Г. В. Колосовъ
э. о. профессоръ ИМПЕРАТОРСКАГО Юрьевскаго Университета.

Объ одномъ приложенiи теорiи функцiй комплекснаго перемѣннаго къ плоской задачѣ математической теорiи упругости.

„Ecartez à tout jamais la division de la science en Mathématiques pures et Mathématiques appliquées.“

G. Lamé

(Cours de Physique mathématique rationelle. 1861. Discours préliminaires.)

Юрьевъ.
Типографiя К. Маттисена.
1909.

Оттискъ изъ „Ученыхъ Записокъ Императорскаго Юрьевскаго Университета“.

Оглавленіе.

Важнѣйшія замѣченныя опечатки.

Стр.	Строчка		Напечатано:	Должно быть:
III	3	снизу	А. В. Котельниковъ	А. П. Котельниковъ
IV	14	сверху	сопровождается плоскихъ	сопровождаться плоскимъ
X	14	„	рѣшающія плоскую	рѣшающія
11	3	„	$\frac{i}{2}(\Phi(z)+\Phi(z_1)$	$\frac{i}{2}(\Phi(z)+\Phi(z_1))$
11	2	снизу	x^{n-3}	x^{m-3}
13	3	снизу, въ примѣчаніи	заимствованныя изъ сочиненіе	примѣры, заимствованные изъ сочиненія
13	15	сверху	$d_2\psi$	$d^2\psi$
20	9	„	$\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)$	$\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right)$
24	6	„	Kirsch'омъ	даны Kirsch'омъ
24	1	снизу	$-\frac{c^2}{2}(Sin\,h\,2\xi+i\,Sin\,2\eta)$	$-\frac{c^2}{4}(Sin\,h\,2\xi+i\,Sin\,2\eta)$
27	13	„	$=\infty$	$\xi=\infty$
36	2	„	$\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}$	$\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}$
43	3	„	$\int_{-\infty}^{+\infty}$	$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}$
48	1	„	$8\,ky\,2\,ax$	$8\,ky^2ax$
56	3	„	$p\,(R^2-r^2)\{$	$p\{$
77	9	сверху	то въ	то
80	10	„	вещественная	мнимая
101	1 и 2	снизу	$\ldots+\frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+\mu)}\int\ldots$	$\ldots\}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\{\frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+\mu)}\int\ldots$
101	4	сверху	$\frac{d\Phi(\zeta_1)}{d\zeta}$	$\frac{d\Phi(\zeta_1)}{d\zeta_1}$
101	9	„	$\frac{P+Q}{2(\lambda-\mu)}$	$\frac{P+Q}{2(\lambda+\mu)}$
102	1 и 2	„	$\ldots+\frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+\mu)}\int\ldots$	$\ldots\}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\{\frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+\mu)}\int\ldots$
102	14	„	$'(\zeta)$	$f'(\zeta)$
118	2	снизу, въ примѣчаніи	Differentialgleichungen	Integralgleichungen
117	8	„	V_{xn}	V_{xx}
119	7	„	$\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}$
119	11	„	$-i\,F(z)+\frac{1}{2}e^{-2\theta i}\{$	$-i\,F(z)-\frac{1}{2}e^{-2\theta i}\{$
140	16	„	$=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(N_1+N_2)$	$=-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(N_1+N_2)$

Литература

плоской задачи математической теоріи упругости, на которую есть ссылки въ настоящемъ сочиненіи.

№ 1. Головинъ, Х. С. Одна изъ задачъ статики упругого тѣла. Извѣстія С.-Петербургскаго Практическаго Технологическаго Института за 1880—1881 г. СПБ. 1882.

№ 2. Ibbetson, W. J. An elementary treatise on the mathematical theory of perfectly elastic solids with a short account of viscous fluids. London. 1887.

№ 3. Ribière. Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle. Comptes rendus CVIII, № 11, 1889, стр. 561—563.

№ 4. Maurice Lévy. Sur la légitimité de la règle dite du trapèze dans l'étude de la résistance des barrages en maçonnerie. Comptes rendus CXXVI, № 18, 1898, стр. 1235—1240.

№ 5. Ribière. Sur la flexion des pièces épaisses. Comptes rendus CXXVI, № 5, 1898, стр. 402—404.

№ 5 bis. Kirsch. Zeitschrift der V. D. J. стр. 797—805, 1898.

№ 6. Maurice Lévy. Sur l'équilibre élastique d'un barrage en maçonnerie à section triangulaire. Comptes rendus CXXVII, № 1, 1898, стр. 10—15.

№ 6 bis. J. H. Michell. On the direct determination of stress in an elastic solid with application to the theory of plates. London M. S. Proc. 31, 100—124.

№ 7. A. Mesnager. Sur l'application de la théorie d'élasticité au calcul des pièces rectangulaires flechies. Comptes rendus CXXXII, № 24, стр. 1475—1478. 1901.

№ 8. Ribière. Sur les voûtes en arc de cercle encastrées aux naissances. Comptes rendus CXXXII, № 6, 1901, стр. 315—317.

№ 8 bis. J. H. Michell. The inversion of plane stress. London M. S. Proc. XXXIV, стр. 134—142.

№ 9. Belzecki. Sur l'équibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle. Comptes rendus 1905. CXL, № 15.

№ 10. A. Timpe. Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion. Zeitschrift für Mathematik und Physik herausgegeben von R. Mehmke und C. Runge. 52. Band 1905, стр. 348—383.

№ 10 bis. Белзецкій, С. И. Изгибъ прямого бруса свободно лежащаго на двухъ опорахъ. Извѣстія Собранія Инженеровъ Путей Сообщенія. СПБ. 1905.

№ 11. O. Tedone. Sui problemi di equilibrio elastico a due dimensioni. Ellisse. Torino Atti 41 (1905), стр. 86—101.

№ 12. Белзецкій, С. И. Одна изъ задачъ теоріи упругости, рѣшеніе которой получается легко въ эллиптическихъ координатахъ. Извѣстія Собранія Инженеровъ Путей Сообщенія 1906—1908.

№ 13. Великовъ, П. А. Вліяніе отверстій на распредѣленіе напряженій въ растянутой полосѣ. Извѣстія Московскаго Инженернаго Училища. Сентябрь 1907 г.

№ 14. A. E. H. Love. A Treatise on the mathematical theory of Elasticity by A. E. H. Love. Second edition Cambridge 1906.

№ 15. G. Kolossoff. Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions. Comptes rendus 1908, CXLVI, № 10.

№ 16. G. Kolossoff. Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions. Comptes rendus 1909, CXLVIII, № 17.

Примѣчаніе. Предъидущій списокъ далеко не представляетъ *всю* литературу плоской задачи: въ немъ помѣщены только тѣ работы, на которыя намъ приходится неоднократно ссылаться въ настоящемъ изслѣдованіи.

Предисловіе.

Въ настоящемъ изслѣдованіи мы указываемъ новое приложеніе теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго къ плоской задачѣ математической теоріи упругости, которое приводитъ къ рѣшенію такихъ вопросовъ, отвѣтъ на которые въ общей задачѣ теоріи упругости представляетъ пока недосягаемыя трудности.

„As in other departments of mathematical physics", говоритъ A. H. Love въ своемъ извѣстномъ курсѣ теоріи упругости [№ 14] *) „which have relations to the theory of potential, it frequently happens that the analogues, in two dimensions... are capable of exact solution, so it will appear, that in the theory of Elasticity a two-dimensional solution can often be found which throws light upon some wider problem that cannot be solved completely" **).

Здѣсь въ особенности умѣстно припомнить успѣхи плоской задачи въ гидродинамикѣ послѣ извѣстныхъ изслѣдованій Гельмгольца и Киргоффа о строеніи плоской струи, вызвавшихъ рядъ изслѣдованій и гг. русскихъ ученыхъ Д. К. Бобылева, Н. Е. Жуковскаго, А. В. Котельникова, И. В. Мещерскаго, С. А. Чаплыгина и проч.

Могущественное значеніе имѣетъ въ этихъ изслѣдо-

---

*) № поставленный въ скобкахъ вслѣдъ за цитируемымъ авторомъ указываетъ № по приводимому выше списку литературы плоской задачи.

**) Ch. IX. Two dimensional elastic systems стр. 201.

ваніяхъ методъ функцій комплекснаго перемѣннаго и связанное съ нимъ конформное преобразованіе одной плоской области въ другую. Нетрудно поэтому придти къ предположенію, что и въ плоской задачѣ математической теоріи упругости нѣсколько болѣе трудной чѣмъ задача гидродинамики, этотъ методъ можетъ имѣть важное значеніе. Замѣтимъ, что подъ именемъ „плоской" мы разумѣемъ такую задачу математической теоріи упругости, въ которой перемѣщенія частицъ упругого тѣла совершаются ‖-но нѣкоторой плоскости, (т. е. частицы тѣла совершаютъ плоскую деформацію) а площадки въ тѣлѣ ‖-ыя этой плоскости не испытываютъ никакихъ напряженій т. е. въ тѣлѣ развивается плоское распредѣленіе напряженій. Плоская деформація тѣла можетъ и не сопровождается плоскихъ распредѣленіемъ напряженій, а послѣднее можетъ быть вызвано деформаціею и иного рода, какъ это мы увидимъ далѣе.

Диф-ыя ур-ія плоской задачи даны въ видѣ уравненій (2) стр. 9 Maurice Lévy [№ 4] и плоская задача математической теоріи упругости представляетъ въ этомъ видѣ естественное развитіе задачъ Дирихле и Неймана въ теоріи логарифмическаго потенціала.

Введеніе теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго совершается въ плоской задачѣ теоріи упругости совершенно естественно, т. к. основныя ур-ія плоской задачи въ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ:

$$(\lambda + 2\mu)\,\frac{\partial\triangle}{\partial x} - 2\mu\,\frac{\partial\omega}{\partial y} = O$$

$$(\lambda + 2\mu)\,\frac{\partial\triangle}{\partial y} + 2\mu\,\frac{\partial\omega}{\partial x} = O,^{*)}$$

гдѣ λ и μ коэффиціенты упругости, $\triangle$ кубическое расширеніе, а ω угловая скорость вращенія частицъ прямо указываютъ, что

$$(\lambda + 2\mu)\,\triangle + i\,2\mu\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

*) Love [№ 14] стр. 202.

является функціей комплекснаго перемѣннаго:

$$z = x + iy$$

Введя эту функцію и интегралъ отъ нея, т. е. функцію комплекснаго перемѣннаго:

$$\xi + i\eta = \int \{ (\lambda + 2\mu) \triangle + 2 i \mu \omega \} dz$$

A. H. Love находитъ для перемѣщеній u и v формулы:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\xi}{2\mu} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\, y\, \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \\ v &= \frac{\eta}{2(\lambda+2\mu)} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\, y\, \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . (2)$$

(гдѣ f функція, удовлетворяющая ур-ію: $\triangle_2 f = O$), въ которыхъ нетрудно узнать наши формулы (12) стр. 76. Но однако для полученія удобныхъ формулъ, кромѣ функціи комплекснаго перемѣннаго (1) необходимо ввести еще одну функцію комплекснаго перемѣннаго z. Самъ A. H. Love признаетъ, что теорія функцій комплекснаго перемѣннаго не оказала ему въ плоской задачѣ той помощи, которую отъ нея можно бы было ожидать.*) Если контурныя условія въ плоской задачѣ состоятъ въ заданныхъ на контурѣ перемѣщеніяхъ, такой функціей является функція:

$$\phi(z) = \frac{\partial f}{\partial y} + i \frac{\partial f}{\partial x}$$

фор. (2), но, если заданы, какъ это обыкновенно и бываетъ, не перемѣщенія, а напряженія, 2-я функція комплекснаго перемѣннаго вводится нѣсколько иначе, а именно мы вводимъ ее въ настоящей работѣ, основываясь на весьма замѣчательныхъ свойствахъ комплекснаго выраженія:

$$2T + i(N_1 - N_2),$$ (обозначенія см. стр. 8 § 2)

*) Love [№ 14] стр. 211. This defect of correspondence is the main difficulty in the way of advance in the theory of two dimensional elastic systems.

на которыя, насколько намъ извѣстно, никѣмъ ёще не было обращено надлежащаго вниманія.

Введя 2-ую функцію комплекснаго перемѣннаго, мы получили всѣ формулы, относящіяся къ плоской задачѣ въ простомъ и изящномъ видѣ, въ которомъ значительно облегчено рѣшеніе различныхъ вопросовъ, относящихся къ этой задачѣ напр. теорія отверстій въ видѣ круга, эллипса или лемнискаты и проч.

Основанія нашего метода изложены въ нашей статьѣ въ Comptes rendus 1908, (№ 15) и сообщены на IV интернаціональномъ конгрессѣ математиковъ въ Римѣ $\frac{29 \text{ марта}}{11 \text{ апрѣля}}$ 1908*) и постепенно выработался новый методъ для рѣшенія различныхъ вопросовъ плоской задачи математической теоріи упругости, основанный на отысканіи 2-хъ функцій комплекснаго перемѣннаго, который весьма легко даетъ всѣ полученныя до сихъ поръ рѣшенія плоской задачи и кромѣ того безконечное множество другихъ, тогда какъ до послѣдняго времени былъ только одинъ общій способъ для нахожденія рѣшеній плоской задачи — способъ Airy, заключающійся въ томъ, что можно положить:

$$N_1 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad N_2 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad T = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y},$$

гдѣ ϕ есть функція, удовлетворяющая гипергамоническому ур-ію:

$$\Delta_2 \Delta_2 \phi = O.$$

Въ настоящей работѣ мы указываемъ совершенно противоположную точку зрѣнія, рекомендуя не плоскую задачу теоріи упругости сводить къ отысканію гипергамонической функціи, удовлетворяющей даннымъ контурнымъ условіямъ, а наоборотъ: задачу объ отысканіи такой функціи приво-

*) Мы имѣли случай бесѣдовать по его поводу съ иностранными учеными: Boggio, Hadamard, Lauricella, Levi Civita, Marcolongo, G. Morera, († 8 фев. 1909) Runge, Somigliana, Vito Volterra и проч.

дить къ плоской задачѣ теоріи упругости, такъ какъ въ нашемъ изложеніи эта задача оказывается проще 1-ой.

Плоскую задачу математической теоріи упругости какъ въ случаѣ, если контурныя условія состоятъ въ заданныхъ на контурѣ напряженіяхъ, такъ и въ случаѣ, если на послѣднемъ заданы перемѣщенія точекъ, мы приводимъ къ довольно простому функціональному ур-ію, содержащему 2 неизвѣстныя функціи комплекснаго перемѣннаго z, вещественныя и мнимыя части которыхъ линейнымъ образомъ связаны съ производной одной изъ этихъ функцій по z.

Это соотношеніе мы приводимъ къ линейному интегральному ур-ію Фредгольма, слѣдуя пріему D. Hilbert'a, изложенному въ его извѣстныхъ мемуарахъ, посвященныхъ линейнымъ интегральнымъ уравненіямъ.

Указавъ общіе способы рѣшенія плоской задачи, мы излагаемъ теорію опредѣленія перемѣщенія точекъ тѣла въ случаѣ, если извѣстно распредѣленіе напряженій въ тѣлѣ т. е. рѣшена плоская задача о напряженіяхъ, и устанавливаемъ весьма простыя формулы для опредѣленія перемѣщеній по заданнымъ напряженіямъ какъ въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ такъ и въ изотермическихъ криволинейныхъ координатахъ. Эти общія выраженія позволяютъ намъ высказать интересный законъ, названный нами закономъ *взаимности* 2-хъ плоскихъ задачъ математической теоріи упругости, и указать рядъ способовъ преобразованія одной плоской задачи въ другую, названныхъ нами алгориѳмомъ комплексныхъ преобразованій, частнымъ случаемъ которыхъ является преобразованіе при помощи взаимныхъ радіусовъ векторовъ (inversion), примѣненное къ плоской задачѣ Michell'емъ [№ 6 bis] на основаніи замѣчанія Levi Civita о свойствѣ такого преобразованія по отношенію къ гипергамоническимъ функціямъ.*)

Многочисленные примѣры примѣненія этого преобразо-

*) T. Levi Civita. Sopra una transformazione in sè stessa della equazione $\Delta\Delta = O$. Venezia 1898.

ванія даны Timpe [№ 10]. Наконецъ въ послѣднихъ главахъ настоящей работы мы указываемъ тѣ случаи, въ которыхъ плоская задача теоріи упругости можетъ давать рѣшенія и для общей задачи теоріи упругости. Переходя къ детальному разсмотрѣнію настоящей работы замѣтимъ, что въ § 1 мы указываемъ рядъ теоремъ относительно такъ называемыхъ сопряженныхъ функцій и составленныхъ изъ нихъ особаго рода дифференціальныхъ уравненій, съ которыми весьма часто приходится встрѣчаться въ плоской задачѣ теоріи упругости и которыя значительно упрощаютъ изложеніе этой задачи. Въ § 2 мы приводимъ диф-ыя ур-ія плоской задачи для прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ въ томъ видѣ, какъ онѣ даны Maurice Lévy и при помощи особыхъ вспомогательныхъ множителей α и β, удовлетворяющихъ ур-іямъ (5) стр. 9:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

приводимъ задачу къ особаго рода простому функціональному ур-ію.

Ур-ія (3), опредѣляющія множители, интегрируются сряду и мы получимъ рѣшеніе основныхъ ур-ій въ весьма удобномъ для приложеній видѣ, вполнѣ аналогичномъ съ ур-іями (2) Love, которыя онъ получаетъ, исходя изъ ур-ій для перемѣщеній и въ которыя поэтому входятъ коэф-нты упругости. Замѣтимъ, что, прежде чѣмъ вводить множители α и β, мы сами ур-ія теоріи упругости нѣсколько преобразуемъ къ виду, который вполнѣ умѣстно назвать *каноническимъ*. Какъ примѣръ мы получаемъ рѣшенія Ribière [№ 5] и Mesnager [№ 7], обратившія въ свое время вниманіе ученыхъ инженеровъ, чутко прислушивающихся (въ особенности послѣ извѣстной катастрофы въ Bouzey) къ успѣхамъ современной теоріи упругости. Въ § 3 мы обобщаемъ нашу теорію на случай криволинейныхъ координатъ и для удобства беремъ послѣднія въ изотермической формѣ, т. е.

предполагаемъ, что криволинейныя координаты ξ, η такія, что $\xi + i\eta =$ функціи комплекснаго перемѣннаго $x + iy$ и получаемъ простую формулу:

$$\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = -\frac{i}{2} f(\zeta) f'(\zeta) \frac{d\Phi}{d\zeta} + F(\zeta)$$

гдѣ P, Q, U напряженія нормальныя и тангенціальныя, дѣйствующія на площадки $\perp$-ыя къ осямъ криволинейныхъ координатъ ξ, η; $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy = f(\zeta)$, h-диф-ый параметръ системы координатъ ξ, η; въ § 4 мы примѣняемъ общую теорію къ случаю полярныхъ координатъ на плоскости и получаемъ общее рѣшеніе данное нами въ Comptes rendus 1908 [№ 15] и какъ частные случаи рѣшенія Ribière'a [№ 3] и [№ 8], С. И. Белзецкаго [№ 9], A. Timpe [№ 10]. Частный случай этихъ рѣшеній ($m = 1$) былъ открытъ Х. С. Головинымъ [№ 1] еще въ 1881 г.*) Найденныя формулы мы примѣняемъ къ изученію напряженій, развивающихся при растяженіи въ полосѣ, ослабленной круговымъ отверстіемъ и получаемъ формулы Kirsch'a**), выводъ которыхъ недавно данъ П. А. Велиховымъ [№ 13]. Здѣсь читатель можетъ сразу убѣдиться въ простотѣ нашего метода изслѣдованія и его краткости: изслѣдованіе П. А. Велихова приводитъ къ разсчетамъ, значительно превышающимъ разсчеты § 4 по сложности и трудности. Аналогичныя выводы приведены нами для отверстій въ формѣ эллипса и въ формѣ сплошной лемнискаты [стр. 26 и слѣдующія].

---

*) Замѣчательная по своей простотѣ и изяществу работа Х. С. Головина едва ли не первая „плоская" задача математической теоріи упругости, обстоятельно изслѣдованная. Напечатанная къ сожалѣнію въ мало распространенныхъ „Извѣстіяхъ Технологическаго Института" она мало извѣстна даже и въ Россіи и совершенно неизвѣстна заграницей. Поэтому неудивительно, что мы не имѣемъ указаній на нее въ „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften", гдѣ впрочемъ не указаны и работы Ribière'a, хотя послѣднія напечатаны въ широко распространенныхъ Comptes rendus [№ 3 и № 8].

**) Къ нашему удивленію и объ этой работѣ мы не нашли указаній въ „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften".

Если примѣненіе нашихъ пріемовъ весьма просто даетъ результаты Kirsch'a для кругового отверстія, то еще въ большей степени оно упрощаетъ теоріи эллиптическихъ и лемнискатныхъ отверстій, впервые здѣсь приводимыя, разработка которыхъ по старымъ пріемамъ привела бы къ выкладкамъ, невыполнимымъ по своей сложности. Въ дальнѣйшемъ [стр. 30 и стр. 40] мы изслѣдуемъ распредѣленіе напряженій **на контурѣ** самаго отверстія и показываемъ (въ „приложеніяхъ") характерную разницу распредѣленія контурныхъ напряженій въ случаяхъ эллипса и лемнискаты, которую мы иллюстрируемъ на опытѣ съ эластическими пленками (см. „приложенія"). Въ дальнѣйшемъ (§ 9—§ 12) мы развиваемъ весьма важныя въ теоретическомъ и въ практическомъ отношеніи формулы, рѣшающія плоскую плоскую задачу при заданныхъ напряженіяхъ на контурѣ въ видѣ опредѣленныхъ интеграловъ для цѣлаго ряда контуровъ: прямолинейнаго отрѣзка, круга, эллипса и т. п. Выводимыя нами формулы представляютъ развитіе соотвѣтствующихъ формулъ теоріи логариѳмическаго потенціала и чрезвычайно упрощаютъ рѣшеніе плоской задачи теоріи упругости при заданныхъ напряженіяхъ на контурѣ для цѣлаго ряда контуровъ; въ § 13 мы вкратцѣ указываемъ способъ рѣшенія плоской задачи при помощи тригонометрическихъ рядовъ, бывшій до послѣдняго времени почти единственнымъ способомъ для полученія рѣшеній теоріи упругости при заданныхъ напряженіяхъ на контурѣ. Въ § 14 нами изслѣдованы, вводимые въ настоящей работѣ, символы:

$$D_{xy}f = \frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\overline{D}_{xy}f = \frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}$$

и перечисленъ рядъ ихъ интересныхъ свойствъ*).

*) Эти свойства, разработаны нами здѣсь совершенно самостоятельно, но только въ томъ объемѣ, въ какомъ онѣ необходимы для пониманія нашихъ дальнѣйшихъ разсчетовъ.

Въ § 15 и § 16 мы указываемъ рѣшеніе плоской задачи математической теоріи упругости при заданныхъ перемѣщеніяхъ на нѣкоторомъ замкнутомъ контурѣ какъ въ случаѣ прямолинейныхъ прямоугольныхъ, такъ и въ случаѣ криволинейныхъ изотермическихъ координатъ.

Сравненіе найденныхъ рѣшеній съ рѣшеніями при заданныхъ на контурѣ силахъ приводитъ къ весьма замѣчательному закону взаимности перемѣщеній и усилій въ плоской задачѣ математической теоріи упругости.

Найденныя въ § 16 общая формула для опредѣленія перемѣщеній (фор. (10) стр 80), которой можно придать видъ:

$$\frac{v+ui}{h} = -\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} f'(\zeta)\, f(\zeta_1)\,(P+iQ) + \\ + \tfrac{1}{2}\,\frac{\lambda+3\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\,\mathbf{P}\,i\,f'(\zeta) + F(\zeta)$$

гдѣ **P** вещественная часть функціи комплекснаго перемѣннаго

$$\int (P+iQ)\,dz = \int (P+iQ)\,f'(\zeta)\,dz$$

представляетъ естественное развитіе формулъ (2) стр. V для случая изотермическихъ координатъ, никѣмъ повидимому*) еще не указанное, и поэтому этой формулѣ и аналогичнымъ ей въ §§ 22 и 23 на стр. 94—102 мы придаемъ особенное значеніе. По поводу этихъ формулъ мы печатаемъ сейчасъ статью въ Messenger of mathematics.**)

Въ § 18 приведена одна форма плоской задачи въ изотермическихъ координатахъ весьма удобная во многихъ

---

*) A. E. H. Love (№ 14) рѣшаетъ вопросъ объ опредѣленіи u и v даже въ простѣйшемъ изъ этихъ случаевъ — случаѣ эллиптическихъ координатъ при помощи тригонометрическихъ рядовъ:

„In the case of elliptic cylinders u/h and v/h can be expressed as series in $Cos\, n\eta$ and $Sin\, n\eta$ without much difficulty.“ См. Applications of curvilinear coordinates art. 187 (c) стр. 259 (послѣднія 2 строчки снизу).

**) G. Kolosoff. On some applications of the theory of functions of the complex variable to the two dimensional elastic systems.

приложеніяхъ. Въ § 19 и § 20 мы рѣшаемъ задачу объ опредѣленіи перемѣщеній при заданныхъ напряженіяхъ на контурѣ какъ въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ, такъ и въ криволинейныхъ изотермическихъ координатахъ, а въ § 21 приводимъ простой примѣръ такого опредѣленія. Наконецъ въ § 22 и § 23 даны общія выраженія для перемѣщеній при заданныхъ напряженіяхъ, въ § 24 объяснено значеніе, входящихъ въ рѣшеніе постоянныхъ произвольныхъ, а въ § 25 разсмотрѣна плоская задача теоріи упругости при заданныхъ перемѣщеніяхъ на контурѣ. Въ § 26 приведена теорія такъ называемыхъ комплексныхъ преобразованій, совокупность которыхъ составляетъ алгориѳмъ комплексныхъ преобразованій, а въ § 27 плоская задача математической теоріи упругости приведена къ интегральному ур-ію Фредгольма.

Та математическая задача, къ которой мы приводимъ въ настоящей работѣ плоскую задачу математической теоріи упругости примыкаетъ къ цѣлому ряду задачъ поставленное въ послѣднее время D. Hilbert'омъ въ его извѣстныхъ изслѣдованіяхъ по интегральнымъ уравненіямъ*), простѣйшимъ типомъ которыхъ является извѣстная задача Римана, поставленная въ его Inauguraldissertation (Abschnitt 19) объ отысканіи функціи комплекснаго перемѣннаго вещественная имнимая части, которой на нѣкоторомъ контурѣ связаны линейнымъ соотношеніемъ; приведеніе задача Римана къ интегральному ур-ію Фредгольма сообщено D. Hilbert'омъ на III интернаціональномъ конгрессѣ математиковъ въ Гейдельбергѣ. Hilbert, угадывая, что теперь наступила эра развитія такого рода задачъ, пишетъ:

„Die Methode der Integralgleichungen ist auch auf weit allgemeinere Probleme anwendbar; sie führt insbesondere nicht nur zum Ziele, wenn für die Werte der gesuchten Funktionen

*) D. Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (Dritte Mitteilung). Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen 1905.

selbst auf der Randkurve lineare homogene oder inhomogene Relationen vorgeschrieben sind, sondern auch, wenn noch die Ableitungen erster oder höherer Ordnung der gesuchten Funktionen mit den Funktionswerten auf der Randkurve in linearer Weise verknüpft auftreten. Durch Behandlung solcher Aufgaben wird, wie mir scheint der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen ein neues dankbares Kapitel hinzugefügt." *)

Въ § 28 мы даемъ теорію интегрированія гипергармоническаго ур-ія при заданныхъ на контурѣ значеніяхъ функціи и ея производной по нормали, сводя эту задачу къ плоской задачѣ математической теоріи упругости, которая въ нашемъ изложеніи проще задачи объ интегрированіи гипергармоническаго ур-ія при заданныхъ условіяхъ на контурѣ, а въ дальнѣйшихъ §§ мы примѣняемъ эту теорію къ контурамъ простѣйшаго вида — прямой, кругу, эллипсу и т. п. Объ этомъ способѣ мы предполагаемъ сдѣлать докладъ на предстоящемъ XII съѣздѣ естествоиспытателей и врачей въ Москвѣ въ концѣ декабря 1909 г.

Онъ по нашему мнѣнію проще другихъ способовъ, примѣняемыхъ для опредѣленія функціи V, удовлетворяющей гипергармоническому ур-ію, т. к. во 1-хъ, ведетъ къ опредѣленію не самой функціи V, а ея частныхъ производныхъ $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$, сама же V опредѣляется двойнымъ интегрированіемъ; производныя же вообще говоря проще самой функціи; во 2-хъ, способъ рѣшенія пріобрѣтаетъ болѣе однообразный характеръ, примѣнимый ко всѣмъ контурамъ, для которыхъ до сихъ поръ рѣшеніе было найдено (для прямолинейнаго отрѣзка**), круга***), кругового

*) D. Hilbert l. c. стр. 338.

**) E. Almansi. „Sull' integrazione dell' equazione $\triangle_2 \triangle_2 u = 0$." Atti della R. Acc. di Torino XXXI 1895/96.

G. Lauricella. Sull' equazione delle vibrazioni delle plache incastrate." Mem. di Torino 2 XLVI 1896.

***) G. Lauricella. „Integrazione dell' equazione $\triangle_2 \triangle_2 = 0$ in un campo di forma circolare." Atti della S. Acc. di Torino XXXI 1895/6.

E. Almansi см. **).

кольца*), контуровъ конформно преобразующихся на кругъ при помощи цѣлыхъ полиномовъ**) прямоугольника***) и къ очень многимъ другимъ (для всякаго изотермическаго контура) и въ 3-хъ, рѣшеніе получается вообще говоря въ болѣе простомъ видѣ; такъ напр. рѣшеніе Almansi для контуровъ конформно преобразующихся на кругъ при помощи полиномовъ приводится къ 3-мъ задачамъ Дирихле**) и опредѣленію нѣкоторыхъ постоянныхъ, а нашъ способъ приводитъ къ 2-мъ задачамъ Дирихле и опредѣленію постоянныхъ, которыя войдутъ при нахожденіи V по ея частнымъ производнымъ. Наконецъ въ послѣднихъ главахъ помѣщены тѣ рѣшенія общей задачи математической теоріи упругости, которыя приводятся къ плоской задачѣ.

Намъ осталось сказать еще нѣсколько словъ объ общемъ характерѣ настоящей работы.

Она представляетъ оригинальное и самостоятельно изслѣдованіе, въ основѣ котораго лежитъ введеніе множителей α и β или вѣрнѣе множителя $\alpha + i\beta$, такъ что способъ изслѣдованія мы назвали бы способомъ комплекснаго множителя $\alpha + i\beta$; этимъ изслѣдованіемъ намъ можетъ быть удалось прибавить § къ „Leçons sur les coordonnées curvilignes“ знаменитого учителя, слова которого помѣщены въ эпиграфѣ и котораго руководства и сейчасъ не потеряли своего обаянія и привлекаютъ новыхъ работниковъ на научное поле, хотя авторъ ихъ почти уже полъ-вѣка

---

*) E. Almansi. Sull' integrazione dell' equazione differenziale $\triangle^{2n} = O$. Annali di Matematica 3, II. (1899)

J. H. Michell [№ 6 bis].

**) E. Almansi. „Sull' integrazione dell' equazione $\triangle^2 \triangle^2 u = O$. Atti R. Acc. dei Lincei. Rendiconti, Roma ser. 5, vol. 8, 1 (1899); vol. 9, 1 (1900).

E. Almansi. Sulla ricerca delle funzioni poli-armonische in un'area semplicemente connessa per date condizioni al contorno. Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo XIII (1899).

***) Кояловичъ, Б. М. Объ одномъ ур-іи къ частными производными четвертаго порядка. СПБ. 1902.

Estanave. Contribution à l'étude de l'équilibre d'une plaque rectangulaire mince. Annales de l'Ecole Normale 1900, стр. 295—358.

сошелъ съ жизненнаго пути, а наука далеко развилась и ушла впередъ за это время.

Мы приводимъ задачу къ интегральному ур-iю Фредгольма, теорiя которыхъ въ послѣднее время обратила всеобщее вниманiе.*)

Сближая настоящей работой плоскую задачу теорiи упругости съ гораздо раньше ея развившимися плоскими задачами электростатики и гидродинамики т. е. задачами Дирихле и Неймана (для которыхъ мы имѣемъ рядъ изслѣдованiй Picard'a, Schwarz'a, Д. А. Граве и проч.), мы конечно далеки отъ мысли, что наша теорiя имѣетъ совершенно законченный характеръ.

Прошло не мало времени, пока, начатое трудами Гаусса, Дирихле, Римана и Неймана, изученiе задачъ Дирихле и Неймана дошло до современныхъ изслѣдованiй Poincaré, А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова, обогатившихъ науку новыми теорiями (напр. теорiей фундаментальныхъ функцiй) и поэтому можно думать, что пройдетъ еще не мало времени, пока третiй аналогъ этихъ задачъ — задача теорiи упругости выльется въ такiя же точныя аналитическiя формы какъ и первыя; но мы думаемъ что настоящей работой значительно подвинуто это дѣло по отношенiю къ плоской задачѣ этой теорiи. Мы столкнулись при этомъ съ массою новыхъ вопросовъ, само собой напрашивающихся на изслѣдованiе, и во многихъ мѣстахъ мы откладываемъ обстоятельное изслѣдованiе до особыхъ мемуаровъ; цѣль на-

*) Французская академiя присудила въ 1908 г. Фредгольму премiю Poncelet. Въ Россiи эта теорiя мало извѣстна. Какъ извѣстно она даетъ разложенiя функцiй по тригонометрическимъ, Бесселевымъ, шаровымъ, по функцiямъ Lamé, по функцiямъ Штурма-Лiувилля (изслѣдованныя В. А. Стекловымъ и A. Kneser'омъ) и т. п. функцiямъ. Между тѣмъ въ вышедшей недавно прекрасной монографiи А. А. Адамова, посвященной этому вопросу мы не имѣемъ указанiй на эту теорiю (см. по этому поводу диссертацiю В. Е. Лебедевой. Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwickelungen. Göttingen 1906. См. также только, что вышедшую ея замѣтку: sur l'equation hypergéometrique. Comptes rendus 1909 t. CXLIX, № 14).

стоящей работы была бы вдвойнѣ достигнута, если бы намъ удалось заинтересовать нашимъ изслѣдованіемъ возможно больше научныхъ работниковъ и привлечь ихъ въ работѣ въ намѣченной нами области. Теоретики должны „обосновать уже извѣстные пріемы и распространить ихъ на возможно обширный классъ случаевъ“ *), практики найдутъ здѣсь новые пріемы и способы практическихъ разсчетовъ разнаго рода многочисленныхъ задачъ строительной механики, и имѣютъ возможность провѣрить свои выводы экспериментально напр. оптическимъ способомъ. Профессоръ С.-Петербургскаго Политехническаго Института С. И. Дружининъ, обѣщалъ провѣрить экспериментально нѣкоторые изъ нашихъ выводовъ и мы приносимъ ему за это нашу искреннюю признательность. Въ заключеніе приносимъ также искреннюю благодарность: Совѣту Императорскаго Юрьевскаго Университета въ лицѣ редактора Ученыхъ Записокъ проф. Д. Н. Кудрявскаго за помѣщеніе настоящаго изслѣдованія въ Ученыхъ Запискахъ Университета, нашему другу профессору С.-Петербургскаго Политехническаго Института С. И. Белзецкому, заинтересовавшему насъ плоской задачею теоріи упругости и вдохновившему къ той упорной и тяжелой работѣ, потребовавшей обстоятельнаго изученія всѣхъ рѣшеній плоской задачи до сихъ поръ полученныхъ, результатомъ которой является настоящее изслѣдованіе, а также гг. иностраннымъ ученымъ, почтившимъ нашъ докладъ въ Римѣ своимъ присутствіемъ и сдѣлавшимъ весьма полезныя замѣчанія въ особенности же геттингенскому профессору K. Runge, отозвавшемуся о нашей работѣ весьма лестнымъ для насъ образомъ.

Г. Юрьевъ, Лифл. губ.
8 октября 1909 г.

---

*) Слова В. А. Стеклова. См. „Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique“ стр. 15.

§ 1. О сопряженныхъ функціяхъ и объ интегрированіи нѣкоторыхъ связанныхъ съ ними дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

Двѣ функціи φ и ψ мы будемъ называть сопряженными, если

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

а слѣдовательно

$$\nabla_2\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla_2\,\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

и $\varphi + i\psi$ функція комплекснаго перемѣннаго $z = x + iy$ $(i = \sqrt{-1})$.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ часто встрѣчаться съ интегрированіемъ уравненій съ частными производными вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= \sum_{j=1}^{j=n} h_j\, P_j \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \sum_{j=1}^{j=n} h_j\, Q_j \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

гдѣ h_j какія угодно функціи отъ x, y, а P_j и Q_j сопряженныя такъ что:

$$\frac{\partial P_j}{\partial x} = \frac{\partial Q_j}{\partial y}, \; \frac{\partial P_j}{\partial y} = -\frac{\partial Q_j}{\partial x} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; j = 1, 2 \ldots n \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Ур-ія (2) можно переписать въ видѣ:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left\{u-\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j P_j+\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j Q_j\right\}= \\
&\qquad\qquad\frac{\partial}{\partial y}\left\{v-\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j P_j-\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j Q_j\right\} \\
&\frac{\partial}{\partial y}\left\{u-\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j P_j+\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j Q_j\right\}= \\
&\qquad\qquad-\frac{\partial}{\partial x}\left\{v-\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j P_j-\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j Q_j\right\}
\end{aligned}
\right\} \quad (4)
$$

если α_j и β_j удовлетворятъ условіямъ:

$$\frac{\partial\alpha_j}{\partial x}-\frac{\partial\beta_j}{\partial y}=h_j \qquad \frac{\partial\alpha_j}{\partial y}+\frac{\partial\beta_j}{\partial x}=0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ур-ія (4) показываютъ, что

$$u-\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j P_j+\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j Q_j \text{ и } v-\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j P_j-\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j Q_j$$

двѣ сопряженныя функціи; обозначивъ ихъ φ и ψ, мы найдемъ:

$$
\left.
\begin{aligned}
u&=\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j P_j-\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j Q_j+\varphi \\
v&=\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j P_j+\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j Q_j+\psi
\end{aligned}
\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)
$$

Для интегрированія ур-ій (5), которыя являются простѣйшими ур-іями типа (2) [при $n=1$, $P_1=1$, $Q_1=0$] можно воспользоваться разными пріемами; предположивъ, напримѣръ, что x и y прямоугольныя координаты точки на нѣкоторой плоскости, вообразимъ эту плоскость покрытою массой плотности $-\frac{h_j}{2\pi}$, всѣ элементы которой притягиваютъ другъ друга съ силами пропорціальными ихъ массамъ и обратно пропорціональными разстояніямъ между ними. Если V_j будетъ потенціальная функція притяженія этими массами массы $=1$, находящейся въ той же плоскости, мы можемъ положить:

$$\alpha_j = \frac{\partial V_j}{\partial x}, \quad \beta_j = -\frac{\partial V_j}{\partial y}$$

и эти α_j, β_j удовлетворятъ (5).

Такимъ образомъ всякое рѣшеніе уравненій (2) можетъ быть представлено въ видѣ (6); очевидно и наоборотъ: всякія выраженія вида (6) удовлетворятъ ур-іямъ (2) при α_j и β_j, удовлетворяющихъ ур-іямъ (5) т. к. изъ (6) слѣдуетъ тогда (4) и (2).

Изъ (6) слѣдуетъ

$$u + iv = \sum_{j=1}^{j=n} (\alpha_j + i\beta_j)\,(P_j + iQ_j) + \varphi + i\psi \quad . \quad . \quad (7)$$

и, т. к. по условію

$P_j + iQ_j = F_j(z)$, $\varphi + i\psi = f(z)$, гдѣ $F_j(z)$ и $f(z)$ функціи комплекснаго перемѣннаго $z = x + iy$

$$u + iv = \sum_{j=1}^{j=n} (\alpha_j + i\beta_j)\,F_j(z) + f(z)$$

Точно также легко убѣдиться, что рѣшеніе системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= \sum_{j=1}^{j=n} h_j P_j - \sum_{j=1}^{j=n} H_j Q_j \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \sum_{j=1}^{j=n} h_j Q_j + \sum_{j=1}^{j=n} H_j P_j \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ P_j и Q_j сопряженныя функціи можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j P_j - \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j Q_j + \varphi \\ v &= \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j P_j + \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j Q_j + \psi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

гдѣ α_j и β_j удовлетворяютъ ур-іямъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{\partial \beta_j}{\partial x} &= H_j \\ \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} - \frac{\partial \beta_j}{\partial y} &= h_j \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

и наоборотъ — всякія выраженія вида (9) удовлетворяютъ ур-іямъ (8).

Замѣтимъ еще нѣсколько очевидныхъ свойствъ сопряженныхъ функцій:

a) 2 сопряженныя функціи P и Q можно всегда разсматривать какъ частныя производныя одной и той же функціи Φ, удовлетворяющей ур-ію

$$\nabla_2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \text{ а именно } P = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \; . \; . \; (11)$$

и наоборотъ: всякія 2 выраженія вида (11) сопряженныя.

b) Если P_1 и Q_1 сопряженныя и P_2 и Q_2 сопряженныя, то и $P_1 P_2 - Q_1 Q_2$ и $P_1 Q_2 + P_2 Q_1$ сопряженныя.

Въ самомъ дѣлѣ, перемножая функціи комплекснаго перемѣннаго $P_1 + Q_1 i$ и $P_2 + Q_2 i$, мы найдемъ функцію комплекснаго перемѣннаго

$$P_1 P_2 - Q_1 Q_2 + i(P_1 Q_2 + P_2 Q_1)$$

откуда и слѣдуетъ сопряженность $P_1 P_2 - Q_1 Q_2$ и $P_1 Q_2 + P_2 Q_1$. Отсюда при помощи *a*) слѣдуетъ, что, если Φ_1 и Φ_2 двѣ функціи, удовлетворяющія условіямъ:

$$\nabla_2 \Phi_1 = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0 \text{ и } \nabla_2 \Phi_2 = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0$$

то

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \quad \text{и}$$
$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$$

сопряженныя.

c) Если P_1 и Q_1 сопряженныя, P_2 и Q_2 сопряженныя то и

$$\frac{P_1 P_2 + Q_1 Q_2}{P_2{}^2 + Q_2{}^2} \text{ и } \frac{P_2 Q_1 - P_1 Q_2}{P_2{}^2 + Q_2{}^2}$$

сопряженныя.

Мы убѣдимся въ этомъ, отдѣливъ вещественную и мнимую части функціи комплекснаго перемѣннаго $\frac{P_1 + i Q_1}{P_2 + i Q_2}$

d) Всякія 2 сопряженныя функціи φ и ψ могутъ быть представлены въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= P\frac{\partial \Phi}{\partial y} - Q\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \psi &= Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + P\frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ Φ какая угодно функція, удовлетворяющая ур-ію $\nabla_2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$, а P и Q сопряженныя; въ самомъ дѣлѣ, рѣшивъ (12) относительно P и Q, найдемъ въ силу *c*) что онѣ будутъ сопряженныя.

e) Если P и Q сопряженныя функціи, то выраженія

$$Pdx - Qdy \text{ и } Qdx + Pdy$$

представляютъ полные дифференціалы сопряженныхъ функцій:

$$\mathbf{P} = \int Pdx - Qdy \quad \mathbf{Q} = \int Qdx + Pdy$$

Въ самомъ дѣлѣ, если P и Q сопряженныя, $P+Qi$ функція комплекснаго перемѣннаго и пусть $P+Qi=f(z)$

$$\int f(z)\,dz = \int (P+iQ)\,(dx+idy) = \mathbf{P}+i\mathbf{Q}$$

откуда и слѣдуетъ сопряженность $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

Легко убѣдиться, что рѣшеніе системы дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= \sum_{j=1}^{j=n} (P_j P_{oj} + Q_j Q_{oj}) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \sum_{j=1}^{j=n} (P_j Q_{oj} - P_{oj} Q_j) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

гдѣ P_j, Q_j и P_{oj}, Q_{oj} пары сопряженныхъ функцій можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{j=n}^{j=n} P_{oj}\ \mathbf{P}_j + \varphi \\ v &= \sum_{j=n}^{j=n} Q_{oj}\ \mathbf{P}_j + \psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

гдѣ φ и ψ двѣ сопряженныя функціи, а

$$\mathbf{P}_j = \int P_j\,dx - Q_j\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Отсюда при помощи (8), (9) можно заключить, что рѣшеніе системы уравненій

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= \sum_{j=1}^{j=n} h_j P_j - \sum_{j=1}^{j=n} H_j Q_j + \sum_{j=1}^{j=n} (P_j P_{oj} + Q_j Q_{oj}) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \sum_{j=1}^{j=n} h_j Q_j + \sum_{j=1}^{j=n} H_j P_j + \sum_{j=1}^{j=n} (P_j Q_{oj} - Q_j P_{oj}) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

гдѣ (P_{oj}, Q_{oj}), (P_j, Q_j) пары сопряженныхъ функцій можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j P_j - \sum_{j=n}^{j=n} \beta_j Q_j + \sum_{j=1}^{j=n} P_{oj}\, \mathbf{P}_j + \varphi \\ v &= \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j P_j + \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j Q_j + \sum_{j=1}^{j=n} Q_{oj}\, \mathbf{P}_j + \psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad (17)$$

гдѣ α_j и β_j удовлетворяютъ ур-іямъ (10), φ и ψ сопряженныя функціи, а

$$\mathbf{P}_j = \int P_j\, dx - Q_j\, dy$$

Напримѣръ, чтобы получить рѣшеніе уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= \sum (k_j P_j + l_j Q_j) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \sum (m_j P_j + n_j Q_j) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

гдѣ k_j, l_j, m_j, n_j какія нибудь постоянныя, положимъ

$$\left.\begin{aligned} h_j &= \tfrac{1}{2}(k_j + n_j) \qquad & P_{oj} &= \tfrac{1}{2}(k_j - n_j) \\ H_j &= \tfrac{1}{2}(m_j - l_j) \qquad & Q_{oj} &= \tfrac{1}{2}(m_j + l_j) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (19)$$

и мы найдемъ рѣшеніе ур-ій (18) по формуламъ (17).

Такъ какъ, если P_j, Q_j и P_{1j}, Q_{1j} представляютъ пары сопряженныхъ функцій, и

$$P_j P_{1j} - Q_j Q_{1j}, \quad P_j Q_{1j} + P_{1j} Q_j$$

представляютъ функціи сопряженныя *), то мы можемъ ихъ вставить вмѣсто P_j и Q_j въ (13), (15) и тогда при помощи (8) и (9) мы заключимъ, аналогично (16), (17), что рѣшеніе системы уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{j=1}^{j=n} h_j P_j - \sum_{j=1}^{j=n} H_j Q_j + \\ + \sum_{j=1}^{j=n} [(P_j P_{1j} - Q_j Q_{1j}) P_{oj} + (P_j Q_{1j} + P_{1j} Q_j) Q_{oj}] \end{aligned}\right\} (20)$$

*) см. замѣчаніе *b*) стр. 4.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\sum_{j=1}^{j=n} h_j Q_j+\sum_{j=1}^{j=n} H_j P_j+\\ \sum_{j=1}^{j=n}\left[(P_j P_{1j}-Q_j Q_{1j}) Q_{oj}-(P_j Q_{1j}+P_{1j} Q_j) P_{oj}\right]\end{aligned}\right\}(20)$$

гдѣ (P_{oj}, Q_{oj}), (P_{1j}, Q_{1j}), (P_j, Q_j) пары сопряженныхъ функцій, представляется въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}u&=\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j P_j-\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j Q_j+\sum_{j=1}^{j=n}P_{oj}\mathbf{P}_j+\varphi\\ v&=\sum_{j=1}^{j=n}\beta_j P_j+\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_j Q_j+\sum_{j=1}^{j=n}Q_{oj}\mathbf{P}_j+\psi\end{aligned}\right\}\ . \quad (21)$$

гдѣ $\mathbf{P}_j=\int (P_j P_{1j}-Q_j Q_{1j})\,dx-(P_j Q_{1j}+P_{1j} Q_j)\,dy$

§ 2. Плоская задача математической теоріи упругости въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ.

Мы будемъ называть плоскою*) задачею математической теоріи упругости такую задачу послѣдней, въ которой перемѣщенія точекъ тѣла и развивающіяся въ немъ напряженія являются функціями только 2-хъ координатъ, за которыя мы возьмемъ напр. x и y и при этомъ изъ шести напряженій N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3**) равны нулю три: $T_1=T_2=N_3=O$. Напряженія N_1, N_2, $T_3=T$ должны въ этомъ случаѣ при отсутствіи внѣшнихъ силъ удовлетворять ур-іямъ:

---

*) Мы слѣдуемъ здѣсь терминологіи иностранной литературы: Problème plan. Das ebene Problem (см. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. IV 2 II, Heft 2, S. 161 § 11.)

**) Обозначенія заимствованы изъ курса гидростатики и теоріи упругости Д. Бобылева СПБ. 1886.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}=0\\ \frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

и кромѣ того $N_1 + N_2$ должно удовлетворять ур-iю:

$$\nabla_2 (N_1 + N_2) = \frac{\partial^2 (N_1 + N_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (N_1 + N_2)}{\partial y^2} = 0 \quad . . (2)$$

Ур-iя (1) можно переписать слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial 2T}{\partial y}+\frac{\partial (N_1-N_2)}{\partial x}=-\frac{\partial (N_1+N_2)}{\partial x}\\ \frac{\partial 2T}{\partial x}-\frac{\partial (N_1-N_2)}{\partial y}=-\frac{\partial (N_1+N_2)}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad . . . \quad(3)$$

Замѣчая, что въ силу (2) и замѣчанiя a) на стр. 4 § 1 $\frac{\partial (N_1+N_2)}{\partial y}$ и $\frac{\partial (N_1+N_2)}{\partial x}$ являются сопряженными, мы заключимъ, что (3) подходятъ къ типу ур-iй (2) § 1 и слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned}2T=\alpha\frac{\partial (N_1+N_2)}{\partial y}-\beta\frac{\partial (N_1+N_2)}{\partial x}+\varphi\\ N_1-N_2=\beta\frac{\partial (N_1+N_2)}{\partial y}+\alpha\frac{\partial (N_1+N_2)}{\partial x}+\psi\end{aligned}\right\}\quad . \quad(4)$$

гдѣ φ и ψ сопряженныя функцiи, а α и β удовлетворяютъ ур-iямъ:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}=-1 \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}=0 \quad . . . \quad (5)$$

Для α и β намъ необходимо лишь частное рѣшенiе ур-iй (5) и мы можемъ напр. положить:

$\alpha = 0 \qquad \beta = y$ . . . . (6_a) или

$\alpha = -x \qquad \beta = 0$ . . . . (6_b) или

$\alpha = -\frac{x}{2} \qquad \beta = \frac{y}{2}$ . . . . (6_c)

Ур-ія (4) можно переписать въ видѣ:

$$2T+i(N_1-N_2)=(\alpha+i\beta)\left\{\frac{\partial(N_1+N_2)}{\partial y}+i\frac{\partial(N_1+N_2)}{\partial x}\right\}+F(z)\,..(7)$$

гдѣ $F(z)=\varphi+\psi i$ есть нѣкоторая функція комплекснаго перемѣннаго z. Введя функцію комплекснаго перемѣннаго $\Phi(z)$, которой вещественная часть N_1+N_2, мы найдемъ:

$$i\frac{d\,\Phi(z)}{dz}=\frac{\partial(N_1+N_2)}{\partial y}+i\frac{\partial(N_1+N_2)}{\partial x}$$

и (7) приметъ видъ:

$$2T+i(N_1-N_2)=i(\alpha+i\beta)\frac{d\,\Phi(z)}{dz}+F(z)\ldots(8)$$

Такимъ образомъ плоская задача приводится къ опредѣленію 2-хъ функцій комплекснаго перемѣннаго $\Phi(z)$ и $F(z)$

Эти функціи должны быть выбраны такъ, чтобы на контурѣ, ограничивающемъ разсматриваемое тѣло, нормальное и тангенціальное напряженія были равны заданнымъ на этомъ контурѣ величинамъ.

Замѣтимъ, что формулу для преобразованія плоскихъ напряженій можно представить въ одномъ очень удобномъ въ разсматриваемъ вопросѣ видѣ.

Повернемъ *оси* координатъ *ox, oy* на уголъ Θ и пусть напряженія N_1, N_2, T замѣнятся при новыхъ осяхъ напряженіями R, Φ, U.

Имѣемъ формулы преобразованія напряженій *)

$$R=N_1\,Cos^2\Theta+N_2\,Sin^2\Theta+2\,T\,Sin\,\Theta\,Cos\,\Theta$$
$$\Phi=N_1\,Sin^2\Theta+N_2\,Cos^2\Theta-2\,T\,Sin\,\Theta\,Cos\,\Theta$$
$$U=-N_1\,Sin\,\Theta\,Cos\,\Theta+N_2\,Sin\,\Theta\,Cos\,\Theta+T(Cos^2\Theta-Sin^2\Theta)$$

или

$$\left.\begin{aligned}R-\Phi&=(N_1-N_2)\,Cos\,2\Theta+2T\,Sin\,2\Theta\\2U&=2T\,Cos\,2\Theta-(N_1-N_2)\,Sin\,2\Theta\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(9)$$

$$2U+i(R-\Phi)=[2T+i(N_1-N_2)]\,e^{2\Theta i}\quad\ldots\quad(10)$$

а такъ какъ:

*) Ibbetson, (№ 2) стр. 97. Love. Elastizität (№ 14) § 49.

$$R+\Phi=N_1+N_2$$

$$2(U+iR)=[2T+i(N_1-N_2)]\,e^{2\theta i}+i(N_1+N_2)$$

$$2(U+iR)=\left\{i(\alpha+i\beta)\frac{d\Phi(z)}{dz}+F(z)\right\}e^{2\theta i}+\frac{i}{2}(\Phi(z)+\Phi(z_1)\,..(11)$$

где $z_1=x-iy$

Такимъ образомъ при заданныхъ на контурѣ U и R задача приводится къ слѣдующей:

По заданнымъ на нѣкоторомъ замкнутомъ контурѣ значеніямъ

$$\left\{i(\alpha+i\beta)\frac{d\Phi(z)}{dz}+F(z)\right\}e^{2\theta i}+\frac{i}{2}\left\{\Phi(z)+\Phi(z_1)\right\}\quad.\quad.(12)$$

гдѣ $z_1=x-iy$, $\theta=$ углу образованному нормалью въ какой-нибудь точкѣ съ осью x-овъ найти функціи $\Phi(z)$ и $F(z)$ Раздѣляя (12) на $e^{2\theta i}$ можно на контурѣ считать заданнымъ выраженіе:

$$i(\alpha+i\beta)\frac{d\Phi(z)}{dz}+F(z)+\frac{i}{2}e^{-2\theta i}[\Phi(z)+\Phi(z_1)]\;.(13)$$

Прежде чѣмъ переходить къ задачѣ объ опредѣленіи функцій $F(z)$ и $\Phi(z)$ по заданнымъ контурнымъ условіямъ, разсмотримъ нѣсколько примѣровъ въ которыхъ видъ этихъ функцій мы задаемъ напередъ.

