühmana endoprimaalne parajasti siis, kui ta ei ole p-jaguv ühegi algarvu p jaoks ning on endoprimaalne N-moodulina.

See töö põhineb Abeli rühma sisestamisel teatud vektorruumi üle ratsionaalarvude korpuse, mis taandab algse probleemi olulisel määral lineaaralgebrale. Sama meetodit kasutati juba artiklis [2] astakuga 2 väändeta Abeli rühmade puhul.

Põhitulemus ütleb, et ühe erandiga on väändeta Abeli rühmad astakuga 3 endoprimaalsed, kui neil pole just mingit mõjuvat põhjust seda mitte olla.

Teoreem 1. *Olgu A väändeta Abeli rühm astakuga 3 tuumaringiga N. Siis leiab aset üks järgmistest juhtumitest:*

(1) *moodul ${}_NA$ on endoprimaalne;*
(2) $\operatorname{End} A = N$ *ja seega ei ole ${}_NA$ endoprimaalne;*
(3) *rühmal* $\operatorname{End} A$ *on mittetriviaalne tsenter ja seega ei ole ${}_NA$ endoprimaalne;*
(4) $\operatorname{End} A$ *on Abeli rühm astakuga* 3 *ja leiduvad lineaarselt sõltumatud elemendid $a_1, a_2, a_3 \in A$, endomorfismid $\phi, \psi \in$* $\operatorname{End} A$ *ja ratsionaalarv $u \in \mathbb{Q}$ nii, et $\phi(a_2) = a_1$, $\phi(a_1) = \phi(a_3) = 0$, $\psi(a_1) = ua_1$, $\psi(a_2) = \psi(a_3) = 0$; siis ei ole ${}_NA$ endoprimaalne.*

Juhu (2) jaoks paneme tähele, et nagu näidatud artikli [2] lauses 2.1, kui $\operatorname{End} A$ on $\mathbb{Q}$ alamring, siis

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } y = 0 \\ x, & \text{kui } y \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

on endofunktsioon, aga ei ole A termfunktsioon.

Käesoleva magistritöö tulemused on avaldatud artiklis [3].

1. Põhimõisted ja abitulemused

Olgu R ühikelemendiga assotsiatiivne ring. Hulka M nimetatakse *vasakpoolseks mooduliks üle ringi* R ehk lihtsalt *vasakpoolseks* R*-mooduliks*, kui

1. M on liitmise suhtes Abeli rühm;
2. mistahes $m \in M$ ja mistahes $r \in R$ korral on defineeritud korrutis $rm \in M$ nii, et:
   (a) $r(m+n) = rm + rn$,
   (b) $(r+s)m = rm + sm$,
   (c) $(rs)m = r(sm)$,
   (d) $1m = m$

   mistahes elementide $m, n \in M$ ja $r, s \in R$ korral

Kuna me selles töös vaatleme vaid vasakpoolseid mooduleid, siis nimetame neid lihtsalt mooduliteks. Mooduleid üle korpuste nimetatakse *vektorruumideks*. Kerge on näha, et moodulid üle täisarvude ringi $\mathbb{Z}$ on samastatavad Abeli rühmadega.

Kui M on R-moodul, siis ringi R fikseeritud elemendiga korrutamine määrab teisenduse $m \to rm$ hulgal M. Moodulit nimetatakse *täpseks*, kui erinevate ringi elementidega korrutamine määrab erinevad teisendused moodulil. See tähendab, et kui M on täpne moodul üle ringi R ning r ja s on ringi R erinevad elemendid, siis vähemalt ühe M elemendi m korral $rm \neq sm$. Ekvivalentne on nõuda, et iga ringi R nullist erineva elemendi r korral leidub mooduli M element m, nii et $rm \neq 0$.

R-mooduli M *annullaatoriks* nimetatakse hulka $\mathrm{Ann}M = \{r \in R \,|\, rM = 0\}$. On kerge kontrollida, et iga R-mooduli annullaator on ringi R (kahepoolne) ideaal. Ilmselt on R-moodul M täpne parajasti siis, kui $\mathrm{Ann}M = \{0\}$.

Öeldakse, et R-moodul M on *väändeta*, kui suvaliste nullist erinevate$m \in M$ ja $r \in R$ korral ka $rm \neq 0$. Ilmselt on kõik väändeta R-moodulid täpsed.

R-moodulit nimetatakse M *lihtsaks*, kui tal on täpselt kaks alammoodulit: nullalammoodul $\{0\}$ ja M ise. Lihtsate moodulite näideteks on 1-mõõtmelised vektorruumid ja Abeli rühmad $\mathbb{Z}_p$, kus p on algarv.

Ringi R nimetatakse *lihtsaks*, kui tal on täpselt kaks ideaali: nullideaal $\{0\}$ ja R ise. Ilmselt on kõik korpused lihtsad ringid, aga on ka hästi teada, et lihtsad on täielikud maatriksringid üle korpuste.

Ringi R *Jacobsoni radikaaliks* $J(R)$ nimetatakse kõigi lihtsate R-moodulite annullaatorite ühisosa.

Ringi R nimetatakse *poollihtsaks Jacobsoni mõttes*, kui $J(R) = 0$.

Ringi R *tsentriks* nimetatakse ringi R kõigi niisuguste elementide hulka, mis kommuteeruvad ringi R kõigi elementidega. Ringi tsenter on selle ringi ideaal.

Algebraks üle kommutatiivse korpuse F ehk lühidalt F*-algebraks* nimetatakse ringi R, mis on ühtlasi vektorruum üle F ja kehtivad samasused

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)\,,$$

kus $\alpha \in F$ ja $x, y \in R$. Näiteks on täielikud maatriksringid $\mathrm{Mat}_n F$, kus F on kommutatiivne korpus, F-algebrad. Lepime kokku, et edaspidi on kõik selles töös esinevad F-algebrad assotsiatiivse korrutamisega ja omavad ühikelementi.

Paneme tähele, et iga F-algebra R sisaldab alamringi, mis on isomorfne korpusega F. See koosneb kõigist elementidest $\alpha 1$, kus $\alpha \in F$. Sellest järeldub, et kõik moodulid üle F-algebra on automaatselt F-vektorruumid.

Analoogiliselt vektorruumi lineaarteisendustega moodustavad iga R-mooduli M endomorfismid assotsiatiivse ühikelemendiga ringi, mida tähistatakse sümboliga $\mathrm{End}\,_R M$. Oma töös toetume oluliselt järgmistele klassikalistele ringiteooria faktidele:

Lemma 1. (Schuri lemma) *Lihtsa mooduli endomorfismiring on korpus (üldiselt mittekommutatiivne).*

Teoreem 2. (Tiheduse teoreem) *Olgu M lihtne R-moodul, $K = \mathrm{End}\,_R M$ ning olgu vektorruum $_K M$ lõplikumõõtmeline. Siis vektorruumi $_K M$ iga lineaarteisenduse φ jaoks leidub $r \in R$ nii, et iga $x \in M$ korral $\varphi(x) = rx$.*

Teoreem 3. (Tiheduse teoreem täielikult taanduvate moodulite jaoks) *Olgu $M_1, \ldots, M_k$ paarikaupa mitteisomorfsed lihtsad R-moodulid, millest igaüks on lõplikumõõtmeline üle oma endomorfismiringi* $\mathrm{End}\,_R M_i$*. Siis suvalise ringi R elementide $r_1, \ldots, r_k$ jaoks leidub $r \in R$ nii, et $rx = r_i x$ iga $i = 1, \ldots, k$ ja $x \in M_i$korral.*

Teoreem 4. (Artin-Wedderburni teoreem) *Iga Jacobsoni mõttes poollihtne lõplikumõõtmeline F-algebra R on isomorfne lõpliku arvu lihtsate F-algebrate $R_1, \ldots, R_n$otsesummaga, kusjuures iga R_i on isomorfne täieliku maatriksringiga üle mingi korpuse K_i.*

Kõik need teoreemid võib leida raamatust [4].

Meie tähtsaks tööriistaks on väändeta Abeli rühma A teatud loomulik sisestamine vektorruumi M üle ratsionaalarvude korpuse $\mathbb{Q}$. Vektorruum M on defineeritav kui tensorkorrutis $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, kuid antud konkreetsel juhul võime M defineerida ka vältides tensorkorrutamise tehet. Defineerime hulgal $A \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ekvivalentsiseose $\sim$ eeskirjaga

$$(a, m) \sim (b, n) \quad \Leftrightarrow \quad na = mb$$

ning tähistame paari (a, m) $\sim$-klassi sümboliga a/m. Faktorhulk $M = A/\sim$ on muudetav vektorruumiks üle $\mathbb{Q}$, kui defineerime liitmise ja skalaariga korrutamise valemitega:

1. $a/m + b/n = (na + mb)/mn$;
2. $r/s \cdot a/m = ra/sm$, kus $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$.

Seda vektorruumi tähistame sümboliga $A[\mathbb{Z}^{-1}]$. Seades elemendile $a \in A$ vastavusse elemendi $a/1 \in M$ saame Abeli rühma A sisestuse Abeli rühma $A[\mathbb{Z}^{-1}]$.

Vektorruumi $M = A[\mathbb{Z}^{-1}]$ elemendid on A elementide ratsionaalsed kordsed, st, iga $m \in M$ saab kirjutada kujul qa, kus $q \in \mathbb{Q}$, $a \in A$. Loomulikult ei pruugi suvaliselt valitud $a \in A$ ja $q \in \mathbb{Q}$ puhul korrutis qa kuuluda rühma A.

