

7,8

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

TOIMETISED

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

487

KONSTRUKTSIOONIDE PLASTSUS ПЛАСТИЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ

МАТЕМАТИКА- JA МЕХАНИКА-
ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ

XXIII

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIINIK 487 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

KONSTRUKTSIOONIDE PLASTSUS
ПЛАСТИЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ

МАТЕМААТИКА- JA МЕННААНИКА-
ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ

XXIII

ТАРТУ 1979

Redaktsioonikolleegium:

U. Lepik (esimees), L. Ainola, S. Baron (vast. toimetaja), K. Kenk, M. Kilp,
U. Lumiste, E. Reimers, E. Tamme

Редакционная коллегия:

Ю. Лепик (председатель), Л. Айнола, С. Барон (отв. редактор), К. Кенк,
М. Кильп, Ю. Лумисте, Э. Реймерс, Э. Тамме

Настоящее издание является межвузовским сборником
высших учебных заведений Эст. ССР.

© Тартуский государственный университет, 1979

Ученые записки Тартуского государственного университета. Выпуск 487.
ПЛАСТИЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ. Труды по математике и механике XXIII.
На русском языке. Резюме на эстонском, английском и немецком языках.
Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18.
Ответственный редактор С. Барон. Корректоры В. Логинова, О. Мутт,
К. Уусталу. Сдано в набор 13.02.78. Подписано к печати 26.02.79. Бумага
типографская № 1. 60 × 90 1/16. Печ. листов 8,0. Учетно-издат. листов 7,8.
Тираж 450. МВ 01392. Типография им. Х. Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту,
ул. Юликооли, 17/19. Заказ № 737. Цена 1 руб. 20 коп.

О ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ КРУГЛЫХ ВАЛОВ ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА

Э. Сакс

Тартуский государственный университет

Рассмотрим идеально пластическое кручение круглого вала переменного диаметра, ориентированного в цилиндрической системе координат $r\theta z$ (ось z направлена по оси вала). Пусть вал закручивается окружными касательными усилиями $T = T(z, r)$, распределенными по торцевым и (или) боковым поверхностям вала по произвольному закону. Массовые силы отсутствуют. Ранее [1—4] были исследованы случаи, когда боковая поверхность вала свободна от усилий и вал закручивается торцевыми моментами M . Используя модель жесткого идеально пластического материала, определим напряженное состояние скручиваемого вала и предельный скручиваемый момент при заданном нагружении, а также возможные «механизмы разрушения».

Напряженное состояние характеризуется компонентами $\tau_{z\theta}(z, r)$ и $\tau_{r\theta}(z, r)$, которые должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (1)$$

и условию пластичности

$$\tau_{z\theta}^2 + \tau_{r\theta}^2 \leq k^2 = \text{const}, \quad (2)$$

где k — предел текучести при сдвиге. Условие пластичности (2) соответствует как условию пластичности Треска, так и условию пластичности Мизеса. Из условия (2) следует неравенство $|T| \leq k$. Для интегрирования уравнения (1) положим

$$\tau_{z\theta} = -k \sin \varphi, \quad \tau_{r\theta} = k \cos \varphi, \quad (3)$$

где φ — неизвестная функция. Условие пластичности (2) подстановкой (3) обратится в тождество, а уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \varphi = \frac{2}{r} \cos \varphi. \quad (4)$$

Характеристики последнего уравнения определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{\cos \varphi} = \frac{dr}{\sin \varphi} = \frac{r d\varphi}{2 \cos \varphi}. \quad (5)$$

Пусть φ_0 является значением искомой функции φ на контуре вала. Используя формулы (3) и предполагая, что в данной граничной точке материал вала находится в пластическом состоянии, выражаем краевые усилия в виде

$$T = \tau_{z0} \cos \psi - \tau_{r0} \sin \psi = k \sin(\psi - \varphi_0). \quad (6)$$

Здесь ψ — угол, отсчитываемый от положительного направления оси z до внешней нормали к контуру вала. По участкам контура, на которых направление внешней нормали к контуру совпадает с положительным направлением оси z (противоположно к нему), имеем $\psi = 0$ (соответственно $\psi = -\pi$). В остальных точках контура угол ψ вычисляется по формулам

$$\psi = \beta \pm \pi/2, \quad \tan \beta = dR/dz, \quad (7)$$

где $R = R(z)$ — уравнение контура вала. Угол β определяет наклон касательной к контуру. В формуле (7) верхний знак выбирается для внешней поверхности, нижний — для полости, если последняя имеется.

Соотношение (6) и определит граничное значение

$$\varphi_0 = \psi - \arcsin(T/k) \quad (8)$$

для искомой величины φ . В (8) следует выбрать такую ветвь арксинуса, чтобы обе компоненты напряжения, вычисляемые по формулам (3) (вместо φ нужно брать φ_0), согласовались с заданными усилиями на контуре (в случае выбора неправильной ветви направление скручивания вала меняется на противоположное). Функции φ , ψ , φ_0 достаточно определить с точностью до числа, кратного 2π , поэтому ограничимся рассмотрением углов $-\pi \leq \varphi$, ψ , $\varphi_0 < \pi$.

Задача о кручении круглого вала из жесткого идеально пластического материала является статически определимой: два уравнения (1) и (2) относительно двух неизвестных τ_{z0} и τ_{r0} при граничном условии (8) позволяют полностью определить напряженное состояние без определения деформированного состояния. Из системы (5) видно, что функция φ является углом наклона характеристики к оси z . Характеристика, проходящая через граничную точку $A(z_0, r_0)$, имеет вид

$$r^2 \cos \varphi = r_0^2 \cos \varphi_0. \quad (9)$$

Отсюда видно, что для данной характеристики имеет место неравенство $r \geq r_0 |\cos \varphi_0|^{1/2}$ и при $|\varphi_0| \neq \pi/2$ характеристика не доходит до оси вала. Определим угол наклона касательной к характеристике в контурной точке. Из формул (5), (7), (8) следует равенство

$$\left. \frac{dr}{dz} \right|_A = \tan \varphi_0 = \tan \left(\beta \pm \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{T}{k} \right),$$

откуда получим наклон касательной к характеристике в контурной точке, равный

$$\tan \varphi_0 = (\sqrt{k^2 - T^2} + T \tan \beta) (T - \sqrt{k^2 - T^2} \tan \beta)^{-1}. \quad (10)$$

В частном случае $T = 0$ формула (10) сводится к виду $\tan \varphi_0 \cdot \tan \beta = -1$. Значит, характеристики ортогональны ненагруженному контуру вала, что совпадает с результатом работы [1]. При $T = \pm k$ формула (10) дает $\tan \varphi_0 = \tan \beta$, т. е. характеристика является касательной к контуру вала. Из формулы (10) следует, что характеристика пересекается с контуром под углом

$$\varphi_0 - \beta = \arctan(T^{-1} \sqrt{k^2 - T^2}).$$

На характеристике, проходящей через точку A , имеет место равенство

$$z = z_0 + r_0 \sqrt{| \cos \varphi_0 |} [I(\varphi) - I(\varphi_0)], \quad (11)$$

где

$$I(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} \cos \varphi \cdot F\left(\arccos \sqrt{| \cos \varphi |}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right);$$

F — неполный эллиптический интеграл первого рода. Формула (11) содержит неизвестную функцию φ . Более удобная формула получится, если из нее с помощью равенства (9) исключить угол φ :

$$\begin{aligned} z = z_0 + \sqrt{1/2} r_0 \sqrt{| \cos \varphi_0 |} \operatorname{sgn} \cos \varphi_0 \cdot \\ \cdot [F(\arccos(r_0 r^{-1} \sqrt{| \cos \varphi_0 |}), \sqrt{1/2}) - \\ - F(\arccos \sqrt{| \cos \varphi_0 |}, \sqrt{1/2})]. \end{aligned} \quad (12)$$

Формула (12) представляет собой уравнение характеристики, проходящей через граничную точку $A(z_0, r_0)$.

Находим выражения для компонент напряжения $\tau_{z\theta}$ и $\tau_{r\theta}$. Из системы (5) определим

$$\cot \varphi = \frac{dz}{dr}. \quad (13)$$

Дифференцированием выражения (12) найдем

$$\frac{dz}{dr} = r_0^2 \cos \varphi_0 / \sqrt{r^4 - r_0^4 \cos^2 \varphi_0}. \quad (14)$$

Комбинируя формулы (3), (13) и (14), получим выражения для компонент напряжения:

$$\tau_{z\theta} = -kr^2 \sqrt{r^4 - r_0^4 \cos^2 \varphi_0} \operatorname{sgn} \cos \varphi_0; \quad \tau_{r\theta} = kr^{-2} r_0^2 \cos \varphi_0 \quad (15)$$

вдоль характеристики (12). При исследовании деформированного состояния скручиваемого жестко-пластического вала считаем, что начальные деформации равны нулю, а компоненты напряжения постоянны по времени. Единственными отличными от нуля компонентами деформации являются

$$\gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad (16)$$

где $v = v(z, r)$ — окружное перемещение. Из ассоциированного закона деформирования следует равенство

$$\dot{\gamma}_{z\theta}\tau_{r\theta} - \dot{\gamma}_{r\theta}\tau_{z\theta} = 0,$$

которое после интегрирования примет вид

$$\gamma_{z\theta}\tau_{r\theta} - \gamma_{r\theta}\tau_{z\theta} = 0.$$

Подставляя сюда выражения (16) и (3), получим дифференциальное уравнение депланации меридиональных продольных сечений:

$$\frac{\partial v}{\partial z} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi = \frac{v}{r} \sin \varphi. \quad (17)$$

Соответствующие дифференциальные уравнения характеристик уравнения (17) будут

$$\frac{dz}{\cos \varphi} = \frac{dr}{\sin \varphi} = \frac{r dv}{v \sin \varphi}. \quad (18)$$

Из уравнений (5) и (18) вытекает, что характеристики полей деформаций и напряжений совпадают. Уравнения (18) имеют простой интеграл $v/r = c$, где c — постоянная, своя вдоль каждой характеристики. Поскольку величина v/r выражает угол поворота сечения вокруг оси z , получим, что поверхность вращения, образованная линиями скольжения, поворачивается вокруг оси z как жесткое тело. К этому результату пришел Соколовский [2, 3]. Другими словами — характеристики являются линиями скольжения.

Исследуем задачу о кручении цилиндрического вала (длины l и диаметра $2r_0$) под действием момента M , действующего на торце $z = l$, и распределенного касательного усилия $\tau_{r\theta} = -\tau = \text{const}$ ($0 < \tau \leq k$), приложенного на боковой поверхности вала, около другого торца ($z = 0$). Торце $z = 0$ и остальная часть ($d < z \leq l$) боковой поверхности свободны от нагрузок. Равновесие крутящих моментов требует справедливости равенства $M = 2\pi\tau r_0^2 d$. Вследствие формулы (8) имеем следующие значения углов:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -\pi/2 & (d < z \leq l, r = r_0; z = l, 0 \leq r \leq r_0); \\ \varphi_0 &= -\pi & (z = 0, 0 \leq r \leq r_0); \\ \varphi_0 &= -\pi/2 - \arcsin \tau/k & (0 \leq z \leq d, r = r_0); \end{aligned}$$

из точки разрыва боковой касательной нагрузки ($z = d, r = r_0$) исходит веер характеристик (9), для которых

$$-\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\tau}{k} \leq \varphi_0 \leq -\frac{\pi}{2}.$$

Линий разрыва характеристик в данном случае нет.

Торцевой момент M_1 будет максимален, если торцевое сечение $z = l$ полностью пластическое, чему соответствует $\tau_{z\theta} = k$ и

$$M_1 = 2\pi \int_0^{r_0} r^2 \tau_{z0} dr = 2\pi k r_0^3 / 3.$$

На участке боковой поверхности $0 \leq z < d$ максимальный крутящий момент M_2 достигается в случае $\tau_{r\theta} = -k$, т. е. он равен

$$M_2 = 2\pi r_0^2 \int_0^d \tau_{r\theta} dz = -2\pi k r_0^2 d.$$

Из условия равновесия вала в целом следует, что оба момента будут максимальными в случае $d = r_0/3$. При $d < r_0/3$ имеет место скольжение по поверхности нагруженной боковой части ($\varphi_0 = -\pi$), а при $d > r_0/3$ — по торцевой поверхности $z = l$ с $\varphi_0 = -\pi/2$. Эти условия для угла φ_0 следуют из формул (8) и (12).

Таким образом, в зависимости от отношения d/r_0 имеют место два существенно разных механизма потери несущей способности при кручении цилиндрического вала боковой и торцевой нагрузками. Разрушающий крутящий момент определяется по формуле $M = 2\pi r_0^2 k \cdot \min\{r_0/3, d\}$.

Литература

1. Ивлев Д. Д., Теория идеальной пластичности. Москва, 1966.
2. Соколовский В. В., Пластическое кручение круглых валов переменного диаметра. Прикл. матем. и механ., 1945, **9**, № 4, 47—53.
3. Соколовский В. В., Теория пластичности. Москва, 1969.
4. Mióduchowski, A., *Plastyczne skręcanie prętów*. Rozpr. inż., 1971, **19**, № 1, 42—84.

Поступило
27 VI 1977

MUUTUVA LÄBIMÕÕDUGA UMMARGUSTE VÕLLIDE JÄIKPLASTSEST VÄANDEST

E. Saks

Resümee

Uuritakse jäik-plastsete pöördkehade telgsümmeetrilist väännet suvalise koormuse korral. Tuletatakse avaldised pingekomponentide arvutamiseks. Ühel erijuhul leitakse ka piirmoment.

ON RIGID-PLASTIC TORSION OF ROUND SHAFTS OF VARIABLE DIAMETER

E. Saks

Summary

The axisymmetrical torsion of rigid-plastic bodies of revolution under an arbitrary loading has been analysed. The formulae of stress components have been given. In one particular case the limit moment has been found.

К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Я. Леллеп

Тартуский государственный университет

Для решения задачи оптимального проектирования неупругих элементов конструкций существует два подхода. Один из них состоит в непосредственном применении аппарата вариационного исчисления для конкретной задачи. Оказывается, что иногда можно указать, в весьма общем виде (не конкретизируя задачи), условия, которым удовлетворяет оптимальный проект. Выведению таких общих свойств оптимальных элементов конструкций, работающих в условиях ползучести, посвящены работы Ю. Немировского [2] и Прагера [3].

Ниже рассматривается задача оптимизации кольцевой пластины, растянутой по внутреннему контуру. Допускается, что поведение материала пластины может быть различным при растяжении и сжатии. Работы О. В. Соснина [4] показывают, что поведение разномодульных материалов описывается весьма удовлетворительно степенным законом ползучести, упрощенный вариант которого применяется в данной работе. Задача решается первым путем (прямым варьированием).

§ 1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим кольцевую пластину радиуса R с вырезом радиуса a и переменной толщины H . Пластина нагружена растягивающими усилиями, равномерно распределенными по внутреннему контуру. Постоянную интенсивность растягивающих усилий обозначим через T . Внешний край пластины считаем заземленным. Уравнения равновесия и граничное условие имеют при данной задаче вид:

$$\frac{d}{dr} (H\sigma_r) + \frac{H}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0, \quad \sigma_r(a)H(a) = T, \quad (1.1)$$

где σ_r , σ_θ — радиальное и касательное напряжения.

Скорости деформации в процессе установившейся ползучести связаны со скоростью радиального перемещения U формулами

$$\varepsilon_1 = \frac{dU}{dr}, \quad \varepsilon_2 = \frac{U}{r}. \quad (1.2)$$

Допустим, что значение скорости перемещения на внутреннем контуре задано, т. е.

$$U(a) = -U_0, \quad U(R) = 0. \quad (1.3)$$

Предположим, что пластина изготовлена из разномодульного материала. Поведение такого материала при одноосном растяжении и сжатии описываем для простоты соотношениями

$$\varepsilon = \begin{cases} B(\lambda\sigma)^n, & \sigma \geq 0, \\ -B|\sigma|^n, & \sigma < 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь B , λ и n — постоянные материала, ε — скорость деформации, σ — напряжение. Допустим, что в случае плоского напряженного состояния процесс ползучести соответствует шести-

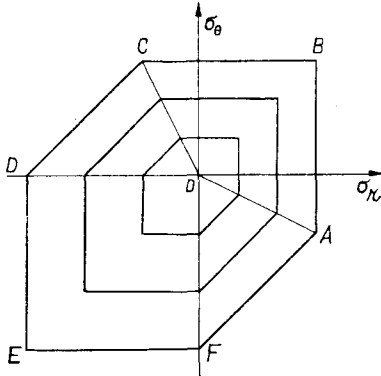


Рис. 1.

угольникам Прагера (рис. 1) и ассоциированному закону течения, вершины шестиугольников — точки $A = (\gamma\sigma, (\gamma-1)\sigma)$, $B = (\gamma\sigma, \gamma\sigma)$, $C = ((\gamma-1)\sigma, \gamma\sigma)$, $D = (-\sigma, 0)$, $E = (-\sigma, -\sigma)$ и $F = (0, -\sigma)$. Здесь σ определяет размеры конкретного шестиугольника, а параметр γ характеризует различное поведение материала при растяжении и сжатии. Далее ограничимся случаем $0 < \gamma \leq 1$.

Методика определения взаимосвязи между напряжениями и скоростями деформации при сделанных допущениях была выработана в [1]. Рассматриваемые соотношения могут быть представлены более сжато, если ввести потенциал ползучести

$$\Phi = \frac{nB^{-1/n}}{n+1} \left[\frac{1}{2}(\gamma-1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|) + \frac{\gamma}{2}|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \right]^{1+1/n} \quad (1.5)$$

и записать закон ползучести в виде

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \quad (1.6)$$

В формуле (1.6) за σ и ε будут соответственно σ_r , ε_1 и σ_θ , ε_2 , если $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0$. Но $\sigma = \sigma_r$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$, если $\varepsilon_2 = 0$, а $\sigma = \sigma_\theta$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$, если $\varepsilon_1 = 0$. В случае $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ имеем $\sigma = \sigma_r - \sigma_\theta$ и $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Таким образом, для вершин на рис. 1 получаем два соотношения типа (1.6), а для сторон — лишь одно. С помощью формул (1.4) — (1.6) получаем

$$\lambda = \gamma^{-1-1/n}.$$

Поставим следующую задачу: найти закон изменения толщины H , при котором функционал

$$V = \int_a^R H r dr \quad (1.7)$$

принимает минимальное значение при условиях (1.1) — (1.3) и (1.5), (1.6).

Допустим, что пластина имеет достаточно большой вырез. Ниже покажем, что в этом случае пластина находится целиком в состоянии ОА (рис. 1). Тогда $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \leq 0$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geq 0$. Поэтому из (1.5) и (1.6) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \gamma \left[\frac{1}{B} (\gamma \varepsilon_1 + (\gamma - 1) \varepsilon_2) \right]^{1/n}, \\ \sigma_\theta &= (\gamma - 1) \left[\frac{1}{B} (\gamma \varepsilon_1 + (\gamma - 1) \varepsilon_2) \right]^{1/n}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

§ 2. Условия оптимальности

Поставленная задача состоит в минимизации функционала (1.7) с учетом ограничений (1.1) — (1.3) и (1.8). Чтобы упростить ее запись введем следующие величины

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{r}{R}, & \alpha &= \frac{a}{R}, & u &= \frac{U}{R}, & b &= \frac{U_0}{R}, \\ \sigma_1 &= B^{1/n} \sigma_r, & \sigma_2 &= B^{1/n} \sigma_\theta, & h &= \frac{H}{TB^{1/n} \alpha^{1/\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Соотношения (1.1) примут с учетом (2.1) вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varrho} (h\sigma_1) + \frac{h}{\varrho} (\sigma_1 - \sigma_2) &= 0, \\ \sigma_1(\alpha) h(\alpha) &= \alpha^{-1/\gamma}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Заметим, что из (1.8) следует

$$\sigma_1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sigma_2. \quad (2.3)$$

Решая уравнение (2.2) с помощью формулы (2.3) и удовлетворяя соответствующему краевому условию, получаем

$$\sigma_1 = \frac{1}{hQ^{1/\gamma}}. \quad (2.4)$$

Если к формуле (2.3) добавить соотношение

$$\sigma_1 = \gamma[\gamma \varepsilon_1 + (\gamma - 1) \varepsilon_2]^{1/n}, \quad (2.5)$$

то эта система эквивалентна системе (1.8). Формулы (1.2) и (1.3) перепишем с учетом (2.1) в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dQ}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{Q} \quad (2.6)$$

и

$$u(a) = -b, \quad u(1) = 0. \quad (2.7)$$

Минимизируемый функционал (1.7) примет вид:

$$J = \int_a^1 hQ \, dQ, \quad (2.8)$$

где введено обозначение

$$V = R^2 T B^{1/n} \alpha^{1/\gamma} J.$$

Для минимизации функционала (2.8) с учетом (2.3)–(2.7) введем функции $\psi_i = \psi_i(Q)$ ($i = 1, \dots, 5$) и запишем J в виде

$$J = \int_a^1 \left\{ hQ + \psi_1 \left(\sigma_1 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sigma_2 \right) + \psi_2 \left(\sigma_1 - \frac{1}{hQ^{1/\gamma}} \right) + \right. \\ \left. + \psi_3 [\sigma_1 - \gamma(\gamma \varepsilon_1 + (\gamma - 1) \varepsilon_2)^{1/n}] + \psi_4 \left(\varepsilon_1 - \frac{du}{dQ} \right) + \psi_5 \left(\varepsilon_2 - \frac{u}{Q} \right) \right\} dQ.$$

Варьируя последнее равенство и приравнявая нулю вариацию функционала J , получаем

$$\int_a^1 \left\{ \left(Q + \psi_2 \cdot \frac{1}{h^2 Q^{1/\gamma}} \right) \delta h + (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) \delta \sigma_1 - \psi_1 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \delta \sigma_2 + \right. \\ \left. + \left[-\frac{\psi_3}{n} \gamma^2 (\gamma \varepsilon_1 + (\gamma - 1) \varepsilon_2)^{-1+1/n} + \psi_4 \right] \delta \varepsilon_1 + \right. \\ \left. + \left[-\frac{\psi_3}{n} \gamma (\gamma - 1) (\gamma \varepsilon_1 + (\gamma - 1) \varepsilon_2)^{-1+1/n} + \psi_5 \right] \delta \varepsilon_2 - \right. \\ \left. - \psi_4 \delta \frac{du}{dQ} - \psi_5 \frac{\delta u}{Q} \right\} dQ = 0. \quad (2.9)$$

Интегрируя по частям выражение $\delta du/dQ$ с учетом условий $\delta u(a) = \delta u(1) = 0$ и считая вариации величин h , σ_1 , σ_2 , ε_1 , ε_2 и u независимыми, из (2.9) находим

$$\begin{aligned}
\psi_2 + h^2 q^{1+1/\gamma} &= 0; & \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 &= 0; & \psi_1 &= 0; \\
-\frac{\psi_3}{n} \gamma^2 (\gamma \varepsilon_1 + (\gamma - 1) \varepsilon_2)^{-1+1/n} + \psi_4 &= 0; \\
-\frac{\psi_3}{n} \gamma (\gamma - 1) (\gamma \varepsilon_1 + (\gamma - 1) \varepsilon_2)^{-1+1/n} + \psi_5 &= 0; \\
\frac{d\psi_4}{dq} - \frac{\psi_5}{q} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Из системы (2.10) можно определить неизвестные множители Лагранжа $\psi_1 - \psi_5$. Так как число уравнений в (2.10) равно шести, то получим дополнительное соотношение для определения функции $h = h(q)$.

§ 3. Оптимальный проект пластины

Решая систему (2.10) с учетом (2.3) — (2.7), находим полное решение поставленной задачи. Из четвертого и пятого уравнения в (2.10) следует

$$\psi_5 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \psi_4. \tag{3.1}$$

Последнее уравнение в (2.10) и (3.1) дают

$$\psi_4 = \frac{A}{n} q^{1-1/\gamma}, \tag{3.2}$$

где A/n — постоянная интегрирования. Определяя с помощью (2.4) и (2.5) величину

$$[\gamma \varepsilon_1 + (\gamma - 1) \varepsilon_2]^{1/n} = [\gamma h q^{1/\gamma}]^{-1} \tag{3.3}$$

и подставляя ее в четвертое уравнение (2.10) с учетом (3.2), находим

$$\psi_3 = \frac{A}{\gamma^{n+1}} h^{1-n} q^{1-n/\gamma}. \tag{3.4}$$

Первые три уравнения (2.10) и (3.4) позволяют найти

$$h = \frac{A^{1/(n+1)}}{\gamma} q^{-1/\gamma}. \tag{3.5}$$

Из (3.3) с учетом (2.6) и (3.5) получим дифференциальное уравнение для u :

$$\frac{du}{dq} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{u}{q} = [\gamma A^{n/(n+1)}]^{-1}. \tag{3.6}$$

Решением уравнения (3.6) при граничных условиях (2.7) является функция

$$u = \frac{1}{2\gamma - 1} A^{-n/(n+1)} (q - q^{-1+1/\gamma}), \tag{3.7}$$

причем

$$A^{n/(n+1)} = \frac{\alpha - \alpha^{-1+1/\gamma}}{b(1-2\gamma)}, \quad (3.8)$$

если $\gamma \neq 1/2$. В случае $\gamma = 1/2$ вместо (3.7) и (3.8) имеем

$$u = 2A^{-n/(n+1)} \varrho \ln \varrho \quad (3.9)$$

и

$$A^{n/(n+1)} = -2 \frac{\alpha}{b} \ln \alpha. \quad (3.10)$$

§ 4. Анализ полученных результатов

Вычислим объем найденного проекта. С помощью формул (1.7), (2.1), (3.5) и (3.8), получим для случая $\gamma \neq 1/2$

$$V = TR^2 \left(\frac{B}{b} \right)^{1/n} \alpha^{2+1/n} \left[\frac{1 - \alpha^{-2+1/\gamma}}{1 - 2\gamma} \right]^{1+1/n}. \quad (4.1)$$

Аналогично при $\gamma = 1/2$ находим

$$V = TR^2 \left(\frac{B}{b} \right)^{1/n} \alpha^{2+1/n} (-2 \ln \alpha)^{1+1/n}. \quad (4.2)$$

Чтобы оценить экономию найденного проекта, рассмотрим пластину постоянной толщины H_0 , которая нагружена вышеуказанным способом. Для такой пластины из (2.4) — (2.6) получим уравнение

$$\frac{du}{d\varrho} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{u}{\varrho} = [h_0^n \gamma^{n+1} \varrho^{n\gamma}]^{-1}, \quad (4.3)$$

где $h_0 = H_0 [TB^{1/n} \alpha^{1/\gamma}]^{-1}$. Решениями уравнения (4.3) при условии $u(1) = 0$ являются соответственно функции

$$u = - \frac{\varrho^{1-n/\gamma} (1 - \varrho^{(n+1)/\gamma-2})}{(h_0 \gamma)^n (n+1 - 2\gamma)}, \quad (4.4)$$

если $\gamma \neq (n+1)/2$, и

$$u = [\gamma (h_0 \gamma)^n]^{-1} \varrho^{-1+1/\gamma} \ln \varrho, \quad (4.5)$$

если $\gamma = (n+1)/2$. Удовлетворяя условию $u(\alpha) = -b$ и вычисляя значение функционала (1.7), получим

$$V_0 = R^2 T \left(\frac{B}{b} \right)^{1/n} \left(\frac{1 - \alpha^2}{2\gamma} \right) \left[\frac{\alpha}{n+1 - 2\gamma} (1 - \alpha^{(n+1)/\gamma-2}) \right]^{1/n}, \quad (4.6)$$

если $\gamma \neq (n+1)/2$, и

$$V_0 = R^2 T \left(\frac{B}{b} \right)^{1/n} \left(\frac{1 - \alpha^2}{2\gamma^{1+1/n}} \right) (-\alpha \ln \alpha)^{1/n}, \quad (4.7)$$

если $\gamma = (n+1)/2$. Вычисляя отношение $\theta = V/V_0$ с учетом формул (4.1), (4.2), (4.6) и (4.7), имеем

$$\theta = \frac{2\gamma \alpha^2}{1 - 2\gamma} \frac{1 - \alpha^{-2+1/\gamma}}{1 - \alpha^2} \left[\frac{(n+1 - 2\gamma) (1 - \alpha^{-2+1/\gamma})}{(1 - 2\gamma) (1 - \alpha^{-2+(n+1)/\gamma})} \right]^{1/n}, \quad (4.8)$$

если $\gamma \neq 1/2$ и $\gamma \neq (n+1)/2$,

$$\theta = \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2} \left[\frac{2n}{1-\alpha^{2n}} (-\ln \alpha)^{1+n} \right]^{1/n}, \quad (4.9)$$

если $\gamma = 1/2$, причем $\gamma \neq (n+1)/2$ и

$$\theta = \frac{1}{(1-\alpha^2)(-\ln \alpha)^{1/n}} \left[\frac{n+1}{-2n} (1-\alpha^{-2n/(1+n)}) \right]^{1+1/n}, \quad (4.10)$$

если $\gamma = (n+1)/2$. В случае $n = \gamma = 1$ формула (4.10) примет вид

$$\theta = -\frac{2(1-\alpha)}{(1+\alpha)\ln \alpha}. \quad (4.11)$$

Отметим, что если заведомо $n > 1$, то случая $\gamma = (n+1)/2$ не следует рассматривать.

Некоторые значения величины θ представлены в таблицах 1 и 2. Первая таблица соответствует случаю $\gamma = 0,5$, вторая — случаю $\gamma = 0,8$.

Таблица 1

$\alpha \backslash n$	1	3	5	7	9	11	13
0.6	0.917	0.848	0.797	0.761	0.735	0.716	0.701
0.7	0.959	0.921	0.890	0.863	0.843	0.826	0.813
0.8	0.983	0.968	0.953	0.940	0.928	0.917	0.908
0.9	0.996	0.993	0.990	0.986	0.982	0.979	0.976

Таблица 2

$\alpha \backslash n$	1	3	5	7	9	11	13
0.6	0.967	0.935	0.907	0.883	0.863	0.847	0.834
0.7	0.984	0.968	0.953	0.939	0.926	0.916	0.960
0.8	0.994	0.987	0.981	0.975	0.969	0.964	0.959
0.9	0.998	0.997	0.996	0.994	0.993	0.991	0.990

Таблица 3

γ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α_0	0,82	0,74	0,68	0,64	0,61	0,58	0,55	0,53	0,52	0,50

При построении оптимального проекта было предположено, что $\epsilon_1 \geq 0$, $\epsilon_2 \leq 0$ и $\epsilon_1 + \epsilon_2 \geq 0$. С помощью формул (2.6), (3.7)—(3.10) можно показать, что эти неравенства удовлетворяются, если $\alpha \geq \alpha_0$, где

$$\alpha_0 = \begin{cases} (2\gamma)^{\gamma/(1-2\gamma)}, & \gamma \neq 1/2, \\ e^{-1/2}, & \gamma = 1/2. \end{cases}$$

Значения величины α_0 при некоторых значениях γ представлены в таблице 3.

Эта же задача в случае материала, подчиняющегося условию Треска была решена иным способом в работе Прагера [3]. Так как при $\gamma = 1$ условие Прагера превращается в условие Треска, то можно ожидать, что из данного решения вытекает как частный случай и решение Прагера. Выбирая $\gamma = 1$ и анализируя полученные результаты, можно проверить, что это действительно так и есть.

Литература

1. Леллеп Я., Установившаяся ползучесть круглых и кольцевых пластин, выполненных из разномодульного неупругого материала. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 323—333.
2. Немировский Ю. В., Об учете веса при проектировании конструкций в условиях ползучести. Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела, 1970, № 4, 111—123.
3. Прагер В., Оптимальное проектирование конструкций заданной жесткости при стационарной ползучести. Механика. Период. сб. пер. ин. статей, 1969, № 6, 143—147.
4. Соснин О. В., О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1970, № 5, 136—139.

Поступило
22 VI 1977

RÕNGASPLAATIDE OPTIMAALNE PROJEKTEERIMINE STATIONAARSE ROOMAVUSE KORRAL

J. Lellep

Resümee

Uuritakse optimaalse projekteerimise ülesannet materjalide korral, mis võivad käituda erinevalt tõmbel ja survel. Vaadeldakse muutuva paksusega rõngasplaati, mille välisserv on järgalt kinnitatud ja siseservale mõjub ühtlaselt jaotatud tõmbekoormus. Leitakse paksuse muutumise seadus, mille korral plaadi ruumala on minimaalne ning radiaalsuunalise nihutuse kiirus siseserval omab etteantud väärtuse.

ON THE OPTIMAL DESIGN OF ANNULAR PLATES IN THE CASE OF STEADY CREEP

J. Lellep

Summary

Optimal design of annular plates in the case of materials which behave differently in tension and compression is studied. The analysis is carried out for the plate of variable thickness loaded by uniform tension in inner edge. The outer edge of the plate is clamped. The minimum volume problem is solved in the condition that the radial displacement rate is given in the inner edge.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЁСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Ю. Лепик

Тартуский государственный университет

Задача оптимального проектирования жестко-пластических динамически нагруженных балок со ступенчато постоянной высотой исследована Леликом и Мрузом в [3]. В этой работе объем балки считается заданным, минимизируются остаточные прогибы. Поставленная задача оптимизации решается при помощи метода модальных решений, представленного Мартином и Саймондсом [4]. Первая часть работы [3] ограничивается случаем импульсного нагружения, причем начальная кинетическая энергия считается заданной. Такой метод решения сравнительно прост, но имеет и свои недостатки: во-первых, здесь не принимается в расчет первая фаза движения, где действует нагрузка; во-вторых, при такой постановке задачи решение может оказаться неединственным. От этих недостатков свободен другой вариант решения, рассмотренный в [3]. Здесь считается, что к балке приложено постоянное давление, которое в некоторый момент времени снимается, и дальнейшее движение происходит по инерции. Таким образом, имеем две фазы движения — движение под действием нагрузки и инерциальное движение; для обеих фаз имеют место модальные решения. Из результатов работы вытекает, что между этими фазами может возникнуть и некоторая фаза, где движение уже немодальное. Для средних давлений удается решать такие задачи точно, но при высоких давлениях появляются движущиеся шарниры, вследствие чего получить численные результаты тяжело (ср., например, монографию [1]). Поэтому, по-видимому, придется упростить постановку задачи и выработать приближенный метод решения, обеспечивающий необходимую точность.

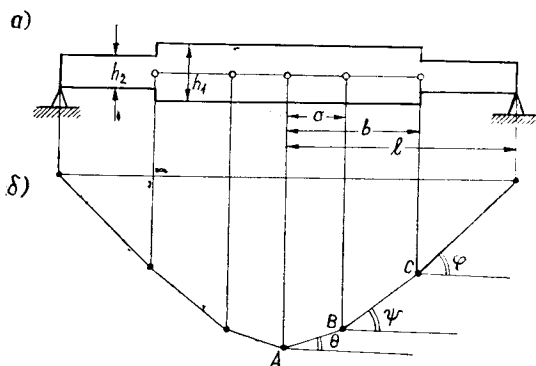
В данной статье предлагается методика, при которой принимаются в расчет только две модальные фазы (нагрузки и разгрузки), а переходной фазой между ними пренебрегается¹. Хотя

¹ Такой вариант решения был предложен Т. Вижбицким в 1975 г. в беседе с автором данной статьи.

такое решение приближенное (в момент времени снятия нагрузки скорости прогиба могут иметь разрыв), оно все-таки, как следует из данной статьи, ведет к оптимальным проектам, точность которых достаточна для практических целей.

§ 1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим свободно-опертую балку ступенчато постоянной высоты. Ширина балки B является постоянной, остальные размеры указаны на фиг. 1а. Материал балки считаем жестко-пластическим (без упрочнения), кружками на фиг. 1а указаны



Фиг. 1.

возможные положения пластических шарниров. При изгибе ось балки принимает форму, указанную на фиг. 1б. Из требования положительности энергии диссипации вытекает, что всегда $\psi \geq \chi \geq \theta \geq 0$. В дальнейшем рассмотрим лишь проекты, для которых $h_1 > h_2$.

Пусть балка нагружена равномерным и независящим от времени давлением p , которое в момент времени t_* снимается. Уравнения движения балки имеют вид:

$$\frac{dM}{dx} = -Q, \quad \frac{dQ}{dx} = p - \rho B h(x) \ddot{w}. \quad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность материала, w — прогиб, M — изгибающий момент, Q — перерезывающая сила.

Переходим к безразмерным величинам

$$\alpha = \frac{a}{l}, \quad \beta = \frac{b}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \gamma = \frac{h_1}{h_2}. \quad (1.2)$$

Скорость прогиба \dot{w} определяется формулой

$$\frac{\dot{w}}{l} = \begin{cases} (1 - \beta)\dot{\varphi} + (\beta - \alpha)\dot{\psi} + (\alpha - \xi)\dot{\theta} & \text{для } \xi \in [0, \alpha], \\ (1 - \beta)\dot{\varphi} + (\beta - \xi)\dot{\psi} & \text{для } \xi \in [\alpha, \beta], \\ (1 - \xi)\dot{\varphi} & \text{для } \xi \in [\beta, 1]. \end{cases} \quad (1.3)$$

Введем еще обозначения

$$\lambda = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}, \quad \mu = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}.$$

Величины λ и μ являются собственными значениями данной краевой задачи, в случае модальных решений они постоянны (разумеется, что для фаз нагрузки и инерциального движения они имеют разные значения).

Вычислим изгибающие моменты для сечений $\xi = 0$, $\xi = \alpha$ и $\xi = \beta$. Для этого интегрируем систему (1.1), выполняя граничные условия $Q(0) = M(1) = 0$ и условия непрерывности величин M и Q при $\xi = \alpha$ и $\xi = \beta$. Результаты этих вычислений могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} M(0) &= \frac{1}{6} \rho B l^3 h_2 (A_1 \ddot{\varphi} + B_1 \ddot{\psi} + C_1 \ddot{\theta}) + \frac{1}{2} \rho l^2, \\ M(\alpha) &= \frac{1}{6} \rho B l^3 h_2 (A_2 \ddot{\varphi} + B_2 \ddot{\psi} + C_2 \ddot{\theta}) + \frac{1}{2} \rho l^2 (1 - \alpha^2), \\ M(\beta) &= \frac{1}{6} \rho B l^3 h_2 (A_3 \ddot{\varphi} + B_3 \ddot{\psi} + C_3 \ddot{\theta}) + \frac{1}{2} \rho l^2 (1 - \beta^2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Символами A_i , B_i , C_i , где $i = 1, 2, 3$, обозначены следующие коэффициенты

$$\begin{aligned} A_1 &= -(1 - \beta) [2(1 - \beta)^2 + 3\gamma\beta(2 - \beta)], \\ B_1 &= \gamma [\alpha^2(3 - \alpha) - \beta^2(3 - \beta)], \\ C_1 &= -\gamma\alpha^2(3 - \alpha), \\ A_2 &= -(1 - \beta) \{2(1 - \beta)^2 + 3\gamma[\beta(2 - \beta) - \alpha^2]\}, \\ B_2 &= \gamma [\alpha^2(3 - \alpha) - \beta^2(3 - \beta) + 3\alpha^2(\beta - \alpha)], \\ C_2 &= -3\gamma\alpha^2(1 - \alpha), \\ A_3 &= -2(1 - \beta)^2(1 - \beta + 3\gamma\beta), \\ B_3 &= -3\gamma(1 - \beta)(\beta^2 - \alpha^2), \\ C_3 &= -3\gamma\alpha^2(1 - \beta). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Моменты, определяемые формулами (1.5), не могут превышать значения предельных моментов, т. е.

$$M(0) \leq \frac{1}{4} \sigma_s B h_1^2, \quad M(\alpha) \leq \frac{1}{4} \sigma_s B h_1^2, \quad M(\beta) \leq \frac{1}{4} \sigma_s B h_2^2. \quad (1.7)$$

Символом σ_s здесь обозначен предел текучести.

