

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TEHNOLOOGIATEADUSKOND
FÜÜSIKA INSTITUUT

JENS-KRISTJAN LIIVAND

**Kosmoloogilised tihedusparameetrid
standardmudelis ja skalaar-tensor
kosmoloogias määratuna Ia-tüüpi
supernoovade vaatlustest**

BAKALAUREUSETÖÖ (12EAP)

Juhendaja:

PhD Margus SAAL

Kaitsmisele lubatud:

Juhendaja:

allkiri, kuupäev

Tartu 2013

Sisukord

1	Sissejuhatus	2
2	Üldrelatiivsusteooria ja standardmudel	5
2.1	Üldrelatiivsusteooria	5
2.2	Friedmanni kosmoloogia	6
2.3	Vaadeldavad suurused: heleduskaugus ja kaugusmoodul	11
3	Ia-tüüpi supernoovade vaatlused ja tulemuste analüüs	15
3.1	Ia-tüüpi supernoovad ja erinevad valimid	15
3.2	Analüüsi kirjeldus ja Maple'i programmi kirjeldus	16
3.3	Tulemused ja analüüs	19
4	Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria	22
4.1	Mõjufunktsionaal ja üldised väljavõrrandid	22
4.2	Konformne teisendus	22
4.3	Skalaar-tensor gravitatsiooniteooria väljavõrrandid FLRW geomeetrias	23
4.4	Parametriseeritud post-Newtoni formalism	24
4.5	STG võrrandid ja dimensioonitud tihedusparameetrid	25
5	Kokkuvõte	32
6	Summary	33
7	Tänu sõnad	34
	Viited	35
	Lisad	37

1 Sissejuhatus

Olles aastatel 1907 kuni 1915 tuletanud oma mittelineaarsed väljavõrrandid, uskus Albert Einstein, et need võrrandid on lahendamatud. Kuid juba samal aastal kui Einstein oma üldrelatiivsusteooria avaldas, suutis Karl Schwarzschild leida Einsteini väljavõrranditele täpse lahendi. Sellele järgnesid mitmed erinevad lahendid Einsteini väljavõrranditele, millest üheks tähtsaimaks on kujunenud Alexander Friedmanni poolt aastal 1922 tuletatud võrrandid, mis kirjeldavad universumi dünaamikat. Need võrrandid võimaldasid omakorda nii paisuvat kui ka kokku tõmbuvat universumi. Mõned aastad hiljem jõudis Georges Lemaitre tulemusele, et universum paisub ning see on saanud alguse lõplikus minevikus, ehk universum pole olnud igavene. Seetõttu, uskudes staatilisse universumisse, lisas Einstein oma võrranditesse kosmoloogilise konstandi. Aastal 1929 leidis kinnitust aga paisuva universumi hüpotees, kui Edwin Hubble avastas oma vaatlustulemusi analüüsid, et kauged galaktikad eemalduvad meist ning nende eemaldumise kiirus on võrdeline kaugusega. Sellest lähtudes ütles Einstein oma lisatud kosmoloogilise konstandi kohta, et see on tema karjääri kõige suurem äpardus.

Eeldades, et universum oli kauges minevikus väga kuum, esitas George Gamow 1948. aastal varajase universumi tuumasünteesi teooria, millest ta arvutas algse vesiniku ja heeliumi kontsentratsiooni suhte. Samuti ennustas ta, et universum peab olema täidetud kosmoloogilise musta keha spektrit omava foonkiirgusega ning mis on universumi paisumisel jahtunud. Pea kakskümmend aastat hiljem leidsid Arno Penzias ja Robert Woodrow Wilson mikrolainelisele foonkiirgusele ka kinnituse. Kuuma universumi teooriat hakati kutsuma Suure Paugu teooriaks ning temast sai standardmudel kosmoloogia jaoks [1], [2].

1998. aastal analüüsisid Saul Perlmutter, Brian Paul Schmidt ja Adam Guy Riess Ia-tüüpi supernoovade vaatlusi ning järeldasid, et universum mitte ainult ei paisu, vaid teeb seda ka kiirenevalt [3] [4]. 2011. aastal omistati neile ka selle tõestuse eest Nobeli füüsikaauhinnad. Selleks, et universumi standardmudel kirjeldaks universumit tõepoolest ka kiirenevalt, tuli aga võrranditesse taas tagasi tuua kosmoloogiline konstant. Ilmnes, et Einsteini “äpardus” oli kõigest lihtsalt vales kontekstis. Kosmoloogilisele konstandile vastavat energiatihedust on hakatud nimetama tumeenergiaks. Kosmoloogilise konstandi võib asendada ka ajast sõltuva dünaamilise tumeenergiaga, mille realiseerimiseks kasutatakse sageli gravitatsiooniga minimaalselt seotud skalaarvälja või modifitseeritakse üldrelatiivsusteooriat [5].

Kosmoloogilist materiat käsitletakse üldiselt niinimetatud ideaalse vedeliku lähendis ja tema oluliseks karakteristikuks on barotroopne indeks (kasutame paralleelselt ka terminit oleku-

parameeter) w_i , mis on defineeritud kui rõhu p ja energiatiheduse ρ suhe. Erinevatele materiaalidele vastavad erinevad barotroopse indeksi väärtused. Tavaliste materiaalide, nagu tolmu, kiirguse ja kosmoloogilise konstandi jaoks on barotroopne indeks konstantne. Dünaamilise tumeenergia jaoks võib ta olla aga ajast sõltuv. Vaatlused näitavad, et tumeenergiale vastav barotroopne indeks w_{de} on ligikaudu väärtusega -1 . Kuid 2002. aastal märkis Robert Reynolds Caldwell, et mõõtemääramatuse piirides on võimalikud ka barotroopse indeksi w_{de} väärtused, mis on väiksemad kui -1 [6]. Hilisemad täpsemad vaatlused seda ka ei välista. Sellist energiatihedust hakati nimetama fantoomenergiaks. Juhul, kui hilisemad vaatlused seda kinnitama peaksid, nõuab see standardmudelile mingisuguse uue materialiigi lisamist (kosmoloogiline konstant seda ei võimalda) või üldrelatiivsusteooria asendamist üldisema gravitatsiooniteooriaga. Kosmoloogia võrranditest (nn Friedmanni võrrandid) järeldeb, et ruumi paisudes fantoomenergia dominantises universumis energiatihedus kasvab. Sellest tuleneb aga, et mingil lõplikul ajahetkel kasvab energiatihedus lõpmata suureks, mis omakorda põhjustab kõikide seotud süsteemide lagunemise ehk niinimetatud kosmoloogilise suure rebendi (Big Rip) [6]. Samuti on uuritud mudeleid, kus barotroopne indeks on väiksem kui -1 , kuid läheneb sellele väärtusele. Vastavad mudelid võimaldavad lahendeid, kus singulaarsus tekib küll ajalises lõpmatuses, kuid lõpliku aja vältel toimub ka seotud süsteemide lõhkumine ehk nii öelda väike rebend (Little Rip) [7]. Samuti on kaalutud võimalusi, kus singulaarsust ei teki, aga Hubble'i parameeter kasvab piisavalt, et seotud süsteemid puruneks.

Praegune kosmoloogia standardmudel on heas kooskõlas vaatlustega, kuid siiski esinevad mõningad teoreetilised probleemid. Varajase universumi probleemide (nn horisondi ja tasasuse probleem) lahendamiseks on välja pakutud skalaarvälja dünaamilal põhinev inflatsioonimehhanism [8]. Hilise universumi probleemide (nn kosmoloogilise konstandi ja kokkusattumise probleem) üheks võimalikuks lahendiks on ajast sõltuv ja seega dünaamiline tumeenergia. Dünaamilist tumeenergiat on võimalik realiseerida mitmel viisil. Lihtsaim viis on sarnaselt inflatsioonimehhanismile minimaalselt seotud skalaarvälja lisamine Einsteini võrrandite materiasektorisse ja sellisel juhul nimetatakse seda mehhanismi kvintessentsiks [5]. Teiseks põhiliseks alternatiiviks on modifitseeritud gravitatsiooniteooriad, kus Einsteini üldrelatiivsusteooria asendatakse mõne üldisema teooriaga. Üheks oluliseks üldistuseks on skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria [9]. Päikesesüsteemis läbiviidud vaatlustest on võimalik järeldada, et üldrelatiivsusteooria on väga heas kooskõlas vaatlustega [10]. Seega peab üldistatud gravitatsiooniteooria piirjuhuna sisaldama üldrelatiivsusteooriat ja samuti mehhanis-

mi, mis üldisema teooria üldrelatiivsusteooriaks viiks. Samuti peavad skalaar-tensor gravitatsiooni kosmoloogia võrrandid piirjuhul üle minema üldrelatiivsusteooriast tuletatud Friedmanni võrranditeks. Skalaar-tensor kosmoloogia võrrandeid on üldrelatiivsusteooria piiril analüüsinud Laur Järv, Piret Kuusk ja Margus Saal [11], [12], [13] ning tuletanud tingimused, mille korral skalaar-tensor gravitatsiooniteooria võrrandid lähevad üle üldrelatiivsusteooria võrranditeks.

Käesoleva töö eesmärgiks on saada ülevaade universumi dünaamikat kirjeldavatest mudelitest ning kasutades Andrius Frantskjavitšiu kirjutatud Maple'i programmi, teha läbi mitu erinevat arvutust standardmudeli raames mateeria ja kosmoloogilise konstandi tihedusparameetrite leidmiseks, kasutades selleks Union 2.1 Ia-tüüpi supernoova vaatluste andmekogu [14], [15] ning χ^2 -testi. Selle läbi kontrollime nii kirjutatud programmi kui ka omapoolselt mudeli kooskõla erinevate vaatlustulemustega. Töö lõpus anname ülevaate skalaar-tensor gravitatsiooniteooriast ning põhjustest, miks skalaar-tensor gravitatsiooniteooria raames on standardmudelil kasutatav lähenemine problemaatiline. Samuti anname ülevaate erinevatest strateegiatest, kuidas skalaar-tensor gravitatsiooniteooria raames tekkivatest probleemidest vabaneda, et oleks taaskord võimalik arvutustes kasutada standardmudelil rakendatavat skeemi.

Antud töös on meetrika määratud kui $(-1, 1, 1, 1)$ ning järgnevates valemities oleme võtnud valguse kiiruse ühikuliseks $c \equiv 1$. Dimensionaalsetel kaalutlustel on vajadusel võimalik c võrranditesse tagasi tuua ja mõnel juhul on seda ka tehtud (heleduskaugus d_L).

2 Üldrelatiivsusteooria ja standardmudel

2.1 Üldrelatiivsusteooria

Üldrelatiivsusteooria kohaselt realiseerub gravitatsioonijõud aegruumi geometriana, mis on omakorda määratud aegruumis oleva materiaga. Üldrelatiivsusteooria põhivõrranditeks on Einsteini väljavõrrandid, mis on esitatavad kujul [2]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Suurust $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, kus $R_{\mu\nu}$ on Ricci tensor ja R Ricci skalaar, nimetatakse Einsteini tensoriks, mis sisaldab meetrika esimest ja teist järku tuletisi ning kirjeldab seega aegruumi geometriat. Võrrandi (1) paremal pool olev suurus $T_{\mu\nu}$ on materiat kirjeldav energia-impulsi tensor (ka materiatensor). Suurust Λ nimetatakse kosmoloogiliseks konstandiks. Võrdetegur κ^2 on määratud Newtoni gravitatsioonikonstandi G_N kaudu: $\kappa^2 \equiv 8\pi G_N$.