Olgu nüüd $E = \operatorname{End} A$ väändeta Abeli rühma A kõigi endomorfismide ring. Kerge on näha, et siis E on liitmise suhtes ise ka väändeta Abeli rühm. Seega saame E sisestada $\mathbb{Q}$-vektorruumi $R = E[\mathbb{Z}^{-1}]$. Vektorruumi R elemendid on kirjutatavad kujul ϕ/m, kus $\phi \in E$ ja $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Defineerides hulgal R korrutamise valemiga

$$\phi/m \cdot \psi/n = \phi\psi/mn\,,$$

muutub hulk R algebraks üle $\mathbb{Q}$. Peale selle, valemiga

$$\phi/m \cdot a/n = \phi(a)/mn$$

saame defineerida $\mathbb{Q}$-vektorruumi M elementide korrutamise $\mathbb{Q}$-algebra R elementidega. Ei ole raske kontrollida, et selle tulemusel muutub M R-mooduliks.

Näitame, et kõiki A endofunktsioone, nagu endomorfismegi, saab jätkata vektorruumile M. Olgu f rühma A n-aarne endofunktsioon ja võtame suvalised $m_1, \ldots, m_n \in M$. Siis leidub selline $0 \neq k \in \mathbb{Z}$, et $km_i \in A$, $i = 1, \ldots, m$. Nüüd defineerime $f(m_1, \ldots, m_n)$ võrdusega

$$kf(m_1, \ldots, m_n) = f(km_1, \ldots, km_n)\,.$$

On kerge näha, et see funktsioon kommuteerub R toimega vektorruumil M. Järgnevas nimetame selliseid funktsioone *R-funktsioonideks.* See tähelepanek avab meile hea võimaluse A endoprimaalsuse tõestamiseks. Kui me tõestame, et ei leidu ühtki R-funktsiooni vektorruumil M peale vektorruumi ${}_{\mathbb{Q}}M$ termfunktsioonide, siis peab A olema endoprimaalne. Teisest küljest, kui me leiame vektorruumil M mingi R-funktsiooni, mis ei ole termfunktsioon, siis me saame kontrollida, kas see funktsioon või mõni selle täisarvulistest kordsetest säilitab rühma A. Kui jah, siis see täisarvuline kordne on rühma A endofunktsioon, mis pole termfunktsioon. Muuhulgas, kui algebral R on mittetriviaalne tsenter Z ja $r \in Z\backslash\mathbb{Q}$, siis leidub selline $n \in \mathbb{Z}$, et $nr \in \operatorname{End} A$, ja on ilmne, et nr on A endofunktsioon, mis pole termfunktsioon.

Käesolevas töös selgub, et vähemalt juhul $\operatorname{rank} A \leqslant 3$ sõltub rühma A endoprimaalsus ainult R-mooduli M struktuurist.

Mooduli M alammoodulite jada $\{0\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{k-1} \subset H_k = M$, milles kõik sisalduvused on ranged ning mida ei saa tihendada, nimetatakse mooduli M *kompositsioonijadaks.*

Korpust K nimetatakse korpuse F *ruutlaiendiks* (vastavalt *kuuplaiendiks*), kui F on K alamkorpus ja vektorruumi K/F mõõde $\dim_F K$ on 2 (vastavalt 3).

Lemma 2. *Kui korpus K on korpuse F ruut- või kuuplaiend ja F sisaldub K tsentris, siis K on kommutatiivne.*

2. Rikkad moodulid

Meie lõppeesmärgi jaoks piisab selliste R-moodulite uurimisest, kus R on lõplikumõõtmeline $\mathbb{Q}$-algebra. Kuna kõik põhjendused lähevad läbi lõplikumõõtmelise algebra jaoks üle suvalise korpuse F, esitame me tulemused üldisemalt.

Olgu M täpne moodul üle F-algebra R. Funktsiooni $f\colon M^n \to M$ nimetatakse *R-funktsiooniks*, kui

$$f(rx_1, \ldots, rx_n) = rf(x_1, \ldots, x_n)$$

iga $x_1, \ldots, x_n \in M$ ja $r \in R$ jaoks. Nimetame R-moodulit M *rikkaks*, kui tema ainsad R-funktsioonid on vektorruumi ${}_FM$ on termfunktsioonid, see tähendab, lineaarfunktsioonid kujul

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\,,$$

kus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.

Alustame lemmaga, mis näitab, et iga R-funktsioon säilitab vektorruumi ${}_FM$ lineaarteisendustena vaadeldud elementide $r \in R$ tuumad ja kujutised.

Lemma 3. *Olgu f R-mooduli M mingi n-aarne R-funktsioon ja $r \in R$. Siis*

$$x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{Im} r \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Im} r$$

ja

$$x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{Ker} r \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Ker} r\,.$$

Tõestus: Olgu $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{Im} r$. See tähendab, et leiduvad niisugused $m_i \in M$, et $rm_i = x_i$ iga i korral. Et f on mooduli M R-funktsioon, siis

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(rm_1, \ldots, rm_n) = rf(m_1, \ldots, m_n)\,,$$

millest järeldub, et $f(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Im} r$.

Olgu nüüd $x_i \in \operatorname{Ker} r$. See tähendab, et $rx_i = 0$ iga i jaoks. Et f on mooduli M R-funktsioon, siis

$$rf(x_1, \ldots, x_n) = f(rx_1, \ldots, rx_n) = f(0, \ldots, 0) = 0f(0, \ldots, 0) = 0\,,$$

millest järeldub, et $f(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Ker} r$. $\square$

Lemma 4 tõestamise juures on oluline, et mooduli otselahutused on tihedas seoses selle mooduli endomorfismiringi idempotentidega. Veendume selles.

Olgu $M = W \oplus W'$ ning $e : M \to W$ ja $e' : M \to W'$ projektsioonid: seega $e(w + w') = w$, $e'(w + w') = w'$, kus $w \in W$, $w' \in W'$. Siis on kerge kontrollida, et e ja e' on M idempotentsed endomorfismid ning $e + e' = 1$ (samasusteisendus hulgal M, samuti ringi $\operatorname{End}_R M$ ühikelement).

Teisest küljest, olgu $e \in \operatorname{End} M$ idempotent. Et $(1-e)(1-e) = 1-e-e+e = = 1-e$, siis ka $e' = 1-e$ on $\operatorname{End} M$ idempotent, kusjuures ilmselt $e+e' = 1$. Tähistades $W = e(M)$, $W' = e'M$, saame otselahutuse $M = W \oplus W'$. Tõepoolest, suvaline $m \in M$ esitub kujul

$$m = 1m = (e + e')m = em + e'm \in W + W' .$$

Seega $M = W + W'$. Võtame nüüd $m \in W \cap W'$. Siis

$$m = em = e(e'm) = (ee')m = 0m = 0 ,$$

millega tõestasime, et $W \cap W' = \{0\}$.

Siin kasutasime projektsiooni definitsioonist lihtsasti tulenevaid fakte, et suvaliste $w \in W$ ja $w' \in W'$ korral $ew = w$, $e'w' = w'$ ja $ew' = e'w = 0$ ning lisaks $ee' = e'e = 0$.

Nüüd näitab järgmine lemma, et R-funktsioonid on kooskõlas selliste otselahutustega, millega seotud projektsioonid kuuluvad algebrasse R.

Lemma 4. *Olgu $e \in R$ idempotent, $e' = 1-e$, $W = eM$, $W' = e'M$, ja olgu F R-mooduli M n-aarne R-funktsioon. Siis*

$$f(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) = f(y_1, \ldots, y_n) + f(z_1, \ldots, z_n)$$

iga $y_1, \ldots, y_n \in W$ ja $z_1, \ldots, z_n \in W'$ jaoks.

Tõestus: Et $ey_i = y_i$, $e'z_i = z_i$, $ez_i = 0$ ja $e'y_i = 0$, siis $(e + e')y_i = y_i$ ja $(e + e')z_i = z_i$. Lemma väide on järeldus järgmistest arvutustest:

$$\begin{aligned}
&f(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) = \\
&= f((e + e')(y_1 + z_1), \ldots, (e + e')(y_n + z_n)) = \\
&= (e + e')f(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) = \\
&= ef(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) + e'f(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) = \\
&= f(e(y_1 + z_1), \ldots, e(y_n + z_n)) + f(e'(y_1 + z_1), \ldots, e'(y_n + z_n)) = \\
&= f(y_1, \ldots, y_n) + f(z_1, \ldots, z_n) .
\end{aligned}$$

□

Käesolevas peatükis on meie eesmärgiks tuletada kaks üldist piisavat tingimust R-mooduli rikkuseks. Need esitatakse teoreemis 5. Tingimused näivad formaalselt võttes väga sarnased, teatud mõttes on nad üksteisega duaalsed, sellegipoolest on nende tõestused täiesti erinevad. Enne teoreemi tõestamist tõestame kaks lemmat. Esimene neist on pisut üldisem teoreemi 5 esimesest väitest, seda üldisemat väidet vajame hiljem lemma 10 tõestuses. See tõestus põhineb ideel, mida on kasutatud juba artiklis [2] (teoreem 4.1). Teist lemmat korpuste kloonidest kasutatakse teoreemi 5 teise rikkuse tingimuse tõestamiseks.

Klooniks hulgal A nimetatakse mingit hulga A lõpliku aarsusega funktsioonide hulka, mis sisaldab kõik projektsioonid (niisugused funktsioonid $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, kus n ja i on fikseeritud) ja on kinnine liitfunktsioonide moodustamise suhtes.

Näiteks, kui A on korpus, siis kõik lineaarsed funktsioonid, samuti kõik polünoomfunktsioonid moodustavad klooni hulgal A. Kui $\mathcal{C}$ on kloon hulgal A, siis kõigi hulga $\mathcal{C}$ n-aarsete funktsioonide hulka nimetatakse $\mathcal{C}$ n-aarseks osaks ja tähistatakse $\mathcal{C}_n$.