1) Положимъ:

$$N_1+N_2=A_m\Phi_m+A_{1m}\Phi_{1m}$$

гдѣ A_m и A_{1m} нѣкоторыя постоянныя а Φ_m и Φ_{1m} гармоническіе полиномы такіе, что

$\Phi_m+i\Phi_{1m}=(x+iy)^n$ и слѣд-о $\Phi(z)=A_m z^m-iA_{1m}z^m$

т. е.

$$\Phi_m=x^m-\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}y^2+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^{m-4}y^4-\ldots.$$

$$\Phi_{1m}=mx^{m-1}y-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}x^{m-5}y^5-\ldots$$

Точно также, положивъ

$$\varphi = B_m \Phi_m + B_{1m} \Phi_{1m}$$
$$\psi = B_m \Phi_{1m} - B_{1m} \Phi_m$$

такъ что $\varphi + i\psi = F(z) = B_m z^m - i B_{1m} z^m$ и, взявъ за α и β значенія (6_b): $\alpha = -x$ $\beta = O$, мы найдемъ рѣшеніе данное Mesnager (Comptes Rendus t. CXXXII № 24), а именно:

$$2T = -x \frac{\partial (N_1 + N_2)}{\partial y} + \varphi = -x \frac{\partial}{\partial y}(A_m \Phi_m + A_{1m} \Phi_{1m}) + $$
$$+ B_m \Phi_m + B_{1m} \Phi_{1m}$$

$$N_1 - N_2 = -x \frac{\partial (N_1 + N_2)}{\partial x} + \psi = -x \frac{\partial}{\partial x}(A_m \Phi_m + A_{1m} \Phi_{1m}) +$$
$$+ B_m \Phi_{1m} - B_{1m} \Phi_m$$

или

$$2T = -x \Big\{ A_m (-\frac{m(m-1)}{1} x^{m-2} y +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3} x^{m-4} y^3 - \ldots)$$
$$+ A_{1m} (mx^{m-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2} x^{m-3} y^2 + \ldots) \Big\} +$$
$$+ B_m (x^m - \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} y^2 + \ldots)$$
$$+ B_{1m} (mx^{m-1} y - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} y^3 + \ldots)$$

$$N_1 - N_2 = -x \Big\{ A_m (mx^{m-1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2} x^{m-3} y^2 + \ldots)$$
$$+ A_{1m} (m(m-1) x^{m-2} y - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3} x^{m-4} y^3 + \ldots) \Big\}$$
$$+ B_m (mx^{m-1} y - \ldots) - B_{1m} (x^m - \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} y^2 - \ldots)$$

У Mesnager $A_m = a + a''$, $A_{1m} = a' + a'''$,
$B_m = m(a' + a''') - 2a'''$, $B_{1m} = (1-m)a'' - (1+m)a$

Какъ другой примѣръ положимъ

$$N_1 + N_2 = \Sigma (A_m e^{my} + A_{-m} e^{-my}) \, Cos\, mx$$
$$\varphi = \Sigma (B_m e^{my} + B_{-m} e^{-my}) \, Sin\, mx$$
$$\psi = \Sigma (B_m e^{my} - B_{-m} e^{-my}) \, Cos\, mx,$$

а для α и β возьмемъ выраженія (6_b) стр. 9.

Мы найдемъ рѣшеніе Ribière'a (Comptes Rendus CXXVI № 5). У Ribière $A_m = 4\,ma_2$, $B_m = 2\,(a_2 - 2\,a_1)\,m$, $A_{-m} = -4\,m\,b_2$, $B_{-m} = 2\,(b_2 - 2\,b_1)\,m$

Замѣтимъ, что для нахожденія различныхъ рѣшеній плоской задачи математической теоріи упругости иногда пользуются такъ называемой функціей Airy, къ которой мы придемъ, если замѣтимъ, что основныя ур-ія (1) въ сущности выражаютъ, что

$$N_2\, dx^2 + N_1\, dy^2 - 2T\, dxdy$$

есть полный 2-ой дифференціалъ нѣкоторой функціи ψ

$$d_2\, \psi$$

и слѣдовательно

$$N_2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad N_1 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad T = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

Эту функцію ψ называютъ функціей Airy по имени впервые примѣнившаго ее англійскаго астронома. Однако самъ Airy ошибся, полагая что она вообще говоря можетъ быть взята произвольно*), тогда какъ въ силу ур-ія (2), она должна удовлетворять ур-ію:

$$\nabla_2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ или } \nabla_2 \nabla_2 \psi = 0$$

Это замѣчаніе ставитъ плоскую задачу въ связь съ равновѣсіемъ тонкой пластинки,**) какъ на этомъ мы остановимся ниже.

Наши разсужденія предполагаютъ отсутствіе внѣшнихъ силъ; онѣ легко могутъ быть распространены на случай

*) См. по этому поводу статью A. Timpe (№ 10).

**) У Ibbetson'a (№ 2) приведены заимствованныя изъ сочиненіе Airy, въ которыхъ повторяется ошибка Airy, замѣченная впрочемъ уже самимъ Ibbetson'омъ (см. стр. 350—358).

силъ, имѣющихъ потенціалъ U, въ каковомъ случаѣ ур-ія теоріи упругости*) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial x}=O\\ \frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=O\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

и кромѣ того (Ibbetson стр. 342, § 303, формула (164))

$$\nabla_2\left(k(N_1+N_2)+U\right)=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

гдѣ k нѣкоторая постоянная; потенціальную функцію U мы предположимъ удовлетворяющей ур-ію

$$\nabla_2 U=O$$

и слѣдовательно изъ (15)

$$\nabla_2(N_1+N_2)=O \quad \text{и}$$

$$\nabla_2(N_1+N_2+2U)=O$$

Ур-ія (14) могутъ быть представлены въ видѣ:

$$\frac{\partial\, 2T}{\partial x}-\frac{\partial(N_1-N_2)}{\partial y}=-\frac{\partial(N_1+N_2+2U)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\, 2T}{\partial x}+\frac{\partial(N_1-N_2)}{\partial x}=-\frac{\partial(N_1+N_2+2U)}{\partial x}$$

и слѣдовательно подходятъ къ типу ур-ій (2) § 1 и

$$2T=\alpha\frac{\partial(N_1+N_2+2U)}{\partial y}-\beta\frac{\partial(N_1+N_2+2U)}{\partial x}+\varphi$$

$$N_1-N_2=\beta\frac{\partial(N_1+N_2+2U)}{\partial y}+\alpha\frac{\partial(N_1+N_2+2U)}{\partial x}+\psi$$

гдѣ φ, ψ, α, β тѣ же, что и на стр. 9.

Такимъ образомъ въ данномъ случаѣ плоская задача приводится къ случаю отсутствія внѣшнихъ силъ и легко видѣть что рѣшивъ задачу при отсутствіи послѣднихъ мы рѣшимъ ее и въ разсматриваемомъ случаѣ если на контурѣ N_1 и N_2 будетъ увеличены на U.

*) Плотность тѣла предполагаемъ постоянною $=1$.

§ 3. Плоская задача математической теоріи упругости въ криволинейныхъ изотермическихъ координатахъ.

Дифференціальныя ур-ія математической теоріи упругости въ изотермическихъ координатахъ, какъ извѣстно,*) имѣютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} h^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{P}{h}\right)+h^3\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{U}{h^2}\right)+Q\frac{\partial h}{\partial\xi}=O \\ h^3\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{U}{h^2}\right)+h^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Q}{h}\right)+P\frac{\partial h}{\partial\eta}=O \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (1)$$

гдѣ P, Q, U нормальныя и тангенціальное напряженія на площадки $\perp$-ныя къ криволинейнымъ осямъ координатъ, h-дифференціальный параметръ системы изотермическихъ координатъ, одинаковый въ каждой точкѣ для обѣихъ координатныхъ линій и равный

$$h=h_1=h_2=\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}\text{, а}$$

$$\xi+i\eta=F(x+iy) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

есть основное ур-іе, опредѣляющее систему изотермическихъ координатъ ξ, η и слѣдовательно ξ и η являются сопряженными функціями отъ x, y и

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$\Omega=P+Q$ и здѣсь удовлетворяетъ ур-ію:

$$\nabla_2\Omega=\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta^2}=O$$

Ур-ія (1) можно переписать въ видѣ:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{U}{h^2}\right)=\frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\xi}(P-Q)-\frac{1}{h^2}\frac{\partial P}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{U}{h^2}\right)=-\frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\eta}(P-Q)-\frac{1}{h^2}\frac{\partial Q}{\partial\eta}$$

или въ видѣ:

*) При отсутствіи внѣшнихъ силъ. Ibbetson (№ 2) стр. 243.

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{2U}{h^2}\right)=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{2P}{h^2}\right)-\frac{2}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\xi}\Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{2U}{h^2}\right)=-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{2Q}{h^2}\right)-\frac{2}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\eta}\Omega$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{2U}{h^2}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{P-Q}{h^2}\right)&=-\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{P+Q}{h^2}-\frac{2}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\eta}\Omega=\\&=-\frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(P+Q)\\\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{2U}{h^2}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{P-Q}{h^2}\right)&=-\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{P+Q}{h^2}-\frac{2}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\xi}\Omega=\\&=-\frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial\xi}(P+Q)\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Эти ур-ія подходятъ къ типу ур-ій (2) § 1 т. к. $\frac{\partial}{\partial\eta}(P+Q)$ и $\frac{\partial}{\partial\xi}(P+Q)$ функціи сопряженныя (примѣч. *a*) стр. 4 § 1) и потому мы можемъ положить

$$\left.\begin{aligned}\frac{2U}{h^2}&=\alpha\frac{\partial}{\partial\eta}(P+Q)-\beta\frac{\partial}{\partial\xi}(P+Q)+\varphi\\\frac{P-Q}{h^2}&=\beta\frac{\partial}{\partial\eta}(P+Q)+\alpha\frac{\partial}{\partial\xi}(P+Q)+\psi\end{aligned}\right|\quad . \quad . \quad (5)$$

гдѣ α и β удовлетворяютъ ур-іямъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}-\frac{\partial\beta}{\partial\eta}&=-\frac{1}{h^2}\\\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}+\frac{\partial\beta}{\partial\xi}&=\ \ O\end{aligned}\right|\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

а φ и ψ сопряженныя ур-ія (5) можно подобно формулѣ (8) стр. 10 заключить въ одну формулу:

$$\frac{2U+i(P-Q)}{h^2}=i(\alpha+i\beta)\frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\zeta}+F(\zeta)\quad . \quad (7)$$

Легко указать рѣшеніе ур-ій (6). Пусть изъ ур-ія (2):

$$z=x+iy=f(\zeta),\quad\text{гдѣ}\quad\zeta=\xi+i\eta$$

Легко видѣть, что за α и β, удовлетворяющія (6) можно принять

$$\alpha + i\beta = -\tfrac{1}{2} f(\zeta_1) f'(\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ $\zeta_1 = \xi - i\eta$; $f(\zeta_1)$ есть $f(\xi - i\eta)$, если въ операцію f не входитъ мнимый знакъ i; въ противномъ случаѣ, чтобы изъ $f(\xi + i\eta)$ образовать $f(\zeta_1)$, надо въ операціи f измѣнить знакъ у i; такъ что вообще, если отдѣленіе вещественной части отъ мнимой въ $f(\zeta)$ даетъ

$$f(\zeta) = A + Bi,$$

гдѣ A и B функціи отъ ξ, η, не содержащія мнимаго знака, то

$$f(\zeta_1) = A - Bi.$$

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя (8) по ξ и по η, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} + i\frac{\partial\beta}{\partial\xi} &= -\frac{1}{2} f'(\zeta_1) f'(\zeta) - \frac{1}{2} f(\zeta_1) f''(\zeta) \\ \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} + i\frac{\partial\beta}{\partial\eta} &= \quad \frac{i}{2} f'(\zeta_1) f'(\zeta) - \frac{i}{2} f(\zeta_1) f''(\zeta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (9)$$

$f'(\zeta_1)$ есть выраженіе сопряженное съ $f'(\zeta)$ подобно тому какъ $f(\zeta_1)$ сопряженно съ $f(\zeta)$.

Изъ ур-ій (9) получимъ:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} - \frac{\partial\beta}{\partial\eta} + i\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi} + \frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\right) = -f'(\zeta_1) f'(\zeta)$$

$f'(\zeta)\ f'(\zeta_1)$ какъ произведеніе 2-хъ сопряженныхъ выраженіи есть величина вещественная = квадрату модуля $f'(\zeta)$ такъ что

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} - \frac{\partial\beta}{\partial\eta} = -(\text{мод.} f'(\zeta))^2$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\xi} + \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} = O$$

Но

мод. $f'(\zeta) = \dfrac{1}{\text{мод. } F'(z)}$, а мод. $F'(z) = \sqrt{\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2} = h$,

такъ какъ $F'(z) = \dfrac{\partial\xi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$ *); слѣд-о:

*) Здѣсь $F(z) = \xi + i\eta$ имѣетъ значеніе (2); ее не слѣдуетъ смѣшивать съ $F(\zeta) = \varphi + i\psi$ ур-ія (7) стр. (16) и съ $F(z)$ ур-ія (8) стр. (10).

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}-\frac{\partial\beta}{\partial\eta}=-\frac{1}{h^2}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\xi}+\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}=O,$$

а эти ур-ія какъ разъ совпадаютъ съ (6). Къ такому же результату мы придемъ непосредственнымъ преобразованіемъ перемѣнныхъ въ ур-іи (8) стр. 10.

Мы имѣемъ по формулѣ (10) стр. 10

$2U+i(P-Q)=(2T+i(N_1-N_2))\,e^{2\theta i}$, гдѣ

θ уголъ, образованный новою осью ξ съ осью x-овъ.

Принявъ за α и β въ $2T+i(N_1-N_2)$ выраженія 6_c § 2, мы найдемъ изъ фор. (8) стр. 10.

$$e^{-2\theta i}\,[2U+i(P-Q)]=-\frac{i}{2}(x-iy)\frac{d\Phi}{dz}+F(z)\quad.(10)$$

Имѣя кромѣ того въ виду, что $x-iy=f(\zeta_1)$ и

$$f'(\zeta)=\frac{d}{d\zeta}(x+iy)=\frac{\partial x}{\partial\xi}+i\frac{\partial y}{\partial\xi}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2}\;\frac{\frac{\partial x}{\partial\xi}+i\frac{\partial y}{\partial\xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2}}=$$

$=\frac{1}{h}\left\{Cos\,\theta+i\,Sin\,\theta\right\}=\frac{1}{h}e^{i\theta}$, т. к. очевидно

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}}=\frac{1}{h}\text{, а}$$

$$Cos\,\theta=\frac{\frac{\partial x}{\partial\xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2}},\quad Sin\,\theta=\frac{\frac{\partial y}{\partial\xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2}}$$

мы найдемъ, умножая обѣ части ур-ія (10) на

$[f'(\zeta)]^2=\frac{1}{h^2}e^{2\theta i}$, полагая $F(z)\,[f'(\zeta)]^2=F(\zeta)$ и замѣчая, что

$$\frac{d\Phi}{dz} f'(\zeta) = \frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \frac{d\Phi}{d\zeta}, \text{ ур-ie:}$$

$$\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = -\frac{i}{2} f(\zeta_1) f'(\zeta) \frac{d\Phi}{d\zeta} + F(\zeta),$$

которое совпадаетъ съ формулой (7) при условіи (8)

$$\alpha + i\beta = -\tfrac{1}{2} f(\zeta_1) f'(\zeta)$$

§ 4. Полярныя координаты на плоскости въ изотермической формѣ.

Возьмемъ

$$\xi + i\eta = lg(x + iy) = lg\, r + i\,\theta$$

гдѣ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\theta = arctg\,\dfrac{y}{x}$

$$f(\zeta) = e^{\zeta},\ \alpha + i\beta = -\tfrac{1}{2} e^{\zeta_1} e^{\zeta} = -\tfrac{1}{2} e^{2\xi} = -\tfrac{1}{2} r^2$$

$$h = \frac{1}{r},\quad \alpha = -\tfrac{1}{2} r^2,\ \beta = 0$$

и для полярной системы координатъ мы найдемъ:

$$r^2 [2U + i(P - Q)] = -\tfrac{1}{2} i r^2 \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta) \quad \ldots (1)$$

гдѣ $\zeta = \xi + i\eta$, а

$$\left.\begin{aligned} 2Ur^2 &= -\tfrac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega + \varphi \\ (P - Q)\, r^2 &= -\tfrac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega + \psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

гдѣ $\Omega = P + Q$, $\varphi + i\psi = F(\zeta)$.

Эти формулы указаны нами въ Comptes Rendus 1908 г. (№ 15).

Полагая

$$\begin{aligned} P + Q &= \Sigma(\ \ A_m r^m + A_{-m} r^{-m})\, Cos\, m\theta \\ \varphi &= \Sigma(\ \ B_m r^m + B_{-m} r^{-m})\, Sin\, m\theta \\ \psi &= \Sigma(-B_m r^m + B_{-m} r^{-m})\, Cos\, m\theta \end{aligned}$$

мы найдемъ рѣшеніе Ribièra (№ 3 и № 8), а, прибавляя къ $P + Q$ членъ $C_1\, lgr + C_2$, рѣшеніе С. И. Белзецкаго (№ 9) и A. Timpe (№ 10). Частный случай $m = 1$ былъ открытъ еще въ 1881 Х. С. Головинымъ (№ 1), а именно:

$$1)\quad P=\frac{A}{r^2}+A_1+A_2\, lgr,\qquad U=O$$

$$2)\quad P=\left(\frac{B}{r^4}+\frac{B_1}{r^2}+B_2\right)y$$

$$U=\left(\frac{B}{r^4}+\frac{B_1}{r^2}+B_2\right)x$$

и

$$3)\quad P=\quad\left(\frac{C}{r^2}+C_1+C_2\, r^2\right)\frac{x}{r^2}$$

$$U=-\left(\frac{C}{r^2}+C_1+C_2\, r^2\right)\frac{y}{r^2}$$

Комбинируя эти три рѣшенія, Х. С. Головинъ даетъ рѣшеніе:

$$P=A\left\{lg\frac{r}{r_1}-\left(1-\frac{r_1{}^2}{r_2{}^2}\right)\frac{r_2{}^2}{r_2{}^2-r_1{}^2}lg\frac{r_2}{r_1}\right\}+$$

$$+(B\, Cos\,\theta+C\, Sin\,\theta)\left\{\frac{1}{r^3}-\frac{r_2{}^2+r_1{}^2}{r_1{}^2r_2{}^2}\frac{1}{r}+\frac{r}{r_1{}^2r_2{}^2}\right\}$$

$$U=(B\, Sin\,\theta-C\, Cos\,\theta)\left\{\frac{1}{r^3}-\frac{r_2{}^2+r_1{}^2}{r_1{}^2r_2{}^2}\frac{1}{r}+\frac{r}{r_1{}^2r_2{}^2}\right\}$$

Приложимъ найденныя выраженія напряженій въ полярныхъ координатахъ къ выводу распредѣленія напряженій въ полосѣ, ослабленной круговымъ отверстіемъ, растягиваемой по направленію оси x-овъ.

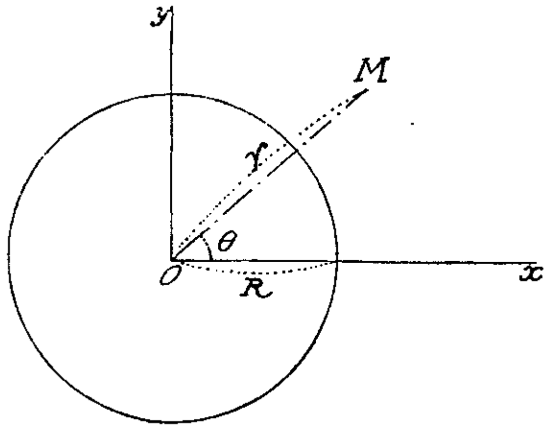
Положимъ:

$$P+Q=\Omega=\Sigma\, a_m\, e^{m\xi}\, Cos\, m\theta+b_m\, e^{m\xi}\, Sin\, m\theta=$$
$$\Sigma\, a_m\, r^m\, Cos\, m\theta+b_m\, r^m\, Sin\, mO$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi=\Sigma\, A_m\, e^{m\xi}\, Cos\, m\theta+B_m\, e^{m\xi}\, Sin\, m\theta=\\ \Sigma\, A_m\, r^m\, Cos\, m\theta+B_m\, r^m\, Sin\, m\theta\\ \psi=\Sigma\, A_m\, e^{m\xi}\, Sin\, m\theta-B_m\, e^{m\xi}\, Cos\, m\theta=\\ \Sigma\, A_m\, r^m\, Sin\, m\theta-B_m\, r^m\, Cos\, m\theta\end{aligned}\right\}\quad.\quad(3)$$

Здѣсь m можетъ имѣть какія угодно положительныя и отрицательныя значенія.

Направимъ ось x-овъ по направленію растягивающихъ силъ и примемъ за начало прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ центръ кругового отверстія (чер. 1).



чер. 1.

Условія, которымъ должны удовлетворить P, Q, U будутъ:

1) въ безконечно удаленныхъ точкахъ т. е. при $r=\infty$:

$$N_2 = T = O,\quad N_1 = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

2) при $r=R$:

$$P = O,\quad U = O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Въ силу условія (4)

$$[2T + i(N_1 - N_2)]_{r=\infty} = ip$$

$$[N_1 + N_2]_{r=\infty} = p$$

и слѣдовательно при помощи (10) стр. 10

$$[2U + i(P - Q)]_{r=\infty} = [2T + i(N_1 - N_2)]_{r=\infty}\, e^{2\theta i} =$$

$$= ipe^{2\theta i} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$[P + Q]_{r=\infty} = [N_1 + N_2]_{r=\infty} = p.$$

Соотвѣтственно этому положимъ:

$$\Omega = P + Q = p + \Sigma\, a_{-m}\, r^{-m}\, Cos\, m\theta - b_{-m}\, r^{-m}\, Sin\, m\theta \ . \ (7)$$

Принимая за φ и ψ выраженія (3), найдемъ:

$$[2U + i(P - Q)]\, r^2 = -\tfrac{1}{2} r^2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega + i\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega\right) + \varphi + i\psi \quad (8)$$

$$\text{гдѣ}\quad \varphi + i\psi = \Sigma\,(A_m - iB_m)\, r^m\, e^{m\theta i} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

и $2U + i(P - Q) = -\tfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega + i\,\dfrac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega\right) + r^{-2}(\varphi + i\psi)$

Въ силу (6) это выраженіе должно приводиться при $r=\infty$ къ $ipe^{2\theta i}$ и, т. к.

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega\right]_{r=\infty}=\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega\right]_{r=\infty}=O$$

$$[r^{-2}(\varphi+i\psi)]_{r=\infty}=ipe^{2\theta i}$$

Для этого положимъ (9):

$$\varphi+i\psi=ipr^2e^{2\theta i}+A_o-iB_o+(A_1-iB_1)\,re^{\theta i}+ \\ +\sum_{m=1,2,3\ldots}(A_{-m}-iB_{-m})\,r^{-m}e^{-m\theta i} \quad . \quad . \quad (10)$$

Теперь остается выполнить условіе (5).

Мы найдемъ при помощи (2), (7), (10):

$$\left.\begin{aligned}2U&=A_o r^{-2}+A_1r^{-1}\,Cos\,\theta+B_1r^{-1}\,Sin\,\theta-p\,Sin\,2\theta+\\&+\sum_{m=1,2\ldots}(A_{-m}r^{-m-2}+\tfrac{1}{2}b_{-m}mr^{-m})\,Cos\,m\theta+\\&+(-B_{-m}r^{-m-2}+\tfrac{1}{2}a_{-m}mr^{-m})\,Sin\,m\theta\\2P&=-B_or^{-2}+p+A_1r^{-1}Sin\theta-B_1r^{-1}Cos\theta+p\,Cos\,2\theta+\\&+\sum_{m=1,2\ldots}(-B_{-m}r^{-m-2}+\frac{2+m}{2}a_{-m}r^{-m})\,Cos\,m\theta\\&(-A_{-m}r^{-m-2}-\frac{2+m}{2}b_{-m}r^{-m})\,Sin\,m\theta\end{aligned}\right\}(11)$$

При $r=R$ въ силу (5) $U=P=O$; приравнявъ O при $r=R$ коэффиціенты при Cos'ахъ и Sin'ахъ въ (11), мы найдемъ:

$$A_o=O \quad B_o=pR^2 \quad A_1=\frac{b_{-1}}{2}, \quad A_{-1}=-R^2b_{-1}$$

$$B_1=\frac{a_{-1}}{2}, \quad B_{-1}=R^2a_{-1}$$

$$A_{-2}=O\,, \qquad B_{-2}=-3p\,R^4$$

$$a_{-2}=-2p\,R^2,\ b_{-2}=O$$

и

$$A_{-m}=B_{-m}=a_{-m}=b_{-m}=0 \text{ при } m>2$$

Такимъ образомъ, полагая $a_{-1} = b_{-1} = O$, мы найдемъ:

$$\Omega = P + Q = p - 2p\,R^2 e^{-2\xi}\,Cos\,2\theta = p - \frac{2p\,R^2\,Cos\,2\,\theta}{r^2}$$

$$\Phi(\zeta) = p - 2R^2 p e^{-2\zeta},\ \text{гдѣ}\ \zeta = \xi + \eta i = \xi + \theta i$$

$$\frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\zeta} = 4R^2\,e^{-2\zeta}\,p$$

$$\varphi = \left(-pr^2 + \frac{3p\,R^4}{r^2}\right) Sin\,2\theta$$

$$\psi = \left(\quad pr^2 + \frac{3p\,R^4}{r^2}\right) Cos\,2\theta - pR^2$$

$$F(\zeta) = \varphi + i\psi = ip\,(e^{2\zeta} - R^2 + 3R^4\,e^{-2\zeta})$$

$$2Ur^2 = p\,Sin\,2\theta\left(\frac{3R^4}{r^2} - r^2 - 2R^2\right)$$

$$(P - Q)\,r^2 = p\left\{-2R^2 Cos\,2\theta + r^2 Cos\,2\theta + \frac{3R^4}{r^2}\,Cos\,2\theta - R^2\right\}$$

$$2Pr^2 = (P-Q)r^2 + (P+Q)r^2 = p\,(r^2 - R^2)\,(1 + \frac{r^2 - 3R^2}{r^2}\,Cos\,2\theta)$$

$$2T + i\,(N_1 - N_2) = e^{-2\theta i}\,(2U + i\,(P - Q)) =$$

$$= e^{-2\theta i}\left(-\frac{i}{2}\,\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + \frac{F(\zeta)}{r^2}\right)$$

откуда

$$2T = p\left\{\frac{3R^2 - 2r^2}{r^4}\,R^2\,Sin\,4\theta - \frac{R^2}{r^2}\,Sin\,2\theta\right\}$$

$$N_1 - N_2 = p\left\{\frac{(3R^2 - 2r^2)\,R^2}{r^4}\cdot Cos\,4\theta - \frac{R^2}{r^2}\,Cos\,2\theta + 1\right\},$$

и т. к. $N_1 + N_2 = P + Q$

$$2N_1 = 2p\left\{1 - \frac{3R^2\,Cos\,2\theta}{2r^2} + \frac{(3R^2 - 2r^2)\,R^2}{2r^4}\,Cos\,4\theta\right\}$$

$$2N_2 = 2p\left\{\ -\ \frac{R^2\,Cos\,2\theta}{2r^2} - \frac{(3R^2 - 2r^2)R^2}{2r^4}\,Cos\,4\theta\right\}$$

$$2T = 2p\left\{\frac{3R^2 - 2r^2}{2r^4}\,R^2\,Sin\,4\theta - \frac{R^2}{2r^2}\,Sin\,2\theta\right\}$$

Отсюда получаются формулы Kirsch'a [5 bis], если ввести вмѣсто полярныхъ прямоугольныя координаты x и y, положивъ:

$$r\ \mathrm{Cos}\,\theta = x$$
$$r\ \mathrm{Sin}\,\theta = y$$

$$N_1 = p - \frac{3R^2 p (x^2 - y^2)}{2r^4} - \frac{R^2 p (2r^2 - 3R^2)(r^4 - 8x^2 y^2)}{2r^8}$$

$$N_2 = \quad - \frac{R^2 p (x^2 - y^2)}{2r^4} + \frac{R^2 p (2r^2 - 3R^2)(r^4 - 8x^2 y^2)}{2r^8}$$

$$T = \quad - \quad \frac{R^2 p x y}{r^4} \quad - \frac{2R^2 p (2r^2 - 3R^2)(x^2 - y^2) x y}{r^8}$$

которыя и были Kirsch'омъ (Cp. Föppl, Technische Mechanik t. IV).

§ 5. Эллиптическія координаты на плоскости въ изотермической формѣ.

Положимъ

$$z = x + yi = c\ \mathrm{Cos}\,h\,(\xi + i\eta) = f(\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

откуда

$$x = c\ \mathrm{Cos}\,h\,\xi\ \mathrm{Cos}\,\eta,\quad y = c\ \mathrm{Sin}\,h\,\xi\ \mathrm{Sin}\,\eta$$

Кривыя $\xi =$ пост. будутъ эллипсы:

$$\frac{x^2}{c^2\,\mathrm{Cos}\,h^2\xi} + \frac{y^2}{c^2\,\mathrm{Sin}\,h^2\,\xi} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Кривыя $\eta =$ пост. гиперболы:

$$\frac{x^2}{c^2\,\mathrm{Cos}^2\,\eta} - \frac{y^2}{c^2\,\mathrm{Sin}^2\,\eta} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$h = \frac{1}{c\sqrt{\mathrm{Cos}\,h^2\,\xi - \mathrm{Cos}^2\,\eta}} = \frac{1}{c\sqrt{\mathrm{Sin}\,h^2\,\xi + \mathrm{Sin}^2\,\eta}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{\mathrm{Cos}h\,2\,\xi - \mathrm{Cos}\,2\eta}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$f'(\zeta) = c\ \mathrm{Sin}\,h\,(\xi + \eta i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\frac{1}{h^2} = c^2 (\mathrm{Cos}\,h^2\,\xi - \mathrm{Cos}^2\,\eta) = \frac{c^2}{2}(\mathrm{Cos}\,h\,2\,\xi - \mathrm{Cos}\,2\eta) \quad . \ (6)$$

$$\alpha + i\beta = -\frac{1}{2}c^2\ \mathrm{Cos}\,h\,(\xi - i\eta)\ \mathrm{Sin}\,h\,(\xi + i\eta)$$

$$= -\frac{c^2}{4} 2\,\mathrm{Sin}\,h\,(\xi + i\eta)\ \mathrm{Cos}\,h\,(\xi - \eta i) = -\frac{c^2}{2}(\mathrm{Sin}\,h\,2\,\xi + i\ \mathrm{Sin}\,2\,\eta)$$

$$\frac{1}{h^2}[2U+i(P-Q)]=-\frac{ic^2}{4}(Sinh\,2\xi+i\,Sin\,2\eta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}+F(\zeta)\,..(6\,\text{bis})$$

$$\text{гдѣ}\ \ F(\zeta)=\varphi+i\psi$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2U}{h^2}&=\alpha\frac{\partial}{\partial\eta}\Omega-\beta\frac{\partial}{\partial\xi}\Omega+\varphi\\ \frac{P-Q}{h^2}&=\beta\frac{\partial}{\partial\eta}\Omega+\alpha\frac{\partial}{\partial\xi}\Omega+\psi\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\quad(7)$$

Полагая

$$\Omega=P+Q=\Sigma\,A_m e^{m\xi}\,Cos\,m\eta+B_m\,e^{m\xi}\,Sin\,m\eta,$$

мы найдемъ:

$$\frac{2U}{h^2}=\frac{c^2}{4}\sum m\Big\{A_m e^{m\xi}(Sin\,2\eta\,Cos\,m\eta+Sin\,h\,2\xi\,Sin\,m\eta)+$$
$$+B_m e^{m\xi}(Sin\,2\eta\,Sin\,m\eta-Sin\,h\,2\xi\,Cos\,m\eta)\Big\}+\varphi$$

$$\frac{P-Q}{h^2}=\frac{c^2}{4}\sum m\Big\{A_m e^{m\xi}(Sin\,2\eta\,Sin\,m\eta-Sin\,h\,2\xi\,Cos\,m\eta)-$$
$$-B_m e^{m\xi}(Sin\,2\eta\,Cos\,m\eta+Sin\,2\,h\xi\,Sin\,m\eta)\Big\}+\psi$$

Въ частномъ случаѣ, если

$$P+Q=\Sigma A_m e^{m\xi}\,Cos\,m\eta$$

мы получимъ выраженія:

$$\frac{2U}{h^2}=\frac{c^2}{4}\sum m\,A_m e^{m\xi}(Sin\,2\eta\,Cos\,m\eta+Sin\,h\,2\xi\,Sin\,m\eta)+\varphi$$

$$\frac{P-Q}{h^2}=\frac{c^2}{4}\sum m\,A_m e^{m\xi}(Sin\,2\eta\,Sin\,m\eta-Sin\,h2\xi\,Cos\,m\eta)+\psi,$$

которыя могутъ быть получены изъ формулъ С. И. Белзецкаго [№ 11] или A. E. H. Love [№ 14] Ch. XI art. 187 (c).

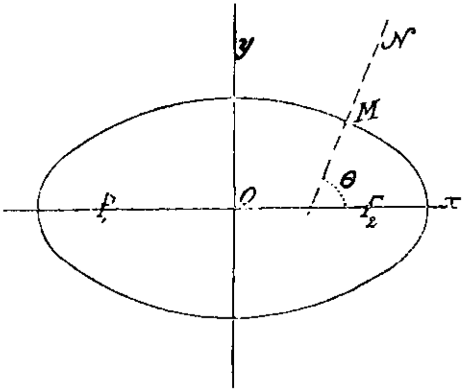
Мы примѣнимъ найденныя формулы къ выводу распредѣленія напряженій въ плоской полосѣ, растягиваемой силами параллельными оси x-овъ, и ослабленной эллиптическимъ отверстіемъ и выведемъ формулы аналогичныя формуламъ Kirsch'a для случая кругового отверстія. Какъ и въ случаѣ кругового отверстія постараемся удовлетворить двумъ условіямъ:

1) Въ безконечно удаленныхъ точкахъ т. е. при $\xi = \infty$: $N_1 = p$, $N_2 = O$, $T = O$ и слѣд-о пред. $[N_1 + N_2]_{\xi = \infty} =$ пред. $[P + Q]_{\xi = \infty} = p$ и

2) $P = U = O$ при $\xi = a$

Чтобы удовлетворить первому условію, положимъ:

$$\Omega = P + Q = p + \sum_{m=1,2,3\ldots} a_{-m} e^{-m\xi} \, Cos\, m\eta - b_{-m} e^{-m\xi} \, Sin\, m\eta$$



чер. 2.

Мы найдемъ:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \frac{2U}{h^2} = \frac{c^2}{4} \sum_{m=1,2,3\ldots} m \Big\{ & a_{-m} e^{-m\xi} (Sin\,h\, 2\xi \, Sin\, m\eta - \\ & - Sin\, 2\eta \, Cos\, m\eta) + b_{-m} e^{-m\xi} (Sin\, 2\,h\,\xi \, Cos\, m\eta + \\ & + Sin\, 2\eta \, Sin\, m\eta \Big\} + \varphi \\ \frac{P - Q}{h^2} = \frac{c^2}{2} \sum_{m=1,2,3\ldots} m \Big\{ & a_{-m} e^{-m\xi} (Sin\, m\eta \, Sin\, 2\eta + \\ & + Sin\, 2\,h\xi \, Cos\, m\eta) + b_{-m} e^{-m\xi} (Cos\, m\eta \, Sin\, 2\,\eta - \\ & - Sin\, 2\,h\,\xi \, Sin\, m\eta) \Big\} + \psi \end{aligned} \right.$$

Если θ будетъ уголъ, образованный съ осью ox нормалью въ какой нибудь точкѣ M эллипса $\xi =$ пост. (чер. 2), то

$$f'(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{h} e^{\theta i} \quad \text{или}$$

$$c \, Sin\,h\,(\xi + i\eta) = \frac{1}{h} e^{\theta i}$$

откуда

$$e^{\theta i} = \frac{Sin\,h\,(\xi + i\eta)}{\sqrt{Cos\,h^2\,\xi - Cos^2\,\eta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

т. е.

$$Cos\,\theta = \frac{Sin\,h\,\xi\;Cos\,\eta}{\sqrt{Cos\,h^2\,\xi - Cos^2\,\eta}}\,,\quad Sin\,\theta = \frac{Sin\,\eta\;Cos\,h\,\xi}{\sqrt{Cos\,h^2\,\xi - Cos^2\,\eta}}$$

что непосредственно провѣряется изъ ур-ій (2).

Чтобы удовлетворить окончательно первому условію, надо

$$[2T + i\,(N_1 - N_2)]_{\xi=\infty} = ip$$

или при помощи фор. (10) стр. 10

$$[2U + i(P - Q)]_{\xi=\infty} = [(2T + i(N_1 - N_2))\,e^{2\theta i}]_{\xi=\infty} = ip\,[e^{2\theta i}]_{\xi=\infty}$$

и, т. к. изъ (9) слѣдуетъ:

$$\text{пред. } [e^{2\theta i}]_{\xi=\infty} = e^{2i\eta}$$

$$[2U + i\,(P - Q)]_{\xi=\infty} = ip\,e^{2i\eta} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Имѣя въ виду, что

$$[(\alpha + i\beta)\,h^2]_{\xi=\infty} = \left[-\frac{Sin\,h\,2\xi + i\,Sin\,2\eta}{4(Cos\,h^2\,\xi - Cos^2\,\eta)}\right]_{\xi=\infty} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\left[\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right]_{=\infty} = \left[\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right]_{\xi=\infty} = O,$$

мы найдемъ изъ (6 bis)

$$[2U + i\,(P - Q)]_{\xi=\infty} = [h^2\,(\varphi + i\psi)]_{\xi=\infty}$$

и слѣд-о въ силу (10)

$$[h^2\,(\varphi + i\psi)]_{\xi=\infty} = ip\,e^{2i\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Прежде чѣмъ подбирать Ω, φ и ψ, удовлетворяющія 2-му условію т. е. $P = U = O$ при $\xi = a$, замѣтимъ, что

$$\alpha_0 + i\beta_0 = Sin\,h\,2\xi + i\,Sin\,2\eta$$

при $\xi = a$ принимаетъ значенія одинаковыя съ значеніями функціи комплекснаго перемѣннаго

$$\chi(\zeta) = Sin\,h\,2a + \frac{e^{2(\zeta-a)} - e^{-2(\zeta-a)}}{2} = Sin\,h\,2a + Sin\,h\,2(\zeta - a);$$

въ силу (11) мы можемъ положить

$$F(\zeta) = \varphi + i\psi = \frac{c^2}{4}\,ip\,e^{2\zeta} + A_o + \Phi(\zeta) \quad . \quad . \quad (11\text{ bis})$$

гдѣ A_0 нѣкоторая пост. при условіи $[\Phi(\zeta)h^2]_{\xi=\infty}=O$..(12) т. к. тогда (11) будетъ выполнено. Имѣя въ виду, что изъ (6 bis):

$$\frac{1}{h^2}\left\{2U+2iP\right\}=-\frac{ic^2}{4}(\alpha_0+i\beta_0)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}+i\,\frac{P+Q}{h^2}+F(\zeta)$$

мы приводимъ нашу задачу къ отысканію такой функціи комплекснаго перемѣннаго $\Phi(\zeta)$, что вещественная часть ея $\Omega=P+Q$, а на контурѣ эллипса $\xi=a$ выполнено условіе

$$\left\{-\frac{ic^2}{4}(\alpha_0+i\beta_0)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}+i\frac{\Omega}{h^2}+\frac{c^2}{4}ip\,e^{2\zeta}+A_0+\Phi(\zeta)\right\}_{\xi=a}=O\;.\;(13)$$

Предположимъ, что на контурѣ эллипса $\xi=a$ мы имѣемъ:

$$\left\{\frac{\Omega}{h^2}\right\}_{\xi=a}-i\,A_0=-\frac{c^2}{2}p\,e^{2a}\,Cos\,2\eta\quad.\;.\quad(14)$$

Условіе (13) приметъ видъ

$$\left\{-\frac{ic^2}{4}(\alpha_0+i\beta_0)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}-\frac{c^2}{4}ip\,e^{4a-2\zeta}+\Phi(\zeta)\right\}_{\xi=a}=O\;.\;.\;(15)$$

Легко убѣдиться, что мы удовлетворимъ (14), если за Ω возьмемъ вещественную часть функціи комплекснаго перемѣннаго

$$\Phi(\zeta)=p\,e^{2a}+p\,(1-e^{2a})\,Cotg\,h\zeta\;.\;\;.\;\;.\;\;(16)$$

гдѣ $Cotg\,h\,\zeta=\dfrac{e^{\zeta}+e^{-\zeta}}{e^{\zeta}-e^{-\zeta}}=Cotg\,h\,(\xi+\eta i)=\dfrac{Sin\,h\,2\xi-i\,Sin\,2\eta}{2(Cos\,h^2\xi-Cos^2\eta)}$,

а въ (14) $A_0=-\frac{1}{2}\,ip\,c^2\{(1-e^{2a})Sin\,h\,2a+e^{2a}\,Cos\,h\,2a\}$..(17)

т. е. положимъ

$$\Omega=p\,e^{2a}+p\,(1-e^{2a})\frac{Sin\,h\,2\xi}{Cos\,h\,2\xi-Cos\,2\eta}$$

Это Ω, удовлетворяя, какъ вещественная часть функціи комплекснаго перемѣннаго (16) ур-ію:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta^2}=O$$

при $\xi=a$ обращается въ $p\,e^{2a}+p\,(1-e^{2a})\dfrac{Sin\,h\,2a}{Cos\,h\,2a-Cos\,2\eta}$, совпадающее съ

$$\Omega=[h^2]_{\xi=a}\left(\tfrac{1}{2}p\,c^2[(1-e^{2a})Sinh\,2a+e^{2a}\,Cosh\,2a]-\frac{c^2}{2}p\,e^{2a}\,Cos\,2\eta\right),$$

получаемомъ изъ (14) при A_0 (17). Имѣя въ виду, что

$$Cot\,h\,\zeta=\frac{e^{\zeta}+e^{-\zeta}}{e^{\zeta}-e^{-\zeta}}=\frac{1+e^{-2\zeta}}{1-e^{-2\zeta}}=1+2e^{-2\zeta}+2e^{-4\zeta}+2e^{-6\zeta}+\ldots,$$

мы найдемъ

$$\varPhi(\zeta)=p+2p(1-e^{2a})\sum_{m=1}^{m=\infty}e^{-m\zeta}$$

и слѣдовательно

$$\Omega=p+2p(1-e^{2a})\sum_{m=1}^{m=\infty}e^{-m\xi}\,Cos\,m\eta$$

т. е., сравнивая съ Ω на стр. 26

$$a_{-m}=2p(1-e^{2a}),\ b_{-m}=O.$$

Чтобы удовлетворить (15) возьмемъ:

$$\mathbf{\Phi}(\zeta)=\frac{c^2}{4}ip\,e^{4a-2\zeta}+\frac{ic^2}{4}\,\chi(\zeta)\frac{d\varPhi(\zeta)}{d\zeta}=$$

$$=\frac{ic^2p}{4}\left\{e^{4a-2\zeta}-\left(Sin\,h\,2a+\frac{e^{2(\zeta-a)}-e^{-2(\zeta-a)}}{2}\right)\frac{1-e^{2a}}{Sin\,h^2\zeta}\right\}..(18)$$

Такимъ образомъ при помощи (6 bis), (11 bis), (17) рѣшеніе нашей задачи будетъ:

$$\frac{2U+i(P-Q)}{h^2}=-\frac{ic^2}{4}(Sin\,h\,2\xi+i\,Sin\,2\eta)\frac{d\varPhi(\zeta)}{d\zeta}+$$

$$+\frac{c^2}{4}ipe^{2\zeta}-\tfrac{1}{2}ip\,c^2\left\{(1-e^{2a})\,Sinh\,2a+e^{2a}\,Cosh\,2a\right\}+\mathbf{\Phi}(\zeta)..(19)$$

гдѣ $\varPhi(\zeta)$ и $\mathbf{\Phi}(\zeta)$ имѣютъ значенія (16) и (18). Имѣя въ виду, что

$$\frac{d\varPhi(\zeta)}{d\zeta}=-\frac{p(1-e^{2a})}{Sin\,h^2\zeta}=\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}-i\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}=$$

$$=\frac{2p(1-e^{2a})}{(Cos\,h\,2\xi-Cos\,2\eta)^2}\left\{1-Cos\,2\eta\,Cos\,h\,2\xi+i\,Sin\,2\eta\,Sin\,h\,2\xi\right\}$$

и, подставляя въ (19) вмѣсто $\mathbf{\Phi}(\zeta)$ ея выраженіе (18), мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2U}{h^2} = \\
&= \mathfrak{M}\, Sin\, 2\eta \{ Sinh 2\xi (Sinh 2\xi - Sinh 2a - Sinh 2(\xi - a)\, Cos\eta) \\
&\qquad + \mathfrak{P}\ \mathfrak{Q}\} + \frac{pc^2}{2} e^{2a}\, Sin\, h\, 2\,(a - \xi)\; Sin\, 2\eta \\
&\frac{P-Q}{h^2} = \\
&= \mathfrak{M}\{\mathfrak{P}\,(Sin\, h\, 2a - Sin\, h\, 2\xi + Sin\, h\, 2\,(\xi - a)\; Cos\,\eta) + \\
&+ Sin^2 2\eta\; Sin\, h\, 2\xi\, \mathfrak{Q}\} + \frac{pc^2}{2} e^{2a}\, Cos\, h\, 2\,(\xi - a)\; Cos\, 2\eta - \\
&\qquad - \tfrac{1}{2} pc^2 \{(1 - e^{2a})\, Sin\, h\, 2a + e^{2a}\, Cos\, h\, 2a\} \\
&\qquad \text{гдѣ } \mathfrak{M} = \frac{p\, c^2\,(1 - e^{2a})}{2(Cos\, h\, 2\xi - Cos\, 2\eta)^2}, \\
&\mathfrak{P} = 1 - Cos\, 2\eta\; Cos\, h\, 2\xi, \quad \mathfrak{Q} = 1 - Cos\, h\, 2\,(\xi - a)
\end{aligned}\right\} (20)$$

и, такъ какъ

$$\frac{P+Q}{h^2} = \frac{pc^2}{2}\{(Cos\, h\, 2\xi - Cos\, 2\eta)\, e^{2a} + (1 - e^{2a})\; Sin\, h\, 2\xi\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2P}{h^2} &= \frac{pc^2\,(1 - e^{2a})}{2(Cos\, h\, 2\xi - Cos\, 2\eta)^2}\{(1 - Cos\, 2\eta\; Cos\, h\, 2\xi)\,(Sin\, h\, 2a - \\
&\qquad - Sin\, h\, 2\xi + Sin\, h\, 2\,(\xi - a)\; Cos\,\eta) + \\
&+ Sin^2\, 2\eta\; Sin\, h\, 2\xi\,(1 - Cos\, h\, 2\,(\xi - a))\} + \\
&\qquad + \frac{pc^2}{2} e^{2a}\,(Cos\, h\, 2\,(\xi - a) - 1)\; Cos\, 2\eta + \\
&+ \frac{pc^2}{2}(1 - e^{2a})(Sin\, h\, 2\xi - Sin\, h\, 2a) + \frac{pc^2}{2} e^{2a}(Cos\, h\, 2\xi - Cos\, h\, 2a)
\end{aligned}$$

Интересно изслѣдовать измѣненіе Q на контурѣ эллипса $\xi = a$. Такъ какъ при $\xi = a$: $P = O$, то

$$\left\{\frac{Q}{h^2}\right\}_{\xi = a} = \left\{\frac{P+Q}{h^2}\right\}_{\xi = a} = \frac{pc^2}{2}\{(Cos\, h\, 2a - Cos\, 2\eta)\, e^{2a} + (1 - e^{2a})\; Sin\, h\, 2a\}$$

т. е.

$$[Q]_{\xi = a} = pe^{2a} + p\,(1 - e^{2a})\; Sin\, h\, 2a\, \frac{1}{Cos\, h\, 2a - Cos\, 2\eta}$$

Составивъ первую и вторую производныя этого выраженія по η легко убѣдиться, что maximum'ы и minimum'ы его соотвѣтствуютъ корнямъ ур-ія:

$$Sin\, 2\eta = O$$

т. е. будутъ при

$$\eta = O,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi \ \ldots .$$

и при этомъ

$\eta = O,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots$ соотвѣтствуютъ minimum'амъ

$\eta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\ \ldots$ соотвѣтствуютъ maximum'амъ

Чтобы найти напряженія N_1, N_2, T составимъ при помощи фор. (10) стр. 10 и фор. (9) стр. 27:

$$2T + i\,(N_1 - N_2) = (2U + i\,(P - Q))\, e^{-2\theta i} =$$

$$(2U + i\,(P - Q))\, \frac{Sin\,h^2\,(\xi - i\eta)}{Cos\,h^2\,\xi - Cos^2\,\eta} =$$

$$= (2U + i\,(P - Q))\, \frac{Cos\,2\,\eta\ Cos\,h\,2\,\xi - 1 - i\,Sin\,h\,2\,\xi\,Sin\,2\eta}{Cos\,h\,2\,\xi - Cos\,2\eta}$$

откуда

$$2T\,(Cos\,h\,2\,\xi - Cos\,2\eta) = 2U\,(Cos\,2\eta\ Cos\,h\,2\xi - 1) +$$
$$+ (P - Q)\,Sin\,h\,2\xi\,Sin\,2\eta$$

$$(N_1 - N_2)\,(Cos h\,2\,\xi - Cos\,2\eta) = (P - Q)\,(Cos\,2\eta\,Cos h\,2\xi - 1) -$$
$$- 2U\,Sin\,h\,2\xi\,Sin\,2\eta$$

или при помощи (20):

$$2T\,(Cos\,h\,2\xi - Cos\,2\eta)^2 =$$

$$= \frac{p\,(1 - e^{2a})}{(Cos\,h\,2\xi - Cos\,2\eta)^2}\{2\,Sin\,2\eta\,Sin\,h\,2\xi\,(Sin\,h\,2\xi - Sin\,h\,2a -$$
$$- Sin h 2\,(\xi - a)\,Cos 2\eta) + (1 - Cos\,h\,2\,(\xi - a))\,[Sin h^2\,2\xi\,Sin^3\,2\eta -$$
$$- Sin\,2\eta\,(1 - Cos\,2\eta\,Cos\,h\,2\xi)^2]\} +$$
$$+ pe^{2a}\{Sin\,h\,2\,(a - \xi)\,Sin\,2\eta\,(Cos\,2\eta\,Cos\,h\,2\xi - 1) +$$
$$+ [Cos\,h\,2\,(\xi - a)\,Cos\,2\eta - (e^{-2a} - 1)\,Sin\,h\,2a -$$
$$- Cos\,h\,2a]\,Sin\,h\,2\xi\,Sin\,2\eta\}$$

$$(N_1 - N_2)\,(Cos\,h\,2\xi - Cos\,2\eta)^2 =$$

$$= \frac{p\,(1 - e^{2a})}{(Cos\,h\,2\xi - Cos\,2\eta)^2}\{((1 - Cos 2\eta\,Cos h 2\xi)^2 -$$

$$-Sinh\,2\xi\,Sin^2 2\eta)\,(Sin\,h\,2\xi - Sin\,h\,2a - Sinh\,2(\xi-a)\,Cos\,\eta) +$$
$$+\,2\,Sin^2 2\eta\,Sin\,h\,2\xi\,(1 - Cos\,2\,h\,(\xi-a))\,(Cos\,h\,\xi\,Cos\,2\eta - 1)\} +$$
$$+\,p\,\{\,e^{2a}\,Cos\,h\,2\,(\xi-a)\,Cos\,2\eta -$$
$$-(1-e^{2a})\,Sin\,h\,2a - e^{2a}\,Cos\,h\,2a\}\,(Cos\,2\eta\,Cos\,h\,2\xi - 1) -$$
$$-\,p e^{2a}\,Sin\,h\,2\,(a-\xi)\,Sin^2 2\eta\,Sin\,h\,2\xi$$

При $\xi=\infty$: $[T]_{\xi=\infty}=O$, $[N_1-N_2]_{\xi=\infty}=p$. Кромѣ того т. к.

$$P+Q=N_1+N_2$$

$$(N_1+N_2)_{\xi=\infty}=(P+Q)_{\xi=\infty}=p.$$

§ 6. Система неконцентрическихъ окружностей въ изотермической формѣ.

Возьмемъ

$$\zeta=\xi+i\eta=ilg\frac{x+iy+c}{x+iy-c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

т. е.

$$\zeta=ilg\frac{z+c}{z-c}$$

откуда

$$z=f(\zeta)=c\,\frac{e^{-\zeta i}+1}{e^{-\zeta i}-1}=-c\,\frac{e^{\frac{\zeta i}{2}}+e^{-\frac{\zeta i}{2}}}{e^{\frac{\zeta i}{2}}-e^{-\frac{\zeta i}{2}}}=$$

$$=-\frac{c}{i}\,Cotg\,\frac{\zeta}{2}=ci\,Cotg\,\frac{\zeta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$f'(\zeta)=-\frac{ci}{2Sin^2\frac{\zeta}{2}},\quad f(\zeta_1)=-ci\,Cotg\,\frac{\zeta_1}{2},\quad \text{гдѣ}\ \zeta_1=\xi-i\eta$$

По формулѣ (8) стр. 17

$$\alpha+i\beta=-\tfrac{1}{2}f(\zeta_1)\,f'(\zeta)=\frac{c^2}{4}\,\frac{Cotg\frac{\zeta_1}{2}}{Sin^2\frac{\zeta}{2}}=$$

$$=\frac{c^2}{4}\,\frac{Cos\frac{\zeta_1}{2}\,Sin\frac{\zeta_1}{2}}{Sin^2\frac{\zeta}{2}\,Sin^2\frac{\zeta_1}{2}}=\frac{c^2\,Sin\,\zeta_1}{2(Cos\,h\eta-Cos\,\xi)^2}$$

такъ какъ

$$Cos\,h\eta-Cos\,\xi=2\,Sin\,\frac{\xi+i\eta}{2}\,Sin\,\frac{\xi-i\eta}{2}$$

Слѣдовательно

$$\alpha + i\beta = \frac{c^2}{2} \frac{Sin(\xi - i\eta)}{(Cos\, h\eta - Cos\, \xi)^2} \quad \text{и}$$

$$\alpha = \frac{c^2}{2} \frac{Sin\, \xi\, Cos\, h\eta}{(Cos\, h\eta - Cos\, \xi)^2} \quad \beta = -\frac{c^2}{2} \frac{Cos\, \xi\, Sin\, h\eta}{(Cos\, h\eta - Cos\, \xi)^2} \quad \ldots \quad (3)$$

Отдѣляя въ (1) вещественную часть отъ мнимой, мы найдемъ:

$$\xi = arctg\, \frac{y}{x - c} - arctg\, \frac{y}{x + c}$$

$$\eta = \quad lg\, \frac{\sqrt{(x+c)^2 - y^2}}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}$$

Кромѣ того легко найдемъ:

$$x = \frac{c\, Sin\, h\eta}{Cos\, h\eta - Cos\, \xi} \quad y = \frac{c\, Sin\, \xi}{Cos\, h\eta - Cos\, \xi} \; {}^{*)}$$

$$h = \frac{Cos\, h\eta - Cos\, \xi}{c} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Системы $\xi =$ пост. и $\eta =$ пост. представляютъ 2 ортогональныя системы неконцентрическихъ окружностей.