Einsteini väljavõrrandid (1) on võimalik tuletada ka vähima mõju printsiibist, mille kohaselt mõju varieerimisel liigub süsteem mööda trajektoori, mille korral mõju variatsioon on null. On eeldatud, et variatsioon ja diferentseerimine on kommutatiivsed operatsioonid ning trajektoori algus- ja lõpp-punktides on variatsioonid nullid. Mõjufunktsionaal on esitatav kahe liikme summana:

$$S = S_{EH} + S_m = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m[\chi, g_{\mu\nu}]. \quad (2)$$

Siin suurust S_{EH} nimetatakse Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaaliks ja S_m on omakorda materiaavälja χ sisaldav osa. Suurus $d^4x \sqrt{-g}$ on invariantne ruumala element ja g on meetrika determinant. Väljavõrrandeid on võimalik tuletada mõjufunktsionaali varieerimisel $g_{\mu\nu}$ järgi, kusjuures materiatensor on defineeritud järgmiselt:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (3)$$

Seoses (1) on üldjuhul esitatud kuusteist võrrandit, mis sisaldavad meetrikat ning tema esimest ja teist järku tuletisi. Kuna Einsteini tensor $G_{\mu\nu}$ on sümmeetriline, siis sõltumatute võrrandite arv on kümme. Bianchi identsus

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (4)$$

lisab veel omapoolselt neli täiendavat seost ning seetõttu taandub sõltumatute võrrandite arv kuuele. Saadud võrrandid on ka mittelineaarsed ja seetõttu ei ole võimalik nende lahenditele rakendada superpositsiooni printsiipi.

2.2 Friedmanni kosmoloogia

2.2.1 Meetrika ja energia-impulsi tensor

Kosmoloogia standardmudelil kirjeldatakse aegruumi geomeetriat Friedmann'i-Lemaître'i-Robertson'i-Walker'i meetrikaga (FLRW), mis on tuletatud eeldustel, et universum on suurtes mastaapides homogeenne ja isotroopne. Isotroopsus tähendab, et universumi omadused ei sõltu suunast ning homogeensus tähendab, et omadused on samad igas ruumipunktis. Sfäärilistes koordinaatides on FLRW meetrika esitatav kujul

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right], \quad (5)$$

kus $a(t)$ on pikkuse dimensiooniga suurus, mida nimetatakse mastaabikordajaks. Mastaabikordaja määrab kahe kaasaliikuva punkti vahelise suhtelise kauguse muutumise. Suurus k on tuntud kui kõveruse parameeter, mis võib omada järgmisi väärtuseid: $k \in (-1, 0, 1)$. Väärtus $k = -1$ kirjeldab hüperboolset, $k = 0$ tasast ning $k = +1$ sfäärilist ruumigeomeetriat.

Mateeriat käsitletakse standardmudelil ideaalse vedeliku lähenduses, mille energia-impulsi tensor on kirjutatav kujul

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (6)$$

kus ρ on energiatihedus ja p on rõhk. Nelikiirus U_μ omandab vedelikuga kaasaliikivas taustsüsteemis kuju

$$U_\mu = (-1, 0, 0, 0) \quad (7)$$

ja rahuldab tingimust

$$U_\mu U^\mu = -1. \quad (8)$$

Energia-impulsi tensori segakomponendid on kirjutatavad diagonaalmaatriksina kujul

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (9)$$

Bianchi identsusest (4) järeldub, et energia-impulsi tensori kovariantne tuletis ∇_μ peab olema null

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0, \quad (10)$$

mis väljendab energia jäävust.

2.2.2 Friedmanni võrrandid

Kosmoloogia põhivõrrandid saab tuletada lähtudes Einsteini väljavõrranditest (1) kasutades eelduseid, et aegruumi geometria on kirjeldatud FLRW meetrikaga (5) ja et mateeriaks on ideaalne vedelik (6). Neid põhivõrrandeid nimetatakse Friedmanni võrranditeks ja nad on esitatavad kujul

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (11)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (12)$$

Siin punkt tähistab ajalist tuletist ja Hubble'i parameeter on defineeritud mastaabikordaja a kaudu: $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$. Võrrandit (11) nimetatakse Friedmanni seosevõrrandiks ning võrrandit (12) nimetatakse dünaamiliseks võrrandiks või ka Friedmanni kiirenduse võrrandiks. Energia jäävusseadusest (10) saab tuletada pidevuse võrrandi

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \quad (13)$$

Võrrandid (11), (12) ja (13) pole sõltumatud, mille tõttu üks võrrand on teiste võrrandite kaudu tuletatav. Seega on sõltumatuid võrrandeid kaks ja sageli kasutatakse dünaamika uurimiseks ainult kahte võrrandit. Võrrandites (11) ja (12) esinevat tihedust ρ ja rõhku p tuleb vaadelda kui erinevate komponentide (kiirgus, tolm ja kosmoloogiline konstant) panuste summat. Pidevuse võrrand kujul (13) kehtib iga komponendi jaoks sõltumatult.

Kuna pidevuse võrrand on iga komponendi jaoks sõltumatu ja barotroopne indeks nii kiirguse, tolmu kui kosmoloogilise konstandi jaoks on teada, siis see võrrand on kergesti integreeritav (vt alajaotus 2.2.3). Võrrandite (11) ja (12) lahend peab andama mastaabikordaja kosmoloogilise aja funktsioonina $a(t)$. Analüütilised lahendid on võimalik leida, kui eeldame, et energiatiheduses domineerib üks komponent. Kui komponentide arv on suurem (kaks või rohkem), siis on analüütiline lahend võimalik leida mõnel erijuhul tasase ruumigeomeeria eeldusel (st $k = 0$). Vaatlustega heas kooskõlas oleva juhu jaoks, kus kolmruum on tasane ($k = 0$) ja energiatiheduses domineerivad tavaline materia (tolm) ning kosmoloogiline konstant, on võimalik analüütiline lahend leida (vt näiteks [2]).

2.2.3 Barotroopne olekuvõrrand ja barotroopne indeks

Materia kohta eeldame täiendavalt, et rõhk ja energiatihedus on omavahel seotud olekuvõrrandiga

$$p = w_i \rho, \quad (14)$$

kus w_i ning $i = r, m, \Lambda, de$ on konstantne barotroopne indeks vastavalt kiirguse, materia, kosmoloogilise konstandi ning tumeenergia jaoks. Näiteks relativistlikule materiale, milleks on kiirgus ja neutriinod, vastab $w_r = \frac{1}{3}$, mitterelativistlikule materiale, milleks on tolm, vastab $w_m = 0$ ning kosmoloogilisele konstandile vastab $w_\Lambda = -1$.

Arvestades barotroopset olekuvõrrandit ja Hubble'i parameetri definitsiooni $H = \frac{\dot{a}}{a}$, siis on võimalik pärast otsest integreerimist leida pidevusevõrrandile (13) lahend kujul:

$$\rho_i(t) = \rho_{i,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(w_i+1)}, \quad (15)$$

kus a_0 ja $\rho_{i,0}$ on vastavad tiheduse ja mastaabikordaja väärtused hetkel t_0 ja kokkuleppeliselt võtame selle praeguseks hetkeks. Seega alaindeks 0 tähendab ka edaspidi seda, et on mõeldud antud suuruse praegust väärtust.

Universumi paisumise käigus muutub erinevate komponentide energiatihedus erinevalt. Võrrandist (15) on näha, et tolmu tiheduse sõltuvus mastaabikordajast on $\rho \sim a^{-3}$, kiirgusel $\rho \sim a^{-4}$ ja kosmoloogilisele konstandile vastav tihedus ei sõltu mastaabikordajast $\rho = \rho_\Lambda = konst$. Erandina ei saa dünaamilisele tumeenergiale vastavat sõltuvust sellisel kujul esitada, sest w_{de} on dünaamiline ja võrrand (13) pole lihtsalt integreeritav. Selle küsimusega puutume uuesti kokku skalaar-tensor tüüpi gravitasiooniteooriale vastava kosmoloogia uurimisel.

2.2.4 Standardmudeli tihedusparameetrid

Ülevaatlikuse ning lihtsuse eesmärgil on otstarbeks kasutada dimensioonituid tihedusparameetreid, mis defineeritakse vastava komponendi energiatiheduse ρ_i ja kriitilise tiheduse ρ_{kr} suhtena

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{kr}}. \quad (16)$$

Kriitiline tihedus on defineeritud kui tihedus, mis vastab tasasele ruumigeomeetriale ja on Friedmanni võrrandit (11) kasutades esitatav kujul

$$\rho_{kr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G_N}. \quad (17)$$

Kuna Hubble'i parameeter on ajast sõltuv, siis on ka kriitiline tihedus aja funktsioon.

Esitades võrrandi (11) tihedusparameetrite kaudu saame seose

$$\Omega_k = \Omega - 1, \quad (18)$$

kus $\Omega_k \equiv -\frac{k}{H^2 a^2}$ on formaalne kõverusele vastav tihedusparameeter ja Ω on erinevate komponentide summaarne tihedusparameeter:

$$\Omega = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda. \quad (19)$$

Näeme, et tasase ruumigeomeetria korral $\Omega_k = 0$ ja kõikide komponentide summa on võrdne ühega:

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1. \quad (20)$$

Antud kujul esindab võrrand (20) Friedmanni seosevõrrandit (11).

Kirjutame veelkord välja Freidmanni seosevõrrandi (11) nii, et üldistame kosmoloogilisele konstandile vastavat liiget ja ütleme, et olgu teooria mateerisektoris lisaks tavalisele tolmu ρ_m ka ajast sõltuv liige, mis vastab tumeenergiale ρ_{de}

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_{de}) \quad (21)$$

Nagu sissejuhatuses mainisime, võib selline liige pärineda minimaalselt seotud skalaarväljast.

Arvestades nüüd pidevuse võrrandi integreerimisel saadud seosega (15), Hubble'i parameetri definitsiooniga $H = \dot{a}/a$, punanihke z definitsiooniga

$$1 + z(t) = \frac{a_0}{a(t)} \quad \implies \quad a(t) = a_0(1 + z)^{-1} \quad (22)$$

ja defineerides dimensioonitute tihedusparameetrite praegused väärtused seostega $\Omega_{i,0} = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{kr}}$, siis saame Hubble'i parameetri esitada tihedusparameetrite ja punanihke kaudu

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{de,0}(1+z)^{(3+3w_{de})} + \Omega_{k,0}(1+z)^2}. \quad (23)$$

Siin H_0 on Hubble'i parameetri praegune väärtus. Probleemiks on aga see, et me ei tea üldjuhul tumeenergiale vastavat olekuparameetrit w_{de} . Juhul kui tumeenergia rollis on kosmoloogiline konstant Λ , siis $w_{de} \equiv w_\Lambda = -1$ ja tumeenergiale vastav liige on esindatud üksnes konstantse tihedusparameetriga $\Omega_{de,0} \equiv \Omega_\Lambda$. Seos (23) on väga oluline, sest esineb vaadeldavates suurustes (vt jaotus 2.3) ja nende vaatluste tulemusena määratakse omakorda tihedusparameetrid $\Lambda_{i,0}$ sellisel viisil, et nad oleksid vaatlustega kooskõlas.

2.2.5 Tihedusparameetrite eksperimentaalsed väärtused

Nii Plancki, WMAPi kui ka barüonide akustiliste ostsillatsioonide (BAO) mõõtmiste keskmistamise tulemusena on saadud, et antud ajahetkel on erinevate komponentide tihedusparameetrid järgmised [16]:

$$\begin{aligned}\Omega_{b,0} &= 0.04816 \pm 0.00011, \\ \Omega_{c,0} &= 0.2582 \pm 0.0036, \\ \Omega_{\Lambda,0} &= 0.692 \pm 0.010.\end{aligned}\tag{24}$$

Ω_b vastab barüonainele, Ω_c tumeainele ning Ω_Λ kosmoloogilisele konstandile. Relativistliku materia osakaal on väga väike ning samuti on kõverusele vastava tihedusparameetri väärtus väga lähedane nullile [16]:

$$-0.001 < \Omega_k < -0.0005.\tag{25}$$

Tulemus (25) näitab, et universumi kolmruumi geomeetria on tõepoolest väga lähedane tasasele. Antud töös võrdleme enda arvutatud tihedusparameetreid Union 2.1 tulemuste $\Omega_{\Lambda,0}$ ja $\Omega_{m,0}$ jaoks [14]:

$$\Omega_{m,0} = 0.271 \pm 0.014, \quad \Omega_{\Lambda,0} = 0.729 \pm 0.014.\tag{26}$$

2.2.6 Standardmudeli probleemid

Teooria parameetrid määratakse vaatlustest, mis omakorda viib kooskõlalisele mudelile. Siiski esinevad mõned teoreetilised probleemid. Tavaliselt kirjeldatakse varajast ja hilist universumit eraldi ning seega on ka otstarbekas vaadelda standardmudeli raames esilekerkivaid hilise ja varajase universumi probleeme eraldi.