Lemma 5. *Olgu M lõplikumõõtmeline vektorruum üle korpuse F ja R olgu F-algebra $\mathrm{End}_F M$ mingi ühikelemendiga alamalgebra. Oletame, et e on mingi R idempotent nii, et $\dim(eM) = 1$ ja $0 \neq a \in eM$. Kui $\dim(Ra) \geqslant 2$, siis vektorruumi ${}_F M$ iga R-funktsiooni f ahend M alamruumile Ra on selle vektorruumi termfunktsiooni ahend.*

Tõestus: Olgu $\dim_F M = n$, $e' = 1 - e$ ja $W' = e'M \cap Ra$. Et Fa kujutab endast vektorruumi ${}_F M$ ühemõõtmelist alamruumi, mis on saadud kõikide korpuse F elementide korrutamisel elemendiga $a \in eM$, siis $eM = Fa \subseteq Ra$. Et lisaks $M = eM \oplus e'M$, siis

$$Ra = eM \oplus (e'M \cap Ra) = eM \oplus W' .$$

Et $\dim(Ra) \geqslant 2$ ja $\dim(eM) = 1$, siis $W' \neq \{0\}$.

Võtame vektorruumi M suvalise R-funktsiooni f. Tõestame väite induktsiooniga f aarsuse järgi. Kõigepealt olgu f unaarne funktsioon. Lemma 3 järgi säilitab funktsioon f alamruumi $eM = Fa$, seetõttu leidub $\alpha \in F$ nii, et $f(a) = \alpha a$. Nüüd, kui $m = ra$ on alamruumi Ra suvaline element, saame

$$f(m) = f(ra) = rf(a) = r(\alpha a) = \alpha(ra) = \alpha m ,$$

seega f ahend alamruumile Ra on vektorruumi ${}_FM$ termfunktsiooni ahend.

Eeldame nüüd, et kõigi mooduli M $(n-1)$-aarsete R-funktsioonide ahendid alamruumile Ra on termfunktsioonid. Olgu f mooduli M mingi n-aarne R-funktsioon. Kõigepealt näitame, et $f|_{W'}$ on termfunktsioon. Olgu $z_1, \ldots, z_n \in W'$ suvalised elemendid. Valime $r \in R$ sellise, et $ra = z_n$. Paneme tähele, et $a = ea$ ja $e'a = e'ea = 0$, $e'z_i = z_i$ ja $ez_i = 0$ iga $i = 1, \ldots, n$ jaoks, seega $z_i = z_i + 0 = e'z_i + rez_i = (e' + re)z_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ ning $z_n = 0 + ra = e'a + rea = (e' + re)a$. Arvutame:

$$\begin{aligned} f(z_1, \ldots, z_n) &= f((e' + re)z_1, \ldots, (e' + re)z_{n-1}, (e' + re)a) = \\ &= (e' + re)f(z_1, \ldots, z_{n-1}, a) = \\ &= e'f(z_1, \ldots, z_{n-1}, a) + ref(z_1, \ldots, z_{n-1}, a) = \\ &= f(e'z_1, \ldots, e'z_{n-1}, e'a) + f(rez_1, \ldots, rez_{n-1}, rea) = \\ &= f(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0) + f(0, \ldots, 0, z_n)\,. \end{aligned}$$

Sellest, et $f(x_1, \ldots, x_n)$ on R-funktsioon, järeldub kergesti, et ka funktsioonid $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ ja $f(0, \ldots, 0, x_n)$ on R-funktsioonid. Et viimastes on muutujaid vähem kui n, siis induktsiooni eelduse kohaselt on nad termfunktsioonid. Seega leiduvad $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ nii, et

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n$$

iga $z_1, \ldots, z_n \in W'$ jaoks.

Võtame nüüd $r \in R$ nii, et $0 \neq ra \in W'$. Siis suvaliste $y_1, \ldots, y_n \in Fa$ jaoks saame $ry_1, \ldots, ry_n \in W'$ ja

$$\begin{aligned} rf(y_1, \ldots, y_n) &= f(ry_1, \ldots, ry_n) = \\ &= \alpha_1(ry_1) + \ldots + \alpha_n(ry_n) = \\ &= r(a_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n)\,. \end{aligned}$$

Et r kujutab Fa bijektiivselt W' sisse, saame järeldada, et

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$$

iga $y_1, \ldots, y_n \in Fa$ jaoks. Oleme tõestanud, et f ahendid nii Fa kui W' peal annavad sama termfunktsiooni. Nüüd järeldub lemmast 4, et f ahend alamruumil Ra on samuti termfunktsioon $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. $\square$

Tähistatame lineaarsete nulli säilitavate funktsioonide klooni korpusel F sümboliga $\mathcal{L}$.

Lemma 6. *Olgu $\mathcal{C}$ kloon korpusel F, mis sisaldab klooni $\mathcal{L}$ ja langegu nende kloonide binaarosad kokku: $\mathcal{C}_2 = \mathcal{L}_2$. Siis $\mathcal{C} = \mathcal{L}$.*

Tõestus: Kõigepealt paneme tähele, et seosest $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ järeldub, et unaarsed funktsioonid αx, kus $\alpha \in F$, ja konstantne funktsioon 0 sisalduvad kloonis $\mathcal{C}$. Kasutades induktsiooni, eeldame, et $\mathcal{C}_n = \mathcal{L}_n$, kus $n \geqslant 2$. Olgu $f \in \mathcal{C}_{n+1}$. Võtame $\alpha \in F$ ning vaatleme funktsiooni

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, \alpha x_n)\,.$$

Kerge on veenduda, et $g(x_1, \ldots, x_n)$ kuulub klooni $\mathcal{C}$. Seega induktsiooni eelduse põhjal $g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}$, st leiduvad sellised $\beta_1, \ldots, \beta_n \in F$, et

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n$$

iga $x_1, \ldots, x_n \in F$ jaoks. Üldiselt sõltuvad kordajad β_i elemendist α, kuid võttes $x_n = 0$, saame

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0) = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{n-1} x_{n-1}\,,$$

mis näitab, et $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ ei sõltu elemendist α. Nüüd vaatleme funktsiooni

$$h(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_{n+1}) - \beta_1 x_1 - \ldots - \beta_{n-1} x_{n-1}\,.$$

Kuna $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$, siis $h \in \mathcal{C}$. Teisest küljest on kerge näha, et h sõltub ainult muutujatest x_n ja x_{n+1}. Tõepoolest, kui $x_n \neq 0$, siis leidub $\alpha \in F$ nii, et $x_{n+1} = \alpha x_n$ ja meil on $h(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \beta_n(\alpha) x_n$, kus α sõltub ainult muutujatest x_n ja x_{n+1}. Kui $x_n = 0$, siis vaatleme funktsiooni $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, x_{n+1})$, mis induktsiooni eelduse põhjal peab kuuluma klooni $\mathcal{L}$. Seetõttu leiduvad $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n+1}$ nii, et

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, x_{n+1}) = \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_{n-1} x_{n-1} + \gamma_{n+1} x_{n+1}$$

suvaliste $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1} \in F$ jaoks. Võttes siin $x_{n+1} = 0$, saame $\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_{n-1} x_{n-1} = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0) = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{n-1} x_{n-1}$, millest $\gamma_i = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Järelikult

$$\begin{aligned} &h(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, x_{n+1}) = \\ &= f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, x_{n+1}) - \beta_1 x_1 - \ldots - \beta_{n-1} x_{n-1} = \\ &= \gamma_{n+1} x_{n+1}\,, \end{aligned}$$

seega jällegi sõltub see ainult muutujast x_{n+1}. Niisiis meie oletuse põhjal $h \in \mathcal{L}$ ja $f = h + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{n-1} x_{n-1} \in \mathcal{L}$. □

Teoreem 5. *Olgu M lõplikumõõtmeline vektorruum üle korpuse F ja R olgu F-algebra* $\mathrm{End}_F M$ *mingi ühikelemendiga alamalgebra. Täitku R-moodul M üht järgmisest kahest tingimusest:*

(i) *Leidub idempotent $e \in R$ nii, et* $\dim(eM) = 1$ *ja* $\dim(Re) = \dim M \geqslant 2$.

(ii) *Leidub idempotent $e \in R$ nii, et* $\dim(eM) = 1$ *ja* $\dim(eR) = \dim M \geqslant 2$.

Siis on M rikas R-moodul.

Tõestus: Olgu $a \in eM$ suvaline nullist erinev element. Tähistame $e' = 1 - e$ ja $W' = e'M$. Siis ilmselt $ea = a$, $eM = Fa$ ja $M = Fa \oplus W'$.

(i) Seame igale Re elemendile x vastavusse elemendi xa. Näitame, et see kujutus φ sisestab Re moodulisse Ra. Olgu $x = re$, siis $xa = rea = ra \in Ra$. Et $\varphi(x+y) = (x+y)a = xa+ya = \varphi(x)+\varphi(y)$ ning $\varphi(sx) = (sx)a = s(xa) = s\varphi(x)$ iga $x, y \in Re$ ja $s \in R$ korral, siis on tegu R-moodulite homomorfismiga. Näitame, et kujutus φ on üksühene. Olgu $xa = 0$ ja $m \in M$ suvaline element. Et $M = Fa \oplus W'$, siis avaldub m kujul $m = \alpha a + e'm_1$, kus $\alpha \in F$, $m_1 \in M$. Nüüd $xm = x(\alpha a + e'm_1) = \alpha xa + ree'm_1 = 0 + 0 = 0$ suvaliselt valitud m elemendi jaoks, seega $xM = 0$. Mooduli M täpsusest järeldub nüüd, et siis $x = 0$, seega on kujutus φ üksühene.

Seega $\dim M = \dim(Re) \leqslant \dim(Ra) \leqslant \dim M$, millest $M = Ra$. Väide järeldub nüüd otseselt lemmast 5.

(ii) Olgu S vektorruumi ${}_FM$ kõikide selliste lineaarteisenduste vektorruum, mis kujutavad kogu M alamruumi Fa sisse. Et Fa on ühemõõtmeline, siis $\dim S = \dim M$. Et $eR \subseteq S$ ja teoreemi eelduse põhjal $\dim(eR) = \dim M$, siis $S = eR \subseteq R$ ja seega algebra R sisaldab vektorruumi ${}_FM$ kõik lineaarteisendused, mis kujutavad mooduli M alamruumi Fa sisse. Olgu $a_1, \ldots, a_n$ vektorruumi ${}_FM$ mingi baas, f suvaline n-aarne R-funktsioon moodulil M, ja

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \,,$$

kus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Nüüd leidub suvaliste $m_1, \ldots, m_n \in Fa$ jaoks $r \in R$ nii, et $ra_i = m_i$, $i = 1, \ldots, n$. Kasutades seda elementi r ning fakti, et f on R-funktsioon, saame me kergesti, et

$$f(m_1, \ldots, m_n) = \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n \,,$$

see tähendab, f ahend alamruumile Fa on termfunktsioon.