Рѣшеніе плоской задачи математической теоріи упругости можетъ быть представлено въ видѣ [формула (7) стр. 16]:

$$\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = \frac{i}{2} c^2 \frac{Sin\, \xi\, Cos\, h\eta - i\, Cos\, \xi\, Sin\, h\eta}{(Cos\, h\eta - Cos\, \xi)^2} \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta)$$

или, принимая во вниманіе (4): $2U + i(P - Q) =$

$$= \frac{i}{2}(Sin\, \xi\, Cos\, h\eta - i\, Cos\, \xi\, Sin\, h\eta) \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + \frac{F(\zeta)(Cos\, h\eta - Cos\, \xi)^2}{c^2}$$

Задача сводится къ опредѣленію 2-хъ функцій комплекснаго перемѣннаго $F(\zeta)$ и $\Phi(\zeta)$; вещественная часть $\Phi(\zeta)$ равна $P + Q$.

---

*) См. G. Lamé. Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris 1859 12-ème leçon p. 199.

§ 7. Система лемнискатъ въ изотермической формѣ.

Возьмемъ

$$\zeta = \xi + i\eta = -i\, lg \frac{(x+yi-c)(x+yi+c)}{c^2} \quad . \; . \quad (1)$$

т. е. $$\zeta = -i lg \frac{(z-c)(z+c)}{c^2},$$ откуда:

$$z = f(\zeta) = c\sqrt{1+e^{\zeta i}} \qquad f'(\zeta) = \frac{c\, i\, e^{\zeta i}}{2\sqrt{1+e^{\zeta i}}}$$

$$f(\zeta_1) = c\sqrt{1+e^{-\zeta_1 i}}, \text{ гдѣ } \zeta_1 = \xi - i\eta$$

По формулѣ (8) стр. 17:

$$\alpha + i\beta = -\tfrac{1}{2} c\sqrt{1+e^{-\zeta_1 i}}\, \frac{c\, i\, e^{\zeta i}}{2\sqrt{1+e^{\zeta i}}} =$$

$$= -\tfrac{1}{4} c^2 i \frac{e^{(\xi+\eta i)i}}{\sqrt{1+e^{(\xi+i\eta)i}}} \sqrt{1+e^{-(\xi-i\eta)i}}$$

$$= -\tfrac{1}{4} c^2 i \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{e^{-\xi i}+e^{-\eta}}} \sqrt{e^{\xi i}+e^{-\eta}} =$$

$$= -\tfrac{1}{4} c^2 i \frac{e^{-2\eta} + e^{-\eta} Cos\,\xi + ie^{-\eta} Sin\,\xi}{\sqrt{e^{-2\eta}+1+2e^{-\eta} Cos\,\xi}} =$$

$$= \tfrac{1}{4} c^2 \frac{e^{-\eta} Sin\,\xi - i(e^{-2\eta} + e^{-\eta} Cos\,\xi)}{\sqrt{e^{-2\eta}+1+2e^{-\eta} Cos\,\xi}}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{4} c^2 \frac{e^{-\eta} Sin\,\xi}{\sqrt{e^{-2\eta}+1+2e^{-\eta} Cos\,\xi}} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial\xi} \tfrac{1}{4} c^2 \sqrt{e^{-2\eta}+1+2e^{-\eta} Cos\,\xi} \\ \beta &= \tfrac{1}{4} c^2 \frac{-e^{-2\eta} - e^{-\eta} Cos\,\xi}{\sqrt{e^{-2\eta}+1+2e^{-\eta} Cos\,\xi}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial\eta} \tfrac{1}{4} c^2 \sqrt{e^{-2\eta}+1+2e^{-\eta} Cos\,\xi} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Отдѣляя въ (1) вещественную часть отъ мнимой, мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= arctg\frac{y}{x+c} + arctg\,\frac{y}{x-c}\\ \eta &= lg\,\frac{c^2}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}\;\sqrt{(x-c)^2+y^2}}\end{aligned}\right\} \;.\;.\quad (3)$$

Изъ перваго ур-ія (3) найдемъ:

$$x^2 - y^2 = \frac{2xy}{tg\,\xi} + c^2 \quad .\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4)$$

а изъ второго ур-ія (3):

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = c^4 e^{-2\eta} \quad .\;.\;. \quad (5_a)$$

или

$$(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2y^2 = c^4 e^{-2\eta} \quad .\;.\;. \quad (5_b)$$

Система $\eta =$ пост. будетъ система лемнискатъ, а система $\xi =$ пост. система гиперболъ.

Ур-ія (3) и (5) указываютъ основное свойство лемнискатъ $\eta =$ пост.: произведеніе разстояній какой нибудь точки взятой на такой кривой до 2-хъ точекъ C_1 $(y = o,\ x = c)$ и C_2 $(y = o,\ x = -c)$ равно $c^2 e^{-\eta} =$ т. е. постоянно. Значеніе $\eta = \infty$ соотвѣтствуетъ 2-мъ точкамъ C_1 и C_2. Значеніе $\eta = -\infty$ соотвѣтствуетъ безконечно удаленнымъ точкамъ. Значенію $\eta = o$ соотвѣтствуетъ лемниската

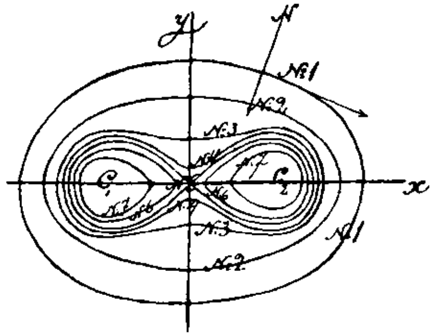
$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = c^4$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = O \quad .\;.\;. \quad (6)$$

Это есть кривая, имѣющая въ началѣ координатъ двойную точку, причемъ касательныя къ кривой дѣлятъ пополамъ углы между координатными осями ox, oy. Лемнискаты $\eta = const. = \alpha$ можно раздѣлить на три категоріи: 1) $\alpha > o$; лемнискаты этой категоріи состоятъ изъ 2-хъ отдѣльныхъ замкнутыхъ вѣтвей, симметричныхъ относительно oy и окружающихъ точки C_1 и C_2; обѣ вѣтви лежатъ внутри основной лемнискаты (6). 2) $\alpha < o$ но $> -lg\,2$; эта категорія окружаетъ лемнискату (6) и кривая состоитъ изъ одной сплошной линіи бисквитообразнаго вида, имѣющей 4 точки перегиба 3) $\alpha < -lg\,2$; кривая не имѣетъ точекъ перегиба и принимаетъ овальный видъ, напоминающій эллипсъ.

На чер. (3) изображены лемнискаты 1) $\eta = -lg\,3$ (полуоси $2c$ и $c\sqrt{2}$) 2) $\eta = -lg\,2$ (полуоси $c\sqrt{3}$ и c), 3) $\eta = -log\,\frac{5}{4}$ (полуоси $\frac{3}{2}c$ и $\frac{c}{2}$; наибольшая ордината $\frac{5}{8}c$), 4) $\eta = -log\,\frac{50}{49}$ (полуоси $c\sqrt{\frac{99}{49}}$ т. е. около $\frac{10}{7}c$ и $\frac{1}{7}c$; наибольшая ордината $\frac{25}{49}c$), 5) $\eta = O$ (полуоси O, $c\sqrt{2}$; наибольшая ордината $= \frac{c}{2}$) 6) $\alpha = lg\,\frac{25}{24}$; кривая изъ 2-хъ замкнутыхъ вѣтвей, вершины которыхъ на оси x-овъ отстоятъ отъ O въ разстояніяхъ $\frac{1}{5}c$ и $\frac{7}{5}c$; наибольшая ордината $= \frac{12}{25}c$ 7) $\alpha = lg\,\frac{4}{3}$; кривая изъ 2-хъ вѣтвей, вершины которой на оси x-овъ отстоятъ отъ O въ разстояніяхъ $c\sqrt{\frac{7}{4}}$ (около $\frac{4}{3}c$) и $\frac{1}{2}c$; наибольшая ордината $= \frac{3}{8}c$.



чер. 3.

Дифференціальный параметръ здѣсь равенъ: *)

$$h = 2\,\frac{\sqrt[4]{1 + e^{-2\eta} + 2\,e^{-\eta}\,Cos\,\xi}}{c\,e^{-\eta}} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

Формула (7) стр. 16 приметъ здѣсь видъ:

$$\frac{[2\,U + i\,(P - Q)]\,c^2\,e^{-2\eta}}{4\sqrt{1+e^{-2\eta}+2e^{-\eta}\,Cos\xi}} = \frac{i}{4}\,c^2\left\{\frac{e^{-\eta}\,Sin\,\xi}{\sqrt{1 + e^{-\eta} + 2\,e^{-\eta}\,Cos\,\xi}} + \right.$$

$$\left. + i\,\frac{-\,e^{-2\eta} - e^{-\eta}\,Cos\,\xi}{\sqrt{1 + e^{-2\eta} + 2\,e^{-\eta}\,Cos\,\xi}}\right\}\frac{d\,\Phi\,(\xi)}{d\xi} + F(\zeta) \quad . \quad (8)$$

или

*) См. G. Lamé, l. c. 13-ème leçon. p. 217—235, откуда нами заимствована классификація лемнискатъ и чер. 3.

$$\left.\begin{aligned}\frac{2U c^2 e^{-2\eta}}{4\sqrt{1+e^{-2\eta}+2e^{-\eta}Cos\xi}} &= \tfrac{1}{4} c^2 \frac{e^{-\eta} Sin\,\xi}{\sqrt{1+e^{-2\eta}+2e^{-\eta}Cos\xi}} \frac{\partial}{\partial\eta}\Omega + \\ &+ \tfrac{1}{4} c^2 \frac{e^{-2\eta}+e^{-\eta}\,Cos\,\xi}{\sqrt{1+e^{-2\eta}+2\,e^{-\eta}\,Cos\,\xi}} \frac{\partial}{\partial\xi}\Omega + \varphi \\ \frac{(P-Q)\,c^2 e^{-2\eta}}{4\sqrt{1+e^{-2\eta}+2e^{-\eta}Cos\xi}} &= -\tfrac{1}{4} c^2 \frac{e^{-2\eta}+e^{-\eta}\,Cos\,\xi}{\sqrt{1+e^{-2\eta}+2e^{-\eta}Cos\xi}} \frac{\partial}{\partial\eta}\Omega + \\ &+ \tfrac{1}{4} c^2 \frac{e^{-\eta}\,Sin\,\xi}{\sqrt{1+e^{-2\eta}+2\,e^{-\eta}\,Cos\,\xi}} \frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega + \psi\end{aligned}\right\}(9)$$

Какъ примѣръ разсмотримъ растяженіе полосы, ослабленной отверстіемъ въ видѣ лемнискаты. Соотвѣтственно изложенному на стр. 21 и 26 для случаевъ кругового и эллиптическаго отверстій положимъ

$$\Omega = P + Q = p + \sum_m a_m e^{m\eta}\,Cos\,m\xi + b_m e^{m\eta}\,Sin\,m\xi \quad . \; . \; (10)$$

гдѣ Σ распространена по положительнымъ значеніямъ m. При $\eta = -\infty$ т. е. въ безконечно далекихъ точкахъ $(\Omega)_{\eta=-\infty} = (P+Q)_{\eta=-\infty} = (N_1+N_2)_{\eta=-\infty} = p$ т. к. $[N_1]_{\eta=-\infty} = p$, $[N_2]_{\eta=-\infty} = [T]_{\eta=-\infty} = O$.

$$f'(\zeta) = \frac{ci\,e^{\zeta i}}{2\sqrt{1+e^{\zeta i}}} = \frac{1}{h}\,e^{\Theta i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

гдѣ Θ уголъ, образованный съ осью ox нормалью N въ какой нибудь точкѣ M къ лемнискатѣ $\eta =$ пост. (чер. 3) и слѣд-о:

$$e^{\Theta i} = h\,\frac{ci\,e^{\zeta i}}{2\sqrt{1+e^{\zeta i}}} = \frac{\sqrt[4]{e^{-2\eta}+1+2\,e^{-\eta}\,Cos\,\xi}}{e^{-\eta}}\,\frac{i\,e^{\zeta i}}{\sqrt{1+e^{\zeta i}}}, \; . . (12)$$

а поэтому:

$$[e^{\Theta i}]_{\eta=-\infty} = i e^{\frac{\xi i}{2}}.$$

Поэтому, пользуясь фор. (10) стр. 10:

$$[2U + i\,(P-Q)]_{\eta=-\infty} =$$
$$= \{[2T + i\,(N_1 - N_2)]\,e^{2\Theta i}\}_{\eta=-\infty} = -ip\,e^{\xi i} \quad . \; . \; (13)$$

Имѣя въ виду, что

$$\{(\alpha + i\beta)\, h^2\}_{\eta=-\infty} = \left\{\frac{1}{4} c^2 \frac{e^{-\eta}\, Sin\,\xi - i\,(e^{-2\eta} + e^{-\eta}\, Cos\,\xi)}{\sqrt{e^{-2\eta} + 1 + 2\,e^{-\eta}\, Cos\,\xi}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{4}{c^2} \frac{\sqrt{e^{-2\eta} + 1 + 2\,e^{-\eta}\, Cos\,\xi}}{e^{-2\eta}} \right\}_{\eta=-\infty} = -i \quad . \; . \; . \quad (14)$$

$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)_{\eta=-\infty} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)_{\eta=-\infty} = O$, мы найдемъ изъ (7) стр. 16 и изъ (13):

$$\{2U + i\,(P - Q)\}_{\eta=-\infty} = \{h^2 F(\zeta)\}_{\eta=-\infty} =$$
$$= [h^2 (\varphi + i\psi)]_{\eta=-\infty} = -ip\, e^{\zeta i} \quad . \; . \quad (15)$$

Замѣтимъ, что

$$\alpha + i\beta = -\tfrac{1}{2} c \sqrt{1 + e^{-(\xi - i\eta) i}} \, \frac{ci\, e^{(\xi + i\eta) i}}{2\sqrt{1 + e^{(\xi + i\eta) i}}} =$$

$$= \tfrac{1}{4} c^2 \frac{e^{-\eta}\, Sin\,\xi - i\,(e^{-2\eta} + e^{-\eta}\, Cos\,\xi)}{\sqrt{1 + e^{-2\eta} + 2\,e^{-\eta}\, Cos\,\xi}} \quad . \; . \; . \quad (16)$$

при $\eta = \alpha$ принимаетъ значенія одинаковыя съ значеніями функціи комплекснаго перемѣннаго $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\chi(\zeta) = -\tfrac{1}{4} c^2 \sqrt{1 - e^{-\zeta i - 2\alpha}} \, \frac{ie^{\zeta i}}{\sqrt{1 + e^{\zeta i}}} \quad . \; . \quad (17)$$

а

$$h^2 = \frac{4}{c^2} \frac{\sqrt{e^{-2\eta} + 1 + 2\,e^{-\eta}\, Cos\,\xi}}{e^{-2\eta}}$$

значенія одинаковыя съ значеніями функціи комплекснаго перемѣннаго

$$\frac{4}{c^2} \frac{\sqrt{1 + e^{\zeta i}} \; \sqrt{1 + e^{-\zeta i - 2\alpha}}}{e^{-2\alpha}}$$

такъ что:

$$[h^2]_{\eta=\alpha} = \frac{4}{c^2} e^{2\alpha} \left[\sqrt{1 + e^{\zeta i}} \; \sqrt{1 + e^{-\zeta i - 2\alpha}}\right]_{\eta=\alpha} \quad . \; . \quad (18)$$

Чтобы удовлетворить (15), положимъ:

$$F(\zeta) = \varphi + i\psi = -ip\, c^2 \frac{e^{-2\alpha}}{4\sqrt{1 + e^{\zeta i}} \; \sqrt{1 + e^{-\zeta i - 2\alpha}}} -$$

$$- \frac{c^2}{4} ip\, e^{\zeta i} + \Phi(\zeta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

гдѣ

$$[\boldsymbol{\Phi}(\zeta)\,h^2]_{\eta=-\infty} = O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Имѣя въ виду, что по фор. (7) стр. 16:

$$\frac{2\,U + iP}{h^2} = i\,(\alpha + i\beta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + i\,\frac{P+Q}{h^2} + F(\zeta)\,, \quad . \quad . \quad (21)$$

мы приведемъ нашу задачу къ отысканію такихъ функцій комплекснаго перемѣннаго $\boldsymbol{\Phi}(\zeta)$ и $\Phi(\zeta)$, что на контурѣ лемнискаты $\eta = \alpha$ удовлетворяется условіе

$$\left\{ i\,(\alpha + i\beta)\,\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + i\,\frac{\Omega}{h^2} - \right.$$

$$- ip\,c^2\,\frac{e^{-2\alpha}}{4\sqrt{1+e^{\zeta i}}\,\sqrt{1+e^{-\zeta i-2\alpha}}} -$$

$$\left. -\frac{c^2\,i\,p}{4}\,e^{\zeta i} + \boldsymbol{\Phi}(\zeta) \right\}_{\eta=\alpha} = O \quad . \quad . \quad (22)$$

Положимъ, что на этомъ контурѣ

$$\frac{\Omega}{h^2} = \frac{pc^2}{4}\,\frac{e^{-2\alpha}}{\sqrt{1+e^{\zeta i}}\,\sqrt{1+e^{-\zeta i-2\alpha}}} + \frac{c^2}{2}\,pe^{-\alpha}\,Cos\,\xi \quad . \quad (23)$$

т. е. $\quad \Omega = p + 2\,p\,e^{\alpha}\,Cos\,\xi\,\sqrt{1+e^{-2\alpha}+2\,e^{-\alpha}\,Cos\,\xi}$

$$= p + 2\,p\,Cos\,\xi\,\sqrt{1+e^{2\alpha}+2\,e^{\alpha}\,Cos\,\xi} \quad . \quad . \quad (24)$$

Условіе (22) приметъ тогда видъ:

$$\left\{ i\,(\alpha + i\beta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + \frac{c^2\,ip}{4}\,e^{-\zeta i-2\alpha} + \boldsymbol{\Phi}(\zeta) \right\}_{\eta=\alpha} = O \quad . \quad (25)$$

Чтобы удовлетворить (25) положимъ

$$\boldsymbol{\Phi}(\zeta) = i\,\chi(\zeta)\,\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - \frac{c^2\,ip}{4}\,e^{-\zeta i-2\alpha} \quad . \quad . \quad (26)$$

гдѣ $\chi(\zeta)$ имѣетъ значеніе (17).

Чтобы удовлетворить (24), примемъ за Ω вещественную часть функціи комплекснаго перемѣннаго

$$\Phi(\zeta) = p + 2p\,e^{-\zeta i}\sqrt{1+e^{\zeta i}}\,\sqrt{1+e^{-\zeta i-2\alpha}} \quad . \quad (27)$$

При $\eta = \alpha$

$\Phi(\zeta) = p + 2p\,e^{\alpha-\xi i}\sqrt{(1+e^{\xi i-\alpha})(1+e^{-\xi i-\alpha})} =$

$$= p + 2 p e^{-\xi i} \sqrt{1 + e^{2\alpha} + 2 e^{\alpha} Cos\, \xi} \quad . \quad . \quad (28)$$

и вещественная часть $\Phi(\zeta)$ совпадетъ съ (24).

Такимъ образомъ рѣшеніе нашей задачи будетъ дано формулой (21), гдѣ $\Phi(\zeta)$ имѣетъ значеніе (27), а $F(\zeta)$ значеніе (19) причемъ $\mathbf{\Phi}(\zeta)$ имѣетъ значеніе (26).

Выраженія напряженій N_1, N_2, T мы найдемъ изъ фор. (10) стр. 10:

$$2\, T + i\,(N_1 - N_2) = \{2\, U + i\,(P - Q)\}\, e^{-2\theta i},$$

гдѣ (12):

$$e^{-2\theta i} = -\frac{e^{-2\eta}}{\sqrt{e^{-2\eta} + 1 + 2 e^{-\eta} Cos\, \xi}}\, \frac{1 + e^{\zeta i}}{e^{2\zeta i}}$$

и изъ условія

$$N_1 + N_2 = P + Q$$

Получаемыя такимъ образомъ выраженія мы не выписываемъ вслѣдствіи ихъ сложности.

Изслѣдуемъ въ заключеніе измѣненіе Q на контурѣ $\eta = \alpha$.

$$[Q]_{\eta=\alpha} = [P + Q]_{\eta=\alpha} = [\Omega]_{\eta=\alpha} =$$

$$= p + 2 p\, Cos\, \xi \sqrt{1 + e^{2\alpha} + 2 e^{\alpha} Cos\, \xi}$$

Составивъ первую и вторую производныя этого выраженія по ξ, легко убѣдиться, что наибольшимъ и наименьшимъ его значеніямъ соотвѣтствуютъ корни ур-ій:

$$Sin\, \xi = O$$

$$e^{2a} + 1 + 3 e^{a} Cos\, \xi = O$$

т. е. будутъ

$$\xi = O,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$$

$$\xi = arcos\left(-\frac{e^{a} + e^{-a}}{3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Значенія $\xi = O,\ 2\pi,\ 4\pi$ соотвѣтствуютъ maximum'амъ а значенія $\xi = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi$ соотв. minimum'амъ, если $Cos\, h\, \alpha > \frac{3}{2}$, т. е. $\alpha > lg\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ или $\alpha < lg\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, если же $Cos h\, \alpha < \frac{3}{2}$ мы имѣемъ опять здѣсь maximum'ы. Значеніе (29) соотвѣтствуетъ minimum'у, но, чтобы оно было возможно, необходимо $\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{3}<1$ т. е. $Cos\,h\,\alpha<\frac{3}{2}$. Дальнѣйшее изслѣдованіе полученныхъ формулъ распредѣленія напряженій въ полосахъ, ослабленныхъ эллиптическими и лемнискатными отверстіями, мы приведемъ въ особомъ мемуарѣ.

§ 8. Нѣкоторыя другія изотермическія системы.

1) Положимъ

$$\zeta=\xi+i\eta=\frac{\sqrt{c}}{2k}\int\frac{dz}{\sqrt{z(z-c)(z-\frac{c}{k^2})}}$$

$$z=f(\zeta)=c\,Sn^2(\xi+\eta i)=c\,Sn^2\zeta$$

$$f'(\zeta)=2\,c\,Sn(\xi+i\eta)\,Cn(\xi+\eta i)\,dn(\xi+\eta i)=2\,c\,Sn\,\zeta\,Cn\,\zeta\,dn\,\zeta$$

$$\alpha+i\beta=-c^2\,Sn^2(\xi-i\eta)\,Sn(\xi+i\eta)\,Cn(\xi+i\eta)\,dn(\xi+\eta i)$$

Кривыя $\xi=$ пост. представляютъ здѣсь систему оваловъ Декарта. Систему такихъ же оваловъ представляютъ и кривыя $\eta=$ пост.*)

2) Положимъ

$$z=f(\zeta)=\sum_n(a_n-ib_n)\,e^{n\zeta}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ a_n, b_n вещественныя постоянныя, а Σ распространена по цѣлымъ значеніямъ n.

Изъ (1)

$$x=\Sigma\,a_n\,e^{n\xi}\,Cos\,n\eta+b_n\,e^{n\xi}\,Sin\,n\eta$$
$$y=\Sigma\,a_n\,e^{n\xi}\,Sin\,n\eta-b_n\,e^{n\xi}\,Cos\,n\eta$$

Кривыя $\xi=$ пост. $=\alpha$ представляютъ систему кривыхъ:

$$\left.\begin{aligned}x&=\Sigma\,a_n\,e^{n\alpha}\,Cos\,n\eta+b_n\,e^{n\alpha}\,Sin\,n\eta\\ y&=\Sigma\,a_n\,e^{n\alpha}\,Sin\,n\eta-b_n\,e^{n\alpha}\,Cos\,n\eta\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(2)$$

Если для нѣкотораго значенія α мы вычерчимъ кривую (2) въ плоскости комплекснаго перемѣннаго $z=x+yi$, то въ плоскости комплекснаго перемѣннаго

*) См. G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris 1887 t. I p. 165.

$$Z = X + iY = e^{\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

мы получимъ кругъ, т. к. изъ (3):

$$X = e^{\alpha} \, Cos \, \eta, \quad Y = e^{\alpha} \, Sin \, \eta$$

и слѣд-о перемѣнная Z будетъ описывать кругъ:

$$X^2 + Y^2 = e^{2\alpha}$$

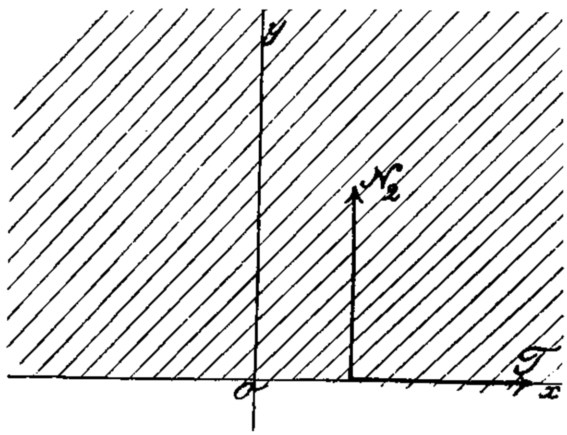
Т. к. изъ (1):

$$z = \Sigma \, (a_n - ib_n) \, Z^n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

то площади замкнутыхъ кривыхъ $\xi = \alpha$ могутъ быть конформно преобразованы на площадь круга посредствомъ полиномовъ (4).

§ 9. Рѣшеніе плоской задачи математической теоріи упругости для прямолинейнаго контура въ опредѣленныхъ интегралахъ.

Представимъ себѣ (чер. 4), что по нѣкоторой прямой, которую мы примемъ за ось x-овъ прямолинейной прямо-



чер. 4.

угольной системы координатъ и которая представляетъ границу упругого тѣла, расположеннаго по ту ея сторону, гдѣ $y > O$, заданы нормальное (N_2) и тангенціальное (T) напряженія такъ что при $y = O$:

$$T = f_1(x), \quad N_2 = f_2(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Каково будетъ распредѣленіе напряженій въ тѣлѣ, въ предположеніи, что оно занимаетъ всю полуплоскость $y > O$. При этомъ, чтобы задача была вполнѣ опредѣленная, необходимо должны быть заданы напряженія въ безконечно далекихъ точкахъ. Мы будемъ обыкновенно предполагать, что напряженія въ тѣлѣ вызваны конечными силами въ конечное время, и тогда въ безконечно далекихъ точкахъ напряженія $= O$.

На основаніи фор. (8) стр. 10 мы имѣемъ:

$$2T + i(N_1 - N_2) = i(\alpha + i\beta)\frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z)$$

а, полагая по фор. (6_a) стр. 9 $\alpha = O$ $\beta = y$, мы найдемъ:

$$2T + i(N_1 - N_2) = -y\frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z) \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ (2) слѣдуетъ, что на оси x-овъ т. е. при $y = O$:

$$[2T + i(N_1 - N_2)]_{y=o} = [F(z)]_{y=o} = [\varphi + i\psi]_{y=o}$$

или

$$[2(T - iN_2)]_{y=o} = [\varphi + i(\psi - \Omega)]_{y=o}, \text{ гдѣ } \Omega = N_1 + N_2$$

и слѣд-о:

$$[2T]_{y=o} = [\varphi]_{y=o} \qquad [2N_2]_{y=o} = [\Omega - \psi]_{y=o}$$

т. е. въ силу (1):

$$[\varphi]_{y=o} = 2f_1(x) \qquad [\Omega - \psi]_{y=o} = 2f_2(x) \quad . \quad . \quad (2 \text{ bis})$$

а, принимая во вниманіе, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = O, \quad \frac{\partial^2(\Omega - \psi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Omega - \psi)}{\partial y^2} = O \quad . \quad . \quad (3)$$

и что φ и $\Omega - \psi$ должны быть конечны и непрерывны на всей полуплоскости $y > O$, мы можемъ положить:

$$\varphi = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(s)\,y\,ds}{(s-x)^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\Omega - \psi = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(s)\,y\,ds}{(s-x)^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $f(s)$ будетъ значеніе, принимаемое на оси ox функціей $f(x, y)$, удовлетворяющей ур-ію

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

конечной и непрерывной въ всѣхъ точкахъ той половины плоскости координатъ xy, гдѣ $y > O$, то

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,y\,ds}{(s-x)^2+y^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

удовлетворяетъ ур-ію (6), т. к. представляетъ вещественную часть функціи комплекснаго перемѣннаго $z=x+yi$:

$$-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,ds}{s-z}, \text{ мнимая часть которой}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-s)\,f(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Кромѣ того легко убѣдиться, что (7) представляетъ вездѣ конечную и непрерывную функцію, а, принявъ за новую перемѣнную $t=\dfrac{s-x}{y}$ такъ что $dt=\dfrac{ds}{y}$, мы найдемъ лѣвую часть (7) въ видѣ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(ty+x)\,dt}{1+t^2}$$

При $y=O$ это выраженіе обращается въ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,dt}{1+t^2}=\frac{f(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=f(x)$$

и слѣд-о (4) и (5) представляютъ функціи, удовлетворяющія (3), конечныя и непрерывныя на полуплоскости $y > O$ и удовлетворяющія при $y=O$ условіямъ (2 bis).

Кромѣ того изъ (8) очевидно, что ψ какъ функція сопряженная съ φ (4) можетъ только на постоянную отличаться отъ

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-s)\,f_1(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2}$$

т. е.

$$\psi=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-s)\,f_1(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2}+C \quad . \; . \; . \quad (9)$$

и слѣд-о изъ (5)

$$\Omega=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y f_2(s)+(x-s) f_1(s)}{(s-x)^2+y^2} ds+C \quad . \quad (10)$$

Постоянная C зависитъ отъ значеній, принимаемыхъ напряженіями въ безконечно далекихъ точкахъ и ее надо опредѣлять въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ.

Рѣшеніе задачи мы получимъ изъ (2):

$$\left.\begin{aligned} 2T &= -y\frac{\partial \Omega}{\partial x}+\varphi \\ N_1-N_2 &= y\frac{\partial \Omega}{\partial y}+\psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned} 2T &= -y\frac{\partial \Omega}{\partial x}+\varphi \\ 2N_1 &= y\frac{\partial \Omega}{\partial y}+\Omega+\psi \\ 2N_2 &= \Omega-y\frac{\partial \Omega}{\partial y}-\psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ Ω дано ур-іемъ (10), а φ и ψ ур-іями (4) и (9).

Какъ примѣръ разсмотримъ случай, когда напряженіе, приложенное по оси x-овъ есть постоянное гидростатическое давленіе p на протяженіи отъ точки A $(x=-a)$ до точки B $(x=+a)$ т. е. слѣд-о:

$$f_1(s)=O \quad f_2(s)=p \text{ (для } x>-a, \text{ но } <a)$$

$$f_1(s)=O \quad f_2(s)=O \text{ (для } x<-a \text{ и для } x>a)$$

По фор. (4), (9), (10):

$$\varphi=O, \quad \psi=C, \quad \Omega=\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{py ds}{(s-x)^2+y^2}+C$$

$$=\frac{2p}{\pi}\Big|_{-a}^{+a} arctg\frac{s-x}{y}+C=\frac{2p}{\pi}\left(arctg\frac{a-x}{y}+arctg\frac{a+x}{y}\right)+C$$

Поэтому, т. к. по фор. (11):

$$2T=-y\frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$N_1 - N_2 = y\frac{\partial \Omega}{\partial y} + C$$

и т. к. $N_1 + N_2 = \Omega = \frac{2p}{\pi}\left\{arctg\,\frac{a-x}{y} + arctg\,\frac{a+x}{y}\right\} + C,$

$$2\,T = \frac{8\,a^2 y^2 x\,p}{\pi\,((y^2+x^2-a^2)^2+4\,a^2 y^2)}$$

$$N_1 - N_2 = \frac{4\,y\,(x^2-y^2-a^2)\,a\,p}{\pi\,((y^2+x^2-a^2)^2+4\,a^2 y^2)} + C$$

и слѣд-о:

$$T = \frac{4p\,a^2 y^2 x}{\pi((y^2+x^2-a^2)^2+4\,a^2 y^2)}$$

$$N_1 = \frac{p}{\pi}\left\{arctg\,\frac{a-x}{y} + arctg\,\frac{a+x}{y}\right\} + \\ + \frac{2\,y\,a\,(x^2-y^2-a^2)\,p}{\pi\,((y^2+x^2-a^2)^2+4\,a^2 y^2)} + C$$

$$N_2 = \frac{p}{\pi}\left\{arctg\,\frac{a-x}{y} + arctg\,\frac{a+x}{y}\right\} - \\ - \frac{2\,y\,a\,(x^2-y^2-a^2)\,p}{\pi\,((y^2+x^2-a^2)^2+4\,a^2 y^2)}$$

Если при x и y равномъ ∞ напряженія должны быть $= O$, то $C = O$ и мы окончательно найдемъ:

$$N_1 = \frac{p}{\pi}\left\{arctg\,\frac{a-x}{y} + arctg\,\frac{a+x}{y}\right\} + \\ + \frac{2\,p\,y\,a\,(x^2-y^2-a^2)}{\pi\,((y^2+x^2-a^2)^2+4\,a^2 y^2)}$$

$$N_2 = \frac{p}{\pi}\left\{arctg\,\frac{a-x}{y} + arctg\,\frac{a+x}{y}\right\} - \\ - \frac{2\,p\,y\,a\,(x^2-y^2-a^2)}{\pi\,((y^2+x^2-a^2)^2+4\,a^2 y^2)}$$

$$T = \frac{4\,a^2 y^2 x\,p}{\pi\,((y^2+x^2-a^2)^2+4\,a^2 y^2)}$$

Направленія главныхъ напряженій найдутся по формулѣ

$$tg\,2\Psi = \frac{2T}{N_1 - N_2},$$

гдѣ Ψ уголъ, образованный однимъ изъ нихъ съ ox и слѣд. въ настоящемъ примѣрѣ

$$tg\,2\Psi = \frac{2ayx}{x^2 - y^2 - a^2}$$

Этотъ частный случай изслѣдованъ Michell'емъ [№ 8 bis], показавшимъ что линіи главныхъ напряженій (изостатическія линіи) будутъ здѣсь софокусные эллипсы и гиперболы, фокусы которыхъ A и B (см. также Love [№ 14] Ch. IX 151 (ii)). Michell изслѣдовалъ этотъ примѣръ при помощи функціи Airy, за которую можно принять здѣсь

$$\frac{1}{2}\frac{p}{\pi}\{r_2^2\,\Theta_2 - r_1^2\,\Theta_1\},$$

гдѣ r_1, Θ_1 и r_2, Θ_2 полярныя координаты какой-нибудь точки по отношенію къ полюсамъ A и B и оси x-овъ какъ полярной оси.

Для всѣхъ точекъ на осяхъ ox и oy ($y = o$ или $x = o$) $tg\,2\Psi = o$, $\Psi = o, \frac{\pi}{2}, \pi....$ т. е. главныя напряженія направлены параллельно осямъ ox, oy. Для всѣхъ точекъ равносторонней гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

$$tg\,2\Psi = \pm\infty$$

и

$$\Psi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, ...$$

и слѣд. одно изъ главныхъ напряженій встрѣчаетъ эту линію подъ угломъ $\frac{\pi}{4}$ къ оси x-овъ.

Какъ другой примѣръ разсмотримъ распредѣленіе напряженій въ разсматриваемомъ случаѣ, если по оси x-овъ приложено на протяженіи отъ $-a$ до $+a$ тангенціальное напряженіе постоянной величины k; въ разсматриваемомъ случаѣ:

$$f_1(s) = k \text{ (для } x > -a \text{ но } < a)$$
$$f_1(s) = O \text{ (для } x < -a \text{ и для } x > a)$$
$$f_2(s) = O$$

По фор. (4), (9), (10):

$$\varphi = \frac{2k}{\pi}\int_{-a}^{+a} \frac{y\,ds}{(s-x)^2+y^2} = \frac{2k}{\pi}\Big|_{-a}^{+a} arctg\,\frac{s-x}{y} =$$
$$= \frac{2k}{\pi}\left(arctg\,\frac{a-x}{y} + arctg\,\frac{a+x}{y}\right)$$

$$\psi = \frac{2k}{\pi}\int_{-a}^{+a} \frac{(x-s)\,ds}{(s-x)^2+y^2} + C = -\frac{k}{\pi}\Big|_{-a}^{+a} lg\{(s-x)^2+y^2\} + C =$$
$$= \frac{k}{\pi}\,lg\,\frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2} + C$$

$\Omega = \psi$. Если въ безконечно далекихъ точкахъ напряженія должны быть $= O$, то $C = O$ и мы найдемъ:

$$2\,T = -y\,\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \varphi = -\frac{ky}{\pi}\left\{\frac{2(a+x)}{(a+x)^2+y^2} + \frac{2(a-x)}{(a-x)^2+y^2}\right\} +$$
$$+ \frac{2k}{\pi}\left(arctg\,\frac{a-x}{y} + arctg\,\frac{a+x}{y}\right)$$

$$N_1 - N_2 = y\,\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \psi = \frac{ky}{\pi}\left\{\frac{2y}{(a+x)^2+y^2} - \frac{2y}{(a-x)^2+y^2}\right\} +$$
$$+ \frac{k}{\pi}\,lg\,\frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2}$$

или

$$T = -\frac{4kya}{\pi}\,\frac{a^2-x^2+y^2}{(a^2+y^2+x^2)^2 - 4a^2x^2} +$$
$$+ \frac{k}{\pi}\left(arctg\,\frac{a-x}{y} + arctg\,\frac{a+x}{y}\right)$$

$$N_1 - N_2 = -\frac{8ky2ax}{\pi\{(a^2+x^2+y^2)^2 - 4a^2x^2\}} +$$

$$+\frac{k}{\pi} lg \frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2}$$

и т. к. $$N_1+N_2=\Omega=\psi=\frac{k}{\pi} lg \frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2}$$

то

$$T=\frac{k}{\pi}\left(arctg\frac{a-x}{y}+arctg\frac{a+x}{y}\right)-\frac{4kay}{\pi}\frac{a^2-x^2-y^2}{(a^2+y^2+x^2)^2-4a^2x^2}$$

$$N_1=\frac{k}{\pi} lg \frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2}-\frac{4kaxy^2}{\pi\{(a^2+x^2+y^2)^2-4a^2x^2\}}$$

$$N_2=\frac{4kaxy^2}{\pi\{(a^2+x^2+y^2)^2-4a^2x^2\}}$$

Направленія главныхъ напряженій найдутся по формулѣ

$$tg\, 2\,\Psi=\frac{2T}{N_1-N_2}$$

и образуютъ 2 системы кривыхъ нѣсколько болѣе сложныхъ, чѣмъ въ предъидущемъ примѣрѣ.

§ 10. Рѣшеніе плоской задачи математической теоріи упругости для круга въ опредѣленныхъ интегралахъ.

Пусть имѣемъ (чер. 5) окружность круга (круговой дискъ) и къ точкамъ ея обвода приложены напряженія, такъ что проекція напряженія, дѣйствующаго на элементъ окружности ($\perp$-ый къ полярной оси r), на ось r будетъ P, а на $\perp$-ую къ ней ось Θ (направленную по касательной) будетъ U.

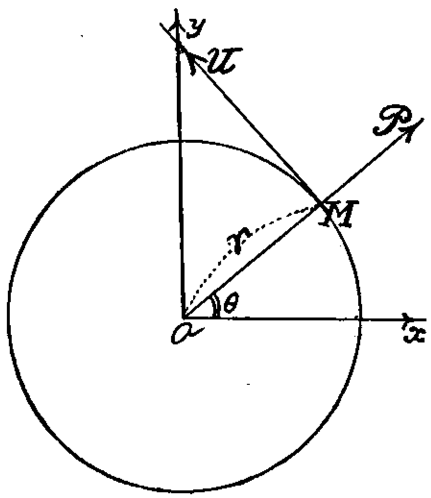
Если подъ вліяніемъ такихъ напряженій дискъ находится въ равновѣсіи, то напряженія эти должны удовлетворять условіямъ равновѣсія силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу т. е.

$$\Sigma X=O \quad \Sigma У=O \quad \Sigma y X-x У=O \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ x, y координаты точекъ приложенія силъ къ тѣлу а X, $У$ проекціи этихъ силъ на 2 прямолинейныя прямоугольныя оси координатъ *ox, oy*, начало которыхъ (чер. 5) мы возьмемъ въ центрѣ круга.

Условія (1) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}(P\,Cos\,\theta - U\,Sin\,\theta)\,d\theta = 0\\&\int_0^{2\pi}(P\,Sin\,\theta + U\,Cos\,\theta)\,d\theta = 0\\&\int_0^{2\pi}U\,d\theta = 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$



чер. 5.

Для дальнѣйшаго замѣтимъ сначала, что, если $f(\theta)$ будутъ значенія функціи $f(r, \theta)$, удовлетворяющей ур-ію

$$\nabla_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

на контурѣ круга $r = R$ (θ цент. уголъ въ кругѣ; см. чер. 5), и внутри его конечной, непрерывной и однозначной, то

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\psi)\,(R^2 - r^2)\,d\psi}{R^2 - 2\,R\,r\,Cos\,(\theta - \psi) + r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Сопряженная съ этою функціей функція $\bar{f}(\rho, \theta)$ будетъ

$$\bar{f}(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}\frac{f(\psi)\,2\,r\,R\,Sin(\theta-\psi)}{R^2-2\,R\,r\,Cos\,(\theta-\psi)+r^2}\,d\psi+C\ \ .\ .\ (5)$$

Для круга мы имѣемъ по фор. (2) стр. 19

$$\left.\begin{aligned}2\,U r^2&=-\tfrac{1}{2}r^2\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega+\varphi\\(P-Q)\,r^2&=-\tfrac{1}{2}r^2\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega+\psi\end{aligned}\right\}\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (6)$$

гдѣ $\xi=lg\,r\quad \Omega=P+Q$

$$\varphi+i\psi=F(\zeta),\ \ \text{гдѣ}\ \ \zeta=\xi+i\,\theta$$

Положимъ, что на контурѣ круга

$$U=f_1\,(\theta)\qquad P=f_2\,(\theta)\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

Изъ 1-го ур-ія (6), принимая во вниманіе (7), мы найдемъ:

$$2f_1\,(\theta)\,R^2=-\tfrac{1}{2}R^2\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega\right]_{r=R}+[\varphi]_{r=R}=$$

$$=[-\tfrac{1}{2}R^2\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega+\varphi]_{r=R}\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (8)$$

Такъ какъ функція

$$-\tfrac{1}{2}\,R^2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega+\varphi$$

удовлетворяетъ ур-ію (3), то, зная въ силу (8) ея значенія на контурѣ круга, мы найдемъ:

$$-\tfrac{1}{2}\,R^2\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega+\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}\frac{2\,R^2 f_1\,(\psi)\,(R^2-r^2)\,d\psi}{R^2-2R\,r\,Cos\,(\theta-\psi)+r^2}\ .\ .\ (9)$$

Функція $-\frac{1}{2}\,R^2\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega+\psi$ будетъ очевидно функція сопряженная съ (9), а, опредѣляя ее по формулѣ (5), мы найдемъ:

$$-\tfrac{1}{2}\,R^2\,\frac{\partial}{\partial\xi}\Omega+\psi=\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}\frac{2\,R^2 f_1\,(\psi)\,2\,r\,R\,Sin(\theta-\psi)}{R^2-2\,R\,r\,Cos(\theta-\psi)+r^2}\,d\psi+C\,.\,(10)$$

Изъ 2-аго ур-ія (6) мы имѣемъ:

$$(P-Q)\,r^2=-\tfrac{1}{2}\,r^2\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega+\psi$$

и слѣд. на контурѣ $r=R$:

$$[(P-Q)]_{r=R}\,R^2=-\tfrac{1}{2}\,R^2\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega\right]_{r=R}+[\psi]_{r=R}$$

и, т. к. $P+Q=\Omega$ и въ силу (7): $[P]_{r=R}=f_2(\theta)$

$$2f_2(\theta)\,R^2=-\tfrac{1}{2}\,R^2\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega\right]_{r=R}+R^2[\Omega]_{r=R}+[\psi]_{r=R}$$

и слѣд-о:

$$\left[-\tfrac{1}{2}\,R^2\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega+\Omega\,R^2+\psi\right]_{r=R}=2f_2(\theta)\,R^2\,..\,(10\,\mathrm{bis})$$

а, т. к. функція

$$-\tfrac{1}{2}\,R^2\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega+\Omega\,R^2+\psi$$

очевидно удовлетворяетъ ур-ію (3), то, зная въ силу (10 bis) ея значенія на контурѣ круга $r=R$, мы найдемъ по фор. (4)

$$-\tfrac{1}{2}\,R^2\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega+\Omega\,R^2+\psi=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{2f_2(\psi)\,R^2\,(R^2-r^2)\,d\psi}{R^2-2\,R\,r\,Cos\,(\theta-\psi)+r^2}$$

и слѣд-о въ силу (10):

$$\Omega\,R^2=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{2f_2(\psi)R^2(R^2-r^2)-2R^2f_1(\psi)2RrSin(\theta-\psi)}{R^2-2\,R\,r\,Cos\,(\theta-\psi)+r^2}\,d\psi-C$$

или

$$\Omega=\frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi}\frac{f_2(\psi)\,(R^2-r^2)-2Rr\,Sin\,(\theta-\psi)\,f_1\,(\psi)}{R^2-2\,R\,r\,Cos\,(\theta-\psi)+r^2}d\psi-\frac{C}{R^2}\,..\,(11)$$

φ и ψ найдутся изъ (9) и (10):

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{2\,R^2f_1(\psi)\,(R^2-r^2)\,d\psi}{R^2-2\,Rr\,Cos\,(\theta-\psi)+r^2}+\tfrac{1}{2}\,R^2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega\\ \psi&=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{2\,R^2f_1(\psi)\,2\,r\,R\,Sin\,(\theta-\psi)}{R^2-2Rr\,Cos\,(\theta-\psi)+r^2}d\psi+\tfrac{1}{2}\,R^2\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega+C\end{aligned}\right\}\,.\,(12)$$

Подставивъ въ (6) вмѣсто φ и ψ выраженія (12), а вмѣсто Ω выраженіе (11) и, замѣчая, что $\Omega=P+Q$, мы найдемъ изъ (6):

$$\left.\begin{aligned}2\,Ur^2&=-\tfrac{1}{2}\,r^2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega+\varphi=\\ &=\frac{R^2-r^2}{2}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\Omega+\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{2\,R^2f_1\,(\psi)\,(R^2-r^2)\,d\psi}{R^2-2\,R\,r\,Cos\,(\theta-\psi)+r^2}\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

$$2\,Pr^2 = -\tfrac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi + \Omega r^2 =$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \Omega + \frac{R^2 - r^2}{\pi} \int_o^{2\pi} \frac{f_1(\psi)\, 2\, r R\, Sin\,(\theta - \psi)}{R^2 - 2\, R\, r\, Cos\,(\theta - \psi) + r^2} d\psi +$$

$$+ \frac{r^2}{\pi} \int_o^{2\pi} \frac{f_2(\psi)\,(R^2 - r^2)}{R^2 - 2\, R\, r\, Cos\,(\theta - \psi) + r^2} d\psi + C \frac{R^2 - r^2}{R^2} \quad . \quad . \quad (14)$$

Изъ (14) слѣдуетъ, что если напряженія внутри круга $r = R$ (и слѣд-о и при $r = O$) мы будемъ предполагать конечными и непрерывными, мы должны положить $C = O$ и формулы, рѣшающія нашу задачу будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
2\, Ur^2 &= \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \frac{R^2}{\pi} \int_o^{2\pi} \frac{f_1(\psi)\,(R^2 - r^2)\, d\psi}{R^2 - 2\, R\, r\, Cos\,(\theta - \psi) + r^2} \\
2\, Pr^2 &= \frac{R^2 - r^2}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \Omega + \frac{R^2 - r^2}{\pi} \int_o^{2\pi} \frac{f_1(\psi)\, 2 r\, R\, Sin\,(\theta - \psi)}{R^2 - 2 R r\, Cos(\theta - \psi) + r^2} d\psi + \\
&\quad + \frac{r^2}{\pi} \int_o^{2\pi} \frac{f_2(\psi)\,(R^2 - r^2)}{R^2 - 2\, R r\, Cos\,(\theta - \psi) + r^2} d\psi
\end{aligned}\right\} (15)$$

$$\Omega = P + Q = \frac{1}{\pi} \int_o^{2\pi} \frac{f_2(\psi)(R^2 - r^2) - 2 R\, r\, Sin\,(\theta - \psi) f_1(\psi)}{R^2 - 2\, R\, r\, Cos\,(\theta - \psi) + r^2} d\psi \,..(16)$$

§ 11. Примѣры рѣшенія плоской задачи для круга въ опредѣленныхъ интегралахъ.

Предположимъ, что къ точкамъ окружности радіуса $= R$ отъ $\theta = O$ до $\theta = \alpha < \frac{\pi}{2}$ приложено равномѣрное гидростатическое давленіе p и такое же давленіе приложено на противоположную часть окружности отъ $\theta = \pi$ до $\theta = \pi + \alpha$. Чтобы рѣшить вопросъ объ упругомъ равновѣсіи площади круга, ограничиваемой разсматриваемой окружностью, мы должны положить въ формулахъ § 10:

$f_1(\theta) = O$ на всемъ контурѣ круга

$f_2(\theta) = p$ для θ отъ O до α и для θ отъ π до $\pi + \alpha$ и $f_2(\theta) = O$ -для всѣхъ другихъ значеній θ.

Имѣя въ виду, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_2(\psi)(R^2-r^2)\,d\psi}{R^2-2Rr\,Cos(\theta-\psi)+r^2} =$$

$$= p(R^2-r^2)\left\{\int_0^{\alpha} \frac{d\psi}{R^2-2Rr\,Cos(\theta-\psi)+r^2} + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi}^{\pi+\alpha} \frac{d\psi}{R^2-2Rr\,Cos(\theta-\psi)+r^2}\right\} =$$

$$= 2p \Big|_o^{\alpha} arctg\left\{\frac{R+r}{R-r} tg\frac{\psi-\theta}{2}\right\} + 2p \Big|_o^{\alpha} arctg\left\{\frac{R-r}{R+r} tg\frac{\psi-\theta}{2}\right\} =$$

$$= 2p\left[arctg\left\{\frac{R+r}{R-r} tg\frac{\alpha-\theta}{2}\right\} + arctg\left\{\frac{R+r}{R-r} tg\frac{\theta}{2}\right\} + \right.$$

$$\left. + arctg\left\{\frac{R-r}{R+r} tg\frac{\alpha-\theta}{2}\right\} + arctg\left\{\frac{R-r}{R+r} tg\frac{\theta}{2}\right\}\right],$$

найдемъ по фор. (16) и (15) § 10:

$$\Omega = P + Q = \frac{2p}{\pi}\left[arctg\left\{\frac{R+r}{R-r} tg\frac{\alpha-\theta}{2}\right\} + \right.$$

$$+ arctg\left\{\frac{R+r}{R-r} tg\frac{\theta}{2}\right\} + arctg\left\{\frac{R-r}{R+r} tg\frac{\alpha-\theta}{2}\right\} +$$

$$\left. + arctg\left\{\frac{R-r}{R+r} tg\frac{\theta}{2}\right\}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} 2Ur^2 &= \frac{R^2-r^2}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\Omega \\ 2Pr^2 &= \frac{R^2-r^2}{2}\, r\frac{\partial}{\partial r}\Omega + \Omega r^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

При помощи этихъ формулъ рѣшается вопросъ объ упругомъ равновѣсіи круга.

Если мы предположимъ, что вмѣсто гидростатическаго давленія p къ точкамъ окружности отъ $\theta = o$ до $\theta = \alpha$ и къ точкамъ ея отъ $\theta = \pi$ до $\theta = \pi + \alpha$ приложено постоянное тангенціальное напряженіе $= k$ т. е.

$f_2(\theta) = O$ на всемъ контурѣ круга, а

$f_1(\theta) = k$ для $\theta > O$ и $< \alpha$ и $f_1(\theta) = -k$ для $\theta > \pi$, и $< \pi + \alpha$ и $f_1(\theta) = O$ для всѣхъ прочихъ значеній θ, то, имѣя въ виду, что

$$\int_o^{2\pi} \frac{f_1(\psi)\, 2 r R\, Sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2 R r\, Cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi =$$

$$= k \left\{ \int_o^{\alpha} \frac{2 r R\, Sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2 R r\, Cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi - \right.$$

$$\left. \int_\pi^{\pi+\alpha} \frac{2 r R\, Sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2 r R\, Cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi \right\} =$$

$$= -k \Big|_o^{\alpha} lg\,(R^2 - 2 R r\, Cos(\theta - \psi) + r^2) -$$

$$+ k \Big|_o^{\alpha} lg\,(R^2 + 2 R r\, Cos(\theta - \psi) + r^2) =$$

$$= k\, lg \frac{\mathbf{P}^2 - 4 R^2 r^2\, Cos\,\theta\, Cos(\theta - \alpha) + 4 R r\, \mathbf{P}\, Sin\frac{\alpha}{2} Sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\mathbf{P}^2 - 4 R^2 r^2\, Cos\,\theta\, Cos(\theta - \alpha) - 4 R r\, \mathbf{P}\, Sin\frac{\alpha}{2} Sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

гдѣ $\mathbf{P} = R^2 + r^2$

мы найдемъ изъ (16) и (15): $\Omega = P + Q =$

$$= \frac{k}{\pi} lg \frac{\mathbf{P}^2 - 4 R^2 r^2\, Cos\,\theta\, Cos(\theta - \alpha) - 4 R r\, \mathbf{P}\, Sin\frac{\alpha}{2} Sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\mathbf{P}^2 - 4 R^2 r^2\, Cos\,\theta\, Cos(\theta - \alpha) + 4 R r\, \mathbf{P}\, Sin\frac{\alpha}{2} Sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$2 U r^2 = \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \frac{2 k R^2}{\pi} \left[arctg \left\{ \frac{R + r}{R - r}\, tg\, \frac{\alpha - \theta}{2} \right\} + \right.$$

$$+ arctg \left\{ \frac{R + r}{R - r}\, tg \frac{\theta}{2} \right\} - arctg \left\{ \frac{R - r}{R + r}\, tg \frac{\alpha - \theta}{2} \right\} +$$

$$\left. - arctg \left\{ \frac{R - r}{R + r}\, tg\, \frac{\theta}{2} \right\} \right]$$

$$2 P r^2 = \frac{R^2 - r^2}{2}\, r\, \frac{\partial}{\partial r} \Omega +$$

$$+\frac{R^2-r^2}{\pi}k\lg\frac{\mathbf{P}^2-4R^2r^2Cos\theta\, Cos(\theta-\alpha)+4Rr\,\mathbf{P}\,Sin\frac{\alpha}{2}Sin\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\mathbf{P}^2-4R^2r^2Cos\theta\, Cos(\theta-\alpha)-4Rr\,\mathbf{P}\,Sin\frac{\alpha}{2}Sin\left(\theta-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Какъ другой примѣръ разсмотримъ случай, когда гидростатическое давленіе $=p$ приложено кромѣ частей окружности, гдѣ $O<\theta<\alpha$, $\pi<\theta<\pi+\alpha$, еще въ тѣхъ точкахъ, гдѣ

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}+\alpha;\ \frac{3\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}+\alpha$$

Имѣя въ виду, что въ этомъ случаѣ:

$$\int_o^{2\pi}\frac{f_2(\psi)(R^2-r^2)\,d\psi}{R^2-2Rr\,Cos(\theta-\psi)+r^2}=$$

$$=p(R^2-r^2)\left\{\int_o^\alpha\frac{d\psi}{R^2-2Rr\,Cos(\theta-\psi)+r^2}+\right.$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}\frac{d\psi}{R^2-2rR\,Cos(\theta-\psi)+r^2}+$$

$$+\int_\pi^{\pi+\alpha}\frac{d\psi}{R^2-2Rr\,Cos(\theta-\psi)+r^2}+$$

$$\left.+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+\alpha}\frac{d\psi}{R^2-2Rr\,Cos(\theta-\psi)+r^2}\right\}=$$

$$p(R^2-r^2)\left\{\Big|_o^\alpha arctg\left\{\frac{R+r}{R-r}\,tg\,\frac{\psi-\theta}{2}\right\}+\right.$$

$$+\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}arctg\left\{\frac{R+r}{R-r}\,tg\,\frac{\psi-\theta}{2}\right\}+\Big|_o^\alpha arctg\left\{\frac{R-r}{R+r}\,tg\,\frac{\psi-\theta}{2}\right\}+$$

$$\left.+\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}arctg\left\{\frac{R-r}{R+r}\,tg\,\frac{\psi-\theta}{2}\right\}\right\}=$$

$$=2p\Bigg[arctg\left\{\frac{R+r}{R-r}\,tg\,\frac{\alpha-\theta}{2}\right\}+arctg\left\{\frac{R+r}{R-r}\,tg\,\frac{\theta}{2}\right\}+$$

$$+arctg\left\{\frac{R+r}{R-r}\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\right\}-arctg\left\{\frac{R+r}{R-r}\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}+$$

$$+arctg\left\{\frac{R-r}{R+r}\,tg\,\frac{\alpha-\theta}{2}\right\}+arctg\left\{\frac{R-r}{R+r}\,tg\,\frac{\theta}{2}\right\}+$$

$$+arctg\left\{\frac{R-r}{R+r}\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\right\}-arctg\left\{\frac{R-r}{R+r}\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\Bigg],$$

мы найдемъ Ω по фор. (16) § 10, а $2\,U$ и $2\,P$ по фор. (15) § 10 или по фор. (1) стр. 54. Точно также весьма просто можетъ быть разсмотрѣнъ случай, когда въ частямъ окружности: $O<\theta<\alpha,\ \pi<\theta<\pi+\alpha,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}+\alpha$ приложены тангенціальныя напряженія постоянной величины k. Болѣе подробныя изслѣдованія полученныхъ формулъ мы приведемъ въ особомъ мемуарѣ.

