



Ideen zur Perturbations Rechnung nach
Keppler, vom Hrn. J. W. *Pfaff*, Prof. am
Real-Institute zu Nürnberg.

im May 1814 eingesandt *).

§. 1. Einige allgemeine Perturbations-Gesetze aufzusuchen, die zwar eigentlich vom Calcul entlehnt, doch in einer unabhängigen, für sich selbst bestehenden Gestalt, gleichsam als empirische Gesetze erscheinen könnten, schien mir ein Unternehmen, das im allgemeinen nicht verwerflich, doch von manchen Seiten etwas Anziehendes darbieten könnte.

Nämlich diese Ansichten konnten in Beziehung treten, oder in Verbindung gesetzt werden mit den Distanzen Gesetzen, oder der Vertheilung der Planeten, oder der Himmelskörper im Weltraume. Ohne Zweifel ist, seit *Keppler* mit so gewaltiger Innigkeit sich diesen Untersuchungen hingab, ausser der physischen Constitution, wohl kein Gegenstand, (wenn die rechnende Untersuchungen der Details ausgenommen werden) der das Allgemeine der Planetenwelt näher. berührte, als eben diese Untersuchung über die Vertheilung. Wenn diese Vertheilung der Planeten einen Einfluß auf die Störungen nach allgemeinen Gesetzen äußern würde, so wäre eben dadurch die Bedeutung derselben zu grösserer Wichtigkeit gelangt.

Ferner

*) Dies ist die Fortsetzung eines im astr. Jahrb. für 1814. S. 109. u. f. vom Herrn Verf. vorkommenden Aufsatzes.

B.

Ferner hätten solche Perturbationsgesetze darum ein Interesse, weil die Mondenwelt hier als Ganzes erscheint in der Wechselwirkung ihrer Glieder: während die Astronomie nur mit einzelnen gewöhnlich zu thun hat: Sie ist gleichsam die höhere Astronomie, die auf den Datis der beobachtenden sich gründet, und ihren Gesetzen physische Gestalt zu geben trachtet.

Endlich waren die Bewegungen und Fortschritte welche in diesen Theilen der Astronomie seit ihrer Gründung uns vor Augen liegen wenigstens ein Anreiz zu einem Versuch, ob nicht in dem Gang und den Formen des Calculs, wie er sich fort entwickelt hat, eine Spur, Andeutung, oder Art einer solchen Gesetzmäßigkeit liege, (wie sie in den *Keplerschen* Gesetzen für die unperturbirte Welt liege); eine Anreizung jene Formen des Calculs selbst näher zu untersuchen, umzuwandeln etwa auf irgend eine Weise zu verbinden, um dem Zwecke sich zu nähern. Dafs aber dieser Theil der Astronomie entschiedene Fortschritte gemacht, dies erkennt man auch blofs daraus, dafs *la Lande* ehemals ein Jahrlang in Beziehung auf den *Halleyschen* Kometen rechnete.

§. 2. Inzwischen erhielt ich (durch Güte, für die ich nochmals hier meinen Dank abstatte) die Abhandlungen *Lagranges* über die Unveränderlichkeit der Planeten-Achsen in den *Mémoires de l'Institut*. Den Anfang eines Auszuges findet man in der Monatlichen Correspondenz. Ich fand ausser dem Hauptsatz dem sie bestimmt ist, die Perturbations-Gleichungen vom ersten Grade in einer ganz neuen Form. Die Gleichungen vom zweyten Grade und die endlichen, hatte ich schon im ersten Aufsätze (Jahrb. 1814) zu meinem Gebrauch als untauglich verworfen. Die Ableitung dieser Gleichungen aus den bisher bekannten, habe ich in der Monatlichen Correspondenz angefangen zu entwickeln, später fand ich, dafs ihre Form sich wahrscheinlich noch mehr vereinfachen, auch meinem Nebenzwecke gemäß (von dem in diesem und dem vorhergehenden

Aufsatz die Rede ist, und künftig noch seyn wird) vielleicht sich umgestalten ließen.