Olgu $\mathcal{C}$ kloon sellistest alamruumil Fa toimivatest funktsioonidest, millest igaüks on mooduli M mingi R-funktsiooni ahend. Lemma 3 tõttu on Fa kinnine mooduli M R-funktsioonide suhtes. Seega tegelikult koosnebki $\mathcal{C}$ kõigi R-mooduli M R-funktsioonide ahenditest alamruumile Fa. Ilmselt see kloon sisaldab $\mathcal{L}$ ja kuna me just tõestasime, et $\mathcal{C}_n = \mathcal{L}_n$, siis ka ilmselt $\mathcal{C}_2 = \mathcal{L}_2$. Märgime, et Fa saab samastada korpusega F. Seetõttu lemma 6 põhjal koosneb $\mathcal{C}$ täielikult vektorruumi ${}_FA$ termfunktsioonidest. Teiste sõnadega, M suvalise R-funktsiooni ahend alamruumil Fa on termfunktsioon.

Olgu nüüd $f(x_1, \ldots, x_s)$ suvaline R-funktsioon moodulil M ja olgu tema ahend alamruumil Fa termfunktsioon $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_s x_s$. Siis võttes $m_1, \ldots, m_s \in M$ ja sellise $r \in R$, et $rM \subseteq Fa$, saame me

$$\begin{aligned} r(f(m_1, \ldots, m_s)) &= f(rm_1, \ldots, rm_s) \\ &= \alpha_1(rm_1) + \cdots + \alpha_s(rm_s) \\ &= r(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_s m_s)\,. \end{aligned}$$

Kuna kõigi selliste funktsioonide r tuumade ühisosa on $\{0\}$, järeldame me, et $f(m_1, \ldots, m_s) = \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_s m_s$ kehtib kõigi $m_1, \ldots, m_s \in M$ jaoks.

□

Järgnevas esitame me algebra R elemendid ruutmaatriksitena üle korpuse F. Nagu tavaliselt, kui $a_1, \ldots, a_n$ on M baas üle F, siis element $r \in R$ samastatakse maatriksiga $r = (r_{ij})$, kus $ra_i = r_{1i}a_1 + \ldots + r_{ni}a_n$. Pärast sellist samastamist saab teoreem 5 järgmise kuju:

Teoreem 6. *Olgu M lõplikumõõtmeline vektorruum üle korpuse F ning R F-algebra* $\mathrm{End}_F M$ *ühikelemendiga alamalgebra. R-moodul M on rikas, kui vektorruumi* $\mathrm{End}_F M$ *mingi sobiva baasi suhtes kehtib üks järgmistest tingimustest:*

(i) *leidub selline i, et R sisaldab kõiki maatrikseid nullidega kõigis veergudes peale i. veeru;*

(ii) *leidub selline i, et R sisaldab kõiki maatrikseid nullidega kõigis veergudes peale i. rea.*

Tõestus: Järeldub teoreemist 5. □

3. Kolmemõõtmelised rikkad moodulid

Kogu selle peatüki ulatuses on M täpne moodul üle F-algebra R, kusjuures $\dim_F M = 3$. Tulemusena kirjeldame täielikult, millised neist moodulitest on rikkad. Paneme tähele, et väiksemamõõtmelisi rikkaid R-mooduleid on väga kerge kirjeldada. Kui $\dim_F M = 1$, siis binaarne funktsioon (1) on R-funktsioon, mis ilmselt ei ole termfunktsioon. Seega M ei saa olla rikas R-moodul.

Samuti ei saa R-moodul olla rikas, kui R on kahemõõtmeline üle F. Tõepoolest, kõik kahemõõtmelised algebrad on kommutatiivsed, seega on nende tsenter mittetriviaalne.

Allesjäänud juhul, kus $\dim_F M = 2$ ja $\dim_F R \geqslant 3$, saame kasutada teoreemi 5. Tõepoolest, siis sõltuvalt sellest, kas R-moodul M on lihtne või mitte, R kas sisaldab kõik vektorruumi ${}_M F$ lineaarteisendused või pärast üleminekut sobivale baasile vektorruumis ${}_F M$ saab seda samastada kõigi teist järku ülemiste kolmnurkmaatriksite algebraga üle F.

Alustame lihtsa tähelepanekuga.

Lemma 7. *Kui algebra R on poollihtne, kuid mitte lihtne, siis moodul M ei ole rikas.*

Tõestus: Iga poollihtne algebra on lihtsate algebrate otsesumma. Et algebra R ei ole lihtne, on tegu vähemalt kahe algebra otsesummaga ja sellistel algebratel on olemas mittetriviaalne tsenter. $\square$

Järgmisena lahendame probleemi juhul, kui R-moodul M on lihtne.

Lause 1. *Kui R-moodul M on lihtne, siis see on rikas ainult siis, kui R on vektorruumi ${}_F M$ kõigi lineaarteisenduste ring.*

Tõestus: Kui R on vektorruumi ${}_F M$ kõigi lineaarteisenduste ring, siis on M rikas teoreemi 5 põhjal.

Eeldame nüüd, et M on rikas R-moodul. Et M on täpne lihtne R-moodul ja R on lõplikumõõtmeline, siis teoreemi 2 tõttu on R isomorfne kõigi maatriksite ringiga üle korpuse $K = \mathrm{End}_R M$. Schuri lemma järgi on K korpus (üldiselt mittekommutatiivne), mille tsentris sisaldub korpus F. Et M on samuti K-moodul, siis kehtib võrdus

$$\dim_F K \cdot \dim_K M = \dim_F M = 3\,.$$

Seega on kaks võimalust: K-vektorruumi M mõõde on kas 1 või 3. Esimesel juhul on K korpuse F kuuplaiend, seega lemma 2 põhjal on ta kommutatiivne korpus. Et R peab nüüd olema 1-mõõtmelise K-vektorruumi kõigi lineaarteisenduste ring, siis $R = K$, seega R on kommutatiivne, millest järeldub, et M ei ole rikas.

Kui $\dim_F K = 1$, siis $K = F$ ning R on ${}_F M$ kõigi lineaarteisenduste ring. □

Kui M ei ole lihtne R-moodul, siis on tal kompositsioonijada pikkusega vähemalt 2. Kõik selle jada faktorid on lihtsad R-moodulid, mis võivad olla isomorfsed või mitte. Olgu meil paarikaupa mitteisomorfsed R-moodulid $M_1, \ldots, M_k$. Siis, kuna R on lõplikumõõtmeline algebra, on iga faktoralgebra $R/\mathrm{Ann}M_i$ isomorfne kõigi maatriksite algebraga $R_i = \mathrm{Mat}_{n_i}F_i$, kus $F_i = \mathrm{End}\,_R M$, ning meil on kanooniline homomorfism ringist R ringi $R_1 \times \ldots \times R_k$. Tänu teoreemile 3 teame, et see homomorfism on tegelikult pealekujutus.

Järgmiseks vaatleme me juhtu, kus R-moodulil M on kompositsioonijada pikkusega 2.

Lause 2. *Kui R-moodulil M on kompositsioonijada pikkusega 2, siis on järgmised väited samaväärsed:*

1. *M on rikas;*
2. *R ei ole poollihtne;*
3. *leiab aset üks teoreemi 5 kahest juhust.*

Tõestus: Järeldumine (3) $\Rightarrow$ (1) kehtib tänu teoreemile 5.

Et algebral R on kaks mitteisomorfset lihtsat moodulit, ei saa ta olla lihtne – erinevate mõõtmetega lihtsatel moodulitel peavad olema erinevad annullaatorid, seetõttu on ringil kaks erinevat ideaali, millest kumbki ei saa olla R ise (kuna see on annullaatoriks vaid nullmoodulile). Kui R oleks poollihtne, ei saaks moodul M lemma 7 põhjal olla rikas. Seega (1) $\Rightarrow$ (2) järeldub lemmast 7.

Jääb üle tõestada, et väitest (2) järeldub väide (3). Eeldame kõigepealt, et moodulil ${}_R M$ on kompositsioonijada $0 \leqslant W \leqslant M$, kus $\dim_F W = 1$. Siis saame valida sellise F-baasi $a_1, a_2, a_3 \in M$ nii, et $a_1 \in W$. Seega saab elemente $r \in R$ samastada maatriksitega kujul

$$\begin{pmatrix} \mu & \rho & \sigma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3 F\,. \tag{2}$$

Olgu S maatriksi (2) paremal all nurgas asuvate maatriksite $s = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ algebra. Need maatriksid kirjeldavad ringi R toimimist lihtsal R-moodulil M/W, tegelikult on algebra S isomorfne faktoralgebraga $R/\mathrm{Ann}(M/W)$. Olgu $K = \mathrm{End}_S(M/W)$. Siis Schuri lemma põhjal on K korpus ja tiheduse teoreemi järgi $S = \mathrm{End}_K(M/W)$. Nii R-moodulit M/W kui ka korpust K võib vaadelda kui vektorruumi üle korpuse F, kusjuures nende mõõtmete jaoks kehtib seos

$$\dim_F(M/W) = \dim_F K \cdot \dim_K(M/W)\,.$$

Et $\dim_F(M/W) = 2$, siis on kaks võimalust:

- $\dim_F K = 1$ ehk $K = F$, siis $S = End_F(M/W) = \mathrm{Mat}_2 F$;
- $\dim_F K = 2$, siis $S = K$ on korpuse F ruutlaiend.