§ 12. Рѣшеніе плоской задачи математической теоріи упругости для изотермическаго контура.

Представимъ себѣ, что намъ заданы нормальное и тангенціальное напряженія вдоль нѣкотораго (чер. 6) изотермическаго контура, ур-іе котораго

$$\xi=\varphi_o\,(x,\,y)=\text{пост.}=\alpha,\quad .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

гдѣ $\varphi_o\,(x,y)$ удовлетворяетъ ур-ію:

$$\frac{\partial^2\varphi_o}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_o}{\partial y^2}=O\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Найдя функцію η сопряженную съ $\xi=\varphi_o\,(x,y)$, мы введемъ изотермическую систему координатъ ξ,η; тогда

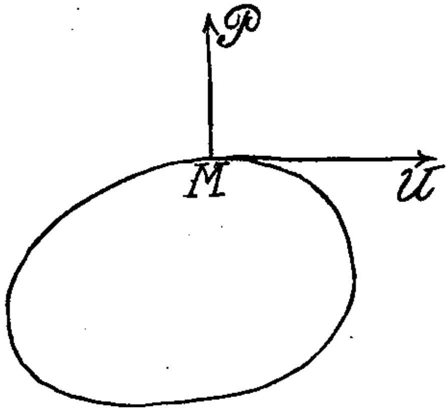
$$\zeta=\ \xi+\eta i=F(x+y i),\ \text{а}\ z=f(\zeta)\quad .\ .\ (3)$$

Ур-ія плоской задачи математической теоріи упругости напишутся въ видѣ ур-ій (4) стр. 16 и по фор. (5) стр. 16 мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2U}{h^2}&=\alpha_0\frac{\partial}{\partial\eta}(P+Q)-\beta_0\frac{\partial}{\partial\xi}(P+Q)+\varphi\\ \frac{P-Q}{h^2}&=\beta_0\frac{\partial}{\partial\eta}(P+Q)+\alpha_0\frac{\partial}{\partial\xi}(P+Q)+\psi\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (4)$$

или по фор. (7) стр. 16

$$\frac{2U+i(P-Q)}{h^2}=i(\alpha_0+i\beta_0)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}+F(\zeta)\ .\ .\ .\ (5)$$



чер. 6.

гдѣ по фор. (8) стр. 17

$$\alpha_0+i\beta_0=-\tfrac{1}{2}f(\zeta_1)f'(\zeta)\quad .\ .\ .\ .\ (6)$$

Данный контуръ (1) соотвѣтствуетъ $\xi=\alpha$. Но при $\xi=\alpha$:

$$[\alpha_0+i\beta_0]_{\xi=\alpha}=-\tfrac{1}{2}\overline{f}(\alpha-\eta i)f'(\alpha+\eta i)\,{}^{*)}=$$

$$=-\tfrac{1}{2}[\overline{f}(2\alpha-\xi-\eta i)f'(\xi+\eta i)]_{\xi=\alpha}=-\tfrac{1}{2}[\overline{f}(2\alpha-\zeta)f'(\zeta)]_{\xi=\alpha}$$

Поэтому, такъ какъ на контурѣ (1) мы предполагаемъ заданными нормальное (P) и тангенціальное (U) напряженія, задача приводится къ отысканію 2-хъ такихъ функцій комплекснаго перемѣннаго ζ:

$$\Phi(\zeta)\ \text{и}\ F(\zeta),$$

что на контурѣ (1)

$$i(\alpha+i\beta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}+F(\zeta)+\frac{i\Omega}{h^2}\quad .\ .\ .\ .\ (8)$$

*) $\overline{f}$ есть операція f, въ которой i замѣнено $-i$.

обращается въ заданное на этомъ контурѣ выраженіе

$$\frac{2(U+iP)}{h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Предположимъ, что

$$\Phi(\zeta) = \bar{f}(2\alpha - \zeta) f'(\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

представляетъ функцію комплекснаго перемѣннаго конечную, непрерывную и однозначную на всей площади, ограничиваемой контуромъ (1); вещественная часть (8), обращающаяся на контурѣ (1) въ заданную на этомъ контурѣ ве-вещественную часть (9): $\frac{2U}{h^2}$ совпадаетъ на этомъ контурѣ въ силу (6) и (10) съ вещественной частью функціи комплекснаго перемѣннаго ζ:

$$\chi(\zeta) = -\tfrac{1}{2} i \Phi(\zeta) \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta). \quad . \quad . \quad (11)$$

однозначной и конечной на всей площади контура (1), съ мнимою частью которой совпадаютъ на этомъ контурѣ значенія $\frac{P-Q}{h^2}$.

Мы найдемъ слѣд-о вещественную часть (11), рѣшая задачу Дирихле объ опредѣленіи конечной, непрерывной и однозначной функціи $f(\xi, \eta)$ на площади замкнутаго контура, (1) удовлетворяющей ур-ію:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = O, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

а на самомъ контурѣ принимающей напередъ заданныя значенія $\left(\text{въ данномъ случаѣ } \frac{2U}{h^2}\right)$.

Найдя вещественную часть функціи $\chi(\zeta)$ (11), мы найдемъ ея мнимую часть посредствомъ простой квадратуры; значенія послѣдней на контурѣ (1), совпадаютъ съ значеніями

$\frac{P-Q}{h^2}$, и слѣд-о на контурѣ будутъ извѣстны $P-Q$ и $P+Q$ т. к.

$$\Omega = P + Q = 2P - (P - Q) \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

а $2P$ на контурѣ (1) задано.

Зная въ силу (13) значенія на контурѣ (1) $\Omega = P + Q$, мы найдемъ само Ω, рѣшая вторую задачу Дирихле аналогичную рѣшенной первой. Найдя такимъ образомъ Ω, мы найдемъ

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} - i\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

а слѣд-о изъ (11) и $F(\zeta)$ и наша задача будетъ рѣшена.

Такимъ образомъ рѣшеніе плоской задачи для изотермическаго контура (1) при условіи, что выраженіе (10) представляетъ конечную, непрерывную и однозначную и функцію внутри контура (1) приводится къ 2-мъ задачамъ Дирихле.

Въ случаяхъ прямолинейнаго и кругового контуровъ мы этимъ путемъ получимъ рѣшеніе въ опредѣленныхъ интегралахъ, приведенныя въ § 9 и § 10.

Мы можемъ получить рѣшеніе плоской задачи въ опредѣленныхъ интегралахъ и для какого угодно изотермическаго контура (1), если послѣдній представляетъ замкнутую кривую, къ контуру которой приложены заданныя напряженія U и P. Для этого сначала замѣтимъ, что всякую функцію $f(\xi, \eta)$, удовлетворяющую ур-ію (12) и внутри контура (1) конечную, непрерывную и однозначную, а на самомъ контурѣ (1) обращающуюся въ напередъ заданную функцію $\eta - f(\eta)$, мы можемъ представить опредѣленнымъ интеграломъ, положивъ:

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)(\xi - a)\,ds}{(s-\eta)^2 + (\xi - a)^2} \quad . \quad . \quad (15)$$

Въ самомъ дѣлѣ выраженіе (15) очевидно удовлетворяетъ ур-ію (12), т. к. представляетъ вещественную часть функціи комплекснаго перемѣннаго $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,ds}{\zeta-\alpha-is} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

мнимая часть которой равна

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,(s-\eta)\,ds}{(s-\eta)^2+(\xi-\alpha)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Кромѣ того легко убѣдиться, что выраженіе (15) представляетъ внутри контура $\xi=\alpha$ непрерывную функцію, обращающуюся на немъ въ $f(\eta)$, такъ какъ, принявъ за новую перемѣнную

$$t=\frac{s-\eta}{\xi-\alpha}$$

такъ что

$$dt=\frac{ds}{\xi-\alpha},$$

мы приведемъ (15) къ виду:

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t(\xi-\alpha)+\eta)\,dt}{1+t^2} \quad . \quad . \quad (18)$$

и при $\xi=\alpha$ правая часть (18) обращается въ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\eta)\,dt}{1+t^2}=\frac{f(\eta)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=f(\eta)$$

Примѣняя формулу (15) къ нашему случаю, мы найдемъ, что вещественная часть (11), которой значенія на контурѣ (1) равны значеніямъ $\frac{2U}{h^2}=f(\eta)$, будетъ равна

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,(\xi-\alpha)\,ds}{(s-\eta)^2+(\xi-\alpha)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Мнимая часть (11) по фор. (17) можетъ только на постоянную отличаться отъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,(s-\eta)\,ds}{(s-\eta)^2+(\xi-\alpha)^2}$$

т. е. будетъ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,(s-\eta)\,ds}{(s-\eta)^2+(\xi-\alpha)^2}+C, \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

а сама функція (11) $\chi(\zeta)$ будетъ въ силу (16)

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)\,ds}{\zeta - a - si} + Ci \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Постоянную C мы выберемъ такъ, чтобы напряженія были внутри контура (1) непрерывны и конечны.

Чтобы найти Ω замѣтимъ, что на основаніи (13) мы можемъ положить:

$$\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 \,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

гдѣ Ω_1 и Ω_2 функціи, удовлетворяющія ур-ію (12), и

$$[\Omega_1]_{\xi = a} = [2P]_{\xi = a} \quad [\Omega_2]_{\xi = a} = [P - Q]_{\xi = a} \quad . \quad . \quad (23)$$

P на контурѣ (1) намъ задано; положимъ:

$$[2P]_{\xi = a} = f_1(\eta)$$

Тогда по фор. (15) мы найдемъ:

$$\Omega_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(s)\,(\xi - a)\,ds}{(\xi - a)^2 + (s - \eta)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Чтобы найти Ω_2, замѣтимъ что $\dfrac{P - Q}{h^2}$ совпадаетъ на контурѣ (1) т. е. при $\xi = a$ съ мнимою часть функціи (11) $\chi(\zeta)$ т. е. въ силу (20):

$$\left[\frac{P - Q}{h^2}\right]_{\xi = a} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)\,ds}{s - \eta} + C \quad . \quad . \quad (25)$$

и слѣд-о

$$[P - Q]_{\xi = a} = \frac{[h^2]_{\xi = a}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)\,ds}{s - \eta} + C\,[h^2]_{\xi = a} \quad . \quad (26)$$

и поэтому въ силу (23) и (15):

$$\Omega_2 = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[h^2]_{\substack{\xi = a\\ \eta = s}}\, f(\sigma)\,(\xi - a)\,ds\,d\sigma}{(\sigma - s)\,[(\xi - a)^2 + (s - \eta)^2]} + \Omega_0 \quad . \quad (27)$$

$$\text{гдѣ } \Omega_0 = \frac{C}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[h^2]_{\substack{\xi = a\\ \eta = s}}\,(\xi - a)\,ds}{(\xi - a)^2 + (s - \eta)^2}$$

Найдя при помощи (24) и (27) Ω_1 и Ω_2, мы найдемъ изъ

(22) Ω, а слѣд-о, изъ (14) и $\frac{d\Phi}{d\zeta}$, а, зная изъ (21) $\chi(\zeta)$, мы найдемъ изъ (11) $F(\zeta)$ и наша задача будетъ рѣшена.

Особенно просто получается рѣшеніе если $U = O$ т. е. къ контуру (1) приложены исключительно нормальныя давленія или натяженія.

Въ этомъ случаѣ $\chi(\zeta) = iC$

$$\Omega_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(s)(\xi-\alpha)\,ds}{(\xi-\alpha)^2+(s-\eta)^2}$$

Если давленіе P равно постоянной величинѣ p и приложено напр. на частяхъ кривой (1) отъ $\eta=\lambda$ до $\eta=\mu$ и отъ $\eta=\gamma$ до $\eta=\delta$ (причемъ должны быть выполнены условія (1) § 10), то

$$\Omega_1 = \frac{p}{\pi}\left[\int_\lambda^\mu \frac{(\xi-\alpha)\,ds}{(\xi-\alpha)^2+(s-\eta)^2} + \int_\gamma^\delta \frac{(\xi-\alpha)\,ds}{(\xi-\alpha)^2+(s-\eta)^2}\right] =$$

$$= \frac{p}{\pi}\left\{ \Big|_\lambda^\mu arctg\,\frac{s-\eta}{\xi-\alpha} + \Big|_\gamma^\delta arctg\,\frac{s-\eta}{\xi-\alpha}\right\} =$$

$$= \frac{p}{\pi}\left(arctg\frac{\mu-\eta}{\xi-\alpha} - arctg\frac{\lambda-\eta}{\xi-\alpha} + arctg\frac{\delta-\eta}{\xi-\alpha} - arctg\frac{\gamma-\eta}{\xi-\alpha}\right)$$

$$\Omega_2 = \Omega_o \qquad \Omega = \Omega_1 - \Omega_o$$

$$F(\zeta) = iC + \tfrac{1}{2}\, i\,\Phi(\zeta)\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} - i\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right\}$$

и задача рѣшается весьма просто.

Дальнѣйщія приложенія этой теоріи мы дадимъ въ особомъ мемуарѣ.

Рѣшеніе плоской задачи для изотермическаго контура дано нами въ вышеизложенномъ видѣ въ Comptes rendus 1909 [№ 17].

§ 13. Рѣшеніе плоской задачи математической теоріи упругости при помощи тригонометрическихъ рядовъ.

Обыкновенно при рѣшеніи плоской задачи математической упругости удовлетворяютъ контурнымъ условіямъ задачи при помощи тригонометрическихъ рядовъ. Возьмемъ напр. фор. 9 для случая прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ причемъ для α, β возьмемъ значеніе (6_a) стр. 9; найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} 2T &= -y\frac{\partial(N_1+N_2)}{\partial x}+\varphi \\ N_1-N_2 &= \quad y\frac{\partial(N_1+N_2)}{\partial y}+\psi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Положимъ:

$$N_1+N_2=(A_m e^{my}+A_{-m}e^{-my})\,Sin\,mx \quad . \; . \; (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \quad (a_m e^{my}+a_{-m}e^{-my})\,Cos\,mx \\ \psi &= (-a_m e^{my}+a_{-m}e^{-my})\,Sin\,mx \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (3)$$

Предположимъ, что контуръ состоитъ изъ 2-хъ прямыхъ $\|$-ыхъ оси x-овъ: $y=\varepsilon_1$ и $y=\varepsilon_2$.

При помощи (1) мы найдемъ

$$\left.\begin{aligned} 2T &= [-ym(A_m e^{my}+A_{-m}e^{-my})+ \\ &\qquad\qquad +a_m e^{my}+a_{-m}e^{-my}]\,Cos\,mx \\ N_1-N_2 &= \quad [ym(A_m e^{my}-A_{-m}e^{-my})- \\ &\qquad\qquad -a_m e^{my}+a_{-m}e^{-my}]\,Sin\,mx \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (4)$$

и слѣд-о

$$\begin{aligned} 2N_2 &= [A_m e^{my}(1-ym)+A_{-m}e^{-my}(1+ym)+ \\ &\qquad\qquad +a_m e^{my}-a_{-m}e^{-my}]\,Sin\,mx \end{aligned}$$

Предположимъ, что на контурѣ т. е. при $y=\varepsilon_1$ и $y=\varepsilon_2$ заданы тангенціальное и нормальное напряженія т. е. даны T и N_2 какъ функціи отъ x; которыя мы можемъ представить себѣ разложенными въ тригонометрическіе ряды:

$$2T=\Sigma\,\alpha_{\varepsilon_1 m}\,Cos\,mx \qquad 2N_2=\Sigma\,\beta_{\varepsilon_1 m}\,Sin\,mx$$

при $y=\varepsilon_1$ и въ тригонометрическіе ряды: . . (5)

$$2T=\Sigma\,\alpha_{\varepsilon_2 m}\,Cos\,mx \qquad 2N_2=\Sigma\,\beta_{\varepsilon_2 m}\,Sin\,mx$$

при $y=\varepsilon_2$, гдѣ $\alpha_{\varepsilon_1 m}$, $\beta_{\varepsilon_1 m}$, $\alpha_{\varepsilon_2 m}$, $\beta_{\varepsilon_2 m}$ будутъ слѣд-о заданныя постоянныя. Но изъ (4) при $y=\varepsilon_1$

$$\left.\begin{aligned}
2T &= [-\varepsilon_1 m (A_m e^{m\varepsilon_1} + A_{-m} e^{-m\varepsilon_1}) + \\
&\qquad + a_m e^{m\varepsilon_1} + a_{-m} e^{-m\varepsilon_1}] \, Cos\, mx \\
2N_2 &= [A_m e^{m\varepsilon_1} (1 - \varepsilon_1 m) + A_{-m} e^{-m\varepsilon_1} (1 + \varepsilon_1 m) + \\
&\qquad + a_m e^{n\varepsilon_1} - a_{-m} e^{-m\varepsilon_1}] \, Sin\, mx, \\
&\text{а при } y = \varepsilon_2 \\
2T &= [-\varepsilon_2 m (A_m e^{m\varepsilon_2} + A_{-m} e^{-m\varepsilon_2}) + \\
&\qquad + a_m e^{m\varepsilon_2} + a_{-m} e^{-m\varepsilon_2}] \, Cos\, mx \\
2N_2 &= [A_m e^{m\varepsilon_2} (1 - \varepsilon_2 m) + A_{-m} e^{-m\varepsilon_2} (1 + \varepsilon_2 m) + \\
&\qquad + a_m e^{m\varepsilon_2} - a_{-m} e^{-m\varepsilon_2}] \, Sin\, mx
\end{aligned}\right\} \quad . . (6)$$

Опредѣляя A_m, A_{-m}, a_m, a_{-m} такимъ образомъ, чтобы коэф-ы въ (6) совпали съ коэф-ами при $Cos\, mx$ и $Sin\, mx$ въ (5) т. е., рѣшая для этого 4 ур-ія съ 4 неизвѣстными и положивъ:

$$N_1 + N_2 = \Sigma (A_m e^{my} + A_{-m} e^{-my}) \, Sin\, mx$$

$$\varphi = \Sigma (a_m e^{ny} + a_{-m} e^{-my}) \, Cos\, mx$$

$$\psi = \Sigma (-a_m e^{my} + a_{-m} e^{-my}) \, Sin\, mx$$

мы очевидно удовлетворимъ контурнымъ условіямъ задачи; такимъ образомъ, если мы предположимъ $\varepsilon_1 = O$, $\varepsilon_2 = 2b$, $2T = O$ какъ при $y = \varepsilon_1 = O$ такъ и при $y = \varepsilon_2 = 2b$, $N_2 = O$ при $y = O$ и

$$N_2 = \Sigma \beta_m \, Sin\, \omega_m x, \quad \text{гдѣ } \omega_m = \frac{m\pi}{2a}$$

при $y = 2b$, мы найдемъ:

$$N_1 = \Sigma c_m \omega^2_m \, Sin\, \omega_m x \, [e^{\omega_m y} - e^{-\omega_m y} + \\ + \gamma_1 (2e^{\omega_m y} + \omega_m y e^{\omega_m y}) + \gamma_2 (\omega_m y e^{-\omega_m y} - 2e^{-\omega_m y})]$$

$$N_2 = - \Sigma c_m \omega^2_m \, Sin\, \omega_m x \, [e^{\omega_m y} - e^{-\omega_m y} + \\ + \gamma_1 \omega_m y e^{\omega_m y} + \gamma_2 \omega_m y e^{-\omega_m y}],$$

гдѣ

$$c_m = - \frac{\beta_m}{\omega_m^2} : \; [e^{2\omega_m b} - e^{-2\omega_m b} + \\ + 2\omega_m \gamma_1 b \, e^{2\omega_m b} + 2\omega_m \gamma_2 b \, e^{-2\omega_m b}]$$

а
$$\gamma_1 = \frac{-1 + 4\,\omega_m b + e^{4\omega_m b}}{1 - 2\omega_m b - (1 + 2\omega_m b)\,e^{4\omega_m b}}$$

и
$$\gamma_2 = \frac{-1 + e^{4\omega_m b} + 4\,\omega_m b\; e^{4\omega_m b}}{1 - 2\,\omega_m b - (1 + 2\,\omega_m b)\,e^{4\omega_m b}},$$

которыя даны были A. Timpe [№ 10 § 8 стр. 364] для изгиба прямого бруса подъ вліяніемъ нагрузки N_2 на его верхней сторонѣ. Аналогичныя формулы для изгиба прямого бруса, свободно лежащаго на 2-хъ опорахъ получены также С. И. Белзецкимъ [№ 10 bis].

Предположимъ теперь, что контуръ представляетъ прямоугольникъ, стороны котораго $2\varepsilon_1$ и $2\varepsilon_2$ образованы 2-мя прямыми $x = \varepsilon_1$ и $x = -\varepsilon_1$ параллельными оси y-овъ и 2-мя прямыми $y = \varepsilon_2$ и $y = -\varepsilon_2$ параллельными оси x-овъ.

По фор. (4) стр. 9 мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} 2T &= \alpha\,\frac{\partial (N_1 + N_2)}{\partial y} - \beta\,\frac{\partial (N_1 + N_2)}{\partial x} + \varphi \\ N_1 - N_2 &= \beta\,\frac{\partial (N_1 + N_2)}{\partial y} + \alpha\,\frac{\partial (N_1 + N_2)}{\partial x} + \psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad (7)$$

гдѣ α и β удовлетворяютъ ур-іямъ (5) стр. 9. Замѣтимъ, что $N_1 + N_2$ мы можемъ разбить на 2 части, положивъ

$$N_1 + N_2 = [N_1 + N_2]_1 + [N_1 + N_2]_2$$

и въ фор. (7) для каждой изъ этихъ частей брать особые α и β. Напр. мы можемъ для части $[N_1 + N_2]_1$ взять значенія (6_a) стр. 9:

$$\alpha = O, \quad \beta = y,$$

а для части $[N_1 + N_2]_2$ значенія (6_b) стр. 9:

$$\alpha = -x, \quad \beta = O$$

т. е. положить:

$$\left.\begin{aligned} 2T &= -y\,\frac{\partial (N_1 + N_2)_1}{\partial x} - x\,\frac{\partial (N_1 + N_2)_2}{\partial y} + \varphi \\ N_1 - N_2 &= y\,\frac{\partial (N_1 + N_2)_1}{\partial y} - x\,\frac{\partial (N_1 + N_2)_2}{\partial x} + \psi \end{aligned}\right\} \quad . . (8)$$

Положимъ теперь:

$$\left.\begin{aligned}[N_1+N_2]_1 &= \Sigma\left(a_n e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y} + a_{-n} e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y}\right) Cos\frac{\pi n}{\varepsilon_1}x \\ [N_1+N_2]_2 &= \Sigma\left(b_n e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x} + b_{-n} e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x}\right) Cos\frac{\pi n}{\varepsilon_2}y\end{aligned}\right\}\ldots(9)$$

и предположимъ, что къ бокамъ нашего прямоугольника приложены заданныя нормальныя и тангенціальныя напряженія. Замѣтимъ, что мы можемъ всегда подыскать такую гармоническую функцію V т. е. функцію, удовлетворяющую ур-ію

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = O,$$

которая принимала бы на контурѣ этого прямоугольника значенія

$$-y\frac{\partial(N_1+N_2)_1}{\partial x} - x\frac{\partial(N_1+N_2)_2}{\partial y} + \varphi, \ldots (10)$$

гдѣ $[N_1+N_2]_1$ и $[N_1+N_2]_2$ имѣютъ значенія (9), а именно положить

$$\left.\begin{aligned}V = {} & \Sigma\left(A_n e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y} + A_{-n} e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y}\right) Sin\frac{\pi n}{\varepsilon_1}x \\ & + \Sigma\left(B_n e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x} + B_{-n} e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x}\right) Sin\frac{\pi n}{\varepsilon_2}y + \varphi\end{aligned}\right\}\ldots(11)$$

при условіи, что A_n, A_{-n}, B_n, B_{-n} удовлетворяютъ ур-іямъ:

$$\left.\begin{aligned}A_n e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} + A_{-n} e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} &= \frac{n\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2\left(a_n e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} + a_{-n} e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2}\right) \\ A_n e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} + A_{-n} e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} &= -\frac{n\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2\left(a_n e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} + a_{-n} e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_1}\right) \\ B_n e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} + B_{-n} e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} &= \frac{n\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1\left(b_n e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} + b_{-n} e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1}\right) \\ B_n e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} + B_{-n} e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} &= -\frac{n\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1\left(b_n e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} + b_{-n} e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_1}\right)\end{aligned}\right\}\ldots(12)$$

Въ дальнѣйшемъ мы предположимъ, что $[N_1 + N_2]_1$ и $[N_1 + N_2]_2$ представляютъ четныя функціи относительно x и y; тогда:

$$a_n = a_{-n} \qquad b_n = b_{-n}$$

и изъ (12):

$$A_n = -A_{-n} = \frac{n\pi}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2\,\frac{e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} + e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2}}{e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} - e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2}}\,a_n = \frac{\pi n}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2\; Coth\, n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2\, a_n$$

$$B_n = -B_{-n} = \frac{n\pi}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1\,\frac{e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} + e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1}}{e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} - e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1}}\,b_n = \frac{\pi n}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1\; Cot\,h\, n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1\, b_n$$

Функція сопряженная съ V (11) будетъ

$$\left.\begin{aligned} W &= \Sigma\left(A_n e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y} - A_{-n}\, e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y}\right) Cos\frac{\pi n}{\varepsilon_1}x + \\ &+ \Sigma\left(-B_n e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x} + B_{-n}\, e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x}\right) Cos\frac{\pi n}{\varepsilon_2}y + \psi + C \\ &= \Sigma\frac{\pi n}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2\; Coth\, n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2\left(e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y} + e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y}\right)a_n Cos\frac{n\pi}{\varepsilon_1}x - \\ &- \Sigma\frac{\pi n}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1\; Cot\,h\, n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1\left(e^{n\frac{n}{\varepsilon_2}x} + e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x}\right)b_n Cos\frac{\pi n}{\varepsilon_2}y + \psi + C, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

гдѣ C нѣкоторая постоянная.

Такъ какъ значенія V на контурѣ прямоугольника совпадаютъ съ значеніями (10) т. е. въ силу (8) съ значеніями $2\,T$, то онѣ являются у насъ заданными и слѣд-о, рѣшая задачу Дирихле, мы найдемъ V, а слѣд-о и W.

Вычитая W изъ лѣвой части 2-го ур-ія (8), а изъ правой части (8) вычитая выраженіе W (13), мы найдемъ:

$$N_1 - N_2 - W + C =$$

$$= \Sigma\, a_n \frac{n\pi}{\varepsilon_1}\left\{(y - \varepsilon_2\; Cotg\frac{\pi}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2)\; e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y} - \right.$$

$$\left. - (y + \varepsilon_2\; Cotg\frac{\pi}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2)\; e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y}\right\} Cos\frac{n\pi}{\varepsilon_1}x -$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\Sigma b_n \frac{n\pi}{\varepsilon_2}\Big\{(x-\varepsilon_1\, Cotg\, \frac{\pi}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1)\, e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x} - \\
&\qquad -(x+\varepsilon_1\, Cotg\, \frac{\pi}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1)\, e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x}\Big\}\, Cos\, \frac{n\pi}{\varepsilon_2}\, y = \\
&= \Sigma a_n \frac{n\pi}{\varepsilon_1}\Big\{y\left(e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y} - e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y}\right) - \\
&\qquad -\varepsilon_2\, Cotg\, \frac{\pi}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2\left(e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y} + e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y}\right)\Big\}\, Cos\, \frac{n\pi}{\varepsilon_1}\, x - \\
&-\Sigma b_n \frac{n\pi}{\varepsilon_2}\Big\{x\left(e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x} - e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x}\right) - \\
&\qquad -\varepsilon_1\, Cotg\, \frac{\pi}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1\left(e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x} + e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x}\right)\Big\}\, Cos\, \frac{n\pi}{\varepsilon_2}\, y
\end{aligned}\right\} (13\ \text{bis})$$

При $y = \pm \varepsilon_2$

$$N_1 + N_2 - (N_1 - N_2 - W + C) = 2N_2 + W - C = f_1(x)$$

будетъ извѣстная намъ функція (четная) отъ x и слѣд-о, имѣя въ виду выраженія (9) и (13 bis):

$$f_1(x) = \Sigma a_n \lambda_n\, Cos\, \frac{n\pi}{\varepsilon_1}\, x + \Sigma b_n (-1)^n \Big\{\frac{n\pi}{\varepsilon_2}\, x\left(e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x} - e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x}\right) +$$

$$+\left(1 - \varepsilon_1 \frac{n\pi}{\varepsilon_2}\, Cotg\, \frac{\pi}{\varepsilon_2}\,\varepsilon_1\right)\left(e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x} + e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}x}\right)\Big\}, \quad . \; . \; . \quad (14)$$

гдѣ

$$\lambda_n = \frac{e^{2n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} - e^{-2n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} + 4n\frac{\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2} - e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}\varepsilon_2}}$$

При $x = \pm \varepsilon_1$

$$N_1 + N_2 + (N_1 - N_2 - W + C) = 2N_1 - W + C = f_2(y)$$

будетъ извѣстная намъ (четная) функція отъ y и

$$f_2(y) = \Sigma b_n \mu_n\, Cos\, \frac{n\pi}{\varepsilon_2}\, y + \Sigma a_n (-1)^n \Big\{\frac{n\pi}{\varepsilon_1}\, y\left(e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y} - e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y}\right) +$$

$$+\left(1 - \varepsilon_2 \frac{n\pi}{\varepsilon_1}\, Cotg\, \frac{\pi}{\varepsilon_1}\,\varepsilon_2\right)\left(e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y} + e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_1}y}\right)\Big\} \quad . \; . \; . \quad (15)$$

$$\text{гдѣ} \qquad \mu_n = \frac{e^{2n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} - e^{-2n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} + 4n\frac{\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}{e^{n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1} - e^{-n\frac{\pi}{\varepsilon_2}\varepsilon_1}}$$

Предположимъ, что $f_1(x)$ и $f_2(y)$ разложены въ тригонометрическіе ряды:

$$f_1(x) = \Sigma\, a_{1n}\, Cos\frac{n\pi}{\varepsilon_1}x \qquad\qquad f_2(y) = \Sigma\, a_{2n}\, Cos\frac{n\pi}{\varepsilon_2}y, \qquad \text{гдѣ}$$

$$a_{1n} = \frac{1}{\varepsilon_1}\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_1} f_1(x)\, Cos\frac{n\pi}{\varepsilon_1}x\, dx$$

$$a_{2n} = \frac{1}{\varepsilon_2}\int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_2} f_2(y)\, Cos\frac{n\pi}{\varepsilon_2}y\, dy$$

Умножая обѣ части ур-ія (15) на $Cos\frac{m\pi}{\varepsilon_1}x$ и взявъ интегралъ отъ нихъ отъ $x = -\varepsilon_1$ до $x = +\varepsilon_1$ мы найдемъ,

$$a_{1m} - a_m\lambda_m\varepsilon_1 = \sum_n (-1)^{n+m}\frac{4\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 nm^2\left(e^{\frac{n\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} - e^{-\frac{n\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\right)}{\pi[m^2\varepsilon_2^2 + n^2\varepsilon_1^2]^2}b_n, \quad (16)$$

а, умножая обѣ части ур-ія (15) на $Cos\frac{m\pi}{\varepsilon_2}y$ и взявъ интегралъ отъ нихъ отъ $y = -\varepsilon_2$ до $y = +\varepsilon_2$, мы найдемъ

$$a_{2m} - b_m\mu_m\varepsilon_2 = \sum_n (-1)^{n+m}\frac{4\varepsilon_2^2\varepsilon_1^3 nm^2\left(e^{\frac{n\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} - e^{-\frac{n\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)}{\pi[m^2\varepsilon_2^2 + n^2\varepsilon_1^2]^2}a_n. \quad (16\,\text{bis})$$

Мы можемъ опредѣлить изъ ур-ій (16) и (16 bis) коэффицентъ a_n и b_n при помощи послѣдовательныхъ приближеній. *)

Имѣя общія выраженія напряженій въ изотермическихъ координатахъ, мы можемъ, задавшись какими нибудь выра-выраженіями основныхъ гармоническихъ функцій, отъ которыхъ зависитъ рѣшеніе плоской задачи, въ видѣ тригоно-

*) См. по этому поводу: Б. М. Кояловичъ. Объ одномъ уравненіи съ частными производными четвертаго порядка. СПБ. 1902 г.

метрическихъ рядовъ напр. въ видѣ $\Sigma\, a_n\, e^{n\xi}\, Cos\, n\eta + b_n\, e^{n\xi}\, Sin\, n\eta$, удовлетворить контурнымъ условіямъ соотвѣтственнымъ подборомъ коэффиціентовъ a_n и b_n. Такъ напр. рѣшаютъ задачу о равновѣсіи полосы ограниченной двумя концентрическими окружностями А. Timpe [№ 10], Ribière [№ 3 и № 8] и С. И. Белзецкій [№ 9] и о равновѣсіи арки, ограниченной 2-мя софокусными эллипсами С. И. Белзецкій [№ 12]. Неудобство такихъ рѣшеній при помощи рядовъ заключается главнымъ образомъ въ томъ, что не всегда эти ряды быстро сходятся и саму сходимость ихъ каждый разъ надо изслѣдовать.

§ 14. О символахъ $D_{xy}\, F$ и $\overline{D}_{xy}\, F$ и ихъ свойствахъ.

Положимъ

$$D_{xy}\, F = \frac{\partial F}{\partial x} + i\,\frac{\partial F}{\partial y} \quad \dots\dots \quad (1)$$

$$\overline{D}_{xy}\, F = \frac{\partial F}{\partial x} - i\,\frac{\partial F}{\partial y} \quad \dots\dots \quad (2)$$

Очевидны слѣдующія свойства этихъ символовъ:

1) $D_{xy}\, \Sigma\, F = \Sigma\, D_{xy}\, F, \quad \overline{D}_{xy}\, \Sigma\, F = \Sigma\, \overline{D}_{xy}\, F \quad . \; . \quad (3)$

2) $D_{xy}\, (k\, F) = k\, D_{xy} F, \quad \overline{D}_{xy}\, (k\, F) = k\, \overline{D}_{xy}\, F \quad . \quad (4)$

3) $\left.\begin{aligned} D_{xy}\, (F_1\, F_2) &= F_1\, D_{xy}\, F_2 + F_2\, D_{xy}\, F_1 \\ \overline{D}_{xy}\, (F_1\, F_2) &= F_1\, \overline{D}_{xy}\, F_2 + F_2\, \overline{D}_{xy}\, F_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (5)$

4) Если $F = \xi + i\eta = F(z)$, гдѣ $z = x + iy$, а

$\overline{F} = \xi - i\eta = F(z_1)$, гдѣ $z_1 = x - iy$, то:

$$D_{xy}\, F = O, \quad \overline{D}_{xy}\, \overline{F} = O, \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

и слѣд-о:

$$D_{xy}\, \overline{F} = 2 D_{xy}\, \xi = 2F'(z_1), \quad \overline{D}_{xy} F = 2\overline{D}_{xy}\, \xi = 2F'(z), \; . \; (7)$$

такъ какъ

$$\left.\begin{aligned} \overline{D}_{xy}\,\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} - i\frac{\partial \xi}{\partial y} = F'(z) \\ \text{и} \qquad D_{xy}\,\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + i\frac{\partial \xi}{\partial y} = F'(z_1) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

5) Если введемъ новыя перемѣнныя $\xi\,\eta$, положивъ:

$$\zeta = \xi + i\eta = f(\zeta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$D_{\xi\eta}\,F = D_{xy}\,F\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} + i\,\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) = D_{xy}\,F\,D_{\xi\eta}\,x \quad . \quad (10)$$

$$D_{\xi\eta}\,x\,\overline{D}_{\xi\eta}\,x = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{1}{h^2}, \quad . \; . \quad (11)$$

где

$$h^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2, \; . \; . \quad (12)$$

$$\overline{D}_{\xi\eta}\,x = \frac{\partial x}{\partial \xi} - i\,\frac{\partial x}{\partial \eta} = f'(\zeta)$$

$$D_{\xi\eta}\,x = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i\,\frac{\partial x}{\partial \eta} = f'(\zeta_1) \text{ и } f'(\zeta)\,f'(\zeta_1) = \frac{1}{h^2} \quad . \; . \quad (13)$$

При помощи символовъ

$$D_{xy} \text{ и } \overline{D}_{xy}$$

весьма просто производятся различныя вычисленія, относящіяся къ плоской задачѣ математической теоріи упругости.

Примѣры.

1. Найти рѣшеніе системы ур-ій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - \frac{\partial \beta}{\partial \eta} &= \frac{k_1}{h^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial \beta}{\partial \xi} &= \frac{k_2}{h^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

гдѣ k_1 и k_2 нѣкоторыя постоянныя.

Ур-ія (12) равносильны ур-ію:

$$D_{\xi\eta}(\alpha + i\beta) = \frac{k_1 + i\,k_2}{h^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$

и очевидно мы ему удовлетворимъ, положивъ:

$$\alpha + i\beta = \frac{k_1 + i k_2}{2} f'(\zeta) f(\zeta_1) \ , \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

т. к., составивъ отъ (16) символъ $D_{\xi\eta}$, мы въ силу (4) и (6) приведемъ его къ:

$$\frac{k_1 + i k_2}{2} f'(\zeta)\, D_{\xi\eta} f(\zeta_1),$$

а, т. к. въ силу (7) $D_{\xi\eta} f(\zeta_1) = 2 f'(\zeta_1)$, а въ силу (13) $f'(\zeta) f'(\zeta_1) = \frac{1}{h^2}$, (16) удовлетворитъ (15), а слѣд-о и (14).

2. При помощи свойствъ символовъ D и $\overline{D}$ можно изъ диф-ыхъ ур-ій плоской задачи въ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ (см. фор. (3) стр. 9) получить ур-ія этой задачи въ изотермическихъ координатахъ ξ, η (см. фор. (4) стр. 16).

Диф-ыя ур-ія въ прямолинейныхъ координатахъ (фор. (3) стр. 9) можно представить въ видѣ:

$$D_{xy}\left(2T + i\,(N_1 - N_2)\right) = -i\,\overline{D}_{xy}\,(N_1 + N_2), \quad . \quad (17)$$

т. к. изъ (17) слѣдуютъ ур-ія:

$$\frac{\partial\, 2T}{\partial x} - \frac{\partial\,(N_1 - N_2)}{\partial y} = -\frac{\partial\,(N_1 + N_2)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\, 2T}{\partial y} + \frac{\partial\,(N_1 - N_2)}{\partial x} = -\frac{\partial\,(N_1 + N_2)}{\partial x},$$

совпадающія съ фор. (3) стр. 9.

Если Θ будетъ уголъ образованный осью ξ съ осью x-овъ, то по фор. (10) стр. 10:

$$2\,U + i\,(P - Q) = [2\,T + i\,(N_1 - N_2)]\, e^{2\Theta i},$$

гдѣ P, Q, U нормальныя и тангенціальныя напряженія на площадки $\perp$-ыя къ осямъ криволинейныхъ координатъ ξ, η.

Ур-іе (17) можно слѣд-о переписать слѣдующимъ образомъ:

$$D_{xy}\left[\frac{2U+i(P-Q)}{h^2}h^2 e^{-2\theta i}\right]=-i\overline{D}_{xy}(P+Q), \quad (18)$$

т. к. $N_1+N_2=P+Q$.

Но (стр. 18): $\frac{1}{h}e^{\theta i}=\frac{dz}{d\zeta}=f'(\zeta)$

и изъ (18) мы найдемъ:

$$h^2 e^{-2\theta i} D_{xy}\left[\frac{2U+i(P-Q)}{h^2}\right]=-i\overline{D}_{xy}(P+Q) \quad . (19)$$

Имѣя въ виду, что въ силу (10):

$$D_{xy}F=\frac{D_{\xi\eta}F}{D_{\xi\eta}x},\quad \overline{D}_{xy}F=\frac{\overline{D}_{\xi\eta}F}{\overline{D}_{\xi\eta}x}$$

и что
$$\frac{D_{\xi\eta}x}{\overline{D}_{\xi\eta}x}=\frac{f'(\zeta_1)}{f'(\zeta)}=e^{-2\theta i} \quad . \ . \ . \quad (20)$$

такъ какъ

$$D_{\xi\eta}x=f'(\zeta_1)=\frac{1}{h}e^{-\theta i},\quad \overline{D}_{\xi\eta}x=f'(\zeta)=\frac{1}{h}e^{\theta i},$$

мы найдемъ изъ (19) при помощи (10) стр. 72:

$$D_{\xi\eta}\left[\frac{2U+i(P-Q)}{h^2}\right]=-i\frac{\overline{D}_{\xi\eta}(P+Q)}{h^2}\,e^{2\theta i}\,\frac{D_{\xi\eta}x}{\overline{D}_{\xi\eta}x}$$

или, т. к. въ силу (20) $e^{2\theta i}\frac{D_{\xi\eta}x}{\overline{D}_{\xi\eta}x}=1$,

$$D_{\xi\eta}\left[\frac{2U+i(P-Q)}{h^2}\right]=-i\frac{1}{h^2}\overline{D}_{\xi\eta}(P+Q),$$

откуда вытекаютъ ур-ія (4) стр. 16 плоской задачи теоріи упругости въ изотермическихъ координатахъ.

§ 15. Плоская задача математической теоріи упругости при заданныхъ перемѣщеніяхъ на контурѣ въ случаѣ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ. Общія выраженія для перемѣщеній точекъ тѣла.

Диф-ыя ур-ія равновѣсія упругого тѣла имѣютъ въ этомъ случаѣ видъ: *)

*) Love (№ 14) Ch. IX 144 (4) стр. 202.

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+2\mu)\frac{\partial\triangle}{\partial x}-2\mu\frac{\partial\omega}{\partial y}=0\\(\lambda+2\mu)\frac{\partial\triangle}{\partial y}+2\mu\frac{\partial\omega}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

гдѣ

$$\triangle=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},\qquad 2\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\quad\ldots\quad(2)$$

u и v проекціи перемѣщеній точекъ тѣла на оси координатъ, λ и μ коэф-ы упругости такъ, что

$$(\lambda+2\mu)\triangle+i2\mu\omega=P+iQ=\Phi_0(z)\quad.\ .\quad(3)$$

есть функція комплекснаго перемѣннаго $z=x+iy$. Замѣтимъ, что напряженія N_1, N_2, T связаны съ перемѣщеніями u, v уравненіями:

$$\left.\begin{aligned}N_1=\lambda\triangle+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\ N_2=\lambda\triangle+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\\T=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(4)$$

такъ что

$$N_1+N_2=2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=2(\lambda+\mu)\triangle\quad.\quad(5)$$

Въ § 2 (стр. 10) мы ввели функцію $\Phi(z)$ вещественная часть которой $=N_1+N_2$; изъ (5) и (3) слѣдуетъ:

$$\Phi_0(z)=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Phi(z)\,.\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

Само рѣшеніе плоской задачи при заданныхъ перемѣщеніяхъ на контурѣ приводится къ интегрированію ур-ій:

$$\left.\begin{aligned}\triangle=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\lambda+2\mu}P\\2\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mu}Q\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(7)$$

при условіи, что u и v заданы на контурѣ.

Ур-ія (7) подходятъ къ типу ур-ій (18) стр. 7 и по фор. (17) стр. 7 мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} v &= \alpha P - \beta Q + P_o \mathbf{P} + \varphi \\ u &= \beta P + \alpha Q + Q_o \mathbf{P} + \psi \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (8)$$

гдѣ φ и ψ сопряженныя функціи такъ, что

$$\varphi + i\psi = F(z),$$

$$\mathbf{P} = \int P\,dx - Q\,dy \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

есть вещественная часть функціи комлекснаго перемѣннаго

$$\int f(z)\,dz = \int (P + iQ)(dx + i\,dy) \quad . \ . \ . \quad (10)$$

$$h = O, \ \ H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\mu}\right), \ P_o = O, \ Q_o = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda + 2\mu}\right),$$

а α и β удовлетворяютъ диф-ымъ ур-іямъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\mu}\right) \\ &\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = O \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (11)$$

Чтобы удовлетворить (11) положимъ:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\mu}\right) y = -\frac{y}{2}\,\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)}, \ \beta = O$$

Мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{(\lambda + \mu)y}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\,Q + \frac{1}{2}\,\frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)}\,\mathbf{P} + \psi \\ v &= -\frac{(\lambda + \mu)y}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\,P + \varphi, \end{aligned}\right\} \ . \quad (12)$$

гдѣ $\qquad P + iQ = \Phi_o(z) = (\lambda + 2\mu)\triangle + i2\mu\omega,$

а $\mathbf{P} =$ вещественной части $\int \Phi_o(z)\,dz =$

$$= \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \text{ вещ. ч. } \int \Phi(z)\,dz$$

Ур-ія (12) можно переписать въ видѣ:

$$v + iu = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\,y(P + Qi) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)}\,\mathbf{P}i + \varphi + i\psi \quad . \ . \ . \quad (12 \text{ bis})$$

A. E. H. Love даетъ формулу ((9) стр. 203)

$$\left.\begin{aligned} u &= \mathbf{P}\,\frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\,y\,Q + \frac{\partial f}{\partial x} \\ v &= \mathbf{Q}\,\frac{1}{2(\lambda+2\mu)} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\,y\,P + \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (13)$$

гдѣ f удовлетворяетъ ур-iю

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Если мы положимъ въ (12):

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{Q}\,\frac{1}{2(\lambda+2\mu)} \\ \psi &= \frac{\partial f}{\partial x} - \mathbf{P}\,\frac{1}{2(\lambda+2\mu)}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

которыя очевидно сопряженныя, то въ фор. (12) приведутся къ виду (13).

Прежде чѣмъ переходить къ нѣкоторымъ слѣдствiямъ ур-iй (12) замѣтимъ, что эта теорiя легко обобщается на случай какихъ угодно изотермическихъ координатъ.

§ 16. Плоская задача математической теорiи упругости при заданныхъ перемѣщенiяхъ на контурѣ въ случаѣ изотермическихъ координатъ.

Задача приведется здѣсь къ интегрированiю уравненiй:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\triangle}{h^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{u}{h}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{v}{h}\right) \\ \frac{2\omega}{h^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{v}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{u}{h}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

причемъ

$$(\lambda + 2u)\triangle + i\,2\mu\omega = P + i\,Q = \Phi_0(\zeta) \quad . \quad . \quad (2)$$

есть функцiя комплекснаго перемѣннаго $\zeta = \xi + i\eta$, а ξ и η изотермическiя координаты точки такъ, что

$$z = f(\xi + i\eta) = f(\zeta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Ур-iя (1) могутъ быть переписаны въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u}{h}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{v}{h}\right)&=\frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{P}{h^2}\\ \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{v}{h}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{h}\right)&=\frac{1}{\mu}\frac{Q}{h^2}\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \quad (4)$$

Эти ур-ія мы приведемъ къ типу ур-ій (20) стр. 7:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{v}{h}\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u}{h}\right)&=h_1P_1-H_1Q_1+(P_1P_{11}-Q_1Q_{11})P_{01}\\ &\quad+(P_1Q_{11}+P_{11}Q_1)Q_{01}\\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{v}{h}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{h}\right)&=h_1Q_1+H_1P_1+(P_1P_{11}-Q_1Q_{11})Q_{01}\\ &\quad-(P_1Q_{11}+P_{11}Q_1)P_{01},\end{aligned}\right\}\;.\;(5)$$

если положимъ:

$$P_1=P,\quad Q_1=Q$$

$$P_{11}P_{01}+Q_{11}Q_{01}=-h_1,\quad \frac{1}{\mu h^2}=-H_1-Q_{11}P_{01}+P_{11}Q_{01}$$

$$P_{11}P_{01}+Q_{11}Q_{01}=h_1,\quad \frac{1}{(\lambda+2\mu)h^2}=H_1+P_{11}Q_{01}-Q_{11}P_{01}$$

или

$$h_1=O,\quad H_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right\}\frac{1}{h^2}$$

$$\left.\begin{aligned}P_{11}P_{01}+Q_{11}Q_{01}&=O\\ P_{11}Q_{01}-Q_{11}P_{01}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda+2\mu}\right)\frac{1}{h^2}\end{aligned}\right\}\quad . \; . \quad (6)$$

Чтобы найти P_{11}, Q_{11}, P_{01}, Q_{01}, удовлетворяющія (6), положимъ:

$$\left.\begin{aligned}P_{01}+iQ_{01}&=k\frac{dz}{d\zeta}=\frac{k}{h}e^{\theta i}\\ P_{11}+iQ_{11}&=-i\frac{dz}{d\zeta}=-\frac{i}{h}e^{\theta i}\end{aligned}\right\},\quad . \; . \; . \quad (7)$$

гдѣ $h=\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}$,

$$k=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\},$$

а O уголъ, образованный осью ξ съ осью x-овъ.

Въ самомъ дѣлѣ изъ (7) слѣдуетъ:

$$P_{01}+i\,Q_{01}=\frac{k}{h}\,e^{\theta i}$$

$$P_{11}-i\,Q_{11}=\frac{i}{h}\,e^{-\theta i}$$

и слѣдов-о, перемножая эти выраженія, мы найдемъ:

$$P_{11}\,P_{01}+Q_{11}\,Q_{01}+(P_{11}\,Q_{01}-P_{01}\,Q_{11})\,i=\frac{ki}{h^2}$$

т. е.

$$P_{11}\,P_{01}+Q_{11}\,Q_{01}=O$$

$$P_{11}\,Q_{01}-P_{01}\,Q_{11}=\frac{k}{h^2}$$

т. е. ур-ія (6).

По фор. (21) стр. 8 мы найдемъ слѣдующія выраженія для u и v, удовлетворяющихъ (5) или (4):

$$\left.\begin{aligned}\frac{v}{h}&=\alpha P-\beta Q+P_{01}\,\mathbf{P}_1+\varphi\\ \frac{u}{h}&=\beta P+\alpha\,Q+Q_{01}\,\mathbf{P}_1+\psi\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ (7\text{ bis})$$

гдѣ

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1&=\int(P\,P_{11}-Q\,Q_{11})\,d\xi-(P\,Q_{11}+P_{11}\,Q)\,d\eta\\ &=\int(P\,d\xi-Q\,d\eta)\,P_{11}-(P\,d\eta+Q\,d\xi)\,Q_{11}\end{aligned}$$

Это есть вещественная часть функціи комплекснаго перемѣннаго:

$$\begin{aligned}&\int(P+i\,Q)\,(P_{11}+i\,Q_{11})\,(d\xi+i\,d\eta)\\ &\qquad=-i\int(P+Q\,i)\,dz=-i\int\Phi_o(\zeta)\,dz,\end{aligned}$$

а α и β удовлетворяютъ ур-іямъ (10) стр. 4, которыя въ разсматриваемомъ случаѣ принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}+\frac{\partial\beta}{\partial\xi}=H_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right\}\frac{1}{h^2}\\ &\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}-\frac{\partial\beta}{\partial\eta}=h_1=O\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (8)$$

Эти ур-ія подходятъ къ типу ур-ій (14) стр. 72, если положимъ въ послѣднихъ:

$$k_1 = O, \quad k_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu} - \frac{1}{\mu}\right\}$$

и по фор. (16) стр. 73 мы найдемъ:

$$\alpha + i\beta = \frac{i}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu} - \frac{1}{\mu}\right\} f'(\zeta) f(\zeta_1) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Такимъ образомъ по фор. (7 bis) мы найдемъ:

$$\frac{1}{h}(v + iu) = (P + iQ)(\alpha + i\beta) + (P_{01} + iQ_{01})\,\mathbf{P}_1 + F(\zeta),$$

$$\text{гдѣ} \quad F(\zeta) = \varphi + i\psi$$

или

$$\frac{u}{h} - i\frac{v}{h} = (P + iQ)\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu} - \frac{1}{\mu}\right\} f'(\zeta) f(\zeta_1) -$$

$$- \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu} + \frac{1}{\mu}\right\}\mathbf{P}\; f'(\zeta) + \frac{1}{i}F(\zeta) \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ $\mathbf{P}$ есть вещественная часть функціи комплекснаго перемѣннаго

$$\int \Phi_0(\zeta)\, dz$$

§ 17. Законъ взаимности перемѣщеній и усилій въ плоской задачѣ математической теоріи упругости

Найденныя въ § 15 и § 16 общія выраженія для перемѣщеній указываютъ на замѣчательное свойство этихъ перемѣщеній, которое обнаруживается если сравнить съ ними общія выраженія для напряженій, полученныя нами въ §§ 2 и 3. Мы имѣли для напряженій формулу (7) стр. 16:

$$\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = i(\alpha + i\beta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta) \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ $$\alpha + i\beta = -\tfrac{1}{2} f(\zeta_1) f'(\zeta); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

вещественная часть функціи $\Phi(\zeta)$ равна $P + Q$. Сравнимъ съ (1) фор. (10) § 16 умноженную на $-if'(\zeta)$ и раздѣленную на $k_0 = \frac{1}{\lambda+2\mu} - \frac{1}{\mu}$ т. е. формулу:

$$-\frac{(v+iu)}{h\,k_o}f'(\zeta)-\frac{i}{2}\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\mathbf{P}f'(\zeta)^2=i\frac{(\alpha+i\beta)}{2}\Phi_o(\zeta)f'(\zeta)+F_o(\zeta), \quad . (3)$$

гдѣ $F_o(\zeta)=-\frac{1}{k_o}F(\zeta)f'(\zeta)$; $\mathbf{P}$ есть вещественная часть $\int\Phi_o(\zeta)\,dz$; $\Phi_o(\zeta)=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Phi(\zeta)$, а $\alpha+i\beta$ имѣетъ значеніе (2). Ур-іе (1) напишемъ въ видѣ:

$$\frac{2U+i(P-Q)}{h^2}-i\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}(P+Q)f'(\zeta)^2+i\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}(P+Q)f'(\zeta)^{2*})=$$

$$=i(\alpha+i\beta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}+F(\zeta) \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Сравнивая (3) съ (4), мы видимъ, что, если положимъ

$$\Phi_o(\zeta)f'(\zeta)=\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta},\ 2F_o(\zeta)=F(\zeta) \quad . \; . \; . \quad (5)$$

$$-\frac{2(v+iu)}{h\,k_o}f'(\zeta)=\frac{2U+i(P-Q)}{h^2}+i\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}(P+Q)f'(\zeta)^2, \quad . (6)$$

то (3) и (4) совпадутъ. Имѣя въ виду, что

$$f'(\zeta)=\frac{1}{h}e^{\theta i},\quad f'(\zeta)^2=\frac{1}{h^2}e^{2\theta i}$$

гдѣ θ-уголъ, образованный осью ξ съ какой нибудь произвольно взятой осью ox, мы перепишемъ ур-іе (6) въ видѣ:

$$-2(v+iu)\frac{1}{k_o}e^{\theta i}=2U+i(P-Q)+i\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}(P+Q)e^{2\theta i} \quad . . (7)$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{k_o}(u\,Sin\,\theta-v\,Cos\theta)&=2U-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}(P+Q)\,Sin2\theta\\ &\text{и}\\ -\frac{2}{k_o}(v\,Sin\,\theta+u\,Cos\theta)&=P-Q+\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}(P+Q)\,Cos2\theta\end{aligned}\right\}(8)$$

*) Эти P и Q (напряженія) не слѣдуетъ смѣшивать съ P и Q § 16.