Varajase universumi põhilised probleemid on:

Horisondi probleem: Osutub, et rekombinatsiooni ajastul, kui universum muutus kiirgusele läbipaistvaks, polnud nähtava universumi erinevad punktid põhjuslikult seotud. Samuti ilmneb viimastest Plancki kosmilise mikrolaine taustkiirguse fooni temperatuuri mõõtmisest nähtav asümmeetria ning ka ootamatult suur ala, kus temperatuur on väga külm (vt. ka [17]). Seda nähtavat asümmeetriat ning külma ala ootamatult suurt pindala aga ei suuda standardmudel oma praegusel kujul seletada. Siiski on universum väga suuresti homogeenne. See asjaolu nõuab täiendavat seletamist mingi mehhanismi läbi, mis seoks algselt põhjuslikult mitteseotud piirkonnad ja suudaks ka seletada nähtavad asümmeetriad [18].

Tasasuse probleem: Juhul kui universumi tekkimisel $\Omega \neq 1$, siis selleks, et ruum oleks praegu väga lähedane tasasele (vt valem (25)), pidi Ω olema universum alguses väga lähedane ühele: $\Omega = 1 \pm 10^{-60}$. Säärast olukorda nimetatakse aga täppishäälestuseks.

Horisoni ja tasasuse probleemidele pakub ühe võimaliku lahenduse inflatsioon, mille käigus universumi mõõtmed suurenesid 10^{60} korda. Mõnikord loetakse varajase universumi inflatsiooniperiood osaks standardmudelit. Tasub aga märkida, et inflatsiooni algus ja täpne mehhanism ei ole teada. Viimased vaatlustulemused [19] võimaldavad teatud mudeleid välistada ja teisi mudeleid eelistada.

Hilise universumi põhilised probleemid on:

Kosmoloogilise konstandi probleem: Osakestefüüsika ennustatud vaakumi energiatihedus on umbes 120 suurusjärku suurem kosmoloogilisele konstandile vastavast ja vaatlustest leitud energiatihedusest.

Kokkusattumise probleem: Probleem seisneb selles, et kosmoloogilise konstandi energiatihedus on materia energiatihedusega samas suurusjärgus ning hakkab domineerima just praegu. Tekib küsimus, et miks on see nii.

Üheks kosmoloogilise konstandi probleemi lahenduseks on näiteks Paul J. Steinhardt ning Neil Turok välja pakkunud tsüklilise universumi mudeli, kus universum liigub pidevalt Suure Paugu staadiumist Suure Kokkutõmbumise staadiumisse ja taas Suure Paugu olukorda ning seeläbi muutub iga tsükliga kosmoloogilise konstandi väärtus väiksemaks. Samas märgivad Steinhardt ning Turok ise, et säärane mudel vajab samuti "häälestamist nagu ka iga teine kosmoloogiline mudel"[20]. Üheks lahenduseks võib olla dünaamiline tumeenergia, mis peab sisaldama mehhanismi, mis viib olukorrani, kus tohutu suur vaakumi kvantfluktuatsiooni energia realiseerub üksnes väga väikeses ulatuses.

2.3 Vaadeldavad suurused: heleduskaugus ja kaugusmoodul

Selleks, et saada informatsiooni kosmoloogiliste parameetrite praeguste väärtuste $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{de,0}$, $w_{de,0}$ ja H_0 kohta, on vaja nad siduda vaadeldavate suurustega.

2.3.1 Universumi vanus

Kõige lihtsam suurus, mis sõltub nimetatud parameetritest on Universumi vanus. Arvestades Hubble'i parameetri definitsiooni $H = \dot{a}/a$ ja punanihke z definitsiooni (22) saame leida seose

$$(1+z)^{-2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = H^2(z). \quad (27)$$

Seosest (27) on võimalik avalda aeg, mida nimetatakse tagasivaateajaks ja kui teda integreerida kuni $z \rightarrow \infty$, siis saame universumi vanuse jaoks avaldise

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)}. \quad (28)$$

Siin $H(z)$ tuleb asenda seosest (23) ja näeme, et univesumi vanus sõltub parameetritest $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{de,0}$, $w_{de,0}$ ja H_0 .

2.3.2 Heleduskaugus ja kaugusmoodul

Käesolevas alajaotuses leiame seose kaugete allikate heleduse ja punanihke vahel. Selleks vaatleme valgussignaali, mis emiteeriti allikast ajahetkel t_{em} kaugusel r_{em} ja liigub koordinaatide alguspunkti poole (vaatleja asukoht, $r = 0$) mööda isotroopset radiaalset geodeetilist. FLRW meetrikast saame siis sellist geodeetilist mööda liikuva valguse jaoks ($ds = 0$, $d\theta = 0$ ja $d\phi = 0$) võrrandi

$$\int_0^{r_{em}} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (29)$$

Kasutades teadaolevaid seoseid kõverusele vastava tihedusparameetri $\Omega_{k,0}$ ning punanihke z ja Hubble'i parameetri H jaoks, saame seose (29) integrandid kirjutada kujul

$$\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1-a_0\Omega_{k,0}H_0^2r^2}} = \frac{dt}{a(t)} = \frac{(1+z)dt}{a_0} = \frac{dz}{a_0H(z)}. \quad (30)$$

Allika omakaugus $d(r, t) = a(t)r$ ajahetkel t_0 on esitatav valemiga

$$d_0(r, t) \equiv a_0 r_{em}(z) = a_0 \int_0^{r_{em}} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (31)$$

$$= a_0 \times \begin{cases} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} & \text{kui } k = 0 \\ H_0^{-1} |\Omega_k|^{-1/2} \sin \left[H_0 |\Omega_k|^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right] & \text{kui } k = +1 \\ H_0^{-1} |\Omega_k|^{-1/2} \sinh \left[H_0 |\Omega_k|^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right] & \text{kui } k = -1 \end{cases} \quad (32)$$

kus oleme kasutanud seost (30). Et antud koordinaatsüsteemis on r ajast sõltumatu siis omakaugus meist kaasaliikuva objektini kas suureneb või väheneb vastavalt mastaabikordajale. Kuna meie asukohal pole mingit eelistust, siis peab omakaugus kahe kaasaliikuva vaatleja vahel kõikjal universumis olema proportsionaalne mastaabikordajaga $a(t)$ [1].

Optikast on teada, et kiirgava objekti poolt emiteeritud absoluutne võimsus (heledus) avaldub kui objektilt ajaühikus kiiratud energia

$$L = \left(\frac{dE}{dt} \right)_{em} . \quad (33)$$

Kiirgavate objektidelt kaugusel r_{em} meieni kaugusel $r = 0$ jõudvat energiavoogu ühikajas ja ühikpindala kohta hetkel $t = t_0$ nimetatakse näivaks heleduseks ja ta avaldub valemiga

$$l = \frac{1}{4\pi d_0^2} \left(\frac{dE}{dt} \right)_0 , \quad (34)$$

kus d_0 on omakaugus ajahetkel t_0 . Universumi paisumise tõttu kehtivad seosed

$$dE_0 = dE_{em} (a_{em}/a_0) , \quad dt_0 = dt_{em} (a_0/a_{em}) \quad (35)$$

ja neid arvesse võttes saame näiva heleduse esitada valemiga

$$l = \frac{L}{4\pi d_0^2} \left(\frac{a_{em}}{a_0} \right)^2 = \frac{L}{4\pi d_0^2 (1 + z_{em})^2} . \quad (36)$$

Selleks, et siduda vaatlustulemusi teooriaga, peame defineerima veel ühe mõiste, mida nimetatakse allika heleduskauguseks d_L ja ta defineeritakse seosega

$$\frac{L}{l} = 4\pi d_L^2(z) . \quad (37)$$

Allika jaoks, mis asub kaugusel $r(z)$ saame seega kirjutada

$$d_L = a_0 r(z)(1 + z) \quad (38)$$

ja suurus $a_0 r(z)$ on asendatav valemist (31).

Olukorras, kus me vaatleme tasast universumit, ehk $k = 0$ ning $\Omega_k = 0$ ja veel lisaks arvestame, et Ω_r on väga väike, siis eelnev valem (38) võtab järgneva kuju

$$d_L(z) = a_0 r(z)(1 + z) = \frac{c(1 + z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} . \quad (39)$$

kus c on taastatud ning $H(z)$ on võetud valemist (23) ja seal omakorda on võetud $\Omega_{k,0} = 0$ ja $\Omega_{r,0} = 0$. Kui tahame integreerimismuutujana kasutada punanihke asemel mastaabikordajat, siis on üleminek lihtsasti teostatav kasutades punanihke definitsiooni ja seost $dz = -a^{-2} da$.

Astronoomias on heleduskauguse mõiste abil sobilik sisse tuua ka erinevate kauguste hindamiseks kaugusmooduli mõiste $\mu = m - M$, kus m on näiv tähesuurus ning M absoluutne tähesuurus. Suurust μ nimetatakse kaugusmooduliks ja osutub, et ta on seotud heleduskaugusega d_L järgmise valemi abil [1]

$$\mu = m - M = 5 \log_{10}(d_L) - 5. \quad (40)$$

Tähtis on märkida, et antud valemi sellise kuju korral on d_L väljendatud parsekites. Juhul, kui tahame d_L 'i valemis (40) esitada megaparsekites, siis on lihtne näidata, et valemis esineva -5 asemel peab olema $+25$ või gigaparsekite korral $+40$.

Selleks, et hinnata, milline teooria on ikkagi parim, võib vaadata milliste kaugusmoodulitega (40) saadud tulemused sobivad kõige paremini vaatlustega

$$\Delta(m - M) = (m - M)_{\text{mudel}} - (m - M)_{\text{vaatlused}} \quad (41)$$

Mida lähemal $\Delta(m - M)$ on nullile, seda parema mudeliga on tegemist.

3 Ia-tüüpi supernoovade vaatlused ja tulemuste analüüs

3.1 Ia-tüüpi supernoovad ja erinevad valimid

Ia-tüüpi supernoovaks nimetatakse süsinikust koosneva valge kääbuse, mis on saavutanud niinimetatud Chandrasekhari massi, mis on Päikese omast 1.4 korda suurem, plahvatust. Reeglina saavad Ia-tüüpi supernoovad tekkida kaksiksüsteemi kuuluvate tähtede puhul, millest üks on valge kääbus ning teine täht on suurem peajada täht või punane hiid, mis on täitnud oma Roche'i piiri ja toimub materia ülevool valgele kääbusele. Valge kääbus muutub seejuures kuumemaks ja heledamaks. Chandrasekhari massi saavutades ei ole valge kääbuse gravitatsioon enam tasakaalustatud kõdunud elektrongaasi rõhuga, ning täht tõmbub kokku. Seetõttu tõuseb tähe sees temperatuur niivõrd kõrgele, et süsinik saab hakata ühinema. See protsess toimub aga pea kogu valges kääbuses üheaegselt ning täht plahvatabki Ia-tüüpi supernoovana. Ia-tüüpi supernoova võib toimuda ka kahe valge kääbusega kaksiksüsteemis, kui nad peaksid kokku põrkuma ning seeläbi moodustama piisavalt massiivse tähe. Ia-tüüpi supernoovasid saab kasutada väga suurte kauguste hindamisel, sest üldiselt ollakse veendunud, et nad tekkivad universumis ühte moodi ja seega on nende absoluutne heledus M kaugusest z sõltumatu ja teada [21]. Kuna supernoovad on erakordselt heledad, siis on nad vaadeldavad ka väga kaugetes galaktikates (punanihe $z > 1$) ja neid nimetatakse ka standardküünaldeks.

Alates 1990. aastatest on supernoova kosmoloogia projekti (Supernova Cosmology Project) [3] liikmed ning suurte z -de supernoova otsingute meeskond (High-Z Supernova Search Team) [4] teinud märkimisväärse arvu Ia-tüüpi supernoovade vaatlusi ning mõõtnud nende punanihkeid. Kuna heleduskaugus d_L (39) ja seega ka kaugusmoodul μ sisaldavad Universumi dünaamikat määravad parameetreid $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{de,0}$, $w_{de,0}$ ja H_0 , siis annab see suurepärase võimaluse nende parameetrite määramiseks vaatlustest. Tuleb rõhutada, et niimoodi määratud parameetrid on siiski kosmoloogilisest mudelist sõltuvad ja selle küsimusega puutume kokku uuesti siis, kui püüame skalaar-tensor kosmoloogia raames standardmudeli korral kasutatud protseduuri läbi viia. Kui mõõdame supernoovade näiva heleduse m ja punanihke z , siis eeldusel, et absoluutne heledus M on teada, saame leida heleduskauguse d_L . Seejärel saame leitud heleduskaugust võrrelda erinevate parameetrite $\Omega_{m,0}$ ja $\Omega_{\Lambda,0}$ jaoks arvatud heleduskauguse avaldisega (39). Teatud parameetrite väärtuse korral langevad vaatlustest leitud heleduskauguse ja teoreetiliselt arvatud heleduskauguse väärtused kokku ja järelikult need tihedusparameetrite väärtused ongi parimas kooskõlas vaatlustega. Antud töös keskendume supernoova kosmolo-

gia projekti poolt kogutud andmete valimile Union 2.1 [14],[15].

3.2 Analüüsi kirjeldus ja Maple'i programmi kirjeldus

3.2.1 χ^2 -test

Matemaatilises statistikas on võimalik kasutada χ^2 -testi töövahendina võrdlemaks andmeid vaatlustest oodatud andmetega teooriast. Sisuliselt kontrollib χ^2 -test niioelda nullhüpoteesi paikapidavust, mis väidab, et teooriast oodatud tulemuste ning eksperimendist saadud tulemuste vahel ei ole mingit statistiliselt tähendusrikast erinevust. Kõige üldisemal kujul on χ^2 -test kirjutatav järgneval kujul [22]:

$$\chi^2 = \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{(x_\nu - \mu_\nu)^2}{\sigma_\nu^2} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}, \quad (42)$$

kus x_i on normaaljaotusele alluv sõltumatu muutuja keskvaartusega μ_i ning dispersiooniga σ_i^2 . Tasub märkida, et ideaalis on iga liikme väärtus ligikaudu suurusjärguliselt ühikuline ning olles korrektselt valinud μ_i ja σ_i^2 , siis χ^2 -testi väärtus on lähedane ν -le.

Antud juhul kasutame χ^2 -testi, et leida Supernova Cosmology Projecti andmekogu Union 2.1 jaoks kõige paremini sobivad kosmoloogilised parameetrid $\Omega_{m,0}$ ja $\Omega_{\Lambda,0}$. Vaatlustest leitud ja teooriast arvatud kaugusmoodulite (40) jaoks saame χ^2 avaldise kirjutada kujul

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{580} \frac{[\mu_i^{\text{teooria}}(z_i, \Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}) - \mu_i^{\text{vaatlus}}]^2}{\sigma_i^2}, \quad (43)$$

kus $\mu_i^{\text{teooria}}(z_i, \Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$ on teorias kasutatav kaugusmoodul, μ_i^{vaatlus} Ia-tüüpi supernoovade kui standardküünalde vaatlustest saadud väärtused kaugusmooduli jaoks, 580 tuleb erinevate supernoovade vaatluste arvust (Union 2.1 valim) ning σ_i^2 on oodatav ruutdispersiooni väärtus. Rakendamaks χ^2 -testi kosmoloogiliste parameetrite $\Omega_{m,0}$ ning $\Omega_{\Lambda,0}$ kooskõlaliste väärtuste leidmiseks, peame leidma parameetrite väärtused, mille korral oleks suurus χ^2 minimaalne.

3.2.2 Maple'i programm ja χ^2 -test

Supernoova kosmoloogia projekti kogutud valimi Union 2.1 analüüsi jaoks kasutame Waterloo Maple'i tarkvarafirma poolt välja töötatud matemaatikapaketti Maple. Nagu juba eespool mainitud, on peamiseks eesmärgiks on otsida parima sobivusega kosmoloogiliste parameetrite väärtused st selliseid väärtuseid, mille puhul χ^2 -test (43) on minimaalne. Sellisel viisil leitud parameetrite väärtused annaksid seega vaatlustulemustega võimalikult kooskõlalise tulemuse.

Kirjeldame Maple programmi, selle sisendeid ja teostatavaid operatsioone järgmise loetelu raames.

- Käesolevas töös eeldame, et kosmoloogiliste parameetrite suurusjärgud on teada. Seega valime nende jaoks teatud väärtuste vahemiku, mille raames nad muutuda võivad ja samuti valime sammu, mille võrra parameetri väärtust uue arvutuse (χ^2 -testi) tegemiseks muudetakse.
- Järgmise sammuna kasutame supernoova kosmoloogia projekti poolt kogutud vaatlusandmeid ning moodustame nendest statistilises analüüsis kasutatava kovariantsus ehk dispersiooni maatriksi, mis võimaldab üldistada dispersiooni mõisted kõrgematesse dimensioonidesse. Selle maatriksi elementideks on diagonaali peal dispersiooni väärtused ning ülejäänud elemendid on standardhälvete kovariantsused, mis näitavad nende omavahelist korrelatsiooni.
- Edasi defineerime programmi jaoks kaugusmooduli (40), kus kasutame tuntud avaldist heleduskauguste jaoks (39), mida hiljem kasutame χ^2 -testi juures. Tuleb mainida, et Maple ei ole võimeline antud kaugusmooduli valemis asuvat heleduskaguse avaldist analüütiliselt integreerima ning seetõttu peame kasutama Maple'i programmis võimalikku numbrilist integreerimist meetodiga NCRule.
- Suuruse χ^2 arvutamise protseduuri jaoks defineerime kaks *for* tsüklit vastavate parameetrite jaoks, mis võimaldab meil Maple'i arvutusprogrammis proovida χ^2 -testi jaoks läbi erinevaid parameetrite väärtuseid sammuga $\Delta\Omega$. Samuti tekitame *if* tsükli, millega anname käskluse Maple'i programmile seda protseduuri teha seni, kuni enam väiksemat väärtust χ^2 jaoks ei leidu.
- Lõpetuseks kanname Union 2.1 supernoova vaatluste andmed graafikule ning kasutades χ^2 -testi leitud parameetrite väärtuseid, kanname graafikule ka teooriast ennustatava kaugusmoodulite kõvera. Tulemusena saame testida antud Maple'i arvutusprogrammi korrektsust ja vaadata, kuidas leitud parameetrid langevad kokku nii Union 2.1 tulemustega (26) kui ka Plancki tulemustest leitud parameetrite väärtustega (24). Viimasega võrdlus on loomulikult kontekstiväline, sest Planck'i koondtulemused (24) võtavad kokku erinevate vaatluste tulemused.

3.2.3 Valitud parameetrid ja nende muutumisvahemikud

Kuna Hubble'i parameetri väärtus on määratav väga erinevatest vaatlustest, siis valime selle jaoks mõned väärtused (vt allpool) ja leiame seejärel suurust χ^2 minimeerivad tihedusparameetrite $\Omega_{m,0}$ ja $\Omega_{de,0}$ väärtused.

Oleme heleduskauguse d_L (39) ja seega ka kaugusmooduli μ avaldisse (40) kirjutanud tumeenergiale vastava liikme nii üldiselt kui standardmudeli kontekstis võimalik (õigemini tema laienduse, kus on ka täiendav dünaamiline väli materiasektoris) ja see tähendab dünaamilist tumeenergiat, mille jaoks tema barotroopne indeks ei ole teada. Enamasti eeldatakse, et standardmudeli raames on tumeenergia määratud kosmoloogilise konstandiga ja sellisel juhul on tema barotroopne indeks konstant: $w_\Lambda = -1$. Järgnevas standardmudeli raames teostatavas käsitluses eeldame samuti, et tumeenergia on määratud kosmoloogilise konstandiga ja et otsitavate parameetrite $\Omega_{m,0}$ ja $\Omega_{\Lambda,0}$ jaoks on vastavad vahemikud ja muutumise samm valitud järgmised:

$$\Omega_{\Lambda,min} = 0.60, \quad \Omega_{\Lambda,max} = 0.80, \quad \Omega_{m,min} = 0.20, \quad \Omega_{m,max} = 0.40 \quad (44)$$

$$\Delta\Omega = 0.001. \quad (45)$$

Siin $\Omega_{\Lambda,min}$ ja $\Omega_{\Lambda,max}$ on analüüsis kasutatava kosmoloogilisele konstandile vastava tihedusparameetri ning $\Omega_{m,min}$ ja $\Omega_{m,max}$ on materiale vastava tihedusparameetri miinimum- ja maksimumväärtused. Suurus $\Delta\Omega$ määrab parameetri muutumise sammu.

Parameetrite leidmiseks ja tulemuste võrdlemiseks teeme arvutuse läbi kuuel erineval moel:

- Arvutus I: Kasutame supernoova kosmoloogia projekti poolt kasutatud Hubble'i parameetri väärtust $H_0 = 70.2 km s^{-1} Mpc^{-1}$ ning avaldame arvutustes kosmoloogilise konstandi tihedusparameetri kui $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$.
- Arvutus II: Kasutame samasugust Hubble'i parameetri väärtust nagu esimeses arvutuses aga $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ asemel kasutame programmis if-tsüklit, millega kontrollime, et igas arvutuses oleks täidetud tingimus: $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.
- Arvutus III: Kasutame samu andmeid, kuid seekord ei avalda kosmoloogilise konstandi tihedusparameetrit esimeses arvutuses kasutatud seose kaudu ega too sisse ka kontrollivat if-tsüklit.
- Arvutus IV: Kasutame Plancki mõõtmistelt saadud praegust väärtust Hubble'i parameetri jaoks $H_0 = 67.8 km s^{-1} Mpc^{-1}$ ning kasutame ka esimeses arvutuses kasutatud seost tihedusparameetrite jaoks samal kujul.

- Arvutus V: Taaskord kasutame Plancki mõõtmistelt saadud väärtust Hubble'i parameetri jaoks, tihedusparameetrite seose asemel aga jällegi teises arvutuses kasutatud if-tsükliit.
- Arvutus VI: Toimime samamoodi nagu kolmandas arvutuses, kuid kasutame Plancki mõõtmiste tulemust Hubble'i parameetri jaoks.

3.3 Tulemused ja analüüs

3.3.1 Leitud kosmoloogiliste parameetrite väärtused

Eelnevalt kirjeldatud parameetrite vahemikus läbiviidud χ^2 -testi tulemused saab kokku võtta alljärgneva tabeliga, kus iga arvutuse jaoks on leitud vastavad tihedusparameetrid:

	Arvutus I	Arvutus II	Arvutus III	Arvutus IV	Arvutus V	Arvutus VI	Keskmine
$\Omega_{m,0}$	0.264	0.264	0.286	0.365	0.365	0.306	0.308
$\Omega_{\Lambda,0}$	0.736	0.736	0.694	0.635	0.635	0.745	0.697

Antud tabelist näeme, et arvutused I ja II annavad oodatult sama tulemuse. Samuti langevad omavahel kokku arvutused IV ja V, mis kasutavad ainukese erandina arvutustest I ja II Plancki mõõtmistest saadud Hubble'i parameetrit. Supernoova kosmoloogia projekti poolt leitud parameetrite väärtustele (26) on kõige paremini kooskõlalised esimese ja teise arvutuse tulemused. Kolmanda arvutuse tulemused on küllalt lähedal tulemustele (24) ning ka Plancki meeskonna enda poolt läbi tehtud parameetrite sobitamisele Union 2.1 andmekogu jaoks, mille käigus leiti $\Omega_{m,0}$ väärtuseks 0.296 [16]. Märkime, et kolmanda arvutuse tulemused $\Omega_{m,0}$ ja $\Omega_{\Lambda,0}$ jaoks ei anna kokku summaks 1, vaid hoopis 0.98, mis tähendab seda, et universumi geomeetria ei ole enam tasane. Samuti märkame arvutuse VI juures, et tihedusparameetrite summa aga annab kokku 1.05 ning on seega ei ole ka selle juhul universumi geomeetria tasane. Kuue arvutuse keskmine tulemus on küllaltki lähedane tulemus viimastele Plancki mõõtmiste tulemustele (24). Arvutatud parameetrite keskmiste väärtuste summa tuli 1.005, mis juhul ei ole universumi geomeetria küll tasane, kuid on sellele väga lähedal. Arvutuste IV ja V tulemused ei ühti aga ei Union 2.1 tulemustega (26) ega ka Plancki omadega (24).

3.3.2 Potentsiaalsed põhjused tulemuste lahknemistele

Esiteks tasub mainida, et supernoova kosmoloogia projekti meeskond kasutab oma andmekogu analüüsi jaoks CosmoMC programmi [14], [15], [23]. CosmoMC programm on võrreldes

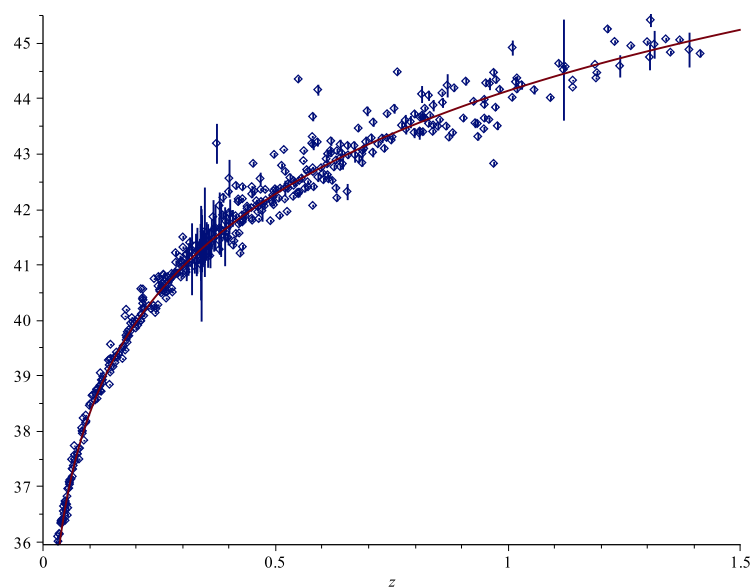
Maple'i programmiga märkimisväärselt võimekam mahukate analüüside teostamiseks. Samas ei ole see antud tulemuste lahknemisele määrava tähtsusega, sest meie arvutustest on näha, et Maple'i arvutusprogramm oli meie analüüsis vägagi adekvaatne.

Tähtsamat rolli mängib tõenäoliselt aga see, et erinevalt meie kasutatud χ^2 -testi (43) on supernoova kosmoloogia projekti meeskonna poolt kasutatud χ^2 -test natuke teise kujuga. Nimelt asub nende χ^2 -testi nimetajas σ_i^2 asemel $\sigma_{lc}^2 + \sigma_{ext}^2 + \sigma_{sys}^2$, kus σ_{lc}^2 on läbiv viga kovariantsusmaatriksist, σ_{ext}^2 hõlmab endas gravitatsioonilistest läätsedest ning Linnutee liikumise kiirusest tulenevaid määramatusi ning σ_{sys}^2 koosneb potentsiaalsetest valimist tulenevatest süstemaatilistest vigadest. Väga selget seletust nende dispersioonide väärtuste leidmise jaoks, peale σ_{sys}^2 , mis leitakse eraldi iga valimi väärtuse jaoks, sättides χ^2 väärtuse 1-ks, ei ole Union 2.1'st välja võimalik lugeda. Seetõttu ka tõenäoliselt väike lahknemine tulemustes.

Kuna kahe erineva Hubble'i parameetri väärtuse kasutamisel ilmnes tulemuste tuntav erinevus, siis võib järeldada, et tulemuste sõltuvus Hubble'i parameetri väärtusest on küllaltki tugev (vt ka [24]).

3.3.3 Maple'i programmi graafikud kaugusmooduli ning z jaoks.

Antud analüüsi raames lasime Maple'i programmil joonistada graafikule ka leitud tulemustega ennustatava kaugusmooduli kõvera punanihete jaoks. Samale graafikule on kantud ka Ia-tüüpi supernoovade vaatlustulemused. Siinkohal toome välja vaatlustulemustega kõige rohkem kooskõlas olnud tulemustega saadud graafiku:



Joonis 1. Maple'i I & II arvutuse poolt saadud graafik kaugusmooduli ja punanihke z jaoks.

Teiste arvutustega saadud graafikud oleme pannud joonistena 2, 3 ja 4 antud töö lissasse.

4 Skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooria

4.1 Mõjufunktsionaal ja üldised väljavõrrandid

Üheks Einsteini üldrelatiivsusteooria alternatiiviks on Brans'i-Dicke'i gravitatsiooniteooria [25], mis kasutab gravitatsiooni kirjeldamiseks peale mateeriatensori ka skalaarvälja. Täpsemalt öeldes erineb Brans'i-Dicke'i teoorias kasutatav mõjufunktsionaal üldrelatiivsusteooria mõjufunktsionaalist selle poolest, et Ricci skalaari sisaldavas liikmes on ka skalaarväli, mis toob kaasa selle, et gravitatsioon on kirjeldatud nii tensor- kui ka skalaarväljaga. Samuti on skalaarvälja kineetiline liige mittekanoniliselt kujul ja sisaldab parameetrit ω_{BD} (nn Brans'i-Dicke'i parameeter). Brans'i-Dicke'i teooriat on võimalik omakorda üldistada kui eeldada, et Brans'i-Dicke'i parameeter on skalaarväljast sõltuv funktsioon $\omega(\Psi)$. Märkime ka, et Brans'i-Dicke'i teooriale seavad omapoolsed piirangud viimased Plancki andmed [26]. Selle teooria mõjufunktsionaal on Jordani raamis (nn Brans'i-Dicke'i esituses) kirjutatav kujul [9]

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Psi R(g) - \frac{\omega(\Psi)}{\Psi} \nabla^\rho \Psi \nabla_\rho \Psi - 2\kappa^2 V(\Psi) \right] + S_m[\chi, g_{\mu\nu}], \quad (46)$$

kus Ψ on skalaarväli, funktsiooni $\omega(\Psi)$ nimetatakse skalaarvälja seosefunktsiooniks ning $V(\Psi)$ on mittenegatiivne skalaarvälja potentsiaal. Konstant κ ei ole siin enam sama, mis esineb üldrelatiivsusteooria mõjufunktsionaalis (2) eelnevalt mainitud põhjuste pärast, kuid säilitab G_N dimensiooni, sest skalaarväli on dimensioonitu.

Einsteini väljavõrrandid on tuletatavad selle teooria mõjufunktsionaali (46) varieerimisel meetrika $g_{\mu\nu}$ järgi:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{\Psi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\Psi)}{\Psi^2} \left(\nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \Psi \nabla_\alpha \Psi \right) + \frac{1}{\Psi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Psi - g_{\mu\nu} \square \Psi) - \frac{V(\Psi)}{2\Psi} g_{\mu\nu}. \quad (47)$$

Varieerides mõjufunktsionaali (46) skalaarvälja Ψ järgi ja asendades võrrandi (47) ahendamisel saadud tulemusest Ricci skalaari, siis saame skalaarvälja võrrandi esitada kujul:

$$\square \Psi = \frac{1}{2\omega(\Psi) + 3} \left(\Psi \frac{dV(\Psi)}{d\Psi} - 2V(\Psi) - \frac{d\omega(\Psi)}{d\Psi} \nabla^\alpha \Psi \nabla_\alpha \Psi + \kappa^2 T \right), \quad (48)$$

kus T on energia-impulssitensori $T_{\mu\nu}$ jälg.

4.2 Konformne teisendus

Konformne teisendus on matemaatiline operatsioon, mis muudab aegruumi meetrikat (muudab kaugusi, jättes nurgad muutumatuks). Tavaliselt vaadeldakse koos konformse teisendusega ka

skalaarvälja ümberdefineerimist, mis võimaldab ka skalaarvälja esitada nn kanoonilisel kujul. Konformne teisendus ja skalaarvälja redefinieerimine on määratud üldiste valemitega:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \Psi \rightarrow \tilde{\Psi}(\Psi), \quad (49)$$

kus Ω on nullist erinev konformne kordaja. Kuna konformne teisendus muudab meetrika mõõtkava, siis muutuvad ka aja- ning ruumisarnaste vektorite pikkused kuid jätab valgusesarnased vektorid samaks. Järelikult jäävad valguskoonused pärast teisendust samaks ning seetõttu ei rikuta konformse teisendusega aegruumi põhjuslikkust [27].

Skalaar-tensor gravitatsiooniteooriates on võimalik konformset teisendust (49) kasutades kirjutada Jordani raamis esitatud mõjufunktsionaal (46) Einsteini raamis esitatud mõjufunktsionaalina, kus Ricci tensori ees ei ole skalaarvälja ja skalaarvälja kineetiline liige on kanoonilisel kujul. Teisendus on üldjuhul pööratav, aga teatud olukorras tuleb arvestada täiendavate asjaoludega. Jordani ja Einsteini raami ekvivalentsus on olnud pikka aega diskusiooniobjekt [27] [28]. On võimalikud erinevad interpretatsioonid, aga teisenduste (49) regulaarses piirkonnas on Jordani ja Einsteini raam matemaatiliselt ekvivalentsed. Füüsikalise interpretatsiooni selguse huvides on eelistatud Jordani raam ja seda ka järgnevas töös kasutame.

4.3 Skalaar-tensor gravitatsiooniteooria väljavõrrandid FLRW geometrias

Analoogiliselt võrranditele (11) ja (12) on STG-s võimalik tuletada võrrandid tasase ($k = 0$) FLRW meetrika jaoks [27]:

$$H^2 = -H \frac{\dot{\Psi}}{\Psi} + \frac{1}{6} \frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi^2} \omega(\Psi) + \frac{\kappa^2 \rho}{\Psi} \frac{1}{3} + \frac{\kappa^2 V(\Psi)}{\Psi} \frac{1}{3}, \quad (50)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -2H \frac{\dot{\Psi}}{\Psi} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi^2} \omega(\Psi) - \frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} - \frac{\kappa^2}{\Psi} w\rho + \frac{\kappa^2}{\Psi} V(\Psi), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi} = & -3H\dot{\Psi} - \frac{1}{2\omega(\Psi) + 3} \frac{d\omega(\Psi)}{d\Psi} \dot{\Psi}^2 + \frac{\kappa^2}{2\omega(\Psi) + 3} (1 - 3w)\rho \\ & + \frac{2\kappa^2}{2\omega(\Psi) + 3} \left[2V(\Psi) - \Psi \frac{dV(\Psi)}{d\Psi} \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Kuna mõjufunktsionaali materia osa S_m Jordani raamis ei sisalda skalaarvälja või skalaarväljast sõltuvaid liikmeid, siis jääb kehtima jäävusseadus kujul $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ ja FLRW geometria korral saame varasemast tuttava seose pidevusevõrrandi (13) jaoks. Nendest neljast võrrandist on üks teistest võrranditest tuletatav ja seega on sõltumatuid võrrandeid kolm.

Kuna antud teorias on meetrika ja skalaarväli omavahel seotud, siis Newtoni gravitatsioonikonstant sõltub samuti skalaarväljast ning seetõttu räägitakse siinkohal efektiivsest gravitatsioonikonstandist $\frac{\kappa^2}{\Psi}$. Efektiivse gravitatsioonikonstandi mittenegatiivsuse jaoks tuleb eeldada, et skalaarväli rahuldab tingimust $\Psi \geq 0$.

4.4 Parametriseeritud post-Newtoni formalism

Parametriseeritud post-Newtoni formalism (PPN) määrab selle, millisel määral Einsteini üldrelatiivsusteooria parameetrid võivad erineda Newtoni gravitatsiooni seaduse omadest. PPN võimaldab võrrelda ka omavahel erinevaid meetrilisi gravitatsiooniteooriaid, mis rahuldavad Einsteini ekvivalentsprintsipi, kasutades Päikesesüsteemis tehtud vaatluseid. Vaatluslikud piirangud nendele parameetritele määravad ära selle, kui palju saab modifitseeritud gravitatsiooniteooria erineda üldrelatiivsusteooriast. Parametriseeritud post-Newtoni formalismi raames vaadeldakse üldjuhul parameetreid $\gamma, \beta, \xi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ [10], kuid sageli piiratakse parameetritega γ ja β .

Parameeter γ määrab kui suure ruumikõveruse põhjustab ühikulise massiga statsionaarne keha. Parameeter β määrab gravitatsiooni mittelineaarsuse. Üldrelatiivsusteoorias ja skalaartensor tüüpi gravitatsiooniteoorias on γ ja β ainsad nullist erinevad parameetrid. Parameeter ξ kirjeldab eelisasukohast tulenevaid efekte. Parameetrid α_1, α_2 ja α_3 näitavad eelistaustsüsteemi olemasolu. Parameetrid $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ja ζ_4 näitavad energia ja globaalse impulssijäävuse rikkumise olemasolu [10].

Üldrelatiivsusteooriale vastavad parameetrite väärtused on $\gamma = 1$ ja $\beta = 1$ ja seetõttu esitatakse vaatlustulemused suuruste $\gamma - 1$ ja $\beta - 1$ jaoks, mis näitab kui palju saab antud skalaartensor gravitatsiooniteooria erineda üldrelatiivsusteooriast.

Päikesesüsteemis tehtud vaatlustest on saadud, et parametriseeritud post-Newtoni parameetritele peavad kehtima järgmised piirangud:

$$|\gamma - 1| \leq 2,3 \cdot 10^{-5}, \quad |\beta - 1| \leq 2,3 \cdot 10^{-4}. \quad (53)$$

Teiste parameetrite piirangud on välja toodud töös [10]. Need eksperimentaalselt saadud piirangud (53) vastavad väga suure täpsusega üldrelatiivsusteooriale ning seetõttu üldistatud kosmoloogiline mudel olema ligilähedane üldrelatiivsusteooriale. Lisaks PPN parameetritele β ja γ tuuakse eraldi välja piirang gravitatsioonikonstandi muutumise kohta:

$$\left| \frac{\dot{G}}{G} \right| \leq \pm 4 \cdot 10^{-13} \text{ aasta}^{-1}. \quad (54)$$

4.5 STG võrrandid ja dimensioonitud tihedusparameetrid

Standardmudeli kontekstis on võimalik heleduskauguse d_L avaldis (39) kirjutada sellisel kujul, et erinevate komponentide tihedusparameetrid esinevad heleduskauguse avaldises faktoriseerunult. Selleks, et kasutada standardmudeli raames kasutatud protseduuri faktoriseerunud tihedusparameetrite määramiseks supernoovade vaatlustest, tuleb püüda kirjutada STG kosmoloogia võrrandid sarnasel kujul. Osutub, et selline esitus on komplitseeritud mitmel põhjusel ja täpselt sellist esitust saada ei õnnestu.

Võrreldes STG võrrandeid (50)-(52) standardmudeli võrranditega (11)-(13) näeme, et esimestes leidub erinevaid skalaarvälja ja skalaarvälja tuletisi sisaldavaid liikmeid. Lisaks tuleb arvestada, et ka tavalise mateeria energiatiheduse ees ei ole enam mitte Newtoni gravitatsioonikonstant, vaid skalaarväljast sõltuv niinimetatud efektiivne gravitatsioonikonstant. Võrreldes standardmudeliga, kus tumeenergia energiatihedus on määratud üksnes kosmoloogilise konstandiga, on STG-s skalaarvälja ja tema tuletisi sisaldavad (lisa)liikmed aja funktsioonid ja võivad seetõttu kirjeldada ajast sõltuvat dünaamilist tumeenergiat. Samas ei oleks kuidagi põhjendatud ainult ühe liikme käsitlemine tumeenergiasse panust andva liikmena ning seetõttu peame kõiki skalaarvälja ja tema tuletisi sisaldavaid liikmeid defineerima tumeenergia energiatihedusena ρ_{de} . Analoogilistel kaalutlustel defineerime samuti ka tumeenergiale vastava rõhu p_{de} . Defineeritud suuruste ρ_{de} ja p_{de} kaudu saame määratleda dimensioonitud tihedusparameetrid Ω_m ja Ω_{de} ning seejärel esitada Hubble'i parameetri ruudu H^2 ja seeläbi ka heleduskauguse d_L avaldised STG jaoks sellisel viisil, nagu tegime seda standardmudeli jaoks. Eesmärgiks on seega esitada heleduskaugus niimoodi, et ta sisaldaks faktoriseeritud kujul vabasid parameetreid, mis iseloomustaksid tavalise mateeria ja dünaamilise tumeenergia hulka. Seejärel tuleb need parameetrid vaatlustulemustest määrata. Osutub, et selline esitus ei ole triviaalne ja nõuab mitmeid täiendavaid samme, mida järgnevas alajaotuses tutvustame.

Eelpool kirjeldatud skeemi läbiviimiseks ja tekkivatest probleemidest vabanemiseks püüame ülesandele läheneda mitut erinevat strateegiat kasutades.

4.5.1 Lahendusstrateegia I

Esmalt kirjutame STG kosmoloogia võrrandid sarnasel kujul nagu standardmudeli võrrandid

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3\Psi} (\rho_m + \rho_{de}) , \quad (55)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{\kappa^2}{\Psi} (p_m + p_{de}) . \quad (56)$$

Pidevuse võrrand tavalise mateeria ρ_m jaoks jääb kehtima kujul (13). Olles esitanud STG kosmoloogia võrrandid sellisel viisil, siis oleme defineerinud ka tumeenergia energiatiheduse ρ_{de} ning rõhu p_{de} STG kontekstis vastavalt avaldistega

$$\rho_{de} = \frac{3}{\kappa^2} \left(-H\dot{\Psi} + \frac{1}{6} \frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi} \omega \right) + V, \quad (57)$$

$$p_{de} = \frac{3}{\kappa^2} \left(\frac{2}{3} H\dot{\Psi} + \frac{1}{6} \frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi} \omega + \frac{1}{3} \ddot{\Psi} \right) - V. \quad (58)$$

Oluline on rõhutada, et sellisel viisil defineeritud tumeenergia energiatihedus ρ_{de} ja rõhk p_{de} ei rahulda pidevuse võrrandit kujul (13), vaid hoopis võrrandit kujul

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(\rho_{de} + p_{de}) - \frac{\dot{\Psi}}{\Psi} \rho_{de} - \frac{\dot{\Psi}}{\Psi} \rho_m = 0. \quad (59)$$

See võrrand on tuletatav võrranditest (55) ja (56) ning tavalisest pidevuse võrrandist mateeria jaoks (13) ja ei ole tegelikult midagi muud, kui skalaarvälja võrrand, mis antud juhul on kirjutatud defineeritud suuruste ρ_{de} ja rõhk p_{de} kaudu. Hoolimata sellisest definitsioonist ei ole võrrandid (55) ja (56) ikkagi samal kujul kui standardmudelis vastavad võrrandid (11) ja (12), sest sulgavaldiste ees ei ole mitte Newtoni gravitatsioonikonstant, vaid ajast sõltuv funktsioon κ^2/Ψ . Samuti ei ole võrrandit (59) võimalik integreerida esiteks seetõttu, et me ei tea skalaarvälja Ψ ajalast sõltuvust ja lisaks on tundmatu ka tumeenergiale vastav barotroopne indeks

$$w_{de} = \frac{p_{de}}{\rho_{de}}. \quad (60)$$

Antud kontekstis defineeritakse sageli nn efektiivne barotroopne indeks

$$w_{\text{eff}} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (61)$$

mis ei iseloomusta ainult tumeenergiat, vaid võtab arvesse ka tavalise mateeria ρ_m (mille jaoks on barotroopne indeks teada, $w = 0$). On kerge kontrollida, et juhul kui $\rho_{de} = 0$ ja rõhk $p_{de} = 0$ siis $w_{\text{eff}} = p_m/\rho_m \equiv w$ ja kui $\rho_{de} \neq 0$ ning rõhk $p_{de} \neq 0$, siis

$$w_{\text{eff}} = \frac{p_m + p_{de}}{\rho_m + \rho_{de}} \quad (62)$$

ehk efektiivne barotroopne indeks kirjeldab summaarset barotroopset indeksit. Oluline on rõhutada, et nii w_{de} kui ka w_{eff} ei ole konstandid, vaid kosmoloogilise aja funktsioonid.

Kokkuvõtvalt tuleb tõdeda, et sellisel viisil defineeritud tumeenergia energiatihedus ρ_{de} ja rõhk p_{de} ei võimalda standardmudeli raames esitatud protseduuri jätkata ja seda juba mainitud põhjusel, et me ei oska integreerida võrrandit (59).

4.5.2 Lahendusstrateegia II

Selleks, et tumeenergia energiatihedus ρ_{de} ja rõhk p_{de} rahuldaksid sellist tüüpi pidevuse võrrandit nagu tavaline aine (13), tuleb võrrandid (55) ja (56) ümber kirjutada ja samuti ümber defineerida energiatiheduse ρ_{de} ja rõhu p_{de} avaldised (57) ja (58) nii, et tekivad kaks lisaliiget. Need lisaliikmed võimaldavad omakorda esitada seosevõrrandi (55) ja dünaamilise võrrandi (56) sellisel kujul, et sulgavaldiste ees on konstantne suurus. See konstantne suurus on efektiivse gravitatsioonikonstandi väärtus ajahetkel t_0 ja kuna oleme selle ajahetke võtnud samaks praegusega, siis on see efektiivse gravitatsioonikonstandi väärtus praegusel hetkel.

Kirjutame võrrandid (55) ja (56) kujul

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3\Psi_0} (\rho_m + \rho_{de}), \quad (63)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{\kappa^2}{\Psi_0} (p_m + p_{de}) \quad (64)$$

kus Ψ_0 on skalaarvälja väärtus ajahetkel t_0 , mille oleme valinud praeguseks hetkeks. Niimoodi tehes peame defineerima energiatiheduse ρ_{de} ja rõhu p_{de} avaldised vastavalt

$$\rho_{de} = \frac{3}{\kappa^2} \left(-H\dot{\Psi} + \frac{1}{6} \frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi} \omega - 3H^2(\Psi - \Psi_0) \right) + V, \quad (65)$$

$$p_{de} = \frac{3}{\kappa^2} \left(\frac{2}{3} H\dot{\Psi} + \frac{1}{6} \frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi} \omega + \frac{1}{3} \ddot{\Psi} + \left(\frac{2}{3} \dot{H} + H^2 \right) (\Psi - \Psi_0) \right) - V, \quad (66)$$

Hoolimata sellest, et need definitsioonid sisaldavad kahte lisaliiget võrreldes definitsioonidega (57) ja (58) on vahetu, kuid pika arvutuse teel võimalik näidata, et niimoodi defineeritud suurused rahuldavad pidevuse võrrandit kujul

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(\rho_{de} + p_{de}) = 0. \quad (67)$$

Seega oleme defineerinud tumeenergia energiatiheduse ρ_{de} ja rõhu p_{de} selliselt, et nad rahuldavad tavalise pidevuse võrrandi tüüpi seost (67). Kasutades mastaabikordaja a ja punanihke z vahelist seost

$$\frac{da}{a} = -\frac{dz}{(1+z)} \quad (68)$$

saame selle võrrandi jaoks kirjutada lahendid integraalsel kujul

$$\rho_{de} = \rho_{de,0} \exp \left[\int_0^z \frac{3(1+w_{de})}{1+z} dz \right]. \quad (69)$$

Järgmine probleem, millele on vaja lahendus leida tuleneb juba mainitud asjaolust, et me ei tea tumeenergiale vastavat olekuparameetrit w_{de} ning seetõttu ei saa seost (69) lõpuni integreerida.

See probleem esineb igas kosmoloogilises mudelis, mis sisaldab tundmatu suurusena tumeenergia olekuparameetrit (tuletame meelde, et standardmudeli raames käsitletud kosmoloogilise konstandi korral teame temale vastavat barotroopset indeksit ja see on konstant, $w_\Lambda = -1$). Üks võimalus integreerimine läbi viia on suuruse w_{de} esitamine mingi parameetri kaudu. Kui seame tingimuseks, et kui $z \rightarrow \infty$ korral $w_{de} \rightarrow 0$ (ehk tumeenergia osakaal kogueenergiast läheneb nullile, kui liigume ajas piisavalt kaugele tagasi), siis on lihtsaim parametrisering võimalik esitada kujul

$$w_{de}(z) = -\frac{\alpha}{1+z} \quad (70)$$

Kus α iseloomustab nüüd dünaamilist tumeenergiat ja võrdub praegusele hetkel ($z=0$) tumeenergiale vastava olekuparameetriga. Rõhutame, et tegemist on ühe võimaliku parametriseringuga ja see ei pruugi kõiki asjaolusid arveesse võttes olla kõige sobivam.

Nüüd saame seose (69) lõpuni integreerida ja tulemus on esitatav kujul

$$\rho_{de} = \rho_{de,0} \exp \left[3 \ln(1+z) - \frac{3\alpha z}{1+z} \right] = \rho_{de,0} (1+z)^3 \exp \left[-\frac{3\alpha z}{1+z} \right]. \quad (71)$$

Sellist tüüpi parametriseringut on kasutatud ka töödes [29], [30] ja [31].

Defineerides dimensioonituid tihedusparameetreid kujul

$$\Omega_m = \frac{\kappa^2 \rho_m}{3H^2 \Psi_0}, \quad \Omega_{de} = \frac{\kappa^2 \rho_{de}}{3H^2 \Psi_0} \quad (72)$$

saame seosevõrrandi (63) esitada kujul

$$\Omega_m + \Omega_{de} = 1, \quad (73)$$

mis on kooskõlas tehtud eeldusega, et universumi geomeetria on tasane. Kasutades seoseid ρ_m ja ρ_{de} jaoks saame Hubble'i parameetri esitada punanihke z funktsioonina, kus parameetriteks on H_0 , $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{de,0}$ ja α

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 \left[\Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{de,0} (1+z)^3 \exp \left(-\frac{3\alpha z}{1+z} \right) \right] \\ &= H_0^2 \left[\Omega_{m,0} (1+z)^3 + (1 - \Omega_{m,0}) (1+z)^3 \exp \left(-\frac{3\alpha z}{1+z} \right) \right] \end{aligned} \quad (74)$$

Viimases võrduses oleme tumeenergia tihedusparameetri elimineerimiseks kasutanud asjaolu, et universumi geomeetria on eukleidiline ja seega kehtib tingimus: $\Omega_{de,0} = 1 - \Omega_{m,0}$. Viimast avaldist saame kasutada heleduskauguse avaldises (39) ja seejärel ka kaugusmooduli avaldises (40).

Osutub, et kui parameetrite määramiseks kasutada Ia-tüüpi supernoovade vaatlusandmeid, siis tuleb täiendavalt arvestada veel ühe efektiga, nimelt et STG-s on gravitatsioonikonstant skalaarväljast (ja seetõttu kosmoloogilisest ajast) sõltuv. Punktmasside vahel mõjuva jõu avaldis on määratud niinimetatud efektiivse gravitatsioonikonstandiga, mis on esitatav kujul:

$$8\pi G_{eff} = \frac{\kappa^2}{\Psi} \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3}. \quad (75)$$

Sellest suurusel sõltub ka Chandrasekhari mass ja seetõttu muutub ka Ia-tüüpi supernoovade heleduskõver ja selle maksimum [32], [33], [34]. See omakorda toob kaasa asjaolu, et kaugusmooduli avaldisse (40) tuleb lisada lisaliige

$$m - M = 5 \log d_L - 5 + \frac{15}{4} \log \frac{G_{eff}(z)}{G_{eff,0}}, \quad (76)$$

kus $G_{eff}(z)$ on efektiivse gravitatsioonikonstandi väärtus hetkel, mis vastab punanihkele z ja $G_{eff,0}$ on efektiivse gravitatsioonikonstandi väärtus vaatlushetkel $t = t_0$ ja $z = 0$. Kuna efektiivse gravitatsioonikonstandi sõltuvus punanihkkest ei ole teada, siis tuleb ka siin arvutuste läbiviimiseks kasutada teatud parametriseringut $G_{eff}(z)$ jaoks. Erinevatest kaalutlustest on teada, et efektiivne gravitatsioonikonstant ei saa olla alates varajase universumi nukleosünteesist muutunud väga palju ja praegusele muutumise kiirusele on nõrga välja lähendis antud alampiir, mis on esitatud valemiga (54). Nendest piirangutest lähtuvalt on vaja otsida efektiivse gravitatsioonikonstandi jaoks sobivat parametriseringut.

4.5.3 Kokkuvõttev võrdlus: standardmudel versus STG kosmoloogia

Lisame veel kokkuvõtva võrdluse kaugusmooduli arvutamiseks kosmoloogia standardmudelis ja STG kosmoloogilises mudelis.

1. STG kosmoloogias esineb võrrandites efektiivne gravitatsioonikonstant, mis on ajast sõltuv funktsioon. Standardmudelis määrab gravitatsioonilise interaktsiooni tugevuse Newtoni gravitatsioonikonstant, mis on aga fundamentaalkonstant ning ajast sõltumatu.
2. Punktis 1. mainitud asjaolu toob kaasa selle, et defineerides formaalselt tumeenergiale vastava energiatiheduse ρ_{de} ja rõhu p_{de} vastavalt seostega (57) ja (58), ei saa me nende suuruste jaoks skalaarväljast sõltumatut pidevuse võrrandit (vt seos (59)).
3. Selleks, et STG kosmoloogias tumeenergiale vastav energiatiheduse ρ_{de} ja rõhu p_{de} avaldised rahuldaksid pidevuse võrrandit, mis formaalselt sarnaneks hariliku pidevuse

võrrandiga materia jaoks, tuleb nende definitsioonidesse lisada veel kaks lisaliiget (vt seosed (65) ja (66)).

4. STG kosmoloogias ei tea me tumeenergiale vastavat olekuparameetrit w_{de} ja ei saa pidevuse võrrandit integreerida Selleks, et seda teha, tuleb kasutada olekuparameetri jaoks sobilikku parametriseringut (vt valem (70)). Seejärel saame pidevuse võrrandi integreerida ja esitada punanihke z kaudu (vt valem (71)).
5. Defineerides dimensioonitud tihedusparameerid kujul (72), saame lõpuks esitada Hubble'i parameetri punanihke funktsioonina (74), kus esineb täiendav parameeter α , mis kirjeldab tumeenergiale vastavat olekuparameetrit w_{de} .
6. Efektive gravitatsioonikonstandi sõltuvus ajast (ja seega ka punanihkest z) toob kaasa selle, et kaugusmooduli avaldisse tuleb STG kosmoloogias lisada seda muutust arvesse võttev liige (vt valem (76)), mis aga omakorda vajab parametriseerimist, sest efektive gravitatsioonikonstandi sõltuvus ajast ei ole teada.

4.5.4 Arutelu

Nägime, et standardmudeli raames on võimalik Ia-tüüpi supernoovade vaatlusandmetest saada erinevaid väärtuseid dimensioonitutele tihedusparameetritele $\Omega_{m,0}$ ja $\Omega_{\Lambda,0}$. Need erinevad tulemused on siiski piisavalt kooskõlalised, et see ei viita mingile protseduurilisele veale, vaid on tingitud erinevatest valikutest arvutusprogrammi rakendamisel. Neid valikuid on kirjeldatud alajaotuses 3.2.3. Seega tuleb standardmudeli raames tehtud arvutusi käsitleda kui testi, mis võimaldab arvutusprogrammis leida küsitavusi ning vigu ja nendele tuginedes arvutusprogrammi parandada ja täiustada. Olles veendunud programmi korrektsuses on seda võimalik kasutada ka standardmudelit üldistavate kosmoloogiate korral. Antud juhul on selleks üldistuseks STG-le vastav kosmoloogia. Programmi kasutamiseks tuleb üldistatud kosmoloogia võrrandid viia kujule, mis oleksid võimalikult sarnased standardmudeli võrranditega ja seda on alajaotuses 4.5 ka tehtud. Jõudsime seoseni, mis võimaldab heleduskauguse esitada parameetrite Ω_m ja α kaudu. Suurus α iseloomustab dünaamilist tumeenegiat STG-s. Täiendava asjaoluna tuleb arvestada seda, et STG-s esinev efektive gravitatsioonikonstant on aja funktsioon ja kuna tema ajaline käitumine ei ole teada, siis tuleb tegeleda tema sobivalt parametriseerimisega. Seda käesolevas töös teha ei jõutud. Edasise analüüsi eesmärgil tuleb see parametrisering läbi teha. Pärast parametriseerimist ja juba kasutatud arvutusprogrammi täiustamist tuleb juba stan-

dardmudeli raames läbi viidud arvutus läbi viia STG raames ning võrrelda saadud tulemuste kooskõla vaatlustega.

5 Kokkuvõte

Antud töös tutvusime esmalt üldrelatiivsusteooria võrranditega ning nendele põhineva Friedmanni kosmoloogiaga, mida tuntakse ka kui kosmoloogia standardmudelit. Samuti vaatlesime põgusalt mõningaid klassikalisi standardmudeli probleeme ning mainisime nende võimalikke lahendusi. Standardmudeli probleemid on ka otseseks põhjuseks sellele, miks üldse otsitakse standardmudelit kirjeldavale üldrelatiivsusteooriale, mis on siiani tehtud vaatlustega väga heas kooskõlas, alternatiive. Üheks selliseks alternatiiviks on üldistatud gravitatsiooniteooriad, mille ühe esindajana käesolevas töös vaatleme skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooriat ja temast tulenevat kosmoloogiat.

Töö teises osas tutvusime Ia-tüüpi supernoova vaatlustega ning supernoova kosmoloogia projekti meeskonna poolt koostatud andmestiku Union 2.1'ga ning kasutasime Andrjus Frantskjavitšiu poolt kirjutatud Maple'i programmi arvutuseeskirja, et läbi viia omapoolne kosmoloogiliste tihedusparameetrite leidmine standardmudeli raames. Lisasime programmile mõned funktsioonid ja kokkuvõtvalt tuleb tõdeda, et saadud tulemused olid küllaltki täpselt kokku langevad varasemalt avaldatud tulemustega, mis on saadud teisi programme kasutades. Kooskõlalisi tulemusi võib seega tõlgendada kui kontrolli, mis kinnitab, et kasutatud programm on protseduuriliselt korrektne. Samuti annavad tulemused vihjeid arvutusprogrammi võimalikuks täiustamiseks ning kasutamiseks üldistatud kosmoloogiates.

Töö kolmandas osas tutvusime ja käsitlesime modifitseeritud gravitatsiooniteooriana skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteooriat, kus skalaarväli on osa gravitatsioonilisest interaktsioonist. Tõime välja selle, millistele parametriseeritud post-Newtoni parameetritele peab modifitseeritud gravitatsiooniteooria vastama, et ta ei läheks vastuollu nõrga välja tingimustes tehtud vaatlustulemustega (Päikesesüsteemi vaatlused). Samuti arutlesime standardmudeli raames arvutustel rakendatud skeemi kasutamise problemaatilisuse üle skalaar-tensor tüüpi gravitatsiooniteoorias ning tõime välja mitmed erinevad lahendusstrateegiad probleemidest vabanemiseks. Pakutud lahendusi probleemidele antud töös testida ei jõudnud, aga oleme otseselt välja toonud võimalused antud tööd nende strateegiatega jätkata ning täpsustada.

6 Summary

Cosmological Density Parameters in the Standard Model and Scalar-Tensor Cosmologies Determined by SN Ia Supernovae Observations

First, we acquaint ourselves with the General Theory of Relativity and the equation for the standard model for cosmology that is based on it. We also briefly take a look at the problems regarding the standard model and mention some of the possible solutions for them. We note, that although General Relativity has so far well withstood the experimental tests for it, the problems within the standard model that remain are the main motivations behind considering alternative theories for gravity.

Secondly, we take a look at the Supernova Cosmology Project and their Union 2.1 compilation for SN Ia supernovae observations. Using a Maple program script, written by Andrjus Frantskjavitšius, we try to calculate our own best fit cosmological parameters within the standard model, using six different approaches. The results that we found are not exactly in accordance with the Union 2.1 best fit and other observations for the cosmological parameters, but they are in a good approximation for them. Thus we can safely conclude, that there are no significant procedural errors within the script and that we can use the results as a waypoint for improving the Maple script and use it for calculations in more general cosmologies.

Thirdly, we consider scalar-tensor theory of gravity as a possible alternative candidate for General Relativity. We give a short overview of scalar-tensor theory and mention the parameterized post-Newton constraints for the theory. We also discuss the difficulty of using the standard model procedure for finding the cosmological parameters within the frame of scalar-tensor theory and give different solutions for resolving these problems. Although, we did not manage to test these strategies, we did have them clearly outlined and therefore can be easily implemented in further work.

7 Tänuõnad

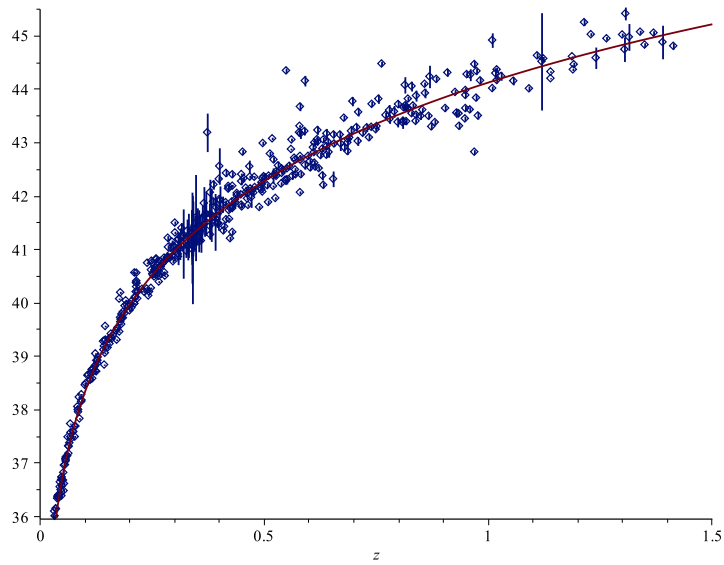
Lõpetuseks tahan südamest tänada inimesi, kes on aidanud kaasa selle töö valmimisele. Esiteks tänan juhendajat Margus Saali, kes oli töö kirjutamisel suureks abiks. Teiseks tahan tänada Andrus Frantskjavitšiust, kes kirjutas antud töös kasutatud Maple'i programmi. Samuti tänan Laur Järve ning Piret Kuuske, kellega koos viidi läbi gravitatsiooniteooria seminare, mis aitasid kindlasti antud teematikat paremini mõista.

Viited

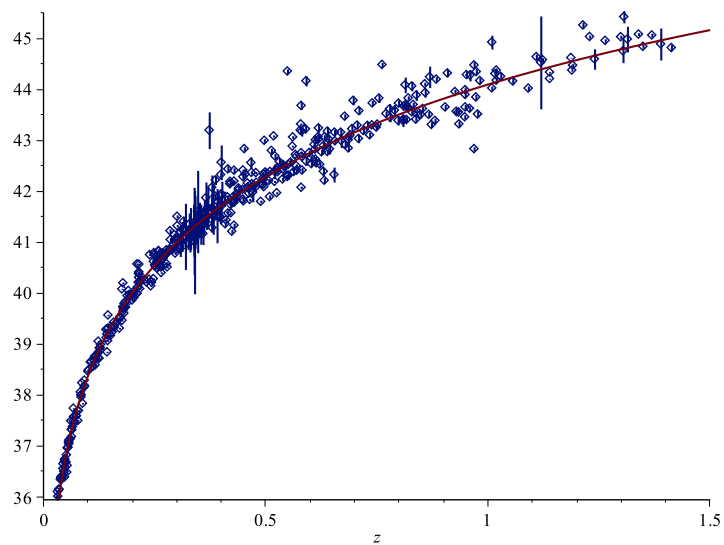
- [1] S. Weinberg, "Cosmology", Oxford University Press, 2008
- [2] S. Carroll, "Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity", Pearson Education, Inc., 2004
- [3] S. Perlmutter *et al.* (The Supernova Cosmology Project) (1999), arXiv:astro-ph/9812133v1.
- [4] A. G. Riess *et al.* (Supernova Search Team) (1998), arXiv:astro-ph/9805201v1.
- [5] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa (2006), arXiv:hep-th/0603057v3.
- [6] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, N. N. Weinberg, Phys.Rev.Lett. **91** 071301 (2003), arXiv:astro-ph/0302506 [astro-ph].
- [7] P. H. Frampton, K. J. Ludwick, R. J. Scherrer, Phys.Rev.D **84** 063003 (2011), arXiv:1106.4996 [astro-ph.co].
- [8] B. A. Bassett, S. Tsujikawa, D. Wands, Rev. Mod. Phys. **78**, 537 (2006), arXiv:astro-ph/0507632v2.
- [9] S. Capozziello, V. Faraoni, "Beyond Einstein Gravity", Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2011.
- [10] C. M. Will, Living Rev.Rel. **93** (2005), arXiv:gr-qc/0510072.
- [11] L. Järv, P. Kuusk, M. Saal, Phys.Rev.D **81** 104007 (2010), arXiv:1003.1686 [gr-qc].
- [12] L. Järv, P. Kuusk, M. Saal, Phys.Rev.B **694** 1-5 (2010), arXiv:1006.1246 [gr-qc].
- [13] L. Järv, P. Kuusk, M. Saal, Phys.Rev.D **85** 064013 (2012), arXiv:1112.5308 [gr-qc].
- [14] N. Suzuki *et al.* (The Supernova Cosmology Project) (2011), arXiv:1105.3470v1 [astro-ph.CO]
- [15] <http://supernova.lbl.gov/Union/>
- [16] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration) (2013), arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO].
- [17] http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck/Planck_reveals_an_almost_perfect_Universe

- [18] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration) (2013), arXiv:1303.5083v1 [astro-ph.CO].
- [19] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration) (2013), arXiv:1303.5082v1 [astro-ph.CO].
- [20] P. J. Steinhardt, N. Turok (2002), arXiv:hep-th/0111030v2.
- [21] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, "Fundamental Astronomy", Springer, 2007
- [22] <http://physics.ucsc.edu/drip/133/ch4.pdf>
- [23] <http://cosmologist.info/cosmomc/>
- [24] C. Cheng, H. Qing-Guo (2013), arXiv:1306.4091v1 [astro-ph.CO].
- [25] C. Brans, R. H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).
- [26] L. Yi-Chao, W. Feng-Quan, C. Xuelei (2013), arXiv:1305.0055v2 [astro-ph.CO].
- [27] V. Faraoni, "Cosmology in Scalar-Tensor Gravity", Kluwer Academic Publishers, 2004
- [28] A. Bhadra, K. Sarkar, D. P. Datta, K. K. Nandi (2006), arXiv:gr-qc/0605109v1.
- [29] M. Chevallier and D. Polarski, Int. J. Mod. Phys. **D 10**, 213 (2001), arXiv:gr-qc/0009008.
- [30] R. Gannouji, D. Polarski, A. Ranquet and A. A. Starobinsky, JCAP **0609**, 016 (2006), arXiv:astro-ph/0606287.
- [31] R. Gannouji and D. Polarski, JCAP **0805**, 018 (2008), arXiv:0802.4196 [astro-ph].
- [32] L. Amendola, P. S. Corasaniti and F. Occhionero (1999), arXiv:astro-ph/9907222.
- [33] E. Gaztanaga, E. Garcia-Berro, J. Isern, E. Bravo and I. Dominguez, Phys. Rev. **D 65**, 023506 (2002), arXiv:astro-ph/0109299.
- [34] A. Riazuelo and J. -P. Uzan, Phys. Rev. D **66**, 023525 (2002), arXiv:astro-ph/0107386.

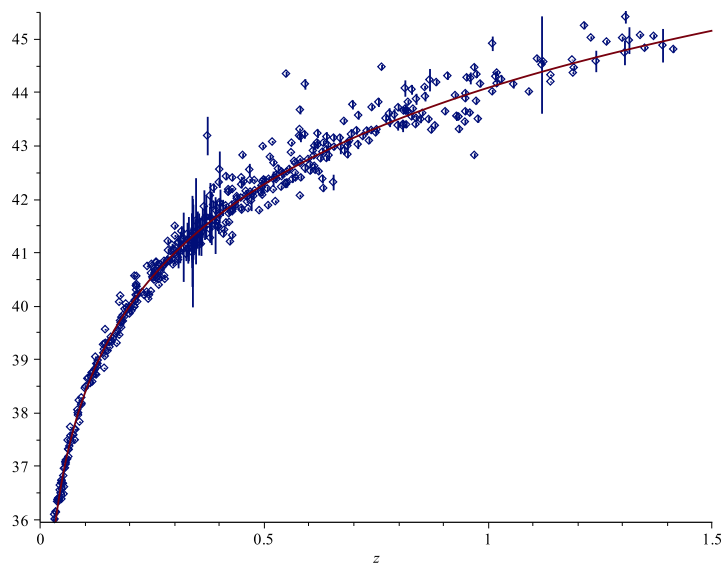
Lisad



Joonis 2. Maple'i III arvutuse poolt saadud graafik kaugusmooduli ja punanihke z jaoks.



Joonis 3. Maple'i IV & V arvutuse poolt saadud graafik kaugusmooduli ja punanihke z jaoks.



Joonis 4. Maple'i VI arvutuse poolt saadud graafik kaugusmooduli ja punanihke z jaoks.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina _____ Jens-Kristjan Liivand _____
(*autori nimi*)
(sünnikuupäev: _____ 03.06.1989 _____)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
Kosmoloogilised tihedusparameetrid standardmudelis ja skalaar-tensor kosmoloogias
määratuna Ia supernoova vaatlustest _____,
(*lõputöö pealkiri*)

mille juhendaja on _____ Margus Saal _____,
(*juhendaja nimi*)

1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **21.06.2013**