Et lihtsad R-moodulid W ja M/W ei ole isomorfsed, siis teoreemi 3 põhjal sisaldab see maatrikseid suvaliselt valitud elemendi $\mu \in F$ ja ploki $s \in S$ jaoks.

Et R ei ole poollihtne, sisaldab see nullist erinevat radikaali J ja kuna J annulleerib nii W kui M/W, saab see sisaldada ainult selliseid maatrikseid (2), milles $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \mu = 0$, see tähendab, et $1 \leqslant \dim J \leqslant 2$.

Vaatleme ideaali J kuuluva maatriksi ja suvalise R maatriksi korrutist:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu & \rho & \sigma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a + \gamma b & \beta a + \delta b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kui $S = \mathrm{Mat}_2 F$, siis võime kordajad α, β, γ ja δ valida suvaliselt. Ilmselt on võimalik valida need nii, et ühel juhul on $\alpha a + \gamma b = 0$ ja $\beta a + \delta b \neq 0$, teisel juhul aga $\alpha a + \gamma b \neq 0$ ja $\beta a + \delta b = 0$. Seega on $\dim J = 2$.

Kui S on korpuse F ruutlaiend, siis on S maatriksid kujul $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ k\beta & \alpha \end{pmatrix}$, kus k on mingi korpuse F fikseeritud element, mis ei oma korpuses F ruutjuurt. Ka sel juhul on võimalik veenduda, et J sisaldab maatrikseid

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kus $a \neq 0 \neq b$, ja seega $\dim J = 2$.

Niisiis on mõlemal juhul $\dim J = 2$, millest järeldub, et R sisaldab maatrikseid, mille esimene rida on valitud suvaliselt ning kõik ülejäänud elemendid võrduvad nulliga. Seega on meil tegemist just juhuga (ii) teoreemist 5, mille kohaselt R-moodul M on rikas.

Sarnaste arutlustega saab näidata, et juhul $\dim_F W = 2$ rakendub juht (i) teoreemist 5. □

Nüüd oletame, et moodulil ${}_R M$ on kompositsioonijada pikkusega 3. Sellisel juhul saame leida ${}_F M$ baasi a_1, a_2, a_3 nii, et kõik elemendid $r \in R$ on esitatavad kolmnurkmaatriksite abil:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \rho & \sigma \\ 0 & \beta & \tau \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Selle peatüki lõpuni oletame, et R elemendid on esitatavad maatriksitega kujul (3). Ilmselt $r \in J$ parajasti siis, kui $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

See juht on keerulisem ja me peame eristama mitu alamjuhtu. Põhjuseks on see, et mõned ühemõõtmelistest kompositsioonifaktoritest võivad olla isomorfsed R-moodulid. Maatriksite keeles tähendab see, et R on esitatav selliste maatriksite kujul, kus diagonaali elementidest mõned või kõik on võrdsed.

Kõigepealt vaatleme juhtu, kus kõik kolm R-mooduli M kompositsioonifaktorit on isomorfsed, st R on esitatav selliste maatriksite kujul, kus kõik diagonaalielemendid on võrdsed.

Lemma 8. *Kui R-moodulil M on kompositsioonijada pikkusega 3 ja kõik kompositsioonifaktorid on isomorfsed, siis kas $R = F$ või on algebral R mittetriviaalne tsenter ja seega M ei ole rikas.*

Tõestus: Meie eelduste põhjal iga $r \in R$ on ühe skalaari $\alpha \in F$ ja mingi $s \in J$ summa. Kui $R = F$, siis funktsioon (1) on R-funktsioon, mis ei ole termfunktsioon. Kui $R \neq F$, siis vaatleme korrutist J^2. Kui $J^2 \neq 0$, siis moodustame alamhulga J^2 poolt tekitatud algebra R ideaali $X = \langle J^2 \rangle$. Kui aga $J^2 = 0$, siis olgu $X = J$. Nüüd saame mõlemal juhul $XJ = JX = 0$ (kuna $J^3 = 0$), kusjuures X on algebra R radikaalis sisalduv nullist erinev ideaal. Et $R = F + J$, siis X sisaldub R tsentris ja seega on ringil R mittetriviaalne tsenter. □

Järgmine lemma lihtsustab meie analüüsi juhul, kui R-moodulil M on vähemalt kaks mitteisomorfset kompositsoonifaktorit.

Lemma 9. *Kui R-moodulil M on kompositsioonijada pikkusega 3 ja mitte kõik kompositsioonifaktorid pole isomorfsed, siis leiab aset vähemalt üks järgmistest kolmest võimalusest: 1) $\dim J = 3$; 2) $\rho = 0$ kõigis radikaali J kuuluvates maatriksites; 3) $\tau = 0$ kõigis radikaali J kuuluvates maatriksites.*

Tõestus: Oletame, et kumbki kahest viimasest võimalusest ei esine, st J sisaldab maatrikseid

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 & \rho_1 & \sigma_1 \\ 0 & 0 & \tau_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 0 & \rho_2 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & \tau_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kus $\rho_1 \neq 0$ ja $\tau_2 \neq 0$. Siis ilmselt J sisaldab maatriksit $r_1 r_2$, kus $\rho = \tau = 0$ ja $\sigma = \rho_1 \tau_2 \neq 0$.

Olgu $0 \leqslant W_1 \leqslant W_2 \leqslant M$ mooduli M kompositsioonijada ja oletame kõigepealt, et W_1 ja W_2/W_1 ei ole isomorfsed. Siis teoreemi 3 põhjal sisaldab R maatrikseid

$$r_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \rho_3 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & \tau_3 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad r_4 = \begin{pmatrix} 0 & \rho_4 & \sigma_4 \\ 0 & \beta_4 & \tau_4 \\ 0 & 0 & \gamma_4 \end{pmatrix},$$

kus $\alpha_3 \neq 0$ ja $\beta_4 \neq 0$. Siis elemendil $r_3 r_1 \in J$ on $\rho = \alpha_3 \rho_1 \neq 0$ ja $\tau = 0$, samas kui elemendil $r_4 r_2$ on $\rho = 0$ ja $\tau = \beta_4 \tau_2 \neq 0$. Sellest järeldub, et $\dim J = 3$.

Olgu $W_1 \cong W_2/W_1$, kuid $W_1 \ncong M/W_2$. Siis teoreemi 3 põhjal sisaldab R maatrikseid

$$r_5 = \begin{pmatrix} \alpha_5 & \rho_5 & \sigma_5 \\ 0 & \alpha_5 & \tau_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad r_6 = \begin{pmatrix} 0 & \rho_6 & \sigma_6 \\ 0 & 0 & \tau_6 \\ 0 & 0 & \gamma_6 \end{pmatrix},$$

kus $\alpha_5 \neq 0$ ja $\gamma_6 \neq 0$. Pärast $r_1 r_5$ ja $r_2 r_6$ arvutamist järeldame taas, et $\dim J = 3$. □

Vaatleme nüüd selliseid R-mooduleid, millel on vähemalt kaks mitteisomorfset kompositsioonifaktorit.

Kui $J = 0$, siis R on poollihtne, kuid mitte lihtne, sest ta omab kahte mitteisomorfset lihtsat R-moodulit. Seega lemma 7 tõttu ei ole M rikas. Järelikult võime edaspidi eeldada, et $J \neq 0$.

Alustame alamjuhust, kus on kolm mitteisomorfset kompositsioonifaktorit, see tähendab, $\dim(R/J) = 3$. Teoreemist 3 järeldub, et sel juhul sisaldab R maatrikseid suvaliste diagonaalielementidega α, β, γ.

Erinevate J mõõtmete juhte vaatleme eraldi. Kui $\dim J = 3$, siis R koosneb kõigist ülemistest diagonaalmaatriksitest üle F ja teoreemi 5 mõlemad tingimused kehtivad. Niisiis sellisel juhul on M rikas.

Olgu nüüd $1 \leqslant \dim J \leqslant 2$, seega $4 \leqslant \dim R \leqslant 5$. Kasutades lemmat 9 oletame kõigepealt, et J kõigis maatriksites on $\rho = 0$. Nüüd leidub kas üks (kui $\dim R = 5$) või kaks (kui $\dim R = 4$) lineaarset homogeenset võrrandit, mida R kuuluvate maatriksite (3) – ja ainult selliste maatriksite – elemendid rahuldavad. Et $\alpha = \beta = \gamma = 0$ puhul peab olema $\rho = 0$ iga R maatriksi jaoks, siis saame ühe nendest võrranditest valida kujul

$$k\alpha + \ell\beta + m\gamma + v\rho = 0\,, \tag{4}$$

kus $v \neq 0$. Kasutades fakti, et R on korrutamise suhtes kinnine, saame (4) lihtsustada kujule $k\alpha - k\beta + v\rho = 0$ ehk $\rho = u(\beta - \alpha)$, kus $u = k/v$. Tõepoolest, olgu $r_1, r_2 \in R$ kaks maatriksit kujul (3) elementidega α_i, β_i, γ_i, ρ_i, σ_i, τ_i, $i = 1, 2$. Et r_1, r_2 ja $r_1 r_2$ elemendid peavad rahuldama võrrandit (4), saame me:

$$\begin{aligned} k\alpha_1 + \ell\beta_1 + m\gamma_1 + v\rho_1 &= 0\,,\\ k\alpha_2 + \ell\beta_2 + m\gamma_2 + v\rho_2 &= 0\,,\\ k\alpha_1\alpha_2 + \ell\beta_1\beta_2 + m\gamma_1\gamma_2 + v(\alpha_1\rho_2 + \rho_1\beta_2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Teoreemi 3 kasutades valime me r_1 ja r_2 nii, et $\alpha_1 = \beta_2 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$. Siis saame kolmandast võrrandist $m = 0$. Seega, lahutades kolmandast võrrandist arvuga β_2 korrutatud esimese ja arvuga α_1 korrutatud teise võrrandi, saame $(k + \ell)\alpha_1\beta_2 = 0$. Et me saame vabalt valida r_1 ja r_2 nii, et $\alpha_1 \neq 0$ ja $\beta_2 \neq 0$, saame $k + \ell = 0$. Nüüd baasivahetus $a_1' = a_1$, $a_2' = a_2 + ua_1$, $a_3' = a_3$ viib R maatriksid kujule

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \sigma \\ 0 & \beta & \tau \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Seega juhul $\dim R = 5$ järeldame me, et R sisaldab kõiki maatrikseid, kus esimesed kaks veergu on nullid ja viimased veerus on suvaline vektor, niisiis teoreemi 5 põhjal on sellisel juhul moodul ${}_RM$ rikas.