Такимъ образомъ, если въ 2-хъ плоскихъ задачахъ перемѣщенія и усилія связаны ур-іями (8), то основныя функціи комплекснаго перемѣннаго связаны въ нихъ соотношеніемъ:

$$\Phi_0(\zeta)\, f'(\zeta) = \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$2\, F_0(\zeta) = F(\zeta)$$

Мы получимъ простѣйшую форму этого закона, если сравнимъ съ (12 bis) стр. 76 т. е. съ формулой:

$$v + iu = -\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\, y\, (P + iQ) +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\, \mathbf{P} i + \varphi + i\psi \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

формулу (8) стр. 10, въ которой положимъ $\alpha + i\beta = iy$:

$$2T + i(N_1 - N_2) = -y\, \frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z) \quad . \quad . \quad (11)$$

переписанною въ видѣ

$$(2T + i(N_1 - N_2))\, \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} + \frac{1}{2}\, \frac{\lambda+3\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\, (P+Q)\, i =$$

$$= -y\, \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\, \frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z)\, \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \frac{\lambda+3\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\, (P+Q)\, i \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Изъ сравненія (10) и (12) вытекаетъ, что въ этихъ 2-хъ задачахъ перемѣщенія и усилія связаны соотношеніемъ:

$$v + iu = (2T + i(N_1 - N_2))\, \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} + \frac{1}{2}\, \frac{\lambda+3\mu}{\mu(\lambda+2\mu)} (P+Q) i$$

или

$$v = 2T\, \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} = T\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+2\mu}\right)$$

$$u = (N_1 - N_2)\, \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} + \frac{1}{2}\, \frac{\lambda+3\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\, (P+Q) =$$

$$= \frac{N_1}{\mu} + \frac{N_2}{\lambda + 2\mu}$$

а основныя функціи соотношеніями:

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \Phi_0(\zeta), \quad \varphi + i\psi = F(z)\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} \quad . \quad . \quad (13)$$

Различные частные случаи примѣненія настоящаго пріема мы дадимъ въ особомъ мемуарѣ.

§ 18. Объ одной формѣ дифференціальныхъ уравненій плоской задачи математической теоріи упругости въ изотермическихъ координатахъ.

Дифференціальныя уравненія плоской задачи математической теоріи упругости въ изотермическихъ координатахъ имѣютъ видъ (фор. (1) стр. 15):

$$\left. \begin{aligned} h^2 \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{P}{h}\right) + h^3 \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{U}{h^2}\right) + Q\frac{\partial h}{\partial\xi} = 0 \\ h^3 \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{U}{h^2}\right) + h^2 \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{Q}{h}\right) + P\frac{\partial h}{\partial\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Эти ур-ія можно представить въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h}\left\{2U\frac{\partial h}{\partial\eta} + (P-Q)\frac{\partial h}{\partial\xi}\right\} = \frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{\partial U}{\partial\eta} \\ \frac{1}{h}\left\{2U\frac{\partial h}{\partial\xi} + (Q-P)\frac{\partial h}{\partial\eta}\right\} = \frac{\partial Q}{\partial\eta} + \frac{\partial U}{\partial\xi} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Умножая 2-ое изъ ур-iй (2) на i и складывая съ 1-ымъ, найдемъ:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial\eta} + i\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)(2U - i(P-Q)) = \frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{\partial P}{\partial\xi} + $$
$$+ i\left(\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

а, замѣняя i на $-i$:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial\eta} - i\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)(2U + i(P-Q)) = \frac{\partial U}{\partial\eta} + \frac{\partial P}{\partial\xi} - i\left(\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\right) \quad . \quad . (4)$$

Имѣя въ виду (стр. 18), что

$$f'(\zeta)=\frac{1}{h}e^{\theta i}$$

и слѣд-о:

$$lg f'(\zeta)=-lg h+i\theta,$$

найдемъ

$$\frac{d\,lg f'(\zeta)}{d\zeta}=\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=\frac{\partial}{\partial\xi}[-lgh]-i\frac{\partial}{\partial\eta}[-lg h]=$$

$$=\frac{1}{h}\left(i\frac{\partial h}{\partial\eta}-\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)=\frac{i}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial\eta}+i\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)\quad .\quad .\quad (4)$$

и слѣд-о ур-іе (3) можно переписать въ видѣ:

$$\frac{d\,lg f'(\zeta)}{d\zeta}(2U-i(P-Q))=i\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial P}{\partial\xi}+i\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)\right)\quad .\quad (6)$$

или

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(2U-i(P-Q))=i\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial P}{\partial\xi}+i\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)\right)\quad .\quad .\quad (7)$$

Это есть форма диф-ыхъ ур-ій плоской задачи, въ которой эти ур-ія намъ впослѣдствіи понадобятся.

§ 19. Объ опредѣленіи перемѣщеній по напряженіямъ въ плоской задачѣ математической теоріи упругости въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ.

Если u, v будетъ проекціи перемѣщеній на оси координатъ, то

$$\left.\begin{aligned}N_1&=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\\N_2&=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (1)$$

$$T=\mu\left\{\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right\}\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (2)$$

$$\Omega = N_1 + N_2 = 2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Если $\overline{\Omega}$ будетъ функція сопряженная съ Ω, то въ силу ур-ій (1) стр. 75:

$$\overline{\Omega} + C^{*}) = \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad . \quad . \quad (3)$$

Изъ ур-ій (1), (2) и (3) мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\mu}\left\{N_1 - \frac{\lambda\Omega}{2(\lambda+\mu)}\right\}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu}T - \frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}\overline{\Omega} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu}\left\{N_2 - \frac{\lambda\Omega}{2(\lambda+\mu)}\right\}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2\mu}T + \frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}\overline{\Omega} \end{aligned}\right\} . \quad (4)$$

Ур-ія (4) требуютъ условій:

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial y}$$

или, имѣя въ виду, что

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = -\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x}$$

условій: $\quad \dfrac{\partial N_1}{\partial y} - \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial N_2}{\partial x} - \dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial x}$

или $\quad \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T}{\partial x} = O, \quad \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T}{\partial y} = O,$

которыя выполнены въ силу диф-ыхъ ур-ій плоской задачи (ур-ія (1) стр. 9); u и v найдутся тогда изъ ур-ій (4) по правиламъ интегрированія полныхъ дифференціаловъ.

§ 20. Объ опредѣленіи перемѣщеній по напряженіямъ въ плоской задачѣ теоріи упругости въ криволинейныхъ изотермическихъ координатахъ.

Если $u_{\xi\eta}$ и $v_{\xi\eta}$ проекціи перемѣщеній на оси ξ, η, то

---

*) C — постоянная; мы не будемъ въ дальнѣйшемъ вездѣ явно ее выписывать, предполагая, что она заключена въ знакъ $\overline{\Omega}$.

$$\frac{\triangle}{h^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u_{\xi\eta}}{h}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{v_{\xi\eta}}{h}\right)\quad .\ .\ .\ .\ .\quad (1)$$

$$\frac{2\omega}{h^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{v_{\xi\eta}}{h}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u_{\xi\eta}}{h}\right)\quad .\ .\ .\ .\ .\quad (2)$$

причемъ

$$(\lambda+2\mu)\triangle+i2\mu\omega=$$

функціи комплекснаго перемѣннаго $\zeta=\xi+i\eta$. Если P, Q, U будутъ нормальныя и тангенціальное напряженія на площадки $\perp$-ыя съ осямъ ξ, η (см. § 3 и § 18), то

$$\frac{1}{\mu}U=\frac{\partial}{\partial\xi}(v_{\xi\eta}h)+\frac{\partial}{\partial\eta}(u_{\xi\eta}h)\quad .\ .\ .\ .\quad (3)$$

$$\frac{1}{2\mu}(P-Q)=\frac{\partial}{\partial\xi}(u_{\xi\eta}h)-\frac{\partial}{\partial\eta}(v_{\xi\eta}h)\quad .\ .\ .\quad (4)$$

Т. к.

$$\triangle=\frac{P+Q}{2(\lambda+\mu)},\ \text{а}\ 2\omega=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\ \text{сопряж.}\ \triangle=\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)\mu}\overline{P+Q},$$

гдѣ $\overline{P+Q}$ есть функція сопряженная съ $P+Q$, то ур-ія (1) и (2) примутъ видъ:

$$\frac{P+Q}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{h^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{u_{\xi\eta}}{h}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{v_{\xi\eta}}{h}\right)\quad .\ .\quad (1\ \text{bis})$$

$$\frac{(\lambda+2\mu)(\overline{P+Q})}{2(\lambda+\mu)\mu}\frac{1}{h^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{v_{\xi\eta}}{h}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u_{\xi\eta}}{h}\right)\quad .\ .\quad (2\ \text{bis})$$

Ур-ія (3), (4), (1 bis), (2 bis) легко вывести при помощи свойствъ D и $\overline{D}$ изъ формулъ § 19 для прямоугольныхъ координатъ. Въ самомъ дѣлѣ изъ фор. (4) § 19 (стр. 85) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}&=\frac{1}{2\mu}\left\{N_1-\frac{\lambda(P+Q)}{2(\lambda+\mu)}+i\left(T+\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\overline{P+Q}\right)\right\}\\ \frac{\partial(u+iv)}{\partial y}&=\frac{1}{2\mu}\left\{T-\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\overline{P+Q}+i\left(N_2-\frac{\lambda(P+Q)}{2(\lambda+\mu)}\right)\right\}\end{aligned}\right\}(3\ \text{bis})$$

и слѣд-о:

$$D_{xy}(u+iv)=\frac{1}{2\mu}\{N_1-N_2+2iT\} \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\overline{D_{xy}}(u+iv)=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\{N_1+N_2\}+\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}i\,\overline{(P+Q)}=$$

$$=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left\{(P+Q)+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}i\,\overline{(P+Q)}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

Имѣемъ:

$$u+iv=(u_{\xi\eta}+iv_{\xi\eta})e^{i\theta} \quad . \quad . \quad . \quad (6\text{ bis})$$

и по фор. (10) и (13) стр. 72:

$$D_{xy}(u+iv)=\frac{D_{\xi\eta}[(u_{\xi\eta}+iv_{\xi\eta})e^{i\theta}]}{\frac{1}{h}e^{-i\theta}} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

или, имѣя въ виду, что въ силу (5):

$$D_{xy}(u+iv)=\frac{1}{2\mu}\{N_1-N_2+2iT\}=\frac{i}{2\mu}\{2T-i(N_1-N_2)\}=$$

$$=\frac{i}{2\mu}\{2U-i(P-Q)\}e^{2i\theta} \quad . \quad . \quad . \quad (7\text{ bis})$$

(фор. 10 стр. 10) и

$$D_{\xi\eta}[(u_{\xi\eta}+iv_{\xi\eta})e^{i\theta}]=D_{\xi\eta}[u_{\xi\eta}h+iv_{\xi\eta}h)\frac{1}{h}e^{i\theta}]=$$

$$=\frac{1}{h}e^{i\theta}\ D_{\xi\eta}(u_{\xi\eta}h+iv_{\xi\eta}h)$$

т. к.
$$D_{\xi\eta}\left(\frac{1}{h}e^{i\theta}\right)=D_{\xi\eta}\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)=0$$

(см. фор. (6) стр. 71) найдемъ изъ (7):

$$D_{\xi\eta}(u_{\xi\eta}h+iv_{\xi\eta}h)=\frac{i}{2\mu}(2U-i(P-Q))$$

т. е.

$$\frac{\partial u_{\xi\eta}h}{\partial\xi}-\frac{\partial v_{\xi\eta}h}{\partial\eta}=\frac{P-Q}{2\mu};\quad \frac{\partial u_{\xi\eta}h}{\partial\eta}+\frac{\partial v_{\xi\eta}h}{\partial\xi}=\frac{U}{\mu}$$

т. е. фор. (4) и (3).

Точно также

$$\overline{D}_{xy}(u+iv)=\frac{\overline{D}_{\xi\eta}(u_{\xi\eta}+iv_{\xi\eta})\,e^{i\theta}}{\frac{1}{h}e^{\theta i}}\quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

или, имѣя въ виду, что въ силу (6):

$$\overline{D}_{xy}(u+iv)=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left\{(P+Q)+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\,i\,\overline{(P+Q)}\right\}.\ (8\text{ bis})$$

и $\overline{D}_{\xi\eta}(u_{\xi\eta}+iv_{\xi\eta})\,e^{i\theta}=\overline{D}_{\xi\eta}\left(\left(\frac{u_{\xi\eta}}{h}+i\,\frac{v_{\xi\eta}}{h}\right)h\,e^{i\theta}\right)=$

$$=h\,e^{i\theta}\,\overline{D}_{\xi\eta}\left(\frac{u_{\xi\eta}}{h}+i\,\frac{v_{\xi\eta}}{h}\right),$$

т. к. (фор. (6) стр. 71) $\overline{D}_{\xi\eta}(h\,e^{i\theta})=\overline{D}_{\xi\eta}\left(\frac{1}{\frac{1}{h}e^{-i\theta}}\right)=0$

найдемъ

$$\overline{D}_{\xi,\eta}\left(\frac{u_{\xi\eta}}{h}+i\frac{v_{\xi\eta}}{h}\right)=\frac{1}{2h^2(\lambda+\mu)}\left\{(P+Q)+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\,i\,\overline{(P+Q)}\right\}$$

т. е.

$$h^2\left(\frac{\partial\left(\frac{u_{\xi\eta}}{h}\right)}{\partial\xi}+\frac{\partial\left(\frac{v_{\xi\eta}}{h}\right)}{\partial\eta}\right)=\frac{(P+Q)}{2(\lambda+\mu)}$$

$$h^2\left(\frac{\partial\left(\frac{v_{\xi\eta}}{h}\right)}{\partial\xi}-\frac{\partial\left(\frac{u_{\xi\eta}}{h}\right)}{\partial\eta}\right)=\frac{\lambda+2\mu}{(\lambda+\mu)\,2\mu}\overline{(P+Q)}$$

т. е. формулы 1 bis и 2 bis.

Переходя къ вопросу объ интегрированіи ур-ій (3), (4), (1 bis), (2 bis), т. е. къ опредѣленію перемѣщеній по напряженіямъ, имѣемъ [фор. (7 bis) и (8 bis)]:

$$D_{xy}(u+iv)=\frac{i}{2\mu}\{2U-i(P-Q)\}\,e^{2\theta i}\quad . \quad . \quad (9)$$

$$\overline{D}_{xy}(u+iv)=\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left\{P+Q+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\,i\,\overline{(P+Q)}\right\},\quad . \quad (10)$$

а, такъ какъ:

$$D_{xy}(u+iv) = h e^{i\theta} D_{\xi\eta}(u+iv)$$
$$\overline{D}_{xy}(u+iv) = h e^{-i\theta} \overline{D}_{\xi\eta}(u+iv)$$

то (9) и (10) дадутъ:

$$D_{\xi\eta}(u+iv) = \frac{i}{2\mu h}\{2U - i(P-Q)\} e^{\theta i}$$

$$\overline{D}_{\xi\eta}(u+iv) = \frac{1}{2(\lambda+\mu)h}\left\{P + Q + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} i\,\overline{(P+Q)}\right\} e^{\theta i}$$

Отсюда, складывая эти ур-iя и вычитая:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial}{\partial\xi}(u+iv) &= \frac{1}{2h}\left\{\frac{i}{\mu}(2U - i(P-Q)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda+\mu}\left(P+Q+\frac{\lambda+2\mu}{\mu} i\,\overline{(P+Q)}\right)\right\} e^{\theta i} \\ 2\frac{\partial}{\partial\eta}(u+iv) &= \frac{1}{2h}\left\{\frac{1}{\mu}(2U - i(P-Q)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda+\mu}\left(i(P+Q) - \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\overline{(P+Q)}\right)\right\} e^{\theta i} \end{aligned}\right\} . \quad (11)$$

Легко видѣть, что здѣсь выполнено условiе интегрируемости т. е. (т. к. $\frac{1}{h}e^{\theta i} = f'(\zeta)$) условiе:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\left[\frac{i}{\mu}(2U - i(P-Q)) + \frac{1}{\lambda+\mu}\left(P+Q + \right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left. + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} i\,\overline{(P+Q)}\right)\right] f'(\zeta)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\left[\frac{1}{\mu}(2U - i(P-Q)) + \frac{1}{\lambda+\mu}\left(i(P+Q) - \right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left. - \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\overline{(P+Q)}\right)\right] f'(\zeta)\right\} \end{aligned}\right\} . \quad (12)$$

Въ самомъ дѣлѣ, выполняя дифференцированiя и, замѣчая, что

$$\frac{\partial(P+Q)}{\partial\xi}=\frac{\partial\overline{(P+Q)}}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial(P+Q)}{\partial\eta}=-\frac{\partial\overline{(P+Q)}}{\partial\xi},$$

мы приведемъ (12) къ виду

$$\frac{i}{\mu}\left(2\frac{\partial U}{\partial\eta}-i\frac{\partial P}{\partial\eta}+i\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{\lambda+\mu}\left(\frac{\partial(P+Q)}{\partial\eta}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}i\frac{\partial\overline{(P+Q)}}{\partial\xi}\right)-$$

$$-\frac{1}{\mu}\left(2\frac{\partial U}{\partial\xi}-i\frac{\partial P}{\partial\xi}+i\frac{\partial Q}{\partial\xi}\right)-\frac{1}{\lambda+\mu}\left(i\frac{\partial(P+Q)}{\partial\xi}+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial\overline{(P+Q)}}{\partial\eta}\right)=$$

$$=\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Bigg[\frac{1}{\mu}(2U-i(P-Q))-\frac{i}{\lambda+\mu}\Big(P+Q+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}i\overline{(P+Q)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(2U-i(P-Q))+\frac{1}{\lambda+\mu}\Big(i(P+Q)-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\overline{(P+Q)}\Big)\Bigg]$$

или послѣ сокращеній къ виду:

$$i\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial P}{\partial\xi}+i\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)\right)=\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(2U-i(P-Q)), \quad . \quad (13)$$

совпадающему съ ур-іемъ (7) § 18 (стр. 84).

Такимъ образомъ при помощи (11), интегрируя полный дифференціалъ

$$d\,(u+iv)$$

мы найдемъ $u+iv$, а тогда по фор. (6 bis) мы найдемъ:

$$u_{\xi\eta}+i\,v_{\xi\eta}=(u+iv)\,e^{-i\theta}=\frac{u+iv}{h}\,\frac{1}{f'(\zeta)}$$

Точно также:

$$u_{\xi\eta}-i\,v_{\xi\eta}=(u-iv)\,e^{i\theta}=(u-iv)\,h\,f'(\zeta)\ \text{такъ что:}$$

$$\frac{u_{\xi\eta}}{h}-i\frac{v_{\xi\eta}}{h}=(u-iv)\,f'(\zeta)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

§ 21. Примѣръ опредѣленія перемѣщеній по заданнымъ напряженіямъ въ изотермическихъ координатахъ.

Возьмемъ случай на стр. 25, гдѣ были получены выраженія для напряженій въ эллиптическихъ координатахъ:

$$f'(\zeta) = c\,Sin h\,(\xi + i\,\eta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\Omega = P + Q = \Sigma\, A_m\, e^{m\xi}\, Cos\, m\eta + B_m\, e^{m\xi}\, Sin\, m\eta,$$

$$\overline{\Omega} = \overline{P + Q} = \Sigma\, A_m\, e^{m\xi}\, Sin\, m\eta - B_m\, e^{m\xi}\, Cos\, m\eta + C$$

$$\frac{2U}{h^2} = \frac{c^2}{4}\,\Sigma\, m\{\, A_m\, e^{m\xi}\, (Sin\, 2\eta\ Cos\, m\eta + Sin\, h\, 2\xi\ Sin\, m\eta) +$$

$$+ B_m\, e^{m\xi}\, (Sin\, 2\eta\ Sin\, m\eta - Sin\, h\, 2\xi\ Cos\, m\eta)\,\} + \varphi$$

$$\frac{P - Q}{h^2} = \frac{c^2}{4}\,\Sigma\, m\{\, A_m\, e^{m\xi}\, (Sin\, 2\eta\ Sin\, m\eta - Sin\, h\, 2\xi\ Cos\, m\eta) -$$

$$- B_m\, e^{m\xi}\, (Sin\, 2\eta\ Cos\, m\eta - Sin\, 2\, h\xi\ Sin\, m\eta)\,\} + \psi$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(u + i\,v) = \frac{c}{4}\ Sin\, h\,(\xi + i\eta)\ \Big\{\frac{i}{\mu}\,(2U - i\,(P - Q)) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda + \mu}((\Sigma\, A_m\, e^{m\xi}\, Cos\, m\eta + B_m\, e^{m\xi}\, Sin\, m\eta) +$$

$$+ \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\, i\,(A_m\, e^{m\xi}\, Sin\, m\eta - B_m\, e^{m\xi}\, Cos\, m\eta + C))\Big\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(u + iv) = \frac{c}{4}\, Sin\, h\,(\xi + i\,\eta)\Big\{\frac{1}{\mu}\,(2U - i\,(P - Q)) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda + \mu}(\Sigma\, i\,(A_m\, e^{m\xi}\, Cos\, m\eta + B_m\, e^{m\xi}\, Sin\, m\eta) -$$

$$- \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\,(A_m\, e^{m\xi}\, Sin\, m\eta - B_m\, e^{m\xi}\, Cos\, m\eta + C))\Big\}$$

Имѣя въ виду, что (фор. (7) стр. 16):

$$\frac{2U + i\,(P - Q)}{h^2} = i\,(\alpha + i\beta)\,\frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta) \quad . \quad . \quad (2)$$

мы найдемъ, замѣняя i на $-i$:

$$\frac{2U - i(P-Q)}{h^2} = -i(\alpha - i\beta)\frac{d\Phi(\zeta_1)}{d\zeta_1} + F(\zeta_1), \quad . \ (3)$$

гдѣ $\zeta_1 = \xi - i\eta$; здѣсь α и β удовлетворяютъ ур-іямъ (6) стр. 16:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} - \frac{\partial\beta}{\partial\eta} &= -\frac{1}{h^2} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} + \frac{\partial\beta}{\partial\xi} &= O \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ (см. § 5 стр. 24) мы можемъ положить:

$$\alpha + i\beta = -\frac{c^2}{4}(Sin h\, 2\xi + i\, Sin\, 2\eta),$$

$$\alpha - i\beta = -\frac{c^2}{4}(Sin h\, 2\xi - i Sin 2\eta) = -\frac{c^2}{2}\, Cos h(\xi + i\eta)\, Sin h(\xi - i\eta)$$

и $$\frac{1}{h^2} = f'(\zeta)\, f'(\zeta_1) = c^2\, Sin h\,(\xi + i\eta)\, Sin h\,(\xi - i\eta)$$

Выраженія $\dfrac{\partial(u+iv)}{\partial\xi}$ и $\dfrac{\partial(u+iv)}{\partial\eta}$ примутъ тогда видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi}(u+iv) = \\
&= \frac{c}{4} Sin h\,(\xi + i\eta)\left\{-\frac{c^2}{4\mu}h^2(Sin h 2\xi - i\, Sin 2\eta)\frac{d\Phi(\zeta_1)}{d\zeta_1} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{i}{\mu}h^2 F(\zeta_1) + \frac{1}{\lambda+\mu}\Omega + \frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\, i\,\bar{\Omega}\right\} = \\
&= \frac{c}{4}\left\{-\frac{1}{2\mu}\, Cos h\,\zeta\frac{d\Phi(\zeta_1)}{d\zeta_1} + \frac{i}{\mu c^2}\,\frac{F(\zeta_1)}{Sin h\,\zeta_1} - \right. \\
&\left. -\frac{1}{2\mu}Sin h\zeta\,\Phi(\zeta_1) + \frac{1}{\lambda+\mu}Sin h\,\zeta\,\Phi(\zeta) + \frac{1}{2\mu}Sin h\,\zeta\,\Phi(\zeta)\right\} \\
&\frac{\partial}{\partial\eta}(u+iv) =
\end{aligned}\right\} \ . \ . \ (5)$$

$$= \frac{c}{4} Sin\,h\,(\xi + i\,\eta) \left\{ \frac{i\,c^2}{4\mu} h^2 (Sin\,h\,2\xi - i\,Sin\,2\eta) \frac{d\,\Phi(\zeta_1)}{d\zeta_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{\mu} F(\zeta_1) + \frac{1}{\lambda + \mu}\, i\, \Omega - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \overline{\Omega} \right\} =$$

$$= \frac{c}{4} \left\{ \frac{i}{2\mu} Cos\,h\,\zeta \frac{d\,\Phi\,(\zeta_1)}{d\zeta_1} + \frac{1}{\mu\,c^2} \frac{F(\zeta_1)}{Sin\,h\,\zeta_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{2\mu} Sin\,h\,\zeta\,\Phi(\zeta_1) + \frac{i}{\lambda + \mu} Sin\,h\,\zeta\,\Phi\,(\zeta) + \frac{i}{2\mu} Sin\,h\zeta\,\Phi(\zeta) \right\}$$

Выраженія (5) показываютъ, что

$$u + i\,v = \frac{c}{4} \left\{ - \frac{1}{2\mu} Cos\,h\,\zeta\,\Phi\,(\zeta_1) + \frac{i}{\mu\,c^2} \int \frac{F(\zeta_1)\,d\zeta_1}{Sin\,h\,\zeta_1} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\lambda + \mu} + \frac{1}{2\mu} \right) \int Sin\,h\,\zeta\,\Phi\,(\zeta)\,d\zeta \right\} + const \quad . \quad . \quad (6)$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\Phi\,(\zeta) = \sum_m (A_m - i\,B_m)\,e^{m\zeta} + i\,C$$

то, полагая

$$F(\zeta) = \sum_m (a_m - i\,b_m)\,e^{m\zeta},$$

мы легко выполнимъ квадратуры въ (6), т. к.

$$\int \frac{F\,(\zeta_1)\,d\zeta_1}{Sin\,h\,\zeta_1} = 2 \sum_m (a_m + i\,b_m) \int \frac{e^{m\zeta_1}\,d\zeta_1}{e^{\zeta_1} - e^{-\zeta_1}} =$$

$$= \sum_m (a_m + i\,b_m) \int \frac{Z^m\,dZ}{Z^2 - 1}, \quad \text{гдѣ } Z = e^{\zeta_1}$$

$$= 2 \sum_m (a_m + i b_m) \left(\frac{Z^{m-1}}{m-1} + \frac{Z^{m-3}}{m-3} + \ldots + \frac{Z^2}{2} + lg \sqrt{Z^2 - 1} \right)$$

при m нечетномъ

и

$$= 2 \sum_m (a_m + i\,b_m) \left(\frac{Z^{m-1}}{m-1} + \frac{Z^{m-3}}{m-3} + \ldots + Z + lg \sqrt{\frac{Z-1}{Z+1}} \right)$$

при m четномъ

$$\int Sin\,h\,\zeta\,\Phi(\zeta)\,d\zeta = \sum_m (A_m - i\,B_m)\int e^{m\zeta}\,Sin\,h\,\zeta\,d\zeta + i\,C\,Cos\,h\zeta$$

$$= \sum_m \tfrac{1}{2}(A_m - i\,B_m)\left[\frac{e^{(m+2)\zeta}}{m+2} - \frac{e^{(m-2)\zeta}}{m-2}\right] + i\,C\,Cos\,h\zeta$$

Опредѣленіе перемѣщеній по напряженіямъ удобнѣе впрочемъ дѣлать при помощи общихъ выраженій перемѣщеніи при заданныхъ напряженіяхъ, къ которымъ мы и переходимъ.

§ 22. Общія выраженія для перемѣщеній при заданныхъ напряженіяхъ въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ.

Мы имѣли (стр. 86 фор. (3 bis)) для прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(u+i\,v)}{\partial x} &= \frac{1}{2\mu}\left\{N_1 - \frac{\lambda\,\Omega}{2(\lambda+\mu)} + iT + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\,\bar{\Omega}\,i\right\} \\ \frac{\partial(u+i\,v)}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu}\left\{T - \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\,\bar{\Omega} + i\left(N_2 - \frac{\lambda\,\Omega}{2(\lambda+\mu)}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

гдѣ $\Omega = N_1 + N_2$, $\bar{\Omega}$ функція сопряженная съ Ω.

По фор. (8) стр. 10 мы имѣемъ:

$$2T + i(N_1 - N_2) = i(\alpha + i\beta)\frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z) \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ α и β удовлетворяютъ ур-іямъ (5) стр. 9:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y} = -1\,, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$\Phi(z)$ есть функція комплекснаго перемѣннаго, вещественная часть которой $N_1 + N_2$ т. е. $\Phi(z) = \Omega + i\,\bar{\Omega}$.

Изъ (2) слѣдуетъ:

$$2T - i(N_1 - N_2) = 2T + i(N_2 - N_1) =$$

$$= -i(\alpha - i\beta)\frac{d\Phi(z_1)}{dz_1} + F(z_1)\,, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ $z_1 = x - iy$. Подставляя (4) въ (1), мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} &= \frac{1}{2\mu}\left\{\frac{1}{2}(\alpha - i\beta)\frac{d\Phi(z_1)}{dz_1} + \right.\\ &\left. + \tfrac{1}{2} i F(z_1) + \frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}(\Omega + i\overline{\Omega}) + \tfrac{1}{2}\overline{\Omega} i\right\}\\ \frac{\partial(u+iv)}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu}\left\{-\frac{i}{2}(\alpha - i\beta)\frac{d\Phi(z_1)}{dz_1} + \right.\\ &\left. + \tfrac{1}{2} F(z_1) - \frac{\mu}{2(\lambda+u)}(\overline{\Omega} - i\Omega) - \tfrac{1}{2}\overline{\Omega}\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \text{(5)}$$

Легко видѣть, что можно положить:

$$u+iv = \frac{1}{2\mu}\left\{\tfrac{1}{2}(\alpha - i\beta)\Phi(z_1) + \tfrac{1}{2} i\int F(z_1)\,dz_1 + \chi(z) + \chi_1(z_1)\right\}, \quad . \text{(6)}$$

гдѣ $\chi(z)$ и $\chi_1(z_1)$ двѣ надлежащимъ образомъ выбранныя функціи отъ z и отъ z_1. Въ самомъ дѣлѣ, составляя отъ (6) частныя производныя по x и по y и приравнивая ихъ (5), мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\chi'(z) + \chi_1'(z_1) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - i\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\Phi(z_1) &= \\ + \frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}&(\Omega + i\overline{\Omega}) + \tfrac{1}{2}\overline{\Omega} i\\ i\chi'(z) - i\chi_1'(z_1) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - i\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\Phi(z_1) &= \\ = -\frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}&(\overline{\Omega} - i\Omega) - \tfrac{1}{2}\overline{\Omega}\end{aligned}\right\} \quad .. \text{(7)}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}2\chi'(z) + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y} - i\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right]\Phi(z_1) &= \\ = \frac{\mu}{(\lambda+\mu)}&(\Omega + i\overline{\Omega}) + \overline{\Omega} i\\ 2\chi_1'(z_1) + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} - i\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right]\Phi(z_1) &= 0\end{aligned}\right\} \quad .. \text{(8)}$$

или, принимая во вниманіе (3):

$$\left.\begin{aligned} 2\chi'(z) &= \frac{\lambda+3\mu}{2(\lambda+\mu)}\Phi(z) \\ 2\chi_1'(z_1) &= \frac{i}{2}\Phi(z_1)\left\{\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}+i\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (9)$$

Но

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}-i\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

есть функція комплекснаго перемѣннаго $z=x+iy$, т. к. въ силу (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) &= \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

т. е. соблюдены условія, чтобы (10) было нѣкоторой функціей комплекснаго перемѣннаго $z=x+iy$; если эту функцію мы обозначимъ черезъ $\psi(x+iy)$, то

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}+i\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)=\psi(x-iy)$$

и слѣд-о (9) приметъ видъ:

$$2\chi'(z)=\frac{\lambda+3\mu}{2(\lambda+\mu)}\Phi(z)$$

$$2\chi_1'(z_1)=\frac{i}{2}\Phi(z_1)\,\psi(z_1)$$

и слѣд-о (7) намъ дастъ:

$$u+iv=\frac{1}{2\mu}\left\{\tfrac{1}{2}(\alpha-i\beta)\,\Phi(z_1)+\tfrac{1}{2}\,i\int F(z_1)\,dz_1+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+\mu)}\int\Phi(z)\,dz+\frac{i}{4}\int\Phi(z_1)\,\psi(z_1)\,dz_1\right\}, \quad . \quad (11)$$

$$\text{гдѣ} \quad \psi(z)=\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}-i\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) \quad . \; . \quad (12)$$

Замѣтимъ, что общее рѣшеніе ур-ій (3) можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\alpha + i\beta = \alpha_0 + i\beta_0 + \mathfrak{F}(z)$$

гдѣ

$$\alpha_0 + i\beta_0 = -\frac{x - iy}{2},$$

и мы найдемъ изъ (12):

$$\psi(z) = -2i\mathfrak{F}'(z)$$

и (11) приметъ видъ:

$$u + iv = \frac{1}{2\mu}\left\{\tfrac{1}{2}(\alpha - i\beta)\,\Phi(z_1) + \tfrac{1}{2}i\int F(z_1)\,dz_1 + \right.$$

$$\left.\frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda+\mu)}\int \Phi(z)\,dz + \int \tfrac{1}{2}\Phi(z_1)\mathfrak{F}'(z_1)dz_1\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

и слѣд-о:

$$u - iv = \frac{1}{2\mu}\left\{\tfrac{1}{2}(\alpha + i\beta)\,\Phi(z) - \tfrac{1}{2}i\int F(z)\,dz + \right.$$

$$\left.\frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda+\mu)}\int \Phi(z_1)\,dz_1 + \int \tfrac{1}{2}\,\Phi(z)\,\mathfrak{F}'(z)\,dz\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

Формула (14) совпадаетъ съ фор. (12 bis) стр. 76, если вмѣсто α и β введемъ α_1 и β_1, удовлетворяющія ур-іямъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \frac{\partial \beta_1}{\partial x} &= -1 \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \frac{\partial \beta_1}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Изъ ур-ій (3) и (15) слѣдуетъ, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha - \beta_1)}{\partial x} - \frac{\partial(\beta + \alpha_1)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(\alpha - \beta_1)}{\partial y} + \frac{\partial(\beta + \alpha_1)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

т. е., что

$$\alpha - \beta_1 + i(\beta + \alpha_1) = \alpha + i\beta + i(\alpha_1 + i\beta_1)$$

есть функція комплекснаго перемѣннаго $z = x + iy$, пусть

$$\alpha + i\beta + i(\alpha_1 + i\beta_1) = \omega(z)$$

и слѣд-о:

$$\alpha + i\beta = \omega(z) - i(\alpha_1 + i\beta_1)$$

Введя это $\alpha + i\beta$ въ (14) и обозначая:

$$\frac{i}{4\mu}\omega(z)\Phi(z) + \frac{1}{4\mu}\int F(z)\,dz -$$

$$-\frac{i}{8\mu}\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\int \Phi(z)\,dz + i\int \tfrac{1}{2}\Phi(z)\,\mathfrak{F}'(z)\,dz = \varphi + i\psi \quad (17)$$

мы приведемъ (14) къ виду:

$$u - iv = -\frac{i}{4\mu}(\alpha_1 + i\beta_1)\,\Phi(z) - i(\varphi + i\psi) + \frac{\lambda+3\mu}{4\mu(\lambda+\mu)}\mathbf{P}_o \quad (18)$$

где $\mathbf{P}_o$ = веществ. части $\int \Phi(z)\,dz$

и слѣд-о, замѣчая что (фор. (6) стр. 75))

$$P + iQ = \Phi_o(z) = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Phi(z)$$

и умножая (18) на i, мы найдемъ:

$$v + iu = \frac{1}{2\mu}(\alpha_1 + i\beta_1)\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(P + iQ) +$$

$$+\frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\mathbf{P}i + \varphi + i\psi \quad \ldots \quad (19)$$

гдѣ $\mathbf{P}$ = веществ. часть $\int (P + iQ)\,dz$,

а эта формула очевидно совпадаетъ съ фор. (12 bis) стр. 76.

§ 23. Общія выраженія для перемѣщеній при заданныхъ напряженіяхъ въ криволинейныхъ изотермическихъ координатахъ.

Общія выраженія для перемѣщеній легко получить здѣсь изъ формулъ предъидущаго §-а. Мы имѣемъ (фор. (10) стр. 10):

$$2U + i(P - Q) = \{2T + i(N_1 - N_2)\} e^{2\theta i}$$

или

$$\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = \{2T + i(N_1 - N_2)\} (f'(\zeta))^2$$

По общихъ формуламъ для напряженій мы имѣемъ (фор. (10) стр. 18 и фор. (7) стр. 16):

$$2T + i(N_1 - N_2) = -\tfrac{1}{2}(x - iy)\frac{d\Phi}{dz} + F(z)$$

$$\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = \{2T + i(N_1 - N_2)\} (f'(\zeta))^2 =$$

$$= -\frac{i}{2} f(\zeta_1) f'(\zeta) \frac{d\Phi}{d\zeta} + F(\zeta) \quad . \; . \; . \; (1)$$

и слѣд-о:

$$F(\zeta) = F(z)\,[f'(\zeta)]^2$$

$$F(z) = \frac{F(\zeta)}{[f'(\zeta)]^2}$$

Имѣя въ виду фор. (14) стр. 90 и фор. (14), стр. 97 мы найдемъ:

$$\frac{u_{\xi\eta}}{h} - i\frac{v_{\xi\eta}}{h} = (u - iv) f'(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left\{ \tfrac{1}{2}(\alpha + i\beta) f'(\zeta)\,\Phi(z) - \tfrac{1}{2} i f'(\zeta) \int \frac{F(\zeta)\,dz}{(f'(\zeta))^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda + \mu)} f'(\zeta) \int \Phi(z_1)\,dz_1 + \tfrac{1}{2} f'(\zeta) \int \Phi(z)\,\mathfrak{F}'(z)\,dz \right\} \; . \; . \; . \; (2)$$

или положивъ:

$$\alpha + i\beta = -\frac{x - iy}{2} = -\tfrac{1}{2} f(\zeta_1)$$

и имѣя въ виду, что тогда $\mathfrak{F}(z) = O$, $\Phi(z) = \Phi(\zeta)$ есть функція комплекснаго перемѣннаго z или ζ, вещественная часть которой $= N_1 + N_2 = P + Q$ и

$$dz = f'(\zeta)\,d\zeta$$

мы найдемъ изъ (2):

$$\frac{u_{\xi\eta}}{h} - i\frac{v_{\xi\eta}}{h} = \frac{1}{2\mu}\Big\{-\tfrac{1}{4}f(\zeta_1)f'(\zeta)\,\Phi(\zeta) - \tfrac{1}{2}if'(\zeta)\int\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{f'(\zeta)} +$$

$$+\frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+\mu)}f'(\zeta)\int\Phi(\zeta_1)f'(\zeta_1)\,d\zeta_1\Big\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Эту формулу можно получить и непосредственнымъ интегрированіемъ дифференціальныхъ ур-iй (3), (4), (1 bis), (2 bis) стр. 86:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}U = v_{\xi\eta}\frac{\partial h}{\partial\xi} + u_{\xi\eta}\frac{\partial h}{\partial\eta} + h\frac{\partial v_{\xi\eta}}{\partial\xi} + h\frac{\partial u_{\xi\eta}}{\partial\eta}\\
&\frac{1}{2\mu}(P-Q) = u_{\xi\eta}\frac{\partial h}{\partial\xi} - v_{\xi\eta}\frac{\partial h}{\partial\eta} + h\frac{\partial u_{\xi\eta}}{\partial\xi} - h\frac{\partial v_{\xi\eta}}{\partial\eta}\\
&\frac{P+Q}{2(\lambda+\mu)} = h\frac{\partial u_{\xi\eta}}{\partial\xi} + h\frac{\partial v_{\xi\eta}}{\partial\eta} - u_{\xi\eta}\frac{\partial h}{\partial\xi} - v_{\xi\eta}\frac{\partial h}{\partial\eta}\\
&\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)\mu}\overline{(P+Q)} = h\frac{\partial v_{\xi\eta}}{\partial\xi} - h\frac{\partial u_{\xi\eta}}{\partial\eta} - v_{\xi\eta}\frac{\partial h}{\partial\xi} + u_{\xi\eta}\frac{\partial h}{\partial\eta}
\end{aligned}\right\} \; . \, . \, (4)$$

Изъ ур-iй (4) слѣдуетъ;

$$\frac{1}{2\mu}\{2Ui+(P-Q)\} = (u_{\xi\eta}+i\,v_{\xi\eta})\left(\frac{\partial h}{\partial\xi}+i\frac{\partial h}{\partial\eta}\right) + hD_{\xi\eta}(u_{\xi\eta}+iv_{\xi\eta})$$

$$\frac{P+Q}{2(\lambda+Q)} + i\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)\mu}\overline{P+Q} = -(u_{\xi\eta}+i\,v_{\xi\eta})\left(\frac{\partial h}{\partial\xi}-i\frac{\partial h}{\partial\eta}\right) +$$

$$+h\overline{D}_{\xi\eta}(u_{\xi\eta}+i\,v_{\xi\eta})$$

и слѣд-о мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&2h\frac{\partial(u_{\xi\eta}+iv_{\xi\eta})}{\partial\xi} + 2i\frac{\partial h}{\partial\eta}(u_{\xi\eta}+iv_{\xi\eta}) = \frac{1}{2\mu}\{2Ui+P-Q\} +\\
&\qquad\qquad + \frac{P+Q}{2(\lambda+\mu)} + i\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)\mu}\overline{P+Q}\\
&2h\frac{\partial(u_{\xi\eta}+iv_{\xi\eta})}{\partial\eta} - 2\frac{\partial h}{\partial\xi}(u_{\xi\eta}+iv_{\xi\eta}) =\\
&= \frac{1}{2\mu}\{2U-(P-Q)i\} + i\frac{P+Q}{2(\lambda+\mu)} - \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)\mu}\overline{P+Q}
\end{aligned}\right\} \; (5)$$

Изъ ур-iй (1) мы имѣемъ:

$$\frac{2U+i(P-Q)}{h^2} = -\frac{i}{2} f(\zeta_1) f'(\zeta) \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta)$$

и слѣд-о:

$$\frac{2U-i(P-Q)}{h^2} = \frac{i}{2} f'(\zeta) f'(\zeta_1) \frac{d\,\Phi(\zeta_1)}{d\zeta} + F(\zeta_1)$$

Подставляя эти выраженiя въ ур-iя (5), раздѣленныя на $2h^2$, мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{u_{\xi\eta}+i v_{\xi\eta}}{h} + \frac{1}{h}\left(i\frac{\partial h}{\partial\eta} + \frac{\partial h}{\partial\xi}\right)\frac{u_{\xi\eta}+i v_{\xi\eta}}{h} = \\
&\qquad = \frac{1}{4\mu}\left(-\tfrac{1}{2} f(\zeta) f'(\zeta_1)\frac{d\,\Phi(\zeta_1)}{d\zeta_1} + iF(\zeta_1)\right) + \\
&\qquad + \left\{\frac{P+Q}{2(\lambda-\mu)} + i\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)\mu}\overline{P+Q}\right\}\frac{1}{2h^2} \\
&\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{u_{\xi\eta}+i v_{\xi\eta}}{h} + \frac{1}{h}\left(-i\frac{\partial h}{\partial\xi} + \frac{\partial h}{\partial\eta}\right)\frac{u_{\xi\eta}+i v_{\xi\eta}}{h} = \\
&\qquad = \frac{1}{4\mu}\left\{\tfrac{1}{2} f(\zeta) f'(\zeta_1)\frac{d\,\Phi(\zeta_1)}{d\zeta_1} + iF(\zeta_1)\right\} + \\
&\qquad + \left\{i\frac{P+Q}{2(\lambda+\mu)} - \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)\mu}\overline{P+Q}\right\}\frac{1}{2h^2}
\end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

Имѣя въ виду, что въ силу соотношенiя (4) стр. 84:

$$\frac{d lg f'(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{h}\left(i\frac{\partial h}{\partial\eta} - \frac{\partial h}{\partial\xi}\right) = \frac{i}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial\eta} + i\frac{\partial h}{\partial\xi}\right)$$

и что (фор. (13) стр. 72):

$$\frac{1}{h^2} = f'(\zeta) f'(\zeta_1)$$

мы найдемъ изъ (6), раздѣляя эти ур-iя на $f'(\zeta_1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{u_{\xi\eta}+i v_{\xi\eta}}{h f'(\zeta_1)} = \frac{\partial}{\partial\zeta_1}\frac{1}{2\mu}\Bigg\{&-\tfrac{1}{4} f(\zeta_1)\,\Phi(\zeta_1) + \tfrac{1}{2} i\int\frac{F(\zeta_1)\,d\zeta_1}{f'(\zeta_1)} + \\
&+ \frac{\lambda+3\mu}{4(\lambda+\mu)}\int\Phi(\zeta) f(\zeta)\,d\zeta\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{u_{\xi\eta} + i v_{\xi\eta}}{h f'(\zeta_1)} = - i \frac{d}{d\zeta_1} \frac{1}{2\mu} \left\{ - \tfrac{1}{4} f(\zeta_1)\, \Phi(\zeta_1) + \tfrac{1}{2}\, i \int \frac{F(\zeta_1)\, d\zeta_1}{f'(\zeta_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda + \mu)} \int \Phi(\zeta)\, f'(\zeta)\, d\zeta \right\}$$

Отсюда

$$\frac{1}{h}(u_{\xi\eta} + i v_{\xi\eta}) = \frac{1}{2\mu} \left\{ - \tfrac{1}{4} f(\zeta)\, f'(\zeta_1)\, \Phi(\zeta_1) + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}\, i f'(\zeta_1) \int \frac{F(\zeta_1)\, d\zeta_1}{f'(\zeta_1)} + \frac{\lambda + 3\mu}{4(\lambda + \mu)} f'(\zeta_1) \int \Phi(\zeta)\, f'(\zeta)\, d\zeta \right\}$$

а перемѣнивъ здѣсь i на $-i$ мы и найдемъ фор. (3).

Этой формулѣ можно дать видъ формулы (10) стр. 80, идя совершенно тѣмъ же путемъ какимъ мы шли для перехода отъ фор. 14 стр. 97 къ фор. (12 bis) стр. 76.

Для этого вмѣсто α и β въ ур-іе (2) введемъ α_1 и β_1, удовлетворяющіе ур-ямъ (15) стр. 97, такъ что (стр. 98)

$$\alpha + i\beta + i(\alpha_1 + i\beta_1) = \omega(z) = \omega(\zeta)$$

и мы найдемъ изъ ур-ія (18) стр. 98:

$$\frac{u_{\xi\eta}}{h} - i \frac{v_{\xi\eta}}{h} = - \frac{i(\alpha_1 + i\beta_1)}{4\mu}\, {}'(\zeta)\, \Phi(\zeta) - i(\varphi + i\psi) +$$

$$+ \frac{\lambda + 3\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \mathbf{P}_o f'(\zeta) \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\text{гдѣ } \mathbf{P}_o = \text{веществ. части} \int \Phi(\zeta)\, dz\,,$$

а изъ ур-ія (7) слѣдуетъ фор. (10) стр. 80.

§ 24. О значеніяхъ постоянныхъ произвольныхъ въ формулахъ предъидущихъ §§-овъ.

Въ предъидущихъ §§-ахъ въ наше изслѣдованіе вошли слѣдующія постоянныя произвольныя: 1) Постоянная въ выраженіи $\overline{\Omega}$ (опредѣляемомъ по Ω до постоянной произвольной) см. фор. (3) стр. 85. 2) Постоянная въ выраженіяхъ u и v, опредѣляемыхъ по правиламъ интегрированіяпол ныхъ дифференціаловъ или непосредственными ихъ выраженіями напр. фор. (14) стр. 97, гдѣ постоянныя произвольныя въ u и v входятъ черезъ знакъ $\int$. Легко видѣть, что наличность указанныхъ постоянныхъ показываетъ, что вопросъ объ опредѣленіи перемѣщеній по заданнымъ напряженіямъ опредѣляется до элементовъ движенія твердаго тѣла, т. е. въ данномъ случаѣ до движенія твердаго тѣла ‖-но неподвижной плоскости, а именно: постоянная въ $\overline{\Omega}$ обусловливаетъ угловую скорость этого движенія, а постоянныя въ выраженіяхъ u и v — перемѣщенія полюса твердаго тѣла. Въ самомъ дѣлѣ, если возьмемъ двѣ системы значеній $u, v : u_1, v_1$ и u_2, v_2, отличающіяся только на эти постоянныя то для разностей $u_1 - u_2$ и $v_1 - v_2$ мы будемъ имѣть ур-ія:

$$\frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial x} - \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial y} = \text{пост.} = 2\omega_o$$

$$\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x} = O, \quad \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial y} = O$$

$$\frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial x} = O, \quad \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial y} = O$$

откуда слѣдуютъ слѣдующія общія выраженія для этихъ разностей:

$$u_1 - u_2 = C_1 - \omega_o y, \quad v_1 - v_2 = C_2 + \omega_o x,$$

которыя характерируютъ выраженія скоростей твердаго тѣла, движущагося ‖-но неподвижной плоскости.

Если поэтому закрѣпимъ въ тѣлѣ полюсъ и элементъ кривой, проходящей черезъ этотъ полюсъ (т. е. направленіе касательной къ этой кривой) — задача будетъ вполнѣ опредѣленная какъ это впрочемъ выясняется во всѣхъ курсахъ теоріи упругости при опредѣленіи перемѣщеній тѣла по элементамъ его чистой деформаціи.

§ 25. О рѣшеніи плоской задачи математической теоріи упругости при заданныхъ перемѣщеніяхъ на контурѣ.

Въ §§ 15 и 16 (стр. 74—80) мы указали тѣ функціональныя уравненія къ которымъ приводится плоская задача математической теоріи упругости при заданныхъ перемѣщеніяхъ на контурѣ, а именно въ прямоугольныхъ координатахъ задача приводится къ опредѣленію двухъ функцій комплекснаго перемѣннаго

$$\varphi + i\psi$$

и

$$\int (P + i\,Q)\,dz = \int \Phi_0(z)\,dz = \int [(\lambda + 2\mu)\triangle + i\,2\mu\,\omega]\,dz \quad . (1)$$

такихъ, чтобы

$$v + iu = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\,y\,(P + Qi) + \tfrac{1}{2}\,\frac{\lambda + 3\mu}{\mu\,(\lambda + 2\mu)}\,\mathbf{P}i + \varphi + i\psi$$

на контурѣ принимало бы заданныя значенія.

Эта задача совершенно такая-же, какъ задача объ опредѣленіи напряженій по заданнымъ напряженіямъ на контурѣ только вмѣсто функціи $\Phi(z)$ (и опредѣляемой по ней $\frac{d\Phi}{dz}$) задачи напряженій (см. § 2 стр. 8) одной изъ 2-хъ подлежащихъ опредѣленію функцій является функція

$$\int \Phi_0\,(z)\,dz$$

(и опредѣляемая по ней ея производная $\Phi_0(z)$). Къ тому же заключенію мы придемъ, если сравнимъ ур-ія обѣихъ задачъ въ криволинейныхъ изотермическихъ координатахъ т. е. § 16 и § 3, а потому все что было нами сказано о рѣшеніи плоской задачи при заданныхъ напряженіяхъ на контурѣ относится и къ случаю, когда на контурѣ заданы перемѣщенія. Разсмотримъ напр. задачу о равновѣсіи круглаго диска, если заданы перемѣщенія точекъ его контура. Мы имѣемъ (ур-ія (10) стр. 80):

$$\frac{u-iv}{h}=(P+iQ)\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right\}f'(\zeta)f(\zeta_1)-$$

$$-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{\mu}\right\}\mathbf{P}f'(\zeta)+\frac{1}{i}F(\zeta), \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ $\mathbf{P}$ есть мнимая часть функціи комплекснаго перемѣннаго:

$$\int(P+iQ)\,dz=\int(P+iQ)f'(\zeta)\,d\zeta, \quad . \quad . \quad (2)$$

а
$$P+iQ=(\lambda+2\mu)\triangle+i2\mu\omega.$$

Обозначивъ черезъ $\mathbf{P}_o$ вещественную часть функціи комплекснаго перемѣннаго (2), мы можемъ вмѣсто (1) взять формулу

$$\frac{u-iv}{h}=(P+iQ)\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right\}f'(\zeta)f(\zeta_1)+$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{\mu}\right\}\mathbf{P}_o f'(\zeta)+F_1(\zeta), \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ

$$F_1(\zeta)=\frac{1}{i}F(\zeta)-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{\mu}\right\}f'(\zeta)\int(P+iQ)f'(\zeta)\,d\zeta$$

Примѣнимъ для рѣшенія нашей задачи фор. (3) къ случаю полярныхъ координатъ на плоскости.