§. 3. Wie ich eben angeführt, ist die *Lagrangesche* Abhandlung dem Satze gewidmet, daß die großen Achsen der Planetenwelt unveränderlich sind, (d. h. nur periodischen Störungen unterworfen) in Beziehung auf die Störungen, wenn man die — uns unerlässlich nothwendige — Entwicklung derselben bis auf die zweyten Potenzen der Massen fortsetzt. (Leider zeigen sich die Spuren unserer höchst beschränkten Kenntniß vorzüglich auch darin, daß wir wie in den meisten Theilen der Mathematik nur durch Annäherung zum Ziele kommen). Wäre der Satz allgemein auch für die noch nicht entwickelten Glieder erwiesen, so wäre er einer der richtigsten für unsern Zweck, indem er lautete: die Vertheilung der Körper des Sonnensystems nach Massen, Lagen, Distanzen hat durchaus keinen Einfluß auf die Erhaltung des Systems nach seinen mittlern Entfernungen, sofern es als ein wechselseitig auf einander wirkendes Ganzes betrachtet wird; oder diese Vertheilung ist für Störungen ganz gleichgültig; oder jedes andere System würde eben so gut bestehen; oder alle Planetensysteme, welche die Natur hervorgebracht bestehen. (Die bekannte Einschränkung der Incommensurabilität der mittlern Bewegungen mag gelten oder nicht). Dieser Satz oder sein Gegentheil hat nun mancherley Interesse für den Physiker oder den Astronomen, der sich mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt. Man sieht aber auf der andern Seite, daß dieser Satz nur eine scheinbare Würde hat; denn wenn eine periodische Störung von ungeheurer Periode bestehend die mittlere Entfernung ändernd, während dieser Zeit dem Verfall oder die Formänderung des Systems bewirken würde, so wäre es offenbar ganz gleichgültig, ob dieß durch eine Seculare oder eine periodische geschehen wäre, welche Anmerkung um so wichtiger erscheint da die in dieser Sphäre beschäftigten Astronomen, man weiß nicht

nicht aus welchem Instinct oder Vorgefühl die sogenannten (vorhandenen) Seculargleichungen selbst für periodische von unabsehbarer Länge zu halten gewohnt sind. — Dies alles führte ich an, um der Untersuchung den freyen Lauf noch zu lassen, ob die Vertheilung der Planetenwelt nicht mit ihrer Wechselwirkung (in den Störungen) irgend wo zusammenhänge.

§. 4. Nach diesem komme ich nun zu der neuen Form der Gleichungen selbst und werde nun zeigen, daß dies eine Form giebt, welche nicht nur meinem §. 1 angegebenen Zwecke näher zusagt und sich anzwängt, sondern auch astronomisch brauchbar und wichtig ist.

Es seyen daher x, y die Coordinaten eines Planeten in seiner elliptischen Bahn; x', y' für einen störenden, r, r' die Radii vectores, \sqrt{D} die Distanz der beyden Planeten, F, H, K, L, M, N . Coefficienten, so läßt sich nach *Lagrange* zeigen, daß die Störungsgleichungen des ersten Grads für den Knoten, und für die Neigung die Form annehmen

$$\left(Fxx' + Hyy' + Kxy' + Lxy' \right) \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{D^{\frac{3}{2}}} \right)$$

in welcher die Coefficienten F, H u. s. w. bloß von den Elementen der beyden Planeten in Beziehung auf ihre Lage abhängen, demnach als Constante, oder (im gewissen Sinne wenn man will) als empirisch gegeben angesehen werden könne. (Dem Factor, welcher von der Masse des störenden, und der mittlern Bewegung des gestörten abhängt, habe ich weggelassen, als von selbst verständlich).

§. Ueber die Coefficienten F, H, K, L ließen sich vielleicht, was ihre Constitution und Zusammensetzung betrifft, noch Bemerkungen anstellen in Beziehung etwa auf die Veränderlichkeit derselben in Folge der Störungen selbst; in Beziehung auf ihre etwanige Symmetrie für zwey in Wirkung betrachtete Planeten; über den Factor $\left(\frac{1}{D^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{D_1^{\frac{3}{2}}} \right)$ wäre zu untersuchen ob er wenn

der Störung eines von der Sonne entfernten Planeten durch einen andern der Sonne nähern, die Rede ist, nicht für diesen Fall, bey der Constitution und dem Gesetze der Distanzen in der Planetenwelt beständig negativ bliebe oder nur einen kleinen positiven Werth erhalte.

§. 6. Die Gleichung aber selbst läßt sich in 8 Glieder zerfallen, und sie sind:

$$+ \left(F_{xx'} + H_{yy'} + K_{xy'} + L_{x'y} \right) \frac{r}{r'^3}$$

$$- \left(E_{xx'} + H_{yy'} + K_{xy'} + L_{x'y} \right) \frac{r}{D^3}$$

In dieser Form sind sie tauglich, um Gesetze zwischen den wechselseitigen Störungen zweyer auf einander wirkender Planeten zu finden, weil die in der Klammer befindlichen Glieder eine symmetrische Form in Beziehung auf beyde Planeten haben: Für den andern Planeten der jetzt als gestörter betrachtet wird, werden sie nämlich die Form annehmen

$$+ \left(M_{xx'} + N_{yy'} + P_{xy'} + Q_{x'y} \right) \frac{1}{r^3}$$

$$- \left(M_{xx'} + N_{yy'} + P_{xy'} + Q_{x'y} \right) \frac{1}{D^3}$$

(wenn man wieder den Factor der von der Masse und der mittlern Bewegung des gestörten abhängt hinwegläßt).

In den 4 letztern Gliedern ist der Factor D^3 für beyde gleich, da er von der wechselseitigen Distanz abhängt: dadurch erhält man das erste Gesetz: die wechselseitige Störungen zweyer Planeten enthalten eine Reihe Glieder von einerley Form für beyde Planeten, und sind nur in den Coefficienten verschieden: oder die Störungsglieder zweyer Planeten die einerley Form Periode haben, sind in einem gegebenen Verhältnisse; $(F : M)$ $(H : N)$; u. s. w.

§. 7. Dies Gesetz ist für eine gewisse Reihe von Gliedern allgemein, und entwickelnd was in der *Mecan. cel.* II Theil 6 Buch Cap. 15 von einigen Gliedern angegeben

ben ist; und enthält überhaupt einen Satz dessen Form einfach sich darstellt.

Das Gesetz ist brauchbar in der praktischen Berechnung selbst, da wenn man die einzelnen Glieder die mit F, H, K. verbunden sind besonders für einen Planeten berechnet sind, man für den andern nur die Coefficienten zu ändern braucht. Dieser Vortheil scheint dem practischen Nachtheil bey dem Gebrauch der Störungsgleichungen vom ersten Grade in etwas aufzuheben.

§. 8. Was nun die 4 ersten Glieder betrifft, so kann man, wenn man bey dem Factor $\frac{1}{r'^3}$ und $\frac{1}{r^3}$ auf die Excentricität nicht Rücksicht nimmt, ein ähnliches Gesetz aufstellen: die Glieder jener wechselwirkenden Planeten verhalten sich dann wie $\frac{F}{a'^3}$ zu $\frac{M}{a^3}$ u. s. w.

Betrachtet man die übrigen Glieder die einerley Form haben, so sind diese in zusammengesetzten Verhältnissen, in welche Functionen der Excentricitäten mit eingehen. Betrachtet man aber Glieder von verschiedenen Formen, so wird das Verhältniß ihrer Coefficienten wieder einfacher, indem es dann bloß noch von den Coefficienten der Reihen $\frac{1}{r'^3}$ und $\frac{1}{r^3}$ abhängt.

§. 9. Die Größen F, H... welche als von der Lage der wirkenden Planeten abhängig angesehen werden, werden billig als Fundamental - Störungs - Coefficienten ein für allemal berechnet, in die Sammlung der Data des Planeten - Systems niedergelegt werden; um so mehr dá wie es scheint die Variationen derselben in Beziehung auf die Elemente einfach sind.

Für Jupiter und Saturn mögen sie hier für die Störungs - Gleichungen des Knoten stehen:

Fundamental-Störungs-Coefficienten.

für Jupiter	F	+	0,58414		-	0,00056	F
	H	+	0,11485		+	0,06253	H
	K	-	2,72143		+	0,00263	K
	L	-	0,02465		-	0,01342	L
für Saturn	M	-	0,18045		+	0,01820	M
	N	-	0,15776		-	0,00297	N
	Q	+	0,06821		-	0,00681	Q
	P	+	0,41733		+	0,00787	P
	für den Knoten.				für d. Neig. d. Bahn auf einer festen (1750)		

Für den Parameter sind Gleichungen von ähnlicher Beschaffenheit da; die Gleichung fürs Perihelium entzieht sich solch einer einfachen Form.

Diese Art der Betrachtung, und die Zerlegung der Gleichungen gleichsam in ihre Elementar-Theile wird bey den Kometen-Störungen in der Folge wahrscheinlich wieder uns entgegen kommen.