Kui $\dim R = 4$, siis $\dim J = 1$ ning lisaks võrdusele $\rho = 0$ peavad maatriksi $r \in R$ elemendid rahuldama veel üht võrrandit kujul

$$k_1\alpha + \ell_1\beta + m_1\gamma + s_1\sigma + t_1\tau = 0\,.$$

Vaatleme võrdusi

$$\begin{aligned} k_1\alpha_1 + \ell_1\beta_1 + m\gamma_1 + s_1\sigma_1 + t_1\tau_1 &= 0\,,\\ k_1\alpha_2 + \ell_1\beta_2 + m\gamma_2 + s_1\sigma_2 + t_1\tau_2 &= 0\,,\\ k_1\alpha_1\alpha_2 + \ell_1\beta_1\beta_2 + m_1\gamma_1\gamma_2 + s_1(\alpha_1\sigma_2 + \sigma_1\gamma_2) + t_1(\beta_1\tau_2 + \tau_1\gamma_2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Võttes siin $\alpha_2 = \beta_1 = \gamma_2 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$, saame $s_1\sigma_2 = 0$. Nüüd on meil kaks võimalust: kas $\sigma = 0$ alati, kui $\alpha = \gamma = 0$, või $s_1 = 0$. Esimesel juhul peab kehtima mingi võrdus kujul $k_2\alpha + m_2\gamma + s_2\sigma = 0$. Kirjutades ka selle võrduse jaoks kolm võrdust kahe maatriksi ja nende korrutise jaoks, ning lahutades saadud kolmandast võrdusest arvuga γ_2 korrutatud esimese ja arvuga α_1 korrutatud teise võrduse, saame, et $\sigma = u_2(\gamma - \alpha)$, ning pärast baasivahetust $a_1'' = a_1'$, $a_2'' = a_2'$, $a_3'' = a_3' + u_2a_1'$ saab R esitada maatriksitega kujul

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \tau \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Et siis kommuteeruvad algebra R kõik elemendid maatriksiga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R\,,$$

siis on algebral R ilmselt olemas mittetriviaalne tsenter ja moodul ${}_RM$ ei ole rikas.

Teisel juhul, võttes kolmandas võrduses $\beta_1 = \gamma_2 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, saame $k_1 = 0$; lahutades kolmandast võrdusest arvuga γ_2 korrutatud esimese ja arvuga β_1 korrutatud teise võrduse, saame $\tau = u_1(\gamma - \beta)$. Pärast baasivahetust $a_1'' = a_2'$, $a_2'' = a_1'$, $a_3'' = a_3' + u_1a_2'$ saab R esitada maatriksitega kujul

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \sigma \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

mis on samaväärne maatriksiga (5).

Juht, kus J koosneb maatriksitest, kus $\tau = 0$, on sarnane. Algul saame baasivahetuse $a_1' = a_1$, $a_2' = a_2$, $a_3' = a_3 + ua_2$ abil, kus $\tau = u(\gamma - \beta)$, viia R maatriksid kujule

$$\begin{pmatrix} \alpha & \rho & \sigma \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Siin juhul $\dim R = 5$ sisaldab R kõiki maatrikseid, kus viimased kaks rida on nullid ja esimeses reas on suvaline vektor, seega moodul ${}_RM$ on rikas. Kui $\dim R = 4$, siis saame juhul $k_2\alpha + \ell_2\beta + r_2\rho = 0$ muutujavahetuse $a_1'' = a_1'$, $a_2'' = a_3'$, $a_3'' = a_2' + u_2a_1'$ abil, kus $\rho = u_2(\beta - \alpha)$, ja juhul $r_1 = 0$ muutujavahetuse $a_1'' = a_1'$, $a_2'' = a_2'$, $a_3'' = a_3' + u_1a_1'$ abil, kus $\sigma = u_1(\gamma - \alpha)$, viia R maatriksid kujule

$$\begin{pmatrix} \alpha & \rho & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

ja algebra R kõik elemendid kommuteeruvad maatriksiga

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in R\,,$$

seega algebral R on mittetriviaalne tsenter. Niisiis on tänu lemmale 9 juht $\dim R/J = 3$ täielikult kaetud.

Olgu nüüd kaks kolmest ${}_RM$ kompositsioonifaktorist isomorfsed. Ekvivalentselt see tähendab, et $\dim R/J = 2$, ning maatriksite keeles, et R maatriksid rahuldavad kas tingimust $\alpha = \beta$ või $\beta = \gamma$ või $\alpha = \gamma$, kuid mitte tingimust $\alpha = \beta = \gamma$. Kahjuks tuleb meil neid kolme juhtu eraldi vaadelda.

Olgu kõigepealt $\alpha = \beta$. Nüüd kui $\dim J = 3$, siis teoreemi 3 põhjal sisaldab R kõiki maatrikseid suvalise vektoriga kolmandas ja nullidega esimeses kahes veerus. Seega teoreemi 5 põhjal on M rikas. Jääb veel vaadelda juhte $1 \leqslant \dim J \leqslant 2$. Lemma 9 põhjal neil juhtudel kas $\rho = 0$ või $\tau = 0$ kõigis J maatriksites.

Kui J koosneb maatriksitest, kus $\rho = 0$, siis jätkates sarnaselt vastavale juhule $\dim R/J = 3$ jaoks, leiame, et peab kehtima $\rho = 0$ kõigi R maatriksite jaoks ning ringi R saab seega esitada maatriksitena kujul

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \sigma \\ 0 & \alpha & \tau \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

*endequation Kui $\dim J = 2$, siis sisaldab R kõiki maatrikseid, mille esimesed kaks veergu on nullid ja viimases veerus on suvaline vektor, seega moodul M on rikas. Kui $\dim J = 1$, siis saame, et kas $s = 0$, $\tau = u_2(\gamma - \alpha)$ ja muutujavahetuse $a_1' = a_2$, $a_2' = a_1$, $a_3' = a_3 + u_2 a_2$ abil saame viia R maatriksid kujule

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \tau \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{6}$$

või saame avaldada $\sigma = u_1(\gamma - \alpha) + v_1 \tau$ ning muutujavahetuse $a_1' = a_1$, $a_2' = a_2 + v_1 a_1$, $a_3' = a_3 + u_1 a_1$ abil saame viia R maatriksid samuti kujule (6). See juhtum on, eriti meie töö põhieesmärgi seisukohalt, huvitav. On lihtne näha, et sellel juhul on ringil R triviaalne tsenter, kuid tema tsentralisaator ringis $\mathrm{Mat}_3 F$ on mittetriviaalne, näiteks kommuteerub maatriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin R \tag{7}$$

kõikide maatriksitega kujul (6). Seega ei ole moodul ${}_R M$ rikas.

Nüüd oletame, et J koosneb maatriksitest, kus $\tau = 0$ (ja endiselt $\alpha = \beta$). Siis sarnaste elementaarsete meetodite rakendamise tulemusena, kasutades muutujavahetust $a_1' = a_1$, $a_2' = a_2$, $a_3' = a_3 + u a_2$, kus $\tau = u(\gamma - \alpha)$, saame R esitada maatriksite poolt kujul

$$\begin{pmatrix} \alpha & \rho & \sigma \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Juht, kus $\rho = 0$ kõigi J elementide jaoks, on meil juba vaadeldud, seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

ja kuna see kommuteerub R kõigi elementidega, siis moodulil M leidub mittetriviaalne tsenter.

Olgu nüüd $\beta = \gamma$. Nüüd, kui $\dim J = 3$, siis teoreemi 3 põhjal sisaldab R kõiki maatrikseid suvalise vektoriga esimeses ja nullidega viimases kahes reas. Seega teoreemi 5 põhjal on M rikas. Jääb veel vaadelda juhte $1 \leqslant \dim J \leqslant 2$. Lemma 9 põhjal neil juhtudel jällegi kas $\rho = 0$ või $\tau = 0$ kõigis J maatriksites.

Kui J koosneb maatriksitest, kus $\tau = 0$, siis analoogiliste meetodite abil saame $\tau = 0$ kõigis R maatriksites ning R saame esitada maatriksite poolt kujul

$$\begin{pmatrix} \alpha & \rho & \sigma \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Kui $\dim J = 2$, siis sisaldab R kõiki maatrikseid, mille viimased kaks rida on nullid ja esimeses reas on suvaline vektor, seega moodul M on rikas. Kui $\dim J = 1$, siis saame, et kas $s = 0$, $\rho = u_2(\beta - \alpha)$ ja muutujavahetuse $a_1' = a_1$, $a_2' = a_3$, $a_3' = a_2 + u_2 a_1$ abil saame viia R maatriksid kujule

$$\begin{pmatrix} \alpha & \rho & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{9}$$

või saame me avaldada σ kujul $\sigma = u_1(\beta - \alpha) - v_1\rho$ ja seega viib muutujavahetus $a_1' = a_1$, $a_2' = a_2$, $a_3' = a_3 + u_1 a_1 + v_1 a_2$ kõik R maatriksid taas kujule (9). On lihtne näha, et sellel juhul on algebral R triviaalne tsenter, kuid tema tsentralisaator ringis $\mathrm{Mat}_3 F$ on mittetriviaalne, näiteks kommuteerub maatriks

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin R$$

kõikide maatriksitega kujul (9). Seega ei ole moodul ${}_R M$ rikas.