Мы имѣемъ здѣсь (стр. 19):

$f(\zeta)=f'(\zeta)=e^{\zeta}$, $f(\zeta_1)=e^{\zeta_1}$, гдѣ $\zeta=\xi+i\eta=lgr+i\Theta$, $h=\dfrac{1}{r}$

и изъ (2):

$$r(u-iv)=(P+iQ)\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right)r^2+$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{\mu}\right\}e^{\zeta}\mathbf{P}_o+F_1(\zeta)$$

или, раздѣляя на e^{ζ} и, обозначая:

$$F_1(\zeta)\, e^{-\zeta} = F_o(\zeta)$$

$$r\,(u - i\,v)\, e^{-\zeta} = (P + i\,Q)\, \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\mu}\right) e^{-\zeta}\, r^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} + \frac{1}{\mu}\right) \mathbf{P}_o + F_o(\zeta) \quad . \;\; . \;\; . \quad (4)$$

Предположимъ, что на контурѣ круга радіуса $r = R$ заданы нормальное и тангенціальное перемѣщенія u и v:

$$u = f_1(\Theta), \quad v = f_2(\Theta)$$

Отдѣляя въ (4) вещественную часть отъ мнимой, мы найдемъ:

$$u\, Cos\, \Theta - v\, Sin\, \Theta =$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\mu}\right) r^2 \text{ вещ. ч. } [(P + i\,Q)\, e^{-\zeta}] +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} + \frac{1}{\mu}\right) \mathbf{P}_o + \varphi_o \quad . \;\; . \quad (5)$$

$$u\, Sin\, \Theta + v\, Cos\, \Theta =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, i \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\mu}\right) r^2 \text{ мним. ч. } [(P + Q\,i)\, e^{-\zeta}] - \psi_o \quad . \;\; . \quad (5\text{ bis})$$

Функціи:

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\, i \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\mu}\right) R^2 \text{ мним. ч. } [(P + i\,Q)\, e^{-\zeta}] - \psi_o \\ &\tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\mu}\right) R^2 \text{ вещ. ч. } [(P + i\,Q)\, e^{-\zeta}] + \varphi_o \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (6)$$

очевидно сопряженныя и, зная значенія первой на контурѣ круга изъ ур-ія (5 bis), найдемъ ее по формулѣ (4) стр. 50:

$$f(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \frac{f(\psi)\,(R^2 - r^2)\, d\psi}{R^2 - 2\,Rr\, Cos\,(\Theta - \psi) + r^2}$$

т. е.

$$\tfrac{1}{2}\, i\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right) R^2 \text{ мним. ч. } [(P+i\,Q)\, e^{-\zeta}]-\psi_o=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right)\frac{R^2}{r}\,(P\,Sin\,\theta-Q\,Cos\,\theta)-\psi_o=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{[f_1(\psi)\,Sin\,\psi+f_2(\psi)\,Cos\,\psi]\,(R^2-r^2)\,d\psi}{R^2-2\,R\,r\,\,Cos\,(\theta-\psi)+r^2}, \quad . \; . \; . \quad (7)$$

а значеніе 2-ой изъ функцій (6) мы найдемъ по фор. (5) стр. 51, т. е.

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right) R^2 \text{ вещ. ч. } [(P+i\,Q)\, e^{-i\zeta}]+\varphi_o=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right)\frac{R^2}{r}\,(P\,Cos\,\theta+Q\,Sin\,\theta)+\varphi_o=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{[f_1(\psi)\,Sin\,\psi+f_2(\psi)\,Cos\,\psi]\,2rR\,Sin\,(\theta-\psi)}{R^2-2\,R\,r\,\,Cos\,(\theta-\psi)+r^2}\,d\psi+C\,.\,.\,(8)$$

Примѣняя теперь фор. (5) къ обводу круга, мы найдемъ:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{\mu}\right)[\mathbf{P}_o]_{r=R}=[u\,Cos\,\theta-v\,Sin\,\theta]_{r=R}-$$

$$-\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right)\frac{R^2}{r}\,(P\,Cos\,\theta+Q\,Sin\,\theta)+\varphi_o\right]_{r=R}$$

и слѣдов.

$$\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{\mu}\right)\mathbf{P}_o+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right)\frac{R^2}{r}(P\,Cos\theta+Q\,Sin\theta)+\varphi_o\right]_{r=R}=$$

$$=[u\,Cos\,\theta-v\,Sin\,\theta]_{r=R}=f_1(\theta)\,Cos\,\theta-v\,f_2(\theta)$$

а поэтому по формулѣ (4) стр. 50 найдемъ:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{\mu}\right)\mathbf{P}_o+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{\mu}\right)\frac{R^2}{r}(P\,Cos\theta+Q\,Sin\,\theta)+\varphi_o$$

и слѣд-о намъ будетъ извѣстно (въ силу фор. (8))

$$\mathbf{P}_o$$

а тогда будутъ извѣстны и P и Q, т. к.

$$f'(\zeta)(P+iQ)=\frac{d}{d\zeta}\int (P+iQ)f'(\zeta)\,d\zeta=\frac{\partial \mathbf{P}_0}{\partial \xi}-i\frac{\partial \mathbf{P}_0}{\partial \eta}$$

φ_0 и ψ_0 найдутся по формулахъ (7) и (8).

Такимъ же совершенно образомъ мы рѣшимъ задачу для случая прямолинейнаго контура (по пріему изложенному въ § 9 стр. 42—49) и для всякаго изотермическаго контура (по пріему изложенному въ § 12 стр. 57—62).

§ 26. О комплексныхъ преобразованіяхъ въ плоской задачѣ математической теоріи упругости.

Пусть имѣемъ плоскую задачу математической теоріи упругости, характеризующуюся въ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ 2-мя основными функціями $F(z)$ и $\Phi(z)$ (см. § 2 стр. 10) такъ, что:

$$2T+i(N_1-N_2)=i(\alpha+i\beta)\frac{d\Phi(z)}{dz}+F(z)\,. \quad . \quad (1)$$

причемъ

$$N_1+N_2=\text{вещ. ч. }\Phi(z)$$

Примемъ за α и β значенія (6_c) стр. 9 такъ, что

$$\alpha+i\beta=-\frac{x-iy}{2}$$

Тогда:

$$2T+i(N_1-N_2)=-\frac{i}{2}(x-iy)\frac{d\Phi(z)}{dz}+F(z), \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ

$$z=x+iy$$

Вмѣсто перемѣнныхъ x и y введемъ перемѣнныя X и Y, связанныя съ x и y соотношеніемъ:

$$(x+yi)(X+Yi)=\text{пост.}=R^2 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

т. е.

$$zZ=R^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dZ}=-\frac{z}{Z}=-\frac{R^2}{Z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,\text{bis})$$

где̌ $Z = X + Уi$

Соотношеніе (3) соотвѣтствуетъ преобразованію при помощи взаимныхъ радіусовъ векторовъ такъ, что, если точка $m(x, y)$ описываетъ нѣкоторую кривую, точка $M(X, У)$ описываетъ кривую, преобразованную изъ 1-ой при помощи взаимныхъ радіусовъ векторовъ $\left(X = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \quad У = -\frac{R^2 y}{x^2 + y^2}\right)$.
Если $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ и $dS = \sqrt{dX^2 + dУ^2}$ будутъ дифференціалы дугъ обѣихъ кривыхъ, то изъ (3) легко получить:

$$R^2\, ds = dS\,(x^2 + y^2) \text{ или } R^2\, dS = ds\,(X^2 + У^2) \quad . \; . \quad (5)$$

Введемъ теперь въ основное ур-іе (2) вмѣсто x и y перемѣнныя X и $У$ и обозначимъ черезъ $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{T}$ выраженія, получающіяся изъ N_1, N_2, T, есть въ нихъ вмѣсто x, y ввести при помощи (3) X, $У$; найдемъ:

$$2\mathbf{T} + i(\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2) = \frac{i}{2}\,\frac{Z^2}{X - iУ}\,\frac{d\,\mathbf{\Phi}(Z)}{dZ} + \mathbf{F}(Z), \quad . \; . \quad (6)$$

где̌ $\mathbf{\Phi}(Z)$ и $\mathbf{F}(Z)$ выраженія $\Phi(z)$ и $F(z)$, если въ нихъ вмѣсто z ввести Z.

Ур-іе (6) можно переписать въ видѣ:

$$[2\mathbf{T} + i(\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2)](X^2 + У^2) = -\frac{i}{2}(X - iУ)\,\frac{d\mathfrak{F}(Z)}{dZ} + \mathcal{F}(Z); \, . \, . \, (7)$$

где̌
$$\mathfrak{F}(Z) = 2i\int Z\,\mathbf{F}(Z)\,dZ \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

$$\mathcal{F}(Z) = \frac{i}{2}\,Z^3\,\frac{d\,\mathbf{\Phi}(Z)}{dZ} \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Изъ (7) слѣдуетъ, что $\mathbf{N}_1(X^2 + У^2) + p$, $\mathbf{N}_2(X^2 + У^2) + p$, $\mathbf{T}(X^2 + У^2)$ соотвѣтствуютъ новой плоской задачѣ. При этомъ напряженія (не принимая въ разсчетъ p) распредѣляются въ обѣихъ задачахъ одинаково, т. к., хотя напряженія и умножаются повидимому на $X^2 + У^2$, но за то и ds увеличивается въ $X^2 + У^2$ разъ (см. фор. (5)).

Здѣсь p найдется изъ условія $\mathbf{N}_1 (X^2 + Y^2) + p + \mathbf{N}_2 (X^2 + Y^2) + p =$ вещ. части $\mathfrak{F}(Z)$ т. е. $2p =$ вещ. части $\mathfrak{F}(Z) - (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)(X^2 + Y^2)$.

Это преобразованіе*) было указано Michell'емъ [№ 8 bis] на основаніи теоремы Levi Civita.

Мы можемъ обобщить эту теорію, взявъ вмѣсто соотношенія (4) болѣе общее соотношеніе:

$$z = \varphi(Z), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\text{гдѣ } z = x + iy, \quad Z = X + iY.$$

Введя въ ур-іе (2) новыя перемѣнныя X, Y и, обозначая черезъ

$$\mathbf{\Phi}(Z) \text{ и } \mathbf{F}(Z)$$

выраженія $\Phi(z)$ и $F(z)$, если въ нихъ вмѣсто z ввести при помощи (10) Z, мы найдемъ:

$$2\mathbf{T} + i(\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2) = -\frac{i}{2}\frac{\varphi(X - iY)}{\varphi'(Z)}\frac{d\mathbf{\Phi}(Z)}{dZ} + \mathbf{F}(Z) \quad . \quad . \quad (11)$$

Если введемъ теперь двѣ функціи комплекснаго перемѣннаго

$$\mathbf{\Phi}_o(Z) \text{ и } \mathbf{F}_o(Z)$$

пока совершенно произвольныя, то положивъ

$$\lambda + \mu i = \frac{-\frac{i}{2}(X - iY)\frac{d\mathbf{\Phi}_o(Z)}{dZ} + \mathbf{F}_o(Z)}{-\frac{i}{2}\frac{\varphi(X - iY)}{\varphi'(Z)}\frac{d\mathbf{\Phi}(Z)}{dZ} + \mathbf{F}(Z)} \quad . \quad . \quad (12)$$

мы найдемъ, положивъ:

$$\{2\mathbf{T} + i(\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2)\}(\lambda + \mu i) = 2\mathbf{T}_o + i(\mathbf{N}_{1o} - \mathbf{N}_{2o}) \quad . \quad . \quad (13)$$

$$2\mathbf{T}_o + i(\mathbf{N}_{1o} - \mathbf{N}_{2o}) = -\frac{i}{2}(X - iY)\frac{d\mathbf{\Phi}_o(Z)}{dZ} + \mathbf{F}_o(Z) \quad . \quad . \quad (14)$$

---

*) Наше преобразованіе совпадаетъ съ преобразованіемъ Michell'я при поворотѣ оси y-овъ.

т. е., если къ этому прибавить еще условіе

$$\mathbf{N}_{1o} + \mathbf{N}_{2o} = \text{вещ. части } \mathbf{\Phi}_o(Z) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

напряженія $\mathbf{N}_{1o}$, $\mathbf{N}_{2o}$ и $\mathbf{T}_o$ соотвѣтствуютъ новой плоской задачѣ, напряженія, которой связаны съ напряженіями первой ур-іями (14) и (15). Такимъ образомъ мы можемъ найти изъ данной задачи безчисленное множество новыхъ, преобразованныхъ изъ нея при помощи соотношенія (11). Тоже самое можетъ быть распространено и на случай криволинейныхъ координатъ. Представимъ себѣ, что имѣется рѣшеніе плоской задачи въ криволинейныхъ изотермическихъ координатахъ, которое мы соотвѣтственно изложенному въ § 3 [фор. (4) стр. 16] можемъ задать ур-іемъ:

$$\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = i(\alpha + i\beta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta)$$

или взявъ за $\alpha + i\beta$ выраженіе (8) стр. 17:

$$\frac{2U + i(P - Q)}{h^2} = -\tfrac{1}{2} i f(\zeta_1) f'(\zeta) \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta) \quad . \quad . \quad (16)$$

Введемъ вмѣсто ζ новую перемѣнную Z, положивъ

$$\zeta = \varphi(Z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ур-іе (16) приметъ видъ:

$$\frac{2\mathbf{U} + i(\mathbf{P} - \mathbf{Q})}{H^2} = -\tfrac{1}{2} i \frac{f(Z_1) f'(Z)}{[\varphi'(Z)]^2} \frac{d\mathbf{\Phi}(Z)}{dZ} + \mathbf{F}(Z) \quad . \quad . \quad (18)$$

гдѣ H, $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{\Phi}(Z)$, $\mathbf{F}(Z)$, $f(Z)$ выраженія, получающіяся изъ h, U, P, Q, $\Phi(\zeta)$, $F(\zeta)$, $f(\zeta)$ если вмѣсто ζ ввести Z т. е. вмѣсто x, y ввести X, $У$ при помощи (17).

Введемъ теперь функціи комплекснаго перемѣннаго $f_o(Z)$, $\mathbf{\Phi}_o(Z)$ и $\mathbf{F}_o(Z)$ пока совершенно произвольныя, и положимъ:

$$\lambda + \mu i = \frac{-\tfrac{1}{2} i \dfrac{f(Z_1) f'(Z)}{[\varphi'(z)]^2} \dfrac{d\mathbf{\Phi}(Z)}{dZ} + \mathbf{F}(Z)}{-\tfrac{1}{2} i f_o(Z_1) f'_o(Z) \dfrac{d\mathbf{\Phi}_o(Z)}{dz} + \mathbf{F}_o(Z)} \qquad (19)$$

мы найдемъ, положивъ:

$$(\lambda + \mu i) \frac{2\mathbf{U} + i(\mathbf{P} - \mathbf{Q})}{H^2} = \frac{2\mathbf{U}_o + i(\mathbf{P}_o - \mathbf{Q}_o)}{h^2_o} \quad . \quad . \quad (20)$$

$$\frac{2\mathbf{U}_o + i(\mathbf{P}_o - \mathbf{Q}_o)}{h^2_o} = -\tfrac{1}{2} i f_o(Z_1) f'_o(Z) \frac{d\Phi_o(Z)}{dZ} + \mathsf{F}_o(Z) \quad . \quad (21)$$

т. е., если къ этому прибавимъ еще условіе, что

$$\mathbf{P}_o + \mathbf{Q}_o = \text{вещ. части } \Phi_o(Z) \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

а h_o есть дифференціальный параметръ изотермической системы координатъ

$$z = x + yi = f_o(\xi + i\eta) = f_o(Z)$$

изъ (21) слѣдуетъ, что $\mathbf{P}_o$, $\mathbf{Q}_o$, $\mathbf{U}_o$ соотвѣтствуютъ новой плоской задачѣ, напряженія которой связаны съ напряженіями 1-ой (20) и (22). Изъ одной плоской задачи можно слѣд-о получить безчисленное множество другихъ. Совокупность подобнаго рода преобразованій мы назавемъ алгориѳмомъ комплексныхъ преобразованій и примѣры подобнаго рода преобразованій, частнымъ случаемъ, которыхъ является преобразованіе при помощи взаимныхъ радіусовъ векторовъ мы приведемъ въ особомъ изслѣдованіи.

§ 27. Приведеніе плоской задачи математической теоріи упругости къ интегральному уравненію Фредгольма.

Плоская задача математической теоріи упругости приведена нами (§ 2) къ отысканію 2-хъ функцій комплекснаго перемѣннаго $\Phi(z)$ и $F(z)$ по заданнымъ па нѣкоторомъ замкнутомъ контурѣ Σ (внутри котораго $\Phi(z)$ и $F(z)$ конечны и непрерывны) значеніямъ выраженія

$$i(\alpha + i\beta) \frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z) + \frac{i}{2} e^{-2\theta i} [\Phi(z) + \Phi(z_1)], \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ $z = x + yi$, $z_1 = x - yi$, т. е. $\frac{1}{2}[\Phi(z) + \Phi(z_1)]$ вещественная часть функціи $\Phi(z)$.

Будемъ на нашемъ замкнутомъ контурѣ Σ отсчитывать дуги s отъ нѣкоторой взятой на немъ постоянной точки. Обѣ искомыя функціи явятся на этомъ контурѣ функціями дуги s.

Эти функціи мы будемъ обозначать $F(s)$ и $\Phi(s)$. Пусть $\Phi(z) = u + iv$. Значенія u и v на контурѣ Σ мы будемъ обозначать черезъ u_s и v_s; производная $\frac{d\Phi}{dz}$ на контурѣ Σ будетъ совпадать съ значеніями $\frac{du}{ds} + i\frac{dv}{ds}$ и слѣд-о въ силу ур-ія (1) на контурѣ Σ мы будемъ имѣть условіе:

$$(2) \ldots i(\alpha + i\beta)\left\{\frac{du}{ds} + i\frac{dv}{ds}\right\} + F(s) + ie^{-2\theta i} u_s = \text{дан. функ. } s,$$

т. к. по условію значенія (1) на контурѣ заданы.

Вообразимъ теперь функцію Грина 2-го рода для даннаго контура, т. е. функцію $G(\xi, \eta, x, y)$, которая во 1-хъ, внутри контура Σ конечна и непрерывна за исключеніемъ точки $x = \xi$, $y = \eta$, гдѣ она обращается въ безконечность какъ $\log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ такъ, что:

$$G(x, y, \xi, \eta) = -\lg \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + A(x, y, \xi, \eta),$$

гдѣ $A(x, y, \eta)$ конечная и непрерывная функція отъ x, y, ξ, η.

Во 2-хъ, $G(x, y, \xi, \eta)$ имѣетъ во всѣхъ точкахъ контура Σ производную по нормали постоянной, т. е. независящей отъ s. Если точки x, y, ξ, η мы будемъ брать на самой кривой Σ, то соотвѣтствующія значенія $G(x, y, \xi, \eta)$ мы будемъ писать $G(s, \xi\eta)$ или $G(s, \sigma)$.

Введемъ, слѣдуя D. Hilbert'у*) операцію MW, положивъ

$$MW = \frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial \sigma} W(\sigma)\, d\sigma$$

гдѣ l есть длина всей замкнутой кривой Σ.

---

*) D. Hilbert. Grundlage einer allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen. Nachrichten von der Königl. G. d. Wis. zu Göttingen 1905, стр. 312.

Легко доказывается*) свойство такого символа: если $W(\sigma)$ представляютъ значенія функціи комплекснаго перемѣннаго конечной и непрерывной внутри контура Σ, то MW только на постоянную можетъ отличаться отъ самой W и эту постоянную всегда можно считать $= O$, если придать соотвѣтстующую постоянную къ W.

Продѣлаемъ теперь операцію M надъ обѣими частями ур-ія (2), которое перепишемъ въ видѣ:

$$\omega_s\left(\frac{du_s}{ds}+i\,\frac{dv_s}{ds}\right)+F(s)+\chi_s u_s=\psi_s, \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ $\omega_s = i(\alpha+i\beta)$, $\chi_s = i e^{-2\theta i}$, $\psi_s =$ данной функціи во 2-ой части (2).

Найдемъ:

$$M\left[\omega_s\left(\frac{du_s}{ds}+i\,\frac{dv_s}{ds}\right)\right]+MF_s+M\chi_s u_s=M\psi_s \quad . \quad (4)$$

и вычтемъ отсюда (3), въ которомъ вмѣсто члена:

$$\frac{du_s}{ds}+i\,\frac{dv_s}{ds}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

представляющаго значенія функціи конечной и непрерывной внутри контура поставимъ

$$M\left(\frac{du_s}{ds}+i\,\frac{dv_s}{ds}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

которому въ силу вышеуказаннаго замѣчанія можно всегда предположить равнымъ (5).

Найдемъ:

$$M\left(\omega_s\left(\frac{du_s}{ds}+i\,\frac{dv_s}{ds}\right)\right)-\omega_s M\left(\frac{du_s}{ds}+i\,\frac{dv_s}{ds}\right)+$$
$$+\,M(\chi_s u_s)-\chi_s u_s=M\psi_s-\psi_s$$

т. е.

---

*) D. Hilbert l. c. стр. 312.

$$\frac{i}{2\pi}\int_o^l \frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial \sigma}\left\{ (\omega_\sigma - \omega_s)\left(\frac{du_\sigma}{d\sigma} + i\,\frac{dv_\sigma}{d\sigma}\right) + \chi_\sigma u_\sigma \right\} d\sigma - \chi_s u_s =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_o^l \frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial \sigma}\psi_\sigma\, d\sigma - \psi_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Имѣя въ виду, что интегрированіемъ по частямъ мы находимъ:

$$\int_o^l \frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial \sigma}(\omega_\sigma - \omega_s)\left(\frac{du_\sigma}{d\sigma} + i\,\frac{dv_\sigma}{d\sigma}\right) d\sigma =$$

$$= -\int_o^l \left[\frac{\partial^2 G(\sigma, s)}{\partial \sigma^2}(\omega_\sigma - \omega_s) - \frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial \sigma}\frac{d\omega_\sigma}{d\sigma}\right](u_\sigma + i\,v_\sigma)\, d\sigma$$

мы найдемъ изъ (7), обозначая:

$$\frac{\partial G(s, \sigma)}{\partial \sigma}\,\frac{d\,\omega_\sigma}{d\sigma} - \frac{\partial^2 G(\sigma, s)}{\partial \sigma^2}(\omega_\sigma - \omega_s) = \Omega(\sigma, s) \quad . \quad . \quad (8)$$

и

$$\frac{i}{2\pi}\int_o^l \frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial s}\psi_\sigma\, d\sigma - \psi(s) = \tau(s) \quad . \quad . \quad (9)$$

ур-іе:

$$\frac{i}{2\pi}\int_o^l [\Omega(\sigma, s)(u_\sigma + i\,v_\sigma) + \chi_\sigma u_\sigma]\, d\sigma - \chi_s u_s = \tau(s) \quad . \quad . \quad (10)$$

Замѣтимъ, что мы можемъ положить (D. Hilbert l. c. стр. 311):

$$\frac{1}{2\pi}\int_o^l \frac{\partial G(\sigma, s)}{\partial \sigma} u_\sigma\, d\sigma = v_\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Ур-ія (10) и (11) можно заключить въ одно интегральное ур-іе Фредгольма:

$$\gamma(s) = \varphi(s) - \int_o^{2l} K(\sigma, s)\,\varphi(\sigma)\, d\sigma, \quad . \quad . \quad (12)$$

если положить

$\gamma(s) = \frac{\tau_s}{\chi_s}$ для $o \leqq s \leqq l$ и $\qquad \varphi(s) = u_s$ для $O \leqq s \leqq l$

$= O$ для $l < s \leqq 2l \qquad$ и $= v_{s-l}$ для $l < s \leqq 2l.$

$$K(\sigma, s) = \frac{i}{2\pi} \frac{\Omega(\sigma, s) + \chi(\sigma)}{\chi(s)} \text{ для } \begin{cases} o \leq s \leq l \\ o \leq \sigma \leq l \end{cases}$$

$$K(\sigma, s) = -\frac{1}{2\pi} \Omega(\sigma - l, s) \text{ для } \begin{cases} o \leq s \leq l \\ l < \sigma < 2l \end{cases}$$

$$K(\sigma, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G(\sigma, s - l)}{\partial \sigma} \text{ для } \begin{cases} l < s \leq 2l \\ o \leq \sigma \leq l \end{cases}$$

$$K(\sigma, s) = O \text{ для } \begin{cases} l < s \leq 2l \\ l < \sigma \leq 2l \end{cases}$$

Такимъ образомъ задача приведена къ ур-iю Фредгольма (12). Болѣе подробное изслѣдованiе этого ур-iя мы сообщимъ въ особомъ мемуарѣ.

§ 28. Задача объ интегрированiи гипергармоническаго ур-iя при заданныхъ на контурѣ значенiяхъ этой функцiи и ея производной по нормали.

Пусть имѣемъ неизвѣстную функцiю V, удовлетворяющую гипергармоническому ур-iю:

$$\nabla_2 \nabla_2 V = O \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ $\nabla_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, а x, y прямоугольныя прямолинейныя координаты точки.

Будемъ искать не саму функцiю V, а ея производныя:

$$V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad V_{yy} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad V_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} \quad . \; . \quad (2)$$

Если эти производныя будутъ найдены, V найдется путемъ 2-хъ квадратуръ, а именно будетъ:

$$V = \int\int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} dx\, dy \quad . \; (3)$$

Эти V_{xx}, V_{yy}, V_{xy} удовлетворяютъ слѣдующимъ ур-iямъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial(-V_{xy})}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial V_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial(-V_{xy})}{\partial x} &= 0 \\ \nabla_2 (V_{xx} + V_{yy}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Кромѣ того предположимъ, что на нѣкоторомъ замкнутомъ контурѣ Σ намъ заданы значенія функціи V и производной ея по нормали къ контуру и слѣд-о эти выраженія заданы напр. какъ функціи дуги s на контурѣ Σ т. е.

$$V = f_1(s), \; \frac{\partial V}{\partial n} = f_2(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Поэтому можно считать на контурѣ также извѣстными:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = f_1''(s) \text{ и } \frac{\partial^2 V}{\partial n \, \partial s} = f_2'(s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Чтобы интегрировать ур-ія (4), которыя совершенно одинаковы съ ур-іями плоской задачи теоріи упругости въ прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатахъ (см. фор (1) и (2) стр. 9), мы можемъ положить:

$$\left.\begin{aligned} -2 V_{xy} &= \alpha \frac{\partial (V_{xx} + V_{yy})}{\partial y} - \beta \frac{\partial (V_{xn} + V_{yy})}{\partial x} + \varphi \\ V_{yy} - V_{xx} &= \beta \frac{\partial (V_{xx} + V_{yy})}{\partial y} + \alpha \frac{\partial (V_{xx} + V_{yy})}{\partial x} + \psi \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (7)$$

гдѣ φ и ψ сопряженныя функціи, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

такъ что

$$\varphi + i\psi = F(z), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ $z = x + yi$, а α и β удовлетворяютъ ур-іямъ:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

причемъ для α, β намъ необходимо лишь частное рѣшеніе ур-ій (9). Напр. можно положить:

$$\alpha = O, \quad \beta = y \quad (9_a) \text{ или}$$

$$\alpha = -x, \quad \beta = O \quad (9_b) \text{ или}$$

$$\alpha = -\frac{x}{2}, \quad \beta = \frac{y}{2} \quad (9_c)$$

Ур-ія (7) можно переписать въ видѣ:

$$V_{yy} - V_{xx} + 2i\, V_{xy} = (\alpha + i\beta)\,\frac{d\,\Phi(z)}{dz} - i\,F(z)\ . \quad (10)$$

гдѣ $F(z) = \varphi + i\psi$ и $\Phi(z)$ функціи комплекснаго перемѣннаго $z = x + iy$ причемъ вещественная часть функціи $\Phi(z)$ равна $V_{xx} + V_{yy}$.

Эти функціи нужно опредѣлить такимъ образомъ, чтобы на контурѣ Σ были выполнены условія (6).

Замѣтимъ теперь одну формулу преобразованія координатъ.

Повернемъ оси координатъ ox, oy на уголъ Θ и пусть значенія производныхъ функціи V по новымъ координатамъ x_1, y_1 будутъ $V_{x_1 x_1}$, $V_{y_1 y_1}$, $V_{x_1 y_1}$; мы легко убѣдимся въ справедливости слѣдующихъ формулъ для преобразованія старыхъ производныхъ въ новыя:

$$V_{xx} + V_{yy} = V_{x_1 x_1} + V_{y_1 y_1}\ .\ .\ .\ .\ . \quad (11)$$

$$V_{y_1 y_1} - V_{x_1 x_1} + 2i\, V_{x_1 y_1} = (V_{yy} - V_{xx} + 2i\, V_{xy})\, e^{2\Theta i}\ .\ . \quad (12)$$

Возвращаясь теперь къ разсматриваемой задачѣ объ интегрированіи гипергармоническаго ур-ія (1), замѣтимъ, что въ силу (6) намъ являются заданными на контурѣ $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial n\, \partial s}$. Если Θ будетъ теперь уголъ, образованный касательной къ контуру въ нѣкоторой его точкѣ съ осью x-овъ и слѣд. нормалью къ контуру съ осью y-овъ (направленія касательной и нормали мы полагаемъ расположенными въ томъ же порядкѣ какъ оси ox и oy такъ, что при поворотѣ на уголъ θ обѣ системы прямыхъ совпадутъ: касательная съ $+ox$, нормаль съ $+oy$).

Мы имѣемъ тогда по формулѣ (12):

$$V_{nn} - V_{ss} + 2i\,V_{sn} = (V_{yy} - V_{xx} + 2i\,V_{xy})\,e^{2\theta i} \quad . \quad (13)$$

гдѣ V_{nn} = 2-ой производной функціи V по нормали и слѣдовательно, т. к. въ силу (11):

$$V_{nn} + V_{ss} = V_{xx} + V_{yy}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

мы найдемъ изъ (13) и (10):

$$2(V_{nn} + i\,V_{sn}) = (V_{nn} + V_{ss} + V_{nn} - V_{ss} + 2i\,V_{sn}) =$$

$$= [(\alpha + i\beta)\frac{d\,\Phi(z)}{dz} - i\,F(z)]\,e^{2\theta i} + V_{nn} + V_{ss},$$

а въ силу (14):

$$V_{nn} + V_{ss} = V_{xx} + V_{yy} = \text{вещес. ч. } \Phi(z) = \tfrac{1}{2}\{\Phi(z) + \Phi(z_1)\},$$

$$\text{гдѣ } z_1 = x - iy.$$

Задача приводится такимъ образомъ къ опредѣленію 2-хъ функцій комплекснаго перемѣннаго $\Phi(z)$ и $F(z)$ по заданнымъ на нѣкоторомъ замкнутомъ контурѣ значеніямъ:

$$(\alpha + i\beta)\frac{d\,\Phi(z)}{dz} - i\,F(z) + \tfrac{1}{2}e^{-2\theta i}\{\Phi(z) + \Phi(z_1)\} \quad . \quad . \quad (15)$$

Эта теорія легко обобщается на случай изотермическихъ криволинейныхъ координатъ ξ, η т. е. такихъ, что $\xi + i\eta = F(x + yi)$; пусть:

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2}$$

дифференціальный параметръ системы координатъ ξ, η.

Пусть s_1 и s_2 будутъ дуги, отсчитанныя отъ какой нибудь точки M по координатнымъ линіямъ $\eta = const.$, $\xi = const.$, проходящимъ черезъ M; если θ будетъ уголъ, образованный нормалью къ линіи $\xi = const.$ съ осью x-овъ, въ силу (12):

$$V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1} + 2i\, V_{s_1 s_2} = (V_{yy} - V_{xx} + 2i\, V_{xy})\, e^{2\theta i} \quad . \quad . \quad (16)$$

Имѣя въ виду, что основныя ур-ія (4) могутъ быть написаны въ видѣ:

$$D_{xy}\,(V_{yy} - V_{xx} + 2i\, V_{xy}) = -\overline{D}_{xy}\,(V_{xx} + V_{yy})\,^{*}) \,.\ (17)$$

мы придемъ изъ (17) совершенно также, какъ на стр. 73—74 § 14 къ ур-ію:

$$D_{\xi\eta}\left[\frac{V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1} + 2i\, V_{s_1 s_2}}{h^2}\right] = -\frac{1}{h^2}\overline{D}_{\xi\eta}\,(V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}),$$

или къ системѣ ур-ій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{2\,V_{s_1 s_2}}{h^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1}}{h^2}\right) &= \frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}\Big) \\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{2\,V_{s_1 s_2}}{h^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{V_{s_1 s_1} - V_{s_2 s_2}}{h^2}\right) &= \frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}\Big) \end{aligned}\right\} .(18)$$

Чтобы найти рѣшеніе системы ур-ій (18) достаточно положить:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{2\,V_{s_1 s_2}}{h^2} &= \alpha\frac{\partial}{\partial\eta}(V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}) - \beta\frac{\partial}{\partial\xi}(V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}) + \varphi \\ \frac{V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1}}{h^2} &= \beta\frac{\partial}{\partial\eta}(V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}) + \alpha\frac{\partial}{\partial\xi}(V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}) + \psi, \end{aligned}\right\} .(19)$$

которыя можно заключить въ одну формулу:

$$\frac{-2\,V_{s_1 s_2} + i\,(V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1})}{h^2} = i\,(\alpha + i\beta)\frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\zeta} + F(\zeta)\,, \ .\ (20)$$

или

$$\frac{V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1} + 2i\, V_{s_1 s_2}}{h^2} = (\alpha + i\beta)\frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\zeta} - i\,F(\zeta) \ .\ (21)$$

если при этомъ положить:

$$\alpha + i\beta = -\tfrac{1}{2} f(\zeta_1)\, f'(\zeta) \quad \text{(см. стр. 17).}$$

---

*) Здѣсь $D_{xy} f = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}$, $\overline{D}_{xy} f = \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}$ (§ 14 стр. 71).

Здѣсь

$F(\zeta) = \varphi + i\psi$, а веществ. часть $\Phi(\zeta) = V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}$ . . (22)

Замѣтимъ, что въ предъидущихъ формулахъ V_{nn}, V_{ss}, V_{sn} (см. фор. (13), (14) и слѣдующія) и $V_{s_1 s_1}$, $V_{s_2 s_2}$, $V_{s_1 s_2}$ (см. фор. (16), (18), (19), (20), (21) и (22)) представляютъ вторыя производныя функціи V въ направленіяхъ s, n, s_1, s_2 и ихъ надо отличать отъ вторыхъ производныхъ по дугамъ s, n, s_1, s_2, которыя мы будемъ обозначать черезъ $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial s\,\partial n}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1{}^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_2{}^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ Мы сейчасъ увидимъ, что 2-ыя производныя по направленію и по дугѣ касательной къ этому направленію, вообще говоря, различны.

Первыя производныя функціи V по нѣкоторому направленію s и по дугѣ касательной къ этому направленію одинаковы, т. к. обѣ эти производныя являются проэкціями на направленіе s дифференціальнаго параметра 1-го порядка функціи V т. е. выраженія:

$$H = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2},$$

отложеннаго по положительной нормали къ кривой $V = const.$ такъ что, вообще говоря:

$$V_s = \frac{\partial V}{\partial s} = H\,Cos\,\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

гдѣ α-уголъ, образованный нормалью къ кривой $V = const.$ съ направленіемъ s.*)

Вторыя же производныя по дугамъ вообще говоря отличаются отъ 2-ыхъ производныхъ по направленіямъ, касательнымъ къ этимъ дугамъ, т. к.:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\ (\text{по дугѣ } s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s} V_s = \frac{\partial}{\partial s}(H\,Cos\,\alpha)$$

*) См. по этому поводу: I. И. Сомовъ. Раціональная механика. Ч. I. Кинематика § 51, стр. 105. Не слѣдуетъ смѣшивать это α съ a въ (20).

(см. фор. (23)) или

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}(H \, Cos\, \alpha) = \frac{\partial H}{\partial s} Cos\, \alpha - H \, Sin\, \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial s}$$

а т. к. $d\alpha = \pm$ углу смежности дуги ds, то

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \pm \frac{1}{\rho_s},$$

гдѣ ρ_s радіусъ кривизны s и мы найдемъ формулу:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = V_{ss} \mp \frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{\rho_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Точно также:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n \, \partial s} = \frac{\partial}{\partial n}(H \, Cos\, \alpha) = \frac{\partial H}{\partial n} Cos\, \alpha - H \, Sin\, \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial n}$$

и мы найдемъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n \, \partial s} = V_{ns} \mp \frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{\rho_n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

гдѣ ρ_n радіусъ кривизны элемента дуги ∂n (если этотъ элементъ мы предположимъ криволинейнымъ) и:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s \, \partial n} = \frac{\partial}{\partial s}(H \, Sin\, \alpha) = \frac{\partial H}{\partial s} Sin\, \alpha + H \, Cos\, \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial s}$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s \, \partial n} = V_{sn} \pm \frac{\partial V}{\partial s} \frac{1}{\rho_s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Наконецъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = \frac{\partial}{\partial n}(H Sin \alpha) = \frac{\partial H}{\partial n} Sin\, \alpha + H \, Cos\, \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial n} = V_{nn} \pm \frac{\partial V}{\partial s} \frac{1}{\rho_n} \text{*)} \, . \; (27)$$

Для системы изотермическихъ координатъ мы соотвѣтственно вышеизложенному найдемъ:

*) См. по этому поводу E. **Mathieu**. Theorie des Potentials und ihre Anwendungen auf Elektrostatik und Magnetismus. Autorisierte deutsche Ausgabe von H. Maser. Erster Teil, § 15, Seite 94.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial s_1{}^2} &= V_{s_1 s_1} \mp \frac{\partial V}{\partial s_2}\frac{1}{\rho_{s_1}} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} &= V_{s_1 s_2} \pm \frac{\partial V}{\partial s_1}\frac{1}{\rho_{s_1}} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial s_2{}^2} &= V_{s_2 s_2} \pm \frac{\partial V}{\partial s_1}\frac{1}{\rho_{s_2}}
\end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (28)$$

гдѣ ρ_{s_1}, ρ_{s_2} радіусы кривизны криволинейныхъ элементовъ ds_1 и ds_2, взятыхъ по координатнымъ линіямъ; имѣя въ виду, что:

$$ds_1 = \frac{1}{h} d\xi, \quad ds_2 = \frac{1}{h} d\eta,$$

$$\text{гдѣ } h = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2}$$

мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial s_1{}^2} &= h\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) = h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + h\frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} &= h\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) = h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi\, \partial \eta} + h\frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial s_2{}^2} &= h\frac{\partial}{\partial \eta}\left(h\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) = h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + h\frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}
\end{aligned}\right\} . \qquad (29)$$

и слѣд-о изъ (28) и (29):

$$\left.\begin{aligned}
V_{s_1 s_1} &= h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + h\frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} \pm h\frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{1}{\rho_\xi} \\
V_{s_1 s_2} &= h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi\, \partial \eta} + h\frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} \mp h\frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{1}{\rho_\xi} \\
V_{s_2 s_2} &= h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + h\frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta} \mp h\frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{1}{\rho_\eta}
\end{aligned}\right\} . \qquad (30)$$

гдѣ ρ_ξ радіусъ кривизны координатной линіи $\eta = const.$, а ρ_η радіусъ кривизны координатной линіи $\xi = const.$

Напр. для полярныхъ координатъ (стр. 19), мы имѣемъ:

$$\xi = lgr, \quad \eta = \Theta, \quad h = \frac{1}{r}, \quad \rho_\xi = \infty, \quad \rho_\eta = r$$

$$\left.\begin{aligned} V_{rr} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \\ V_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) \\ V_{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (31)$$

Переходя теперь къ задачѣ объ опредѣленіи функцій $F(\zeta)$ и $\Phi(\zeta)$ въ ур-іи (21) по заданнымъ контурнымъ условіямъ, замѣтимъ, что послѣдними опредѣляются значенія на контурѣ функціи V въ зависимости отъ s и значенія $\frac{\partial V}{\partial n}$ т. е. (фор. (5)):

$$V = f_1(s), \quad \frac{\partial V}{\partial n} = f_2(s)$$

и слѣд-о являются заданными:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = f'_1(s), \quad \frac{\partial V}{\partial n} = f_2(s), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial n\,\partial s} = f'_2(s)$$

При помощи формулъ (24) и (25), мы найдемъ на контурѣ значенія:

$$V_{ss} \text{ и } V_{ns}$$

и слѣд-о, если контуръ будетъ кривая $\xi = const.$, . . (32) значенія:

$$V_{s_2 s_2} \text{ и } V_{s_1 s_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Имѣя въ виду, что изъ фор. (21) мы имѣемъ:

$$(\alpha + i\beta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - i\,F(\zeta) + \frac{V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}}{h^2} = \frac{2(V_{s_2 s_2} + i\,V_{s_1 s_2})}{h^2} \,. (34)$$

причемъ въ силу (22):

$$\text{вещ. ч. } \Phi(\zeta) = V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}$$

и слѣд-о лѣвую часть (34) на контурѣ (32) мы должны въ силу заданныхъ на этомъ контурѣ значеній (33) считать намъ заданною.

Мы получаемъ такимъ образомъ задачу вполнѣ аналогичную задачѣ § 12 (стр. 57—63) и мы можемъ рѣшить эту задачу совершенно также, какъ и тамъ.

Замѣтимъ, что

$$\alpha + i\beta = -\tfrac{1}{2} f(\zeta) f'(\zeta)$$

на контурѣ $\xi = \alpha$ совпадаетъ съ значеніями функціи комплекснаго перемѣннаго:

$$-\tfrac{1}{2} \overline{f}(2\alpha - \zeta) f'(\zeta)^{*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

и предположимъ, что (35) представляетъ внутри всей площади нашего контура (32) функцію комплекснаго перемѣннаго конечную, непрерывную и однозначную.

Мы рѣшимъ тогда нашу задачу слѣдующимъ образомъ:

Имѣя въ виду, что выраженіе (34) на нашемъ контурѣ задано и что мнимая часть его совпадаетъ съ мнимою частью функціи комплекснаго перемѣннаго

$$-\tfrac{1}{2} \overline{f}(2\alpha - \zeta) f'(\zeta) \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - iF(\zeta), \quad . \quad . \quad (36)$$

всюду внутри нашего контура конечной, непрерывной и однозначной, мы найдемъ эту мнимую часть, рѣшая задачу Дирихле.

Тогда мы найдемъ и вещественную часть, (36) при помощи квадратуры, а эта вещественная часть сложенная съ $\frac{V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}}{h^2}$, является въ силу (34) на нашемъ контурѣ заданной и слѣд-о мы найдемъ такимъ образомъ на послѣднемъ значенія:

$$\frac{V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}}{h^2},$$

---

*) $\overline{f}$ есть операція f, въ которой i (если онъ въ эту операцію входитъ) замѣненъ на $-i$.

а слѣд-о и значенія:

$$V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}$$

Такъ какъ

$$\nabla_2 (V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}) = O$$

и функція $V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}$ конечна непрерывна и однозначна внутри нашего контура, мы найдемъ ее по значеніямъ на контурѣ, рѣшая 2-ую задачу Дирихле, и тогда наша задача будетъ вполнѣ рѣшена, т. к., зная $V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}$, мы будемъ знать:

$$\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} = \frac{\partial (V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2})}{\partial \xi} - i \frac{\partial (V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2})}{\partial \eta}, \quad . \quad (37)$$

а слѣд-о, зная функцію (36), найдемъ $F(\zeta)$ и при помощи формулъ (21), (22) задача будетъ рѣшена, т. е. будутъ найдены:

$$V_{s_1 s_1}, \quad V_{s_2 s_2}, \quad V_{s_1 s_2}$$

Зная послѣднія, мы найдемъ изъ ур-ія (16) и изъ очевидной зависимости

$$V_{xx} + V_{yy} = V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

величины V_{xx}, V_{yy}, V_{xy}; въ самомъ дѣлѣ изъ (16) и (38) мы имѣемъ:

$$V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2} = V_{xx} + V_{yy}$$

$$V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1} = (V_{yy} - V_{xx}) \, Cos\, 2\theta - 2 V_{xy} \, Sin\, 2\theta$$

$$2 V_{s_1 s_2} = 2 V_{xy} \, Cos\, 2\theta + (V_{yy} - V_{xx}) \, Sin\, 2\theta$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} V_{s_2 s_2} &= \tfrac{1}{2}(V_{xx} + V_{yy}) + \tfrac{1}{2}(V_{yy} - V_{xx}) \, Cos\, 2\theta - V_{xy} \, Sin\, 2\theta \\ V_{s_1 s_1} &= \tfrac{1}{2}(V_{xx} + V_{yy}) - \tfrac{1}{2}(V_{yy} - V_{xx}) \, Cos\, 2\theta + V_{xy} \, Sin\, 2\theta \\ V_{s_1 s_2} &= V_{xy} \, Cos\, 2\theta + \tfrac{1}{2}(V_{yy} - V_{xx}) \, Sin\, 2\theta \end{aligned}\right\} . \quad (39)$$

Изъ тѣхъ же ур-ій (16) и (38) мы имѣемъ:

$$V_{yy} - V_{xx} + 2\,i\,V_{xy} = (V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1} + 2\,i\,V_{s_1 s_2})\,e^{-2\theta i}$$

$$V_{xx} + V_{yy} = V_{s_2 s_2} + V_{s_1 s_1}$$

т. е.

$$V_{xx} + V_{yy} = V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}$$
$$V_{yy} - V_{xx} = (V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1})\,Cos\,2\theta + 2\,V_{s_1 s_2}\,Sin\,2\theta$$
$$2\,V_{xy} = 2\,V_{s_1 s_2}\,Cos\,2\theta - (V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1})\,Sin\,2\theta$$

или

$$\left.\begin{aligned} V_{xx} &= \tfrac{1}{2}(V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}) - \tfrac{1}{2}(V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1})\,Cos\,2\theta - V_{s_1 s_2}\,Sin\,2\theta \\ V_{yy} &= \tfrac{1}{2}(V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}) + \tfrac{1}{2}(V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1})\,Cos\,2\theta + V_{s_1 s_2}\,Sin\,2\theta \\ V_{xy} &= V_{s_1 s_2}\,Cos\,2\theta - \tfrac{1}{2}(V_{s_2 s_2} - V_{s_1 s_1})\,Sin\,2\theta \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

По фор. (40) мы и найдемъ V_{xx}, V_{yy}, V_{xy} по даннымъ $V_{s_1 s_1}$, $V_{s_2 s_2}$, $V_{s_1 s_2}$ и слѣд-о при помощи фор. (3) найдемъ V.

§ 29. Примѣры: примѣненіе предъидущей теоріи къ прямой линіи и къ кругу.

Представимъ себѣ, что контуръ состоитъ изъ прямой, которую мы примемъ за ось x-овъ, и предположимъ, что во всѣхъ точкахъ этой прямой намъ заданы значенія функціи V и производной по нормали $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial y}$.

Примемъ для α и β значенія (9_a) стр. 118.

Найдемъ:

$$V_{yy} - V_{xx} + 2\,i\,V_{xy} = iy\,\frac{d\Phi(z)}{dz} - i\,F(z) \quad . \quad . \quad (1)$$

На оси x-овъ т. е. при $y = O$ намъ заданы значенія:

$$V = f_1(x)\,,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = f_2(x)$$

и слѣд-о при $y = O$:

$$V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f_1''(x)\,,\quad V_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = f'_2(x) \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ ур-iя (1) при $y=O$:

$$[i(V_{yy}-V_{xx})-2V_{xy}]_{y=o}=[F(z)]_{y=o}$$

или

$$i(V_{xx}+V_{yy})_{y=o}=2[V_{xy}+iV_{xx}]_{y=o}+[F(z)]_{y=o}$$

т. е. въ силу (2):

$$[i(V_{xx}+V_{yy})-F(z)]_{y=o}=2(f_2'(x)+if_1''(x)) \quad . \quad . \quad (3)$$

Предполагая, что $V_{xx}+V_{yy}$ и $F(z)$ конечны и непрерывны на всей полуплоскости $y>O$, мы можемъ положить (стр. 43):

$$\varphi=-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf_2'(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$V_{xx}+V_{yy}-\psi=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf_1''(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2}, \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\text{гдѣ } \varphi+i\psi=F(z)$$

Съ другой стороны по фор. (8) стр. 44 функцiя ψ сопряженная съ функцiей φ (4) будетъ:

$$\psi=-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-s)f_2'(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2}$$

и слѣд-о изъ (5):

$$V_{xx}+V_{yy}=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[yf_1''(s)+(x-s)f_2'(s)]ds}{(s-x)^2+y^2}$$

Найдя φ, ψ, $V_{xx}+V_{yy}$, мы опредѣлимъ V_{xx}, V_{yy}, V_{xy} по формуламъ (7) стр. 117:

$$2V_{xy}=y\frac{\partial(V_{xx}+V_{yy})}{\partial x}-\varphi$$

$$V_{yy}-V_{xx}=y\frac{\partial(V_{xx}+V_{yy})}{\partial y}+\psi$$

и слѣд-о:

$$V_{xy}=\tfrac{1}{2}y\frac{\partial(V_{xx}+V_{yy})}{\partial x}-\frac{\varphi}{2}$$

$$V_{xx}=\tfrac{1}{2}(V_{xx}+V_{yy})-\tfrac{1}{2}y\frac{\partial(V_{xx}+V_{yy})}{\partial y}-\frac{\psi}{2}$$

$$V_{yy}=\tfrac{1}{2}(V_{xx}+V_{yy})+\tfrac{1}{2}y\frac{\partial(V_{xx}+V_{yy})}{\partial y}+\frac{\psi}{2},$$

а V найдется по фор. (3) стр. 116.

Рѣшенія этого вопроса въ нѣсколько иной формѣ даны E. Almansi и G. Lauricella (см. примѣч. **) къ стр. XIII).

Чтобы примѣнить нашу теорію къ кругу, введемъ полярныя координаты, положивъ (стр. 19):

$$\xi=lgr,\quad \eta=\theta,\quad h=\frac{1}{r},\quad f(\zeta)=e^{\zeta}$$

Если на обводѣ окружности $r=R$ намъ заданы значенія V и значенія $\frac{\partial V}{\partial r}$ какъ функціи отъ s (или отъ θ, т. к. $s=R\theta$ на обводѣ окружности радіуса R), то въ силу соотношеній (31) стр. 124 намъ будутъ заданы на обводѣ этой окружности:

$$V_{\theta\theta} \text{ и } V_{r\theta} \text{ т. е. } V_{s_2s_2} \text{ и } V_{s_1s_2}$$

Обращаясь теперь къ фор. (34), положимъ (стр. 17):

$$\alpha+i\beta=-\tfrac{1}{2}f(\zeta_1)f'(\zeta)=-\tfrac{1}{2}e^{2\xi}=-\tfrac{1}{2}r^2$$

т. е. $$\alpha=-\tfrac{1}{2}r^2,\quad \beta=O$$

и слѣд-о изъ (34) найдемъ:

$$-\tfrac{1}{2}r^2\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}-iF(\zeta)+(V_{rr}+V_{\theta\theta})r^2=2(V_{\theta\theta}+iV_{r\theta})r^2\,..(6)$$

Такъ какъ на обводѣ круга намъ заданы значенія V и $\frac{\partial V}{\partial r}$: $V=f_1(\theta)$, $\frac{\partial V}{\partial r}=f_2(\theta)$, то заданы на немъ и $\frac{\partial V}{\partial\theta}=f'(\theta)$, $\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=f_1''(\theta)$, $\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}=f_2'(\theta)$, а тогда по фор. (31) стр. 124, найдемъ для точекъ обвода круга:

$$\left.\begin{aligned} V_{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{R^2} f_1''(\theta) + \frac{1}{R} f_2(\theta) \\ V_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{1}{R} f_2'(\theta) - \frac{1}{R^2} f'_1(\theta) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (7)$$

и слѣд-о изъ (6) для точекъ обвода круга мы найдемъ:

$$\left[-\tfrac{1}{2} R^2 \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - i F(\zeta) + (V_{rr} + V_{\theta\theta}) R^2\right]_{r=R} =$$

$$= 2\left(f_1''(\theta) + R f_2(\theta) + i R f_2'(\theta) - i f_1'(\theta)\right) \quad . \; . \quad (8)$$

и слѣд-о, если обозначимъ:

$$-\tfrac{1}{2} R^2 \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - iF(\zeta) = -i\chi(\zeta) = -i(\mathfrak{F} + i\Psi) = \Psi - i\mathfrak{F} \; . \, . (9)$$

$$[\mathfrak{F}]_{r=R} = 2\left(f_1'(\theta) - R f_2'(\theta)\right),$$

а потому по фор. (4) стр. 50:

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[f_1'(\psi) - R f_2'(\psi)](R^2 - r^2)\, d\psi}{R^2 - 2Rr\, Cos(\theta - \psi) + r^2} \quad . \; . \; (10)$$

и по фор. (5) стр. 51:

$$\Psi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[f_1'(\psi) - R f_2'(\psi)]\, 2rR\, Sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr\, Cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi + C, \, . \, . (11)$$

а, т. к. изъ (8) по фор. (4) стр. 50:

$$-i(\mathfrak{F} + i\Psi) + (V_{rr} + V_{\theta\theta}) R^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[f''(\psi) + R f_2(\psi) + i R f'_2(\psi) - i f_1'(\psi)](R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr\, Cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi, \, . (12)$$

то мы найдемъ изъ (10), (11) и (12):

$$(V_{rr} + V_{\theta\theta}) R^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[f_1''(\psi) + R f_2(\psi)](R^2 - r^2) - 2rR[f_1'(\psi) - R f_2'(\psi)]\, Sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2Rr\, Cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\psi$$

Найдя $V_{rr} + V_{\theta\theta}$, мы найдемъ, по фор. (19) стр. 120:

$$2V_{r\theta}\,r^2 = \tfrac{1}{2}\,r^2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(V_{rr}+V_{\theta\theta}) - \varphi$$

$$(V_{\theta\theta}-V_{rr})\,r^2 = -\tfrac{1}{2}\,r^3\,\frac{\partial}{\partial r}\,(V_{rr}+V_{\theta\theta}) + \psi,$$

гдѣ φ и ψ найдутся изъ (9), т. к. $\varphi + i\psi = F(\zeta)$, Φ и Ψ опредѣляются изъ (10) и (11), а

$$\frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\zeta} = \frac{\partial\,(V_{rr}+V_{\theta\theta})}{\partial\xi} - i\,\frac{\partial\,(V_{rr}+V_{\theta\theta})}{\partial\eta}$$

Зная: $V_{rr}=V_{s_1s_1}$, $V_{\theta\theta}=V_{s_2s_2}$, $V_{r\theta}=V_{s_1s_2}$, мы найдемъ V_{xx}, V_{yy}, V_{xy} по фор. (40) стр. 127 и слѣд-о найдемъ V по фор. (3) стр. 116.

Рѣшеніе вопроса для круга дано въ другомъ видѣ E. Almansi и G. Lauricella (см. примѣч.***) къ стр. XIII).

§ 30. Примѣненіе предъидущей теоріи къ эллипсу и къ нѣкоторымъ другимъ контурамъ.