В дальнейшем будем считать объем балки V заданным:

$$V = 2B [bh_1 + (l - b)h_2] = \text{const}. \quad (1.8)$$

Учитывая, что $\gamma = h_1/h_2$, можем из уравнения (1.8) определить толщины h_1 и h_2 :

$$h_1 = \frac{V}{2Bl} \frac{\gamma}{1 - \beta + \beta\gamma}, \quad h_2 = \frac{V}{2Bl} \frac{1}{1 - \beta + \beta\gamma}. \quad (1.9)$$

Введем еще безразмерные величины

$$K = \frac{3\sigma_s V}{4QBl^4}, \quad P = \frac{6p}{KQV}, \quad \Delta = 1 - \beta + \beta\gamma,$$

$$q = \frac{\ddot{\varphi}}{K}, \quad r = \frac{\ddot{\psi}}{K}, \quad s = \frac{\ddot{\theta}}{K}.$$

Учитывая соотношения (1.5), (1.8)–(1.10), можем переписать неравенства (1.7) в виде

$$A_1 q + B_1 r + C_1 s \leq \frac{\gamma^2}{\Delta} - P\Delta, \quad (1.11)$$

$$A_2 q + B_2 r + C_2 s \leq \frac{1}{\Delta} - P\Delta(1 - \alpha^2), \quad (1.12)$$

$$A_3 q + B_3 r + C_3 s \leq \frac{\gamma^2}{\Delta} - P\Delta(1 - \beta^2). \quad (1.13)$$

§ 2. Определение форм модальных движений

В этом параграфе исследуем возможные формы движения и в каждом случае выведем формулы для определения величин q , r , s .

Так как в первой фазе движения действует нагрузка p , то движение является ускоренным и, следовательно, должно быть $q \geq 0$, $r \geq 0$, $s \geq 0$. Здесь возможны следующие формы движения:

I. Пластический шарнир возникает лишь в центре балки. Здесь $\alpha = 0$, $\varphi = \psi = \theta$, $q = r = s$. Условие (1.11) превращается в равенство, что дает

$$q = r = s = \frac{\gamma^2/\Delta - P\Delta}{A_1 + B_1}. \quad (2.1)$$

Кроме того, должно быть выполнено неравенство (1.13).

II. Возникает пластический шарнир при $\xi = \beta$. Теперь имеем $\alpha = 0$, $\theta = \psi = 0$, $r = s = 0$. Из условия (1.13) находим

$$q = \frac{1}{A_3} \left[\frac{1}{\Delta} - P\Delta(1 - \beta^2) \right]. \quad (2.2)$$

Эта форма движения реализуется при неравенстве (1.11).

III. Рассмотрим теперь случай, где шарниры возникают при $\xi = 0$ и $\xi = \beta$. Тогда в выражениях (1.11) и (1.13) придется взять знак равенства и для определения q и s получим систему

$$\begin{aligned} A_1 q + B_1 s &= \frac{\gamma^2}{\Delta} - P\Delta, \\ A_3 q + B_3 s &= \frac{1}{\Delta} - P\Delta(1 - \beta^2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Придется проверить выполнены ли условия $0 < s < q$.

Если изгибающий момент M приобретает в центре балки предельное значение $0,25\sigma_s h_1^2$, то вблизи этого сечения он не может возрастать: $dQ/d\xi \geq 0$ при $\xi = 0$. Это требование может быть написано в виде

$$P\Delta \geq 3\gamma[(1 - \beta)q + (\beta - \alpha)r + \alpha s]. \quad (2.4)$$

Это неравенство должно быть выполнено для случаев 1 и 3 (в случае 2, когда шарнира в центре не возникает, неравенство может быть нарушено).

Из решения, полученного для балки постоянного поперечного сечения, известно, что при сильных нагрузках средняя часть балки $0 \leq \xi < \alpha$ остается жесткой и изгибающий момент в этой зоне имеет постоянное значение (см., например, [2]). Учитывая это, целесообразно искать аналогичные решения и для ступенчато-постоянной балки. Для этих решений имеем $\theta = s = 0$ и неравенство (2.4) становится равенством для $\xi \in [0, \alpha]$.

IV. Допустим в начале, что шарнир появляется лишь в сечении $\xi = \alpha$. В таком случае $\varphi' = \psi'$ и $q = r$. Вместо неравенств (1.11) — (1.12) получим теперь равенства

$$\begin{aligned} A_1 q + B_1 s &= \frac{\gamma^2}{\Delta} - P\Delta, \\ (A_2 + B_2)q &= \frac{\gamma^2}{\Delta} - P\Delta(1 - \alpha^2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Элиминируя из этих уравнений величину q , получим для α кубическое уравнение

$$\begin{aligned} \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\left(1 - \frac{\gamma^2}{P\Delta^2}\right)\alpha + \\ + \frac{3\gamma^2}{P\Delta^2} + \frac{2}{\gamma}(1 - \beta)^3 - 3 + 6\beta - 6\beta^2 + 2\beta^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если α определена, можем вычислить q из уравнений (2.5). Данный случай реализуется, если $0 < \alpha \leq \beta$ и выполняется неравенство (1.13).

V. Возможно и решение, где шарниры возникают при $\xi = \alpha$ и $\xi = \beta$. Здесь имеем систему

$$\begin{aligned} A_1 q + B_1 r &= \frac{\gamma^2}{\Delta} - P\Delta, \\ A_2 q + B_2 r &= \frac{\gamma^2}{\Delta} - P\Delta(1 - \alpha^2), \\ A_3 q + B_3 r &= \frac{1}{\Delta} - P\Delta(1 - \beta^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Эта система разрешима лишь тогда, когда детерминант расширенной системы равняется нулю. Это требование дает для α квадратное уравнение

$$E_2\alpha^2 + E_1\alpha + E_0 = 0, \quad (2.8)$$

где

$$E_2 = 3\gamma - P\Delta^2(3\gamma - 2)(1 - \beta)^2,$$

$$E_1 = 2P\Delta^2(3\gamma - 2)\beta(1 - \beta)^2 + 9\gamma(\gamma^2 - 1)(1 - \beta) - 6\gamma\beta,$$

$$E_0 = [3(\gamma^2 - 1) - P\Delta^2\beta^2](3\gamma - 2)(1 - \beta)^2 + 3\gamma\beta^2 - 9\gamma(\gamma^2 - 1)(1 - \beta).$$

Величины q и r определим из системы (2.7). Здесь должны быть выполнены условия $0 < \alpha < \beta$, $0 < r < q$.

VI. До сих пор мы предполагали, что $\alpha < \beta$. Но существует и вариант решения, для которого пластический шарнир возникает при $\xi = \alpha > \beta$. Теперь часть балки $0 < \xi < \alpha$ остается жесткой и скорость прогиба равняется

$$\frac{\dot{w}}{l} = \begin{cases} (1 - \alpha)\dot{\psi} & \text{для } \xi \in [0, \alpha] \\ (1 - \xi)\dot{\psi} & \text{для } \xi \in [\alpha, 1]. \end{cases} \quad (2.9)$$

Анализ этого случая показывает, что изгибающий момент возрастает монотонно в промежутке $(0, \alpha)$ и приобретает максимум при $\xi = \alpha$. Следовательно, должно быть

$$M(\alpha) = \frac{B}{4} \sigma_s h_2^2, \quad Q(\alpha) = 0. \quad (2.10)$$

Выполняя эти требования, приходим после несложных вычислений к уравнениям

$$r = \frac{P\Delta\alpha}{3(1 - \alpha)(\alpha - \beta + \gamma\beta)}, \quad (2.11)$$

$$\alpha^3 + [3\beta(\gamma - 1) - 2]\alpha^2 + \left[1 - 6\beta(\gamma - 1) - \frac{3}{P\Delta^2}\right]\alpha + 3\beta(\gamma - 1)\left(1 - \frac{1}{P\Delta^2}\right) = 0. \quad (2.12)$$

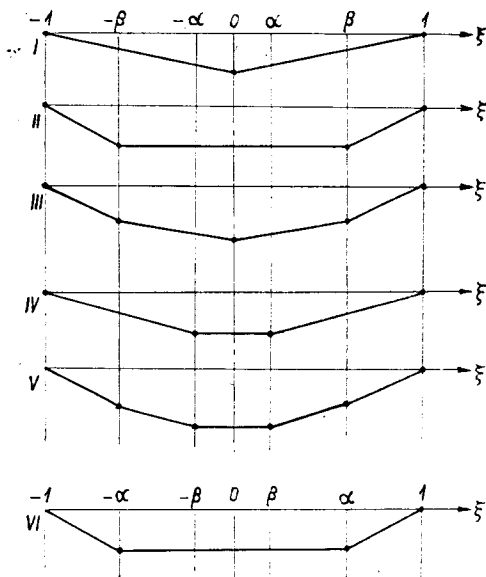
Из уравнения (2.12) вычислим α . Это уравнение имеет в промежутке $(\beta, 1)$ решение, если выполнено неравенство

$$(3\gamma - 2)(1 - \beta)^2 > \frac{3\gamma}{P\Delta^2}. \quad (2.13)$$

Величину r определим по формуле (2.11).

Все шесть случаев изображены схематически на фиг. 2.

Рассмотрим теперь вторую фазу движения, где $P = 0$. Так как здесь движение является замедленным, что должно быть $0 \geq s \geq r \geq q$. Если взять $P = \alpha = 0$, то неравенство (2.4) выполняется. Следовательно, при разгрузке момент M всегда имеет максимум в центре балки, и возможны лишь случаи I—III. Величины q , r , s можем определить по формулам (2.1), (2.2) и (2.3), принимая $P = 0$.



Фиг. 2.

Таким образом, видим, что в первой фазе имеется 6 возможных форм движения, а во второй — три. Комбинируя все эти формы между собой, получим 18 вариантов модальных движений. Эти варианты обозначим в дальнейшем символически через ij , где первый индекс $i = 1, 2, \dots, 6$ указывает форму движения в первой фазе, а второй индекс $j = 1, 2, 3$ — во второй фазе.

§ 3. Определение остаточного прогиба

Обозначим в дальнейшем все величины, относящиеся к первой фазе, где $0 \leq t < t_*$, одной звездочкой, а величины для второй фазы $t > t_*$ — двумя звездочками. Так как $\varphi^{*''}$, $\varphi^{**''}$ постоянные величины, то имеем

$$\begin{aligned} \varphi^*(t) &= \varphi^{*''} t, & \varphi^{**} &= \varphi^{**'}(t_*) + \varphi^{**''}(t - t_*), & \varphi^*(t) &= \frac{1}{2} \varphi^{*''} t^2, \\ \varphi^{**}(t) &= \varphi^{**'}(t_*) + \varphi^{**''}(t_*) (t - t_*) + \frac{1}{2} \varphi^{**''} (t - t_*)^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Пусть движение останавливается в момент времени $t = t_f$, тогда $\varphi^{**'}(t_f) = 0$ и из (3.1) находим

$$\varphi^{**}(t_f) = \varphi^{**'}(t_*) - \frac{1}{2} \frac{\varphi^{**''2}(t_*)}{\varphi^{**''}}. \quad (3.2)$$

Если требовать непрерывности прогибов, то $\varphi_*(t_*) = \varphi_{**}(t_*)$. В силу (1.4) аналогичные выражения имеют место и для углов ψ и θ . Вычислим теперь величину остаточного прогиба в центре $\xi = 0$. В начале рассмотрим случай, когда в стадии нагрузки $\alpha < \beta$. Учтывая, что в стадии разгрузки $\alpha = 0$, на основании формул (1.3)–(1.4) и (3.2) находим

$$\begin{aligned} \omega_{**}(0, t_j) = & \frac{l}{2} \varphi_{**} t_*^2 [1 - \beta + (\beta - \alpha) \lambda_* + \alpha \mu_*] - \\ & - \frac{l}{2} \frac{\varphi_{**}^2(t_*)}{\varphi_{**}} (1 - \beta + \beta \lambda_{**}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Дальше вычислим кинетическую энергию согласно формуле

$$T = \rho B \int_0^l h(x) \dot{w}^2 dx. \quad (3.4)$$

Учитывая соотношения (1.3), после несложных преобразований находим, что кинетическая энергия в конце первой фазы равняется

$$T_* = \frac{1}{6\Delta} \rho l^2 V K^2 t_*^2 L_*, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} L_* = & \gamma [3\beta(1 - \beta)^2 q_*^2 + (2\alpha + \beta)(\beta - \alpha)^2 r_*^2 + \\ & + \alpha^3 s_*^2 + 3(1 - \beta)(\beta^2 - \alpha^2) q_* r_* + 3\alpha^2(1 - \beta) q_* s_* + \\ & + 3\alpha^2(\beta - \alpha) r_* s_*] + (1 - \beta)^3 q_*^2. \end{aligned}$$

Таким же образом находим начальную кинетическую энергию второй фазы

$$T_{**} = \frac{1}{6\Delta q_{**}^2} \rho l^2 V \varphi_{**}^2(t_*) L_{**}, \quad (3.7)$$

где

$$L_{**} = \gamma [3\beta(1 - \beta)^2 q_{**}^2 + 3(1 - \beta)\beta^2 q_{**} r_{**} + \beta^3 r_{**}^2] + (1 - \beta)^3 q_{**}^2. \quad (3.8)$$

Вполне естественно требовать, что при переходе из первой фазы во вторую кинетическая энергия не изменяется, тогда $T_* = T_{**}$ и находим из (3.5), (3.7), что

$$\varphi_{**}(t_*) = K t_* |q_{**}| \sqrt{\frac{L_*}{L_{**}}}. \quad (3.9)$$

Подставляя этот результат в формулу (3.3) и учитывая, что $\varphi_{**} = K q_{**}$, находим

$$\omega_{**}(0, t_j) = \frac{1}{2} K l t_*^2 W(\beta, \gamma),$$

причем

$$\begin{aligned} W(\beta, \gamma) = & (1 - \beta) q_* + (\beta - \alpha) r_* + \alpha s_* - \\ & - \frac{L_*}{L_{**}} [(1 - \beta) q_{**} + \beta r_{**}]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Случай VI, где $\alpha > \beta$, требует специального рассмотрения. При вычислении интеграла (3.4) исходим теперь из формул (2.9). Формула (3.6) изменится и приобретет в этом случае вид

$$L_* = (1 - \alpha)^2 [1 + 2\alpha + 3(\gamma - 1)\beta] r_*^2. \quad (3.11)$$

Вместо (3.10) получим

$$W(\beta, \gamma) = (1 - \alpha) r_* - \frac{L_*}{L_{**}} [(1 - \beta) q_{**} + \beta r_{**}]. \quad (3.12)$$

Остальные формулы остаются в силе.

Для оптимального проекта должно быть $W(\beta, \gamma) = \min$.

В случае предлагаемого решения вообще говоря скорости прогиба терпят разрывы при $t = t_*$. Находим разрывы скоростей в момент $t = t_*$. В силу формул (3.1) и (3.9) имеем

$$[\dot{\varphi}] = \varphi_{**}(t_*) - \varphi_*(t_*) = K t_* \left(q_{**} \sqrt{\frac{L_*}{L_{**}}} - q_* \right). \quad (3.13)$$

Подобные формулы действительны и для разрывов $[\dot{\psi}]$ и $[\dot{\theta}]$.

Для сравнения рассмотрим еще балку постоянного поперечного сечения. Если давление достаточно мало, то реализуется случай II. Принимая $\beta = \gamma = 1$, из формулы (2.1) находим

$$q_* = r_* = s_* = \frac{1}{2}(P - 1).$$

На основании формулы (2.4) этот случай возможен при $P \leq 3$. Если $P > 3$, имеем случай 4I, где $\beta = 1$. Уравнение (2.6) дает

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{3}{P}}.$$

Из системы (2.5) находим, что

$$q_* = r_* = \left(\frac{P}{3}\right)^{3/2}, \quad s_* = 0.$$

В обоих случаях имеем

$$q_{**} = r_* = s_{**} = -0,5.$$

Подставляя эти данные в формулы (3.6), (3.8), (3.10), (3.11) и (3.12), находим, что

$$W_+ = \begin{cases} 0,5P(P - 1) & \text{при } P \leq 3 \\ \frac{1}{3}P \left(1 + 2P - 4 \sqrt{\frac{P}{3}} \right) & \text{при } P > 3. \end{cases} \quad (3.14)$$

Точное решение задачи (см. [2] стр. 392) имеет вид

$$W_+^* = \begin{cases} 0,5P(P - 1) & \text{при } P \leq 3 \\ \frac{1}{9}P(4P - 3) & \text{при } P > 3. \end{cases} \quad (3.15)$$

Если принимать $P = 6$, то имеем $W_+ = 14,7$; $W_+^* = 14$; при $P = 12$ имеем соответственно $W_+ = 68$; $W_+^* = 60$. Итак, погрешность для определения остаточных прогибов в случае модального решения составляет 5% при $P = 6$ и 13% при $P = 12$. Эти цифры говорят в пользу метода, предлагаемого в данной статье.

§ 4. Обсуждение полученных результатов

На основании вычислений, проведенных на ЭВМ для разных комбинаций параметров P , β , γ , обнаружилось следующие закономерности:

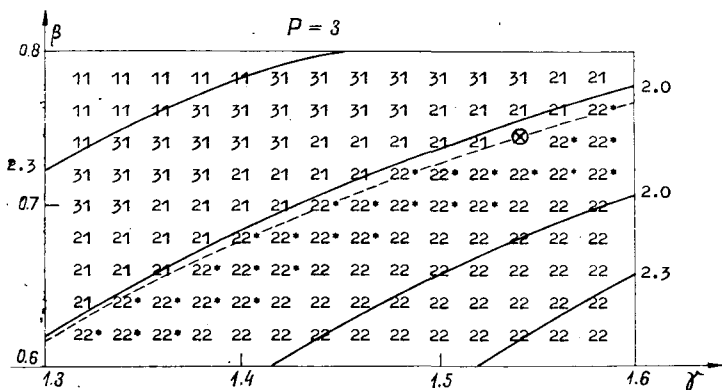
1) Из 18 возможных форм движения, которые были указаны в § 2, реализовались при рассмотренных значениях параметров лишь 10, а именно 11, 21, 22, 23, 31, 41, 51, 61, 62, 63.

2) Решение является неединственным. При некоторых значениях P , β , γ встречаются одновременно формы 21, 22, 23 или 22, 62. Если взять, например, $P = 12$, $\beta = 0,7$, $\gamma = 1,5$, то возможны даже шесть форм движения: 21, 22, 23, 61, 62, 63.

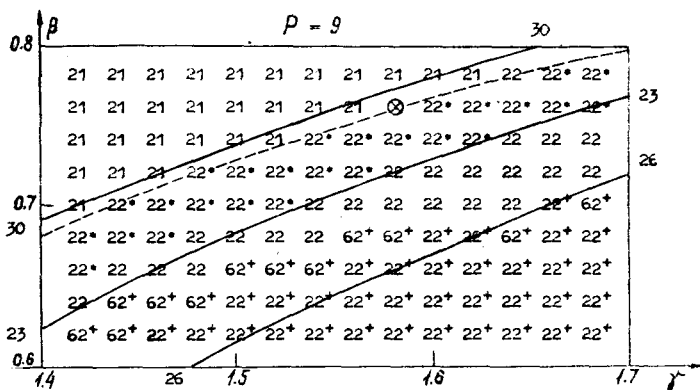
3) Минимальное значение остаточного прогиба достигается в случае формы 22.

Эти выводы вытекают и из фиг. 3—4, где числа на плоскости (γ, β) указывают формы движения. Символ 22* обозначает, что в данной точке возможны формы 21, 22, 23; в случаях 22+ или 62+ одновременно встречаются формы 22 и 62, причем на фиг. 4 нанесена цифра той формы, которая дает меньший остаточный прогиб. Сплошные линии соответствуют линиям уровня $W = \text{const}$, точка, отвечающая оптимальному решению отмечена знаком \oplus .

Обстоятельство, что минимум остаточного прогиба имеет место для формы движения 22 позволяет упростить задачу определения оптимальных значений параметров. Так как в случае



Фиг. 3.



Фиг. 4.

формы движения 22 имеем $r_* = s_* = r_{**} = s_{**} = 0$, то формула (3.10) приобретает вид:

$$W(\beta, \gamma) = (1 - \beta) q^* \left(1 - \frac{q^*}{q_{**}} \right).$$

Определяя величины q_* , q_{**} по формуле (2.2), находим

$$W(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} P(1 + \beta) \Delta \frac{P(1 - \beta^2) \Delta^2 - 1}{1 - \beta + 3\gamma\beta}. \quad (4.1)$$

Вычислим производную от W по γ ; в результате получим

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = \frac{P\beta(1 - \beta^2)}{(1 - \beta + 3\gamma\beta)^2} [3\gamma\beta P(1 + \beta) \Delta^2 + 1]. \quad (4.2)$$

Так как всегда $\partial W / \partial \gamma < 0$, то минимум величины W по γ достигается при $\gamma = \min$. Это значит, что нужно уменьшить γ , пока не возникнет шарнир в центре и форма движения 22 перейдет в 23. Следовательно, должны выполняться уравнения (2.3) при $P = s = 0$. Элиминируя из этой системы величину q , приходим к уравнению

$$(6\gamma^3 - 2\gamma^2 - 3\gamma + 2)\beta^2 - 2(3\gamma - 2)(\gamma^2 - 1)\beta - 2(\gamma^2 - 1) = 0. \quad (4.3)$$

Из этого квадратного уравнения можем определить функцию $\beta = \beta(\gamma)$; вдоль этой кривой и должен находиться минимум величины W . Кривая $\beta = \beta(\gamma)$ отмечена на фиг. 3—4 пунктиром. Интересно отметить, что величина W изменится вдоль этой кривой мало. Так, например, в случае $P = 3$ имеем $W = 1,62$ при $\gamma = 1,4$ и $W = 1,63$ при $\gamma = 1,8$, причем минимум $W = 1,60$ достигается при $\gamma = 1,54$. В случае $P = 9$ имеем соответственно $W = 20,6$ при $\gamma = 1,4$ и $W = 20,8$ при $\gamma = 2,0$, а $W_{\min} = 20,4$ при $\gamma = 1,58$. Это обстоятельство несколько расширяет возможности конструктора: для оптимального проекта не

надо обязательно выбирать определенную точку на плоскости (γ, β) , но исходя из конструктивных соображений можно выбрать в окрестности некоторую другую точку, лежащую на кривой $\beta = \beta(\gamma)$.

Оптимальные параметры для некоторых значений давления P указаны в таблице 1. Величины q_* , q_{**} вычислены по формуле (2.2). Символы W_1 и W_2 обозначают прогибы в первой и второй фазах движения, $W = W_1 + W_2$ — суммарный прогиб. В последней строке таблицы указано отношение величины W к прогибу балки постоянного сечения W_+ , вычисляемого по формуле (3.14). Как видно из цифр этой строки, применение балок ступенчато постоянной толщины позволяет уменьшить остаточные прогибы в 2 раза.

Отметим еще, что в случае формы движения 22 в момент снятия нагрузки условия непрерывности выполняются также для скоростей прогиба, и, следовательно, эти решения являются математически точными, поэтому можно надеяться, что рекомендованный метод решения задач оптимизации дает вполне достоверные результаты.

Таблица 1

P	β	γ	q_*	q_{**}	W_1	W_2	W	W/W_+
2	0,74	1,51	1,07	-1,44	0,28	0,21	0,49	0,49
3	0,75	1,54	2,43	-1,51	0,61	0,99	1,60	0,53
6	0,76	1,57	6,65	-1,56	1,60	6,80	8,40	0,57
9	0,76	1,58	10,85	-1,58	2,59	17,79	20,38	0,56
12	0,76	1,58	15,05	-1,59	3,58	33,97	37,55	0,55
15	0,76	1,59	19,54	-1,60	4,57	55,37	59,94	0,54
18	0,76	1,59	23,65	-1,60	5,56	81,95	87,51	0,54
21	0,77	1,59	27,86	-1,60	6,55	113,71	120,26	0,53

Литература

1. Дикович И. Л., Динамика упруго-пластических балок. Москва, 1962.
2. Качанов Л. М., Основы теории пластичности, Москва, 1969.
3. Lepik, O., Mróz, Z., Optimal design of plastic structures under impulsive and dynamic pressure loading. Int. J. Solids and Struct. 1977, 13, № 7, 657—674.
4. Martin, J. B., Symonds, P. S., Mode approximation for impulsively loaded rigid-plastic structures. J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, 1966, 92, 43—66.

Поступило
18 I 1977

JÄIK-PLASTSETE TALADE OPTIMAALNE PROJEKTEERIMINE DÜNAAMILISE KOORMAMISE KORRAL

Ü. Lepik

Resümee

Vaadeldakse jäik-plastsete astmeliselt muutuva paksusega talade optimaalset projekteerimist. Tala on vabalt toetatud ja asub ühtlase rõhu all, mis on ajavahemikus $0 \leq t < t_*$ konstantne. Hetkel $t = t_*$ koormus võetakse maha ja tala liigub inertsiaalselt kuni paigalseisuni. Tuleb koostada optimaalne projekt, mille puhul antud ruumalaga tala jääkläbipainded on võimalikult väikesed.

Püstitatud probleem lahendatakse modaalse lahendite meetodil. Modaalsete liikumiskujud on erinevad koormamis ja koormuse languse faasides. On analüüsitud kaheksateist liikumiskuju. Elektronarvutil saadud tulemused võimaldavad teha mitmeid järeldusi optimaalsete lahendite iseloomu kohta. On antud lihtsustatud variant tala optimaalsete parameetrite määramiseks.

OPTIMAL DESIGN OF RIGID-PLASTIC BEAMS UNDER DYNAMIC LOADING

Ü. Lepik

Summary

Optimal design of rigid-plastic stepped beams is considered. The beam is simply supported and loaded by a uniform pressure, which is constant during the time interval $0 \leq t < t_*$. At the instant $t = t_*$ the load is taken away and the beam moves inertially until final rest. An optimal design for which a beam of constant volume attains a minimum of residual deflections is sought.

The problem put up is solved with the aid of mode solutions. It is assumed that the mode forms of motion are different for the loading and unloading phases. Eighteen forms of motion are discussed. The calculations, which are carried out on an electronic computer, enable us to draw some conclusions about the character of the optimal solutions. A simplified variant for finding the optimal values of the beam parameters is given.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛКИ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

И. Вайникко и К. Соонетс

Тартуский государственный университет

В статье [3] Мруза и Лепика был предложен метод модальных решений для оптимального проектирования конструкций при динамическом нагружении. В настоящей статье этот метод применяется для проектирования жестко-пластической балки ступенчато-переменной толщины под действием сосредоточенной нагрузки в виде прямоугольного импульса. Минимизируется остаточный прогиб в середине балки при заданном объеме балки. Все рассуждения опираются на элементарную жестко-пластическую теорию. Такая же методика использована авторами настоящей статьи при исследовании ступенчато-переменной круглой пластинки под действием распределенной динамической нагрузки прямоугольного типа в статье [2].

По методу модальных решений ищется решение в форме:

$$u_i(x, t) := \omega_i(x) \Phi(t),$$

где u_i — прогибы, ω_i — пространственные моды, Φ — функция, зависящая только от времени. В работе [1] рассматривается свободно-опертая балка, средняя часть которой $0 \leq x < b$ имеет толщину $h_1 = \text{const}$, а остальная часть $b < x \leq l$ — толщину $h_2 = \text{const}$ (балка ступенчато-переменной толщины). В начальный момент балке сообщается или кинетическая энергия или прилагается равномерное давление в виде прямоугольного импульса, вследствие чего начинается движение балки. Объем конструкции считается заданным. Минимизируется величина остаточного прогиба в центре балки.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим свободно опертую балку длиной $2l$, прямоугольным сечением шириной $b = 1$ и ступенчато-переменной толщиной h под действием внезапно приложенной в центре балки сосредоточенной нагрузки $2P$, которая снимается в момент времени τ_1 (рис. 1).

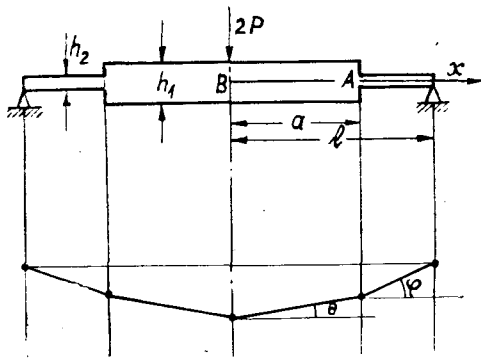


Рис. 1.

Задача состоит в определении таких параметров a/l и h_1/h_2 , чтобы при заданном объеме V остаточный прогиб в центре в момент прекращения движения балки τ_f был бы минимальным.

Предполагая, что материал является жестко-пластическим, движение начинается тогда, когда в некотором сечении достигается предельный момент $M_0 = \sigma_s h^2/4$, где σ_s — предел текучести. Уравнения движения балки имеют вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\rho h(x) W'', \quad \frac{\partial M}{\partial x} = -Q, \quad (1)$$

где Q — перерезывающая сила, M — изгибающий момент, ρ — плотность материала, W — прогиб балки; точка обозначает дифференцирование по времени τ .

§ 2. Основные соотношения

Предполагаем, что пластические шарниры могут появляться в точках A и B (рис. 1) и тогда скорость прогиба является линейной функцией координаты x :

$$w' = \begin{cases} (l-a)\varphi' + (a-x)\Theta' & \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ (l-x)\varphi', & \text{при } a \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi(\tau)$ и $\theta(\tau)$ — углы поворота. На основании метода модальных решений угловые ускорения φ'' и θ'' постоянны. Интегрируя первое из уравнений движения (1) и, учитывая, что на балку в центре приложена сосредоточенная нагрузка $2P$, найдем перерезывающую силу

$$Q = \begin{cases} -\rho h_1 \left[(l-a)\varphi''x + \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) \Theta'' \right] + P & \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ -\rho h_1 \left[(l-a)\varphi''a + \frac{1}{2} a^2 \Theta'' \right] + P - \\ -\rho h_2 \varphi'' \left[l(x-a) - \frac{1}{2} (x^2 - a^2) \right] & \text{при } a \leq x \leq l. \end{cases} \quad (3)$$

Интегрирование второго уравнения из системы (1) с учетом (3) дает изгибающий момент M , равный

$$\begin{aligned} & \rho h_1 \left[(l-a) \varphi'' \frac{x^2}{2} + \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Theta'' \right] - Px + M_B \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ & \rho h_1 \left[(l-a) \varphi'' a + \frac{a^2}{2} \Theta'' \right] (x-a) + \\ & + \rho h_2 \varphi'' \left[\frac{l}{2} (x-a)^2 - \frac{1}{6} (x^3 - a^3) + \frac{1}{2} a^2 (x-a) \right] - \\ & - P(x-a) + M_A \quad \text{при } a \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (4)$$

На концах балки изгибающий момент $M = 0$. Из непрерывности момента в точке A ($x = 0$) и из условия $M(l) = 0$ получим:

$$\begin{aligned} M_A = P(l-a) - \rho h_1 \left[(l-a) \varphi'' a + \frac{1}{2} a^2 \Theta'' \right] (l-a) - \\ - \frac{1}{3} \rho h_2 \varphi'' (l-a)^3, \end{aligned} \quad (5)$$

$$M_A - M_B = \rho h_1 \left[\frac{a^2}{2} (l-a) \varphi'' + \frac{a^2}{3} \Theta'' \right] - Pa.$$

Связь между толщинами и заданным объемом получим в виде

$$\frac{V}{2} = ah_1 + (l-a)h_2. \quad (6)$$

В дальнейшем используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{a}{l}, \quad \gamma = \frac{h_1}{h_2}, \quad \Delta = 1 - \alpha + \alpha\gamma, \quad K = \frac{3\sigma_s V}{4\rho l^4}, \\ T = \frac{\varphi''}{K}, \quad S = \frac{\Theta''}{K}, \quad p = \frac{12P}{KV_Q l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \omega = \frac{W}{Kl\tau_1^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как пластические шарниры могут появляться в сечениях A и B , то должны быть

$$M_A \leq \frac{\sigma_s h_2^2}{4}, \quad M_B \leq \frac{\sigma_s h_1^2}{4} \quad (8)$$

которые с учетом формул (5)–(7) можно представить в виде:

$$p\Delta - \frac{1}{(1-\alpha)\Delta} [6\alpha\gamma(1-\alpha) + 2(1-\alpha)^2] T - 3\gamma\alpha^2 S \leq 0, \quad (9)$$

$$p\Delta - \frac{\gamma^2}{\Delta} [3\alpha\gamma(1-\alpha)(2-\alpha) + 2(1-\alpha)^3] T - \gamma\alpha^2(3-\alpha) S \leq 0. \quad (10)$$

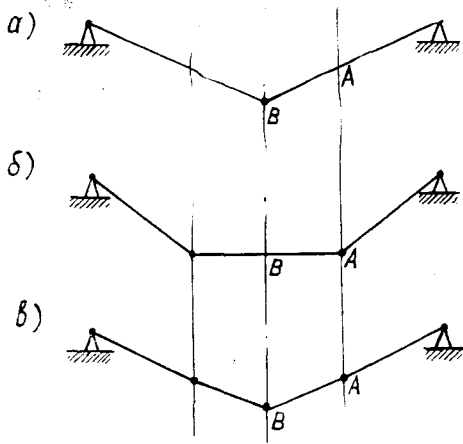


Рис. 2.

В зависимости от нагрузки и параметров балки возможны три варианта пластических механизмов.

1) Пластический шарнир возникает только в центре балки (рис. 2а). Тогда в формуле (10) следует принимать знак равенства, а в (9) — знак $<$. В таком случае угловые ускорения $S = T$ и из равенства (10) получим

$$S = T = \frac{\gamma^2 - p\Delta^2}{2\Delta[\alpha\gamma(3 - 3\alpha + \alpha^2) + (1 - \alpha)^3]}. \quad (11)$$

2) Пластический шарнир возникает только в сечении А. Тогда в формуле (9) примем знак равенства. Ускорение $S = 0$ и из равенства (9) получим

$$T = \frac{p\Delta^2(1 - \alpha) - 1}{2\Delta(1 - \alpha)^2(3\alpha\gamma + 1 - \alpha)}. \quad (12)$$

3) Работают шарниры А и В. Тогда (9) и (10) являются равенствами, из которых можно найти ускорения S и T:

$$D \cdot S = \frac{1}{\Delta} [-2\gamma^2(1 - \alpha)(3\alpha\gamma + 1 - \alpha) + 3\alpha\gamma(2 - \alpha) + 2(1 - \alpha)^2] + \Delta\alpha p(1 - \alpha)(2 - 2\alpha + 3\alpha\gamma), \quad (13)$$

$$D \cdot T = \frac{\gamma\alpha^2}{(1 - \alpha)\Delta} [3\gamma^2(1 - \alpha) + 3 - \alpha] + \Delta\gamma\alpha^3 p(\alpha - 4),$$

где

$$D = \alpha^3\gamma(1 - \alpha)[3\alpha\gamma + 4(1 - \alpha)].$$

§ 3. Определение пластических режимов и нахождение остаточного прогиба

При движении балки следует различать две фазы движения: движение под нагрузкой ($p \neq 0$) в интервале времени $0 \leq t \leq 1$ и без нагрузки ($p = 0$) при $1 \leq t \leq t_f$ до полной остановки балки. В первой фазе ускорения должны быть неотрицательными и балка должна иметь выпуклую форму, т. е. $T \geq S$. Найдем углы θ и φ и прогиб ω в центре балки, считая угловые ускорения постоянными. Тогда при $t = \tau/\tau_1$ имеем

$$\begin{aligned}\Theta'(1) &= KS, & \varphi'(1) &= KT, \\ \Theta(1) &= \frac{1}{2}KS, & \varphi(1) &= \frac{1}{2}KT, \\ \omega(1) &= \alpha S + (1 - \alpha)T.\end{aligned}\quad (14)$$

Во второй фазе происходит движение при $p = 0$. Момент остановки t_f определяется из условия, что угловые скорости равняются нулю:

$$\Theta'(t_f) = \varphi'(t_f) = 0. \quad (15)$$

Во второй фазе движения скорости выражаются формулами:

$$\begin{aligned}\Theta &= \Theta(1) + KS(t - 1), \\ \varphi &= \varphi(1) + KT(t - 1),\end{aligned}\quad (16)$$

где ускорения S и T найдены из формул (11), (12) или (13) при $p = 0$. Интегрируя уравнения (16) с учетом (14), получим остаточный прогиб в центре балки

$$\omega_f = [\alpha\Theta(t_f) + (1 - \alpha)\varphi(t_f)]Kl.$$

Вычисления показывают, что из возможных комбинаций пластических механизмов реализуются три следующих.

Комбинация 1 + 1. В первой фазе обозначим ускорения через S_1 и T_1 и найдем их из формулы (11), проверяя неравенство (9). Во второй фазе ускорения S_4 и T_4 найдем из формулы (11) при $p = 0$. Время движения найдено из условия (15)

$$t_f = \left(1 - \frac{S_1}{S_4}\right).$$

Остаточный прогиб по формуле (17) таков:

$$\omega(t_f) = \frac{1}{2}KlS_1 \left(1 - \frac{S_1}{S_4}\right).$$

Комбинация 2 + 2. В первой фазе ускорение $S_2 = 0$ и T_2 найдем по формуле (12). Во второй фазе $S_5 = 0$ и T_5 найдем по формуле (12) при $p = 0$. Время движения балки t_f и остаточный прогиб ω_f таковы:

$$t_f = \left(1 - \frac{T_2}{T_5}\right), \quad \omega_f = \frac{1}{2}Kl(1 - \alpha)T_2 \left(1 - \frac{T_2}{T_5}\right).$$

Комбинация 1 + 3 + 2. В этом случае следует во второй фазе движения различать два этапа. В первой фазе работает шарнир B . Ускорения равны $S_1 = T_1$ и вычисляются по формуле (11), во второй фазе в интервале времени $1 \leq t \leq t_B$ (первый этап) работают оба шарнира A и B , ускорения S_6, T_6 определяются из системы (13). На втором этапе работает только шарнир A , ускорение $T_5 < 0$ и вычисляются по формуле (12). В конце первого этапа второй фазы $t = t_B$ имеем

$$\Theta(t_B) = \frac{1}{2}KS_1\left(1 - \frac{S_1}{S_6}\right), \quad \varphi(t_B) = \frac{1}{2}KS_1\left(1 - 2\frac{S_1}{S_6} + \frac{T_6S_1}{S_6^2}\right).$$

Конец второго этапа совпадает с моментом времени остановки балки

$$t_f = t_B - \frac{S_1}{T_5}\left(1 - \frac{T_6}{S_6}\right).$$

Угол поворота в момент прекращения движения имеет вид:

$$\varphi(t_f) = \frac{1}{2}KS_1\left[1 - 2\frac{S_1}{S_6} + \frac{T_6S_1}{S_6^2} - \frac{S_1}{T_5}\left(1 - \frac{T_6}{S_6}\right)^2\right]$$

и прогиб

$$\omega(t_f) = \frac{1}{2}Kl[(1 - \alpha)\varphi(t_f) + \alpha\Theta(t_B)].$$

§ 4. Примеры

Для нахождения оптимального решения были проведены вычисления с разными значениями параметров $\alpha \in [0, 2; 0, 9]$ и $\gamma \in [1, 1; 2, 1]$ при нагрузках $p = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0$. В зависимости от параметров реализовались разные вышеописанные комбинации пластических механизмов. На рис. 3 можно проследить за реализацией комбинаций в зависимости от α и γ для разных нагрузок. Номер 1 означает комбинацию 1 + 1, 2 → (2 + 2), 3 → (1 + 3 + 2).

Надо отметить, что при нагрузке $p = 1$, единственная комбинация, дающая возможные движения, была (2 + 2). При этом, например, $\omega_f = 0,03$ при $\alpha = 0,2$ и $\gamma = 1,2$, время движения $t_f = 1,08$, а $\omega_f = 0,44$ и $t_f = 1,8$ и $\gamma = 1,6$. Найдены оптимальные проекты, т. е. проекты, при которых остаточный прогиб в момент прекращения движения минимален. При нагрузке $p = 1,5$ имеем $\omega_{f\min} = 0,08$ при $\alpha = 0,6$ и $\gamma = 1,6$ в случае комбинации (1 + 3 + 2). За время движения $t_f = 1,33$ два шарнира работали одновременно довольно короткое время $t = 0,02$. При нагрузках $p = 2,0; 2,5; 3,0$ является оптимальным проект с параметрами $\alpha = 0,70$ и $\gamma = 1,52$ при комбинации (1 + 1).

Были найдены и остаточные прогибы и время движения (см. таблицу ниже).

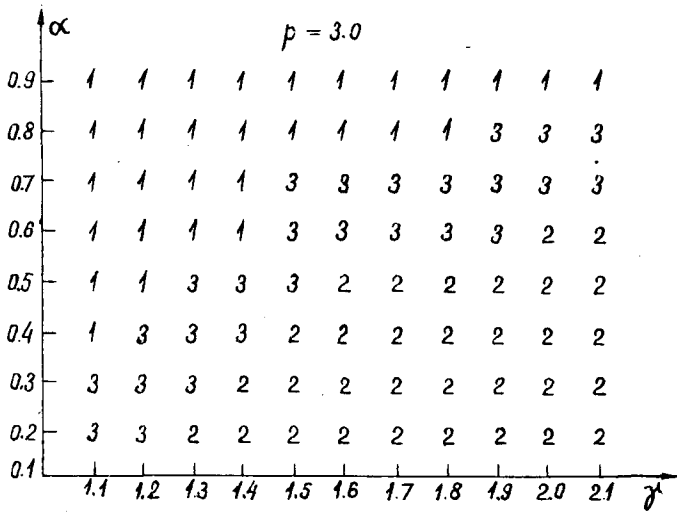
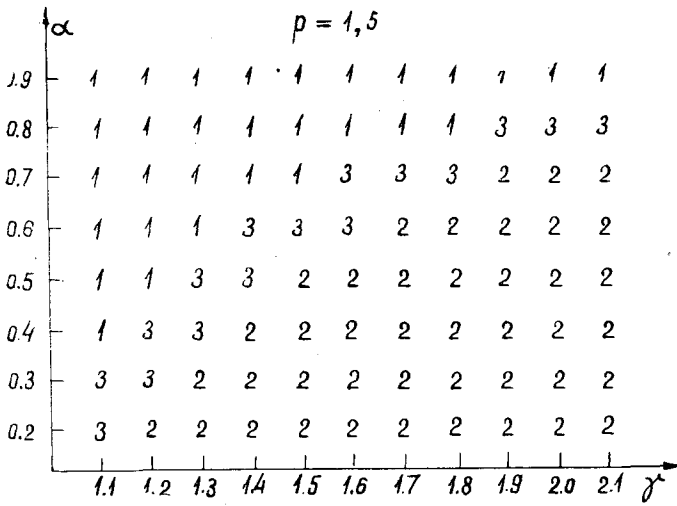


Рис. 3.

p	$h \neq \text{const}$		$h = \text{const}$	
	ω_f	t_f	ω_f	t_f
2,0	0,55	1,61	1,00	2,00
2,5	1,15	2,01	1,88	2,50
3,0	1,92	2,42	3,00	3,00

Интересно сравнить результаты для балок равного объема ступенчато-переменной и постоянной толщины. Для балки постоянной толщины h под действием сосредоточенной силы $2p$ пластический шарнир появляется в центре балки и прогиб имеет вид

$$\omega = (l - x)\theta.$$

Интегрирование уравнений движения (1) с учетом условия $M(0) = \sigma_s h^2/4$, где $h = V/2l$, дает в обозначениях (7), что

$$\rho = (1 + 2T).$$

Сравнение найденных остаточных прогибов и продолжительности движения показывает, что оптимальный проект ступенчато-переменной балки предпочтительнее.

Литература

1. Саймондс П. С., Большие пластические деформации стержней под действием нагрузки взрывного типа. Механика, 1956, № 4, 90—108.
2. Соонетс К., Вайникко И. О динамическом изгибе жестко-пластических круглых пластинок. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 123—131.
3. Lepik, U., Mroz, Z., Optimal design of plastic structures under impulsive and dynamic pressure loading. Int. J. Solids struct., 1977, 13, № 7, 657—674.

Поступило
18 IV 1977

DÜNAAMILISE ÜSIKKOORMUSE ALL ASTMELISELT MUUTUVA PAKSUSEGA TALA OPTIMAALNE PROJEKTEERIMINE

I. Vainikko ja K. Soonets

Resümee

Töös leitakse jäikplastise astmeliselt muutuva paksusega tala optimaalne projekt, kui tala keskel mõjub üksikkoormus ajavahemikul $0 \leq t \leq t_f$, kui tala ruumala on jääv. Optimaalse kuju leidmisel minimiseeritakse jääkläbipainet.

OPTIMAL DESIGN OF A STEPPED BEAM UNDER SINGLE DYNAMIC LOAD

I. Vainikko and K. Soonets

Summary

This paper deals with an optimal design of a rigid-plastic stepped beam loaded by a single load over a time interval of $0 \leq t \leq t_f$, with the assumption that the beam's volume is constant. A design corresponding to a minimum of local deflection is looked for.

ДОПОЛНЕНИЕ К ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК В ПРИБЛИЖЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Ю. Лепик и Э. Сакков

Тартуский государственный университет

Авторами работ [1, 2] предложены два метода для решения задач об оптимальном проектировании жестко-пластических балок ступенчато-переменной толщины, подверженных динамическому нагружению. Оба базируются на методе модальных решений, нашедшем широкое применение в задачах динамики. В работе [2] задача об оптимальном проекте балки, находящейся под равномерно распределенной динамической нагрузкой, решена в точной постановке. Это решение действительно лишь в случае умеренных давлений. При больших нагрузках появляются движущиеся шарниры, вследствие чего точное решение проблемы является трудным. С целью избежать эти трудности, в статье [1] выработан приближенный метод решения, при котором пренебрегается переходной немодальной фазой между фазами нагружения и разгружения. Проведенное сравнение некоторых результатов с точным решением балки поперечного сечения свидетельствует о достаточной точности предложенного метода.

Автором работы [1] найден оптимальный проект свободно опертой ступенчато-переменной высоты балки. В настоящей статье методика работы [1] распространена на случай жестко защемленной балки. Поскольку отличие между формулами данной статьи и соответствующими формулами работы [1] содержится лишь в некоторых членах, то для краткости во всей статье ссылаемся на формулы работы [1], указывая лишь на изменения, которые в них нужно сделать для получения соотношений нашей проблемы.

1. Постановка задачи и основные зависимости

Рассмотрим жестко закрепленную балку ступенчато-переменной высоты. Ширину балки B считаем постоянной, материал ее жестко-пластическим. Предполагаем, что к балке приложено постоянное давление p , которое в некоторый момент времени сни-

мается, и дальнейшее движение происходит по инерции. Нам надо проанализировать две фазы движения — движение под действием нагрузки и инерциальное движение.

Задача состоит в определении параметров $\beta = b/l$ и $\gamma = h_1/h_2$ так, чтобы при заданном объеме V остаточный прогиб в центре w_f в момент прекращения движения балки был бы минимальным. Уравнения движения балки имеют вид (1.1). Здесь и в дальнейшем все ссылки на формулы относятся к работе [1]. Уравнения движения интегрируем при следующих граничных условиях

$$Q(0) = 0, \quad M(l) = -0,25B\sigma_s h^2.$$

Скорость прогиба \dot{w} задается формулой (1.3). Система неравенств (1.11) — (1.13) получает в нашем случае вид

$$A_1 q + B_1 r + C_1 s \leq \frac{\gamma^2 + 1}{\Delta} - P\Delta,$$

$$A_2 q + B_2 r + C_2 s \leq \frac{\gamma^2 + 1}{\Delta} - P\Delta(1 - \alpha^2),$$

$$A_3 q + B_3 r + C_3 s \leq \frac{2}{\Delta} - P\Delta(1 - \beta^2),$$

где смысл символов A_i , B_i и C_i ($i = 1, 2, 3$) точно такой же, как в формулах (1.6) статьи [1].

В дальнейшем будем исследовать возможные формы движения, как это было сделано в § 2 цитированной работы. Теоретически возможны все шесть форм движения. Приведем лишь те формулы, которые отличаются от соответствующих формул работы [1], сохраняя при этом нумерацию статьи [1]:

$$q = r = s = \frac{\gamma^2 + 1 - P\Delta^2}{(A_1 + B_1)\Delta}, \quad (2.1)$$

$$q = \frac{1}{A_3} \left[\frac{2}{\Delta} - P\Delta(1 - \beta^2) \right], \quad (2.2)$$

$$A_1 q + B_1 s = \frac{\gamma^2 + 1}{\Delta} - P\Delta, \quad (2.3)$$

$$A_3 q + B_3 s = \frac{2}{\Delta} - P\Delta(1 - \beta^2),$$

$$(A_1 + B_1) q = \frac{\gamma^2 + 1}{\Delta} - P\Delta, \quad (2.5)$$

$$(A_2 + B_2) q = \frac{\gamma^2 + 1}{\Delta} - P\Delta(1 - \alpha^2),$$

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3 \left(1 - \frac{\gamma^2 + 1}{P\Delta^2} \right) \alpha + \frac{3(\gamma^2 + 1)}{P\Delta^2} + \frac{2}{\gamma} (1 - \beta)^3 - 3 + 6\beta - 6\beta^2 + 2\beta^3 = 0, \quad (2.6)$$

$$\alpha^3 + [3\beta(\gamma - 1) - 2]\alpha^2 + \left[1 - 6\beta(\gamma - 1) - \frac{6}{P\Delta^2}\right]\alpha + 3\beta(\gamma - 1)\left(1 - \frac{2}{P\Delta^2}\right) = 0. \quad (2.12)$$

Рассуждения и формулы третьего параграфа работы [1] действительно полностью, так как кинетическая энергия балки зависит лишь от скорости прогиба, а не от формы закрепления.

Итак, нам надо минимизировать функционал (3.10) при $V = \text{const}$. Обстоятельство, что оба вида закрепления ведут к уравнениям, формально мало отличающимся друг от друга, позволяет применять для получения численных результатов программу, составленную для решения задачи о свободном опирании.

Приведем ниже некоторые значения оптимальных параметров β и γ . При нагрузке $p = 3,0$ оказалось $\beta = 0,4$ и $\gamma = 1,2$, притом реализовалась форма движения 21. Для $p = 9,0$ и $p = 15,0$ $\beta = 0,5$ и $\gamma = 1,4$ при форме движения 22.

Литература

1. Лепик Ю., Оптимальное проектирование жестко-пластических балок под действием динамических нагрузок. Настоящий сборник, стр. 16—28.
2. Lepik, Ü., Mróz, Z., Optimal design of plastic structures under impulsive and dynamic pressure loading. *Int. J. Solids and Struct.*, 1977, 13, № 7, 657—674.

Поступило
3 I 1978

TÄIENDUS DÜNAAMILISELE ÜLESANDELE JÄIK-PLASTSETE TALADE OPTIMISEERIMISEST LIGIKAUDSES LÄHENDUSES

Ü. Lepik ja E. Sakkov

Resümee

Töös [1] on püstitatud ja lahendatud ülesanne vabalt toetatud tala optimaalsest projektist. Käesolevas ülesandes leitakse jäigalt kinnitatud tala optimaalsed parameetrid.

SUPPLEMENT TO THE OPTIMAL DESIGN OF RIGID-PLASTIC BEAMS

Ü. Lepik and E. Sakkov

Summary

The optimal parameters of a simply supported rigid-plastic beam were found in [1]. In this paper the same problem is solved for a clamped beam.

К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СВОБОДНОЙ БАЛКИ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Э. Сакков

Тартуский государственный университет

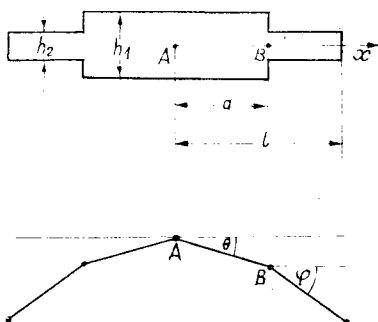
1. Постановка задачи

Рассмотрим свободную балку длины $2l$, постоянной толщины B и ступенчато-переменной высоты h (фиг. 1). Материал балки считаем жестко-пластическим (без упрочнения). Предполагаем, что балке сообщена некая начальная кинетическая энергия L_0 , величина которой считается заданной.

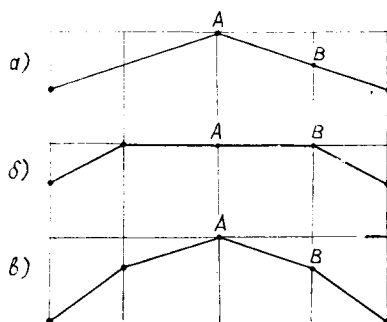
Следуя идеям работы [1], применяем метод модальных решений, предложенный Дж. Мартином и П. Саймондсом в [2]. Согласно этому методу, поле скоростей представляется в т. н. модальной форме

$$\dot{w}_i(x, t) = \dot{\omega}_i(x) \Phi'(t),$$

где $\dot{w}_i(x, t)$ и $\dot{\omega}_i(x, t)$ обозначают скорость и прогиб элемента балки, $\omega_i(x)$ — пространственная мода, $\Phi(t)$ — функция, зависящая только от времени. Этот метод, хотя приближенный, значительно упрощает решение проблемы, так как, по существу, он позволяет разделить переменные.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Задача оптимизации состоит в определении параметров $\alpha = a/l$ и $\gamma = h_1/h_2$ так, чтобы при заданном объеме V остаточный прогиб в конце балки в момент прекращения вращения в шарнирах был бы минимальным.

Шарниры в балке появляются в момент, когда в некотором сечении достигается предельный момент $M_0 = 0,25 B\sigma_s h^2$, где σ_s — предел текучести материала. При изгибе ось балки принимает форму, указанную на фиг. 1. Пластические шарниры могут возникать в точке изменения толщины и в центре балки A . Обозначая углы поворота в шарнирах через θ и $\varphi - \theta$, увидим, что всегда $\varphi \geq \theta \geq 0$. В дальнейшем рассмотрим лишь проекты, для которых $h_1 > h_2$. Прогиб балки задаем в следующем виде:

$$w(x, t) = \begin{cases} x\theta(t) + u(t), & x \in [0, a], \\ a\theta(t) + (x - a)\varphi(t) + u(t), & x \in [a, l]. \end{cases} \quad (1.1)$$

Последний член в этих формулах описывает поступательное движение абсолютно свободной балки. На основании метода модальных решений угловые ускорения θ'' , φ'' и u'' являются постоянными.

2. Основные зависимости

Уравнения движения балки имеют вид:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \rho B h(x) w''(x, t), \quad (2.1)$$

где Q — перерезывающая сила, M — изгибающий момент, ρ — плотность материала.

Эти уравнения будем интегрировать при следующих граничных условиях:

$$M(l) = Q(l) = Q(0) = 0. \quad (2.2)$$

Если в точке $x = 0$ возникает шарнир, то там $M_0 = 0,25 B\sigma_s h_1^2$, если нет, то должно быть выполнено условие $d\omega/dx|_{x=0} = 0$. Интегрируя систему (2.1), получим

$$Q = \begin{cases} \rho B h_1 \left[\frac{x^2}{2} \theta'' + x u'' \right] + C_1, & x \in [0, a], \\ \rho B h_2 \left[a x \theta'' + \left(\frac{x^2}{2} - a x \right) \varphi'' + x u'' \right] + C_2, & x \in [a, l], \end{cases} \quad (2.3)$$

$$M = \begin{cases} \rho B h_1 \left[\frac{x^3}{6} \theta'' + \frac{x^2}{2} u'' \right] + C_1 x + C_3, & x \in [0, a], \\ \rho B h_2 \left[a \frac{x^2}{2} \theta'' + \left(\frac{x^3}{6} - a \frac{x^2}{2} \right) \varphi'' + \frac{x^2}{2} u'' \right] + C_2 x + C_4, & x \in [a, l]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Постоянные интегрирования $C_1 - C_4$, а также ускорение \ddot{u} определяем из граничных условий (2.2) и из условия непрерывности величин Q и M в точке $x = a$. Из (2.2) и (2.3) находим, что

$$u(t) = l[A\theta(t) + C\varphi(t)], \quad (2.5)$$

где

$$A = \frac{\gamma\alpha^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha}{2(\alpha - \gamma\alpha - 1)}, \quad C = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2(\alpha - \gamma\alpha - 1)}.$$

Выражение прогиба (1.1) получает после подстановки (2.5) вид

$$w(x, t) = \begin{cases} (x+lA)\theta(t) + lC\varphi(t), & x \in [0, a], \\ (a+lA)\theta(t) + (x-a+lC)\varphi(t), & x \in [a, l]. \end{cases} \quad (2.6)$$

На основании метода модальных решений $\theta/\varphi = \lambda = \text{const}$. Это позволяет представить выражение (2.6) в виде

$$w(x, t) = \begin{cases} [(x+lA)\lambda + lC]\varphi(t), & x \in [0, a], \\ [(a+lA)\lambda + x - a + lC]\varphi(t), & x \in [a, l]. \end{cases} \quad (2.7)$$

Объем балки будем считать заданным:

$$V = 2B[lh_1 + (l-a)h_2] = \text{const}. \quad (2.8)$$

Учитывая, что $\gamma = h_1/h_2$, можем из уравнения (2.8) определить толщины h_1 и h_2 :

$$h_1 = \frac{V\gamma}{2Bl(1-\alpha+\alpha\gamma)}, \quad h_2 = \frac{V}{2Bl(1-\alpha+\alpha\gamma)}.$$

Изгибающие моменты для сечений $x=0$ и $x=a$ можно после вычисления постоянных интегрирования представить в виде

$$\begin{aligned} M(0) &= -\frac{1}{6} \rho B l^3 h_2 (A_1 \varphi'' + B_1 \theta''), \\ M(a) &= -\frac{1}{6} \rho B l^3 h_2 (A_2 \varphi'' + B_2 \theta''), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A_1 &= 2(1-\alpha)^3 + 3(\alpha^2 - \alpha^2\gamma - 2\alpha + 1)C, \\ B_1 &= \alpha(3\alpha^2 - \alpha^2\gamma - 6\alpha + 3) + 3(\alpha^2 - \alpha^2\gamma - 2\alpha + 1)A, \\ A_2 &= (1-\alpha)^3 [2(1-\alpha) + 3C], \\ B_2 &= 3(1-\alpha)^2(\alpha + A). \end{aligned}$$

Моменты, определяемые формулами (2.9), не могут превышать значения предельных моментов, т. е.

$$M(0) \leq 0,25\sigma_s B h_1^2, \quad M(a) \leq 0,25\sigma_s B h_2^2, \quad (2.10)$$

где символом σ_s обозначен предел текучести.

Введем следующие обозначения:

$$K = \frac{3\sigma_s V}{4\rho B l^4}, \quad \Delta = 1 - \alpha + \alpha\gamma, \quad q = \frac{\varphi''}{K}, \quad s = \frac{\theta''}{K}.$$

Неравенства (2.10) можно теперь переписать в виде

$$A_1 q + B_1 s \leq \frac{\gamma^2}{\Delta}, \quad (2.11)$$

$$A_2 q + B_2 s \leq \frac{1}{\Delta}. \quad (2.12)$$

3. Определение форм модальных движений

В зависимости от величины начальной кинетической энергии и параметров балки возможны три варианта пластических механизмов.

I. Пластический шарнир возникает лишь в центре балки (фиг. 2а). Тогда $\varphi' = \theta'$ и $q = s$, причем в формуле (2.11) следует принимать знак равенства, что дает

$$q = s = \frac{\gamma^2}{(A_1 + B_1)\Delta}. \quad (3.1)$$

Неравенство (2.12) должно быть выполнено.

II. Пластический шарнир появляется лишь в сечении $x = a$. Теперь имеем $\theta' = 0$ и $s = 0$. Из равенства (2.12) получим

$$q = \frac{1}{A_2\Delta}. \quad (3.2)$$

Эта форма реализуется при неравенстве (2.11).

III. Работают шарниры в точках $x = 0$ и $x = a$. Для определения ускорений q и s имеем теперь систему

$$A_1q + B_1s = \frac{\gamma^2}{\Delta}, \quad A_2q + B_2s = \frac{1}{\Delta}. \quad (3.3)$$

Остается еще проверить, выполнены ли условия $0 < s < q$.

4. Определение остаточного прогиба

Остаточный прогиб конца балки в момент прекращения движения $t = t_f$ вычисляется по формуле (2.7) и

$$\omega_f(t, t_f) = l[(\alpha + A)\lambda + 1 - \alpha + C]\varphi(t_f). \quad (4.1)$$

Так как $\varphi''(t)$ постоянная величина, то имеем

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= t\varphi'' + \varphi'(0), \\ \varphi(t) &= \frac{t^2}{2}\varphi'' + t\varphi'(0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

В конечный момент времени $\varphi'(t_f) = 0$ и из (4.2) находим

$$t_f = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi''}, \quad \varphi(t_f) = -\frac{\varphi'^2(0)}{2\varphi''}.$$

Величину $\varphi'(0)$ определим из выражения начальной кинетической энергии

$$L_0 = \rho B \int_0^l \omega^2(x, 0) h(x) dx.$$

После несложных преобразований находим

$$\frac{\varphi'^2(0)}{2\varphi''} = \frac{R\Delta}{qF(\gamma, \alpha, \lambda)}, \quad (4.3)$$

где

$$R = 3L_0(ql^2KV)^{-1},$$

$$F(\gamma, \alpha, \lambda) = \gamma[\lambda^2(\alpha^3 + 3\alpha^2A + 3\alpha A^2) + 3\lambda C(\alpha^2 + 2\alpha A) + 3\alpha C^2] + \\ + 3(\alpha + A)^2(1 - \alpha)\lambda^2 + 3(\alpha + A)(1 - \alpha)(2C - \alpha + 1)\lambda + 1 - \alpha^3 + \\ + 3(C - \alpha)(1 - \alpha)(C + 1).$$

В случае I нужно в последнем выражении брать $\lambda = 1$ и в случае II — брать $\lambda = 0$. Подставляя (4.3) в формулу (4.1), находим

$$w_j(l, t_j) = lRW(\gamma, \alpha, \lambda),$$

где через $W(\gamma, \alpha, \lambda)$ обозначен безразмерный прогиб

$$W(\gamma, \alpha, \lambda) = \frac{\Delta[(\alpha + A)\lambda + (1 - \alpha + C)]}{|q|F(\gamma, \alpha, \lambda)}.$$

Для оптимального проекта должно быть $W(\gamma, \alpha, \lambda) = \min$. Проведенные вычисления показали, что функционал W достигает минимума при $\alpha = 0,8$ и $\gamma = 1,2$.

Литература

1. Lepik, U., Mróz, Z., Optimal design of plastic structures under impulsive and dynamic pressure loading. Int. J. Solids and Struct, 1977, 13, 657—674.
2. Martin, J. B., Symonds, P. S., Mode approximation for impulsively loaded rigid-plastic structures. Journ. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, 1966, 92, 43—66.

Поступило
12 I 1978

ASTMELISELT MUUTUVA PAKSUSEGA JÄIK-PLASTSE VABA TALA OPTIMISEERIMISEST DUNAAMILISE KOORMUSE KORRAL

E. Sakkov

Resümee

Töös lahendatakse ülesanne absoluutselt vaba tala optimeerimisest etteantud kineetilise energia korral. Leitakse tala optimaalsed parameetrid, mille korral jääkläbipaine tala serval on minimaalne. Ülesande lahendamisel kasutatakse modaalse te lahendite meetodit, mis võimaldab probleemi taandada ühe funktsionaali miinimumi leidmisele.

ON THE OPTIMAL DESIGN OF A NONSUPPORTED STEPPED BEAM UNDER DYNAMIC LOADING

E. Sakkov

Summary

The problem of optimization of a nonsupported beam with two-stepped height is set up and solved. The material of the beam is regarded as rigid-plastic. The initial kinetic energy of the beam is considered as given. The optimal parameters of the beam minimizing the residual deflections are determined. The problem in question is solved by the aid of mode form solutions.

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ СТУПЕНЧАТО- ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

К. Соонетс и А. Хартикайнен

Тартуский государственный университет

1. В статье изучается поведение жестко заделанной балки двухступенчатой толщины, которой сообщена начальная кинетическая энергия. Методом модальных решений ищутся для жестко-пластических балок равного объема оптимальные параметры, при которых остаточный прогиб минимален.

Аналогичная проблема для свободно опертой балки изучена З. Мрузом и Ю. Лепиком [5]. При этом предложена новая методика решения задач оптимизации жестко-пластических конструкций. В работах [1—4] изучена задача минимизации по прогибам свободно опертой двухступенчатой балки и круглой пластинки при различных способах динамического нагружения.

Проблема оптимизации пластических конструкций актуальна. Поэтому представляет интерес выявить особенности поведения элементов конструкций из различных материалов, при различных краевых условиях и способах нагружения. Расширение класса решенных задач служит целям оценки эффективности методики и получению данных для общих выводов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим двухступенчатую балку прямоугольного сечения шириной b , размеры которой указаны на рис. 1. Концы балки жестко заделаны. Материал балки

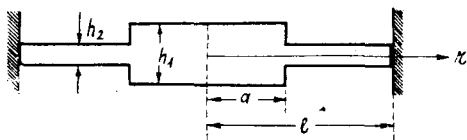


Рис. 1.

считаем жестко-пластическим с пределом текучести σ_s и плотностью ρ . В момент времени $\tau = 0$ балке сообщается кинетическая энергия

$$K = b \rho \int_0^l h(r) W^2(r, 0) dr \quad (1)$$

и объем балки считается постоянным

$$2V = 2b [(l - a)h_2 + ah_1] = \text{const.} \quad (2)$$

Требуется подобрать отношения a/l и h_1/h_2 так, чтобы в момент прекращения движения балки τ_1 остаточный прогиб $f = W(0, \tau_1)/l = \min$ при условии (2).

Движение балки опишем дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = -bqh(r)W'', \quad \frac{\partial M}{\partial r} = -Q, \quad (3)$$

где $Q = Q(r, \tau)$ и $M = M(r, \tau)$ соответственно перерезывающая сила и изгибающий момент;

граничные условия: $W(-l, \tau) = W(l, \tau) = 0$;

начальные условия: поле начальных скоростей $\dot{W}(r, 0)$ должно удовлетворять условию (1) и $W(r, 0) = 0$.

3. Решение основных уравнений. Задачу решим методом модальных решений [2], задавая поле скоростей в виде $W(r, \tau) = u(v)\Phi(\tau)$. Пренебрегая фазой нестационарных пластических шарниров, примем, что пластические шарниры могут возникнуть лишь в сечениях A , B и C . Пластические шарниры

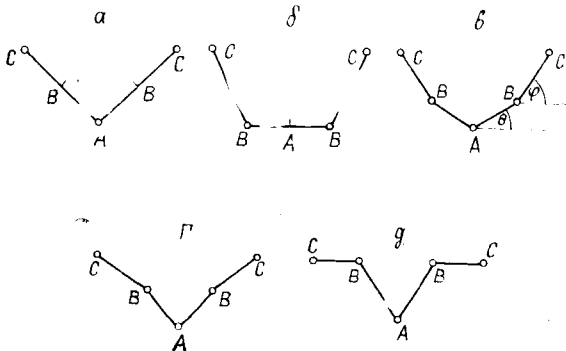


Рис. 2.

появляются в этих сечениях при достижении предельного момента $M_A = \sigma_s b h_1^2 / 4 = M_0'$; $|M_B| = |M_C| = \sigma_s b h_2^2 / 4 = M_0''$. Если работают все шарниры, балка превращается в стержневой механизм, где звенья AB и BC поворачиваются как жесткие стержни вокруг шарниров B и C (рис. 2в) с угловыми скоростями $\theta'(\tau)$, $\varphi'(\tau)$ и угловыми ускорениями θ'' , φ'' . Согласно методу модальных решений ускорения постоянны и также $\varphi''/\theta'' = \varphi'/\theta' = \varphi/\theta = \lambda$. Прогиб балки

$$W(r, \tau) = \begin{cases} [(l-a)\lambda + a - r]\theta(\tau), & 0 \leq r \leq a, \\ (l-r)\lambda\theta(\tau), & a \leq r \leq l. \end{cases} \quad (4)$$

Переходим к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{l}, & \gamma &= \frac{h_1}{h_2}, & x &= \frac{r}{l}, & \omega &= \frac{W}{l}, \\ m &= \frac{M}{M_0''}, & q &= \frac{lQ}{M_0''}, & t &= \frac{\tau}{\sqrt{N}}, & N &= \frac{4qb l^4}{\sigma_s V}, \\ S &= N\theta'', & T &= N\varphi''. \end{aligned}$$

и выразим толщины частей балки следующим образом:

$$h_1 = \gamma h_2, \quad h_2 = \frac{V}{bl\Delta}, \quad \Delta = 1 + \alpha(\gamma - 1),$$

$$H(x) = \begin{cases} \gamma, & 0 \leq x \leq \alpha \\ 1, & \alpha \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Безразмерный прогиб выразится в форме

$$\omega(x) = \begin{cases} [(1-\alpha)\lambda + \alpha - x]\Theta(t), & 0 \leq x \leq \alpha, \\ (1-x)\lambda\Theta(t), & \alpha \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

и уравнения (3) примут форму

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\Delta H(x)\omega'', \quad \frac{\partial m}{\partial x} = -q, \quad (6)$$

где точки означают уже дифференцирование по безразмерному времени.

Решение уравнений (6) с учетом (5) приводит к следующему распределению изгибающего момента

$$m(x) = m_A + \frac{1}{6} \gamma \Delta x^2 [3\lambda(1-\alpha) + 3\alpha - x] S, \quad 0 \leq x \leq \alpha,$$

$$m(x) = m_B + \frac{1}{2} \Delta \alpha^2 (x - \alpha) S +$$

$$+ \frac{\Delta}{6} [6\alpha\gamma(1-\alpha) + 2\alpha^2 + 3(x-\alpha) - x(x+\alpha)] (x-\alpha) \lambda S, \\ \alpha \leq x \leq 1.$$

Придавая аргументу значения $x = \alpha$ и $x = 1$, получим необходимые для дальнейшего соотношения:

$$m_B - m_A = \frac{1}{6} \gamma \Delta \alpha^2 [3\lambda(1-\alpha) + 2\alpha] S, \quad (7)$$

$$m_C - m_B = \frac{1}{2} \gamma \Delta \alpha^2 (1-\alpha) S + \frac{1}{3} \Delta (1-\alpha)^2 [1 + \alpha(3\gamma - 1)] \lambda S.$$

Рассмотрим два частных случая. Если $\theta \equiv 0$, прогиб представится формулами

$$\omega = \begin{cases} (1-\alpha)\varphi(t), & 0 \leq x \leq \alpha, \\ (1-x)\varphi(t), & \alpha \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (8)$$

и вместо соотношений (7) имеем

$$m_B - m_A = \frac{1}{2} \gamma \Delta \alpha^2 (1-\alpha) T, \\ m_C - m_B = \frac{1}{3} \Delta (1-\alpha)^2 [1 + \alpha(3\gamma - 1)] T. \quad (9)$$

При $\varphi \equiv 0$ можем использовать уравнения (7), полагая там $\lambda = 0$.

4. Анализ пластических механизмов. В зависимости от того, в каких сечениях достигаются предельные состояния, можно различать ряд комбинаций пластических шарниров или пластических механизмов. При анализе возможных пластических механизмов следует сочетать возможные распределения изгибающего момента с условием неотрицательности скорости пластической работы в шарнирах. Распределение изгибающего момента зависит от отношения высот γ . Оказывается, что при $\gamma > 1$ могут реализоваться схемы на рис. 2а, б, в, а при $\gamma < 1$ схемы 2а, г, д. В дальнейшем нумеруем эти схемы следующим образом: при $\gamma > 1$ варианты 1, 2, 3 и при $\gamma < 1$ варианты 1, 4, 5. Остановимся на анализе некоторых вариантов подробнее.

Вариант 3. Шарниры появятся в сечениях A, B, C и $m_A = \gamma^2, m_B = 1, m_C = -1$. Скорость пластической работы $m_B(\varphi - \theta) \geq 0$ даст, что $\varphi \geq \theta$. Угловые ускорения звеньев балки находим из системы (7), подставляя в левые части уравнений значения предельных моментов. Должно быть $T < 0, S < 0$ и $T/S \geq 1$. Решение системы следующее (ускорения в случае необходимости снабжены номером варианта):

$$S_3 = \frac{A_1 D_2 - A_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \quad T_3 = \lambda S_3 = \frac{B_2 D_1 - B_1 D_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad (10)$$

$$A_1 = 3\gamma\Delta\alpha^2(1-\alpha); \quad B_1 = 2\gamma\Delta\alpha^3; \quad D_1 = 6(1-\gamma^2); \\ A_2 = \Delta(1-\alpha)^2[2(1-\alpha) + 6\gamma\alpha]; \quad B_2 = 3\gamma\alpha^2(1-\alpha); \quad D_2 = -12. \quad (11)$$

Вариант 2. Шарниры образуются в сечениях B, C и $m_A \leq \gamma^2, m_B = 1, m_C = -1$. Следует использовать соотношения (9). Из второго соотношения находим

$$T_2 = -6[\Delta(1-\alpha)^2(3\gamma\alpha - \alpha + 1)]^{-1}, \quad S_2 = 0. \quad (12)$$

Складывая равенства (9) и учитывая условие $m_A \leq \gamma^2$, получим неравенство, определяющее область параметров γ и α , в которой реализуется вариант 2:

$$(1-\alpha)^2 + 3\gamma\alpha - \gamma^2(1-\alpha)(3\gamma\alpha - \alpha + 1) \leq 0. \quad (13)$$

Вариант 1. Шарниры работают в сечениях A, C и $m_A = \gamma^2, m_B \leq 1, m_C = -1$. Углы поворота $\theta = \varphi$ и $\lambda = 1$. Исключение из системы (7) момента m_B дает

$$S_1 = T_1 = -3(1+\gamma^2)[\Delta(1-\alpha)^3 + \Delta\gamma\alpha(\alpha^2 - 3\alpha + 3)]^{-1}. \quad (14)$$

Настоящий вариант реализуется в области параметров α и γ , удовлетворяющей неравенству

$$\gamma^2 - 1 - \frac{\gamma\alpha^2(1+\gamma^2)(3-\alpha)}{2\gamma\alpha(3-3\alpha+\alpha^2) + 2(1-\alpha)^3} \leq 0. \quad (15)$$

Вариант 1 при $\gamma < 1$. Выражение (14) остается в силе, а неравенство $|m_B| \leq \gamma^2$ дает

$$\left| \gamma^2 - \frac{\gamma\alpha^2(3-\alpha)(1+\gamma^2)}{2\gamma\alpha(3-3\alpha+\alpha^2) + 2(1-\alpha)^3} \right| - \gamma^2 \leq 0. \quad (16)$$

В а р и а н т 4 (рис. 2г) имеет место при предельных моментах $m_A = \gamma^2$, $m_B = -\gamma^2$, $m_C = -1$. Ускорения S_4 и T_4 определяются формулами (10), если там заменить $D_1 = -12\gamma^2$, $D_2 = 6(\gamma^2 - 1)$. Из условия неотрицательности скорости работы $m_B(\varphi' - \theta') \geq 0$ следует, что $\varphi \leq \theta$. Должно быть $T < 0$, $S < 0$ и $T/S \leq 1$.

В а р и а н т 5 реализуется при условиях $m_A = \gamma^2$, $m_B = -\gamma^2$, $m_C \geq -1$ (рис. 2д). Из (7) при $\lambda = 0$ получим

$$S_5 = -\frac{6\gamma}{\Delta\alpha^3}, \quad T_6 = 0; \quad (17)$$

$$(3 - 2\alpha)\gamma^2 - \alpha \leq 0. \quad (18)$$

5. Нахождение остаточного прогиба. Остаточный прогиб в центре балки находим по формуле (5) или (8), приняв там $x = 0$ и вычислив параметр λ , также углы поворота звеньев балки в момент прекращения движения $\theta(t_1)$ и $\varphi(t_1)$. Углы определим путем интегрирования уравнений

$$\Theta'' = S, \quad \varphi'' = T$$

при начальных условиях

$$\Theta(0) = \varphi(0) = 0, \quad \Theta'(0) = \Theta'_0, \quad \varphi'(0) = \varphi'_0.$$

Это даст

$$\Theta(t) = St + \Theta_0, \quad \Theta(t) = \frac{1}{2}St^2 + \Theta'_0 t, \quad \varphi(t) = \lambda\Theta(t)$$

для всех вариантов, кроме второго. При варианте 1 примем $\lambda = 1$, при варианте 5 примем $\lambda = 0$. В случае второго варианта

$$\varphi'(t) = T_2 t + \varphi'_0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}T_2 t^2 + \varphi'_0 t.$$

Момент остановки балки получится из условия $\theta'(t_1) = 0$ (при варианте 2 аналогично для φ'):

$$t_1 = -\frac{\Theta'_0}{S}. \quad (19)$$

Безразмерную угловую скорость $\theta'(t)$ выразим через размерную следующим образом:

$$\Theta' = \sqrt{\frac{2V_0 t^2}{3K} \frac{d\Theta}{d\tau}}.$$

Начальную угловую скорость θ'_0 выводим из условия (1), откуда после интегрирования получим:

$$\Theta_0'^2 = 2\Delta \{ \gamma\alpha [3\lambda(1-\alpha)(\alpha - \lambda\alpha + \lambda) + \alpha^2] + \lambda^2(1-\alpha)^3 \}^{-1} \quad (20)$$

или для варианта 2:

$$\varphi_0'^2 = 2\Delta [(1-\alpha)^2(3\alpha\gamma - \alpha + 1)]^{-1}. \quad (21)$$

Остаточный прогиб вычисляется наконец по формуле

$$f = \frac{\Theta_0'^2}{2|S|} [(1-\alpha)\lambda + \alpha]; \quad \left[\text{вар. 2: } f = \frac{\varphi_0'^2}{2|T_2|} (1-\alpha) \right]. \quad (22)$$

Представляет интерес исследовать наряду с минимизацией локального прогиба f минимум суммарного прогиба

$$u = 2 \int_0^1 \omega(x, t_1) dx, \quad (23)$$

нахождение которого облегчается благодаря тому, что форма прогиба состоит из прямолинейных отрезков и по всей длине прогибы одного знака.

6. Анализ результатов расчета. Балка равномерной высоты ($\gamma = 1$) изгибается по схеме 1. При $\alpha = 0$ получим, что $f_1 = 1/6$.

Случай $\gamma > 1$. Превалируют варианты прогиба 1 и 2 (рис. 3). Лишь в узкой зоне возможны все варианты 1—3. Наилучшим проектом явился $\alpha_0 = 0,527$, $\gamma_0 = 1,384$ с минимальным прогибом $f_2 = 0,1140$ при варианте 2.

Случай $\gamma < 1$. Главным образом реализуются варианты 1 и 5 и лишь в узкой зоне возможны все варианты 1, 4, 5. Наименьший прогиб $f^* = 0,1297$ достигается при варианте 1 с параметрами $\alpha = 0,695$, $\gamma = 0,615$. Вдоль границы областей отдельных вариантов в окрестности оптимальной точки (α_0 , γ_0) прогибы

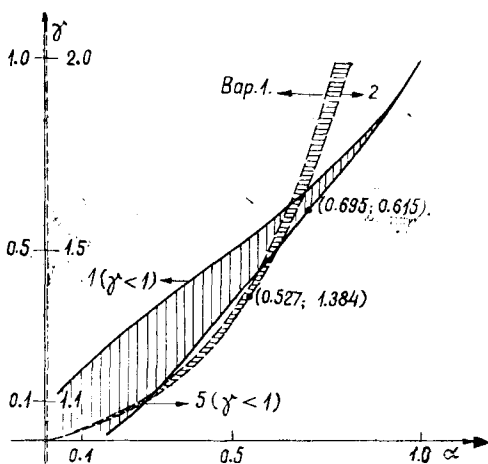


Рис. 3.

меняются медленно, но при переходе из области 2 в область 1 (соответственно из 1 в 5) происходит в прогибах скачкообразное изменение. Отношение прогиба оптимальной балки к прогибу балки постоянной высоты $\gamma > 1$ равняется $f_2/f_1 = 0,68$ и при $\gamma < 1$ равняется $f^*/f_1 = 0,78$.

Принимая за критерий минимизации площадь по (23), получим, что $u_1 = f$, $u_2 = (1 + \alpha)f$, $u_3 = u_4 = \alpha f + \omega(\alpha)$, $u_5 = \alpha f$. Из формул (20) и (22) следует, что при $\alpha, \gamma \rightarrow 0$ для варианта 5 (т. е. для $\lambda = 0$) имеем $f \rightarrow 0,5$ и $u_5 \rightarrow 0$. Балка рассчитывается как будто в две консольные балки с конечным прогибом на одном конце. При конечных α и γ , удовлетворяющих условию

(18), прогибы могут стать очень большими, но показатель u_5 все же значительно меньше по сравнению с тем же показателем для остальных вариантов. Среди других вариантов наименьшее значение $u_1 = f^* = 0,1297$ при $\alpha = 0,695$, $\gamma = 0,615$.

Итак, существуют области неединственности в смысле реализации вариантов формы прогиба. Для различных критериев оптимизации балки получаются различные оптимальные параметры с различными формами прогиба.

Литература

1. Вайникко И., Соонетс К., Об оптимальном проектировании балки ступенчато-переменной толщины под действием динамической сосредоточенной нагрузки. Настоящий сборник, стр. 29—36.
2. Мартин Дж., Саймондс П., Модальные приближения для импульсно нагруженных жестко-пластических конструкций. Сб., «Механика», 1973, № 5, 128—149.
3. Сакков Э., К оптимальному проектированию жестко-пластической свободной балки ступенчато-переменной толщины под действием динамической нагрузки. Настоящий сборник, стр. 40—44.
4. Соонетс К., Вайникко И., О динамическом изгибе жестко-пластических круглых пластинок. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 123—131.
5. Lepik, Ü., Mróz, Z., Optimal design of plastic structures under impulsive and dynamic pressure loading. Int. J. Solids Structures, 1977, 13, 657—674.

Поступило
10 I 1978

ASTMELISELT MUUTUVA PAKSUSEGA JÄIGALT KINNITATUD TALA OPTIMISEERIMINE DÜNAAMILISE KOORMUSE KORRAL

K. Soonets ja A. Hartikainen

Resümee

Töös leitakse tala optimaalsed parameetrid, mille korral kas jääkpaine tala tsentris või summaarne paine on minimaalsed. Jäigalt kinnitatud tala omab algethel antud suurusega kineetilise energia. Ulesanne lahendatakse modaalse te lahendite meetodiga. Vaadeldakse kaheastmelise paksusega tala kaht varianti: 1) keskmine osa on paksem, 2) keskmine osa on õhem äärmistest.

OPTIMAL DESIGN OF A CLAMPED STEPPED BEAM UNDER IMPULSIVE LOADING

K. Soonets and A. Hartikainen

Summary

Behaviour of a clamped beam with two-stepped height is discussed. The initial kinetic energy of the beam is given. The material of the beam is regarded as rigid-plastic. The problem in question is solved with the aid of mode form solutions.

The problem of finding a minimum of residual deflections for a class of beams of equal volume is set up and solved. The two following special cases are considered: 1) the central part of the beam is thicker than the terminal parts, 2) the central part is thinner. Optimal design for both cases is carried out. The types for occurring plastic hinges are cleared up; regions of parameters, for which the possible types of plastic hinges are realized, are determined.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ОПОРЫ ДЛЯ ИМПУЛЬСИВНО НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКИ

Я. Леллеп

Тартуский государственный университет

Оптимальному проектированию жестко-пластических пластин и балок при динамическом нагружении в литературе уделено пока мало внимания. В работе [6] рассмотрены задачи оптимизации балок и круглых пластин ступенчато-переменной толщины. При оптимизации конструкций, подверженных действию статических нагрузок, была предложена идея построения дополнительных опор. Эта идея применялась в [7] для упругих и в [8] для жестко-пластических конструкций. В работе [4] этот подход был обобщен для динамического нагружения нелинейно-упругих и пластических балок. Однако анализ проведен приближенным методом модальных решений.

Ниже рассматривается импульсивно нагруженная жестко-пластическая балка, лежащая на трех опорах. Две из них фиксируют концы балки. Объектом оптимизации является расположение дополнительной опоры.

1. Основные предположения

Рассмотрим жестко-пластическую балку длины l , левый конец которой жестко заделан, правый — шарнирно закреплен. На расстоянии S от левого конца фиксирована дополнительная опора, препятствующая прогибанию балки в этой точке. Пусть балка имеет прямоугольное поперечное сечение высоты h и ширины b . Начало координатной оси Ox поместим в центре тяжести левого конца балки. Допустим, что в начальный момент балка не изогнута, но все ее точки (кроме опорных) имеют одинаковую начальную скорость v_0 в вертикальном направлении. Рассмотрим две задачи:

- 1) определить оптимальное расположение дополнительной опоры, при котором максимальный остаточный прогиб имеет минимальное значение, считая высоту балки заданной;
- 2) найти минимальную высоту и расположение дополнительной опоры, при которых остаточный прогиб не превышает заданной величины.

Введем следующие обозначения:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad s = \frac{S}{l}, \quad m = \frac{4M}{\sigma_0 b} \quad (1.1)$$

$$\tau = \frac{\sigma_0 b}{4\mu v_0 l^2} t, \quad \omega = \frac{\sigma_0 b}{4\mu v_0^2 l^2} W.$$

Здесь σ_0 — предел текучести материала, μ — масса, приходящаяся на единицу длины, t — время, $M = M(x, t)$ — изгибающий момент, $W = W(x, t)$ — прогиб балки. С учетом (1.1) запишем уравнения движения и начальные условия в виде

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2}, \quad \omega(\xi, 0) = 0, \quad \omega'(\xi, 0) = 1, \quad (1.2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по τ . К соотношениям (1.2) добавим краевые условия

$$\omega(0, \tau) = \omega(s, \tau) = \omega(1, \tau) = 0, \quad (1.3)$$

$$\omega'(0, \tau) = \omega'(s, \tau) = \omega'(1, \tau) = 0, \quad (1.4)$$

$$m(0, \tau) = -h^2, \quad m(s, \tau) = -h^2, \quad m(1, \tau) = 0. \quad (1.5)$$

Для решения поставленных задач, в первую очередь, придется построить функции $m = m(\xi, \tau)$ и $\omega = \omega(\xi, \tau)$, удовлетворяющие (1.2) и (1.3).

2. Определение остаточных прогибов

Деформирование жестко-заделанных и шарнирно закрепленных двухслойных балок под действием мгновенного начального импульса рассмотрено в [2, 5]. В данном случае движение балки можно рассматривать как движение двух частей (при $0 \leq \xi \leq s$ и $s \leq \xi \leq 1$ соответственно). Обе эти части движутся как двухопорные балки. Для описания процесса деформации применяем методику, выработанную в [3]. Рассмотрим сначала левую часть ($0 \leq \xi \leq s$) балки, оставляя параметр s нефиксированным.

Ф а з а 11. Краевые условия (1.4) удовлетворены, если выбрать поле скоростей в виде

$$\omega'(\xi, \tau) = \begin{cases} \xi/\eta_1, & 0 \leq \xi \leq \eta_1(\tau), \\ 1, & \eta_1(\tau) \leq \xi \leq \eta_2(\tau), \\ (\xi - s)/(\eta_2 - s), & \eta_2(\tau) \leq \xi \leq s. \end{cases} \quad (2.1)$$

Удовлетворены и начальные условия (1.2), если

$$\eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = s. \quad (2.2)$$

Из (2.1) находим путем дифференцирования распределение ускорений

$$\omega''(\xi, \tau) = \begin{cases} -\eta_1' \xi / \eta_1^2, & 0 < \xi < \eta_1(\tau), \\ 0, & \eta_1(\tau) < \xi < \eta_2(\tau), \\ -\eta_2'(\xi - s) / (\eta_2 - s)^2, & \eta_2(\tau) < \xi < s. \end{cases} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (1.2) и дважды интегрируя с учетом (1.5) и условий

$$m(\eta_1, \tau) = m(\eta_2, \tau) = h^2, \quad \frac{\partial m}{\partial \xi}(\eta_1, \tau) = \frac{\partial m}{\partial \xi}(\eta_2, \tau) = 0,$$

получим

$$\eta_1 \eta_1 = 6h^2, \quad \eta_2(\eta_2 - s) = 6h^2. \quad (2.4)$$

Интегрируя уравнения (2.4) и удовлетворяя условиям (2.2), находим

$$\eta_1 = h \sqrt{12\tau}, \quad \eta_2 = s - h \sqrt{12\tau}. \quad (2.5)$$

Фаза 11 заканчивается в момент τ_{11} , когда $\eta_1(\tau_{11}) = \eta_2(\tau_{11}) = \alpha$. Следовательно,

$$\tau_{11} = \frac{s^2}{48h^2}, \quad \alpha = \frac{s}{2}. \quad (2.6)$$

Фаза 12. В течение следующего этапа деформирования до окончания движения в точке $\xi = \alpha$ находится стационарный шарнир. Таким образом,

$$w(\xi, \tau) = \begin{cases} \dot{w}_1(\tau) \xi / \alpha, & 0 \leq \xi \leq \alpha, \\ \dot{w}_1(\xi, \tau) (s - \xi) / (s - \alpha), & \alpha \leq \xi \leq s. \end{cases} \quad (2.7)$$

где $\dot{w}_1(\tau)$ — скорость прогиба в точке $\xi = \alpha$. Дифференцируя (2.7) по τ , получим распределение ускорений. Подставляя полученный результат в (1.2) и дважды интегрируя, находим

$$w''_1(\tau) = -\frac{6h^2}{\alpha^2}.$$

Отсюда с учетом условий $\dot{w}_1(\tau_{11}) = 1$ и $w_1(\tau_{11}) = \tau_{11}$ находим

$$w_1(\tau) = \left[\tau - \frac{3h^2}{\alpha^2} (\tau - \tau_{11})^2 \right].$$

Движение заканчивается в момент

$$\tau_{12} = \frac{s^2}{16h^2}.$$

Максимальный остаточный прогиб

$$w(\alpha, \tau_{12}) = \frac{s^2}{24h^2}. \quad (2.8)$$

Рассмотрим движение правой части балки ($s \leq \xi \leq 1$).

Фаза 21. Для начальной стадии движения задаем скорости прогибов в виде

$$w(\xi, \tau) = \begin{cases} (\xi - s) / (\eta_3 - s), & s \leq \xi \leq \eta_3(\tau), \\ 1, & \eta_3(\tau) \leq \xi \leq \eta_4(\tau), \\ (\xi - 1) / (\eta_4 - 1), & \eta_4(\tau) \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

С помощью (2.9) находим распределение ускорений. Аналогично предыдущему случаю выводим уравнения

$$\eta_3(\eta_3 - s) = 6h^2, \quad \eta_4(\eta_4 - 1) = 3h^2. \quad (2.10)$$

С учетом условий $\eta_3(0) = s$ и $\eta_4(0) = 1$ из (2.10) получим

$$\eta_3 = s + h \sqrt{12\tau}, \quad \eta_4 = 1 - h \sqrt{6\tau}.$$

Эта фаза движения заканчивается, когда $\eta_3(\tau_{21}) = \eta_4(\tau_{21}) = \beta$. Следовательно,

$$\tau_{21} = \frac{(1-s)^2}{6(3+2\sqrt{2})h^2}, \quad \beta = \frac{s+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

Фаза 22. В течение этой фазы

$$\omega'(\xi, \tau) = \begin{cases} \omega'_2(\tau) (\xi - s) / (\beta - s), & s \leq \xi \leq \beta, \\ \omega'_2(\tau) (1 - \xi) / (1 - \beta), & \beta \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Интегрируя уравнение (1.2) с учетом (2.11), находим

$$\omega''_1(\tau) = -6h^2 / (s - \beta)^2. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) позволяет определить момент прекращения движения

$$\tau_{22} = \frac{(1-s)^2}{2(3+2\sqrt{2})h^2}$$

и максимальный остаточный прогиб

$$\omega(\beta, \tau_{22}) = \frac{(1-s)^2}{3(3+2\sqrt{2})h^2}. \quad (2.13)$$

Так как распределение скоростей задано, то с учетом крайних условий (1.3) можно найти и прогибы. Для решения поставленных задач требуются лишь формулы (2.8) и (2.13). Поэтому опустим определение прогибов.

3. Оптимальное расположение дополнительной опоры

Находим сперва оптимальное расположение дополнительной опоры, при котором максимальный прогиб имеет минимальное значение. Таким образом, минимизации подлежит негладкая функция

$$f(s) = \max \{f_1(s), f_2(s)\}, \quad (3.1)$$

где согласно (2.8) и (2.13)

$$f_1(s) = \frac{s^2}{24h^2}, \quad f_2(s) = \frac{(1-s)^2}{3(3+2\sqrt{2})h^2}. \quad (3.2)$$

Необходимое условие экстремума функции типа (3.1) имеет вид (см. [1])

$$\frac{df(s_*)}{d(s_* - s)} \geq 0, \quad \frac{df(s_*)}{d(s_* + s)} \geq 0, \quad (3.3)$$

где s_* — точка экстремума. В данном случае имеем

$$\frac{df_1(s)}{d(s_* - s)} \leq 0, \quad \frac{df_1(s)}{d(s_* + s)} \geq 0, \quad \frac{df_2(s)}{d(s_* - s)} \geq 0, \quad \frac{df_2(s)}{d(s_* + s)} \leq 0. \quad (3.4)$$

Неравенства (3.4) показывают, что условия (3.3) удовлетворены, если

$$f(s) = \begin{cases} f_2(s), & s \leq s_*, \\ f_1(s), & s \geq s_*. \end{cases}$$

Величина s_* определяется из уравнения $f_1(s_*) = f_2(s_*)$. Следовательно, согласно (3.2)

$$s = \frac{2\sqrt{2}}{1+3\sqrt{2}}. \quad (3.5)$$

Выражаем эффективность дополнительной опоры в виде отношения $\theta = \omega_0/\delta$, где $\omega_0 = \omega(\beta(s_*), \tau_{22}(s_*))$ и δ — максимальный остаточный прогиб двухопорной балки. Из (2.13) и (3.5) получим

$$\theta = \frac{1}{33 - 20\sqrt{2}}.$$

Следовательно, прибавление дополнительной опоры позволяет уменьшить максимальный остаточный прогиб почти в пять раз.

Рассмотрим теперь задачу определения минимальной высоты, при которой остаточные прогибы не превышают заданной величины ω_* . Из (3.2) получим неравенства

$$\frac{s^2}{24} - \omega_* h^2 \leq 0, \quad \frac{(1-s)^2}{3(3+2\sqrt{2})} - \omega_* h^2 \leq 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, имеем задачу минимизации функционала

$$J = h + \lambda_1 \left[\frac{s^2}{24} - \omega_* h^2 \right] + \lambda_2 \left[\frac{(1-s)^2}{3(3+2\sqrt{2})} - \omega_* h^2 \right], \quad (3.7)$$

где $\lambda_1 \geq 0$ и $\lambda_2 \geq 0$ — неизвестные множители Лагранжа. Необходимые условия минимума функционала (3.7) имеют вид

$$\begin{aligned} 1 - 2\omega_* h(\lambda_1 + \lambda_2) &= 0, \\ \lambda_1 s - \frac{8\lambda_2}{3+2\sqrt{2}}(1-s) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Множители λ_1 и λ_2 обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \text{если} & \quad \frac{s^2}{24} - \omega_* h^2 < 0, \\ \lambda_2 &= 0, & \text{если} & \quad \frac{(1-s)^2}{3(3+2\sqrt{2})} - \omega_* h^2 < 0. \end{aligned}$$

Из (3.8) выясняется, что $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Следовательно, в формулах (3.6) реализуются в случае оптимального проекта знаки равенства. Поэтому

$$s_* = \frac{2\sqrt{2}}{1+3\sqrt{2}}, \quad h_* = \frac{1}{\sqrt{3\omega_*}(1+3\sqrt{2})} \quad (3.9)$$

Вычислим отношение $\theta = h_*/h_0$, где h_0 — толщина двухопорной балки, имеющей максимальный остаточный прогиб ω . С учетом (3.2) и (3.9) находим $\theta = (5 + 2^{3/2})/17$. Следовательно, дополнительная опора позволяет получить 54% экономии материала.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Методы оптимизации. Минск, 1975.
2. Дикович И. Л., Динамика упруго-пластических балок: Ленинград, 1962.
3. Леллеп Я., О больших прогибах жестко-пластических стержней при динамическом нагружении. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 258—269.
4. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих балок с дополнительными опорами в случае динамического нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 132—143.
5. Саймондс П. С., Большие пластические деформации стержней под действием нагрузки взрывного типа. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит. 1956, № 4, 90—108.
6. Lepik, U., Mróz, Z., Optimal design of plastic structures under impulsive and dynamic pressure loading. Int. J. Solids and Struct., 1977, 13, № 7, 657—674.
7. Mróz, Z., Rozvany, G. I. N., Optimal design of structures with variable support conditions. J. Optimiz. Theory Appl., 1975, 15, № 1, 85—101.
8. Prager, W., Rozvany, G. I. N., Plastic design of beams: optimal locations of supports and steps in yield moment. Int. J. Mech. Sci., 1975, 17, № 10, 627—631.

Поступило
13 I 1978

LISATOE OPTIMAALSE ASUKOHA MÄÄRAMINE DÜNAAMILISELT KOORMATUD TALA JAKS

J. Lellep

Resümee

Vaadeldakse kolmel toel asetsevat jääk-plastset tala, millele on antud konstantne algkiirus. Kaks tuge asetsevad tala otstes, kolmanda asukoht on esialgu fikseerimata. Töös on lahendatud kaks ülesannet. 1) On leitud lisatõe niisugune asukoht, mille puhul tala maksimaalne jääktaotspaine omandab minimaalse väärtuse etteantud paksuse korral. 2) On leitud tala minimaalne paksus ja lisatõe optimaalne asukoht, mille korral jääkläbipained ei ületa etteantud väärtust.

OPTIMAL LOCATION OF THE ADDITIONAL SUPPORT FOR AN IMPULSIVELY LOADED BEAM

J. Lellep

Summary

A rigid-plastic beam on three supports is considered. Two supports lie under the edges of the beam. The location of the additional support is unfixed. The beam is subjected to the initial transverse impulse. Two problems are solved. 1) Optimal location of the additional support is found on condition that the maximal residual deflection has the minimal value. 2) The minimal value of thickness of the beam is found on condition that the residual deflection does not exceed a given value.

О ВЛИЯНИИ НЕСТАБИЛЬНЫХ СВОЙСТВ НА ЦИКЛИЧЕСКОЕ УПРОЧНЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

К. Кенк

Таллинский политехнический институт

Р. Арутюнян и В. Чебанов

Ленинградский государственный университет

Вопрос о параметрах, определяющих состояние упруго-пластической среды, является основополагающим при построении уравнений теории пластичности. Упрочнение среды в этих уравнениях обычно связывается с некоторым монотонно возрастающим параметром типа параметра Одквиста λ_0 , где $d\lambda_0 = (d\epsilon^p_{\alpha\beta} d\epsilon^p_{\alpha\beta})^{1/2}$ и $d\epsilon^p_{ij}$ — тензор приращения пластической деформации. Считается, что свойства пластической среды не зависят от времени, а состояния среды фиксируются с помощью параметра λ_0 , который иногда называют «пластическим временем». С учетом эффекта Баушингера такой подход позволяет описать механическое поведение пластической среды как при монотонных, так и при циклических процессах активного нагружения (см. [1]). Однако, как было отмечено в [6], для определенных классов многократных (знакопеременных) нагружений предположение о параметре упрочнения типа параметра Одквиста может оказаться недостаточным. Следует также отметить, что изучению поведения металлов и сплавов в условиях циклических нагружений посвящены многочисленные работы. Установилось мнение, что в качестве основного параметра, например, в мягком симметричном цикле нагружения следует принять ширину петли пластического гистерезиса (см. [7]). По этому же признаку материалы классифицируются на циклически упрочняющиеся, циклически стабильные и циклически разупрочняющиеся. В этих работах отмечается также, что такое деление является условным, так как на ширину петли пластического гистерезиса существенное влияние оказывает асимметрия цикла и исходная пластическая деформация. В данной работе обращается внимание на некоторые дополнительные данные, касающиеся нестабильных свойств металлов и сплавов, которые вносят существенный вклад в циклическое упрочнение пластических материалов. Эти данные дают возможность уточнить выбор параметра состояния среды.

1. Опыты на старение [2, 3] показывают, что наряду с параметром Одквиста, существенное влияние на упрочнение среды как при монотонных, так и при циклических нагружениях, оказывают и свойства физико-химической нестабильности металлов и сплавов. Из результатов этих опытов следует, что в состав параметров, характеризующих состояние упруго-пластической среды, наряду с параметром Одквиста, должны входить некоторые дополнительные параметры, способные описать упрочнение среды, вызванное процессами, протекающими в материале, как во время активной пластической деформации, так и при старении. Такой параметр упрочнения, способный охватить распад твердого раствора с учетом процессов пластической деформации, вводился в [4] с помощью кинетического уравнения:

$$d\lambda = f(\lambda, \lambda_0, t) dt + d\lambda_0. \quad (1)$$

Уравнение (1) без последнего члена (т. е. без учета пластической деформации) и при различных конкретизациях функции применялось многими авторами (Аустин и Рикке, Мишима, Хасигути и Кимура, Верт, Зинер и др., см. [8]) для описания кинетики изменений структуры и свойств сплавов при старении. В этих работах считается, что λ — это количество выделяющейся фазы при распаде твердого раствора и предполагается, что изменение свойств среды при старении пропорционально количеству выделившейся фазы. С другой стороны, если предположить, что для стабильного материала $f(\lambda, \lambda_0, t) \equiv 0$, то из (1) будет следовать, что λ и λ_0 идентичны.

Будем далее считать, что состояние упруго-пластической среды зависит от введенного с помощью уравнения (1) параметра λ и рассмотрим условие текучести следующего вида:

$$[(s_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta})(s_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta})]^{1/2} = \Phi(\lambda), \quad (2)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ — девиатор напряжений (здесь $\sigma = 1/3 \sigma_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}$, а δ_{ij} — единичный тензор) и q_{ij} — девиатор остаточных микронапряжений (см. [5]).

Из соотношения (1) следует также, что при «мгновенных» активных нагружениях параметр λ будет идентичен параметру Одквиста λ_0 . Рассматриваемые нами материалы в первом приближении удовлетворяют данному условию. Это обстоятельство позволяет разделить влияние процесса активного нагружения и процесса старения на упрочнение пластической среды. Другими словами, можно считать, что при активном нагружении функция Φ в уравнении (2) зависит от параметра Одквиста λ_0 , при старении же она зависит от параметра λ , который определяется следующим уравнением:

$$d\lambda = f(\lambda, t) dt. \quad (3)$$

Ниже приводятся результаты опытов (над образцами, изготовленными из стали 3) на чередование циклического нагружения и старения. Эти опыты позволяют оценить роль отмеченных

параметров на процесс упрочнения среды и указывают на целесообразность введения единого параметра упрочнения λ .

2. Опыты были выполнены на знакопеременное циклическое кручение при заданной амплитуде напряжений. Размеры образцов, испытательная аппаратура и методика измерений были такие же, как в [6]. Были испытаны два образца приблизительно по одной и той же программе нагружения, но при различных максимальных амплитудах напряжения симметричного цикла. Пластическая деформация на начальном участке нагружения в первом образце была равна 2,548%, а во втором — 0,685%. Так как результаты испытаний для обоих образцов качественно

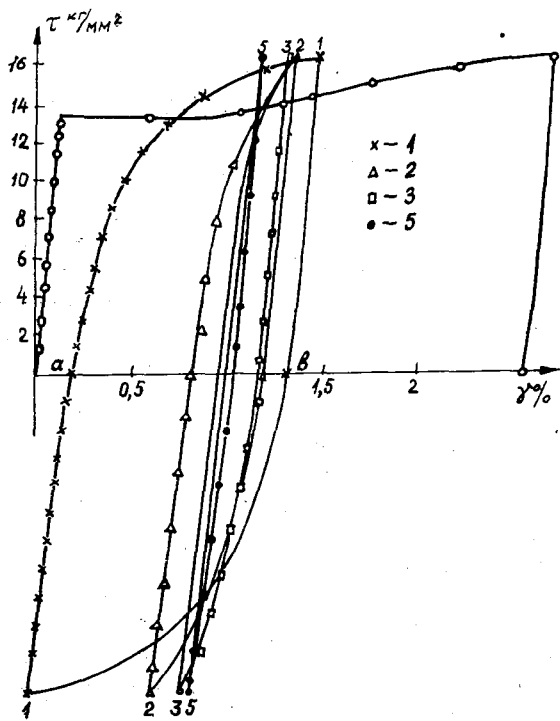


Рис. 1.

совпадают, то ограничимся более детальным рассмотрением данных, полученных в опытах над первым образцом. Вначале образец подвергался циклическому кручению до установления петли пластического гистерезиса. Эти опыты показали, что материал упрочняется от цикла к циклу и петля пластического гистерезиса стабилизируется после четырех-шести циклов нагружения. Кривые $\tau - \gamma$, полученные в последующих циклах, друг с другом совпадали. Чтобы не загромождать график, на рис. 1 показана только установившаяся петля, полученная в этих испытаниях (кривая отмечена цифрой 1). Далее образец полно-

стью разгружался и старился в течение 2,5 часов при температуре 100 °С и 20 часов при комнатной температуре. Затем он снова был испытан на циклическое кручение с той же амплитудой напряжения до стабилизации петли пластического гистерезиса, которая наступила также после четырех-шести циклов нагружения. Отметим здесь, что этот эффект стабилизации цикла после процесса старения аналогичен эффекту, обнаруженному в [6]. На рис. 1 также показана кривая соответствующего установившегося цикла (кривая отмечена цифрой 2). Кривые, отмеченные на рис. 1 цифрами 3 и 5, были получены после аналогичной процедуры чередования старения и циклического нагружения и соответствуют также установившимся циклам нагружения. Детальная картина изменений ширины петли δ с числом полуциклов N приведена на рис. 2 (кривая 1 получена в опытах над первым образцом, кривая 2 — над вторым). Для большей наглядности ширина петли здесь дана в единицах угла пово-

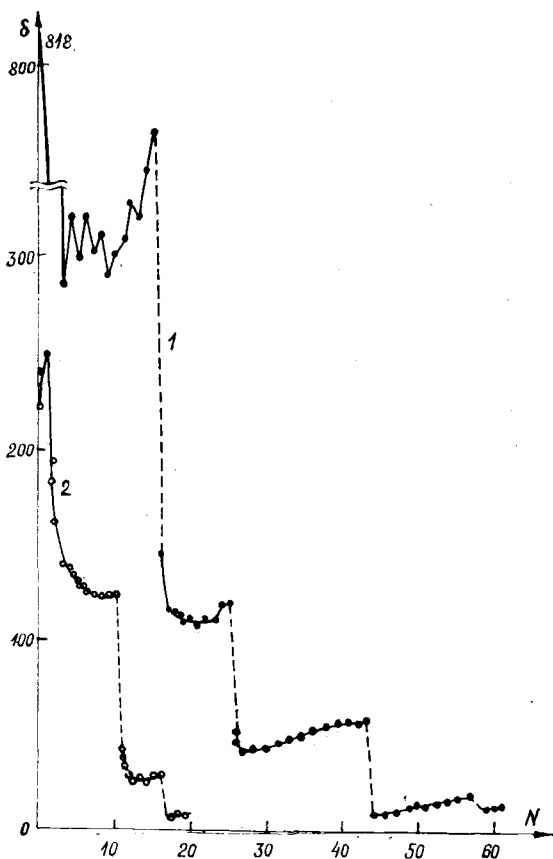


Рис. 2.

рота. Величина соответствующей деформации может быть получена умножением на коэффициент $3,115 \cdot 10^{-5}$. Пунктиром показано изменение δ за счет старения.

Из рис. 1 и 2 ясно, что многократная процедура чередования циклического нагружения и старения приводит к предельному упрочнению материала — ширина петли стремится к нулю. Ясно также, что вклад активного нагружения (параметра Одквиста λ_0) в процесс упрочнения является незначительным. Основная доля упрочнения достигается при старении материала. Так, например, ширина установившейся петли на первом этапе нагружения для первого образца была равна около 1,165% (отрезок $[a, b]$ на рис. 1), ширина петли на последнем, пятом этапе нагружения равна нулю. Упрочнению материала в результате старения соответствует при этом суммарное уменьшение петли на 1,06%. Упрочнение же материала за счет циклического нагружения уменьшило ширину петли всего на 0,105%. Эти результаты убедительно показывают, что эффекты упрочнения нестабильной пластической среды при циклических нагружениях в основном управляются внутренними процессами, протекающими в материале, и имеют физико-химическую природу, что и отражено уравнением (1). Из приведенного следует, что ширина петли пластического гистерезиса не может быть принята в качестве основного параметра при рассмотрении циклических нагружений и отмеченной выше классификации металлов и сплавов.

В заключение отметим, что полученные выше эффекты будут, по-видимому, наблюдаться и у чистых металлов. Они будут связаны с нестабильностью дефектной структуры, внесенной в материал закалкой (вакансии) и пластической деформацией (дислокации). Параметры упрочнения в этом случае должны быть заданы некоторыми кинетическими уравнениями, способными описать поведение этих дефектов. Соответственно, условие текучести (2) будет зависеть от этих параметров. Однако данный вопрос требует дальнейших исследований.

Литература

1. Арутюнян Р. А., Вакуленко А. А., О многократном нагружении упруго-пластической среды. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4, 53—61.
2. Арутюнян Р. А., Каменцева З. П., Упрочнение стареющих сплавов. Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1976, № 4, 128—137.
3. Арутюнян Р. А., Каменцева З. П., Циклическое упрочнение стареющих сплавов. В сб. «Исслед. по упругости и пластичности». Л., Ленингр. ун-т, 1976, № 11, 121—127.
4. Арутюнян Р. А., К критерию циклического разрушения Коффина. Ленингр. ун-т. Л., 1976. 8с (Рукопись деп. в ВИНТИ 3 ноября 1975 г., № 3869-76 Деп.).

5. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В., Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения, Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 1, 78—89.
6. Кенк К. Р., О связи между напряжением и сдвигом при кручении. Инженерный ж., Механ. тверд. тела, 1968, № 5, 134—139.
7. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М., Несущая способность и расчет деталей машин на прочность. Москва, 1975.
8. Старение сплавов. Сб. статей, Москва 1962.

Поступило
15 II 1977

MITTESTABIILSETE OMADUSTE MÕJU PLASTSE KESKKONNA TSÜKLILISELE KALESTUMISELE

A. Kenk, R. Arutunjan ja V. Tšebanov

Resümee

Materjali kalestumist püütakse plastsusteoorias tavaliselt kirjelda Odqvisti parameetri tüüpi monotoonseks kasvava parameetri abil. Juhul aga kui tsüklilise koormamise perioodid vahelduvad vananemise perioodidega tuleb arvestada ka reaalse metallide ja sulamite omaduste mittestabiilsust. Töös vaadeldud kalestumisparameeter võimaldab seda teha. Teostatud eksperimentaalsete uurin-gute tulemused kinnitavad sellise parameetri sissetoomise otstarbekust ja lisaks sellele näitavad, et vananemise mõju kalestumisele on tunduvalt suurem kui tsüklilise deformeerimise mõju.

ON THE INFLUENCE OF UNSTABLE PROPERTIES ON CYCLIC HARDENING OF PLASTIC MATERIALS

K. Kenk, R. Arutyunyan and V. Chebanov

Summary

An assumption of physial-chemical stability of plastic materials is usually made in classical theories of plasticity. It is some idealization of the behavior of most metals and alloys. Real metals, used in modern constructions, are complex solutions with unstable properties. Changes in mechanical behavior of unstable materials due to dissociation of solid solutions are well studied, for example, in ageing experiments. It is also well known that the kinetics of ageing process is essentially affected by plastic deformation. So, to describe the hardening behavior of unstable materials a new hardening parameter λ , generalizing the well known Odqvist's parameter λ_0 , is introduced:

$$d\lambda = f(\lambda, \lambda_0, t) dt + d\lambda_0$$

For the stable materials λ and λ_0 are identical. The results of experiments on cyclic torsion and ageing show that the new parameter λ describes well the hardening behavior of low — carbon steel.

АЛГЕБРА ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

М. Хейнлоо

Тартуский государственный университет

При построении линейного вязкоупругого решения обычно за основу принимается аналитическое решение в линейной теории упругости, в котором упругие константы заменяются линейными интегральными операторами и затем расшифровываются полученные операторные выражения [9, 2]. Для расшифровки операторных выражений во многих работах эффективно используется алгебра интегральных операторов типа Вольтерра, первые результаты которой были получены Ю. Н. Работновым в работе [8] для Э-операторов. Позднее Громов [1] заметил, что формулы Работнова справедливы и для любых резольвентных интегральных операторов типа Вольтерра.

Решение отдельных частных задач в линейной теории вязкоупругости [5, 6] показывает необходимость дальнейшего развития алгебры интегральных операторов типа Вольтерра. Например, для произвольных резольвентных интегральных операторов типа Вольтерра $R^*(\beta)$ справедлива известная формула Работнова:

$$\left[1 - \sum_{h=1}^n \theta_h R^*(a_h)\right]^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^n A_j R^*(x_j), \quad (1)$$

в которой x_j считаются корнями уравнения

$$1 - \sum_{j=1}^n \theta_j (x - a_j)^{-1} = 0 \quad (2)$$

и коэффициенты A_j — решением системы линейных уравнений

$$1 - \sum_{j=1}^n A_j (x_j - a_k)^{-1} = 0; \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

Однако расшифровка операторных выражений показывает [5, 6], что для коэффициентов A_j необходимо иметь аналитические выражения при произвольном значении параметра n . Далее, уравнением (2) можно пользоваться для определения величин x_j в формуле (1) лишь при $\theta_j \neq 0$. Используя формулу (1) в процессе расшифровки операторных выражений, неизвестно

будут ли $\theta_j \neq 0$ при конкретных значениях параметров или нет. Поэтому желательно было бы иметь уравнение, которое позволяло бы определить x_j в формуле (1) и в том случае, когда $\theta_j = 0$.

Кроме этого, из работ [5, 6] следует, что в процессе расшифровки операторных выражений требуются некоторые результаты из алгебры элементарных дробей типа

$$1/(\lambda+y) \quad (4)$$

для преобразования выражений, не имеющих операторного характера. Формула умножения для элементарных дробей типа

$$1/(1+\mu y) \quad (5)$$

была, по-видимому, впервые приведена Победрей в работе [7]. Использование метода Ильюшина и Победри [2] при построении решений для конструктивно-неоднородных или анизотропных конструкций с вязкоупругими элементами приводит к необходимости развития также алгебры элементарных дробей типа (5) и типа

$$x/(x+\mu). \quad (6)$$

Рассмотрим элементарные дроби типа

$$x/(\lambda x+1). \quad (7)$$

Если в (7) буквой x обозначен интегральный оператор типа Вольтерра и λ — вещественное число, то (7) является представлением резольвентного интегрального оператора для x . Следовательно, алгебра интегральных операторов типа Вольтерра следует из алгебры элементарных дробей типа (7) и, наоборот, известные результаты алгебры интегральных операторов типа Вольтерра переносятся в алгебру элементарных дробей типа (7).

Представляя все указанные четыре типа элементарных дробей единым образом, приходим к дробно-рациональным функциям следующего вида:

$$f(\lambda, \mu) = x/(\lambda x + \mu y). \quad (8)$$

В настоящей работе доказываются основные теоремы алгебры дробно-рациональных функций вида (8), которые позволяют не только устранить указанные недостатки, но и получить все известные результаты алгебры интегральных операторов типа Вольтерра.

Теорема 1. Если $\lambda_1 \mu_2 \neq \lambda_2 \mu_1$, то для функции f справедлива следующая формула умножения:

$$f(\lambda_1, \mu_1) f(\lambda_2, \mu_2) = \frac{\mu_2 f(\lambda_2, \mu_2) - \mu_1 f(\lambda_1, \mu_1)}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}. \quad (9)$$

Действительно, в соответствии с (8) имеем

$$\frac{\mu_2 f(\lambda_2, \mu_2) - \mu_1 f(\lambda_1, \mu_1)}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1} \left[\mu_2 \frac{x}{\lambda_2 x + \mu_2 y} - \mu_1 \frac{x}{\lambda_1 x + \mu_1 y} \right] = \\
 &= \frac{x^2}{(\lambda_1 x + \mu_1 y)(\lambda_2 x + \mu_2 y)} = f(\lambda_1, \mu_1) f(\lambda_2, \mu_2).
 \end{aligned}$$

Теорема 2. Для функций f имеет место следующая формула деления:

$$\frac{f(\alpha, \beta)}{f(\lambda, \mu)} = \frac{\mu}{\beta} + \frac{\lambda\beta - \mu\alpha}{\beta} f(\alpha, \beta). \quad (10)$$

Действительно, с помощью (8) получим, что

$$\begin{aligned}
 \frac{f(\alpha, \beta)}{f(\lambda, \mu)} &= \frac{\lambda x + \mu y}{\alpha x + \beta y} = \frac{\lambda x}{\alpha x + \beta y} + \frac{\mu}{\beta} \frac{\beta y}{\alpha x + \beta y} = \\
 &= \lambda f(\alpha, \beta) + \frac{\mu}{\beta} [1 - \alpha f(\alpha, \beta)] = \frac{\mu}{\beta} + \frac{\lambda\beta - \mu\alpha}{\beta} f(\alpha, \beta).
 \end{aligned}$$

Используя формулы (9) и (10), докажем теперь следующую важную теорему:

Теорема 3. Если $\beta_j \alpha_m \neq \beta_m \alpha_j$ и $n \geq 2$, то справедлива следующая формула:

$$\prod_{k=1}^n \frac{f(\alpha_k, \beta_k)}{f(\lambda_k, \mu_k)} = \prod_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\beta_k} + \sum_{j=1}^n A_j^n f(\alpha_j, \beta_j), \quad (11)$$

где

$$A_j^n = \frac{1}{\beta_j} \prod_{k=1}^n (\beta_j \lambda_k - \alpha_j \mu_k) \prod_{m=1}^n (\beta_j \alpha_m - \beta_m \alpha_j)^{-1}; \quad j \neq m. \quad (12)$$

В справедливости формулы (11) можно убедиться методом математической индукции. Действительно, с помощью формул (9) и (10) нетрудно установить, что формула (11) справедлива при $n = 2$. Пусть формула (11) имеет место при $n = t \geq 2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 &\prod_{k=1}^{t+1} \frac{f(\alpha_k, \beta_k)}{f(\lambda_k, \mu_k)} = \frac{f(\alpha_{t+1}, \beta_{t+1})}{f(\lambda_{t+1}, \mu_{t+1})} \prod_{k=1}^t \frac{f(\alpha_k, \beta_k)}{f(\lambda_k, \mu_k)} = \\
 &= \left[\frac{\mu_{t+1}}{\beta_{t+1}} + \frac{\lambda_{t+1} \beta_{t+1} - \mu_{t+1} \alpha_{t+1}}{\beta_{t+1}} f(\alpha_{t+1}, \beta_{t+1}) \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\prod_{k=1}^t \frac{\mu_k}{\beta_k} + \sum_{j=1}^t A_j^t f(\alpha_j, \beta_j) \right] = \\
 &= \prod_{k=1}^{t+1} \frac{\mu_k}{\beta_k} + \sum_{j=1}^t A_j^{t+1} f(\alpha_j, \beta_j) + \frac{\lambda_{t+1} \beta_{t+1} - \mu_{t+1} \alpha_{t+1}}{\beta_{t+1}} \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\prod_{k=1}^t \frac{\mu_k}{\beta_k} + \sum_{j=1}^t A_j^t \frac{\beta_{t+1}}{\alpha_j \beta_{t+1} - \alpha_{t+1} \beta_j} \right] f(\alpha_{t+1}, \beta_{t+1}) =
 \end{aligned}$$

$$= \prod_{k=1}^{t+1} \frac{\mu_k}{\beta_k} + \sum_{j=1}^{t+1} A_j^{t+1} f(\alpha_j, \beta_j),$$

ибо из формулы (11) при $n = t$, $x = \beta_{t+1}$, $y = \alpha_{t+1}$ следует, что имеет место следующее равенство:

$$\prod_{k=1}^t \frac{\mu_k}{\beta_k} + \sum_{j=1}^t A_j^t \frac{\beta_{t+1}}{\alpha_j \beta_{t+1} - \alpha_{t+1} \beta_j} = \prod_{k=1}^t \frac{\lambda_k \beta_{t+1} - \mu_k \alpha_{t+1}}{\alpha_k \beta_{t+1} - \beta_k \alpha_{t+1}}.$$

Из формулы (11) при $\lambda_k = 1$ и $\mu_k = 0$ получим следующую формулу:

$$\prod_{k=1}^n f(\alpha_k, \beta_k) = \sum_{j=1}^n \beta_j^{n-1} \prod_{m=1}^n (\beta_j \alpha_m - \beta_m \alpha_j)^{-1} f(\alpha_j, \beta_j). \quad (13)$$

Формула (13) обобщает теорему 1.

Теорема 4. Для любой дробно-рациональной функции $f(\lambda, \mu)$ имеет место следующая формула обращения:

$$[1 - \theta f(\lambda, \mu)]^{-1} = [1 + \theta f(\lambda - \theta, \mu)]. \quad (14)$$

Действительно, в соответствии с (8) и (1) имеем

$$\begin{aligned} [1 - \theta f(\lambda, \mu)]^{-1} &= \left[1 - \frac{\theta x}{\lambda x + \mu y} \right]^{-1} = \left[\frac{\lambda x + \mu y}{(\lambda - \theta)x + \mu y} \right] = \\ &= \left[\frac{f(\lambda - \theta, \mu)}{f(\lambda, \mu)} \right] = [1 + \theta f(\lambda - \theta, \mu)]. \end{aligned}$$

Формулы (9), (10), (11), (13) и (14) являются основой при построении алгебры элементарных дробей типов (4)–(7) (интегральных операторов типа Вольтерра). Так, например, из формулы (9) при $\mu_1 = \mu_2 = 1$ получим формулу Работнова для элементарных дробей типа (7) (интегральных операторов типа Вольтерра), когда $y = 1$ и типа 4, когда $x = 1$, а при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ — формулу Победри [7] для элементарных дробей типов (5) и (6), когда $x = 1$ или $y = 1$ соответственно. Из формулы (13) при $\beta_j = 1$ получим формулу Розовского для элементарных дробей типа (7), когда $y = 1$ (интегральных операторов типа Вольтерра) и типа (4), когда $x = 1$. Следует отметить, что формула Розовского была доказана в работе [10] только для Э-операторов. Позднее Громов заметил в работе [1], что формула Розовского справедлива для любых резольвентных интегральных операторов типа Вольтерра. Аналогично, принимая в (13) $\alpha_j = 1$, получим новую формулу в алгебре элементарных дробей типов (5) и (6), когда $x = 1$ или $y = 1$ соответственно.

В работе [6] при расшифровке операторных выражений важное значение имела следующая формула из алгебры элементарных дробей типа (4):

$$\prod_{k=1}^n \frac{(\lambda_k + y)}{(\alpha_k + y)} = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\prod_{k=1}^n (\lambda_k - \alpha_j)}{(\alpha_j + y) \prod_{m=1}^n (\alpha_m - \alpha_j)}. \quad (15)$$

$$j \neq m; \quad \alpha_j \neq \alpha_m; \quad n \geq 2.$$

Формула (15) следует из формулы (11) при $x = \beta_k = \mu_k = 1$.

Обозначим далее $R^*(a_k) = x(1 - a_k x)^{-1}$ и рассмотрим подробно обращение линейного агрегата элементарных дробей типа (7) (резольвентных интегральных операторов типа Вольтерра) следующего вида:

$$1 - \sum_{k=1}^n \theta_k R^*(a_k). \quad (16)$$

Если $n = 1$, то тогда формула обращения выражения (16) следует из формулы (14) при $\lambda = a_1$, $\mu = 1$, $y = 1$.

Пусть теперь $n \geq 2$. Приводя в этом случае выражение (16) к общему знаменателю и затем разлагая в полученной дроби полином в числителе на множители типа $1 - x_k x$, имеем

$$\left[1 - \sum_{k=1}^n \theta_k R^*(a_k)\right]^{-1} = \frac{f(-x_k, 1)}{f(-a_k, 1)}. \quad (17)$$

В выражении (17) величины x_k являются корнями следующего полинома:

$$f(x) = \prod_{k=1}^n (x - a_k) \left[1 - \sum_{j=1}^n \theta_j (x - a_j)^{-1}\right]. \quad (18)$$

Если корни полинома (18) различные, то из выражения (17) с помощью формулы (11) при $a_k = -x_k$, $\lambda_k = -a_k$, $\beta_k = \mu_k = 1$, $y = 1$, для элементарных дробей типа (7) (резольвентных интегральных операторов типа Вольтерра) получим формулу (1), в которой коэффициенты A_j определяются теперь следующими аналитическими выражениями:

$$A_j = \prod_{k=1}^n (x_j - a_k) \prod_{m=1}^n (x_j - x_m)^{-1}; \quad j \neq m, \quad (19)$$

а величины x_j являются корнями полинома (18).

Полином (18) позволяет определить величины x_j и в случае, когда $\theta_j = 0$. Если $\theta_j = 0$, то тогда из (18), получим, что $x = a_j$ и из формулы (19) следует, что и $A_j = 0$. Если $\theta_j \neq 0$, то тогда из (18) получим, что $x \neq a_j$ и корни полинома (18) и уравнения (2) совпадают.

Таким образом, теоремы 1—4 позволяют с единой точки зрения получить целый ряд новых формул в алгебре элементарных дробей типов (4)—(7) (интегральных операторов типа Воль-

терра), полезных при построении решений для различных конструктивно-неоднородных или анизотропных конструкций [5, 6, 3, 4] с вязкоупругими элементами.

В качестве примера покажем, что, пользуясь доказанными формулами, возможно дальнейшее развитие работы [5]. Прежде всего заметим следующее. Если в элементарной дроби типа (7) буквой x обозначен интегральный оператор Абея [8], то (7) является представлением Э-оператора [8]. Сохраняя обозначения работы [5], приведем здесь некоторые дальнейшие преобразования формул работы [5], в которых существенно используются доказанные формулы. Так, например, с помощью формул (9) при $\mu_1 = \mu_2 = 1$, (1) и (19) получим формулу (2.4) работы [5], где теперь x_{kv} следует считать корнями полиномов

$$f_v(x) = (x+d_v) \prod_{h=1}^{v-1} (x-x_{h,v-1}) \left[1 - \sum_{h=1}^{v-1} \frac{\theta_{hv}}{(x-x_{h,v-1})} - \frac{\theta_{vv}}{(x+d_v)} \right]. \quad (20)$$

$$\text{Здесь } x_{11} = -d_1, \quad \theta_{12} = (J_2^{-1} - 1)d_2^\circ; \quad \theta_{22} = (J_2^{-1} - 1)d_2^{\circ\circ}, \quad (21)$$

если $v = 2$ и

$$\theta_{kv} = (J_v^{-1} - 1) Q_{h,v-1} \left(1 + \frac{d_v^\circ}{x_{h,v-1} + d_{v-1}} + \frac{d_v^{\circ\circ}}{x_{h,v-1} + d_v} \right); \quad (22)$$

$$\theta_{vv} = (J_v^{-1} - 1) d_v^{\circ\circ} \left(1 - \sum_{h=1}^{v-1} \frac{Q_{h,v-1}}{x_{h,v-1} + d_v} \right),$$

если $v \geq 3$. В (21) и (22) обозначено

$$d_v^\circ = \frac{(\lambda_v - d_{v-1})^2}{d_v - d_{v-1}}; \quad d_v^{\circ\circ} = -\frac{(\lambda_v - d_v)^2}{d_v - d_{v-1}}; \quad \lambda_s = 1; \quad \lambda_t = 0. \quad (23)$$

Коэффициенты Q_{kv} в работе [5] определялись из системы линейных уравнений, а теперь вычисляются по формулам

$$Q_{kv} = (x_{kv} + d_v) \prod_{n=1}^{v-1} (x_{kv} - x_{n,v-1}) \prod_{m=1}^v (x_{kv} - x_{mv})^{-1}; \quad m \neq k. \quad (24)$$

Подставляя (23) и (24) в (22) и пользуясь формулой (15), получим

$$\theta_{kv} = (J_v^{-1} - 1) \frac{(x_{k,v-1} + \lambda_k)^2 \prod_{n=1}^{v-2} (x_{k,v-1} - x_{n,v-2})}{(x_{k,v-1} + d_v) \prod_{m=1}^{v-1} (x_{k,v-1} - x_{m,v-1})}; \quad m \neq k; \quad (25)$$

$$\theta_{vv} = (J_v^{-1} - 1) \frac{(-d_v + \lambda_v)^2 \prod_{n=1}^{v-2} (-d_v - x_{n,v-2})}{\prod_{m=1}^{v-1} (-d_v - x_{m,v-1})}.$$

Представляя теперь (21) и (25) в (20) и снова пользуясь формулой (15), получим

$$f_2(x) = J_2^{-1}[(x+d_1)(x+d_2) - (1 - J_2)(x+\lambda_2)^2],$$

если $\nu = 2$, и

$$f_\nu(x) = J_\nu^{-1}[(x+d_\nu) \prod_{k=1}^{\nu-1} (x - x_{k,\nu-1}) - (1 - J_\nu)(x+\lambda_\nu)^2 \prod_{m=1}^{\nu-2} (x - x_{m,\nu-2})], \quad x_{11} = -d_1,$$

если $\nu \geq 3$.

Для N -слойных сферических сосудов, цилиндрических труб и круглых дисков с чередующимися упругими и вязкоупругими слоями, нагруженных равномерным внешним давлением, выражения для определения реактивных давлений имеют следующий вид [5]:

$$p_j = -(-1)^{N-j} \prod_{k=j-1}^{N-1} \tilde{d}_{2k} \tilde{J}_k^{-1} p_{N+1}; \quad (j=2, 3, \dots, N). \quad (26)$$

Подставляя в (26) вместо \tilde{d}_{2k} , \tilde{J}_k выражения (2.2), (2.4) из работы [5] и опять пользуясь формулой (15), получим

$$p_j = -(-1)^{N-j} \prod_{k=j-1}^{N-1} d_{2k} J_k^{-1} [1 + \sum_{m=1}^{N-1} \kappa_{jm, N-1} \partial_\alpha^*(x_{m, N-1})] p_{N+1},$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{2m, N-1} &= \prod_{r=1}^{N-1} (x_{m, N-1} + \lambda_{r+1}) \prod_{k=1}^{N-1} (x_{m, N-1} - x_{k, N-1})^{-1}; \\ \kappa_{\omega m, N-1} &= \frac{\prod_{r=\omega-1}^{N-1} (x_{m, N-1} + \lambda_{r+1}) \prod_{k=1}^{\omega-2} (x_{m, N-1} - x_{k, \omega-2})}{\prod_{k=1}^{N-1} (x_{m, N-1} - x_{k, N-1})}; \end{aligned}$$

$$k \neq m; \quad \omega = 3, 4, \dots, N-1.$$

В заключение автор искренне благодарит Ю. В. Немировского за постоянное внимание к данной работе и за ценные указания.

Литература

1. Громов В. Г., Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязкоупругости. Докл. АН СССР, 1968, **182**, № 1, 56—59.
2. Ильюшин А. А., Победря Б. Е., Основы математической теории термовязкоупругости. Москва, 1970.
3. Немировский Ю. В., Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязко-упругого материала. В сб. «Динамика сплошных сред», 1970, вып. 4, 50—62.

4. Немировский Ю. В., К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин. *Мех. полимеров*, 1975, № 5, 861—873.
5. Немировский Ю. В., Хейнлоо М. Л., Напряженное состояние в многослойных сферических сосудах, цилиндрических трубах и круглых дисках из линейного вязкоупругого материала. *Мех. полимеров*, 1973, № 1, 110—116.
6. Немировский Ю. В., Хейнлоо М. Л., Напряженное состояние в многослойных цилиндрических трубах из упруго сжимаемого вязкоупругого материала. *Мех. полимеров*, 1974, № 1, 66—74.
7. Победря Б. Е., Термовязкоупругая задача об армированном полом цилиндре. *Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела*, 1971, № 5, 173—178.
8. Работнов Ю. Н., Равновесие упругой среды с последствием, *Прикл. матем. и механ.*, 1948, 12, № 1, 53—62.
9. Работнов Ю. Н., Ползучесть элементов конструкций. Москва, 1966.
10. Розовский М. И., Некоторые свойства специальных операторов, применяемых в теории ползучести. *Прикл. матем. и механ.*, 1959, 23, № 5, 978—980.

Поступило
6 VI 1977

MURDRATSIONAALSETE FUNKTSIOONIDE ALGEBRA JA SELLE RAKENDAMINE VISKOOS ELASTSUSTEORIIA ÜLESANNETES

M. Heinloo

Resümee

Töös on saadud spetsiaalset tüüpi murdratsionaalsete funktsioonide algebra põhitulemused. Need tulemused on kasutatud uute valemite tuletamiseks Volterra tüüpi integraaloperaatorite algebras. Peale selle on tuletatud ka rida uusi abivalemeid, mis on kasulikud lähendite leidmisel viskooselastsete elementidega konstruktiivselt mittehomoogeensetele või anisotroopsetele konstruktsioonidele. Saadud tulemused on illustreeritud näitega.

THE ALGEBRA OF FRACTIONAL RATIONAL FUNCTIONS AND ITS APPLICATION IN THE PROBLEMS OF VISCOELASTICITY

M. Heinloo

Summary

Some fundamental results in the algebra of fractional rational functions have been obtained in the work. The results have been used for the derivation of new formulas in the algebra of integral operators of Volterra and some other formulas which will be useful in finding the solutions for constructive-homogeneous or anisotropic constructions. The results are illustrated with an example.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СОСУДОВ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ И КРУГЛЫХ ДИСКОВ ДЛЯ УМЕНЬШЕНИЯ АМПЛИТУДЫ СКАЧКОВ В ВОЛНАХ НАПРЯЖЕНИЙ

М. Хейнлоо

Тартуский государственный университет

Задача о проектировании многослойных упругих конструкций для уменьшения амплитуды скачков в волнах напряжений возникает при рассмотрении удара о защитную преграду, проектировании защитных экранов от взрывов и защиты конструкций и оборудования от внезапных нагрузок типа взрыва или удара. В данной заметке задача рассматриваемого типа решается относительно многослойных сферических сосудов, цилиндрических труб и круглых дисков, представляющих собой наборы из N связанных между собой концентрических сфер, одноосных труб или круглых дисков из различных материалов. При этом предполагается, что многослойные трубы и диски находятся в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния соответственно. Результаты данной работы могут быть использованы при проектировании взрывных камер сферической или цилиндрической формы.

Пусть в некоторый момент времени равномерное давление, приложенное к внутреннему радиусу рассматриваемых конструкций, терпит скачкообразное изменение. Тогда в волнах напряжений, распространяющихся в рассматриваемых конструкциях, появляются разрывы. На разрывах этих волн в i -ом слое (нумерация начинается от внутреннего радиуса рассматриваемых конструкций) имеем известные динамические соотношения [1]

$$\sigma_{r_i}^+(r_i) = -z_i v_i^+(r_i); \quad \sigma_{r_i}^-(r_i) = z_i v_i^-(r_i). \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{r_i}^+$, $\sigma_{r_i}^-$, v_i^+ и v_i^- — скачки радиального напряжения и скоростей частиц, причем знак «+» обозначает скачки в волне, распространяющейся в i -ом слое от внутреннего радиуса к наружному, а знак «-» — скачки в волне, распространяющейся в i -ом слое в обратном направлении; $z_i = \rho_i c_i$ — механические импедансы материалов; ρ_i — плотности материалов; c_i — ско-

рости распространения волн в слоях; $\alpha_i \leq r_i \leq \alpha_{i+1}$ — текущие радиусы; α_i, α_{i+1} — внутренний и внешний радиусы i -го слоя; $i = 1, 2, \dots, N$.

Пользуясь условиями непрерывности радиальных напряжений и скоростей частиц на поверхностях раздела слоев, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений ($k = 1, 2, \dots, N - 1$);

$$\begin{aligned} \sigma_{r_{k+1}}^+(\alpha_{k+1}) + \sigma_{r_k}^-(\alpha_{k+1}) &= \sigma_{r_k}^+(\alpha_{k+1}); \\ z_k \sigma_{r_{k+1}}^+(\alpha_{k+1}) - z_{k+1} \sigma_{r_k}^-(\alpha_{k+1}) &= z_{k+1} \sigma_{r_k}^+(\alpha_{k+1}). \end{aligned}$$

Разрешив систему (2) по отношению к $\sigma_{r_{k+1}}^+(\alpha_{k+1})$, имеем

$$\sigma_{r_{k+1}}^+(\alpha_{k+1}) = \frac{2z_{k+1}}{z_k + z_{k+1}} \sigma_{r_k}^+(\alpha_{k+1}). \quad (3)$$

В работе [1] показано, что в рассматриваемых конструкциях имеем

$$\sigma_{r_i}^+ = K_i^+ r_i^{-q/2}; \quad \sigma_{r_i}^- = K_i^- r_i^{-q/2}, \quad (4)$$

где $q = 1$ в случае трубы и диска и $q = 2$ в случае сферы; K_i^+ и K_i^- — константы. Из (4) следует, что

$$\sigma_{r_i}^+(\alpha_{i+1}) = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \right)^{q/2} \sigma_{r_i}^+(\alpha_i). \quad (5)$$

Пользуясь соотношениями (3), (5), получим

$$\sigma_{r_N}^+(\alpha_{N+1}) = m \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{N+1}} \right)^{q/2} \sigma_{r_1}^+(\alpha_1), \quad (6)$$

где

$$m = 2^{N-1} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{z_{k+1}}{z_k + z_{k+1}}. \quad (7)$$

Здесь при $N = 1$ следует принять

$$\prod_{k=1}^{N-1} \frac{z_{k+1}}{z_k + z_{k+1}} = 1.$$

Формула (6) определяет изменение скачка радиального напряжения на разрыве волны, который проходит рассматриваемые конструкции от внутреннего радиуса к наружному радиусу. Заметим, что коэффициент m зависит от порядка расположения материалов в наборной конструкции.

Таким образом, для решения поставленной задачи нужно подобрать материалы в слоях так, чтобы при заданных значениях внутреннего и внешнего радиусов коэффициент m был бы как можно меньше. Из (7) следует, что минимальное значение коэффициента m достигается в рассматриваемых многослойных конструкциях с нечетным количеством слоев, в которых чередуются всего два материала, причем

$$z_i = \begin{cases} z_{\max} & \text{для нечетного слоя,} \\ z_{\min} & \text{для четного слоя,} \end{cases}$$

где z_{\max} и z_{\min} — максимальное и минимальное значения механических импедансов, которые могут быть реализованы физически. В этом случае коэффициенту m можно придать следующий вид:

$$m = \left(\frac{2\sqrt{z_{\min}z_{\max}}}{z_{\max} + z_{\min}} \right)^{N-1}$$

В заключение автор благодарит Ю. В. Немировского, по инициативе которого была решена настоящая задача.

Литература

1. Джоу Пей Чи, Кеннг., Единое рассмотрение цилиндрических и сферических волн методом характеристик. Тр. Америк. о-ва ниж.-мех., Прикл. мех. 1966, 33, № 1, 157—166.

Поступило
16 I 1978

MITMEKIHILISTE SFÄÄRILISTE ANUMATE, SILINDRILISTE TORUDE JA ÜMMARGUSTE KETASTE PROJEKTEERIMINE PINGELAINETE KATKEVUSTE AMPLITUUDIDE VÄHENDAMISEKS

M. Heinloo

Resümee

Käesolevas töös uuritakse pingelainete katkevuste amplituudide muutumist katkevuste levimisel mitmekihilistes sfäärilistes anumates, silindrilistes torudes ja ümmargustes ketastes. On leitud tingimused millede täitmisel antud konstruktsioone läbivate pingelainete katkevuste amplituudid maksimaalselt vähenevad.

THE DESIGN OF THE MULTILAYER SPHERICAL VESSELS, CYLINDRICAL TUBES AND CIRCULAR DISCS FOR THE DECREASE OF THE AMPLITUDES OF THE DISCONTINUITIES ON THE STRESS WAVES

M. Heinloo

Summary

In this paper the change of the amplitude of the discontinuities on the stress waves, propagating across the multilayer spherical vessels, cylindrical tubes and circular discs is examined. The conditions in which the discontinuities on the stress waves, propagating across the given constructions, have maximum decrease have been fixed.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМОЖНОЙ МОЩНОСТИ

Г. Гольст и О. Сильде

Таллинский политехнический институт

§ 1. Общие замечания

В настоящей статье выводятся условия дифференциальных принципов механики из соотношений, полученных на основе уравнения возможной мощности (см. [1, 2]).

Индексы в тексте принимают следующие значения:

- 1) $j = 0, 1, \dots, s$ или $j = 0, 1, \dots, m$, где s — число степеней свободы механической системы, m — произвольное число;
- 2) $k = 0, 1, \dots, n$, где n — число обобщенных координат;
- 3) $p = 1, 2, \dots, s$ или $p = 1, 2, \dots, m$ (как в п. 1);
- 4) $\alpha = 1, 2, \dots, l$, где l — число уравнений связей;
- 5) $q = 0, 1, \dots, h$, где h — наивысший порядок производной от параметра скорости.

Допустим, что положение механической системы определяется с помощью обобщенных координат q^1, q^2, \dots, q^n . Для нестационарных систем следует учитывать время t , которое обозначим в виде координаты $q^0 = q^0(t)$, где q^0 есть заданная функция времени. Тогда радиус-вектор i -той точки будет:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q^0, q^1, \dots, q^n).$$

В неголономных системах $n \neq s$, т. е. число степеней свободы не равно числу обобщенных координат. Поэтому, если это возможно, учтем параметры скорости v^p , которые будем считать независимыми и равными числу степеней свободы s . Выражаем через них вектор скорости i -той точки:

$$\mathbf{v}_i = v^j \mathbf{u}_{ij}. \quad (1)$$

Здесь член с v^0 , являющийся заданной функцией времени, учитывает влияние нестационарной связи.

Пусть обобщенные скорости q^k выражаются линейно через v^j (точка означает дифференцирование по времени):

$$q^k = A^{kj} v^j, \quad A^{kj} = A^{kj}(q^0, q^1, \dots, q^n). \quad (2)$$

Если на систему не наложено никаких связей, кроме тех, которые были учтены при выборе обобщенных координат, можно положить $q^k = v^k$.

Чтобы не останавливаться на характере выбранных параметров (обобщенные или квазискорости), будем называть v^j квазискоростями или просто параметрами скорости, хотя среди них могут быть и обобщенные скорости (например, если $v^j = q^j$).

Наряду с параметрами v^j введем еще квазикоординаты $v^j = \pi^j$. Среди них могут быть и обобщенные координаты в зависимости от характера v^j . В дальнейшем под v^j будем подразумевать и более общие, не обязательно независимые параметры скорости. Тогда их число будем обозначать буквой m . Если, например, $q^j = v^j$, то $m = n$.

Введем выражение возможной скорости:

$$\{v_i\} = \{v^j\} u_{ij}, \quad \{v^0\} = v^0. \quad (3)$$

Если v^p независимы, то $\{v^p\}$ — произвольные числа.

Еще учтем виртуальную скорость:

$$\{v_i\}^* = \{v^p\}^* u_{ip}. \quad (4)$$

Виртуальная скорость получается из возможной при условии, что в рассматриваемый момент времени связи становятся стационарными, т. е. $\{v^0\}^* = 0$.

Уравнение возможной мощности имеет вид (точка есть знак скалярного произведения):

$$\Sigma m_i a_i \cdot \{v_i\} = \Sigma F_i \cdot \{v_i\}. \quad (5)$$

Символ Σ означает суммирование по всем точкам системы, т. е. по индексу i . Учтя (3) и обозначая

$$\Sigma m_i a_i \cdot u_{ij} = E_j, \quad \Sigma F_i \cdot u_{ij} = Q_j, \quad (6)$$

получим

$$(E_j - Q_j) \{v^j\} = 0. \quad (7)$$

Из уравнения (7) получается уравнение виртуальной мощности путем отбрасывания члена с $\{v^0\}$:

$$(E_p - Q_p) \{v^p\}^* = 0, \quad (8)$$

или по аналогии с уравнением (5)

$$\Sigma m_i a_i \cdot \{v_i\}^* = \Sigma F_i \cdot \{v_i\}^*, \quad (9)$$

или, перенеся члены в одну сторону,

$$\Sigma (m_i a_i - F_i) \cdot \{v_i\}^* = 0. \quad (10)$$

Если v^p независимы, то из (7) и (8) получаются дифференциальные уравнения движения механической системы: $E_p = Q_p$. Из (7) имеем еще уравнение $E_0 = Q_0$, которое можно использовать для определения реакции нестационарной связи R_0 .

§ 2. Связи и уравнения движения

Допустим, что на систему налагаются связи самого общего вида, неучтенные в предыдущих формулах и уравнениях:

$$f_{\alpha}(q^k, v^j, v^j, \dots, v^{j(h\alpha)}) = 0, \quad (11)$$

$$v^{j(q)} = \frac{dq^j}{dt^q}, \quad (h\alpha) = (q)_{\max}.$$

В дальнейшем будем v^p рассматривать как независимые параметры скорости до наложения связей (11).

Предполагая, что связи, определенные уравнениями (11), идеальные, получим по формуле (28) статьи [2] следующие дифференциальные уравнения движения:

$$E_p = Q_p + \sum_{\alpha=1}^l \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v^p(h\alpha)}. \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) дают $l + s$ уравнений для определения s неизвестных v^p и l неизвестных λ_{α} . Если v^p зависимы, то $p = 1, 2, \dots, m$.

Из (11) по формуле (30) статьи [2] получаются для $\{v^p\}^*$ следующие условия:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v^p(h\alpha)} \{v^p\}^* = 0. \quad (13)$$

Из уравнений (13) можно выразить l виртуальных скоростей через остальные $s - l$ (или $m - l$) и подставить в уравнение (8). Так как остающиеся $\{v^p\}^*$ независимы, получим $s - l$ дифференциальных уравнений, к которым прибавляются l уравнений связей (11).

§ 3. Дифференциальные принципы

Для перехода к дифференциальным принципам нам следует иметь в виду те из вышеприведенных уравнений, в которые входят виртуальные скорости, именно (4), (8), (9), (10) и (13), так как виртуальная скорость получается из возможной скорости условием $\{v^0\}^* = 0$, а вариации получаются при условии $\delta t = 0$. Таким образом, между ними можно установить следующие соответствия:

$$\{v_i\}^* \rightarrow \delta r_i \quad \text{или} \quad \{v_i\}^* dt = \delta r_i, \quad (14)$$

$$\{v^p\}^* \rightarrow \delta \pi^p \quad \text{или} \quad \{v^p\}^* dt = \delta \pi^p, \quad (15)$$

где δr_i — называется виртуальным перемещением i -той точки. Тогда, пользуясь соответствием (14), равенство (4) дает:

$$\delta r_i = \delta \pi^p u_{ip}, \quad (16)$$

а уравнения (9) и (10):

$$\sum (m_i a_i - F_i) \cdot \delta r_i = 0. \quad (17)$$

Из уравнения (8), пользуясь соответствием (15), получим:

$$(E_p - Q_p) \delta \pi^p = 0. \quad (18)$$

Но уравнения (17) и (18) суть различные выражения для общего уравнения динамики.

Аналогично из уравнений (13) получим:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{p(h\alpha)}} \delta \pi^p = 0. \quad (19)$$

В дифференциальные принципы не входят уравнения (19), так как те не выводятся путем процесса варьирования.

Для введения в принципы механики уравнений связей (11) поступим следующим образом. Выберем число $h \geq (h\alpha)_{\max}$ (максимальное среди чисел $(h\alpha)$) и путем дифференцирования уравнений (11) приведем их к виду, где наибольшая производная от скорости будет $v^{p(h)}$:

$$F_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{p(h\alpha)}} v^{p(h)} + \Phi_\alpha(q^k, v^p, v^p, \dots, v^{p(h-1)}) = 0.$$

Вычислим вариации:

$$\delta F_\alpha = \frac{\partial F_\alpha}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial F_\alpha}{\partial v^p} \delta v^p + \dots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial v^{p(h)}} \delta v^{p(h)} = 0.$$

Здесь следует иметь в виду, что

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial v^{p(h)}} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{p(h\alpha)}}.$$

Дальше ставится требование:

$$\delta q^k = \delta v^p = \dots = \delta v^{p(h-1)} = 0. \quad (20)$$

Тогда получим уравнения:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{p(h\alpha)}} \delta v^{p(h)} = 0. \quad (21)$$

Основное уравнение (8) получит вид

$$(E_p - Q_p) \delta v^{p(h)} = 0. \quad (22)$$

Уравнения (21) и (22) содержат величины в сущности такие же, что (13) и (9): вместо $\{v^p\}^*$ стоит $\delta v^{p(h)}$, что дает те же самые решения. Вместо (22) можем аналогично уравнению (9) записать:

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i^{(h)} = \sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i^{(h)} \quad (23)$$

или, аналогично уравнению (10):

$$\sum (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i^{(h)} = 0. \quad (23a)$$

Принцип, базирующийся на условиях (20), (21), (22) и (23), называется дифференциальным принципом $(h+2)$ -го порядка, если общее уравнение динамики считать принципом первого порядка. Так при $h=0$ получается принцип Сулова—Журдена, при $h=1$ — принцип Гаусса и т. д. Однако по виду этих выра-

жений нельзя сказать, каково значение полученных уравнений (иногда полагали, что эти уравнения даются для обобщенных идеальных связей). В дальнейшем покажем, что полученное решение соответствует в обыкновенном смысле идеальным связям.

§ 4. Подготовка к выводу основных зависимостей

Нашей задачей является вывод уравнений (21), (22), (23) из уравнений (8), (9), (13) или (19). Для этого получим некоторые выражения вариаций радиуса-вектора $\delta \mathbf{r}_i$ и его производных до $(h+1)$ -го порядка. Они получаются аналогично вычислению дифференциалов при условии $\delta t = 0$. Известно, что

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \pi^p \mathbf{u}_{ip}. \quad (24)$$

Здесь $\delta \pi^p$ — независимые вариации, базисные векторы \mathbf{u}_{ij} также независимы. Следовательно, условие $\delta \mathbf{r}_i = 0$ дает:

$$\delta \pi^p = 0. \quad (25)$$

Проведем ряд вычислений. Для базисного вектора получим

$$\delta \mathbf{u}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{u}_{ij}}{\partial \pi^p} \delta \pi^p = 0.$$

Выражаем производные от \mathbf{u}_{ij} :

$$\mathbf{u}'_{ij} = \frac{\partial \mathbf{u}_{ij}}{\partial \pi^p} v^p; \quad \mathbf{u}^{(q)}_{ij} = \mathbf{u}^{(q)}_{ij}(q^k, v^j, \dots, v^{j(q-1)}). \quad (26)$$

Варьируя выражение (1) и учтя (25), имеем

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{v}_i = \delta v^p \mathbf{u}_{ip} + v^p \delta \mathbf{u}_{ip} = \delta v^p \mathbf{u}_{ip}.$$

Если $\delta \mathbf{v}_i = 0$, отсюда следует, что

$$\delta v^p = \delta \pi^p = 0. \quad (27)$$

Дифференцируя q раз выражение (1), получим

$$\mathbf{r}^{(q+1)}_i = v_i^{(q)} = v^{p(q)} \mathbf{u}_{ip} + \Phi_q(q^k, v^j, \dots, v^{j(q-1)}),$$

откуда, варьируя, следует

$$\delta \mathbf{r}^{(q+1)}_i = \delta v_i^{(q)} = \delta v^{p(q)} \mathbf{u}_{ip} + v^{p(q)} \delta \mathbf{u}_{ip} + \delta \Phi_q = \delta v^{p(q)} \mathbf{u}_{ip}, \quad (28)$$

если допустить, что

$$\delta q^k = \delta v^p = \dots = \delta v^{p(q-1)} = 0. \quad (29)$$

Условия (29) будут выполнены в связи с условиями

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{v}_i = \dots = \delta v_i^{(q-1)} = 0. \quad (30)$$

Выражение (28) для $\delta \mathbf{r}^{(q+1)}_i$ следует тогда из (26) и (27) последовательным дифференцированием. Условие $\delta q^k = 0$ получится из равенств (32). Если положить $q = h$, то выражение (28) дает

$$\delta \mathbf{r}^{(h+1)}_i = \delta v_i^{(h)} = \delta v^{p(h)} \mathbf{u}_{ip} = \delta \pi^{p(h+1)} \mathbf{u}_{ip}, \quad (31)$$

где вариации $\delta v^{p(h)} = \delta \pi^{p(h+1)}$ можно теперь считать произвольными числами. Из равенства (2) получим

$$\delta q^k = A^k_p \delta \pi^p = 0.$$

Дифференцируя (2) до порядка $h + 1$ и варьируя, подобно предыдущему, получим

$$\delta q^k = \delta q^{h^*} = \dots = \delta q^{h(h)} = 0, \quad (32)$$

$$\delta q^{h(h+1)} = A^k_p \delta \pi^{p(h+1)}. \quad (33)$$

Полученные равенства остаются верными и для всех параметров скорости, зависящих линейно от v^j .

Сравнение формул (24) и (31) показывает, что если (при выполнении условий (30) и $q = h$) в выражениях заменить δr_i на $\delta r_i^{(h+1)}$, то в них $\delta \pi^p$ заменяется на $\delta \pi^{p(h+1)}$, а все остальное остается без изменения. Поэтому, если уравнения

$$\Sigma \dot{f}_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (34)$$

заменить уравнениями

$$\Sigma \dot{f}_i \cdot \delta r_i^{(h+1)} = 0, \quad (35)$$

то все следствия из них остаются неизменными. Так как любой вектор $\delta a_i = \delta a^p u_{ip}$ можно заменить на $\delta a_i = k \delta r_i$, где k — постоянная, и представить как виртуальное перемещение, то можно и уравнения (35) заменить уравнениями (34). Это означает, что из условий любого дифференциального принципа можно обратно прийти к условиям, полученным на основе уравнения возможной мощности.

§ 5. Выводы основных принципов механики

Приступим к выводу дифференциальных принципов механики. Из (17) на основании (34) и (35) получим:

$$\Sigma (m_i a_i - F_i) \cdot \delta r_i^{(h+1)} = 0, \quad (36)$$

или

$$\Sigma (m_i a_i - F_i) \cdot \delta v_i^{(h)} = 0, \quad (36a)$$

что соответствует уравнению (23a). Подставляя в (36a) вместо $\delta v_i^{(h)}$ выражение (31) и учтя (6), получим уравнение (22). Таким образом, выведены основные уравнения дифференциального принципа $(h + 2)$ -го порядка. Отметим, что все уравнения, которыми мы пользовались при выводе, получены из уравнения возможной мощности (5).

Теперь учтем уравнения связей (11). Обозначим реакцию связи, соответствующую уравнению $f_\alpha = 0$, символом $R_{i\alpha}$. Тогда условие идеальности связи будет:

$$\Sigma R_{i\alpha} \cdot \delta r_i = 0, \quad (37)$$

т. е. работа реакции связи на виртуальном перемещении равна нулю. Заменяв δr_i выражением (24), аналогично (6) получим:

$$\Sigma R_{i\alpha} \cdot u_{ip} \delta \pi^p = R_{p\alpha} \delta \pi^p = 0. \quad (38)$$

Из уравнений (12) видно, что $R_{p\alpha} = \lambda_\alpha \partial f_\alpha / \partial v^{p(h\alpha)}$ (здесь по α не суммируется), и, значит, из (38) следует, что

$$\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{p(h\alpha)}} \delta v^p = 0.$$

Сокращая на λ_α , получим уравнения (19), которые выведены из уравнения (13).

На основании (34) и (35) из уравнения (37) имеем:

$$\Sigma R_{i\alpha} \cdot \delta v_i^{(h)} = 0,$$

откуда, после замены $\delta v_i^{(h)}$ его выражением в (31), получим:

$$\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial v^{p(h\alpha)}} \delta v^{p(h)} = 0,$$

что после сокращения на λ_α дает уравнение (21).

Литература

1. Сильде О. М., Тийкма Б. А., Метод уравнения возможных мощностей. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1970, А293, 95—106.
2. Сильде О., Хайтин А., Движение механических систем при учете уравнений связей общего вида. Настоящий сборник, стр. 95—100.

Поступило
14 I 1978

MEHAANIKA DIFERENTSIAALPRINTSIIBID VÖIMALIKU VÖIMSUSE VÖRRANDI BAASIL

G. Golst ja O. Silde

Resümee

Käesolevas artiklis tuletatakse diferentsiaalprintsipiide jaoks tingimused võimaliku võimsuse võrrandi ja sellest saadud järelduste alusel. Tuletamine põhineb võrranditel (12) ja (13), mis on saadud võimaliku võimsuse võrrandi teoorias.

DIFFERENTIALPRINZIPIEN DER MECHANIK AUF GRUND DER GLEICHUNG DER MÖGLICHEN LEISTUNG

G. Golst und O. Silde

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel werden die Differentialprinzipien der Mechanik auf Grund der Gleichung der möglichen Leistung abgeleitet. Dazu werden die aus der Theorie der möglichen Leistung abgeleiteten Gleichungen (12) und (13) angewendet.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТИПА ГАМИЛЬТОНА

Х. Рельвик

Таллинский политехнический институт

Уравнения типа Гамильтона в случае неголономных координат обычно даются в форме

$$\begin{aligned} (\pi^j)' &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ (p_j)' &= -\frac{\partial H}{\partial \pi_j} + \frac{\partial H}{\partial p_r} \gamma^s_{rj} p_s \end{aligned} \quad (1.1)$$

(см. [1]), где $H = p_j(\pi^j)' - L$ — функция Гамильтона, а γ^s_{rj} — коэффициенты (объекта) неголономности, вычисление которых часто связано с большим трудом. В настоящей статье получены аналогичные уравнения без коэффициентов неголономности. Их можно получить или непосредственно при помощи аналогов кинетической энергии, или же составляя из последних новые функции. Полученные уравнения применимы как в случае потенциальных, так и непотенциальных сил. Изучается и возможность учета уравнений связей, содержащих производные по времени от параметров скорости, причем эти производные могут быть сколь угодно высокого порядка.

§ 1. Голономные системы

1. Пусть скорость произвольной точки рассматриваемой механической системы выражена в виде $v_i = v^j u_{ij}$ ($j = 0, 1, \dots, s$) (см. [3, 4, 5]), где v_j — общие для всей системы параметры скорости, а u_{ij} — соответствующие им базисные векторы (свои для каждой точки системы), которые в общем случае являются функциями обобщенных координат.¹ При этом время t включено в состав координат, чтобы получить более симметричные

¹ В первом параграфе по индексу $j = 0, 1, \dots, s$ производится суммирование по обычному правилу суммирования по повторяющимся индексам.

формулы и не надо было бы при дифференцировании каждый раз учитывать время t особо: $q^0 = t$ или $q^0 = q^0(t)$. Тогда уравнение возможной мощности (см. [3, 5]) можно записать следующим образом:

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} \{v^j\} = Q_j \{v^j\}, \quad (1.2)$$

где $\{v^j\}$ — возможные параметры скорости, т. е. символ $\{v^j\}$ обозначает совокупность всех возможных значений истинных параметров скорости v^j при данных условиях задачи, а суммирование по i производится по всем точкам системы.

В более общем случае (см. [3]) уравнение (1.2) приобретает вид

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} \{v^{j(n)}\} = Q_j \{v^{j(n)}\}, \quad (1.2')$$

где $v^{j(n)}$ — производная n -го порядка по времени от v^j , а $\{v^{j(n)}\}$ — ее возможное значение.

Отметим, что в литературе термин «возможная скорость» применяется и в другом смысле.

Из уравнения возможной мощности (1.2) или из уравнения (1.2') ввиду независимости и произвольности величин в фигурных скобках можно выписать дифференциальные уравнения движения системы:

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} = Q_j. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.3) будут в дальнейшем исходными. Отметим, что в системе (1.3) имеется $s + 1$ уравнений, где s — количество степеней свободы системы. Уравнения (1.3) при $j = 1, 2, \dots, s$ совпадают с соответствующими уравнениями, полученными другим путем (например, из уравнений Лагранжа II рода или из уравнений Больцмана—Гамеля и т. п.), а при $j = 0$ получаем уравнение для определения нестационарной реакции.

2. Введем функции

$$V^{l,n} = \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i^{(l)} \cdot \mathbf{v}_i^{(n)}, \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{v}_i^{(n)} = v^{j(n)} \mathbf{u}_{ij} + n v^{j(n-1)} \mathbf{u}_{ij} + \dots + v^j \mathbf{u}_{ij}^{(n)}. \quad (1.5)$$

Функции (1.4) будем называть аналогами кинетической энергии, так как в частном случае $l = n = 0$ они дают выражение кинетической энергии системы $V^{0,0} = \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i / 2 = T$. В другом частном случае $l = n = 1$ функции (1.4) выражают энергию ускорения, т. е. $V^{1,1} = \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i / 2 = S$. Наряду с полными выражениями (1.4) часто удобно, а иногда и необходимо, пользоваться их укороченными формами

$$V_1^{l,n} = \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i^{(l)} \cdot v^{j(n)} \mathbf{u}_{ij}, \quad (1.6)$$

где из выражения (1.5) сохраняется только первый член $v^{j(n)} \mathbf{u}_{ij}$.

В дальнейшем нужны следующие производные от функций (1.4) и (1.6):

$$\frac{\partial(KV_1^{1,n})}{\partial v^{j(n)}} = \frac{\partial(KV_1^{1,n})}{\partial v^{j(n)}} = \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} \quad (n \geq 1); \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial(KV_1^{0,n})}{\partial v^{j(n)}} = \frac{\partial(KV_1^{0,n})}{\partial v^{j(n)}} = \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} \quad (n \geq 0); \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(KV_1^{0,n})}{\partial v^{j(n)}} = \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} + \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} \quad (n \geq 0), \quad (1.9)$$

где

$$K = \begin{cases} 2, & \text{если } n > l, \\ 1, & \text{если } n = l. \end{cases} \quad (1.10)$$

Из равенств (1.7)–(1.9) получим

$$\sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} = \frac{d}{dt} \frac{\partial(KV_1^{0,n})}{\partial v^{j(n)}} - \frac{\partial(KV_1^{1,n})}{\partial v^{j(n)}}. \quad (1.11)$$

3. Теперь мы можем переписать уравнения (1.3) при помощи аналогов кинетической энергии:

$$\frac{\partial(KV_1^{1,n})}{\partial v^{j(n)}} = Q_j \quad \text{или} \quad \frac{\partial(KV_1^{1,n})}{\partial v^{j(n)}} = Q_j. \quad (1.12)$$

Уравнения (1.11) являются обобщениями уравнений Аппеля.

4. Введем новые переменные (обобщенные импульсы) по формуле

$$p_j = \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_{ij}. \quad (1.13)$$

Тогда $p_j = \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} + \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_{ij}$ и уравнения (1.3) таковы

$$p_j - \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_{ij} = Q_j. \quad (1.14)$$

Уравнения (1.13) и (1.14) вместе образуют систему дифференциальных уравнений первого порядка. Они применимы как в обобщенных, так и в неголономных координатах, так как исходными величинами были параметры скорости v^j , а не обобщенные координаты точек системы. Выбранные же произвольно параметры скорости v^j могут оказаться и квазискоростями.

5. Пользуясь выражениями (1.7)–(1.11) в системе уравнений (1.13) и (1.14), получим

$$p_j = \frac{\partial(2V_1^{0,n})}{\partial v^{j(n)}}; \quad (1.15)$$

$$p_j + \frac{\partial(2V_1^{1,n})}{\partial v^{j(n)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(2V_1^{0,n})}{\partial v^{j(n)}} = Q_j \quad (n \geq 2)$$

или в частном случае

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial v^j}; \quad (1.15')$$

$$p_j + \frac{\partial S}{\partial v^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v^j} = Q_j \quad (j=0, 1, \dots, s).$$

Этим уравнения типа Гамильтона составлены, но они не имеют общеизвестного вида, так как в уравнениях $p_j = \partial T / \partial v^j$ величины p_j выражаются через v^h , а не наоборот. Следует отметить, что остальные из уравнений (1.15) можно заменить на

$$p_j' - \frac{\partial(2V_1^{l,n})}{\partial v^{j(n)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(2V_1^{0,n})}{\partial v^{j(n)}} = -Q_j. \quad (1.16)$$

Наконец отметим, что уравнения (1.15) могут иметь и следующий вид, где r , l и n друг от друга не зависят:

$$p_j = \frac{\partial(2V_1^{0,l})}{\partial v^{j(0)}}; \quad (1.17)$$

$$p_j' + \frac{\partial(2V_1^{l,n})}{\partial v^{j(n)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(2V_1^{0,r})}{\partial v^{j(r)}} = Q_j$$

$(r, l = 1, 2, \dots; n = 2, 3, \dots).$

6. Рассмотрим случай потенциальных сил. Известно, что потенциальная энергия системы не зависит от параметров скорости, т. е. из ее производных по времени получим $\partial \Pi / \partial \pi^j = \partial \Pi^{(n+1)} / \partial v^{j(n)}$ и обобщенная сила

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial \pi^j} = - \frac{\partial \Pi^{(n+1)}}{\partial v^{j(n)}}. \quad (1.18)$$

Если теперь ввести обозначение

$$A^{l,n} = KV_1^{l,n} + \Pi^{(n+1)}, \quad (1.19)$$

то уравнения (1.12) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial A^{l,n}}{\partial v^{j(n)}} = 0, \quad (1.20)$$

а уравнения (1.13) и (1.14) дают вместо (1.7) систему

$$p_j = \frac{\partial(2V_1^{0,l})}{\partial v^{j(0)}}; \quad (1.21)$$

$$p_j' + \frac{\partial A^{l,n}}{\partial v^{j(n)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(2V_1^{0,r})}{\partial v^{j(r)}} = 0,$$

где r , l и n друг от друга не зависят.

7. Придадим уравнениям (1.13) и (1.14) традиционный вид уравнений Гамильтона. Для этого вводим новую функцию

$$H = p_j^{(n+1)} v^j + p_j v^{j(n)} - KV_1^{l,n} \quad (n \geq 1). \quad (1.22)$$

Тогда мы получим систему уравнений

$$v^j = \frac{\partial H}{\partial p_j^{(n+1)}}; \quad (1.23)$$

$$p_j' = Q_j + \frac{\partial H}{\partial v^{j(n)}} \quad (n = 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots, s).$$

$\{v^{j(n)}\}$. Отсюда ввиду независимости величин в фигурных скобках получим

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_{ij} = Q_j^*, \quad (2.4)$$

где новые обобщенные силы

$$Q_j^* = Q_j + \sum_r B_j^r Q_r \quad (2.5)$$

и новые базисные векторы

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{u}_{ij} + \sum_r B_j^r \mathbf{u}_{ir}, \quad (2.6)$$

а по r производится здесь и в дальнейшем суммирование в пределах от $l+1$ до s . Таким образом учет уравнений связей (2.1) равносильно изменению базиса \mathbf{u}_{ij} ($j = 0, 1, \dots, s$) на базис \mathbf{e}_{ij} ($j = 0, 1, \dots, l$).

Уравнения (2.4) вместе с уравнениями связей (2.1) являются дифференциальными уравнениями движения неголономной механической системы. Они применимы непосредственно, но часто их пишут иначе при помощи каких-либо известных функций.

10. Суммы $\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij}$ имеют много различных видов. Имея в виду уравнения типа Гамильтона, применяем для уравнений (2.4) форму (1.15) или (1.15')

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial(KV_1^{0,n})}{\partial v^{j(n)}}; & p_r &= \frac{\partial(KV_1^{0,r})}{\partial v^{r(n)}}; \\ \left[p_j + \frac{\partial(KV_1^{1,n})}{\partial v^{j(n)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(KV_1^{0,n})}{\partial v^{j(n)}} \right] + & & & \\ + \sum_r B_j^r \left[p_r + \frac{\partial(KV_1^{1,n})}{\partial v^{r(n)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(KV_1^{0,n})}{\partial v^{r(n)}} \right] & = & Q_j + \sum_r B_j^r Q_r. \end{aligned} \quad (2.7)$$

11. Подставим зависимые величины (2.2) в выражение скорости $\mathbf{v}_i = v^j \mathbf{u}_{ij}$. Получим

$$\mathbf{v}_i^* = v^{j(n)} \mathbf{u}_{ij} + \sum_r v^{j(n)} B_j^r \mathbf{u}_{ir} + (\dots),$$

где скобки (...) здесь и в дальнейшем не содержат производных $v^{j(n)}$ и звездочка * будет указывать, что зависимые величины подставлены. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^*}{\partial v^{j(n)}} = \mathbf{u}_{ij} + \sum_r B_j^r \mathbf{u}_{ir} = \mathbf{e}_{ij}. \quad (2.8)$$

При обозначениях $2V_1^{*0,n} = \sum m_i \mathbf{v}_i \cdot v^{j(n)} \mathbf{u}_{ij}$ и $2V_1^{*1,n} = \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot v^{j(n)} \mathbf{u}_{ij}$, учтя (2.8), получим

$$\frac{\partial(KV_1^{*1,n})}{\partial v^{j(n)}} = Q_j^*, \quad (2.9)$$

где Q_j^* дается формулой (2.5). Следовательно, уравнения (1.12) сохраняют свой вид и в случае неголономных систем.

То же самое можно сказать относительно уравнений (1.20). Действительно, если обозначить $A^{*1,n} = KV_1^{*1,n} + \Pi^{*(n+1)} = = K \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot v^{j(n)*} \mathbf{u}_{ij} + (\partial \Pi / \partial \pi^j) v^{j(n)*} + (\dots)$, где $\partial \Pi / \partial \pi^j = -Q_j$,

то вычисления дают

$$\frac{\partial A^{*1,n}}{\partial v^{j(n)}} = 0. \quad (2.10)$$

Теперь из уравнений (1.13) и (1.14) получаем

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial(KV_1^{0,n})}{\partial v^{j(n)}}; & p_r &= \frac{\partial(KV_1^{0,n})}{\partial v^{r(n)}}; \\ p_j^* + \frac{\partial(KV_1^{*1,n})}{\partial v^{j(n)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(KV_1^{*0,n})}{\partial v^{j(n)}} &= Q_j^*, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $p_j^* = p_j + \sum_r B_j^r p_r + \sum_r B_j^r p_r$.

12. Тот же результат можно получить, подставляя зависимые величины (2.2) еще раньше, т. е. определяя обобщенные импульсы p_j^* через аналоги кинетической энергии $V_1^{*0,n}$:

$$p_j^* = \frac{\partial(KV_1^{*0,n})}{\partial v^{j(n)}} = p_j + \sum B_j^r p_r.$$

Тогда получим уравнения

$$\begin{aligned} p_j^* &= \frac{\partial(KV_1^{*0,n})}{\partial v^{j(n)}}; \\ p_j^* + \frac{\partial(KV_1^{*1,n})}{\partial v^{j(n)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(KV_1^{*0,n})}{\partial v^{j(n)}} &= Q_j^*. \end{aligned} \quad (2.11')$$

13. Введем теперь функцию вида (1.22), учитывая уравнения связей (2.2):

$$H^* = p_j^{(n+1)*} v^j + p_j^* v^{j(n)} - KV_1^{*1,n*}. \quad (2.12)$$

Подставляя зависимые величины (2.2) в функцию $2V_1^{0,n}$, получим

$$2V_1^{*0,n} = \sum m_i v_i \cdot v^{j(n)} e_{ij} + (\dots).$$

Отсюда

$$p_j^* = \frac{\partial(KV_1^{*0,n})}{\partial v^{j(n)}} = p_j + \sum B_j^r p_r$$

и уравнения (1.13) и (1.14) дают

$$v^j = \frac{\partial H^*}{\partial p_j^{(n+1)*}}; \quad (2.13)$$

$$p_j^* = \frac{\partial H^*}{\partial v^{j(n)}} + Q_j^*.$$

14. В случае потенциальных сил функция (2.12) получит вид

$$H^* = p_j^{(n+1)*} v^j + p_j^* v^{j(n)} - A^{*1,n}, \quad (2.14)$$

где

$$A^{*1,n} = 2V_1^{*1,n} + \Pi^{*(n+1)}.$$

Здесь

$$\Pi^{*(n+1)} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \pi^j} + \sum_r B_{j^r} \frac{\partial \Pi}{\partial \pi^r} \right) v^{j(n)} + (\dots),$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Pi^{*(n+1)}}{\partial v^{j(n)}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \pi^j} + \sum_r B_{j^r} \frac{\partial \Pi}{\partial \pi^r} = -Q_j - \sum_r B_{j^r} Q_r = -Q_j^*$$

и уравнения (1.13) и (1.14) принимают вид

$$\begin{aligned} v^j &= \frac{\partial H^{*'}}{\partial p_j^{(n+1)*}}; \\ p_j^{*'} &= \frac{\partial H^{*'}}{\partial v^{j(n)}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

§ 3. Примеры

15. Пример 1. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки.

Пусть A , B и C — главные моменты инерции тела, а p , q и r — проекции угловой скорости на соответствующие оси. Тогда для укороченных форм аналогов кинетической энергии $2V^{0,n}$ и $2V^{1,n}$ получим

$$\begin{aligned} 2V_1^{0,n} &= App^{(n)} + Bqq^{(n)} + Crr^{(n)}; \\ 2V_1^{1,n} &= [Ap' + (C - B)qr]p^{(n)} + [Bq' + (A - C)rp]q^{(n)} + \\ &\quad + [Cr' + (B - A)pq]r^{(n)}. \end{aligned}$$

1 способ. Воспользуемся уравнениями (1.15):

$$p_1 = \frac{\partial (2V_1^{0,n})}{\partial p^{(n)}} = Ap; \quad p_2 = Bq; \quad p_3 = Cr; \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} p_1' + \frac{\partial (2V_1^{1,n})}{\partial p^{(n)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial (2V_1^{0,n})}{\partial p^{(n)}} &= Q_1; \\ p_1' + (C - B)qr &= Q_1; \\ p_2' + (A - C)rp &= Q_2; \\ p_3' + (B - A)pq &= Q_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнениями (3.1) и (3.2) заданы уравнения движения тела.

2 способ. Воспользуемся уравнениями (1.23). Составим функцию H по формуле (1.22):

$$\begin{aligned} H &= p_1^{(n+1)}p + p_2^{(n+1)}q + p_3^{(n+1)}r + p_1'p^{(n)} + \\ &\quad + p_2'q^{(n)} + p_3'r^{(n)} - [Ap' + (C - B)qr]p^{(n)} - \\ &\quad - [Bq' + (A - C)rp]q^{(n)} - [Cr' + (B - A)pq]r^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

С учетом (3.1) из (3.3) можно получить

$$\begin{aligned} H &= p_1^{(n+1)}p_1/A + p_2^{(n+1)}p_2/B + p_3^{(n+1)}p_3/C + \\ &\quad + (B - C)qrp^{(n)} + (C - A)rpq^{(n)} + (A - B)pqr^{(n)}. \end{aligned}$$

Согласно уравнениям (1.23):

$$p = \frac{\partial H}{\partial p_1^{(n+1)}} = \frac{p_1}{A}; \quad q = \frac{p_2}{B}; \quad r = \frac{p_3}{C};$$

$$\begin{aligned} p_1 &= Q_1 + \frac{\partial H}{\partial p^{(n)}} = Q_1 + (B - C)qr; \\ p_2 &= Q_2 + (C - A)rp; \\ p_3 &= Q_3 + (A - B)pq. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнения (3.4) и (3.2) совпадают.

16. Пример 2. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки с учетом условия $(q^{(n)})^2 + (r^{(n)})^2 + C = 0$ или

$$r^{(n+1)} = -\frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} q^{(n+1)}. \quad (3.5)$$

Из условия (3.5) видно, что из коэффициентов $B_j r$ в уравнениях связей (2.2) отличен от нуля только один $B_2^3 = -q^{(n)}/r^{(n)}$. Остальные $B_j r = 0$.

И способ. Воспользуемся уравнениями (2.11). Составим функции $2V_1^{*0, n+1}$ и $2V_1^{*1, n+1}$:

$$2V_1^{*0, n+1} = App^{(n+1)} + Bqq^{(n+1)} - Cr \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} q^{(n+1)}; \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} 2V_1^{*1, n+1} &= [Ap' + (C - B)qr]p^{(n+1)} + \\ &+ [Bq' + (A - C)rp]q^{(n+1)} - \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} [Cr' + (B - A)pq]q^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Используя выражения (3.6), найдем обобщенные импульсы:

$$p_1^* = \frac{\partial (2V_1^{*0, n+1})}{\partial p^{(n+1)}} = Ap = p_1;$$

$$p_2^* = \frac{\partial (2V_1^{*0, n+1})}{\partial q^{(n+1)}} = Bq - Cr \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} = Bq + B_2^3 Cr = p_2 + B_2^3 p_3.$$

Согласно (2.11') запишем:

$$p_1^* + \frac{\partial (2V_1^{*1, n+1})}{\partial p^{(n+1)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial (2V_1^{*0, n+1})}{\partial p^{(n+1)}} = Q_1^*;$$

$$p_1^* + [Ap' + (C - B)qr] - \frac{d}{dt}(Ap) = Q_1^*;$$

$$p_1 + (C - B)qr = Q_1;$$

$$p_2^* + [Bq' + (A - C)rp] - \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} [Cr' + (B - A)pq] -$$

$$- \frac{d}{dt}(Bq) - \frac{d}{dt} \left(-Cr \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} \right) = Q_2^*;$$

$$\begin{aligned} p_2 + B_2^3 p_3 + B_2^3 p_3 + (A - C)rp - (B - A)pq + Cr \frac{d}{dt} \left(\frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} \right) = \\ = Q_2 + B_2^3 Q_3. \end{aligned}$$

Уравнения движения тела будут:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= Ap; & p_2 - \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} p_3 &= Bq - \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} Cr; \\
 p_1 &+ (C - B)qr = Q_1; \\
 p_2 - \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} p_3 &+ (A - C)rp + (A - B)pq = Q_2 - \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} Q_3; & (3.7) \\
 (q^{(n)})^2 &+ (r^{(n)})^2 + C = 0.
 \end{aligned}$$

II способ. Воспользуемся уравнениями (2.13). Составим функцию H^* по формуле (2.12):

$$\begin{aligned}
 H^* &= p_1^{(n+2)*} p + p_2^{(n+2)*} q + p_1^* p^{(n+1)} + p_2^* q^{(n+1)} - \\
 &- [Ap + (C - B)qr] p^{(n+1)} - [Bq + (A - C)rp] q^{(n+1)} + \\
 &+ \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} [Cr + (B - A)pq] q^{(n+1)},
 \end{aligned}$$

в правой части которого надо еще заменить p , q , Ap , Bq и Cr через их значения по первоначальным определениям (1.13) и (1.8), т. е. выражениями (3.1) первого примера. Тогда по (2.13) можно выписать:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\partial H^*}{\partial p_1^{(n+2)*}} = \frac{p_1}{A}; & q &= \frac{\partial H^*}{\partial p_2^{(n+2)*}} = \frac{p_2}{B}; \\
 \frac{\partial H^*}{\partial p^{(n+1)}} &= p_1^* - Q_1^* = p_1^* - Ap + (B - C)qr
 \end{aligned}$$

или

$$p_1 - Q_1 = (B - C)qr;$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial q^{(n+1)}} = p_2^* - Q_2^* = p_2^* - Bq + (C - A)rp + \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} [Cr + (B - A)pq],$$

или

$$-Q_2 + \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} Q_3 = -p_2 + (C - A)rp + \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} [p_3 + (B - A)pq].$$

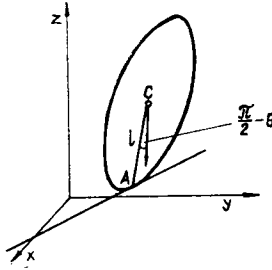
Отсюда получим уравнения движения тела:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{p_1}{A}; & q &= \frac{p_2}{B}; \\
 p_1 &= Q_1 + (B - C)qr; \\
 p_2 - \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} p_3 &+ (A - C)rp + (A - B)pq = Q_2 - \frac{q^{(n)}}{r^{(n)}} Q_3.
 \end{aligned}$$

Они совпадают с уравнениями (3.7).

17. Пример 3. Качение симметричного диска на горизонтальной поверхности [7].

Пусть масса диска M и главные моменты инерции A и C ($A = B$ — моменты инерции относительно диаметра), l — радиус диска, p , q и r — проекции угловой скорости.



Укороченные формы аналогов кинетической энергии $2V^{1,n}$ и $2V^{0,n}$ будут

$$2V_1^{0,n} = (Ml^2 + A)pp^{(n)} + Aqq^{(n)} + (Ml^2 + C)rr^{(n)};$$

$$2V_1^{1,n} = [(Ml^2 + A)p' + (Ml^2 + C)qr - ARq]p^{(n)} + \\ + [Aq' + ARP - Cpr]q^{(n)} + [(Ml^2 + C)r' - Ml^2pq]r^{(n)},$$

где скобки (...) не содержат $\theta^{(n+1)}$. Следовательно, в (1.19)

$$\Pi^{(n+1)} = Pl\Theta^{(n+1)} \cos \Theta + (...) = Plp^{(n)} \cos \Theta + (...),$$

где скобки (...) не содержат $\theta^{(n+1)}$. Следовательно, функция (1.19) имеет вид

$$A^{1,n} = [(Ml^2 + A)p' + (Ml^2 + C)qr - ARq + Pl \cos \Theta]p^{(n)} + \\ + [Aq' + ARP - Cpr]q^{(n)} + [(Ml^2 + C)r' - Ml^2pq]r^{(n)}. \quad (3.8)$$

I способ. Пользуясь уравнениями (1.20), выпишем сразу ответ:

$$(Ml^2 + A)p' + (Ml^2 + C)qr - ARq + Pl \cos \Theta = 0; \\ Aq' + ARP - Cpr = 0; \quad (3.9) \\ (Ml^2 + C)r' - Ml^2pq = 0.$$

II способ. Согласно уравнениям (1.21) имеем:

$$p_1 = \frac{\partial(2V_1^{0,n})}{\partial p^{(n)}} = (Ml^2 + A)p; \quad p_2 = Aq; \quad p_3 = (Ml^2 + C)r; \quad (3.10)$$

$$p_1' = \frac{\partial A^{1,n}}{\partial p^{(n)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(2V_1^{0,n})}{\partial p^{(n)}} = 0; \\ p_1' + (Ml^2 + A)p' + (Ml^2 + C)qr - ARq + \\ + Pl \cos \Theta - \frac{d}{dt} [(Ml^2 + A)p] = 0; \\ p_1' + (Ml^2 + C)qr - ARq + Pl \cos \Theta = 0. \quad (3.11)$$

После вычисления p_1' из (3.10) и подстановки в уравнение (3.11) можно легко убедиться, что последнее совпадает с первым уравнением из (3.9).

Аналогично получим еще два уравнения:

$$p_2' + ARP - Cpr = 0; \\ p_3' + Ml^2pq = 0. \quad (3.12)$$

Движение диска определяется уравнениями (3.10), (3.11) и (3.12).

III способ. Воспользуемся уравнениями (1.25). Выпишем функцию H' по формуле (1.24):

$H' = p_1^{(n+1)}p + p_2^{(n+1)}q + p_3^{(n+1)}r + p_1'p^{(n)} + p_2'q^{(n)} + p_3'r^{(n)} - A^{1,n}$,
где $A^{1,n}$ дается формулой (3.8). Отсюда и из (3.10) следует:

$$H' = p_1^{(n+1)} \frac{p_1}{Ml^2 + A} + p_2^{(n+1)} \frac{p_2}{A} + p_3^{(n+1)} \frac{p_3}{Ml^2 + C} + p_1'p^{(n)} + p_2'q^{(n)} + p_3'r^{(n)} - [p_1' + (Ml^2 + C)qr - ARq + Pl \cos \theta] p^{(n)}.$$

Теперь согласно уравнениям (1.25) можно сразу выписать:

$$\begin{aligned} p &= p_1 / (Ml^2 + A); & q &= p_2 / A; \\ r &= p_3 / (Ml^2 + C); \\ p_1' &= - (Ml^2 + C)qr + ARq - Pl \cos \theta; \\ p_2' &= Cpr - ARp; \\ p_3' &= Ml^2 pq. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Примечание. Чтобы получить уравнения типа Гамильтона, надо в правых частях уравнений (3.13) подставить угловые скорости p , q и r через новые переменные p_1 , p_2 и p_3 . Последнее уравнение (3.13), например, следует писать в виде

$$p_3' = \frac{Ml^2}{A(Ml^2 + A)} p_1 p_2,$$

т. е. уравнения (3.13) должны оказаться дифференциальными уравнениями первого порядка относительно новых переменных p_1 , p_2 и p_3 . В целях краткости записи это не сделано.

Это примечание относится ко всем примерам.

Литература

1. Добронравов В. В., Аналитическая механика в неголономных координатах. Уч. зап. МГУ, 1948, **122**, 2, 77—182.
2. Манжерон Д., Об обобщенных формах уравнений аналитической динамики. Изв. АН СССР ОТН. Мех. и машиностр., 1962, **2**, 128.
3. Рельвик Х., Составление дифференциальных уравнений движения при помощи аналогов кинетической энергии. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1973, **345**, 53—62.
4. Рельвик Х., Сильде О., Метод уравнения возможной мощности с применением объекта неголономности. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1973, **345**, 63—74.
5. Сильде О. М., Тийкма Б. А., К вопросу о применении в механике теоремы кинетической энергии. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1968, **A 261**, 3—16.
6. Сильде О., Тийкма Б., Метод уравнения возможных мощностей. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1970, **A 293**, 95—106.
7. Ценов И., Върху една нова форма на уравненията на аналитичната динамика и някои приложения на тия уравнения. Изв. Мат. ин-та Бълг. АН, 1954, **1**, кн. 2, 91—134.

Поступило
13 I 1977

HAMILTONI TÜÜPI VÖRRANDITEST

H. Relvik

Resümee

Kanoonilised liikumise võrrandid mittehologoomsetes koordinaatides sisaldavad tavaliselt mittehologoomsuse kordajaid $\gamma^{s_{rj}}$, mille arvutamine on tihti töömahukas. Käesolevas artiklis esitatakse analoogilised võrrandid, milles ei esine mittehologoomsuse kordajaid. Kõige lihtsamateks taolistest võrranditest osutuvad võrrandid (1.15'), kus aga on kasutusel kaks funktsiooni — kineetiline energia T ja kiirenduste energia S . Defineerides Hamiltoni funktsiooni analoogi (1.22), saab kanoonilised võrrandid edasi teisendada kujule (1.23), (1.25), (2.13) või (2.15), mis on väga sarnased tavaliste Hamiltoni kanooniliste võrranditega hologoomsete koordinaatide korral.

ABOUT THE EQUATIONS OF THE HAMILTON TYPE

H. Relvik

Summary

The canonical equations of motion in nonholonomic coordinates usually hold the multipliers of nonholonomicity $\gamma^{s_{rj}}$, which are often labour-consuming in calculation. In the present paper these equations are given in the form not holding the multipliers of nonholonomicity.

The idea of deducing is taken from the possible power equation [3, 4, 5, 6]. The simplest form of the equations obtained here is (1.15'), which holds two well-known functions — the kinetic energy T and the energy of acceleration S . In order to obtain the form similar to the Hamilton equations, the new functions (1.22) (in the special case (1.15)) are introduced. With the aid of these analogues of the Hamilton functions the equations (1.23) and (1.25) in the case of holonomic systems, and (2.13) and (2.15) for nonholonomic systems are obtained.

ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ УЧЕТЕ УРАВНЕНИЙ СВЯЗЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

О. Сильде и А. Хайтин

Таллинский политехнический институт

Настоящая статья является продолжением статей [1—3] и их завершением в том смысле, что получены уравнения движения механической системы, в которых учтены связи, заданные уравнениями самого общего вида.

Пусть механическая система определяется n обобщенными координатами q^p . В случае нестационарных систем к ним прибавляется время t , которое заменяем координатой $q^0 = q^0(t)$, и радиус-вектор i -той точки системы, где $i = 1, 2, \dots, N$, состоящей из N точек, запишется так:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q^0, q^1, \dots, q^n).$$

Пусть дано еще l уравнений связей

$$a_{kp}q^p = 0,$$

где $^1 a_{kp} = a_{kp}(q^0, q^1, \dots, q^n)$ и $k = 1, 2, \dots, l$, линейных относительно обобщенных скоростей $q^p = dq^p/dt$. В этом случае можно найти $s = n - l$ независимых параметров скорости v^g , к которым прибавляется (в случае нестационарных связей) еще параметр $v^0 = v^0(t)$, так что вектор скорости i -той точки системы $^1 \mathbf{v}_i = v^j \mathbf{u}_{ij}$, где \mathbf{u}_{ij} — базисные векторы.

Уравнение возможной мощности пишется в виде

$$E_j \{v^j\} = Q_j \{v^j\}, \quad (1)$$

где $E_j = \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_{ij}$ и $Q_j = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_{ij}$.

Уравнения движения будут (в случае независимых параметров скорости v^j)

$$E_j = Q_j \quad (2)$$

(уравнение $E_0 = Q_0$ служит для определения реакции нестационарной связи).

Допустим, что мы, решая задачу дошли до уравнений (2), и что после этого задаются еще новые уравнения связей (которых в предыдущих выводах в учет не принимали), теперь уже связей, выражающих зависимости между параметрами скорости

¹ В статье индексы в дальнейшем принимают следующие значения: $j = 0, 1, \dots, s$; $g = 1, 2, \dots, s$; $c = 2, 3, \dots, s$ и $d, p = 0, 1, \dots, n$. Для других индексов указания даются в тексте.

v^j . В первую очередь, допустим, что имеем только одно уравнение связи, линейное относительно v^j ,

$$b_j v^j = 0, \quad (3)$$

где $b_j = b_j(q^0, q^1, \dots, q^n)$.

В основу изложения любой задачи на связи мы положим принцип освобождаемости: всякая связь вызывает силу — реакцию связи, которая, будучи учтена наряду с другими, действующими на систему силами, позволяет рассматривать систему как свободную.

Пусть R_i — реакция связи (3), действующая на i -тую точку. Тогда $R_j = \sum R_i \cdot u_{ij}$, и уравнение (2) заменяется следующим

$$E_j = Q_j + R_j. \quad (4)$$

Мы в настоящей статье будем рассматривать важный в приложениях случай идеальных связей, который определяем следующим образом: виртуальная мощность реакции идеальных связей равна нулю.

Различаем следующие скорости i -той материальной точки

1) действительная скорость — $v_i = v^j u_{ij}$;

2) возможная скорость — $\{v_i\} = \{v^j\} u_{ij}$, причем $\{v^0\} = v^0$ — заданная функция времени;

3) виртуальная скорость — $\{v_i\}^* = \{v^g\}^* u_{ig}$ и $\{v^0\}^* = 0$. В стационарных системах $\{v_i\} = \{v_i\}^*$.

Для виртуальной мощности реакции связи имеем

$$\{N_R\}^* = \sum R_i \cdot \{v_i\}^* = \sum R_i \cdot \{v^g\}^* u_{ig} = R_g \{v^g\}^* = 0. \quad (5)$$

Благодаря уравнению (3), скорости $\{v^g\}$ и $\{v^g\}^*$ уже не являются независимыми, между ними существуют следующие связи

$$b_j \{v^j\} = 0. \quad (6)$$

Ввиду $\{v^0\} = v^0$, из (3) и (6) получим $b_g \{v^g\} = b_g v^g$, $b_g \{v^g\}^* = 0$, $\{v^0\}^* = 0$. Если $b_1 \neq 0$, то

$$\{v^1\}^* = -\{v^c\}^* \cdot b_c / b_1. \quad (7)$$

Подставив (7) в (5), получим

$$(-R_1 b_c / b_1 + R_c) \{v^c\}^* = 0. \quad (8)$$

В (8) все $\{v^c\}^*$ независимы. Обозначая $R_1 / b_1 = \lambda$, получим $R_g = \lambda b_g$. При этом R_0 остается неопределенной. Все b_g известны, неизвестным является множитель λ , для определения которого и служит дополнительное уравнение (3).

Чтобы создать основу для дальнейших обобщений, дифференцируем h раз выражение (3). Введем обозначения

$$v^{j(h)} = d^h v^j / dt^h \quad (v^j = dv^j / dt, v^{j''} = d^2 v^j / dt^2, \dots).$$

Пусть $U = b_j v^j$. Тогда $U^{(h)} = d^h U / dt^h = \Phi + b_j v^{j(h)}$, где Φ — функция обобщенных координат (и времени), параметров скорости v^j и их производных по времени до порядка $h - 1$. Выясним, какое изменение произойдет в проблеме связей, если за уравнение связи взять

$$U^{(h)} = 0. \quad (9)$$

Интегрируя (9) h раз, вместо нуля в (3) появится многочлен $h-1$ степени от t . Следовательно, изменение произойдет только в члене с индексом 0 уравнения (3). Это означает, что в уравнениях (4) по-прежнему $R_g = \lambda b_g$ или из условия (9)

$$R_g = \lambda \partial U^{(h)} / \partial v^{g(h)}. \quad (10)$$

Для виртуальной скорости получим условие

$$\frac{\partial U^{(h)}}{\partial v^{g(h)}} \{v^g\}^* = 0, \quad (11)$$

а для возможной скорости, учтя, что действительная скорость одна из возможных, получим

$$\frac{\partial U^{(h)}}{\partial v^{g(h)}} \{v^g\} - \frac{\partial U^{(h)}}{\partial v^{g(h)}} v^g = 0. \quad (12)$$

Применим равенства (10), (11) и (12) к уравнению связи общего вида

$$U = 0, \quad (13)$$

где $U = U(q^p, v^j, v^j, \dots, v^{j(h)})$. Имеем

$$R_g = \lambda \partial U / \partial v^{g(h)}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v^{g(h)}} \{v^g\}^* = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v^{g(h)}} \{v^g\} - \frac{\partial U}{\partial v^{g(h)}} v^g = 0,$$

а R_0 вычисляется из уравнения

$$E_0 = Q_0 + R_0. \quad (16)$$

Первое из уравнений (15) и уравнение (14) дают

$$R_g \{v^g\}^* = 0, \quad (17)$$

т. е. условие идеальности связи.

Однако мы можем считать уравнения (14) до (17) правильными для общего случая уравнения связи (13), если докажем инвариантность этих уравнений, т. е. что они не изменяют своего вида при переходе к новым параметрам скорости. Дадим доказательство в самом общем виде.

Допустим, что первоначально не даны независимые параметры скорости v^g , а произвольные v^k , число которых $m \geq s$. К ним прибавляется в случае нестационарных связей $v^0 = v^0(t)$. Соответствующие обобщенные координаты обозначим q^d , где $d = 0, 1, \dots, n$.

Пусть уравнение (13) в новых параметрах имеет вид

$$U(q^d, v^k, \dots, v^{k(h)}) = 0. \quad (18)$$

Зададим преобразование координат и параметров скорости

$$\begin{aligned} q^d &= q^d(q^p), \\ v^k &= a^k_j v^j, \end{aligned} \quad (19)$$

где $a^k_j = a^k_j(q^p)$ и $k = 1, 2, \dots, m$. Дифференцируя r раз (19) по времени, имеем $v^{k(r)} = a^k_g v^g v^{g(r)} + \Phi^k_r(q^p, v^j, v^j, \dots, v^{j(r-1)})$,

где $r = 1, 2, \dots, h$. Функция Φ^k_r содержит производные от параметров скорости до порядка $r-1$, и $v^{0(r)}$, как заданная функция времени, перенесена в выражение Φ^k_r . Производные от q^p выражаем через v^j с помощью уравнений $q^p = A^p_j v^j$, где $A^p_j = A^p_j(q^0, q^1, \dots, q^n)$. Частные производные по $v^{g(l)}$

$$\frac{\partial v^{h(r)}}{\partial v^{g(l)}} = \begin{cases} 0, & \text{если } l > r, \\ a^h_g, & \text{если } l = r, \\ \frac{\partial \Phi^k_r}{\partial v^{g(l)}}, & \text{если } l < r \text{ и } \frac{\partial q^d}{\partial v^{g(l)}} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из (18) по правилам введения новых переменных с учетом (20) следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial v^{g(h)}} = \frac{\partial U}{\partial v^{h(h)}} \cdot \frac{\partial v^{h(h)}}{\partial v^{g(h)}} = \frac{\partial U}{\partial v^{h(h)}} a^h_g. \quad (21)$$

Из (19) при $k = 1, 2, \dots, m$ следует

$$\{v^k\} = a^k_j \{v^j\}, \quad (22)$$

$$\{v^k\}^* = a^k_g \{v^g\}^*. \quad (23)$$

Умножая (21) на $\{v^g\}^*$, суммируя и учитывая (23), находим

$$\frac{\partial U}{\partial v^{g(h)}} \{v^g\}^* = \frac{\partial U}{\partial v^{h(h)}} a^h_g \{v^g\}^* = \frac{\partial U}{\partial v^{h(h)}} \{v^h\}^*. \quad (24)$$

Умножая (21) на $\{v^g\}$ и v^g , суммируя и учитывая (22) и (19), получим соответственно

$$\frac{\partial U}{\partial v^{g(h)}} \{v^g\} = \frac{\partial U}{\partial v^{h(h)}} a^h_g \{v^g\} = \frac{\partial U}{\partial v^{h(h)}} [\{v^h\} - a^{h_0} \{v^0\}] \quad (25)$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial v^{g(h)}} v^g = \frac{\partial U}{\partial v^{h(h)}} a^h_g v^g = \frac{\partial U}{\partial v^{h(h)}} (v^h - a^{h_0} v^0). \quad (26)$$

Учтя, что $\{v^0\} = v^0$, (25) и (26) при $k = 1, 2, \dots, m$ дают

$$\frac{\partial U}{\partial v^{g(h)}} \{v^g\} - \frac{\partial U}{\partial v^{g(h)}} v^g = \frac{\partial U}{\partial v^{h(h)}} \{v^h\} - \frac{\partial U}{\partial v^{h(h)}} v^h.$$

Полагая $R_g = \lambda \partial U / \partial v^{g(h)}$ и $R_h = \lambda \partial U / \partial v^{h(h)}$, из (24) получим $R_g \{v^g\}^* = R_h \{v^h\}^*$. Инвариантность уравнений (14) до (17) доказана.

Аналогично предыдущему доказывается, что $R_g v^g + R_0 v^0 = R_h v^h + R'_0 v^0$, где $k \neq 0$, т. е. мощность реакции связи есть инвариант (это требование можно было бы поставить в самом начале исследования).

Уравнения движения (4) получают вид

$$E_g = Q_g + \lambda \partial U / \partial v^{g(h)}.$$

Если имеем $\alpha = 1, 2, \dots, l$ уравнений связей

$$U_\alpha = (q^p, v^j, v^j, \dots, v^{j(h\alpha)}) = 0, \quad (27)$$

где $v^{j(h\alpha)} = d^{(h\alpha)} v^j / dt^{(h\alpha)}$ — производная порядка $(h\alpha)$ от v^j , то путем повторного применения показанного здесь способа полу-

чим уравнения движения механической системы в независимых параметрах скорости (суммировать по α)

$$E_g = Q_g + \lambda^\alpha \frac{\partial U_\alpha}{\partial v^g(h^\alpha)}. \quad (28)$$

Уравнения (28) вместе с уравнениями связей (27) дают $l+s$ уравнений для определения s неизвестных v^j и l неизвестных λ^α .

К решению задачи при наличии уравнений связей (27) можно подходить и несколько другим путем. Пусть первоначальное решение дано в виде уравнения возможной мощности (1), или учтя, что $\{v^0\}^* = 0$, в виде уравнения виртуальной мощности

$$E_g \{v^g\}^* = Q_g \{v^g\}^*. \quad (29)$$

Из уравнений (27) получим l уравнений для $\{v^g\}^*$

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial v^g(h^\alpha)} \{v^g\}^* = 0. \quad (30)$$

Из этих уравнений можно l виртуальных скоростей $\{v^\alpha\}^*$ выразить через $s-l$ остальных $\{v^\beta\}^*$ и подставить полученные значения в уравнения (29). Вследствие независимости остающихся $\{v^\beta\}^*$, получим $s-l$ уравнений для неизвестных v^g . К ним прибавляются еще l уравнений связей (27). Можно для уравнений (30) применять метод множителей Лагранжа. Тогда получаются уравнения (28).

Литература

1. Рельвик Х., Сильде О., Метод уравнения возможной мощности с применением объекта неголономности. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1973, 345, 63—74.
2. Сильде О., Тийкма Б., Метод уравнения возможных мощностей. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1970, А 293, 95—106.
3. Сильде О., Чистякова А., Некоторые дифференциальные уравнения движения для систем с линейными уравнениями связей. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1976, 393, 31—38.

Поступило
14 I 1977

MEHAANIKA SÜSTEEMIDE LIIKUMINE ÜLDISTE SIDEMEVÖRRANDITE PUHUL

O. Silde ja A. Haitin

Resümee

On saadud süsteemi liikumise diferentsiaalvõrrandid (2) sõltumata kiirusparameetrite v^j kaudu. Saadakse uued liikumise diferentsiaalvõrrandid (4), milles R_g arvutatakse (8) abil, ideaalse sideme lisamisel süsteemile võrrandi (3) näol. Lõpuks üldistatakse ülesanne juhuks, kui on antud l üldkujulist sidemevõrrandit (27). Saadakse liikumise diferentsiaalvõrrandid (28).

**DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DES MECHANISCHEN SYSTEMS MIT
BERÜCKSICHTIGUNG DER VERBINDUNGSGLEICHUNGEN
ALLGEMEINER ART**

O. Silde und A. Häitin

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag werden die Bewegungsgleichungen der Mechanik abgeleitet unter Berücksichtigung der Verbindungsgleichungen mit beliebig hoher Ordnung der Ableitungen der Geschwindigkeitsparameter. Die Verbindungsgleichungen können dabei auch nichtlinear sein.

МЕТОД УРАВНЕНИЯ ВОЗМОЖНОЙ МОЩНОСТИ В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ВЕЛОСИПЕДА

А. Хайтин

Таллинский политехнический институт

В статье рассматривается динамическая задача движения велосипеда. Такая задача дана в [1], стр. 332, с применением функции Лагранжа и учетом уравнений неголономных связей. В данной статье применен метод уравнения возможной мощности (УВМ), разработанный на кафедре теоретической механики Таллинского политехнического института (см. [2]).

1. Кинематика велосипеда

В рассматриваемой задаче учтены те же упрощающие допущения, что и в [1], т. е. велосипед как механическая система состоит из четырех кинематически связанных между собой твердых тел: рамы с седоком, двух дискообразных колес и вилок с рулем.

На рис. 1 показано изображение велосипеда в неподвижной системе координат с определяющими его положение углами. На рис. 2 показаны расстояния и углы, связанные с теми узловыми точками и направлениями в велосипеде, которые необходимо рассматривать в расчете. На схеме рис. 2 все точки и линии расположены в одной плоскости. Точки M_1 и M_2 — центры колес; K_1 и K_2 — точки касания колес с дорогой; M_3 — центр масс задней части велосипеда (рамы с седоком и задним колесом); M_4 — центр масс передней части велосипеда (вилки с передним колесом); прямая через точки M_0 и K_3 определяет положение рулевой оси (к ней перпендикулярна прямая M_0M_2).

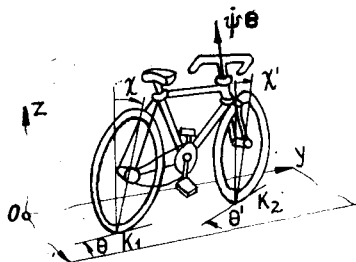


Рис. 1.

На чертежах применяем следующие обозначения. На рис. 2: $a = M_1M_0$; $b = M_0M_2$; $c = a \cos \varphi + b \cos \lambda$; $c_1 = MM_0 = = R \sin \lambda - b$; $h_1 = M_0O_1$; $h_2 = M_4O_2$. На рис. 3: заштрихованный сектор I обозначает плоскость рамы; сектор II — плоскость вилки переднего колеса; сектор III — плоскость, которая перпендикулярна к рулевой оси.

При использовании метода УВМ одним из главных этапов решения задачи является выбор параметров скорости рассматриваемой системы. Схема рис. 3 отображает то положение велосипеда, которое показано на рис. 1. Выберем необходимые параметры скорости.

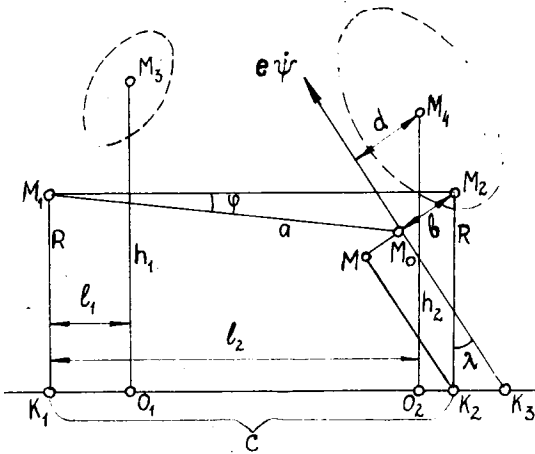


Рис. 2.

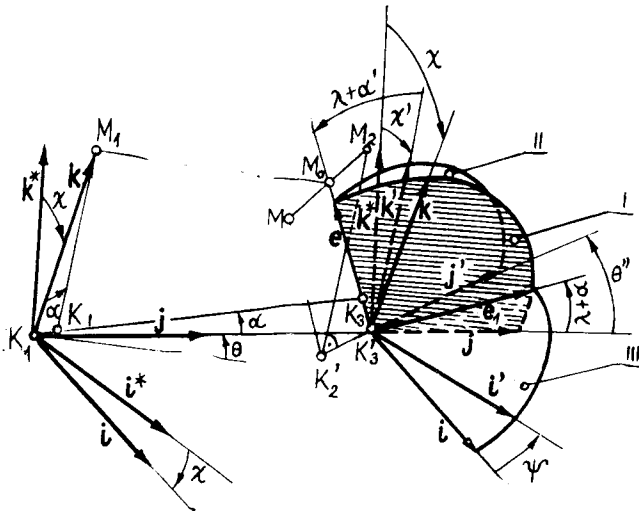


Рис. 3.

Для задней части велосипеда имеем: χ' , θ' , α' — проекции вектора угловой скорости рамы соответственно на орты \mathbf{j} , \mathbf{k}^* , \mathbf{i} , где \mathbf{j} — орт направленный вдоль следа плоскости рамы; \mathbf{k}^* — вертикальный орт, \mathbf{i} — орт перпендикулярный к плоскости рамы; v — скорость той точки рамы, которая в данный момент совпадает с точкой K'_1 .

Для передней части велосипеда величины χ' , θ' , α' , v' аналогичны величинам χ , θ , α и v , а ψ' — угловая скорость вилки по отношению к раме.

В дальнейшем будут найдены зависимости между этими параметрами скорости и будет установлено, что рассматриваемая система имеет две степени свободы. За независимые параметры скорости принимаются χ' и ψ' .

Пусть Ω и Ω' — векторы угловой скорости соответственно рамы и вилки, а ω и ω' — векторы относительной угловой скорости соответственно заднего и переднего колес (символы Ω и ω в дальнейшем также обозначают векторы). Тогда

$$\Omega = \alpha' \mathbf{i} + \chi' \mathbf{j} + \theta' \mathbf{k}^*, \quad (1)$$

где α — угол поворота рамы в собственной плоскости, возникающий от поворота вилки по отношению к раме на угол ψ (при этом след плоскости вилки поворачивается на угол θ''). На рис. 3 видно, что в результате поворота плоскости рамы на угол α , точки K_1 и K_3 переместились вместе с ней, а на их место стали точки K'_1 и K'_3 . Аналогично

$$\Omega' = \alpha' \mathbf{i}' + \chi' \mathbf{j}' + \theta' \mathbf{k}^*, \quad (2)$$

где \mathbf{i}' — орт перпендикулярный плоскости вилки, \mathbf{j}' — орт направленный вдоль следа плоскости вилки, α' — угол поворота вилки в ее собственной плоскости, возникающий в результате поворота вилки на угол ψ . Из рис. 3 и рис. 1 следует, что

$$\theta' = \theta'' + \theta. \quad (3)$$

Обозначив через R радиус колес, получаем

$$\omega = -vR^{-1} \mathbf{i}, \quad (4)$$

$$\omega' = -v'R^{-1} \mathbf{i}'. \quad (5)$$

Установим связи между параметрами скорости. Их можно определить, используя рис. 3. Следует отметить, что на этом рисунке орты \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} и \mathbf{k}^* , проведенные из точки K'_1 , изображены повторно и из точки K'_3 . Орт \mathbf{k} перпендикулярен ортам \mathbf{i} и \mathbf{j} , орт \mathbf{i}^* горизонтальный, орт \mathbf{k}' перпендикулярен ортам \mathbf{i}' и \mathbf{j}' , орт \mathbf{e} совпадает с рулевой осью, орт \mathbf{e}_1 расположен на линии пересечения плоскостей I и III. Для угла χ' имеем

$$\sin \chi' = -\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{i}' = \sin \chi \cos \psi - \cos \chi \sin \psi \sin(\lambda + \alpha), \quad (6)$$

так как $\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{i} = -\sin \chi$, $\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{k} = \cos \chi$ и

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i} \cos \psi + \mathbf{e}_1 \sin \psi, \quad (7)$$

где $\mathbf{e}_1 = \mathbf{j} \cos(\lambda + \alpha) + \mathbf{k} \sin(\lambda + \alpha)$.

Найдем зависимости для определения угла θ'' . Так как орт j' перпендикулярен ортам i' и k^* , а $|k^* \times i'| = \cos \chi'$, то имеем $j' \cos \chi' = k^* \times i'$. Подставляя выражение орта i' из (7), получим

$$j' = \cos^{-1} \chi' [-i^* \sin \psi \cos(\lambda + \alpha) + j(\cos \chi \cos \psi + \sin \chi \sin \psi \sin[\lambda + \alpha])], \quad (8)$$

где учтено, что $k^* \times i = j \cos \chi$, $k^* \times j = -i^*$ и $k^* \times k = j \sin \chi$. Теперь

$$\begin{aligned} \sin \theta'' &= (j \times j') \cdot k^* = \cos^{-1} \chi' \sin \psi \cos(\lambda + \alpha), \\ \cos \theta'' &= j \cdot j' = \cos^{-1} \chi' [\cos \chi \cos \psi + \sin \chi \sin \psi \sin(\lambda + \alpha)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Для угла между ортами e и j' будем иметь $\sin(\pi/2 + \lambda + \alpha') = (j' \times e) \cdot i'$, откуда, используя (7), (8) и разложение вектора $e = -j \cdot \sin(\lambda + \alpha) + k \cos(\lambda + \alpha)$, получим

$$\cos(\lambda + \alpha') = \cos(\lambda + \alpha) \cdot \cos \chi \cdot \cos^{-1} \chi'. \quad (10)$$

Из треугольника $K'_1 K'_3 K_3$ имеем

$$\sin \alpha / K_3 K'_3 = \cos(\lambda + \alpha) / K'_1 K_3, \quad (11)$$

где

$$K_3 K'_3 = (R[\cos \lambda - \cos(\lambda + \alpha')] - b \sin \alpha') \cos^{-1}(\lambda + \alpha') \cos^{-1} \lambda, \quad (12)$$

$$K'_1 K_3 = (c \cos \lambda + c_1) \cos^{-1} \lambda + R \sin \alpha. \quad (13)$$

Выражение (12) получено с помощью рис. 2 и 3, из которых, соответственно, видно, что $M_0 K_3 = (R - b \sin \lambda) \cos^{-1} \lambda$ и $M_0 K'_3 = [R - b \sin(\lambda + \alpha')] \cos^{-1}(\lambda + \alpha')$. В последнем $(\lambda + \alpha')$ — угол между $M_2 K'_2$ и $M_0 K'_3$ после поворота руля. Выражение (13) получено аналогично. В нем учтено, что $K_1 K_3 = c + c_1 \cos^{-1} \lambda$ и $K'_1 K_1 = R \sin \alpha$.

Выражения (10) и (11) с учетом (12) и (13) служат для определения α и α' , а (6) и (9) для определения χ' и θ'' .

В принципе задачу можно решить для любых конечных значений переменных, но в данном случае необходимо иметь возможность сравнить полученное решение с результатом в [1]. Поэтому, как и в [1], ограничимся случаем, когда углы χ и ψ и их производные малы, и будем пренебрегать величинами более высокого порядка малости, чем χ и ψ .

Из выражений (6) и (9) видно, что углы χ' и θ'' одного порядка малости с углами χ и ψ . Из (6) и (9) с точностью величин первого порядка малости получим

$$\chi' = \chi - \psi \sin \lambda, \quad (14)$$

$$\theta'' = \psi \cos \lambda, \quad (15)$$

где учтено, что углы α и α' — малые более высокого порядка, чем ψ и χ . Действительно, из (12), после линеаризации и замены $R \sin \lambda - b = c_1$, получим $K_3 K'_3 = \alpha' c_1 \cos^{-2} \lambda$. Подставляя $K_3 K'_3$ и (13) в (11), имеем $\alpha' = \alpha(c \cos \lambda + c_1) / c_1$, а из (10) имеем

$\alpha' - \alpha = (\chi^2 - \chi'^2) \cdot \cos \lambda / 2 \sin \lambda$. Разрешая последние два выражения относительно α и α' и учитывая (14), получим

$$\alpha = c_1 c^{-1} (\chi \psi - \psi^2 \cdot 2^{-1} \sin \lambda), \quad (16)$$

$$\alpha' = (c \cos \lambda + c_1) \cdot c^{-1} (\chi \psi - \psi^2 \cdot 2^{-1} \sin \lambda), \quad (17)$$

из которых видно, что α и α' — величины на порядок меньше, чем χ и ψ .

Найдем остальные зависимости для параметров скорости. Используя рис. 3, найдем, что точка K'_3 , связанная с плоскостью рамы, имеет скорость

$$v_{K'_3} = v j - \theta' K'_1 K'_3 i^*. \quad (18)$$

С другой стороны, точка K'_3 лежит в плоскости вилки на продолжении рулевой оси, и поэтому ее скорость можно выразить через параметры вилки

$$v_{K'_3} = v' j' - \theta' K'_2 K'_3 i'^*, \quad (19)$$

где i'^* — горизонтальный орт, перпендикулярный ортам j' и k^* (на рис. 3 не показан).

Если умножить правые части выражений (18) и (19) скалярно на орт i'^* и приравнять их между собой, то можно получить $\theta' = (v \sin \theta'' + \theta'' K'_2 K'_3) / (K'_1 K'_3 \cos \theta'' - K'_2 K'_3)$. Далее, используя рис. 2 и 3, можно убедиться, что $K'_1 K'_3 \approx K'_1 K_3$ и $K'_2 K'_3 \approx K_2 K_3$. Учитывая (9) и (15), получим

$$\theta' = c_1 c^{-1} \psi' + v \psi c^{-1} \cos \lambda. \quad (20)$$

Выражение (3) с учетом (15) и (20) приобретает вид

$$\theta' = \psi' (c_1 c^{-1} + \cos \lambda) + \psi v c^{-1} \cos \lambda. \quad (21)$$

Умножив правые части выражений (18) и (19) скалярно на орт j' и приравняв их, получим

$$v' = v \cdot \cos \theta'' - \theta' \sin \theta'' K'_1 K'_3,$$

откуда

$$v' = v. \quad (22)$$

Таким образом, для введенных девяти параметров скорости найдено шесть уравнений связей: (14), (16), (17), (20), (21) и (22). Так как v — заданная постоянная величина, то имеем два независимых параметра скорости χ' и ψ' .

2. Уравнения движения

Уравнения движения велосипеда составим на основе метода УВМ (см. [2]). Уравнение возможной мощности имеет вид

$$\{T\} = \{N\}, \quad (23)$$

где

$$\{T\} = \sum m_i a_i \cdot \{v_i\}, \quad \{N\} = \sum F_i \cdot \{v_i\},$$

а m_i , a_i , $\{v_i\}$ — соответственно, масса, ускорение и возможная

скорость i -той точки, F_i — приложенная к ней сила. Суммирование в этих выражениях производится по всем точкам механической системы. Запишем выражение (23) в виде

$$\{T\}_z + \{T\}_n = \{N\}, \quad (24)$$

где индекс z означает, что суммирование производится для задней части велосипеда (рама с седоком и заднее колесо), индекс n , соответственно, для передней части велосипеда (вилка с рулем и переднее колесо). Формулы для вычисления $\{T\}_z$ и $\{T\}_n$ приобретают вид

$$\{T\}_z = m_1 a_{M3} \cdot \{v\} + (m_1 r_{M3} \times a_{M3} + K_{M3} + K_{rM1}) \cdot \{\Omega\} + K_{M1} \cdot \{\omega\}, \quad (25)$$

$$\{T\}_n = m_2 a_{M4} \cdot \{v'\} + (m_2 r_{M4} \times a_{M4} + K_{M4} + K_{rM2}) \cdot \{\Omega'\} + K_{M2} \cdot \{\omega'\}, \quad (26)$$

где K_{M3} и K_{M4} — кинетические моменты относительно центров масс соответственно задней и передней частей велосипеда, K_{rM1} и K_{rM2} — кинетические моменты соответственно заднего и переднего колес в относительном движении, K_{M1} и K_{M2} — полные кинетические моменты заднего и переднего колес, m_1 и m_2 — массы задней и передней частей велосипеда. Учитывая, что в выражениях: $\{v\} = \{v\}j$, $\{v'\} = \{v'\}j'$, $\{\omega\} = -\{v\}R^{-1}i$ и $\{\omega'\} = -\{v'\}R^{-1}i'$ величина v — заданная постоянная скорость, то отбросим первые и последние слагаемые в формулах (25) и (26). Сохранив эти члены, можно было бы вычислить реакцию связи, которая обеспечивает постоянство скорости v . Вычисления этой реакции в задаче не рассматриваются. Теперь

$$\{T\}_z = (m_1 r_{M3} \times a_{M3} + K_{M3} + K_{rM1}) \cdot \{\Omega\}, \quad (27)$$

$$\{T\}_n = (m_2 r_{M4} \times a_{M4} + K_{M4} + K_{rM2}) \cdot \{\Omega'\}. \quad (28)$$

Далее, выразим все члены в (27) и (28) через параметры системы и параметры скорости. Из (1) имеем

$$\{\Omega\} = \{\chi\}j + \{\theta\}k^*, \quad (29)$$

где опущена составляющая с a' , так как сохранение последней при вычислении (27), порождает члены второго порядка малости. Аналогично из (2) имеем

$$\{\Omega'\} = \{\chi'\}j' + \{\theta'\}k'^*. \quad (30)$$

Из рис. 2 и 3 найдем

$$r_{M3} = l_1 j + h_1 k, \quad (31)$$

$$r_{M4} = (l_2 - c)j' + h_2 k', \quad (32)$$

где следует иметь в виду, что вектор r_{M4} проведен из точки K'_2 . Для скорости и ускорения точки M_3 получим $v_{M3} = vj + \Omega \times r_{M3} = vj + h_1 \chi i - l_1 \theta i^*$ и $a_{M3} = h_1 \chi' i - (v\theta' + l_1 \theta'')i^*$, где $j' = \Omega \times j$, $i' = \Omega \times i$, $i^{*'} = \Omega \times i^*$. Аналогично, для скорости и ускорения точки M_4 , получим $v_{M4} = v'j' + \Omega' \times r_{M4} = v'j' + h_2 \chi' i' - (l_2 - c)\theta' i'^*$ и $a_{M4} = h_2 \chi'' i'^* - [v\theta'' - \theta' \cdot (l_2 - c)]i'^*$, где учтено, что $v' = v$.

Для кинетических моментов K_{M3} и K_{M4} имеем

$$K_{M3} = (\chi' A_1 - \theta' D_1) j + (\theta' B_1 - \chi' D_1) k,$$

$$K_{M4} = (\chi' A_2 + \theta' D_2) j' + (\theta' B_2 + \chi' D_2) k',$$

где A_1, B_1 — центральные моменты инерции задней части велосипеда относительно горизонтальной оси и перпендикулярной к ней оси, которые лежат в плоскости рамы, D_1 — центробежный момент инерции относительно этих осей. Знак, стоящий перед слагаемыми с D_1 , отображает такое распределение массы задней части велосипеда, при котором центральный эллипсоид инерции имеет расположение, указанное на рис. 2 пунктиром. Для передней части велосипеда имеем соответствующие величины A_2, B_2 и D_2 . Дифференцируя, получим

$$\dot{K}_{M3} = (\chi'' A_1 - \theta'' D_1) j + (\theta'' B_1 - \chi'' D_1) k,$$

$$\dot{K}_{M4} = (\chi'' A_2 + \theta'' D_2) j' + (\theta'' B_2 + \chi'' D_2) k'.$$

Так как $K_{rM1} = C_{1(0)}$, то

$$\dot{K}_{rM1} = C_{1(0)'} = -C_1 v \cdot R^{-1} (\theta' j - \chi' k).$$

Аналогично для передней части велосипеда имеем

$$\dot{K}_{rM2} = -C_2 v \cdot R^{-1} (\theta' j' - \chi' k').$$

Теперь, после соответствующих подстановок, (27) и (28) приобретают вид

$$\{T\}_3 = [m_1 (h^2 \chi'' - h_1 l_1 \theta'' - h_1 v \theta') + A_1 \chi'' - D_1 \theta'' - C_1 R^{-1} v \theta'] \cdot \{\chi\} + \\ + [m_1 (l_2^2 \theta'' - l_1 h_1 \chi'' + l_1 v \theta') + B_1 \theta'' - D_1 \chi'' + C_1 R^{-1} v \chi'] \cdot \{\theta\},$$

$$\{T\}_n = (m_2 [\chi'' h^2 - (l_2 - c) h_2 \theta'' - h_2 v \theta'] + A_2 \chi'' + D_2 \theta'' - \\ - C_2 R^{-1} v \theta') \cdot \{\chi'\} + (-m_2 [\chi'' h_2 - \theta'' (l_2 - c) - \theta' v] \cdot (l_2 - c) + \\ + B_2 \theta'' + D_2 \chi'' + C_2 R^{-1} v \chi') \cdot \{\theta'\}.$$

Если, используя выражения (14), (20) и (21), исключить вспомогательные параметры скорости и их производные из $\{T\}_3$ и $\{T\}_n$, то после сложения получим левую часть (24), т. е.

$$\{T\} = c^{-1} [\psi'' b_0 + \psi' v (b_1 - \delta_1 c) + \psi v^2 b_2 - \chi'' b_4 + \\ + \chi' v \cdot b_5] \cdot \{\psi\} + c^{-1} [\chi'' a_0 - \psi'' a_2 - \psi' v a_3 - \psi v^2 a_5] \cdot \{\chi\}. \quad (33)$$

(Обозначения коэффициентов в (33) те же, что и в [1], стр. 344—346).

Вычислим $\{N\}$ в правой части уравнения (24). Для возможной мощности имеем

$$\{N\} = \sum F_i \cdot \{v_i\} = -m_1 g k^* \cdot \{v_{M3}\} - m_2 g k^* \cdot \{v_{M4}\} - \partial F / \partial \psi \cdot \{\psi\}, \quad (34)$$

где первое и второе слагаемые — возможные мощности сил тягостей, соответственно, задней и передней частей велосипеда, $F = 2^{-1} \delta \psi^2$ — функция Релея, учитывающая наличие вязкого трения в рулевой колонке, δ — коэффициент вязкого трения. Возможная мощность реакции идеальных связей и внутренних сил равна нулю.

Для $\{\Omega\}$ и $\{\Omega'\}$ в отличие от (29) и (30) будем иметь

$$\{\Omega\} = \{\alpha\}i + \{\chi\}j + \{\theta\}k^*, \quad \{\Omega'\} = \{\alpha'\}i' + \{\chi'\}j' + \{\theta'\}k^*.$$

Отметим, что, вычисляя (34), необходимо учесть величины $\{\alpha\}$ и $\{\alpha'\}$, так как здесь они порождают члены первого порядка малости. Используя (16) и (17), получим $\{\alpha\} = c_1 c^{-1} \psi \{\chi\} + c_1 c^{-1} (\chi - \psi \sin \lambda) \{\psi\}$ и $\{\alpha'\} = c^{-1} (c \cos \lambda + c_1) \cdot [\psi \{\chi\} + (\chi - \psi \sin \lambda) \{\psi\}]$.

Выражения возможных скоростей точек M_3 и M_4 имеют вид $\{v_{M3}\} = \{\Omega\} \times r_{M3}$ и $\{v_{M4}\} = \{\Omega'\} \times r_{M4}$, где r_{M3} и r_{M4} соответственно из (31) и (32). Выполнив соответствующие подстановки, получим из (34)

$$\begin{aligned} \{N\} = & c^{-1} [a_1 \chi - (g l c_1 + a_4) \psi] \{\chi\} + \\ & + c^{-1} [-(g l c_1 + b_6) \chi + (g l c_1 \sin \lambda + b_3) \psi - c \delta_1 v \psi] \{\psi\}. \end{aligned} \quad (35)$$

(Обозначения коэффициентов в (35) те же, что в [1], стр. 344—346).

Приравнявая (33) и (35), ввиду (23), и учитывая независимость $\{\chi\}$ и $\{\psi\}$, получим следующие уравнения движения велосипеда

$$a_0 \chi'' - a_1 \chi - a_2 \psi'' - a_3 v \psi' + (g l c_1 + a_4 - a_5 v^2) \psi = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} b_0 \psi'' + b_1 v \psi' + [b_2 v^2 - (b_3 + g l c_1 \sin \lambda)] \psi - \\ - b_4 \chi'' + b_5 v \chi' + (b_6 + g l c_1) \chi = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Сравнивая уравнения (36) и (37) с уравнениями (2.36) и (2.37) из [1], стр. 345, видно, что в последних оказались неучтенными члены $g l c_1 \psi$, $g l c_1 \chi$ и $g l c_1 \psi \sin \lambda$.

3. Выводы

1. Сравнение решения данной задачи методом УВМ с обычным методом, использующим функцию Лагранжа, показало, что вычислительная работа здесь оказалась проще.

2. Благодаря введению независимых параметров скорости, через которые выражаются все переходные параметры скорости, отпадает надобность в уравнениях связей.

3. Разница коэффициентов при членах с ψ и χ в уравнениях движения, полученных данным методом и методом, примененным в работе [1], возникла в результате неточности допущенной в последней. Ошибка заключается в том, что при вычислении потенциальной энергии U_0 велосипеда (см. [1], стр. 343, формула (2.30)), полагается $\varphi = \text{const}$ (см. [1], стр. 336, выражения (2.9)). Тем самым в выражении для U_0 оказались неучтенными члены такого же порядка малости, как и содержащиеся в нем.

Литература

1. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А., Динамика неголономных систем. Москва, 1967.
2. Сильде О., Тийкма Б., Метод уравнения возможной мощности. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1970, А 293, 95—106.

Поступило
14 I 1977

VÕIMALIKU VÕIMSUSE MEETOD JALGRATTA LIIKUMISE TEOORIAS

A. Haitin

Resümee

Jalgratta liikumise võrrandid on saadud võimaliku võimsuse võrrandi abil, milline lahendamiseviis on välja töötatud TPI teoreetilise mehaanika kateedris. Võrreldes neid võrrandeid raamatus [1], lk. 345, saadud võrranditega, selgub, et viimastes esinevad ebatäpsused. Metoodilisest küljest näitas niisugune võrdlus, et lahendamiseviis võimaliku võimsuse võrrandi abil on celistatavam, sest arvutuste maht jääb väiksemaks.

THE METHOD OF POSSIBLE POWER EQUATION IN THE THEORY OF THE BICYCLE MOVEMENT

A. Haitin

Summary

In the paper the dynamic problem of the movement of the bicycle is discussed. Such a problem is given in [1], p. 332, in which the Lagrange function and the equations of nonholonomic constraints are applied. In the present paper the method of possible power equation is used (see [2]). A comparison of the two methods of solving the problem revealed that in the latter the calculating work was less complicated. Besides, due to the introduction of independent velocity parameters there arose no necessity for the equation of constraint.

The method employed in the present paper made it possible to detect the inexactitude in [1] which results in erroneous coefficients in the equation of movement (see [1], p. 345 equations (2.36) and (2.37) in members involving ψ and χ).

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

Ю. Кирс

Таллинский политехнический институт

Проблеме оптимального проектирования жестко-пластических пластин и оболочек посвящены многие работы. В одних исследуется задача минимального веса, например, [1, 2, 3], в других — задача минимального остаточного прогиба.

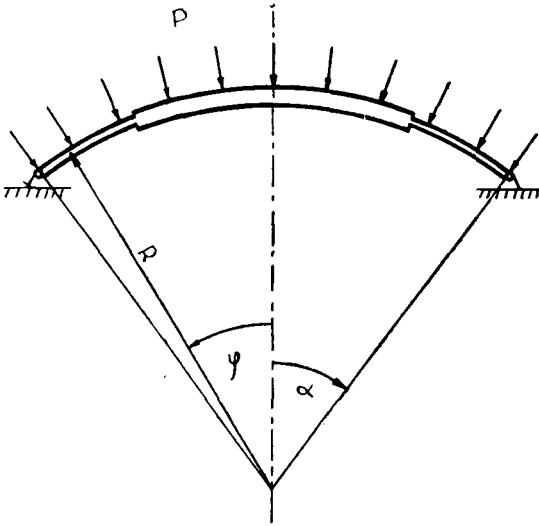
В данной статье спроектирована оболочка минимального веса с минимальным прогибом. Задача решена при помощи принципа максимума Понтрягина.

1. Постановка задачи

Рассмотрим пологую сферическую оболочку с радиусом R со свободной опорой. Толщина оболочки $2h$, где переменная h удовлетворяет неравенству $h_1 \leq h \leq h_2$. Здесь h_1 и h_2 заданные величины. Материал оболочки жестко-пластический, он подчиняется закону пластичности Треска и ассоциированному закону течения. Координата оболочки φ меняется в пределах $0 \leq \varphi \leq \alpha$. Нагрузка P — равномерно распределенная, внешняя и динамическая, причем $P = P_0 = \text{const}$, если $T \leq T_1$, и $P = 0$, если $T > T_1$, где T — время. Задача состоит в нахождении такой функции $h = h(\varphi)$, чтобы минимизировать выражение

$$J = c_1 \int_0^1 \omega |_{t=t_1} \sin \alpha x \, dx + 2c_2 \int_0^1 u \sin \alpha x \, dx. \quad (1.1)$$

Здесь ω , t , x и u — соответственно безразмерные прогиб, время, координата и толщина, c_1 и c_2 — весовые коэффициенты. Первое слагаемое описывает интегральный прогиб в момент времени t_1 , а второе — вес оболочки. Как известно, уменьшение веса происходит за счет уменьшения толщины оболочки, но уменьшению толщины сопутствует рост прогибов. Таким образом, следует найти компромиссное решение. После t_1 происходит



Фиг. 1.

движение по инерции при уменьшающейся скорости и в момент t_f движение прекратится. Условие (1.1) дает хорошие результаты, если нагрузка лишь немного превышает статически-разрушающую нагрузку, так как при больших нагрузках будет доминировать движение по инерции и в условии (1.1) нужно заменить ω при аргументе $t = 1$ на ω при аргументе $t = t_f$. Поэтому прогиб зависит в дальнейшем только от x .

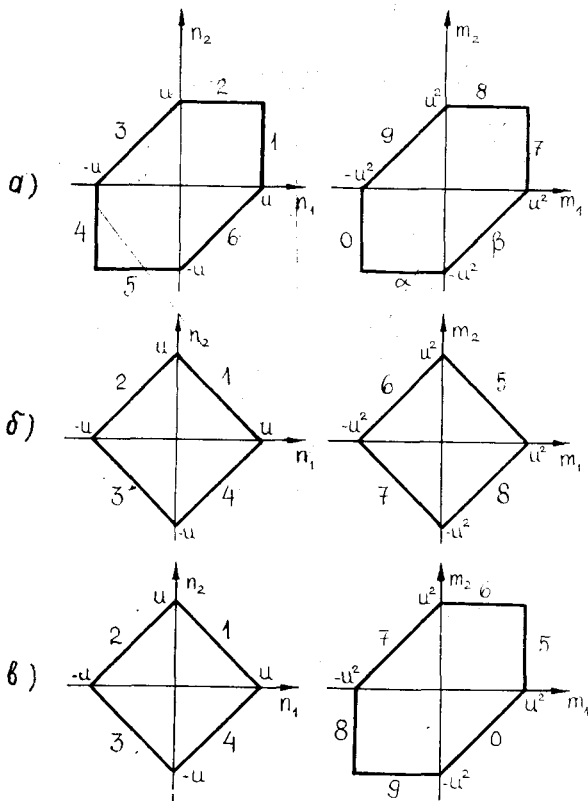
2. Основные соотношения

Уравнения движения имеют следующий вид (точка над буквой обозначает дифференцирование по t , а штрих — по x):

$$\begin{aligned} (n_1 x)' &= n_2 + x(\alpha^2 s + \alpha \gamma u v''), \\ (s x)' &= \gamma x u \omega'' - x(n_1 + n_2 + p), \\ (m_1 x)' &= m_2 + \frac{x s}{b}, \end{aligned}$$

где использованы следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{N_\varphi}{N_{01}}, & n_2 &= \frac{N_\theta}{N_{01}}, & m_1 &= \frac{M_\varphi}{M_{01}}, & m_2 &= \frac{M_\theta}{M_{01}}, \\ s &= \frac{S}{\alpha N_{01}}, & p &= \frac{PR}{N_{01}}, & t &= \frac{T}{T_1}, & u &= \frac{h}{h_2}, \\ \omega &= \frac{W}{R}, & v &= \frac{V}{R}, & x &= \frac{\varphi}{\alpha}, & \delta &= \frac{h_1}{h_2}, \\ b &= \frac{h_2}{2R\alpha^2}, & \gamma &= \frac{\rho R^2}{\sigma T_1^2}. \end{aligned}$$



Фиг. 2.

Здесь N_φ и N_θ — усилия в оболочке, M_φ и M_θ — моменты, S — перерезывающая сила, b и γ — безразмерные константы, параметры оболочки, $N_{01} = 2\sigma h_2$; $M_{01} = \sigma h_2^2$; σ — предел текучести и ρ — плотность материала оболочки. Используем следующие кривые течения (см. фиг. 2):

Условие 2б встречалось раньше в работе [4]. В статье авторы заявляют, что при фигурах 2б получается самая низкая верхняя граница для разрушающей нагрузки и поэтому решение при этом самое правдоподобное.

Обобщенные деформации можно выразить в виде:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} - \omega; \quad \varepsilon_2 = \frac{v}{ax} - \omega,$$

$$K_1 = -b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + av \right); \quad K_2 = -\frac{b}{x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + av \right).$$

3. Решение задачи, если кривая течения — два шестиугольника

Предполагаем, что весь материал оболочки течет в режиме 5 + 8 (см. фиг. 2а). Тогда $n_2 = -u$ и $m = u^2$. Из ассоциированного закона течения, используя граничные условия

$$\omega|_{x=1} = v|_{x=1} = 0,$$

находим

$$v = \frac{Lt^2}{2} [1 - \cos(ax - \alpha)],$$

$$\omega = \frac{Lt^2}{2} \cdot \sin(ax - \alpha),$$

где L — константа. Введем фазовые координаты следующим образом:

$$z_1 = n_1 x, \quad z_2 = s x, \quad z_3 = m_1 x. \quad (3.1)$$

При помощи основной системы:

$$\begin{aligned} z_0' &= \frac{c_1 L}{2} \sin(ax - \alpha) \cdot \sin ax + 2c_2 u \sin ax, \\ z_1' &= -u + a^2 z_2 + \alpha \gamma u x L \cdot [1 - \cos(ax - \alpha)], \\ z_2' &= x(u - p) - z_1 + \gamma u L \sin(ax - \alpha), \\ z_3' &= u^2 + \frac{z_2}{b}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$L' = 0$$

образуем функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{c_1 L}{2} \sin(ax - \alpha) \cdot \sin ax - 2c_2 u \sin ax + \\ &+ \psi_1 [-u + a^2 z_2 + \alpha \gamma u x L (1 - \cos(ax - \alpha))] + \\ &+ \psi_2 [x(u - p) - z_1 + \gamma u L \sin(ax - \alpha)] + \\ &+ \psi_3 \left(u^2 + \frac{z_2}{b} \right), \end{aligned}$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 и ψ_4 — сопряженные переменные. Так как $\psi^i = -\partial H / \partial z_i$ при $i = 1, \dots$, то

$$\psi_1' = \psi_2; \quad \psi_2' = -a^2 \psi_1 - \frac{\psi_3}{b}; \quad (3.3)$$

$$\psi_3' = 0; \quad \psi_4' = \frac{c_1}{2} \sin(ax - \alpha) \cdot$$

$$\cdot \sin ax - \psi_1 \alpha \gamma u x \cdot [1 - \cos(ax - \alpha)] - \psi_2 \gamma u \sin(ax - \alpha).$$

Граничные условия и условия трансверсальности приобретают вид:

$$z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = z_3(1) = 0, \\ \psi_4(0) = \psi_2(1) = \psi_1(1) = \psi_4(1) = 0.$$

Вычисляя теперь сопряженные переменные, найдем

$$\psi_1 = \frac{E}{a^2 b} [\cos(ax - a) - 1], \\ \psi_2 = \frac{E}{ab} \sin(a - ax), \\ \psi_3 = E = \text{const.}$$

Переменную ψ_4 пока вычислять нельзя, так как не известна функция $u(x)$. Функцию Гамильтона удобнее переписать в виде

$$H = Eu^2 + Au + B,$$

где

$$A = -2c_2 \sin ax - \frac{Ex}{ab} \sin(ax - a) + \\ + \frac{E}{a^2 b} [1 - \cos(ax - a)] \cdot (1 - 2\alpha y x L); \\ B = \frac{E}{ab} (xp + z_1) \sin(ax - a) + \frac{Ez_2}{b} \cdot \cos(ax - a) - \\ - \frac{c_1 L}{2} \sin(ax - a) \cdot \sin ax.$$

Неизвестную u нужно определить из условия максимальности функции H , причем u удовлетворяет неравенству $\delta \leq u \leq 1$. На плоскости uH графиком гамильтониана H' является парабола. По уравнениям (3.3) можно показать, что $E \geq 0$, так как $\psi_4(0) = \psi_4(1) = 0$ и ψ_4' меняет знак в отрезке $[0, 1]$. Парабола имеет точку минимума при $u = u_1$, где $u_1 = -A/(2E)$. Поэтому толщина u постоянная или кусочно-постоянная.

Можно сделать вывод: $u = 1$, если $u_1 < 0$. Если $u_1 > 0$, имеем $u = 1$ при $H(1) > H(\delta)$ и $u = \delta$ при $H(\delta) > H(1)$. В центре оболочки $A > 0$, поэтому $u = 1$. На краю или $u = \delta$, или $u = 1$. Теперь можно найти из систем (3.1) и (3.2) усилие n_1 и момент m_1 . Если $0 \leq x \leq y$, получим:

$$n_1 = 1 - p - \frac{(2-p)}{ax} \sin ax + \frac{\gamma L}{ax} \cdot (1 - \cos ax) - \\ - 0,5\gamma Lax \cdot \cos(ax - a), \\ m_1 = 1 + (2-p)(ax - \sin ax) \cdot (\alpha^3 bx)^{-1} - \frac{\gamma Lx}{2ab} \cdot [1 + \cos(ax - a)] + \\ + \frac{\gamma L}{a^2 b} \sin(ax - a) + \frac{\gamma L}{\alpha^3 bx} \cdot [\cos(ax - a) - \cos ax + 1 - \cos a].$$

Если $y \leq x \leq 1$, получим

$$n_1 = \delta - p + (ax)^{-1} [(1 - \delta) \sin(ax - ay) (2 - \gamma Lay) + \\ + (p - 2) \sin ax + \gamma L (\delta - \cos ax) - 0,5 \gamma L \alpha^2 \cos(ax - a) \cdot \\ \cdot (\delta x^2 + y^2 - y^2 \delta) + (1 - \delta) \cos(ax - ay) (\gamma L + ay)],$$

$$m_1 = \delta^2 + y(1 - \delta^2)x^{-1} + 2(\alpha x \delta - \sin \alpha x) \cdot (\alpha^3 x b)^{-1} - \\ - p(\alpha x - \sin \alpha x) \cdot (\alpha^3 b x)^{-1} + \\ + \gamma Ly(1 - \delta) \cdot [\sin(ay - a) - \sin(ax - ay)] \cdot (\alpha^2 x b)^{-1} - \\ - L \gamma (\delta x^2 + y^2 - y^2 \delta) [1 + \cos(ax - a)] (2 \alpha x b)^{-1} + \\ + 2(1 - \delta) \sin(ax - ay) (\alpha^3 x b)^{-1} + \\ + \delta L \gamma [\cos(ax - a) + \alpha x \sin(ax - a)] (\alpha^3 x b)^{-1} + \\ + L \gamma (\delta - \cos a - \cos \alpha x) (\alpha^3 x b)^{-1} + \\ + y(1 - \delta) [1 + \cos(ax - ay)] (\alpha^2 x b)^{-1} + \\ + \gamma L (1 - \delta) [\cos(ax - ay) + \cos(ay - a)] (\alpha^3 x b)^{-1}.$$

Из условия $m_1(1) = 0$ можно вычислить $L = F(\gamma G)^{-1}$, где

$$F = \alpha^3 b [\delta^2 + y(1 - \delta^2)] + 2(\alpha \delta - \sin \alpha) - p(\alpha - \sin \alpha) + \\ + 2(1 - \delta) \sin(\alpha - ay) + ay(1 - \delta) [1 + \cos(\alpha - ay)];$$

$$G = \alpha^2 [\delta + y^2(1 - \delta)] + 2(\cos \alpha - \delta) - \\ - 2(1 - \delta) [\cos(ay - a) + ay \sin(ay - a)].$$

Неизвестное E найдем из условия $\psi_4(1) = 0$. Получается

$$E = \frac{c_1 \alpha^2 b (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{4 \gamma G}.$$

Еще надо найти уравнение для вычисления y . Для этого используем равенство

$$H(x=y-0, u=1) = H(x=y+0, u=\delta),$$

откуда получим

$$(1 + \delta) \alpha^2 b - 8 c_2 \gamma G \sin ay / (c_1 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)) + \\ + (1 - 2 \gamma Lay) [1 - \cos(ay - a)] - ay \sin(ay - a) = 0.$$

Решение является статически возможным, если мы не выйдем за границы фигуры 2а. Это значит, что $-1 \leq n_1 \leq 0$ и $0 \leq m_1 \leq 1$, если $x \leq y$, а в отрезке $y \leq x \leq 1$ должны выполняться условия $-\delta \leq n_1 \leq 0$ и $0 \leq m_1 \leq \delta^2$. Решение является кинематически возможным, если $\dot{w} > 0$, а это приводит к $L < 0$.

4. Примеры

Решение задачи при использовании фигур 2б и 2в вместо 2а надо производить аналогичным способом. Из-за нехватки места нельзя здесь этого сделать.

1. Если выбрать $\alpha = 0,1$; $b = 0,09$; $p = 2,8$; $\gamma = 0,7$, то координаты точки y , вычисленные по фиг. 2а, даны в таблице 1.

2. Если выбрать $p = 2,5$ вместо $p = 2,8$ (остальные не изменять), то при $\delta = 0,5$ и $c_2/c_1 = 1/3$ получим $L = -3,732$ и $y = 0,7682$.

3. Используем такие же начальные данные, как и в первом случае, но вместе с фигурой 2б. Значения неизвестного y даны в таблице 2.

4. Используя фигуру 2в, с начальными данными $b = 0,09$; $p = 2,8$; $a = 0,1$; $\gamma = 0,7$, получим следующие значения для y (см. табл. 3). Если сравнить процесс вычисления при всех трех фигурах, то легче и удобнее вычислять, используя фигуры 2б и

Таблица 1

c_2/c_1	y		
	$\delta = 0.25$	$\delta = 0.50$	$\delta = 0.75$
0.1	0.98	1.00	1.00
0.2	0.87	0.89	0.90
0.5	0.69	0.69	0.69
1.0	0.57	0.54	0.51
2.0	0.46	0.41	0.35
5.0	0.33	0.25	0.16
10.0	0.25	0.15	0.08

Таблица 2

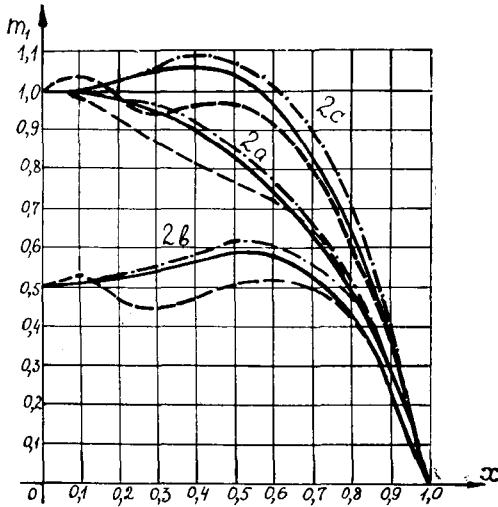
c_2/c_1	y		
	$\delta = 0.25$	$\delta = 0.50$	$\delta = 0.75$
0.1	1.00	—	1.00
0.2	0.94	—	0.97
0.5	0.80	—	0.81
1.0	0.68	0.67	0.64
2.0	0.56	0.51	0.42
5.0	0.41	0.28	0.00
10.0	0.30	0.00	0.00

Таблица 3

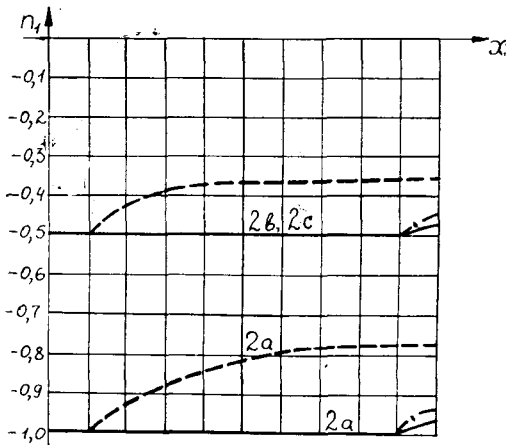
c_2/c_1	y		
	$\delta = 0.25$	$\delta = 0.50$	$\delta = 0.75$
0.1	0.98	1.00	1.00
0.2	0.88	0.90	0.91
0.5	0.73	0.73	0.73
1.0	0.60	0.59	0.56
2.0	0.49	0.44	0.38
5.0	0.35	0.27	0.13
10.0	0.26	0.13	0.03

2в. Притом фигура 2б больше соответствует статическим требованиям пластического режима. Хотя при фигуре 2в момент m_1 немного превышает единицу, все же достигается большее сходство значения y в сравнении с фигурой 2а.

5. Используя все три фигуры (2а, 2б, 2в) с начальными данными $b = 0,09$; $\gamma = 0,7$; $p = 2,8$; $\alpha = 0,1$; $\delta = 0,75$; $y = 0,9126$, вычислены значения момента m_1 и усилия n_1 . Результаты видны на фигурах 3 и 4 (непрерывная линия). Те же самые функции при $y = 0,1311$ (остальные не изменять) изображены прерывистой линией. Наконец момент m_1 и усилие n_1 при $\delta = 0,5$ и $y = 0,8983$ изображены пунктиром.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Литература

1. Лепик Ю. Р., Об оптимизации жестко-пластических оболочек вращения при динамических нагрузках. Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1978, № 2, 136—144.
2. Одишвили К. А., Оптимальный закон изменения толщины пологой оболочки вращения. Тр. ЦНИИ строит. констр., М. 1971, 19, 113—118.
3. Пунгар Э., Оптимальное проектирование оболочек вращения с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 295—302.
4. Jones, N., Ich, N. T., The load carrying capacities of symmetrically loaded shallow shells. Int. J. Solids and Struct., 1972, 8, № 12, 1339—1351.

Поступило
8 II 1977

LAME-SFÄÄRILISE KOORIKUTE OPTIMAALNE PROJEKTEERIMINE DÜNAAMILISE KOORMUSE KORRAL

J. Kirs

Resümee

Artiklis projekteeritakse vabalt toetatud lame sfääriline koorik jäik-plastsest materjalist nii, et kaal ja läbipaine oleksid võimalikult väikesed. Koormus on dünaamiline, mis mõjub teatud aja jooksul ja siis järsku võetakse ära. Lahendamisel kasutatakse kolme eri voolamiskõverat ja saadud tulemusi võrreldakse omavahel.

MINIMUM WEIGHT AND DEFORMATION DESIGN OF SHALLOW SHELLS

J. Kirs

Summary

In this article the designing of simply supported rigid-plastic shallow shells under dynamic external pressure is examined. The aim is to achieve a situation, where weight and normal deformation are as small as possible. The problem is solved by using three different yield-curves. The designed shells have piece-wise constant thickness.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

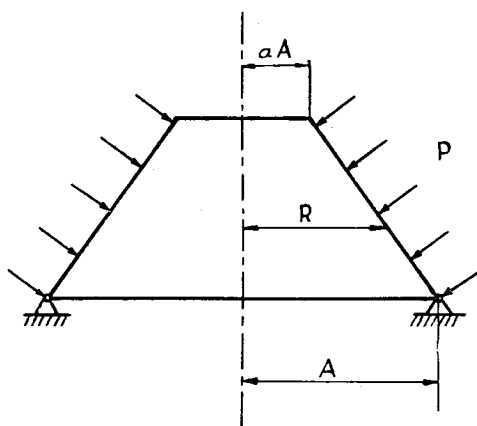
Ю. Кирс

Таллинский политехнический институт

В данной работе рассматриваются коническая и цилиндрическая оболочки из жестко-пластического материала со свободной опорой, нагруженные динамической нагрузкой. Дана методика определения толщины оболочки в зависимости от координаты R так, чтобы комбинация от веса оболочки и от прогиба были как можно малы.

§ 1. Постановка задачи и основные соотношения для конической оболочки

Рассматриваем оболочку толщиной $2H$, где $H = H(R)$ и R — координата. К ней приложена равномерно распределенная внешняя нагрузка P , постоянная в течение времени $0 \leq \tau \leq \tau_0$, которая затем вдруг снимается.



Фиг. 1.

Используем следующие безразмерные переменные и постоянные:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{N_x}{N_{01}}, & n_2 &= \frac{N_\theta}{N_{01}}, & m_1 &= \frac{M_x}{M_{01}}, & m_2 &= \frac{M_\theta}{M_{01}}, \\ s &= \frac{S}{N_{01}}, & r &= \frac{R}{A}, & t &= \frac{\tau}{\tau_0}, & p &= \frac{PA}{N_{01}}, \\ \omega &= \frac{W}{A}, & v &= \frac{V}{A}, & h &= \frac{H}{H_2}, & \delta &= \frac{H_1}{H_2}, \\ K &= \frac{H_2}{2A}, & \gamma &= \frac{\mu A^2}{2\sigma\tau_0^2}, \end{aligned}$$

где N_x и N_θ — усилия в оболочке, M_x и M_θ — моменты, S — перерезывающая сила, W и V — прогиб и продольное размещение, σ — предел текучести и μ — пространственная плотность материала оболочки, $N_{01} = 2\sigma H_2$, $M_{01} = \sigma H_2^2$.

Нужно определить функцию H , которая удовлетворяет неравенству $H_1 \leq H \leq H_2$, чтобы было минимальным выражение

$$J = c_1 \int_a^1 \omega |_{t=1} r dr + c_2 \int_a^1 h r dr,$$

где c_1 и c_2 — весовые коэффициенты.

Уравнения движения можно написать в виде

$$\begin{aligned} (rn_1)' &= n_2 + r\gamma h v'' \cos^{-1} \alpha, \\ (rs)' &= -n_2 \tan \alpha + r \cdot \cos^{-1} \alpha \cdot (\gamma h \omega'' - p), \\ (rm_1)' &= m_2 + rs(k \cos \alpha)^{-1}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где штрих у символа обозначает дифференцирование по x , а точка — по t .

Обобщенные деформации выразим следующим образом

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= v' \cos \alpha, & \varepsilon_2 &= (v \cos \alpha - \omega \sin \alpha) \cdot r^{-1}, \\ k_1 &= -k\omega'' \cos^2 \alpha, & k_2 &= -k\omega' r^{-1} \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Решим задачу, используя две различные кривые текучести (см. фиг. 2 предыдущей статьи).

Используем принцип максимума Понтрягина для решения задачи.

§ 2. Решение задачи для конической оболочки

При использовании фигуры 2б предполагаем, что вся оболочка находится в пластическом состоянии в режимах 3 и 5, поэтому $n_2 = -n_1 - h$ и $m_2 = -m_1 + h^2$. Из ассоциированного закона течения можно найти неизвестные ω и v :

$$v = 0,25Dt^2(r^2 - 1), \quad \omega = -0,25Dt^2(1 - r)^2 \tan \alpha,$$

где D — константа интегрирования, которое определяется позднее.

Пусть n_1 , s и m_1 будут фазовыми переменными, D — параметр и h — управление.

Из основной системы:

$$\begin{aligned} n_1' &= -\frac{2}{r} n_1 - \frac{h}{r} + \frac{\gamma D \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} h (2r - 1 - r^2), \\ s' &= r^{-1} (n_1 + h) \tan \alpha - \frac{s}{r} - \frac{p}{\cos \alpha} + \frac{\gamma D h (r^2 - 1)}{2 \cos \alpha}, \\ m_1' &= -\frac{2}{r} m_1 + \frac{h^2}{r} + \frac{s}{k \cos \alpha}, \\ D' &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$I' = 0, 25c_1 D (r^3 - r) + c_2 h r$$

образуем функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} H_A &= -\frac{c_1 D}{4} (r^3 - r) - c_2 h r + \\ &+ \psi_1 \left[-\frac{2}{r} n_1 - \frac{h}{r} + \frac{\gamma D \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} h (2r - 1 - r^2) \right] + \\ &+ \psi_2 \left[r^{-1} (n_1 + h) \tan \alpha - \frac{s}{r} - \frac{p}{\cos \alpha} + \frac{\gamma D h}{2 \cos \alpha} (r^2 - 1) \right] + \\ &+ \psi_3 \left[-\frac{2}{r} m_1 + \frac{h^2}{r} + \frac{s}{k \cos \alpha} \right]. \end{aligned}$$

Нужно ввести и сопряженные переменные:

$$\begin{aligned} \psi_1' &= -\frac{\partial H_A}{\partial n_1} = \frac{2\psi_1}{r} - \psi_2 \frac{\tan \alpha}{r}, \\ \psi_2' &= -\frac{\partial H_A}{\partial s} = \frac{\psi_2}{r} - \frac{\psi_3}{k \cos \alpha}, \\ \psi_3' &= -\frac{\partial H_A}{\partial m_1} = \frac{2\psi_3}{r}, \\ \psi_4' &= -\frac{\partial H_A}{\partial D} = 0, 25c_1 (r^3 - r) + \psi_1 h (1 - r)^2 \cdot \frac{\gamma \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} - \\ &- \psi_2 h (r^2 - 1) \gamma (2 \cos \alpha)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для решения используем следующие граничные условия:

$$n_1(a) = s(a) = m_1(a) = m_1(1) = 0,$$

$$\psi_1(1) = \psi_2(1) = \psi_4(a) = \psi_4(1) = 0.$$

Решив три первых уравнения в системе (2.2) и используя граничные условия, получим:

$$\psi_1 = \frac{Er(r-1)^2}{2k \cos^2 \alpha} \cdot \sin \alpha, \quad \psi_2 = \frac{E(r-r^3)}{2k \cos \alpha}, \quad \psi_3 = Er^2.$$

Функцию Гамильтона можно выразить в виде

$$H_A = Erh^2 + Lh + T, \quad (2.3)$$

где

$$L = -c_2 r + \frac{Er(1-r)\sin\alpha}{k\cos^2\alpha} - \frac{E\gamma Dr}{4k\cos^4\alpha} r(1-r)^2(1+r^2+2r\cos 2\alpha)$$

и

$$T = -\frac{c_1 Dr}{4}(r^2-1) + \frac{n_1 E \sin\alpha}{2k\cos^2\alpha}(1-r)(3r-1) + \\ + \frac{sE(3r^2-1)}{2k\cos\alpha} - \frac{\rho Er(1-r^2)}{2k\cos^2\alpha} - 2m_1 Er.$$

Из выражения

$$\psi_4' = \frac{c_1}{4}(r^3-r) + \frac{E\gamma rh}{4k\cos^4\alpha} \cdot (1-r)^2(1+r^2+2r\cos 2\alpha),$$

учтя, что $\psi_4(a) = \psi_4(1) = 0$, и ψ_4' должно менять знак в отрезке $[a, 1]$, можно сделать вывод, что $E > 0$. Поэтому по уравнению (2.3) график функции H_A от аргумента h — парабола с точкой минимума при $h = h_e$.

Как и в первой статье, мы имеем три типа решения:

- а) $h = 1$ на протяжении всей оболочки,
- б) $h = \delta$ на протяжении всей оболочки,
- в) $h = 1$, если $a \leq r \leq y$, и $h = \delta$, если $y \leq r \leq 1$.

Типы а) и б) — особые случаи от типа в). Поэтому рассматривается только последний.

Нужно интегрировать три первых уравнения из системы (2.1) и последнее из (2.2), подставляя 1 вместо h в отрезке $[a, y]$ и δ , если $y \leq r \leq 1$. Из условия $m_1(1) = \psi_4(1) = 0$ можно найти неизвестные постоянные D и E :

$$D = \frac{F_1}{\gamma F_2}, \quad E = \frac{15c_1 k (a^2 - 1)^2 \cos^4 \alpha}{2\gamma F_3},$$

где

$$F_1 = 15\rho(1-a^2)^2 + 60k\cos^2\alpha \cdot [a^2 - y^2 - \delta^2(1-y^2)] + \\ + 20\sin\alpha \cdot [(1-\delta)(1-y)^2(1+2y) - (1-a)^2(1+2a)],$$

$$F_2 = (1-\delta)(1-y)^3[\tan^2\alpha \cdot (1-y)^2(1+5y) + 5(1+y)^3] - \\ - (1-a)^3[\tan^2\alpha \cdot (1-a)^2(1+5a) + 5(1+a)^3],$$

$$F_3 = (1-\delta)(y-1)^3(5y^3+3y^2+9y+3) - (a-1)^3(5a^3+3a^2+9a+3) + \\ + 2(1-\delta)\cos 2\alpha \cdot (y-1)^3(6y^2+3y+1) - \\ - 2\cos 2\alpha \cdot (a-1)^3 \cdot (6a^2+3a+1).$$

Координаты точки y найдем из уравнения

$$(1+\delta)k\cos^2\alpha - \frac{2c_2\gamma F_3}{15c_1(1-a^2)^2\cos^2\alpha} + (1-y)\sin\alpha - \\ - \frac{\gamma D}{4\cos^2\alpha} \cdot (1-y)^2(1+y^2+2y\cos\alpha) = 0.$$

Таблица 1

c_2/c_1	$\delta = 0.25$	$\delta = 0.50$	$\delta = 0.75$
0.1	0.86	0.86	0.86
0.2	0.79	0.78	0.77
0.5	0.72	0.69	0.65
1.0	0.67	0.63	0.60
2.0	0.64	0.60	0.60
5.0	0.61	0.60	0.60
10.0	0.60	0.60	0.60

Таблица 2

c_2/c_1	$\delta = 0.25$	$\delta = 0.50$	$\delta = 0.75$
0.1	0.94	0.94	0.95
0.2	0.87	0.87	0.87
0.5	0.78	0.76	0.74
1.0	0.72	0.69	0.64
2.0	0.68	0.63	0.60
5.0	0.63	0.60	0.60
10.0	0.60	0.60	0.60

Обратимся к фигуре 2а. В этом случае подставляем в систему (1.1) значения $n_2 = -h$ и $m_2 = h^2$ (режимы 5 и 8 на фиг. 2б), и из ассоциированного закона течения $v = 0$ и $\dot{w} = D(r - 1)$, вычисленных аналогичным методом, получим те же самые три вида оболочек, что и в первом случае. Произведя вычисления для вида б, получим

$$D = \frac{F_4}{\gamma F_5}, \quad E = \frac{c_1(1-a)^2(1+2a)\cos\alpha}{\gamma F_5},$$

$$F_4 = 6 \sin\alpha \cdot [(1-a)^2 - (1-\delta)(1-y)^2] - 2p(1+2a)(1-a)^2 - 12k \cos^2\alpha \cdot [a - y - \delta^2(1-y)],$$

$$F_5 = (1-a)^3(1+3a) - (1-\delta)(1-y)^3(1+3y).$$

Уравнение для вычисления точки y в этом случае выглядит

$$k \cdot \cos^2\alpha \cdot (1+\delta) + (1-y) \sin\alpha - \frac{2c_2\gamma y F_5}{c_1(1-a)^2(1+2a)} - \gamma y(1-y)^2 \cdot D = 0.$$

§ 3. Примеры

Если выбирать значения параметров следующим образом: $\alpha = 0,7854$ радиан, $k = 0,05$; $\gamma = 2$; $a = 0,6$; $p = 1,5$, то получаются результаты, приведенные в таблицах 1 и 2 для точки пе-

рехода y у кривых текучести 2а и 2б. На фигуре 2 изображены непрерывной линией графики усилия n_1 и момента m_1 в зависимости от координаты x . Значения параметров пусть остаются неизменными, но добавим $\delta = 0,75$ и $y = 0,8588$. То же самое, если $\delta = 0,5$ и $y = 8588$ на фиг. 2 изображено прерывистой линией.

§ 4. Цилиндрическая оболочка со свободной опорой

Рассматривается оболочка длиной $2L$, радиусом срединной поверхности R и толщиной H . Нагружена оболочка так же, как и коническая. Толщина H , которая меняется согласно неравенству $H_1 \leq H \leq H_2$, является также управлением. Начало координат O находится на срединной поверхности левого конца оболочки. Ось OX направлена параллельно оси оболочки и ось OZ — к центру по нормали.

Используем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{N_x}{\sigma H_2}, & n_2 &= \frac{N_\varphi}{\sigma H_2}, & m &= \frac{M_x}{\sigma H_2^2}, \\ x &= \frac{X}{L}, & h &= \frac{H}{H_2}, & \omega &= \frac{W}{H_2}, \\ t &= \frac{\tau}{\tau_0}, & \delta &= \frac{H_1}{H_2}, & q &= \frac{PL^2}{\sigma H_2^2}, \\ \alpha^2 &= \frac{L_2}{RH_2}, & k &= \frac{\mu L^2}{\sigma \tau_0^2}, \end{aligned}$$

где τ — время, σ — предел текучести, μ — плотность материала оболочки.

Уравнение движения можно теперь выразить в виде:

$$m'' + \alpha^2 n_2 + q = kh\omega'', \quad (4.1)$$

где точка над буквой обозначает дифференцирование по t , а штрих — по x . В уравнении (4.1) отсутствует член $n_1\omega''$, так как предполагается, что нагружение происходит так, что n_1 равняется все время нулю. На плоскости n_2m кривая текучести изображается шестигульником. Пластическое течение материала происходит в режиме

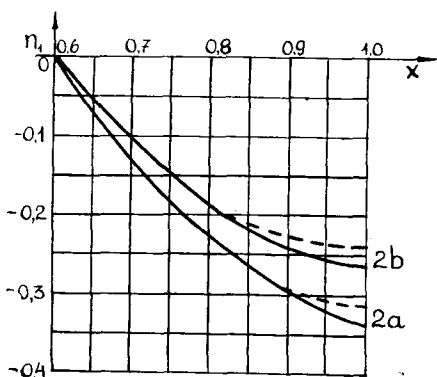
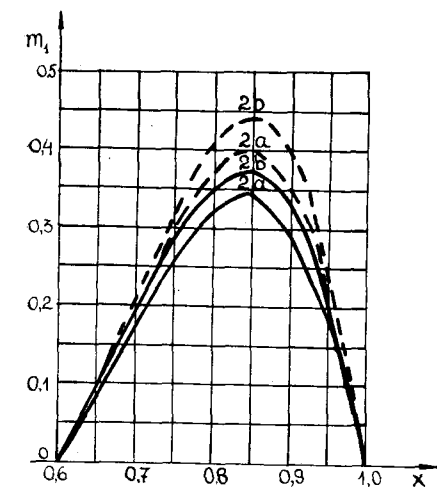
$$n_2 = \frac{2m}{h} - h.$$

Из ассоциированного закона течения получается уравнение

$$\omega'' + \frac{2\alpha^2}{h} \omega = 0.$$

Чтобы минимизировать интеграл

$$J = \int_0^1 (c_1 \omega|_{t=1} + c_2 h) dx,$$



Фиг. 2.

используем в качестве фазовых переменных Y_0 , m , $m' = Q$, $f, f' = g$. Основная система дифференциальных уравнений получается

$$Y_0' = \frac{c_1}{2} f + c_2 h,$$

$$m' = Q,$$

$$Q' = kfh - q + \alpha^2 h - \frac{2\alpha^2}{h} m,$$

$$\omega''' \equiv f' = g,$$

$$g' = -\frac{2\alpha^2}{h} f.$$

Функцию Гамильтона можно выразить в виде

$$H_A = h \cdot V - \frac{2\alpha^2}{h} \cdot S + H_A^0,$$

где H_A^0 — часть, явно не зависящая от h , и

$$V = \psi_2(\alpha^2 + fk) - c_2,$$

$$S = 2\alpha^2(\psi_2 m + \psi_4 f).$$

Так как $\psi_2(0) = 0$ и $V(0) < 0$ и $s > 0$, то имеем $h = 1$, если $h_0 > 1$; $h = h_0$, если $\delta \leq h_0 \leq 1$; и $h = \delta$, если $h_0 \leq \delta$, где

$$h_0 = \sqrt{\frac{2\alpha^2(\psi_2 m + \psi_4 f)}{c_2 - \alpha^2 \psi_2 - \psi_2 f k}}. \quad (4.2)$$

Для толщины $h(x)$ оболочки получим следующие значения: $h = \delta = \text{const}$, если $0 \leq x \leq y_1$, $h = h_0$ (меняется по закону 4.2), если $y_1 \leq x \leq y_2$, $h = 1 = \text{const}$, если $y_2 \leq x \leq 1$. Чтобы решить задачу до конца, нужно решить систему

$$f'' + \frac{2\alpha^2}{h} f = 0,$$

$$\psi_2'' + \frac{2\alpha^2}{h} \psi_2 = 0,$$

$$m'' + \frac{2\alpha^2}{h} m = fkh - q + \alpha^2 h,$$

$$\psi_4'' + \frac{2\alpha^2}{h} \psi_4 = \psi_2 kh - \frac{1}{2} c_1, \quad (4.3)$$

где переменная $h = \delta$ в промежутке $(0, y_1)$, $h = h_0$ в промежутке (y_1, y_2) и $h = 1$ в промежутке $(y_2, 1)$. Задачу осложняет обстоятельство, что половина граничных условий даны при $x = 0$ и половина при $x = 1$. Надо найти такие значения для параметров l_1, l_2, l_3 и l_4 , чтобы выражение $B = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2$ было минимальным. Здесь $\Delta_1 = m'(1)$; $\Delta_2 = \psi_4'(1)$; $\Delta_3 = \psi_4(1)$ и $\Delta_4 = m(1) - 0,25 h(1)$. Параметры l_1, l_2, l_3 и l_4 вводятся при интегрировании системы (4.3) в промежутке $(0, y_1)$. Начальное приближение вычислим по уравнению

$$l_i = 0,5[l_i|_{h=\delta} + l_i|_{h=1}] \quad (i=1, 2, 3 \text{ и } 4).$$

Следующие приближения можно найти методом итераций, а можно и простым подбором. В пользу последнего говорят факты, что 1) промежутки (y_1, y_2) совсем маленький, 2) при изменении параметров l_i в области $[l_i(\delta), l_i(1)]$ изменяется функция $h(x)$ совсем мало.

Примеры. 1. Пусть $\alpha = 1,5$; $\delta = 0,5$; $k = 1$; $q = 1, 9$; $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$. Взяв $l_1 = 1,56$; $l_2 = 0,93$; $l_3 = 0,081$ и $l_4 = 0,027$, получаем, что $y_1 = 0,1935$; $y_2 = 0,2248$ и $B = 0,0267$.

2. Если $\alpha = 1$; $\delta = 0,75$; $k = 1$; $q = 1$; $c_1 = 4$ и $c_2 = 1$, то $l_1 = 0,18$; $l_2 = 2,7$; $l_3 = 0,2238$ и $l_4 = 0,298$. Получается, что $y_1 = 0,1795$ (тогда $h = 0,75$), $y_2 = 0,1932$ (тогда $h = 1,00$), а при $x = 0,1897$ имеем $h = 0,9200$ и $B = 0,066$.

Поступило
8 II 1977

JÄIK-PLASTSETE KOORIKUTE OPTIMAALNE PROJEKTEERIMINE

J. Kirs

Resümee

Artiklis projekteeritakse vabalt toetatud kooniline ja silindriline koorik nii, et kaal ja läbipaine oleksid võimalikud väikesed. Materjal on jäik-plastne, koorik on koormatud dünaamilise koormusega, mis mõjub teatud aja jooksul ja siis võetakse järsku ära. Voolamiskõverana kasutatakse koonilise kooriku puhul nii kaht kuusnurka, kui kaht nelinurka, silindri puhul üht kuusnurka. Leitud lahend sisaldab tükiti-konstantse paksuse jaotuse koonilise ning muutuva paksuse silindrilise kooriku puhul.

OPTIMUM DESIGN OF CONICAL AND CYLINDRICAL SHELLS

J. Kirs

Summary

In this article the designing of simply supported rigid-plastic conical and cylindrical shells under dynamic external pressure is examined. The aim is to achieve a situation, where both weight and normal deformations are as small as possible. The problem is solved by using two different yield-curves in the case of conical shells; one yield-curve in the case of a cylindrical shell contains a segment with changing thickness.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Э. Сакс. О жестко-пластическом кручении круглых валов переменного диаметра	3
E. Saks. Muutuva läbimõõduga ümmarguste võllide jäikplastsest väändest. <i>Resümees</i>	7
E. Saks. On rigid-plastic torsion of round shafts of variable diameter. <i>Summary</i>	7
Я. Леллеп. К оптимальному проектированию кольцевых пластин при установившейся ползучести	8
J. Lellep. Rõngasplaatide optimaalne projekteerimine statsionaarse roomavuse korral. <i>Resümees</i>	15
J. Lellep. On the optimal design of annular plates in the case of steady creep. <i>Summary</i>	15
Ю. Лепик. Оптимальное проектирование жестко-пластических балок под действием динамических нагрузок	16
Ü. Lepik. Jäik-plastsete talade optimaalne projekteerimine dünaamilise koormamise korral. <i>Resümees</i>	28
Ü. Lepik. Optimal design of rigid-plastic beams under dynamic loading. <i>Summary</i>	28
И. Вайникко и К. Соонетс. Оптимальное проектирование балки ступенчато-переменной толщины под действием динамической сосредоточенной нагрузки	29
I. Vainikko ja K. Soonets. Dünaamilise üksikkoormuse all astmeliselt muutuva paksusega tala optimaalne projekteerimine. <i>Resümees</i>	36
I. Vainikko and K. Soonets. Optimal design of a stepped beam under single dynamic load. <i>Summary</i>	36
Ю. Лепик и Э. Сакков. Дополнение к динамической задаче оптимизации жестко-пластических балок в приближенной постановке	37
Ü. Lepik ja E. Sakkov. Täiendus dünaamilisele ülesandele jäik-plastsete talade optimeerimisest ligikaudses lähenduses. <i>Resümees</i>	39
Ü. Lepik and E. Sakkov. Supplement to the optimal design of rigid-plastic beams. <i>Summary</i>	39
Э. Сакков. К оптимальному проектированию жестко-пластической свободной балки ступенчато-переменной толщины под действием динамической нагрузки	40
E. Sakkov. Astmeliselt muutuva paksusega jäik-plastse vaba tala optimeerimisest dünaamilise koormuse korral. <i>Resümees</i>	44
E. Sakkov. On the optimal design of a nonsupported stepped beam under dynamic loading. <i>Summary</i>	44
К. Соонетс и А. Хартикайнен. Оптимизация динамически нагруженной жестко закрепленной балки ступенчато-переменной толщины	45
K. Soonets ja A. Hartikainen. Astmeliselt muutuva paksusega jäigalt kinnitatud tala optimeerimine dünaamilise koormuse korral. <i>Resümees</i>	51
K. Soonets and A. Hartikainen. Optimal design of a clamped stepped beam under impulsive loading. <i>Summary</i>	51
Я. Леллеп. Оптимальное расположение дополнительной опоры для импульсивно нагруженной асучконой балки	52
J. Lellep. Lisatoe optimaalse asukoha määramine dünaamiliselt koormatud tala jaoks. <i>Resümees</i>	57
J. Lellep. Optimal location of the additional support for an impulsively loaded beam. <i>Summary</i>	57

К. Кенк, Р. Арутюнян и В. Чебанов. О влиянии нестабильных свойств на циклическое упрочнение пластической среды	58
K. Kenk, R. Arutunjan ja V. Tšebanov. Mittestabiilsete omaduste mõju plastse keskkonna tsüklilisele kalestumisele. <i>Resüme</i>	63
K. Kenk, R. Arutyunyan and V. Chebanov. On the influence of unstable properties on cyclic hardening of plastic materials. <i>Summary</i>	63
М. Хейнлоо. Алгебра дробно-рациональных функций и ее применение в задачах вязкоупругости	64
M. Heinloo. Murdratsionaalsete funktsioonide algebra ja selle rakendamise viskooselastsusteooria ülesannetes. <i>Resüme</i>	71
M. Heinloo. The algebra of fractional rational functions and its application in the problems of viscoelasticity. <i>Summary</i>	71
М. Хейнлоо. Проектирование многослойных сферических сосудов, цилиндрических труб и круглых дисков для уменьшения амплитуды скачков в волнах напряжений	72
M. Heinloo. Mitmekihiliste sfääriliste anumate, silindriliste torude ja ümmarguste ketaste projekteerimine pingelainete katkevuste amplituudide vähendamiseks. <i>Resüme</i>	74
M. Heinloo. The design of the multilayer spherical vessels, cylindrical tubes and circular discs for the decrease of the amplitudes of the discontinuities on the stress waves. <i>Summary</i>	74
Г. Гольст и О. Сильде. Дифференциальные принципы механики на основе уравнения возможной мощности	75
G. Golst ja O. Silde. Mehaanika diferentsiaalprintsübid võimaliku võimsuse võrrandi baasil. <i>Resüme</i>	81
G. Golst and O. Silde. Differentialprinzipien der Mechanik auf Grund der Gleichung der möglichen Leistung. <i>Zusammenfassung</i>	81
Х. Рельвик. Об уравнения типа Гамильтона	82
H. Relvik. Hamiltoni tüüpi võrranditest. <i>Resüme</i>	94
H. Relvik. About the equations of the Hamilton type. <i>Summary</i>	94
О. Сильде и А. Хайтин. Движение механических систем при учете уравнений связей общего вида	95
O. Silde ja A. Haitin. Mehaanika süsteemide liikumine üldiste sidemevõrrandite puhul. <i>Resüme</i>	99
O. Silde und A. Haitin. Die Bewegungsgleichungen des mechanischen Systems mit Berücksichtigung der Verbindungsgleichungen allgemeiner Art. <i>Zusammenfassung</i>	100
А. Хайтин. Метод уравнения возможной мощности в теории движения велосипеда	101
A. Haitin. Võimaliku võimsuse meetod jalgratta liikumise teoorias. <i>Resüme</i>	109
A. Haitin. The method of possible power equation in the theory of the bicycle movement. <i>Summary</i>	109
Ю. Кирс. Оптимальное проектирование пологих сферических оболочек при динамической нагрузке	110
J. Kirs. Lame-sfääriliste koorikute optimaalne projekteerimine dünaamilise koormuse korral. <i>Resüme</i>	118
J. Kirs. Minimum weight and deformation design of shallow shells. <i>Summary</i>	118
Ю. Кирс. Оптимальное проектирование жестко-пластических оболочек вращения при динамической нагрузке	119
J. Kirs. Jäik-plastsete koorikute optimaalne projekteerimine. <i>Resüme</i>	126
J. Kirs. Optimum design of conical and cylindrical shells. <i>Summary</i>	126