Nüüd oletame, et J koosneb maatriksitest, kus $\rho = 0$ (ja endiselt $\beta = \gamma$), siis jätkates sarnaselt vastavale juhule $\dim R/J = 3$ jaoks, leiame, et saame muutujavahetuse $a_1' = a_1$, $a_2' = a_2 + u a_1$, $a_3' = a_3$, kus $\rho = u(\beta - \alpha)$, abil viia kõik R maatriksid kujule

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \sigma \\ 0 & \beta & \tau \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}; \tag{10}$$

juht, kus $\tau = 0$ kõigis J maatriksites, on meil eelpool vaadeldud, seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et maatriks

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

ja kuna see kommuteerub R kõigi elementidega, siis algebral R leidub mittetriviaalne tsenter.

Olgu lõpuks $\alpha = \gamma$, see tähendab, et R maatriksid on kujul

$$\begin{pmatrix} \alpha & \rho & \sigma \\ 0 & \beta & \tau \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Kui $\dim J = 3$, siis maatriks

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

kommuteerub R kõigi elementidega ja seega leidub algebral R mittetriviaalne tsenter. Kui $1 \leqslant \dim J \leqslant 2$, siis peab kas kõigis J maatriksites olema kas $\rho = 0$ või $\tau = 0$.

Kui J koosneb maatriksitest, kus $\rho = 0$, siis jätkates sarnaselt vastavale juhule $\dim R/J = 3$ jaoks leiame, et saame muutujavahetuse $a_1' = a_2 + ua_1$, $a_2' = a_1$, $a_3' = a_3$, kus $\rho = u(\beta - \alpha)$, abil viia kõik R maatriksid kujule (10), mis on meil juba vaadeldud.

Kui J koosneb maatriksitest, kus $\tau = 0$, siis leiame, et saame muutujavahetuse $a_1' = a_1$, $a_2' = a_3 + ua_2$, $a_3' = a_2$, kus $\tau = u(\alpha - \beta)$, abil viia kõik R maatriksid kujule (8), mis on meil samuti juba vaadeldud.

Maatriksesitused juhtudel (6) ja (9) on väga sarnased. Tõepoolest, neile kahele juhule vastavad algebrad R on isomorfsed ja mõlemal on mittetriviaalne tsentralisaator ringis $\mathrm{Mat}_3 F$. Seega kummalgi juhul ei ole R-moodul M rikas. Siiski on olemas ka erinevus, mis on meie põhieesmärki silmas pidades väga oluline. Järgmises peatükis näeme, et (6) tüüpi maatriksesituse puhul on R-moodulil M ainult lineaarsed unaarsed R-funktsioonid, juhul (9) leidub aga ka mittelineaarne unaarne R-funktsioon. Defineerime funktsiooni f moodulil M valemi

$$f(x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3) = \begin{cases} x_3a_3\,, & \text{kui } x_2 = 0 \\ 0\,, & \text{kui } x_2 \neq 0 \end{cases} \tag{11}$$

kohaselt. Ilmselt ei ole f termfunktsioon. Et f on R-funktsioon, järeldub võrdusest

$$\begin{pmatrix} \alpha & \rho & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} \alpha & \rho & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$$

iga ratsionaalarvulise α, β, ρ ja x_1, x_2, x_3 jaoks. Seda võib kontrollida, vaadeldes kolme juhtu: 1) $x_2 = 0$; 2) $x_2 \neq 0$, kuid $\beta = 0$; ja 3) $x_2 \neq 0$ ja $\beta \neq 0$.

Selle peatüki tulemused on kokku võetud teoreemis 7.

Teoreem 7. *Olgu R lõplikumõõtmeline algebra üle korpuse F ja olgu M selline vasakpoolne R-moodul, et $\dim_F M = 3$. Siis M on rikas parajasti siis, kui leiab aset üks teoreemi 5 juhtudest. Kui M ei ole rikas, siis R on isomorfne korpusega F, omab mittetriviaalset tsentrit või maatriksesitust kujul (6) või (9).*

4. Rakendus Abeli rühmadele

Nüüd kasutame saadud tulemusi astakuga 3 väändeta Abeli rühmade endoprimaalsuse probleemi lahendamise jaoks. Seetõttu siinses peatükis $F = \mathbb{Q}$. Teoreemist 7 järeldub otseselt, et suur enamus sellistest rühmadest Ajaguneb kolme klassi: 1) need, mille endomorfismiring E langeb kokku nende tuumaringiga ja mis seetõttu ei saa olla endoprimaalsed; 2) need, mille endomorfismiringil on mittetriviaalne tsenter ja mis seetõttu ei saa olla endoprimaalsed ning 3) need, mille korral $\mathbb{Q}$-vektorruum $M = A[\mathbb{Z}^{-1}]$ on rikas üle $\mathbb{Q}$-algebra $R = E[\mathbb{Z}^{-1}]$ ja mis seega on endoprimaalsed. Spetsiaalset kohtlemist vajavad kaks juhtu, kus algebral R on maatriksesitus kujul (6) või (9). Neid juhte käsitleb lause 3. Eelnevalt vajame me järgmist lemmat.

Lemma 10. *Olgu F-algebral R maatriksesitus kujul (6). Siis M iga R-funktsioon on vektorruumi $_FM$termfunktsiooni ja allpool kirjeldatud spetsiaalse R-funktsiooni summa.*

Tõestus: Nagu ennegi, olgu a_1, a_2, a_3 vektorruumi $_FM$ baas. Tähistame $W_i = Fa_i$, $W_{ij} = W_i + W_j$, $i, j = 1, 2, 3$. Olgu $g\colon W_1^n \to W_{12}$ suvaline funktsioon, mis kommuteerub skalaaridega $\alpha \in F$ korrutamistega, ning olgu π_1 ja $\pi_{12} = e$ R-mooduli M projektsioonid vastavalt W_1 ja W_{12} peale. Paneme tähele, et $e \in R$. Defineerime $f\colon M^n \to M$ valemiga

$$f(z_1, \dots, z_n) = g(\pi_1(z_1), \dots, \pi_1(z_n))\,. \tag{12}$$

On kerge kontrollida, et kõik sellised funktsioonid f on R-funktsioonid. Tõepoolest, kuna algebra R iga element on samastatav maatriksiga kujul (6), siis alamruumi W_{12} elementide korrutamine elemendiga $r \in R$ taandub nende korrutamisele maatriksi r ülemises vasakpoolses nurgas oleva skalaariga α. Seega,

$$\begin{aligned} f(rz_1, \dots, rz_n) &= g(\pi_1(rz_1), \dots, \pi_1(rz_n)) \\ &= g(r\pi_1(z_1), \dots, r\pi_1(z_n)) \\ &= g(\alpha\pi_1(z_1), \dots, \alpha\pi_1(z_n)) \\ &= \alpha g(\pi_1(z_1), \dots, \pi_1(z_n)) \\ &= rg(\pi_1(z_1), \dots, \pi_1(z_n)) \\ &= rf(z_1, \dots, z_n)\,. \end{aligned}$$

Järgnevas viitame valemiga (12) määratud funktsioonidele f kui *spetsiaalsetele R-funktsioonidele.*

Olgu nüüd f suvaline mooduli M n-aarne R-funktsioon. Lemma 5 kohaselt on $f|_{W_{23}}$ termfunktsioon. Seega meie väide on tõestatud, kui me näitame, et iga R-funktsioon f, mille ahend moodulil W_{23} on nullfunktsioon, on spetsiaalne. Lemma 4 järgi on meil olemas lahutus $f = (f|_{W_{12}}, f|_{W_3})$, mis koos võrdusega $f|_{W_{23}} = 0$ (millest ka $f|_{W_3} = 0$) annab

$$f(z_1, \ldots, z_n) = f(ez_1, \ldots, ez_n) + 0 = f(ez_1, \ldots, ez_n) \tag{13}$$

iga $z_1, \ldots, z_n \in M$ jaoks. Olgu $ez_n = x_1a_1 + x_2a_2$ ja olgu $s \in R$ selline, et $sa_1 = sa_2 = 0$, $sa_3 = x_2a_2$. Siis

$$\begin{aligned}
&f(ez_1, \ldots, ez_n) = \\
&= f((e+s)ez_1, \ldots, (e+s)ez_{n-1}, (e+s)(x_1a_1 + a_3)) = \\
&= (e+s)f(ez_1, \ldots, ez_{n-1}, x_1a_1 + a_3) = \\
&= ef(ez_1, \ldots, ez_{n-1}, x_1a_1 + a_3) + sf(ez_1, \ldots, ez_{n-1}, x_1a_1 + a_3) = \\
&= f(ez_1, \ldots, ez_{n-1}, x_1a_1) + f(0, \ldots, 0, x_2a_2) = \\
&= f(ez_1, \ldots, ez_{n-1}, x_1a_1) = \\
&= f(ez_1, \ldots, ez_{n-1}, \pi_1(z_n))\,.
\end{aligned}$$

Kasutades sarnast arutlust veel $n-1$ korda, saame, et

$$f(z_1, \ldots, z_n) = f(\pi_1(z_1), \ldots, \pi_1(z_n))\,,$$

mis koos valemiga (13) annab valemi (12), kus funktsiooni g rollis on f ahend alammoodulil W_1. Paneme tähele, et f kujutab W_{12} iseendasse lemma 3 põhjal, seega g kujutab alammooduli W_1 alammoodulisse W_{12}. Kokkuvõttes olemegi näidanud, et f on spetsiaalne R-funktsioon. □

Lause 3. *Olgu A astakuga 3 väändeta Abeli rühm ja E tema endomorfismiring. Kui $\mathbb{Q}$-algebral $R = E[\mathbb{Z}^{-1}]$ on maatriksesitus kujul (6), siis A on endoprimaalne.*

Tõestus: Paneme tähele, et see, et R-moodul $M = A[\mathbb{Z}^{-1}]$ ei ole rikas, ei tähenda automaatselt, et A ei ole endoprimaalne. Funktsioon $x \mapsto rx$, kus r on maatriks (7) või selle mistahes kordne, ei saa olla A endofunktsioon, sest kui ta oleks, siis peaks ta kuuluma ringi R. Siiski pole *a priori* selge, et rühmal A ei ole teisi endofunktsioone.