Введемъ теперь эллиптическія координаты въ изотермической формѣ, положивъ (стр. 24):

$$z = x + iy = f(\zeta) = c\,Cos h\,\zeta = c\,Cos h\,(\xi + i\eta)$$

откуда:

$$x = c\,Cos h\,\xi\,Cos\,\eta\,,\quad y = c\,Sin h\,\xi\,Sin\,\eta$$

Кривыя $\xi = const.$ будутъ эллипсы:

$$\frac{x^2}{c^2\,Cos h^2\xi} + \frac{y^2}{c^2\,Sin h^2\xi} = 1$$

Кривыя $\eta = const.$ будутъ гиперболы:

$$\frac{x^2}{c^2\,Cos^2\eta} - \frac{y^2}{c^2\,Sin^2\eta} = 1$$

$$h = \frac{1}{c\sqrt{Cos h^2\xi - Cos\,\eta}} = \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{Cos h 2\xi - Cos 2\eta}}$$

$$\alpha + i\beta = -\tfrac{1}{2}c^2 \, Cosh\,(\xi - i\eta)\, Sinh\,(\xi + i\eta) =$$

$$-\frac{c^2}{4}(Sinh\,2\,\xi + i\,Sin\,2\,\eta) \quad . \quad . \quad (1)$$

Если на обводѣ эллипса $\xi = \alpha$ намъ заданы значенія V и значенія $\frac{\partial V}{\partial n} = h\frac{\partial V}{\partial \xi}$ какъ функціи отъ η, то въ силу соотношеній (29) стр. 123 намъ будутъ заданы на обводѣ эллипса $V_{s_1 s_1}$ и $V_{s_1 s_2}$ т. е.

$$[V_{s_1 s_1}]_{\xi=\alpha} \text{ и } [V_{s_1 s_2}]_{\xi=\alpha}$$

По фор. (34) найдемъ:

$$(\alpha + i\beta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - i\,F(\zeta) + \frac{V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}}{h^2} = \frac{2\,(V_{s_1 s_1} + i\,V_{s_1 s_2})}{h^2} \;..(2)$$

причемъ вещ. ч. $\Phi(\zeta) = V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}$.

Изъ (1) имѣемъ:

$$[\alpha + i\beta]_{\xi=\alpha} = [-\tfrac{1}{2}c^2\,Cosh\,(2\,\alpha - \zeta)\,Sin\,h\,\zeta]_{\xi=\alpha} = [\mathfrak{f}(\zeta)]_{\xi=\alpha},$$

где $\mathfrak{f}(\zeta) = -\tfrac{1}{2}c^2\,Cosh\,(2\,\alpha - \zeta)\,Sinh\,\zeta$, а $\zeta = \xi + i\eta$

Такъ какъ для всѣхъ значеній внутри эллипса $\xi = \alpha$ $\mathfrak{f}(\zeta)$ остается конечной, непрерывной и однозначной и кромѣ того въ силу (2):

$$\left[\mathfrak{f}(\zeta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - i\,F(\zeta)\right]_{\xi=\alpha} + \left[\frac{V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}}{h^2}\right]_{\xi=\alpha} =$$

$$= 2\left[\frac{V_{s_1 s_1} + i\,V_{s_1 s_2}}{h^2}\right]_{\xi=\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

то

$$\text{мнимая часть} \left[\mathfrak{f}(\zeta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - i\,F(\zeta)\right]_{\xi=\alpha} = 2\,i\left[\frac{V_{s_1 s_2}}{h^2}\right]_{\xi=\alpha}$$

и мы можемъ положить (см. стр. 60):

мнимая часть $\left[\mathfrak{F}(\zeta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - i\,F(\zeta)\right] =$

$$= \frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[V_{s_1 s_2}]_{\xi=\alpha}(\xi-\alpha)\,ds}{[h^2]_{\xi=\alpha}\{(s-\eta)^2+(\xi-\alpha)^2\}}\text{, а}$$

вещественная часть $\left[\mathfrak{F}(\zeta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - i\,F(\zeta)\right] =$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[V_{s_1 s_2}]_{\xi=\alpha}(s-\eta)\,ds}{[h^2]_{\xi=\alpha}\{(s-\eta)^2+(\xi-\alpha)^2\}},$$

а слѣд-о изъ (3):

$$\frac{V_{s_1 s_1}+V_{s_2 s_2}}{h^2} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\{[V_{s_2 s_2}]_{\xi=\alpha}(\xi-\alpha)+[V_{s_1 s_2}]_{\xi=\alpha}(s-\eta)\}}{[h^2]_{\xi=\alpha}[(s-\eta)^2+(\xi-\alpha)^2]}\,ds$$

Найдя $V_{s_1 s_1}+V_{s_2 s_2}$ и слѣд-о, зная

$$\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} = \frac{\partial(V_{s_1 s_1}+V_{s_2 s_2})}{\partial\xi} - i\,\frac{\partial(V_{s_1 s_1}+V_{s_2 s_2})}{\partial\eta},$$

мы найдемъ:

$$V_{xx},\quad V_{yy},\quad V_{xy}$$

по фор. (40) стр. 127, а затѣмъ найдемъ V при помощи 2-хъ квадратуръ.

Точно также мы можемъ разсматриваемую теорію приложить къ случаю контуровъ, преобразующихся конформно на кругъ при помощи цѣлыхъ полиномовъ, положивъ (см. фор. (1) стр. 41)

$$z = f(\zeta) = \sum_n (a_n - ib_n)e^{n\zeta},$$

гдѣ a_n, b_n вещественныя постоянныя, а Σ распространена по цѣлымъ значеніямъ n.

Примѣняя нашу теорію къ кривымъ $\xi=$ пост., мы рѣшимъ задачу для кривыхъ, конформно преобразующихся на кругъ при помощи цѣлыхъ полиномовъ.

При этомъ мы предполагаемъ, что (см. стр. 125 фор. (35)):

$$\mathfrak{F}(\zeta) = -\tfrac{1}{2}\bar{f}(2\alpha-\zeta)f'(\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

представляетъ внутри разсматриваемаго контура конечную, непрерывную и однозначную функцію комплекснаго перемѣннаго ζ. Замѣтимъ, что, если бы (4) въ какой нибудь точкѣ внутри контура теряло свойство конечности и непрерывности, но произведеніе

$$\chi(\zeta) = \mathfrak{f}(\zeta)\,\mathsf{F}(\zeta) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

было конечно, непрерывно и однозначно, гдѣ $\mathsf{F}(\zeta)$ функція комплекснаго перемѣннаго внутри разсматриваемаго контура конечная, непрерывная и однозначная, то легко обойти требованіе, чтобы (4) было конечно, непрерывно и однозначно. Мы множимъ въ этомъ случаѣ обѣ части ур-ія (34) стр. 125 на $\mathsf{F}(\zeta)$; найдемъ:

$$(\alpha + i\beta)\mathsf{F}(\zeta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - iF_0(\zeta) + \frac{V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}}{h^2}\mathsf{F}(\zeta) =$$

$$= \frac{2(V_{s_2 s_2} + iV_{s_1 s_2})}{h^2}\mathsf{F}(\zeta), \quad . \; . \quad (6)$$

гдѣ

$$F_0(\zeta) = F(\zeta)\,\mathsf{F}(\zeta)$$

По условію:

$$(\alpha + i\beta)_{\xi = a} = [\mathfrak{f}(\zeta)]_{\xi = a}$$

и

$$[\mathsf{F}(\zeta)(\alpha + i\beta)]_{\xi = a} = [\chi(\zeta)]_{\xi = a} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

Такъ какъ $V_{s_2 s_2}$ и $V_{s_1 s_2}$ на контурѣ являются заданными, то, обозначивъ вещественную и мнимую части функціи

$$\chi(\zeta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - iF_0(\zeta)$$

вездѣ внутри нашего контура конечной, непрерывной и однозначной черезъ M и Ni, т. е., положивъ:

$$\chi(\zeta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} - iF_0(\zeta) = M + Ni, \quad . \; . \; . \quad (8),$$

мы найдемъ въ силу (6), (7), положивъ: $\mathsf{F}(\zeta) = A + iB$

$$[M + iN]_{\xi = a} + \left\{\frac{V_{s_1 s_1} + V_{s_2 s_2}}{h^2}(A + iB)\right\}_{\xi = a} =$$

$$=\left\{\frac{2}{h^2}[V_{s_2 s_2}A-V_{s_1 s_2}B+i(BV_{s_2 s_2}+AV_{s_1 s_2})]\right\}_{\xi=\alpha}$$

т. е. слѣд-о, обозначая значенія $M, N, A, B, h, V_{s_2 s_2}, V_{s_1 s_2}$ при $\zeta=\alpha$ черезъ $M_\alpha, N_\alpha, A_\alpha, B_\alpha, h_\alpha, V_{(s_2 s_2)\alpha}, V_{(s_1 s_2)\alpha}$:

$$M_\alpha+\frac{V_{(s_1 s_1)\alpha}+V_{(s_1 s_2)\alpha}}{h^2_\alpha}A_\alpha=\frac{2}{h^2_\alpha}(V_{(s_2 s_2)\alpha}A_\alpha-V_{(s_1 s_2)\alpha}B_\alpha)$$

$$N_\alpha+\frac{(V_{s_1 s_1})_\alpha+V_{(s_1 s_2)\alpha}}{h^2_\alpha}B_\alpha=\frac{2}{h^2_\alpha}(V_{(s_2 s_2)\alpha}B_\alpha+V_{(s_1 s_2)\alpha}A_\alpha)$$

откуда:

$$M_\alpha B_\alpha-N_\alpha A_\alpha=-\frac{2}{h^2_\alpha}(B^2_\alpha+A^2_\alpha)\,V_{(s_1 s_2)\alpha}\quad . \quad . \quad (9)$$

и слѣд-о для опредѣленія функціи комплекснаго перемѣннаго (8) т. е.

$$\chi(\zeta)\frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}-iF_o(\zeta)=M+Ni$$

мы должны рѣшить задачу Римана (9), въ силу которой вещественная и мнимая часть этой функціи связаны линейнымъ соотношеніемъ (9). Эта задача приведена D. Hilbert'омъ въ 1904 г. къ ур-ію Фредгольма (сообщено на III конгрессѣ математиковъ въ Гейдельбергѣ), а въ 1905 г. имъ же съ 2-мъ задачамъ Дирихле*). Условію (5) удовлетворяютъ напр. полюсы и, если особыми точками $f(\zeta)$ являются полюсы: $z=a_1$, $z=a_2$, $z=a_m$, мы за функцію $\mathsf{F}(\zeta)$ можемъ принять:

$$(z-a_1)^{k_1}(z-a_2)^{k_2}\ .\ .\ .\ (z-a_m)^{k_m}$$

Напр. этимъ способомъ можно рѣшить задачу объ отысканіи гипергармонической функціи для прямоугольнаго контура, рѣшенную Estanave и Б. М. Кояловичемъ при помощи безконечныхъ тригонометрическихъ рядовъ, введя изотермическую систему координатъ ξ и η такихъ, что

*) D. Hilbert. Integralgleichungen. Göttinger Nachrichten 1905.

$$\xi + i\eta = Sin\, am(x+iy) \text{ или } z = x+iy = f(\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

Одной изъ кривыхъ $\xi = const.$ является здѣсь прямоугольникъ, котораго стороны относятся какъ $2\,K:K'$, а

$$k = 4\sqrt{q}\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots}\right\}^4 = \frac{2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots}$$

гдѣ $q = e^{-\frac{K'}{K}\pi}$ (H. A. Schwarz. Gesam. Abhand. II Bd. S. 75.)

Особыми точками (4) здѣсь могутъ быть только полюсы и потому предъидущее разсужденіе здѣсь вполнѣ примѣнимо.

Совершенно также, какъ на стр. 112—116 въ § 27 мы приведемъ разсматриваемую нами задачу къ интегральному ур-ію Фредгольма. Если обозначимъ черезъ $F(s)$ и $\Phi(s) = u_s + iv_s$ значенія функцій $F(z)$ и $\Phi(z)$ на разсматриваемомъ контурѣ, мы въ силу ур-ія (14) предъидущаго §-а придемъ къ ур-ію:

$$i(\alpha+i\beta)\left\{\frac{du}{ds}+i\frac{dv}{ds}\right\} + F(s) + ie^{-2\theta i}u_s = \text{дан. фун. } s$$

на разсматриваемомъ контурѣ. Если мы введемъ, слѣдуя Hilbert'у, операцію:

$$MW = \frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G(\sigma,s)}{\partial\sigma}\, W(\sigma)\,d\sigma,$$

то, подобно изложенному на стр. 114 и 115, придемъ и здѣсь къ интегральному ур-ію Фредгольма*):

$$\gamma(s) = \varphi(s) - \int_0^{2l} K(\sigma,s)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

---

*) Приведеніе задачи отъ интегрированія гипергармоническаго ур-ія при заданныхъ условіяхъ на контурѣ къ интегральному ур-ію Фредгольма, но изъ совершенно другихъ соображеній дано A. Haar. Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\triangle\triangle\, U = o$. Gottingen Nachrichten 1907.

§ 31. О рѣшеніяхъ общей задачи математической теоріи упругости, приводящихся къ рѣшеніямъ плоской задачи послѣдней.

Дифференціальныя ур-ія общей задачи математической теоріи упругости, какъ извѣстно, приводятся во 1-хъ): къ 3 дифференціальнымъ ур-іямъ равновѣсія элементарнаго параллелепипеда, представляющимся при отсутствіи внѣшнихъ силъ въ видѣ*):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = O \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = O \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = O \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

и во 2-хъ): къ соотношеніямъ, связывающимъ перемѣщенія частицъ тѣла и развивающіяся въ немъ напряженія**):

$$\left.\begin{aligned} N_1 = 2G\varepsilon_1 + B\theta, \quad T_1 = 2Gg_1 \\ N_2 = 2G\varepsilon_2 + B\theta, \quad T_2 = 2Gg_2 \\ N_3 = 2G\varepsilon_3 + B\theta, \quad T_3 = 2Gg_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

гдѣ G, B коэф-нты упругости тѣла

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2g_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2g_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2g_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} (3)$$

а u, v, w, — приращенія координатъ точекъ тѣла***).

Въ силу ур-ій (2) значенія N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 помимо (1) должны удовлетворять еще нѣкоторымъ усло-

---

*) См. курсъ гидростатики и теоріи упругости Д. Бобылева. СПБ. 1886, откуда нами заимствованы обозначенія.

**) см. вышеуказан. курсъ стр. 113.

***) см. тамъ же стр. 114.

віямъ, аналогичнымъ условію Maurice Lévy въ плоской задачѣ. Этимъ условіямъ легко придать видъ уравненій*):

$$\left.\begin{aligned}
\nabla_2 N_1 &= -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial x^2}\\
\nabla_2 N_2 &= -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial y^2}\\
\nabla_2 N_3 &= -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial z^2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\nabla_2 T_1 &= -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial y\,\partial z}\\
\nabla_2 T_2 &= -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial z\,\partial x}\\
\nabla_2 T_3 &= -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial x\,\partial y},
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4b)$$

гдѣ $\varkappa = \frac{E}{2G} - 1$ и $\frac{1}{1+\varkappa} = \frac{2G}{E}$, E модуль упругости

$$\text{и } \nabla_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Будемъ искать рѣшеній ур-ій (1), удовлетворяющихъ условіямъ (4) и зависящихъ только отъ 2-хъ перемѣнныхъ x, y.

Тогда $\frac{\partial T_2}{\partial z} = \frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial N_3}{\partial z} = 0$ и ур-ія (1) приведутся къ виду:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} &= 0\\
\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 0\\
\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

*) Эти условія легко выводятся изъ (2); мы пришли къ нимъ совершенно самостоятельно, но оказалось при изученіи литературы вопроса, что онѣ даны E. Almansi въ Atti della reale accademia dei Lincei B. XVI 1° semestre 1907 стр. 23—26 и поэтому мы не приводимъ здѣсь ихъ вывода.

а ур-iя (4) къ виду:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_2 N_1 &= -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial x^2} \\ \nabla_2 N_2 &= -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial y^2}, \quad \nabla_2 N_3 = O \end{aligned}\right\} \ldots 6a$$

$$\nabla_2 T_1=0,\ \nabla_2 T_2=O,\ \nabla_2 T_3=-\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial x\partial y}, \ldots 6b$$

гдѣ
$$\nabla_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

Складывая 1-ыя 2 ур-iя (6a), и, прибавляя къ нимъ 3-е ур-iе (6a), умноженное на $-\frac{1}{1+\varkappa}$, мы найдемъ:

$$\nabla_2(N_1+N_2) = -\frac{1}{1+\varkappa}\nabla_2(N_1+N_2), \text{ т. е.}$$

$$\frac{2+\varkappa}{1+\varkappa}\nabla_2(N_1+N_2) = O$$

и слѣд-о:
$$\nabla_2(N_1+N_2) = O, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

а въ силу 3-го ур-iя (6a):

$$\nabla_2(N_1+N_2+N_3) = O \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Поэтому первыя 2 ур-iя (6a) и 3-е ур-iе (6b) можно переписать въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_2 N_1 &= \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial y^2} \\ \nabla_2 N_2 &= \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial x^2} \\ \nabla_2 T_3 &= -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2(N_1+N_2+N_3)}{\partial x\,\partial y} \end{aligned}\right\} \ldots \quad (9)$$

Разсмотримъ теперь плоскую задачу теорiи упругости, напряженiя въ которой N_1, N_2, T_3 удовлетворяютъ слѣд-о условiямъ такой задачи (см. § 2 стр. 9):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}=O\\ \frac{\partial \mathrm{N}_2}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}=O\end{aligned}\right.\qquad \nabla_2(\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2)=O\quad .\quad .\quad (10)$$

Если φ будетъ функція *Airy*, соотвѣтствующая разсматриваемой плоской задачѣ, то

$$\mathrm{N}_1=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\quad \mathrm{N}_2=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \mathrm{T}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\quad .\quad .\quad (11)$$

Изъ этихъ ур-ій слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned}\nabla_2\,\mathrm{N}_1&=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla_2\varphi=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2)\\ \nabla_2\,\mathrm{N}_2&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla_2\varphi=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2)\\ \nabla_2\,\mathrm{T}&=-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\nabla_2\varphi=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2)\end{aligned}\right\}\quad .\quad .\quad (12)$$

Ур-ія (10), (12) совпадутъ съ первыми 2-мя ур-іями (5), съ ур-іями (7) и (9), если $\mathrm{N}_1=N_1$ $\mathrm{N}_2=N_2$ $\mathrm{T}=T_3$ и кромѣ того

$$\frac{1}{1+\varkappa}(N_1+N_2+N_3)=C_{xy}+\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2=C_{xy}+N_1+N_2,$$

гдѣ C_{xy} произвольная линейная функція xy: $C_{xy}=C_1x+C_2y+C_3$ т. е., если

$$\frac{1}{1+\varkappa}N_3=C_{xy}+\left(1-\frac{1}{1+\varkappa}\right)(N_1+N_2)=C_{xy}+\frac{\varkappa}{1+\varkappa}(N_1+N_2)$$

Итакъ слѣд-о въ разсматриваемой задачѣ распредѣленіе напряженій N_1, N_2, T_3 соотвѣтствуетъ плоской задачѣ математической теоріи упругости, а

$$N_3=ax+by+c+\varkappa(N_1+N_2),\quad .\quad .\quad .\quad (13)$$

гдѣ a, b, c — какія угодно постоянныя.

Разсмотримъ теперь напряженія T_1 и T_2, для которыхъ мы имѣемъ соотношенія: 3-е ур-іе (5) и 1-ыя два ур-ія (6b) т. е.

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} = O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$\nabla_2 T_1 = O, \quad \nabla_2 T_2 = O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Изъ ур-iй (14) и (15) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} = O$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial T_2}{\partial y} = k,$$

гдѣ k нѣкоторая постоянная.

Эти ур-iя подходятъ къ типу ур-iй (18) стр. 7, если положить:

$$u = T_1, \quad v = T_2, \quad K_s = k, \quad P_s = 1, \quad Q_s = 0$$

$$l_s = m_s = n_s = O$$

и слѣд-о по фор. (17) стр. 7:

$$T_1 = u = \alpha + \tfrac{1}{2} k P_o + \varphi$$

$$T_2 = v = \beta + \psi,$$

гдѣ

$$P_o = \int dx = x, \text{ а}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} &= O \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} &= \frac{k}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \alpha + \tfrac{1}{2} kx + \varphi \\ T_2 &= \beta + \psi, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

гдѣ α и β удовлетворяютъ ур-iямъ (16), а φ и φ' двѣ сопряженныя функцiи.

Положивъ: $\alpha = \frac{kx}{2}, \ \beta = O,$

мы найдемъ: $T_1 = kx + \varphi, \ T_2 = \psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$

Такимъ образомъ мы найдемъ окончательный результатъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$N_1, \quad N_2, \quad T_3$$

соотвѣтствуютъ какому нибудь рѣшенію плоской задачи,

$$N_3 = \varkappa(N_1 + N_2) + ax + by + c = \frac{E - 2G}{2G}(N_1 + N_2) + ax + by + c,$$

$$T_1 = kx + \varphi, \quad T_2 = \psi, \text{ гдѣ}$$

a, b, c, k — какія нибудь постоянныя, а φ и ψ двѣ сопряженныя функціи.

Примѣры:

1) Возьмемъ рѣшеніе плоской задачи въ полярныхъ координатахъ: $\xi = lgr$ и θ и, положивъ въ фор. (2) стр. 19:

$$\Omega = P + Q = Ae^{-\xi} \, Sin\, \theta + Be^{-\xi} \, Cos\, \theta + Ce^{-2\xi} \, Sin\, 2\theta +$$
$$+ De^{-2\xi} \, Cos\, 2\theta = \frac{1}{r}(A \, Sin\, \theta + B \, Cos\, \theta) +$$
$$+ \frac{1}{r^2}(C \, Sin\, 2\theta + D \, Cos\, 2\theta), \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(Ae^{\xi} \, Cos\, \theta - Be^{\xi} \, Sin\, \theta) = \frac{r}{2}(A \, Cos\, \theta - B \, Sin\, \theta)$$

$$\psi = \tfrac{1}{2}(Ae^{\xi} \, Sin\, \theta + Be^{\xi} \, Cos\, \theta) = \frac{r}{2}(A \, Sin\, \theta + B \, Cos\, \theta),$$

найдемъ:

$$2\, Ur^2 = -\tfrac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \Omega + \varphi = D \, Sin\, 2\theta - C \, Cos\, 2\theta$$

и слѣд-о:

$$U = \frac{1}{2r^2}(D \, Sin\, 2\theta - C \, Cos\, 2\theta)$$

Точно также:

$$(P - Q) r^2 = -\tfrac{1}{2} r^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega + \psi = \tfrac{1}{2} Ae^{\xi} \, Sin\, \theta + \tfrac{1}{2} Be^{\xi} \, Cos\, \theta +$$
$$+ C \, Sin\, 2\,\theta + D \, Cos\, 2\,\theta + \psi = Ar \, Sin\, \theta + Br \, Cos\, \theta +$$
$$+ C \, Sin\, 2\,\theta + D \, Cos\, 2\,\theta \quad \text{т. е.}$$

$$P - Q = \frac{1}{r}(A\,Sin\,\theta + B\,Cos\,\theta) + \frac{1}{r^2}(C\,Sin\,2\,\theta + D\,Cos\,2\,\theta)$$

или въ силу (19): $P - Q = P + Q$ и слѣд-о:

$$Q = O,$$

$$P = \frac{1}{r}(A\,Sin\,\theta + B\,Cos\,\theta) + \frac{1}{r^2}(C\,Sin\,2\theta + D\,Cos\,2\theta),$$

$$\text{а} \quad N_3 = \frac{E - 2G}{2G}P + const.\,(a = b = c = 0)$$

Положивъ въ (18): $k = 0 \quad \varphi = \psi = 0$, мы найдемъ рѣшеніе:

$$P = \frac{1}{r}(A\,Sin\,\theta + B\,Cos\,\theta) + \frac{1}{r^2}(C\,Sin\,2\theta + D\,Cos\,2\theta),$$

$$Q = O, \quad U = \frac{1}{2r^2}(D\,Sin\,2\theta - C\,Cos\,2\theta),$$

$$N_3 = \frac{E - 2G}{2G}P + const. = \frac{E - 2G}{2G}\Big(\frac{1}{r}(A\,Sin\,\theta + B\,Cos\,\theta) +$$
$$+ \frac{1}{r^2}(C\,Sin\,2\theta + D\,Cos\,2\theta)\Big) + Const. \qquad T_1 = T_2 = 0$$

2) Положимъ теперь:

$$\Omega = P + Q = Ae^{-\xi}Sin\Theta + Be^{-\xi}Cos\Theta + Ce^{2\xi}Sin2\Theta + De^{2\xi}Cos2\Theta =$$
$$= \frac{1}{r}(A\,Sin\,\Theta + B\,Cos\,\Theta) + r^2(C\,Sin\,2\,\Theta + D\,Cos\,2\,\Theta)$$

и возьмемъ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -\frac{3r}{2}(A\,Cos\,\Theta - B\,Sin\,\Theta) \\ \psi &= -\frac{3r}{2}(A\,Sin\,\Theta + B\,Cos\,\Theta) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (20)$$

Найдемъ:

$$2\,Ur^2 = -\tfrac{1}{2}r^2\frac{\partial}{\partial\Theta}\Omega + \varphi = -r^4(C\,Cos\,2\Theta - D\,Sin\,2\Theta) -$$
$$- 2r(A\,Cos\,\Theta - B\,Sin\,\Theta).$$

и слѣд-о:

$$U = -\frac{r^2}{2}\left(C\,Cos\,2\theta - D\,Sin\,2\theta\right) - \frac{1}{r}\left(A\,Cos\,\theta - B\,Sin\,\theta\right)$$

Точно также:

$$(P-Q)\,r^2 = -\tfrac{1}{2}\,r^2\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega + \phi = \tfrac{1}{2}\left(Ae^{\xi}\,Sin\,\theta + Be^{\xi}\,Cos\,\theta\right) -$$

$$- r^2\left(Ce^{2\xi}\,Sin\,2\,\theta + De^{2\xi}\,Cos\,2\,\theta\right) + \phi = -r^2\left(Cr^2\,Sin\,2\,\theta +\right.$$

$$\left. + Dr^2\,Cos\,2\theta\right) - \left(Ar\,Sin\,\theta + Br\,Cos\,\theta\right) \text{ или:}$$

$$P - Q = -\frac{1}{r}\left(A\,Sin\,\theta + B\,Cos\,\theta\right) - r^2\left(C\,Sin\,2\theta +\right.$$

$$\left. + D\,Cos\,2\theta\right) = -(P+Q)$$

т. е. $P = O$, а слѣд-о:

$$Q = \frac{1}{r}\left(A\,Sin\,\theta + B\,Cos\,\theta\right) + r^2\left(C\,Sin\,2\theta + D\,Cos\,2\theta\right)$$

$$N_3 = \frac{E-2G}{2G}\,Q + const. = \frac{E-2G}{2G}\left(\frac{1}{r}\left(A\,Sin\,\theta + B\,Cos\,\theta\right) +\right.$$

$$\left. + r^2\left(C\,Sin\,2\theta + D\,Cos\,2\theta\right)\right) + const.\ (a = b = c = 0)$$

Положивъ въ (17): $k = 0$, $\varphi = \phi = 0$ и, придавъ къ φ (20) постоянную, найдемъ рѣшеніе проф. Н. Н. Митинскаго*), совершенно аналогичное 1-ому: $P = T_2 = T_1 = 0$

$$Q = \frac{1}{r}\left(A\,Sin\,\theta + B\,Cos\,\theta\right) + r^2\left(C\,Sin\,2\theta + D\,Cos\,2\theta\right),$$

$$U = -\frac{r^2}{2}\left(C\,Cos\,2\theta - D\,Sin\,2\theta\right) - \frac{1}{r}\left(A\,Cos\,\theta - B\,Sin\,\theta\right),$$

$$N_3 = \frac{E-2G}{2G}\,Q + const.$$

---

*) Инженеръ Н. Н. Митинскій. Объ изгибѣ кривыхъ брусьевъ СПБ. 1900. Первый изъ разобранныхъ случаевъ совершенно аналогичный второму ускользнулъ отъ вниманія автора.

3) Положимъ теперь:

$$\Omega = P + Q = Ae^{-\xi} Sin\,\Theta + Be^{-\xi} Cos\,\Theta + Ce^{\alpha\xi} Sin\,\alpha\,\Theta + De^{\alpha\xi} Cos\,\alpha\,\Theta =$$

$$= \frac{1}{r}\,(A\,Sin\,\Theta + B\,Cos\,\Theta) + r^{\alpha}\,(C\,Sin\,\alpha\,\Theta + D\,Cos\,\alpha\,\Theta)$$

и возьмемъ:

$$\varphi = -\frac{(\alpha+1)\,r}{2}\,(A\,Cos\,\Theta - B\,Sin\,\Theta)$$

$$\psi = -\frac{(\alpha+1)\,r}{2}\,(A\,Sin\,\Theta + B\,Cos\,\Theta)$$

Найдемъ:

$$2\,Ur^2 = -\tfrac{1}{2}\,r^2\,\frac{\partial}{\partial\Theta}\,\Omega + \varphi = \frac{\alpha}{2}\,r^{\alpha+2}\,(C\,Cos\,2\Theta - D\,Sin\,2\Theta) -$$

$$- \frac{\alpha+1}{2}\,r\,(A\,Cos\,\Theta - B\,Sin\,\Theta).$$

$$(P - Q)\,r^2 = -\tfrac{1}{2}\,r^2\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\Omega + \psi = \tfrac{1}{2}\,(Ar\,Sin\,\Theta + Br\,Cos\,\Theta) -$$

$$-\frac{\alpha}{2}\,r^{\alpha+2}\,(C\,Sin\,\alpha\,\Theta + D\,Cos\,\alpha\,\Theta) - \frac{(\alpha+1)\,r}{2}\,(A\,Sin\,\Theta + B\,Cos\,\Theta)$$

$$= -\frac{\alpha}{2}\,r^2\,\Omega = -\frac{\alpha}{2}\,r^2\,(P + Q)$$

Отсюда:

$$2\,(Q - P) = \alpha\,(P + Q)$$

т. е.

$$P\,(\alpha + 2) = Q\,(2 - \alpha)$$

и слѣд-о для разсматриваемаго случая мы имѣемъ:

$$P = \frac{2-\alpha}{4}\,(P + Q) = \frac{2-\alpha}{4r}\,(A\,Sin\,\Theta + B\,Cos\,\Theta) +$$

$$+ \frac{2-\alpha}{4}\,r^{\alpha}\,(C\,Sin\,\alpha\,\Theta + D\,Cos\,\alpha\,\Theta)$$

$$Q = \frac{2+\alpha}{4}\,(P + Q) = \frac{2+\alpha}{4r}\,(A\,Sin\,\Theta + B\,Cos\,\Theta) +$$

$$+ \frac{2+\alpha}{4}\,r^{\alpha}\,(C\,Sin\,\alpha\,\Theta + D\,Cos\,\alpha\,\Theta)$$

$$U = -\frac{\alpha}{4} r^{\alpha} (C \operatorname{Cos} 2\theta - D \operatorname{Sin} 2\theta) - \frac{\alpha+1}{4} \frac{1}{r} (A \operatorname{Cos} \theta - B \operatorname{Sin} \theta)$$

$$\text{а} \quad N_3 = \frac{E-2G}{2G} (P+Q) + const. =$$

$$\frac{E-2G}{2G} \left(\frac{1}{r} (A \operatorname{Sin} \theta + B \operatorname{Cos} \theta) + r^{\alpha} (C \operatorname{Sin} \alpha \theta + D \operatorname{Cos} \alpha \theta) \right)$$

Предъидущіе результаты получаются отсюда при

$$\alpha = -2 \quad \text{и} \quad \alpha = 2$$

4) Интересныя рѣшенія получаются также изъ случаевъ Х. С. Головина (стр. 20) (№ 1) и Ribière'a (стр. 19) (№ 3) и (№ 8).

Полагая, какъ и на стр. 19 въ формулахъ (2) стр. 19:

$$P + Q = \sum (A_m r^m + A_{-m} r^{-m}) \operatorname{Cos} m\theta$$

$$\varphi = \sum (B_m r^m + B_{-m} r^{-m}) \operatorname{Sin} m\theta$$

$$\psi = \sum (-B_m r^m + B_{-m} r^{-m}) \operatorname{Cos} m\theta$$

и, разсматривая соотвѣтствующую задачу 3-хъ измѣреній, мы придемъ къ ряду интересныхъ рѣшеній общей задачи теоріи упругости, которыя легко получаются при помощи предъидущихъ формулъ. Во всѣхъ этихъ рѣшеніяхъ напряженіе N_3 найдется по фор. (13) стр. 140:

$$N_3 = ax + by + c + \varkappa (N_1 + N_2),$$

гдѣ a, b, c — какія угодно постоянныя.

Всѣ эти рѣшенія даютъ для всѣхъ напряженій выраженія, зависящія только отъ 2-хъ перемѣнныхъ x, y, деформація же тѣла, сопровождающая эти напряженія вообще говоря зависитъ и отъ третьей перемѣнной z.

Предположимъ теперь, что и распредѣленіе напряженій зависитъ отъ перемѣнной z и возьмемъ простѣйшій случай, когда напряженія выражаются черезъ z цѣлыми полиномами отъ z, коэффиціенты которыхъ являются функціями x, y.

§ 32. О рѣшеніяхъ общей задачи математической теоріи упругости, расположенныхъ по степенямъ одной изъ координатъ z.

Постараемся удовлетворить ур-іямъ (1) и (4) § 31 рядами расположенными по степенямъ z, положивъ:

$$\left.\begin{aligned}
N_1 &= N_{10} + N_{11} z + N_{12} z^2 + \ldots + N_{1n} z^n = \sum_{i=o}^{n} N_{1i} z^i \\
N_2 &= N_{20} + N_{21} z + N_{22} z^2 + \ldots + N_{2n} z^n = \sum_{i=o}^{n} N_{2i} z^i \\
N_3 &= N_{30} + N_{31} z + N_{32} z^2 + \ldots + N_{3n} z^n = \sum_{i=o}^{n} N_{3i} z^i \\
T_1 &= T_{10} + T_{11} z + T_{12} z^2 + \ldots + T_{1n} z^n = \sum_{i=o}^{n} T_{1i} z^i \\
T_2 &= T_{20} + T_{21} z + T_{22} z^2 + \ldots + T_{2n} z^n = \sum_{i=o}^{n} T_{2i} z^i \\
T_3 &= T_{30} + T_{31} z + T_{32} z^2 + \ldots + T_{3n} z^n = \sum_{i=o}^{n} T_{3i} z^i,
\end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

гдѣ коэф-ты N_{si} и T_{si} при степеняхъ z мы предположимъ функціями однихъ x, y.

Подставляя эти выраженія въ ур-ія (1) стр. 137 и (4) стр. 138, мы найдемъ, приравнивая въ немъ 0 коэф-нты при z^i:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N_{1i}}{\partial x} + \frac{\partial T_{3i}}{\partial y} + (i+1)\, T_{2,\,i+1} &= 0 \\
\frac{\partial T_{3i}}{\partial x} + \frac{\partial N_{2i}}{\partial y} + (i+1)\, T_{1,\,i+1} &= 0 \\
\frac{\partial T_{2i}}{\partial x} + \frac{\partial T_{1i}}{\partial y} + (i+1)\, N_{3,\,i+1} &= 0
\end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ (2\text{А})$$

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla_2 N_{1i} + (i+2)(i+1) N_{1,\,i+2} = \\
&\qquad = -\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2 (N_{1i}+N_{2i}+N_{3i})}{\partial x^2} \\
&\nabla_2 N_{2i} + (i+2)(i+1) N_{2,\,i+2} = \\
&\qquad = -\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2 (N_{1i}+N_{2i}+N_{3i})}{\partial y^2} \\
&\nabla_2 N_{3i} + (i+2)(i+1) N_{3,\,i+2} = \\
&\qquad = -\frac{1}{1+\varkappa}(i+2)(i+1)(N_{1,\,i+2}+N_{2,\,i+2}+N_{3,\,i+2})
\end{aligned}\right\} . \quad (2_B)$$

и точно также:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla_2 T_{1i} + (i+2)(i+1) T_{1,\,i+2} = \\
&\qquad = -\frac{1}{1+\varkappa}(i+1)\frac{\partial}{\partial y}(N_{1,\,i+1}+N_{2,\,i+1}+N_{3,\,i+1}) \\
&\nabla_2 T_{2i} + (i+2)(i+1) T_{2,\,i+2} = \\
&\qquad = -\frac{1}{1+\varkappa}(i+1)\frac{\partial}{\partial x}(N_{1,\,i+1}+N_{2,\,i+1}+N_{3,\,i+1}) \\
&\nabla_2 T_{3i} + (i+2)(i+1) T_{3,\,i+2} = \\
&\qquad = -\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(N_{1i}+N_{2i}+N_{3i})
\end{aligned}\right\} . \quad (2_C)$$

Если $i = n$, то ур-ія (2_A) (2_B) (2_C) принимаютъ простой видъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N_{1n}}{\partial x} + \frac{\partial T_{3n}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial T_{3n}}{\partial x} + \frac{\partial N_{2y}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial T_{2n}}{\partial x} + \frac{\partial T_{1n}}{\partial y} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$\nabla_2 N_{1n} = -\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}(N_{1n}+N_{2n}+N_{3n}) \Big\} \quad . \; . \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla_2 N_{2n} &= -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(N_{1n}+N_{2n}+N_{3n})\\ \nabla_2 N_{3n} &= 0\end{aligned}\right\}\quad . \; . \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla_2 T_{1n} = 0 \quad \nabla_2 T_{2n} = 0\\ \nabla_2 T_{3n} = -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(N_{1i}+N_{2i}+N_{3i})\end{aligned}\right\}\quad . \; . \quad (5)$$

Ур-ія (3), (4) и (5) совпадаютъ съ ур-іями (5), (6_a) и (6_b) предъидущаго § и поэтому

$$N_{1n}, \quad N_{2n}, \quad T_{3n}$$

соотвѣтствуютъ плоской задачѣ математической теоріи упругости, а (фор. (13) стр. 140):

$$N_{3n} = ax + by + c + \varkappa\,(N_{1,n} + N_{2,n}), \; . \; . \; . \; . \quad (5_a)$$

гдѣ a, b, c какія угодно постоянныя

$$T_{1n} = kx + \varphi \qquad T_{2n} = \psi \quad \text{(см. фор. (18))} \; . \; . \; . \quad (6)$$

Положимъ теперь $i = n - 1$; ур-ія (2_A) (2_B) (2_C) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_{1,n-1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{3,n-1}}{\partial y} &= -nT_{2,n}\\ \frac{\partial T_{3,n-1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{2,n-1}}{\partial y} &= -nT_{1,n}\\ \frac{\partial T_{2,n-1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{1,n-1}}{\partial y} &= -nN_{3,n}\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla_2 N_{1,n-1} &= -\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2 (N_{1,n-1}+N_{2,n-1}+N_{3,n-1})}{\partial x^2}\\ \nabla_2 N_{2,n-1} &= -\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2 (N_{1,n-1}+N_{2,n-1}+N_{3,n-1})}{\partial y^2}\\ \nabla_2 N_{3,n-1} &= 0\end{aligned}\right\} . \, (8)$$

$$\nabla_2 T_{1,n-1} = -\frac{n}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}(N_{1,n}+N_{2,n}+N_{3,n}) \; . \; . \; (9_a)$$

$$\nabla_2 T_{2,\,n-1} = -\frac{n}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}(N_{1,\,n}+N_{2,\,n}+N_{3,\,n}) \,..\, (9_b)$$

$$\nabla_2 T_{3,\,n-1} = -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(N_{1,\,n-1}+N_{2,\,n-1}+N_{3,\,n-1}) \,..\, (8_c)$$

Имѣя въ виду, что по фор. (6) на основаніи примѣчанія *a*) стр. 4 можно положить:

$$T_{1n} = kx + \frac{\partial V}{\partial x},\quad T_{2n} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad .\ .\ .\ .\ (10)$$

гдѣ V удовлетворяетъ диф-ому ур-ію:

$$\nabla_2 V = 0,$$

мы найдемъ изъ (7), (8) и (9):

$$\frac{\partial N_{1,\,n-1}}{\partial x} + \frac{\partial\left(T_{3,\,n-1} + nV + \frac{nkx^2}{2}\right)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\left(T_{3,\,n-1} + nV + \frac{nkx^2}{2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial N_{2,\,n-1}}{\partial y} = 0$$

$$\nabla_2 (N_{1,\,n-1} + N_{2,\,n-1}) = 0$$

т. е. напряженія:

$$\mathrm{N}_1 = N_{1,\,n-1},\quad \mathrm{N}_2 = N_{2,\,n-1},\quad \mathrm{T}_3 = T_{3,\,n-1} + nV + \frac{nkx^2}{2} \,..\, (11)$$

соотвѣтствуютъ напряженіямъ плоской задачи.

Изъ первыхъ 2-хъ формулъ (8) совершенно также какъ въ предъидущемъ §-ѣ мы заключимъ, что

$$N_{3,\,n-1} = ax + by + c + \varkappa(N_{1,\,n-1} + N_{2,\,n-1}),\ .\ .\ (12)$$

гдѣ a, b, c какія угодно постоянныя.

Для интегрированія ур-ій, опредѣляющихъ T_2 и T_1, т. е. ур-ій (9_a) (9_b) и 3-яго ур-ія (7), въ которое вмѣсто N_{3n} поставлено (5_a), положимъ:

$$\frac{\partial T_{2,\,n-1}}{\partial y} - \frac{\partial T_{1,\,n-1}}{\partial x} = \rho_n$$

Для опредѣленія ρ_n мы будемъ имѣть ур-ія:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_n}{\partial x} = \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}(N_{1,n} + N_{2,n} - \varkappa N_{3,n})$$

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_n}{\partial y} = \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}(\varkappa N_{3,n} - N_{1,n} - N_{2,n})$$

т. е. слѣд-о:

$$\mathfrak{P}_n \text{ и } \mathfrak{Q}_n = \frac{1}{1+\varkappa}(N_{1,n} + N_{2,n} - \varkappa N_{3,n}) \quad . \; . \; . \; (13)$$

функціи сопряженныя и для опредѣленія $T_{1,n-1}$ и $T_{2,n-1}$ мы имѣемъ систему ур-ій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T_{2,n-1}}{\partial y} - \frac{\partial T_{1,n-1}}{\partial x} &= n\mathfrak{P}_n \\ \frac{\partial T_{2,n-1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{1,n-1}}{\partial y} &= -nN_{3,n}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (14)$$

а, т. к. въ силу (5_a):

$$N_{3n} = ax + by + c + \varkappa(N_{1,n} + N_{2,n}), \text{ то}$$

въ силу (13):

$$\mathfrak{Q}_n = \frac{1}{1+\varkappa}\left(\left(\frac{1}{\varkappa} - \varkappa\right)N_{3,n} - \frac{1}{\varkappa}(ax + by + c)\right)$$

т. е.

$$N_{3n} = \frac{\varkappa}{1-\varkappa^2}\left\{(1+\varkappa)\mathfrak{Q}_n + \frac{1}{\varkappa}(ax + by + c)\right\} =$$

$$= \frac{\varkappa}{1-\varkappa}\mathfrak{Q}_n + \frac{1}{1-\varkappa^2}(ax + by + c)$$

$$\frac{\partial T_{1,n-1}}{\partial x} - \frac{\partial T_{2,n-1}}{\partial y} = -n\mathfrak{P}_n$$

$$\frac{\partial T_{1,n-1}}{\partial y} + \frac{\partial T_{2,n-1}}{\partial x} = -n\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\mathfrak{Q}_n - \frac{n}{1-\varkappa^2}(ax + by + c)$$

Эти ур-ія подходятъ къ типу ур-ій (18) стр. 7, гдѣ $j = 1,2$

$$P_1 = \mathfrak{P}_n, \quad Q_1 = \mathfrak{Q}_n, \quad P_2 = ax + by + c, \quad Q_2 = ay - bx + c_1,$$

$$k_1 = -n, \quad l_1 = 0, \quad k_2 = l_2 = 0$$

$$m_1 = 0, \quad n_1 = \frac{n\varkappa}{\varkappa - 1}, \quad m_2 = \frac{n}{\varkappa^2 - 1}, \quad n_2 = 0$$

$$h_1 = \tfrac{1}{2}\left(-n + \frac{n\chi}{\chi - 1}\right),\ h_2 = 0,\ P_{o1} = \tfrac{1}{2}\left(-n - \frac{n\chi}{\chi - 1}\right),\ P_{o2} = 0$$

$$H_1 = 0, \quad H_2 = \tfrac{1}{2}\frac{n}{\chi^2 - 1}, \quad Q_{o1} = 0, \quad Q_{o2} = \tfrac{1}{2}\frac{n}{\chi^2 - 1},$$

и T_1 и T_2 найдутся по формуламъ (17) стр. 7.

Прежде чѣмъ переходить къ дальнѣйшему изслѣдованію коэф-овъ въ фор. (1) стр. 147 изслѣдуемъ 2 частные случая:

1. Задача Санъ Венана. Постараемся удовлетворить основнымъ ур-іямъ (2) въ предположеніи, что

$$N_1 = N_2 = T_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

т. е. слѣд-о:

$$N_{1i} = N_{2i} = T_{3i} = 0 \text{ при всякомъ } i$$

Изъ 1-хъ 2-хъ ур-ій (2_A) мы найдемъ:

$$T_{1,i+1} = T_{2,i+1} = 0 \text{ при всякомъ } i$$

т. е. слѣд-о:

$$T_{11} = T_{12} = \ldots = 0, \quad T_{21} = T_{22} = \ldots = 0$$

и могутъ быть не $=0$ только

$$T_{10} \text{ и } T_{20}$$

Изъ ур-ій (2_B) мы найдемъ:

$$\frac{\partial^2 N_{3i}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N_{3i}}{\partial y^2} = N_{3,i+2} = 0 \text{ при всякомъ } i$$

т. е. изъ всѣхъ N_{3i} не равны 0 лишь N_{30} и N_{31}, которыя могутъ быть только линейными функціями отъ x, y т. е.:

$$N_{30} = a + a_1 x + a_2 y, \quad N_{31} = b + b_1 x + b_2 y,$$

гдѣ a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 — какія угодно постоянныя и слѣд-о:

$$N_3 = a + a_1 x + a_2 y + (b + b_1 x + b_2 y)\, z,$$

гдѣ a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, — какія угодно постоянныя.

Для опредѣленія T_{10} и T_{20} мы имѣемъ условія:

$$\frac{\partial T_{20}}{\partial x} + \frac{\partial T_{10}}{\partial y} + b + b_1 x + b_2 y = 0$$

$$\nabla_2 T_{10} = -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial N_{31}}{\partial y} = -\frac{b_2}{1+\varkappa}$$

$$\nabla_2 T_{20} = -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial N_{31}}{\partial x} = -\frac{b_1}{1+\varkappa},$$

которыя мы подобно ур-іямъ для опредѣленія $T_{1,n-1}$ и $T_{2,n-1}$ приведемъ къ системѣ ур-ій:

$$\frac{\partial T_{20}}{\partial x} + \frac{\partial T_{10}}{\partial y} = -b - b_1 x - b_2 y$$

$$\frac{\partial T_{20}}{\partial y} - \frac{\partial T_{10}}{\partial x} = \frac{\varkappa}{1+\varkappa}(-b_2 x + b_1 y + b_0)$$

Эти ур-ія приводятся къ типу ур-ій (18) § 1 (стр. 7), если положить:

$$T_{10} = u, \quad T_{20} = b, \quad b_2 x - b_1 y - b_0 = P_1, \quad b + b_1 x + b_2 y = Q_1,$$

$$k_1 = \frac{\varkappa}{1+\varkappa}, \quad l_1 = 0, \quad m_1 = 0, \quad n_1 = -1, \quad H_1 = Q_{01} = 0,$$

$$h_1 = -\tfrac{1}{2}\frac{1}{1+\varkappa}, \quad P_{01} = \frac{1+2\varkappa}{1+\varkappa}.$$

По формуламъ (17) стр. 7, положивъ:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \tfrac{1}{2}\frac{y}{1+\varkappa}$$

и, имѣя въ виду, что

$$\mathbf{P}_1 = \int P_1 dx - Q_1 dy = \int (b_2 x - b_1 y - b_0)\,dx - (b + b_1 x + b_2 y)\,dy =$$

$= b_2 \dfrac{x^2 - y^2}{2} - b_1 xy - b_0 x - by + c$, гдѣ c — постоянная произвольная, мы найдемъ:

$$T_{10} = -\tfrac{1}{2}\frac{y}{1+\varkappa}(b + b_1 x + b_2 y) + \frac{1+2\varkappa}{1+\varkappa}\Big(b_2\frac{x^2-y^2}{2} -$$

$$- b_1 xy - b_0 x - by + c\Big) + \varphi$$

$$T_{20}=\tfrac{1}{2}\frac{y}{1+\varkappa}(b_2x-b_1y-b_0)+\psi,$$

гдѣ φ и ψ двѣ произвольныя сопряженныя функціи*).

2. Задача Клебша.

Другой замѣчательный частный случай представляется, если предположимъ:

$$T_1=T_2=N_3=0 \text{ т. е.}$$

$$T_{1i}=T_{2i}=N_{3i}=0 \text{ при всякомъ } i$$

3-е ур-іе (2_B) стр. 148 даетъ тогда

$$N_{1,i+2}+N_{2,i+2}=0 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

при всякомъ i, а изъ 1-ыхъ 2-хъ ур-ій (2_B) слѣдуетъ

$$\nabla_2(N_{1i}+N_{2i})=0 \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

при всякомъ i, а слѣд-о, имѣя въ виду, что первыя 2 ур-ія (2_A) стр. 147 даютъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N_{1i}}{\partial x}+\frac{\partial T_{3i}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial T_{3i}}{\partial x}+\frac{\partial N_{2i}}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

мы заключимъ, что всѣ

$$N_{1i},\quad N_{2i},\quad T_{3i}$$

соотвѣтствуютъ плоскимъ задачамъ математической теоріи упругости.

---

*) Легко видѣть, что выраженія, даваемыя обыкновенно въ курсахъ:

$$T_{10}=\frac{E}{2(1+\varkappa)}\left[b_0y-b(1+\varkappa)x-b_1\frac{\varkappa x^2+(2-\varkappa)y^2}{2}-(\varkappa+2)b_2xy+\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right]$$

$$T_{20}=\frac{E}{2(1+\varkappa)}\left[-b_0x-b(1+\varkappa)y-b_2\frac{\varkappa y^2+(2-\varkappa)x^2}{2}-(\varkappa+2)b_1xy+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right],$$

гдѣ Ω удовлетворяетъ ур-ію:

$$\nabla_2\Omega=0$$

(см. Clebsch. Theorie der Elasticität fester Körper, s. 79. Д. Бобылевъ. Гидростатика и теорія упругости стр. 145 фор. (252) и (253) и стр. 148 фор. 262) приводятся къ нашимъ формуламъ при надлежащемъ выборѣ постоянныхъ b_0, b, b_1, b_2 и функціи Ω.

Изъ 1-хъ 2-хъ ур-ій (2c) стр. 148 слѣдуетъ при $i=0$:

$$N_{11}+N_{21}=const.$$

Изъ 1-хъ 2-хъ ур-ій (2в) найдемъ при $i>0$ т. е. $i=1, 2, 3\ldots$

$$N_{13}=N_{14}=\ldots=0, \quad N_{23}=N_{24}=\ldots=0$$

Изъ 3-го ур-ія (2c) и изъ ур-ій (18) слѣдуетъ:

$$(i+2)(i+1)\,T_{3,\,i+2}=\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\,(N_{1i}+N_{2i})$$

т. е. слѣд-о:

$$T_{3,\,i+2}=0 \text{ при } i>0$$

Такимъ образомъ мы находимъ:

$$\left.\begin{aligned} N_1&=N_{10}+N_{11}z+N_{12}z^2\\ N_2&=N_{20}+N_{21}z+N_{22}z^2\\ T_3&=T_{30}+T_{31}z+T_{32}z^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$N_{11}+N_{21}=const. \quad N_{12}+N_{22}=0 \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

и кромѣ того должны быть выполнены условія:

$$\nabla_2\, N_{10}+2N_{12}=-\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2(N_{10}+N_{20})}{\partial x^2}$$

$$\nabla_2\, N_{20}+2N_{22}=-\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2(N_{10}+N_{20})}{\partial y^2}$$

$$\nabla_2\, T_{30}+2T_{32}=-\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(N_{10}+N_{20})$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} N_{12}&=-\tfrac{1}{2}\left\{\nabla_2\, N_{10}+\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2(N_{10}+N_{20})}{\partial x^2}\right\}\\ N_{22}&=-\tfrac{1}{2}\left\{\nabla_2\, N_{20}+\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2(N_{10}+N_{20})}{\partial y^2}\right\}\\ T_{32}&=-\tfrac{1}{2}\left\{\nabla_2\, T_{30}+\frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(N_{10}+N_{20})\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (21)$$

Эти выраженія удовлетворяютъ условію (20) т. е.:

$$N_{22}+N_{12}=0$$

й ур-іямъ (18) и слѣд-о мы можемъ найденные результаты формулировать слѣдующимъ образомъ:

Напряженія выражаются формулами (19) причемъ коэф-ы N_{1i}, N_{2i}, T_{3i} соотвѣтствуютъ ($i=0$, 1, 2) 3-мъ плоскимъ задачамъ теоріи упругости.

Изъ нихъ:

1) N_{10}, N_{20}, T_{30} могутъ быть взяты произвольно лишь бы они удовлетворяли основнымъ ур-іямъ плоской задачи (17) и (18).

2) N_{11}, N_{21}, T_{31} связаны кромѣ того еще условіемъ:

$$N_{11}+N_{21}=const.$$

3) N_{12}, N_{22}, N_{32} найдутся изъ формулъ (21), которыя при помощи ур-ій (18) могутъ быть переписаны въ видѣ*):

$$\left.\begin{aligned} N_{12} &= \frac{\varkappa}{2(1+\varkappa)}\,\frac{\partial^2(N_{10}+N_{20})}{\partial x^2} \\ N_{22} &= \frac{\varkappa}{2(1+\varkappa)}\,\frac{\partial^2(N_{10}+N_{20})}{\partial y^2} \\ T_{32} &= \frac{\varkappa}{2(1+\varkappa)}\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(N_{10}+N_{20}) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (22)$$

---

*) Легко видѣть, что данное Клебшомъ рѣшеніе (Theorie der Elasticität, s. 153; Ibbetson [№ 2] стр. 387)

$$N_1=\frac{E}{1+\varkappa}\left\{\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}\right)+\frac{1}{1-\varkappa}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varkappa\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-z\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-(1+\varkappa)\frac{C'}{2}\right)\right\}$$

$$N_2=\frac{E}{1+\varkappa}\left\{\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)+\frac{1}{1-\varkappa}\left(\varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-z\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-(1+\varkappa)\frac{C'}{2}\right)\right\}$$

$$T_3=\frac{E}{1+\varkappa}\left\{\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-z\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right\},$$

гдѣ φ, ψ, f опредѣляются ур-іями:

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(1-\varkappa)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+(1+\varkappa)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0$$

$$2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+(1-\varkappa)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+(1+\varkappa)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0$$

$$\nabla_2 f=0$$

совпадаютъ съ наличными формулами (19).