Olgu f suvaline A n-aarne endofunktsioon ja oletame, et f ei ole termfunktsioon. Me teame, et seda saab laiendada mooduli M mingiks R-funktsiooniks. Lemma 10 põhjal on f $\mathbb{Q}$-mooduli M termfunktsiooni t ja spetsiaalse R-funktsiooni summa. Ilmselt t mingi täisarvuline kordne omab täisarvulisi kordajaid ja seega säilitab A. Järeldame, et meie oletuste põhjal leidub mooduli M nullist erinev spetsiaalne R-funktsioon f_1, mis säilitab A. Kasutades lemma 10 tähistusi, olgu $g\colon W_1^n \to W_{12}^n$ mingi funktsioon, mis kommuteerub skalaaridega $\alpha \in \mathbb{Q}$ korrutamistega ja määrab valemi (12) abil spetsiaalse R-funktsiooni f_1. Et $f_1 \neq 0$, siis leiduvad $x_1, \ldots, x_n \in A$ nii, et $g(\pi_1(x_1), \ldots, \pi_1(x_n)) \neq 0$. Üldisust kitsendamata võime võtta elemendid x_i nii, et $\pi_1(x_i) = \alpha_i a_1$ sobivate täisarvude α_i, $i = 1, \ldots, n$, jaoks. Sellest järeldub, et

$$g(\alpha_1 \pi_1(a_1), \ldots, \alpha_n \pi_1(a_1)) \neq 0\,.$$

Nüüd vaatleme funktsiooni $h\colon A \to A$, mis on defineeritud kui

$$h(x) = f_1(x, \ldots, x) = g(\alpha_1 \pi_1(x), \ldots, \alpha_n \pi_1(x))$$

ja näitame, et $h \in E$. Selleks märkame esmalt, et kujutus, mis igale elemendile $a \in W_1$ seab vastavusse $g(a, \ldots, a) \in W_{12}$, on Abeli rühmade homomorfism. Tõepoolest, olgu antud suvalised $a, b \in W_1$. Siis leiduvad $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, nii et $a = \alpha a_1$ ja $b = \beta a_1$. Siis

$$\begin{aligned}
g(a+b) &= g(\alpha a_1 + \beta a_1, \ldots, \alpha a_1 + \beta a_1)\\
&= g((\alpha+\beta)a_1, \ldots, (\alpha+\beta)a_1)\\
&= (\alpha+\beta)g(a_1, \ldots, a_1)\\
&= \alpha g(a_1, \ldots, a_1) + \beta g(a_1, \ldots, a_1)\\
&= g(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_1) + g(\beta a_1, \ldots, \beta a_1)\\
&= g(a, \ldots, a) + g(b, \ldots, b)\,.
\end{aligned}$$

Kui nüüd $x, y \in A$ on suvalised, siis saame

$$\begin{aligned}
h(x+y) &= g(\alpha_1 \pi_1(x+y), \ldots, \alpha_n \pi_1(x+y))\\
&= g(\alpha_1 \pi_1(x) + \alpha_1 \pi_1(y)), \ldots, \alpha_n \pi_1(x) + \alpha_n \pi_1(y))\\
&= g(\alpha_1 \pi_1(x), \ldots, \alpha_n \pi_1(x)) + g(\alpha_1 \pi_1(y), \ldots, \alpha_n \pi_1(y))\\
&= h(x) + h(y)\,.
\end{aligned}$$

Endomorfismi h definitsioonist tuleneb, et $h(a_1) \neq 0$, kuid $h(a_2) = h(a_3) = 0$. Seega h maatriksil baasi a_1, a_2, a_3 suhtes on nullist erinevad elemendid ainult esimeses veerus. Ilmselt ei saa sellisel maatriksil olla kuju (6). See vastuolu tõestab, et rühmal A ei saa olla endofunktsiooni, mis pole termfunktsioon. Järelikult A on endoprimaalne. $\square$

Lause 4. *Olgu A astakuga 3 väändeta Abeli rühm ja E tema endomorfismiring. Kui $\mathbb{Q}$-algebral $R = E[\mathbb{Z}^{-1}]$ on maatriksesitus kujul (9), siis A ei ole endoprimaalne.*

Tõestus: Näitame, et funktsiooni (11) sobiv täisarvuline kordne säilitab A ja seega on A endofunktsioon, mis pole termfunktsioon. Paneme tähele, et rühmal A on endomorfism ϕ nii, et $\phi(a_1) = 0$, $\phi(a_2) = ma_2$, $\phi(a_3) = ma_3$, kus m on sobivalt valitud täisarv. Sellest järeldub, et millal iganes $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 \in A$, ka $mx_2a_2 + mx_3a_3 \in A$. Sealjuures kui $x_1a_1 + x_3a_3 \in A$, siis $mx_3a_3 \in A$. Seega, kui me korrutame funktsiooni (11) arvuga m, saame me uue funktsiooni, mis säilitab A. See on ilmselt A endofunktsioon, mis pole termfunktsioon. □

Teoreemi 1 väide järeldub nüüd otseselt teoreemist 7 ning lausetest 3 ja 4.

5. Otselahutuvusest

Artiklis [2] tõestati, et iga astakuga 2 endoprimaalne väändeta Abeli rühm on kahe astakuga 1 rühma otsesumma. Käesoleva töö juurde asudes oli üheks probleemiks, kas ka astakuga 3 väändeta endoprimaalsed Abeli rühmad lahutuvad mittetriviaalselt otsesummaks. Mõnevõrra üllatuslikult selgus, et vastus sellele küsimusele on eitav. Kontranäide vastab maatriksesitusele kujul (6) ja selle saamiseks tuleb kasutada ühte H. Zassenhausi tulemust [5]. Autor on tänulik Esseni Ülikooli professorile R. Gödelile, kes juhtis tähelepanu nimetatud Zassenhausi tulemusele.

Lause 5. *Leidub endoprimaalne astakuga* 3 *väändeta Abeli rühm, mis ei lahutu mittetriviaalselt otsesummaks.*

Tõestus: Olgu R kõigi kujul (6) olevate maatriksite $\mathbb{Q}$-algebra. Siis vektorruumil $\mathbb{Q}^3$ on loomulik vasakpoolse R-mooduli struktuur. Olgu E maatriksite

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

poolt genereeritud R alamring. Ilmselt $R = E[\mathbb{Z}^{-1}]$. Samuti on kerge veenduda, et E aditiivne rühm on vaba Abeli rühm astakuga 3. Tõepoolest, vaadeldes ülaltoodud kolme maatriksi korrutisi näeme, et need kolm maatriksit ongi vaba Abeli rühma $(E; +)$ baasiks. Zassenhausi teoreem [5] väidab, et neil eeldustel leidub astakuga 3 väändeta Abeli rühm A nii, et $\operatorname{End} A = E$. Olgu $M = A[\mathbb{Z}^{-1}]$. Tehes läbi Zassenhausi tõestust näeme, et vasakpoolsed R-moodulid M ja $\mathbb{Q}^3$ on isomorfsed. Seega lause 3 põhjal on rühm A endoprimaalne. Teisest küljest ei lahutu A otsesummaks, kuna vahetud arvutused näitavad, et ringil E ei ole teisi idempotente peale 0 ja 1. $\square$

Endoprimal torsion-free abelian groups of rank 3

Kati Metsalu-Smotrova

Summary

A function f of an abelian group A is called an endofunction if it commutates with all endomorphisms of the group A. All term functions—that is, compositions of the group operations and projections—are endofunctions of that group. An abelian group A is called endoprimal if there are no endofunctions other than term functions.

In article [2], endoprimal torsion-free abelian groups of rank 1 and rank 2 are fully described. The current paper gives a complete description of endoprimal torsion-free abelian groups of rank 3. It turns out that at least in the case of rank $A \leqslant 3$ the endoprimality of A depends only on the structure of its injective envelope M considered as a module over the injective envelope of the additive group of $\operatorname{End} A$.

Our main result says that, with one exception, torsion-free abelian groups of rank 3 are endoprimal unless there is a very clear reason why they cannot be.

Theorem. *Let A be a torsion-free abelian group of rank 3 with nucleus N, then one of the following occurs:*

(1) *the module ${}_NA$ is endoprimal;*
(2) $\operatorname{End} A = N$ *and therefore ${}_NA$ is not endoprimal;*
(3) $\operatorname{End} A$ *has a nontrivial center and therefore ${}_NA$ is not endoprimal;*
(4) $\operatorname{End} A$ *is an abelian group of rank 3 and there exist linearly independent elements $a_1, a_2, a_3 \in A$, endomorphisms $\phi, \psi \in \operatorname{End} A$ and a rational number $u \in \mathbb{Q}$ such that $\phi(a_2) = a_1$, $\phi(a_1) = \phi(a_3) = 0$, $\psi(a_1) = ua_1$, $\psi(a_2) = \psi(a_3) = 0$; therefore ${}_NA$ is not endoprimal.*

Surprisingly, the exceptional case (4) gives rise to indecomposable endoprimal groups of rank 3.

Kirjandus

[1] K. Kaarli and L. Márki, Endoprimal algebras, *Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra.* NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry . Vol. 207. Springer, 2005, 169-180.

[2] K. Kaarli and L. Márki, Endoprimal abelian groups, *J. Austra. Math. Soc.(Series A),* **67** (1999), 412-428.

[3] K. Kaarli and K. Metsalu, On endoprimality of torsion-free abelian groups of rank 3, *Acta Math. Hungar.,* **104 (4)** (2004), 271-289.

[4] N. Jacobsom, *Basic Algebra II.* W.H. Freeman and Company, 1980.

[5] H. Zassenhaus, Orders as endomorphism rings of modules of the same rank, *J. London Math. Soc.,* **42** (1967), 180-182.