Переходя теперь къ общему случаю, замѣтимъ, что изъ первыхъ 2-хъ ур-ій (2_A) слѣдуетъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \nabla_2 N_{1i}}{\partial x}+\frac{\partial \nabla_2 T_{3i}}{\partial y}+(i+1)\nabla T_{2,i+1}=0\\ \frac{\partial \nabla_2 T_{3i}}{\partial x}+\frac{\partial \nabla_2 N_{2i}}{\partial y}+(i+1)\nabla T_{1,i+1}=0\end{aligned}\right\}\quad . . (23)$$

Подставляя въ (23) вмѣсто $\nabla_2 N_{1i}$, $\nabla_2 N_{2i}$, $\nabla_2 T_{3i}$ ихъ выраженія изъ первыхъ 2-хъ ур-ій (2_B) и 3-го ур-ія (2_C), мы найдемъ при помощи первыхъ 2-хъ ур-ій (2_A):

$$\left.\begin{aligned}(i+1)\nabla_2 T_{2,i+1}+(i+3)(i+2)(i+1)\,T_{2,i+3}=\\ =\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\nabla_2(N_{1i}+N_{2i}+N_{3i})\\ (i+1)\nabla_2 T_{1,i+1}+(i+3)(i+2)(i+1)\,T_{1,i+3}=\\ =\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}\nabla_2(N_{1i}+N_{2i}+N_{3i})\end{aligned}\right\}\quad .(24)$$

Но, складывая 3 ур-ія (2_B), мы найдемъ:

$$\nabla_2(N_{1i}+N_{2i}+N_{3i})+(i+1)(i+2)(N_{1,i+2}+N_{2,i+2}+N_{3,i+2}=0 \quad ..(25)$$

и тогда изъ ур-ій (24) мы найдемъ первыя 2 ур-ія (2_C) для всякого $i \geqq 1$, которыя являются слѣд-о слѣдствіемъ ур-ій (2_A), (2_B) и 3-го ур-ія (2_C). Одно изъ ур-ій (2_B) напр. 3-е мы замѣнимъ ур-іямъ (25) и обозначая:

$$\Omega_i = N_{1i}+N_{2i}+N_{3i},$$

мы придемъ окончательно къ 3-мъ ур-іямъ (2_A) и 4 ур-іямъ:

$$\nabla_2 \Omega_i+(i+1)(i+2)\,\Omega_{i+2}=0 \quad . \; . \; . \quad (26)$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla_2 N_{1i}+(i+1)(i+2)\,N_{1,i+2}=-\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial x^2}\\ \nabla_2 N_{2i}+(i+1)(i+2)\,N_{2,i+2}=-\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial y^2}\\ \nabla_2 T_{3i}+(i+1)(i+2)\,T_{3,i+2}=-\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\}\quad .(27)$$

Къ ур-iямъ (26) и (27) и приводится въ сущности задача объ опредѣленiи N_{1i}, N_{2i}, N_{3i}, T_{3i}, а первыя 2 ур-iя (2_A) даютъ при $i \geqq 0$*) выраженiя $T_{1,i+1}$ и $T_{2,i+1}$:

$$\left.\begin{aligned} T_{1,i+1} &= -\frac{1}{i+1}\left(\frac{\partial T_{3i}}{\partial x} + \frac{\partial N_{2i}}{\partial y}\right) \\ T_{2,i+1} &= -\frac{1}{i+1}\left(\frac{\partial N_{1i}}{\partial x} + \frac{\partial T_{3i}}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (28)$$

3-е ур-iе (2_A) даетъ $N_{3,i+1}$ при $i \geqq 0$, а слѣд-о требуетъ выполненiя условiй:

$$N_{31} = -\left(\frac{\partial T_{20}}{\partial x} + \frac{\partial T_{10}}{\partial y}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

и $N_{3,i+2} = -\dfrac{1}{i+2}\left(\dfrac{\partial T_{2,i+1}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{1,i+1}}{\partial y}\right)$ т. е. въ силу (28):

$$N_{3,i+2} = \frac{1}{(i+1)(i+2)}\left(\frac{\partial^2 N_{1i}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 T_{3i}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_{2i}}{\partial y^2}\right) .. (30)$$

при $i \geqq 0$

Разсмотримъ теперь послѣдовательное опредѣленiе коэф-овъ N_{1i}, N_{2i}, T_{3i} при помощи ур-iй (27) при условiи (30); N_{1n}, N_{2n}, T_{3n} какъ мы видѣли на стр. 149 соотвѣтствуютъ плоской задачѣ математической теорiи упругости, а

$$N_{3n} = ax + by + c + \varkappa(N_{1n} + N_{2n}) \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Изъ фор. (27) мы найдемъ для всякого четнаго значка $2k$:

$$\left.\begin{aligned} (-1)^k 1.2.3.4 \ldots 2k\, N_{1,2k} &= \nabla_{2k} N_{10} + \frac{k}{1+\varkappa}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla_{2,k-1}\Omega_0 \\ (-1)^k 1.2.3.4 \ldots 2k\, N_{2,2k} &= \nabla_{2k} N_{20} + \frac{k}{1+\varkappa}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla_{2,k-1}\Omega_0 \\ (-1)^k 1.2.3.4 \ldots 2k\, T_{3,2k} &= \nabla_{2k} T_{30} + \frac{k}{1+\varkappa}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\nabla_{2,k-1}\Omega_0 \end{aligned}\right\} (32)$$

---

*) T_{10} и T_{20} опредѣляются при помощи 1-хъ 2-хъ ур-iй (2c) при $i=0$.

гдѣ ∇_{2k} обозначаетъ операцію ∇_2, произведенную k разъ, а изъ фор. (26):

$$(-1)^k 1.2.3.4\ldots 2k\,\Omega_{2k} = \nabla_{2k}\,\Omega_0 \quad . \quad . \quad (32\text{bis})$$

или изъ (32) и (32bis)

$$(-1)^k.1.2.3.4\ldots 2k\,N_{3,\,2k} = \nabla_{2k}\,N_{30} -$$
$$- \frac{k}{1+\varkappa}\,\nabla_{2k}\,\Omega_0 = \nabla_{2k}\left(N_{30} - \frac{k}{1+\varkappa}\,\Omega_0\right)\,.\,.\,(33)$$

Сравнивая (33) съ (30) при $i+2=2k$, въ которомъ N_{1i}, N_{2i}, T_{3i} замѣнены по фор. (32) мы придемъ къ условію

$$-\nabla_{2k}N_{30} + \frac{1}{1+\varkappa}\nabla_{2k}\Omega_0 = \nabla_{2,k-1}\left(\frac{\partial^2 N_{10}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 T_{30}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_{20}}{\partial y^2}\right).(33\text{bis})$$

которое очевидно является простымъ слѣдствіемъ условія (30) если замѣнимъ въ немъ по фор. (33):

$$1.2\,N_{32} = -\nabla_2 N_{30} + \frac{1}{1+\varkappa}\,\nabla_2\,\Omega_0$$

Такимъ образомъ условіе (30) т. е.:

$$\frac{1}{1+\varkappa}\,\nabla_2\,\Omega_0 = \nabla_2 N_{30} + \frac{\partial^2 N_{10}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 T_{30}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_{20}}{\partial y^2}\,.\,.\,(34)$$

является основнымъ условіемъ связывающимъ функціи N_{10}, N_{20}, N_{30}, T_{30}.

Изъ фор. (32) по фор. (28) мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&(-1)^{k+1}\,1.2.3\ldots 2k+1\,T_{2,\,2k+1} = \\
&\qquad = \nabla_{2k}\left\{\frac{\partial N_{10}}{\partial x} + \frac{\partial T_{30}}{\partial y} + \frac{k}{1+\varkappa}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\Omega_0\right\} \\
&(-1)^{k+1}\,1.2.3\ldots 2k+1\,T_{1,\,2k+1} = \\
&\qquad = \nabla_{2k}\left\{\frac{\partial T_{30}}{\partial x} + \frac{\partial N_{20}}{\partial y} + \frac{k}{1+\varkappa}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\Omega_0\right\}
\end{aligned}\right\}\,.\,(35)$$

Точно также для всякого нечетнаго значка $2k+1$ мы придемъ изъ (27) къ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned}
(-1)^k 1.2.3...2k+1\, N_{1,2k+1} &= \nabla_{2,k-1}\left\{\nabla_2 N_{11} + \frac{k}{1+\varkappa}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega_1\right\} \\
(-1)^k 1.2.3...2k+1\, N_{2,2k+1} &= \nabla_{2,k-1}\left\{\nabla_2 N_{21} + \frac{k}{1+\varkappa}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Omega_1\right\} \\
(-1)^k 1.2.3...2k+1\, T_{3,2k+1} &= \nabla_{2,k-1}\left\{\nabla_2 T_{31} + \frac{k}{1+\varkappa}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Omega_1\right\}
\end{aligned}\right\} (36)$$

а изъ (26) къ формулѣ:

$$(-1)^k\, 1.2.3.4 \ldots 2k+1\, \Omega_{2k+1} = \nabla_{2k}\Omega_1 \;\; . \; . \quad (36\,\mathrm{bis})$$

или изъ (36) и (36bis):

$$(-1)^k\, 1.2 \ldots 2k+1\, N_{3,\,2k+1} = \nabla_{2k}\left(N_{31} - \frac{k}{1+\varkappa}\Omega_1\right) . \;(37)$$

Сравнивая (37) съ (30) при $i+2=2k+1$ мы придемъ къ условіямъ (для всякого k):

$$-\nabla_{2k} N_{31} + \frac{1}{1+\varkappa}\nabla_{2k}\Omega_1 = \nabla_{2,k-1}\left(\frac{\partial^2 N_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 T_{31}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_{21}}{\partial y^2}\right) (38)$$

которыя совершенно также какъ аналогичныя условія (33bis) вытекаютъ изъ основного условія:

$$\frac{1}{1+\varkappa}\nabla_2\Omega_1 = \nabla_2 N_{31} + \frac{\partial^2 N_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 T_{31}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 N_{21}}{\partial y^2} \;\; . \; . \; (39)$$

Изъ фор. (36) по фор. (28) мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
(-1)^k\, 1.2.3...2k\, T_{2,2k} &= \nabla_{2,k-1}\left\{\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{31}}{\partial y} + \frac{k-1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\Omega_1\right\} \\
(-1)^k\, 1.2.3...2k\, T_{1,2k} &= \nabla_{2,k-1}\left\{\frac{\partial T_{31}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} + \frac{k-1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}\Omega_1\right\}
\end{aligned}\right\} (40)$$

а, замѣчая, что по фор. (28):

$$\left.\begin{aligned}
T_{22} &= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{31}}{\partial y}\right) \\
T_{12} &= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x} + \frac{\partial N_{21}}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

а по фор. (2с) при $i=0$:

$$\left.\begin{aligned} T_{22} &= -\tfrac{1}{2}\left\{\nabla_2 T_{20} + \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\Omega_1\right\} \\ T_{12} &= -\tfrac{1}{2}\left\{\nabla_2 T_{10} + \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}\Omega_1\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (42)$$

мы найдемъ сравнивая (41) и (42) условія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{31}}{\partial y} &= \nabla_2 T_{20} + \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\Omega_1 \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x} + \frac{\partial N_{21}}{\partial y} &= \nabla_2 T_{10} + \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}\Omega_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (43)$$

связывающія T_{20}, T_{10}, N_{11}, N_{21} и T_{31}, въ силу которыхъ (40) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} (-1)^k 1.2.3\ldots 2k\, T_{2,2k} &= \nabla_{2k} T_{20} + \frac{k}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\nabla_{2,k-1}\Omega_1 \\ (-1)^k 1.2.3\ldots 2k\, T_{1,2k} &= \nabla_{2k} T_{10} + \frac{k}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}\nabla_{2,k-1}\Omega_1 \end{aligned}\right\} . \; (44)$$

Не входя въ настоящемъ изслѣдованіи въ болѣе обстоятельное изученіе уравненій, опредѣляющихъ N_{1i}, N_{2i}, T_{3i}, отмѣтимъ частный случай, при которомъ тѣло имѣетъ форму цилиндра съ производящими $\|$-ыми оси z-овъ и допустимъ, что распредѣленіе напряженій выражается въ немъ формулами (1), а внѣшнія напряженія приложены къ его боковой поверхности и къ 2-мъ основаніямъ — плоскостямъ нормальнымъ къ оси z-овъ. Для этого во всѣхъ точкахъ боковой поверхности должны быть соблюдены условія:

$$\left.\begin{aligned} N_1 \, Cos\,\alpha + T_3 \, Sin\,\alpha &= X \\ T_3 \, Cos\,\alpha + N_2 \, Sin\,\alpha &= Y \\ T_2 \, Cos\,\alpha + T_1 \, Sin\,\alpha &= Z, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

гдѣ α уголъ, составляемый нормалью къ боковой поверхности цилиндра съ осью x-овъ, а X, Y, Z заданныя для всѣхъ точекъ боковой поверхности функціи координатъ этихъ точекъ. Предположимъ:

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i z^i$$

$$Y = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i z^i$$

$$Z = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i z^i,$$

гдѣ X_i, Y_i, Z_i функціи однихъ x, y; ур-ія (37) въ силу (1) и (37bis) распадутся на $n+1$ ур-іе:

$$\left.\begin{aligned} N_{1i}\, Cos\, \alpha + T_{3i}\, Sin\, \alpha = X_i \\ T_{3i}\, Cos\, \alpha + N_{2i}\, Sin\, \alpha = Y_i \\ T_{2i}\, Cos\, \alpha + T_{1i}\, Sin\, \alpha = Z_i \end{aligned}\right\} i = 0, 1, 2 \ldots n \quad . \; . \; (46)$$

Кромѣ того N_3, T_2, T_1 должны быть заданными функціями на обоихъ основаніяхъ цилиндра. Высоту верхняго основанія надъ плоскостью xy мы предположимъ $= \varepsilon$, а высоту плоскости xy надъ нижнимъ основаніемъ мы предположимъ тоже $= \varepsilon$, такъ что цилиндръ раздѣляется плоскостью xy-овъ на 2 равныя части.

Разсмотримъ равновѣсіе нашего цилиндра въ нѣкоторыхъ довольно общихъ случаяхъ.

1) Задача Maurice Lévy*).

Предположимъ, что къ основаніямъ нашего цилиндра (верхнему и нижнему) не приложено никакихъ внѣшнихъ усилій, а деформація происходитъ по фор. (1).

Мы получимъ рядъ условій:

$$\left.\begin{aligned} N_{3n}\, \varepsilon^n + N_{3,n-1}\, \varepsilon^{n-2} + \ldots = 0 \\ N_{3,n-1}\, \varepsilon^{n-1} + N_{3,n-3}\, \varepsilon^{n-3} + \ldots = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (47)$$

*) Maurice Lévy „Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes". Journal de Mathématiques pures et appliquées, Série III. T. III (1877).

$$\left.\begin{array}{r} T_{1,n}\varepsilon^{n} + T_{1,n-2}\varepsilon^{n-2} + \ldots = 0 \\ T_{1,n-1}\varepsilon^{n-1} + T_{1,n-3}\varepsilon^{n-3} + \ldots = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (48)$$

$$\left.\begin{array}{r} T_{2,n}\varepsilon^{n} + T_{2,n-2}\varepsilon^{n-3} + \ldots = 0 \\ T_{2,n-1}\varepsilon^{n-1} + T_{2,n-3}\varepsilon^{n-3} + \ldots = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (49)$$

Дифференцируя (49) по x, а (48) по y, складывая полученные результаты, вводя въ нихъ N_{32}, N_{33}, $N_{34}\ldots$ по 3-ей формулѣ (2_{A}) и сравнивая полученныя выраженія съ (47) мы придемъ къ заключенію:

$$N_{30} = N_{31} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

и слѣд-о (фор. (33) и (37)):

$$\left.\begin{array}{r} (-1)^{k}\,1.2\ldots 2k\,N_{3,2k} = -\dfrac{k}{1+x}\nabla_{2k}\Omega_{0} \\ (-1)^{k}\,1.2\ldots 2k+1\,N_{3,2k+1} = -\dfrac{k}{1+x}\nabla_{2k}\Omega_{0} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (51)$$

Изъ (51) мы при помощи (47) придемъ къ заключенію:

$$N_{32} = N_{33} = N_{34} = \ldots = N_{3n} = 0 \quad \text{и}$$

$$\nabla_{2}\Omega_{0} = \nabla_{2}\Omega_{1} = 0,$$

а слѣд-о при помощи фор. (44) къ заключенію:

$$\left.\begin{array}{r} (-1)^{k}\,1.2.3\ldots 2k\,T_{2,2k} = \nabla_{2k}T_{20} \\ (-1)^{k}\,1.2.3\ldots 2k\,T_{1,2k} = \nabla_{2k}T_{10} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (52)$$

при всякомъ $k > 1$

и

$$\left.\begin{array}{r} 2T_{22} = -\left(\nabla_{2}T_{20} + \dfrac{1}{1+x}\dfrac{\partial}{\partial x}\Omega_{1}\right) \\ 2T_{12} = -\left(\nabla_{2}T_{10} + \dfrac{1}{1+x}\dfrac{\partial}{\partial y}\Omega_{1}\right) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (53)$$

а при помощи (35) къ заключенію:

$$(-1)^{k+1}\,1.2\ldots 2k+1\,T_{2,2k+1} = \nabla_{2k}\left(\frac{\partial N_{10}}{\partial x} + \frac{\partial T_{30}}{\partial y}\right)\Bigg\} \; (54)$$

$$(-1)^{k+1}\,1\,.\,2\ldots 2k+1\; T_{1,\,2k+1}=\nabla_{2k}\left(\frac{\partial T_{30}}{\partial x}+\frac{\partial N_{20}}{\partial y}\right)\Bigg\}\;(54\text{A})$$

при всякомъ $k>0$

Изъ (54) (48) (49) слѣдуетъ

$$T_{2,\,2k+1}=T_{1,\,2k+1}=0$$

а изъ (52) (53) (48) (49) слѣдуетъ

$$\nabla_2 T_{20}=\nabla_2 T_{10}=0,\quad T_{2,2k}=T_{1,2k}=0\ \text{при}\ k>1.$$

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что N_{10}, N_{20}, T_{30} соотвѣтствуютъ плоской задачѣ математической теорiи упругости. Пусть ϕ будетъ въ ней функцiей *Airy* такъ что:

$$N_{10}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\quad N_{20}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\quad T_{30}=-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\;.\;.\;(55)$$

и

$$\nabla_2\nabla_2\phi=0$$

N_{12}, N_{22}, T_{32} также будутъ соотвѣтствовать плоской задачѣ и найдутся по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned}2N_{12}&=\nabla_2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x^2}=\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x^2}\\2N_{22}&=\nabla_2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial y^2}=\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial y^2}\\2T_{32}&=\nabla_2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x\partial y}=\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\}\;.\;.\;(56)$$

т. к.

$$\nabla_2\phi=N_{10}+N_{20}=\Omega_0$$

Такимъ образомъ напряженiя будутъ имѣть видъ:

$$\left.\begin{aligned}N_1&=N_{10}+zN_{11}+z^2N_{12}+z^3N_{13}\\N_2&=N_{20}+zN_{21}+z^2N_{22}+z^3N_{23}\\T_3&=T_{30}+zT_{31}+z^2T_{32}+z^3T_{33}\\T_1&=T_{10}+z^2T_{12}\\T_2&=T_{20}+z^2T_{22},\quad N_3=0\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(57)$$

т. к. всѣ остальные члены будутъ $=0$; N_{13}, N_{23}, T_{33} найдутся по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} 6N_{13} &= -\nabla_2 N_{11} - \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x^2} \\ 6N_{23} &= -\nabla_2 N_{21} - \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y^2} \\ 6T_{33} &= -\nabla_2 T_{31} - \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x \partial y}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (58)$$

гдѣ $\Omega_1 = N_{11} + N_{21}$. T_{12} и T_{22} опредѣляется по фор. (53):

$$2T_{12} = -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}\Omega_1, \quad 2T_{22} = -\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\Omega_1$$

и слѣд-о по фор. (48) (49):

$$2T_{10} = \frac{\varepsilon^2}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}\Omega_1, \quad 2T_{20} = \frac{\varepsilon^2}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\Omega_1$$

N_{11}, N_{21} и T_{31} опредѣляются изъ ур-iй (43):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T_{31}}{\partial x} + \frac{\partial N_{21}}{\partial y} &= \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}\Omega_1 \\ \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{31}}{\partial y} &= \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}\Omega_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (59)$$

которыя приводятся къ ур-iямъ (2) стр. 1 совершенно также какъ диф-ыя ур-iя плоской задачи. Въ полученномъ рѣшенiи легко узнать рѣшенiе Maurice Lévy *), а если положимъ $\Omega_1 = const.$ то рѣшенiе Клебша.

2) Теорема В. А. Стеклова.

Предположимъ, что къ боковымъ сторонамъ нашего цилиндра не приложено никакихъ усилiй, а распредѣленiе напряженiй совершается по фор. (1). В. А. Стекловъ **)

*) См. примѣчанiе къ стр. 162.

**) Сообщенiя Харьковскаго математическаго общества, 2 серiя; томъ III, стр. 42—93.

показалъ что распредѣленіе напряженій можетъ въ данномъ случаѣ быть только такое же, какъ въ задачѣ Санъ Венана, если мы предположимъ, что главный моментъ изгибающихъ напряженій въ каждомъ изъ сѣченій цилиндра ||-ыхъ плоскости xy имѣетъ постоянную, независящую отъ разстоянія z этого сѣченія до плоскости xy, величину.

Для этого*) должны быть выполнены условія:

$$\int (xT_{1i} - yT_{2i})\, d\omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

$$\int xN_{3i}\, d\omega = \int yN_{3i}\, d\omega = \int N_{3i}\, d\omega = 0, \quad . \quad . \quad (61)$$

гдѣ интегралы распространены на всю площадь сѣченія цилиндра плоскостью xy. Т. к. къ боковой поверхности цилиндра не приложено никакихъ усилій X, Y, Z въ фор. (45) и X_i, Y_i, Z_i въ фор. (46) должны быть $=0$. Легко убѣдиться, что предположеніе, что распредѣленіе напряженій совершается по фор. (1), приведетъ насъ при всякомъ i къ условіямъ задачи Санъ Венана:

$$N_{1i} = N_{2i} = T_{3i} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Дѣйствительно, первыя 2 условія (46) при $i = n$ показываютъ, что въ плоской задачѣ математической теоріи упругости, къ которой приводится опредѣленіе N_{1n}, N_{2n}, T_{3n} (см. стр. 149) къ замкнутому контуру — сѣченію нашего цилиндра плоскостью xy-овъ — не приложено никакихъ усилій, а слѣд-о необходимо:

$$N_{1n} = N_{2n} = T_{3n} = 0$$

T_{1n} и T_{2n} найдутся изъ условій (3) и (5) стр. 148—149, которыя приводятъ къ ур-іямъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T_{2n}}{\partial x} + \frac{\partial T_{1n}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial T_{1n}}{\partial x} - \frac{\partial T_{2n}}{\partial y} &= k \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

*) См. В. А. Стекловъ. l. c. фор. (7_6) стр. 59 и фор. (7_1) стр. 49.

Легко показать, что въ силу (60) и 3-ей фор. (46):

$$T_{1n} = T_{2n} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (64)$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ силу ур-ій (63) можно положить:

$$\left.\begin{aligned} T_{1n} &= \frac{\partial V}{\partial y} + \tfrac{1}{2} kx \\ T_{2n} &= \frac{\partial V}{\partial x} - \tfrac{1}{2} ky, \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (65)$$

гдѣ V удовлетворяетъ условію:

$$\nabla_2 V = 0,$$

а въ силу (60):

$$\int \left[x \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial x} + \tfrac{1}{2} k (x^2 + y^2) \right] d\omega = 0 \; . \; . \qquad (66)$$

Но изъ условія (46) на контурѣ сѣченія цилиндра:

$$\frac{\partial V}{\partial x} Cos\,\alpha + \frac{\partial V}{\partial y} Sin\,\alpha = \tfrac{1}{2} k (y\, Cos\,\alpha - x\, Sin\,\alpha)$$

или

$$V \left(\frac{\partial V}{\partial x} Cos\,\alpha + \frac{\partial V}{\partial y} Sin\,\alpha \right) = \tfrac{1}{2} k V (y\, Cos\,\alpha - x\, Sin\,\alpha),$$

а слѣд-о, умножая на ds (диф-іалъ дуги сѣченія) и, взявъ интегралъ по всему замкнутому контуру сѣченія, а затѣмъ, преобразуя этотъ интегралъ въ интегралъ по площади сѣченія:

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] d\omega = \tfrac{1}{2} k \int \left(y \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\omega \, . . (67)$$

Изъ (66) и (67) слѣдуетъ

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \tfrac{1}{2} ky \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \tfrac{1}{2} kx \right)^2 \right] d\omega = 0$$

т. е. слѣд-о:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \tfrac{1}{2} ky = \frac{\partial V}{\partial y} + \tfrac{1}{2} kx = 0$$

т. е. въ силу (65) дѣйствительно справедливо (64). Имѣя въ виду, что въ силу (61) слѣдуетъ, что въ выраженіи N_{3n} (31) стр. 158 коэф-нты a, b, c равны 0 т. е.

$$N_{3n} = 0$$

Такимъ образомъ:

$$N_{1n} = N_{2n} = N_{3n} = T_{1n} = T_{2n} = T_{3n} = 0$$

Примѣняя тѣ же разсужденія къ $N_{1,n-1}$, $N_{2,n-1}$, $N_{3,n-1}$, $T_{1,n-1}$, $T_{2,n-1}$, $T_{3,n-1}$ мы послѣдовательно придемъ къ распредѣленію напряженій въ задачѣ Сенъ Венана и теорема В. А. Стеклова окажется доказанной*).

---

*) В. А. Стекловъ задается не напряженіями расположенными по степенямъ z, а перемѣщеніями, расположенными по степенямъ этой перемѣнной, но легко видѣть, что это въ данномъ случаѣ безразлично, такъ какъ по заданнымъ такимъ образомъ перемѣщеніямъ, напряженія очевидно опредѣлятся по фор. (2) стр. 137 въ видѣ такого же рода полиномовъ, расположенныхъ по степенямъ z и наоборотъ; по заданнымъ напряженіямъ N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 перемѣщенія u, v, w найдутся при помощи простыхъ квадратуръ и представятся также какъ и напряженія полиномами расположенными по степенямъ z.

Если мы обозначимъ:

$$\mathrm{N}_1 = N_1 - \frac{B}{2G+B}(N_1+N_2+N_3) = \frac{1}{1+\varkappa}(N_1 - \varkappa(N_2+N_3))$$

$$\mathrm{N}_2 = N_2 - \frac{B}{2G+B}(N_1+N_2+N_3) = \frac{1}{1+\varkappa}(N_2 - \varkappa(N_1+N_3))$$

$$\mathrm{N}_3 = N_3 - \frac{B}{2G+B}(N_1+N_2+N_3) = \frac{1}{1+\varkappa}(N_3 - \varkappa(N_1+N_2))$$

мы легко найдемъ выраженія:

$$\tau_1 = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \int\left(\frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{\partial T_3}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{N}_2}{\partial z}\right)dy + \left(\frac{\partial \mathrm{N}_3}{\partial y} - \frac{\partial T_1}{\partial z}\right)dz$$

$$\tau_2 = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \int\left(\frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial z} - \frac{\partial T_2}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial T_3}{\partial z} - \frac{\partial T_1}{\partial x}\right)dy + \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{N}_3}{\partial x}\right)dz$$

$$\tau_3 = G\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \int\left(\frac{\partial T_3}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{N}_1}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial \mathrm{N}_2}{\partial x} - \frac{\partial T_3}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial T_2}{\partial y}\right)dz$$

Условія интегрируемости этихъ полныхъ дифференціаловъ приводятъ къ условіямъ:

3) Случай В. А. Стеклова и его обобщенія.

Какъ частный случай изъ нашихъ формулъ получается случай В. А. Стеклова*), въ которомъ значокъ n послѣдняго члена $=3$, а также обобщенія этого случая при $n>3$.

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial^2 N_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{\partial T_3}{\partial z}\right).$$

$$2\frac{\partial^2 T_1}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_2}{\partial z^2}, \quad 2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_1}{\partial z^2}, \quad 2\frac{\partial^2 T_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2},$$

вытекающимъ изъ условій (4) стр. 138.

u, v, w найдутся по формуламъ:

$$u = \int \frac{1}{E}\left(N_1 - \varkappa(N_2+N_3)\right)dx + \frac{1}{2G}(T_3-\tau_3)\,dy + \frac{1}{2G}(T_2+\tau_2)\,dz$$

$$v = \int \frac{1}{2G}(T_3+\tau_3)\,dx + \frac{1}{E}\left(N_2 - \varkappa(N_3+N_1)\right)dy + \frac{1}{2G}(T_1-\tau_1)\,dz$$

$$w = \int \frac{1}{2G}(T_2-\tau_2)\,dx + \frac{1}{2G}(T_1+\tau_1)\,dy + \frac{1}{E}\left(N_3 - \varkappa(N_1+N_2)\right)dz,$$

условія интегрируемости которыхъ, какъ легко убѣдиться, выполнены.

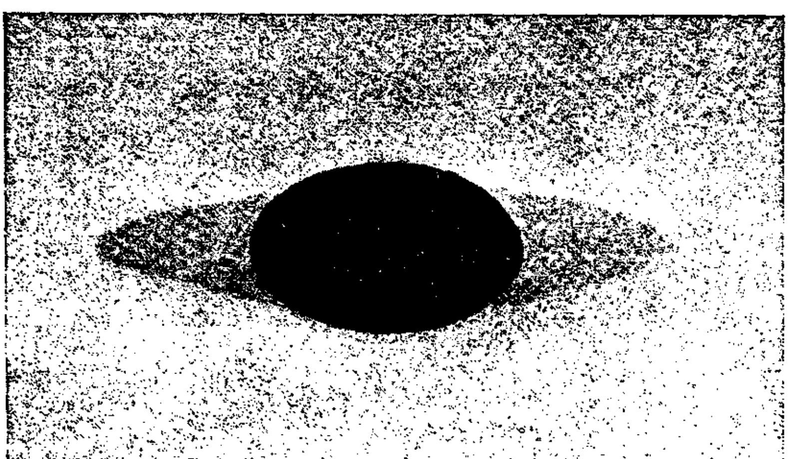
*) Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества. Вторая серія, т. VI 1899, стр. 160—193.

Приложенія.

1. О распредѣленіи напряженій по краямъ кругового, эллиптическаго и лемнискатнаго отверстій, вытекающемъ изъ формулъ §§ 4, 5 и 7.

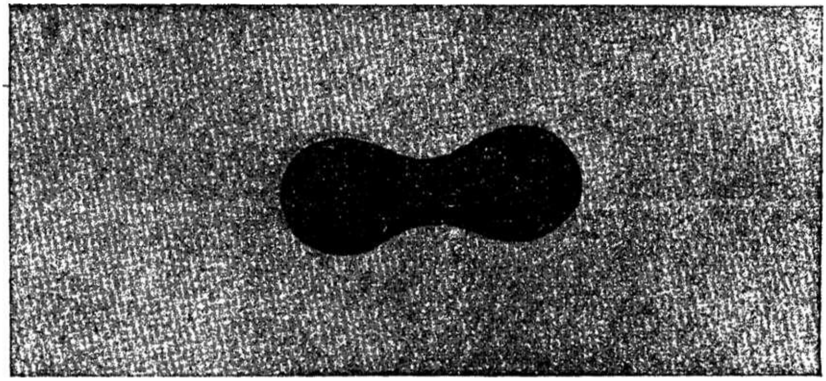
Данныя въ §§ 4, 5, 7 формулы распредѣленія напряженій въ полосахъ, ослабленныхъ круговыми, эллиптическими и лемнискатными отверстіями, обнаруживаютъ любопытное вліяніе кривизны контура отверстія на распредѣленіе напряженій по этому контуру.

Въ случаѣ кругового и эллиптическаго отверстій въ точкахъ, лежащихъ на оси x-овъ, по направленію которой происходитъ растяженіе наблюдается сжатіе элементовъ полосы такъ что, если она состоитъ изъ матеріала плохо сопротивляющагося сжатію, въ этихъ точкахъ происходитъ выпучиваніе ея; на чер. А изображена пленка эластичной резины съ отверстіемъ въ видѣ круга, растягиваемая по горизонтальному направленію и ясно обнаруживается выпучиваніе пленки въ точкахъ прилежащихъ къ горизонтальной оси ox:



Чер. А.

Наоборотъ при растяженіи полосъ съ отверстіемъ въ видѣ лемнискаты, какъ слѣдуетъ изъ нашихъ формулъ на стр. 36—41 эти элементы явятся растянутыми и выпучиванія не появится. На чер. В изображена пленка эластичной резины съ отверстіемъ въ видѣ лемнискаты, растягиваемая по горизонтальному направленію.



Чер. В.

Такимъ образомъ несомнѣнно большое вліяніе кривизны контура отверстія на распредѣленіе вдоль по этому контуру напряженій и съ этимъ вліяніемъ приходится очень часто считаться въ строительной механикѣ и техникѣ напр. при проектированіи каменныхъ трубъ и арокъ*).

2. О нѣкоторыхъ способахъ вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ.

Формула (15) стр. 60:

*) Мы обязаны С. И. Белзецкому нѣкоторыми весьма интересными примѣрами въ этомъ отношеніи. Имъ выработанъ при постройкѣ Царицынской, Петровскъ-Бакинской и др. вѣтвей Владикавказской ж. д. въ особенности для, оставшейся неосуществленной Черноморской вѣтви, рядъ типовъ каменныхъ арокъ и трубъ. Въ одномъ изъ этихъ типовъ небольшая выкружка въ средней части арки существенно видоизмѣняетъ распредѣленіе въ ней напряженій и даетъ въ пятахъ арки вмѣсто весьма нежелательнаго въ нихъ растяженія — сжатіе.

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,(\xi-\alpha)\,ds}{(s-\eta)^2+(\xi-\alpha)^2}$$

можетъ служить для вычисленія ряда опредѣленныхъ $\int$-овъ; пусть напр. мы имѣемъ случай полярныхъ координатъ (стр. 19):

$$\xi=lgr \qquad \eta=\theta$$

$$f(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,(lgr-\alpha)\,ds}{(s-\theta)^2+(lgr-\alpha)^2}$$

или, если $\alpha=lg R$:

$$f(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,lg\frac{r}{R}\,ds}{(s-\theta)^2+\left(lg\frac{r}{R}\right)^2}$$

или

$$f(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(R,s)\,lg\frac{r}{R}\,ds}{(s-\theta)^2+\left(lg\frac{r}{R}\right)^2}$$

Напр., положивъ:

$$f(r,\theta)=r^m\,Cos\,m\,\theta,$$

найдемъ:

$$r^m\,Cos\,m\,\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R^m\,Cos\,ms\,lg\frac{r}{R}\,ds}{(s-\theta)^2+lg^2\frac{r}{R}}$$

Въ самомъ дѣлѣ, послѣдній интегралъ подстановкой:

$$\frac{s-\theta}{lg\frac{r}{R}}=t$$

преобразуется въ:

$$\frac{R^m}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\,Cos\,m\,(tlg\frac{r}{R}+\Theta)=$$

$$=R^m\,Cos\,m\,\Theta\,.\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Cos\left(mt\,lg\,\frac{r}{R}\right)}{1+t^2}\,dt$$

а послѣднее очевидно приводится къ

$$r^m\,Cos\,m\,\Theta.$$

3. Дополненіе къ § 12.

Проф. В. А. Стекловъ обратилъ наше вниманіе на нѣкоторую неясность изложенія § 12 и предложилъ*) слѣдующую редакцію основныхъ положеній этого §-а:

„Ур-іямъ упругости можно удовлетворить, положивъ (по фор. (4) стр. 58):

$$\left.\begin{aligned}\frac{2U}{h^2}&=\alpha_o\frac{\partial}{\partial\eta}(P+Q)-\beta_o\frac{\partial}{\partial\xi}(P+Q)+\varphi\\ \frac{P-Q}{h^2}&=\beta_o\frac{\partial}{\partial\eta}(P+Q)+\alpha_o\frac{\partial}{\partial\xi}(P+Q)+\psi,\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (1)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\alpha_o}{\partial\xi}-\frac{\partial\beta_o}{\partial\eta}=-\frac{1}{h^2}\\ &\frac{\partial\beta_o}{\partial\xi}+\frac{\partial\alpha_o}{\partial\eta}=0,\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

(h дифференціальный параметръ).

Докажемъ что можно найти 2 сопряженныя функціи α и β и 2 функціи α_o и β_o, представляющія рѣшенія уравненій (2) подъ условіемъ, что на контурѣ:

$$\alpha_o=\alpha\qquad\beta_o=\beta\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Пусть на контурѣ $\xi=\xi_o$. Имѣемъ (рав. (6) стр. 58):

---

*) Въ письмѣ, адресованномъ на наше имя; разсужденія мы приводимъ съ разрѣшенія автора.

$$\alpha_0 + i\beta_0 = -\tfrac{1}{2} f(\zeta_1) f'(\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Возьмемъ функцію комплекснаго перемѣннаго:

$$\Phi(\zeta) = \bar{f}(2\xi_0 - \zeta) f'(\zeta)$$

(фор. (10) стр. 59). Положимъ:

$$\Phi(\zeta) = \alpha + i\beta$$

Функціи α и β, будучи сопряженными въ силу (4) оказываются таковыми, что на контурѣ соблюдаются условія (3).

Возьмемъ вмѣсто функцій (ур. (1)):

$$S_0 = \alpha_0 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \beta_0 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \varphi$$

$$\text{и} \quad T_0 = \beta_0 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \alpha_0 \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \psi$$

черезъ которыя должны выражаться $\frac{2U}{h^2}$ и $\frac{P-Q}{h^2}$ (искомыя величины) слѣдующія функціи:

$$\left.\begin{aligned} S &= \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \varphi \\ \text{и} \quad T &= \beta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Легко видѣть, что это суть функціи сопряженныя.

Составимъ функцію f, удовлетворяющую ур-ію Лапласа и обращающуюся на контурѣ въ напередъ заданное значеніе $\frac{2U}{h^2}$, и опредѣлимъ затѣмъ (простой квадратурой) функцію $\bar{f}$ сопряженную съ f.

Допустимъ что $\frac{P-Q}{h^2}$ принимаетъ на контурѣ тѣ значенія, какія имѣетъ на этомъ контурѣ только что найденная функція $\bar{f}$.

Въ такомъ случаѣ функція $\Omega = P + Q$ будетъ имѣть опредѣленное значеніе на контурѣ, если предположимъ значенія P напередъ на немъ заданными. Рѣшая задачу Дирихле, найдемъ функцію Ω.

Разумѣя въ S и T подъ Ω именно эту функцію, положимъ

$$S = \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \varphi = f,$$

$$T = \beta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \psi = \bar{f},$$

что всегда возможно, ибо S и T суть функціи сопряженныя.

Функціи α, β, Ω, f и $\bar{f}$ извѣстныя. Отсюда опредѣлимъ φ и ψ.

Разумѣя теперь подъ Ω, φ и ψ въ урав. (1) именно эти функціи и рѣшая ихъ относительно U, P и Q, найдемъ ихъ въ опредѣленныхъ функціяхъ отъ ξ и η. Эти выраженія U, P и Q будутъ удовлетворять уравненіямъ упругости и, такъ какъ въ силу (3) на контурѣ $S_o = S$ и $T_o = T$, а функціи Ω, φ и ψ выбраны такъ, что U и P, слѣдующія изъ ур. (1) дѣйствительно обращаются въ напередъ заданныя функціи $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$ (при $\xi = \xi_o$, т. е. на контурѣ), то полученныя указаннымъ способомъ выраженія U, P и Q представятъ рѣшеніе задачи. Такъ какъ ур-ія упругости (при извѣстныхъ условіяхъ, которыя считаемъ выполненными) допускаютъ единственное рѣшеніе, то полученное этимъ пріемомъ рѣшеніе и есть единственно возможное."

4. Дополненіе къ § 28.

Производныя $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial n \partial s}$ въ формулѣ (6) на стр. 117 суть производныя по дугѣ s, но не по направленію s. Первыя производныя V по дугѣ s и по направленію s очевидно одинаковыя; если черезъ V_s мы будемъ обозначать производную по направленію s, а черезъ $\frac{\partial V}{\partial s}$ — производную по дугѣ s, очевидно:

$$V_s = \frac{\partial V}{\partial s}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

но 2-ыя производныя по дугѣ и по направленію вообще говоря различны. Формулы (24), (25), (26) стр. 122 совпадаютъ съ формулами Mathieu*).

Задача объ опредѣленіи гипергармонической функціи по контурнымъ условіямъ можетъ быть впрочемъ рѣшена значительно проще, чѣмъ въ § 28 если ограничиться разсмотрѣніемъ только первыхъ производныхъ гипергармонической функціи. Припомнимъ для этого общее выраженіе такой функціи V, данное Goursat**), которое, если ограничиться только функціями вещественными, имѣетъ видъ:

$$V = f(z) + \overline{f}(z_1) + zz_1(\varphi(z) + \overline{\varphi}(z_1)) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Здѣсь $f(z)$ и $\varphi(z)$ двѣ какія угодно функціи перемѣнной $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$, а $\overline{f}(z_1)$ и $\overline{\varphi}(z_1)$ выраженія сопряженныя съ $f(z)$ и $\varphi(z)$, получающіяся, если въ послѣднихъ вмѣсто $i = \sqrt{-1}$ подставить всюду $-i = -\sqrt{-1}$.

Подвергая обѣ части (2) операціи:

$$\overline{D}f = \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}$$

(см. § 14 стр. 71), мы найдемъ:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y} = 2[f'(z) + z_1(\varphi(z) + \overline{\varphi}(z_1)) + zz_1\varphi'(z)]$$

или

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y}\right\} = z_1\frac{d(z\varphi(z))}{dz} + f'(z) - z\varphi(z) + \{z\varphi(z) + z_1\overline{\varphi}(z_1)\}$$

---

*) см. E. Mathieu. Theorie des Potentials. Erster Teil IV Kap. § 15 и § 16 фор. A, B, C, D.

**) E. Goursat. Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$ S. M. F. Bull. 26 1898 г. стр. 206—237.

Обозначимъ:

$$z\varphi(z) = \Phi(z) \qquad f'(z) - z\varphi(z) = 2F(z)\,. \quad . \quad . \quad (3)$$

и положимъ:

$$\Omega = \text{вещ. часть } \Phi(z) \text{ т. е.}$$

$\Phi(z) + \Phi(z_1) = z\varphi(z) + z_1\varphi(z_1) = 2\Omega$, а кромѣ замѣтимъ, что

$$\frac{\partial V}{\partial s} - i\frac{\partial V}{\partial n} = e^{i\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y}\right) = e^{i\theta}\overline{D}V,$$

гдѣ $\frac{\partial V}{\partial s}$ и $\frac{\partial V}{\partial n}$ — производныя въ какой нибудь точкѣ заданнаго контура, а Θ-уголъ, образованный въ ней касательной къ этому контуру съ осью x-овъ.

Задача объ отысканіи V приводится такимъ образомъ къ задачѣ объ отысканіи 2-хъ функцій комплекснаго перемѣннаго $\Phi(z)$ и $F(z)$ при условіи, что на данномъ контурѣ заданы значенія выраженія:

$$(x - iy)\frac{d\Phi(z)}{dz} + 2F(z) + 2\Omega \quad \text{или}$$

значенія выраженія:

$$\frac{x - iy}{2}\,\frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z) + \Omega,$$

гдѣ Ω вещественная часть $\Phi(z)$. Само V опредѣлится по фор. (2), въ которой въ силу (3):

$$(4) \quad . \quad . \; \varphi(z) = \frac{1}{z}\Phi(z), \quad \text{а} \quad f(z) = \int(\Phi(z) + 2F(z))\,dz$$

Получаемая такимъ образомъ задача вполнѣ аналогична плоской задачѣ математической теоріи упругости, но прежде чѣмъ детально прослѣдить эту аналогію въ самомъ общемъ случаѣ, оставимся на простѣйшихъ предположеніяхъ относительно контура, на которомъ намъ заданы значенія V и $\frac{\partial V}{\partial n}$.

A) Случай прямолинейнаго контура (см. чер. 4 на стр. 42), принятаго за ось x-овъ. Пусть на этой оси:

$$V = f(x), \quad \text{a} \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial y} = f_1(x) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Такимъ образомъ:

$$\left\{\frac{x-iy}{2}\,\frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z) + \Omega\right\}_{y=0} = \frac{1}{4}\{f'(x) - if_1(x)\}$$

и слѣд-о:

$$\left\{\frac{x+iy}{2}\,\frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z) + \Omega\right\}_{y=0} = \left\{\frac{z}{2}\Phi'(z) + F(z) + \Omega\right\}_{y=0} =$$

$$= \frac{1}{4}\{f'(x) - if_1(x)\} \quad . \quad . \quad (6)$$

Поэтому:

$$\text{вещ. ч.} \quad \left\{\frac{z}{2}\Phi'(z) + F(z)\right\}_{y=0} + \{\Omega\}_{y=0} = \frac{1}{4}f'(x)$$

$$\text{мним. ч.} \quad \left\{\frac{z}{2}\Phi'(z) + F(z)\right\}_{y=0} = -\frac{i}{4}f_1(x)$$

и по фор. (7) стр. 44:

$$\frac{z}{2}\Phi'(z) + F(z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(s)\,ds}{s-z}, \quad . \quad . \quad (7)$$

а

$$\Omega = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[f'(s)y + (s-x)f_1(s)]\,ds}{(s-x)^2 + y^2}$$

и слѣд-о:

$$\Phi(z) = -\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[f'(s) + if_1(s)]\,ds}{s-z}$$

и изъ (7):

$$F(z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(s)\,ds}{s-z} + \frac{z}{2}\,\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(f'(s) + if_1(s))\,ds}{(s-z)^2}$$

Само V найдется изъ фор. (2) и (4).

В) Случай кругового контура (см. чер. 5 стр. 50).

Пусть на этомъ контурѣ $V = f(\theta)$, а $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial \rho} = f_1(\theta)$, гдѣ ρ и θ полярныя координаты какой нибудь точки въ плоскости контура, а полюсъ взятъ въ его центрѣ. Въ фор. (2) мы можемъ положить:

$$V = f(\rho e^{i\theta}) + f(\rho e^{-i\theta}) + \rho^2 \{\varphi(\rho e^{i\theta}) + \varphi(\rho e^{-i\theta})\}$$

и составимъ:

$$\frac{1}{2}\left\{\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} - i \frac{\partial V}{\partial \theta}\right\} = \{f'(\rho e^{i\theta}) + \rho^2 \varphi'(\rho e^{i\theta})\} \rho e^{i\theta} +$$
$$+ \rho^2 \{\varphi(\rho e^{i\theta}) + \varphi(\rho e^{-i\theta})\} \quad . \; . \; (8)$$

На контурѣ т. е. при $\rho = R$ (R радіусъ окружности):

$$\frac{1}{2}\left\{\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} - i \frac{\partial V}{\partial \theta}\right\}_{\rho = R} = \frac{1}{2}\{R f_1(\theta) - i f'(\theta)\}$$

Поэтому мнимая часть функціи комплекснаго перемѣннаго:

$$\Psi(\rho e^{i\theta}) = \{f'(\rho e^{i\theta}) + R^2 \varphi'(\rho e^{i\theta})\} \rho e^{i\theta} \quad . \; . \quad (9)$$

на контурѣ круга т. е. при $\rho = R$ обращается въ

$$-\frac{i}{2} f'(\theta)$$

Эта мнимая часть будетъ слѣд-о по фор. (4) стр. 50 равна

$$-\frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho^2) f'(\psi)\, d\psi}{R^2 - 2 R\rho \, Cos(\theta - \psi) + \rho^2}$$

вещественная же часть функціи (9) будетъ по фор. (5) стр. 51

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 R\rho f'(\psi)\, Sin(\theta - \psi)}{R^2 - 2 R\rho \, Cos(\theta - \psi) + \rho^2} d\psi + C,$$

а слѣд-о:

$$\Psi(\rho e^{\theta i}) = \frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{R + \rho e^{\theta i} e^{-\psi i}}{R - \rho e^{\theta i} e^{-\psi i}} f'(\psi)\, d\psi + C$$

Опредѣливъ $\Psi(\rho e^{\theta i})$ и, замѣчая, что при $\rho = R$ ея значенія совпадаютъ съ значеніями:

$$\{f'(\rho e^{\theta i}) + \rho^2 \varphi'(\rho e^{\theta i})\}\rho e^{\theta i}$$

мы найдемъ изъ (8) значенія на контурѣ круга

$$\varphi(\rho e^{\theta i}) + \varphi(\rho e^{-\theta i})$$

т. е. вещественной части функціи $\varphi(\rho e^{\theta i})$, а слѣд-о найдемъ эту вещественную часть по фор. (4) стр. 50, а затѣмъ найдемъ и мнимую по фор. (5) стр. 51 и слѣд-о $\varphi(\rho e^{\theta i})$ будетъ извѣстна; а т. к. $\Psi(\rho e^{\theta i})$ тоже извѣстна, то изъ (9) найдемъ $f'(\rho e^{\theta i})$, а слѣд-о и $f(\rho e^{\theta i})$ и тогда V опредѣлится по формулѣ:

$$V = f(\rho e^{i\theta}) + f(\rho e^{-i\theta}) + \rho^2\{\varphi(\rho e^{i\theta}) + \varphi(\rho e^{-i\theta})\}$$

Найденное значеніе V совпадаетъ съ выраженіями данными Almansi *) и Lauricella**) какъ мы это покажемъ въ особомъ изслѣдованіи.

Точно также легко рѣшить вопросъ и для всякаго изотермическаго контура.

5. О контурной функціи *Airy*.

Сравненіе предыдущихъ формулъ съ формулами рѣшающими плоскую задачу ведетъ къ введенію въ послѣднюю гипергармонической функціи аналогичной функціи *Airy*, но представляющей нѣсколько нагляднѣе распредѣленіе напряженій внутри нѣкотораго контура.

---

*) Atti della R. accademia delle scienze di Torino t. 32 1896—1897, стр. 881—888.

**) тамъ же стр. 1010—1018. См. также замѣтку Vito Volterra стр. 1018—1021.

Напр. для случая прямолинейнаго контура мы имѣемъ для опредѣленія гипергармонической функціи V условіе (см. стр. 179 и 180):

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y}\right\} = \frac{x-iy}{2}\frac{d\Phi(z)}{dz} + F(z) + \Omega\,,$$

гдѣ Ω вещественная часть $\Phi(z)$; съ другой стороны для того же контура мы имѣемъ условіе въ плоской задачѣ теоріи упругости:

$$2(N_2 + iT) = \frac{x-iy}{2}\frac{d\Phi(z)}{dz} + i\mathrm{F}(z) + \Omega,$$

гдѣ $\Omega =$ вещ. ч. $\Phi(z)$. Мы можемъ поэтому положить

$$4\Phi(z) = \tfrac{1}{2}\Phi(z)\,,\qquad \frac{i}{2}\mathrm{F}(z) = 4F(z)\,,\qquad N_2 = \frac{\partial V}{\partial x}\,,\quad T = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

и, т. к.

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

$$N_1 = \int \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,dx$$

Функціей *Airy* здѣсь очевидно является функція:

$$\Psi = \int V\,dx\,,$$

т. к.

$$N_1 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\,,\qquad N_2 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^3}\,,\qquad T = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\,,$$

а гипергармоническую функцію

$$V = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

мы назовемъ контурной функціей *Airy* или функціей *Airy* 2-го рода. Если частныя производныя перваго порядка $\frac{\partial V}{\partial x}$ и $-\frac{\partial V}{\partial y}$ выражаютъ напряженія на прямыхъ линіяхъ $y = const.$ $\|$-ыхъ нашему контуру ox, тогда какъ функція *Airy* требуетъ составленія вторыхъ производныхъ.

Для случая кругового контура возьмемъ полярныя координаты.

Мы имѣемъ по фор. (8):

$$\frac{1}{2}\left\{\rho\frac{\partial V}{\partial \rho} - i\frac{\partial V}{\partial \Theta}\right\} = \rho^2 \frac{d\varphi(\rho e^{i\theta})}{dlg(\rho e^{i\theta})} + \rho e^{i\theta} f'(\rho e^{i\theta}) +$$

$$+ \rho^2\{\varphi(\rho e^{i\theta}) + \varphi(\rho e^{-i\theta})\} \quad . \quad . \quad (10)$$

Сравнивая эту формулу съ фор. (1) стр. 19 написанной въ видѣ:

$$\rho^2(Q + iU) = \rho^2 \frac{d\,\frac{1}{4}\Phi(\rho e^{i\theta})}{dlg(\rho e^{i\theta})} + 2i\,\tfrac{1}{4}F(\zeta) + \rho^2(\tfrac{1}{4}\Phi(\zeta) + \tfrac{1}{4}\Phi(\zeta_1))$$

мы можемъ положить:

$$Q\rho^2 = \rho\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

$$U\rho^2 = -\frac{\partial V}{\partial \Theta},$$

а P найдемъ изъ условія

$$\nabla_2(P + Q) = 0.$$

Здѣсь вмѣсто функціи *Airy* удобно ввести функцію V, которую также мы назовемъ здѣсь контурной функціей *Airy*.

Аналогичныя формулы можно вывести и для общаго случая изотермическихъ координатъ какъ мы это покажемъ въ особомъ изслѣдованіи.

6. Дополненіе къ § 17.

Законъ взаимности перемѣщеній и усилій можно высказать весьма различно. Напр., сравнивая фор. (10) стр. 82, написанную въ видѣ:

$$v + iu = -\frac{1}{4\mu} y \Phi(z) + \frac{i}{4\mu} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} [\text{вещ. ч.} \int \Phi(z)\, dz] + \varphi + i\psi$$

съ фор. (11) стр. 82:

$$T + iN_1 = -\tfrac{1}{2} y \frac{d\Phi(z)}{dz} + \frac{F(z)}{2} + \frac{i}{2} [\text{вещ. ч. } \Phi(z)]\,, \quad (11)$$

замѣтимъ, что эти формулы совпадутъ, если предположить

$$\frac{F(z)}{2} = \varphi + i\psi \qquad \frac{d\Phi(z)}{dz} = \frac{1}{2\mu} \Phi(z)$$

и придать къ обѣимъ частямъ (11): $\varepsilon = \frac{\mu}{\lambda + \mu}(N_1 + N_2)$; задача теоріи упругости съ перемѣщеніями u и v обратится къ задачу теоріи упругости съ напряженіями

$$T = v \qquad N_1 + \varepsilon = u$$

Такимъ образомъ начало взаимности получаетъ въ этомъ случаѣ характеръ, оправдывающій это названіе.

Во время печатанія настоящей работы вышли на русскомъ языкѣ еще 2 работы, посвященныя плоской задачѣ математической теоріи упругости:

1. Герсевановъ Н. М. Плоская задача теоріи упругости. Сборникъ И. И. П. С. 1909.

2. Тимошенко С. П., О распредѣленіи напряженій въ круговомъ кольцѣ. О вліяніи круглыхъ отверстій на распредѣленіе напряженій въ пластинкахъ. (Извѣстія Кіевскаго Политехническаго Института.) Кіевъ, 1907—1908.

Алфавитный указатель

гг. авторовъ упоминаемыхъ въ настоящемъ сочиненіи: