TARTU ÜLIKOOL

MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

MATEMAATILISE STATISTIKA INSTITUUT

Matvei Mirošnikov

# Munich Chain Ladder meetod reservide hindamiseks kahjukindlustuses

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: dotsent Meelis Käärik

TARTU

2014

**Munich Chain Ladder meetod reservide hindamiseks kahjukindlustuses**

Käesoleva bakalaureusetöö töö eesmärk oli uurida kindlustuse reservide hindamismeetodit Munich Chain Ladder (MCL) ning anda lugejale põhjalik ülevaade meetodi kasutamise tingimustest ja võimalustest.

Töö esimeses osas kirjeldatakse MCL-meetodi teoreetilisi aluseid, kus tuuakse välja baasmõisted, seletatakse lahti reservide hindamise ülesannet, esitatakse prognooside ja veahinnangute arvutusskeemid ning vaadeldakse algoritmi probleeme. Teises osas rakendatakse MCL-meetodit kahele praktilisele ülesandele.

MCL-meetodi eesmärk seisneb makstud ja toimunud kahjude prognoositavate reservide vahe minimiseerimises. Läbiviidud analüüsi käigus selgus, et antud juhtudel makstud ja toimunud kahjude kogureservid oluliselt ei erine. Meetodi edaspidisel kasutamisel tuleb enne algoritmi rakendamist andmeid hoolikalt analüüsida, võttes arvesse kõiki aspekte, mis võivad prognoositavat tulemust mõjutada.

Märksõnad: reservid, kahjukindlustus, hüvitised, prognoosid, mudelid.

**Munich Chain Ladder Method for Calculating Reserves in Non-Life Insurance**

The aim of this bachelor’s thesis was to explore the reserving method Munich Chain Ladder and to introduce its capabilities and limitations.

The paper consists of two chapters. The first chapter gives the theoretical overview of MCL. This section begins with the fundamental terms, after that the MCL algorithm is provided. At the end of the theoretical section the problems of the MCL algorithm are discussed. In the second chapter, complete MCL calculation for two numerical examples is performed.

The aim of MCL is to reduce the gap between projections based on paid losses and projections based on incurred losses. Our analysis showed that in considered examples the prognosed total reserves for paid and incurred claims are not significantly different. It is important to analyze the initial data attentively taking into consideration all aspects which could influence the obtaining results.

Key words: reserves, non-life insurance, benefits, predictions, models.

# SISUKORD

# SISSEJUHATUS

Kindlustusettevõte loob kahjude reservi selleks, et vaadeldavas perioodis tekkinud hüvitist kinni maksta. Et täita kohustusi nende kahjude suhtes, mille korral toimunud kindlustusjuhtumi kohta on kindlustusettevõttel teada, kuid kindlustusvõtja ei ole aruandekuupäeva seisuga esitanud taotlust kahju hüvitamiseks, loob kindlustusandja toimunud kuid teatamata (ingl *Incurred But Not Reported*, edaspidi IBNR) kahjude reservi.

IBNR reservisuuruse hindamiseks kasutatakse tavaliselt kahte andmekomplekti: makstud kahjude suurused ja toimunud kahjude suurused. Sealjuures tekib sageli probleem, et makstud kahjude andmetele ülesehitatud prognoosid ei lange toimunud kahjude prognoosidega kokku. Käesolevas töös vaadeldakse selle probleemi ühte võimalikku lahendust: Munich Chain Ladder (edaspidi MCL) meetodit, mille oluline omadus seisneb makstud ja toimunud kahjude vahelise sõltuvuse leidmises ja kasutamises prognooside leidmise juures. Selle töö eesmärk on anda lugejale ülevaade MCL-meetodist, selgeks teha arvutusalgoritm ning näidata meetodi eeliseid ja puuduseid.

Bakalaureusetöö on jagatud kaheks osaks. Esimeses osas tutvustatakse uuritava teema teoreetilist poolt. Esmalt tuuakse välja baasmõisted, mida kindlustuse reservide hindamisel kasutatakse. Seejärel esitatakse MCL-hindamisalgoritmi koos veahinnangute arvutusskeemiga. Teoreetilise osa lõpus arutatakse algoritmi realiseerimisel tekkivate probleemide üle ning pakutakse välja lahendusi. Teises osas rakendatakse meetod reaalsetele andmetele: kahe erineva näite põhjal arvutatakse MCL-prognoosid, tuuakse arvutustulemused, mille põhjal tehakse vastavad järeldused. Lisades antakse kasutatud programmikood tarkvara R jaoks.

Autor sooviks tänada juhendaja dotsent Meelis Käärikut asjalike ja väärtuslike nõuannete, rohkete paranduste ning konstruktiivse kriitika eest bakalaureusetöö valmimisel. Samuti väljendab autor tänud Salva Kindlustuse AS aktuaar Tõnis Maldrele mitmete väljapakutud ideede, aktiivse koostöö ja põhjaliku tagasiside eest teema uurimisel.

# 1. MCL-MEETODI TEOREETILINE ALUS

Selle peatüki eesmärgiks on esitada MCL-meetodi teoreetilised alused. Esiteks anname lugejale ülevaate uuritavast meetodist ning kasutatud terminoloogiast. Peale seda toome sisse tähistused, mida hakkame edaspidi kasutama. Otsustame täpsemalt, millised tegurid meile huvi pakuvad ning paneme kirja vajalikud valemid. Esitame MCL-meetodi matemaatilise mudeli koos tema eeldustega ning anname prognooside arvutusskeemi. Seejärel esitame bootstrap-meetodi algoritmi prognoositavate reservide veahinnangute leidmiseks. Teoreetilise osa lõpus arutame probleemid, mis võivad meetodi rakendamisel ette tulla.

## 1.1. Reservide hindamise ülesanne

Kindlustusreservide arvutamisel vaadeldakse konkreetset ajavahemikku, mis on määratud ühikutega kahju toimumise aasta (ingl *Accident year*) ja kujunemise aasta ehk arenguaasta (ingl *Development year*). Käesolevas töös kasutame tabelites vastavad lühendid AY ja DY. Kuigi sageli kasutatakse ka kuu- või kvartaliaruandeid, valisime selles töös ühikuks aasta.

Kahju toimumise aasta mõiste all mõeldakse ajavahemikku, millesse kuuluvad kahjud, mis on toimunud selle kalendriaasta jooksul. Käesolevas töös tähistame kahju toimumise aastat järjekorranumbriga vaadeldavas perioodis.

Kujunemise aastates ehk arenguaastates kindlustuses mõõdetakse perioodi pärast vaadeldavat kahju toimumise aastat. Kujunemise aastat tähistame järjekorranumbriga, mis näitab, mitu aastat on möödunud kahju toimumise aastast. Selles töös vaadeldakse andmebaase, kus toimumise aastate arv võrdub kujunemise aastate arvuga.

Nagu eespool mainitud, eristatakse kahte tüüpi andmeid, mis esitatakse kolmnurkade kujul: makstud kahjude (ingl *Paid losses*) arengukolmnurk ja toimunud kahjude (ingl *Incurred losses*) arengukolmnurk. Toimunud kahjude suuruse mõiste all mõeldakse vaadeldavas perioodis väljamakstavate kahjude ja hinnatavate maksmata kahjude summat.

Huvi pakuvad kahjude prognoosid tulevikuks ehk teise (alumise) kolmnurga väärtused. Prognoositavad kahjude suurused moodustavad reservi, mis peab ettevõttel olema vaadeldaval perioodil tekkinud kahjude välja maksmiseks. Huvi pakuvad järgmised suurused:

- Makstud ja toimunud kahjude reservid iga toimumise aasta jaoks eraldi. Makstud kahjude reserv näitab, kui suur summa läheb prognoositaval perioodil vaadeldava toimumise aasta kahjude välja maksmiseks. Toimunud kahjude reserv näitab prognoositaval perioodil välja makstud ja maksmata jäävate kahjude summat arvestades vaadeldava aasta kahjusid.
- Makstud ja toimunud kahjude kogureservid. Interpreteeritakse kui reservid üle kõigi vaadeldavate toimumise aastate ehk toimumise aastate reservide summa.

Üks tuntumaid meetodeid reservide hindamiseks on ahel-redel (ingl *Chain Ladder*). Selle meetodi printsiip seisneb selles, et teadaolevate andmete (ülemise kolmnurga) põhjal leitakse kahjude üleminekukordajad ühest kujunemise aastast järgmisse ning neid rakendatakse teadmata kahjude suurustele (alumisele kolmnurgale) (Mack, 1993, lk 214-215). Paneme tähele, et andmed viiakse kumulatiivsele kujule.

Niiviisi saadud makstud ja toimunud kahjude reservide hinnangud ei pruugi kokku langeda. Nende erinevus on ootuspärane, kuna makstud ja toimunud kahjude andmed vaadeldakse eraldi ning nende vahelist sõltuvust ei võeta arvesse. MCL-meetodi eesmärk on seda sõltuvust arvestades prognoosida tulevate väljamakstavate ja toimunud kahjude suurusi nii, et vaadeldava perioodi lõpuks nende suuruste vahe oleks võimalikult väike. Järgnevates peatükkides 1.2, 1.3 ja 1.4 on tuginetud allikale Quarg ja Mack (2004).

## 1.2. Kasutatud parameetrid ja tähistused

Olgu $n \in \mathbb{N}$ on vaadeldavate kujunemise aastate ning kahju toimumise aastate arv. Vaadeldava kahju toimumise aasta tähistame indeksiga $i \in \{1, \dots, n\}$ ning kujunemise aastat indeksiga $s \in \{1, \dots, n\}$.

Olgu $P_{i,s}$ kahju toimumise aasta $i$ kumulatiivne makstud kahju suurus pärast kujunemise aastat $s$. Analoogselt, olgu $I_{i,s}$ toimunud kahju suurus. Hulka $\mathcal{P}_i(s) \coloneqq \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}\}$ kuuluvad $i$-nda toimumise aasta makstud kahjude suurused pärast kujunemise aastat $s$ ning analoogselt hulka $\mathcal{I}_i(s) \coloneqq \{I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}$ kuuluvad toimunud kahjude suurused. Kahte tüüpi andmed koos moodustavad hulga $\mathcal{B}_i(s) \coloneqq \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}, I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}$.

Lähteandmetabelites on teadaolevad väärtused $P_{i,s}$ ja $I_{i,s}$, mille korral $i = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, n - i + 1$. Eesmärk on prognoosida tulevate kahjude suurusi $\hat{P}_{i,s}$ ja $\hat{I}_{i,s}$, kus $i = 2, \dots, n, s = n - i + 2, \dots, n$. Makstud kahjude andmed esitatakse Tabelis 1.2.1 toodud kujul, kus jämeda joonega on näidatud prognoositavad väärtused, ülejäänud on esialgsed andmed. Toimunud kahjude andmed esitatakse analoogselt.

Tabel 1.2.1. Makstud kahjude esialgsed andmed ja prognoosid.

| DY / AY | $1$ | $2$ | … | $n+1-i$ | … | $n-1$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $P_{1,1}$ | $P_{1,2}$ | … | $P_{1,n+1-i}$ | … | $P_{1,n-1}$ | $P_{1,n}$ |
| 2 | $P_{2,1}$ | $P_{2,2}$ | … | $P_{2,n+1-i}$ | … | $P_{2,n-1}$ | $\hat{P}_{2,n}$ |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| $i$ | $P_{i,1}$ | $P_{i,2}$ | … | $P_{i,n+1-i}$ | … | $\hat{P}_{i,n-1}$ | $\hat{P}_{i,n}$ |
| … | … | … | | … | … | … | … |
| $n-1$ | $P_{n-1,1}$ | $P_{n-1,2}$ | … | $\hat{P}_{n-1,n+1-i}$ | … | $\hat{P}_{n-1,n-1}$ | $\hat{P}_{n-1,n}$ |
| $n$ | $P_{n,1}$ | $\hat{P}_{n,2}$ | … | $\hat{P}_{n,n+1-i}$ | … | $\hat{P}_{n,n-1}$ | $\hat{P}_{n,n}$ |

Vaatleme makstud kahjude tabelis *i*-ndat kahju toimumise aastat. Teadaoleva kolmnurga viimase diagonaali väärtus $P_{i,n+1-i}$ näitab, kui palju hetkel *i*-nda aasta kahjudest on välja makstud. Viimane prognoositav väärtus $\hat{P}_{i,n}$ näitab, kui palju tuleb kokku välja maksta $i - 1$ aasta pärast. Nende kahe suuruse vahet me nimetame *i*-nda kahju toimumise aasta makstud kahjude reserviks:

$$\hat{R}_i^P \coloneqq \hat{P}_{i,n} - P_{i,n+1-i}. \tag{1.2.1}$$

Vaatleme nüüd toimunud kahjude tabelis *i*-ndat toimumise aastat. Viimane prognoositav väärtus $\hat{I}_{i,n}$ näitab väljamakstavate kahjude prognoosi ($\hat{P}_{i,n}$) ja hinnatavate maksmata kahjude summat. Lahutades väärtusest $\hat{I}_{i,n}$ hetkel väljamakstud summa $P_{i,n+1-i}$, saame prognoosi, mis näitab, milline on kogusumma, mis järgmise $i - 1$ aasta jooksul välja makstakse või reservi lisatakse. Seda prognoosi nimetame *i*-nda kahju toimumise aasta toimunud kahjude reserviks:

$$\hat{R}_i^I \coloneqq \hat{I}_{i,n} - P_{i,n+1-i}. \tag{1.2.2}$$

Makstud kahjude kogureservi suurus avaldub iga kahju toimumise aasta makstud kahjude reservi summana:

$$\hat{R}^P \coloneqq \sum_{i=2}^{n} \hat{R}_i^P. \tag{1.2.3}$$

Toimunud kahjude kogureserv arvutatakse analoogselt.

Toome sisse parameetrid $F_{i,s}^P \coloneqq \frac{P_{i,s+1}}{P_{i,s}}$ ja $F_{i,s}^I \coloneqq \frac{I_{i,s+1}}{I_{i,s}}$, kus $i = 1, \dots, n-1, s = 1, \dots, n-i$. Neid suhteid nimetame individuaalseteks üleminekukordajateks kujunemise aastast $s$ aastasse $s+1$ konkreetse kahju toimumise aasta $i$ suhtes.

Makstud ja toimunud kahjude suuruste suhet nimetame edaspidi lihtsuse mõttes (*P/I*)-suhteks. Toimunud ja makstud kahjude suhet nimetame vastavalt (*I/P*)-suhteks. Individuaalse (*P/I*)-suhte *i*-nda toimumise aasta ja s-nda kujunemise aasta jaoks tähistame $Q_{i,s} \coloneqq \frac{P_{i,s}}{I_{i,s}}$ ning vastava (*I/P*)-suhte tähistame $Q_{i,s}^{-1} \coloneqq \frac{I_{i,s}}{P_{i,s}}$.

Mõlemas kolmnurgas (makstud ja toimunud kahjude protsessides) pakuvad huvi üleminekud ühest kujunemise aastast järgmisse üle kõigi kahju toimumise aastate. Ülemineku kujunemise aastast $s$ aastasse $s+1$ jaoks leitakse üldised üleminekukordajad $f_{s\to s+1}^P$ ja $f_{s\to s+1}^I$ ja üleminekuhajuvused $\sigma_{s\to s+1}^P$ ja $\sigma_{s\to s+1}^I$.

Iga kujunemise aasta puhul pakuvad huvi üldised (*P/I*)- ja (*I/P*)-suhted üle kõigi kahju toimumise aastate ehk tinglikud keskväärtused $q_s$ ja $q_s^{-1}$ ning standardhälbed $\rho_s^I$ ja $\rho_s^P$.

Et kasutada üleminekukordajaid ning (*P/I*)- ja (*I/P*)-suhteid erinevate kujunemise aastate jaoks, nende väärtused tuleb standardiseerida. Selleks leitakse Pearsoni jäägid:

- makstud kahjude üleminekukordajate tinglikud jäägid $\mathrm{Res}\left(F_{i,s}^P | \mathcal{P}_i(s)\right)$ ning toimunud kahjude üleminekukordajate jäägid $\mathrm{Res}\left(F_{i,s}^I | \mathcal{J}_i(s)\right)$,
- (*P/I*)-suhete jäägid $\mathrm{Res}\left(Q_{i,s} | \mathcal{J}_i(s)\right)$ ning (*I/P*)-suhete jäägid $\mathrm{Res}\left(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s)\right)$.

Tinglike jääkide arvutamiseks kasutame valemit $\mathrm{Res}(X|C) \coloneqq \frac{X - \mathrm{E}(X|C)}{\sigma(X|C)}$, kus $X$ on juhuslik suurus, $C$ on tingimus ja $\sigma(X|C) = \sqrt{\mathrm{Var}(X|C)}$. Märgime, et toodud tinglikud jäägid on standardiseeritud, st $\mathrm{E}(\mathrm{Res}(X|C)|C) = 0, \mathrm{Var}(\mathrm{Res}(X|C)|C) = 1$.

## 1.3. MCL-meetodi eeldused

MCL-meetodi mudel nõuab, et oleks täidetud järgmised eeldused:

Eeldus 1. Iga $s = 1, \dots, n-1$ jaoks eksisteerivad üldised üleminekukordajad $f^P_{s\to s+1} > 0$ ja $f^I_{s\to s+1} > 0$, et iga $i = 1, \dots, n$ korral:

$$\mathrm{E}\left(F^P_{i,s} | \mathcal{P}_i(s)\right) = f^P_{s\to s+1} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{E}\left(F^I_{i,s} | \mathcal{I}_i(s)\right) = f^I_{s\to s+1}.$$

Eeldus 2. Iga $s = 1, \dots, n$ jaoks eksisteerivad üldised (*P/I*)- ja (*I/P*)-suhted $q_s > 0$ ja $q_s^{-1} > 0$, et iga $i = 1, \dots, n$ korral:

$$\mathrm{E}\big(Q_{i,s} | \mathcal{I}_i(s)\big) = q_s \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{E}\big(Q^{-1}_{i,s} | \mathcal{P}_i(s)\big) = q_s^{-1}.$$

Eeldus 3. Iga $s = 1, \dots, n-1$ jaoks leiduvad üldised üleminekuhajuvused $\sigma^P_{s\to s+1} \geq 0$ ja $\sigma^I_{s\to s+1} \geq 0$, et iga $i = 1, \dots, n$ korral:

$$\mathrm{Var}\left(F^P_{i,s} | \mathcal{P}_i(s)\right) = \frac{\left(\sigma^P_{s\to s+1}\right)^2}{P_{i,s}} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{Var}\left(F^I_{i,s} | \mathcal{I}_i(s)\right) = \frac{\left(\sigma^I_{s\to s+1}\right)^2}{I_{i,s}}.$$

Jagamine kaaludega $P_{i,s}$ või $I_{i,s}$ on põhjendatud sellega, et ühel kahju toimumise aastal peab ülemineku tinglik hajuvus olema võrdeline vastava kahju suurusega (Mack, 1993, lk 217).

Eeldus 4. Iga $s = 1, \dots, n$ jaoks leiduvad üldised (*P/I*)- ja (*I/P*)-suhete hajuvused $\rho^I_s \geq 0$ ja $\rho^P_s \geq 0$, et iga $i = 1, \dots, n$ korral:

$$\mathrm{Var}\left(Q_{i,s} | \mathcal{I}_i(s)\right) = \frac{\left(\rho^I_s\right)^2}{I_{i,s}} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{Var}\left(Q^{-1}_{i,s} | \mathcal{P}_i(s)\right) = \frac{\left(\rho^P_s\right)^2}{P_{i,s}}.$$

Eeldus 5. Kahe erineva kahju toimumise aasta protsessid on omavahel sõltumatud, st elementide paarid $\{P_{1,s}, I_{1,s}\}, \dots, \{P_{n,s}, I_{n,s}\}, s = 1, \dots, n$ on omavahel stohhastiliselt sõltumatud.

Eeldus 6. Eksisteerib konstant $\lambda^P$, et iga $s = 1, \dots, n-1$ ja iga $i = 1, \dots, n$ jaoks:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{Res}\left(F^P_{i,s} | \mathcal{P}_i(s)\right) \mid \mathcal{B}_i(s)\right) = \lambda^P \cdot \mathrm{Res}\big(Q^{-1}_{i,s} | \mathcal{P}_i(s)\big) \tag{1.3.1}$$

ehk

$$\mathrm{E}\left(F^P_{i,s} | \mathcal{B}_i(s)\right) = f^P_{s\to s+1} + \lambda^P \cdot \frac{\sigma\left(F^P_{i,s} | \mathcal{P}_i(s)\right)}{\sigma\left(Q^{-1}_{i,s} | \mathcal{P}_i(s)\right)} \cdot \left(Q^{-1}_{i,s} - \mathrm{E}\big(Q^{-1}_{i,s} | \mathcal{P}_i(s)\big)\right). \tag{1.3.2}$$

Eeldus 7. Eksisteerib konstant $\lambda^I$, et iga $s = 1, \dots, n-1$ ja iga $i = 1, \dots, n$ jaoks:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{Res}\left(F^I_{i,s} | \mathcal{I}_i(s)\right) \mid \mathcal{B}_i(s)\right) = \lambda^I \cdot \mathrm{Res}\big(Q_{i,s} | \mathcal{I}_i(s)\big) \tag{1.3.3}$$

ehk

$$\mathrm{E}\left(F^I_{i,s} | \mathcal{B}_i(s)\right) = f^I_{s\to s+1} + \lambda^I \cdot \frac{\sigma\left(F^I_{i,s} | \mathcal{I}_i(s)\right)}{\sigma\left(Q_{i,s} | \mathcal{I}_i(s)\right)} \cdot \left(Q_{i,s} - \mathrm{E}\big(Q_{i,s} | \mathcal{I}_i(s)\big)\right). \tag{1.3.4}$$

**Mudeli eelduste analüüs**

Eeldused 1 ja 3 pärinevad tavalisest ahel-redel mudelist. Nad võtavad arvesse ainult ühe hulga elemente, st praktikas kasutatakse ühe parameetri arvutamisel ainult üht andmekomplekti: makstud kahjude kolmnurka või toimunud kahjude kolmnurka.

Eeldused 2, 4, 5, 6 ja 7 võtavad arvesse mõlema kolmnurga andmed, seega hakkab rolli mängima seos makstud ja toimunud kahjude vahel. Huvi pakuvad üleminekukordajate tinglikud keskväärtused $\mathrm{E}\left(F_{i,s}^{P}|\mathcal{B}_i(s)\right)$ ja $\mathrm{E}\left(F_{i,s}^{I}|\mathcal{B}_i(s)\right)$ ning nende jäägid.

Paneme tähele, et Eelduste 3 ja 4 järgi on lubatud, et üleminekutel või (*P/I*)-suhetel puuduks varieeruvus, st võib kehtida $\sigma_{s\to s+1}^{P} = 0, \sigma_{s\to s+1}^{I} = 0, \rho_s^P = 0$ või $\rho_s^I = 0$. Järgmises peatükis esitatud arvutusalgoritmist saab näha, et parameetrite leidmisel tekib sel juhul nulliga jagamise probleem. Põhjalikult vaatame „null-hajuvuse" probleemi peatükis 1.5.

Vaatleme Eeldust 6 (Eelduse 7 korral saab teha analoogsed tähelepanekud). Näitame, et võrdusest (1.3.1) järeldub (1.3.2). Kasutades jääkide definitsiooni viime võrduse (1.3.1) järgmisele kujule:

$$\mathrm{E}\left(\left.\frac{F_{i,s}^{P} - \mathrm{E}\left(F_{i,s}^{P}|\mathcal{P}_i(s)\right)}{\sigma\left(F_{i,s}^{P}|\mathcal{P}_i(s)\right)}\right|\mathcal{B}_i(s)\right) = \lambda^P \cdot \frac{Q_{i,s}^{-1} - \mathrm{E}\left(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)\right)}{\sigma\left(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)\right)}.$$

Leiame saadud võrduse vasakul pool tinglikud keskväärtused ning saame:

$$\frac{\mathrm{E}\left(F_{i,s}^{P}|\mathcal{B}_i(s)\right) - f_{s\to s+1}^{P}}{\sigma\left(F_{i,s}^{P}|\mathcal{P}_i(s)\right)} = \lambda^P \cdot \frac{Q_{i,s}^{-1} - \mathrm{E}\left(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)\right)}{\sigma\left(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)\right)},$$

millest järeldubki võrdus (1.3.2).

Võrrandist (1.3.2) on näha, et konkreetsel toimumise aastal $i$ individuaalse üleminekukordaja tinglik keskväärtus sisaldab üldist üleminekukordajat ja korrigeerivat osa. See osa koosneb omakorda järgmistest faktoritest:

- Vaatleme parameetrit $\lambda^P$. On võimalik näidata, et kehtib järgmine seos (Quarg ja Mack, 2004, lk 287-288):

$$\lambda^P = \mathrm{Corr}\left(\mathrm{Res}\left(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)\right), \mathrm{Res}\left(F_{i,s}^{P}|\mathcal{P}_i(s)\right)\right) = \mathrm{Corr}\left(Q_{i,s}^{-1}, F_{i,s}^{P}\middle|\mathcal{P}_i(s)\right).$$

Seega, parameeter $\lambda^P$ on üldine korrelatsioonikordaja makstud kahjude üleminekukordajate jääkide ning (*I/P*)-suhte jääkide vahel. See ei sõltu kujunemise aastast $s$ või kahju toimumise aastast $i$. Korrelatsioonikordaja $\lambda^P$ väärtus on -1 ja 1 vahel ning ta määrab kui palju (*I/P*)-suhe sõltub makstud kahjude üleminekukordajast. On lihtne näha, et juhul, kui toimunud ja makstud kahjude vaheline sõltuvus puudub (ehk kui $\lambda^P \approx 0$), siis prognoosmudel taandub tavalise ahel-redel mudeli peale. Parameetri $\lambda^P$ hindamist vaatame lähemalt järgmises peatükis.

- Standardhälbe faktor sisaldab makstud kahjude üleminekukordaja hajuvust ja (*I/P*)-hajuvust. Mida suurem on üleminekukordaja standardhälve, seda tõenäolisem on märgatav üleminekukordaja erinevus keskmisest ning seda suurem on korrigeeriv osa.
- Tegurist $\left(Q_{i,s}^{-1} - \mathrm{E}\left(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s)\right)\right)$ on näha, et need $Q_{i,s}^{-1}$ suhted, mis on keskmisest suuremad, teevad korrigeerivat osa (ning vastavalt ka individuaalset üleminekukordajat) suuremaks ja vastupidi.

## 1.4. Parameetrite arvutamine

**Üleminekukordajad ja nende hajuvused**

Siin vaatleme makstud kahjude protsessi parameertite arvutust. Toimunud kahjude protsessis tehakse analoogselt.

Olgu $i \in \{1, \dots, n\}$ on vaadeldav kahju toimumise aasta ning $s \in \{1, \dots, n-1\}$ on vaadeldav kujunemise aasta.

Arvutame välja üldise üleminekukordaja kujunemise aastast $s$ aastasse $s+1$, kasutades valemit:

$$\hat{f}_{s \to s+1}^P := \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s} \cdot F_{i,s}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s+1}}{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}}. \tag{1.4.1}$$

Väärtus $F_{i,s}^P$ on ühe kindla ülemineku hinnang. Üldhinnang $\hat{f}_{s \to s+1}^P$ on vastava ülemineku tinglik keskväärtus ehk üksikhinnangute (individuaalsete üleminekukordajate) $F_{i,s}^P$ keskmine kaaludega $P_{i,s}$. Seega, ülemineku dispersiooni nihketa hinnang leitakse järgmiselt:

$$\left(\hat{\sigma}_{s \to s+1}^P\right)^2 := \frac{1}{n-s-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s} \cdot \left(F_{i,s}^P - \hat{f}_{s \to s+1}^P\right)^2 \tag{1.4.2}$$

ning temale vastav standardhälve on $\hat{\sigma}^P_{s\to s+1} := \sqrt{(\hat{\sigma}^P_{s\to s+1})^2}$.

Arvutatakse välja $\hat{\sigma}^P_{1\to 2}, \dots, \hat{\sigma}^P_{n-2\to n-1}$. Viimase ülemineku standardhälbe hinnangut $\hat{\sigma}^P_{n-1\to n}$ ei saa leida selle eeskirja järgi ning see hinnatakse vastavalt uuringu eeldustele sõltuvalt konkreetsest olukorrast. Üks võimalus selleks on kasutada eeldust (Mack, 1993, lk 217):

$$(\hat{\sigma}^P_{n-1\to n})^2 = \min\left(\frac{\left(\hat{\sigma}^P_{n-2\to n-1}\right)^4}{\left(\hat{\sigma}^P_{n-3\to n-2}\right)^2}, \min\left((\hat{\sigma}^P_{n-3\to n-2})^2, (\hat{\sigma}^P_{n-2\to n-1})^2\right)\right). \qquad (1.4.3)$$

Teine võimalus on omistada hinnangule $\hat{\sigma}^P_{n-1\to n}$ fikseeritud väärtus (Quarg ja Mack, 2004, lk 298).

**(*P/I*)- ning (*I/P*)-suhted ja nende hajuvused**

Iga kujunemise aasta $s = 1, \dots, n$ jaoks leitakse üldise (*I/P*)-suhte $q_s^{-1}$ hinnang järgmiselt:

$$\hat{q}_s^{-1} := \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s+1} P_{i,s}} \cdot \sum_{i=1}^{n-s+1} P_{i,s} \cdot Q_{i,s}^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s+1} I_{i,s}}{\sum_{i=1}^{n-s+1} P_{i,s}}, \qquad (1.4.4)$$

mis on sama iga kahju toimumise aasta puhul. Analoogselt leitakse ka makstud ja toimunud kahjude üldine suhe $\hat{q}_s$.

Toimunud ja makstud kahjude tingliku dispersiooni hinnang arvutatakse järgmiselt:

$$(\hat{\rho}_s^P)^2 := \frac{1}{n-s} \cdot \sum_{i=1}^{n-s+1} P_{i,s} \cdot \left(Q_{i,s}^{-1} - \hat{q}_s^{-1}\right)^2, \qquad (1.4.5)$$

kus $P_{i,s}$ on *i*-nda kahju toimumise aasta kaal, $Q_{i,s}^{-1}$ on i-nda aasta toimunud ja makstud kahjude suhe aastal, $\hat{q}_s^{-1}$ on selle suhte tinglik keskväärtus kujunemise aastal $s = 1, \dots, n-1$. Vastav standardhälve on $\hat{\rho}_s^P = \sqrt{(\hat{\rho}_s^P)^2}$. Analoogselt leitakse (*P/I*)-suhte hajuvus $\hat{\rho}_s^I$.

**Jäägid**

Lihtsuse mõttes tähistame tinglike jääkide $\mathrm{Res}\left(F_{i,s}^P \middle| \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}\}\right)$, $\mathrm{Res}\left(F_{i,s}^I \middle| \{I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}\right)$, $\mathrm{Res}\left(Q_{i,s}^{-1} \middle| \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}\}\right)$, $\mathrm{Res}\left(Q_{i,s} \middle| \{I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}\right)$ hinnangud vastavalt $\widehat{\mathrm{Res}}\left(F_{i,s}^P\right)$, $\widehat{\mathrm{Res}}\left(F_{i,s}^I\right)$, $\widehat{\mathrm{Res}}\left(Q_{i,s}^{-1}\right)$, $\widehat{\mathrm{Res}}\left(Q_{i,s}\right)$. Siin vaatame makstud kahjude üleminekute jääke ja (*I/P*)-suhete jääke. Toimunud kahju ning (*P/I*)-suhete korral tehakse analoogselt. Leiame Pearsoni jääkide väärtused järgmisel viisil:

$$\widehat{\mathrm{Res}}\left(F_{i,s}^P\right) := \frac{F_{i,s}^P - \hat{f}^P_{s\to s+1}}{\hat{\sigma}^P_{s\to s+1}} \cdot \sqrt{P_{i,s}}, \qquad (1.4.6)$$

$$\widehat{\text{Res}}\left(Q_{i,s}^{-1}\right) := \frac{Q_{i,s}^{-1} - \hat{q}_s{}^{-1}}{\hat{\rho}_s^P} \cdot \sqrt{P_{i,s}}, \tag{1.4.7}$$

kus $\frac{\hat{\sigma}_{s\to s+1}^P}{\sqrt{P_{i,s}}}$ ja $\frac{\hat{\rho}_s^P}{\sqrt{P_{i,s}}}$ on vastavad standardhälbed (vt Eeldused 3 ja 4). Saadud hinnangud esitatakse Tabelites 1.4.1 ja 1.4.2 toodud kujul.

Tabel 1.4.1. Üleminekukordajate tinglikud jäägid makstud protsessis.

| Üleminek / AY | $1 \to 2$ | $2 \to 3$ | ... | $n-2 \to n-1$ | $n-1 \to n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\widehat{\text{Res}}\left(F_{1,1}^P\right)$ | $\widehat{\text{Res}}\left(F_{1,2}^P\right)$ | ... | $\widehat{\text{Res}}\left(F_{1,n-2}^P\right)$ | $\widehat{\text{Res}}\left(F_{1,n-1}^P\right) = 0$ |
| 2 | $\widehat{\text{Res}}\left(F_{2,1}^P\right)$ | $\widehat{\text{Res}}\left(F_{2,2}^P\right)$ | ... | $\widehat{\text{Res}}\left(F_{2,n-2}^P\right)$ | |
| ... | ... | ... | ... | | |
| $n-2$ | $\widehat{\text{Res}}\left(F_{n-2,1}^P\right)$ | $\widehat{\text{Res}}\left(F_{n-2,2}^P\right)$ | | | |
| $n-1$ | $\widehat{\text{Res}}\left(F_{n-1,1}^P\right)$ | | | | |

Tabel 1.4.2. (*I/P*)-suhete tinglikud jäägid.

| DY / AY | 1 | 2 | ... | $n-1$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\widehat{\text{Res}}\left(Q_{1,1}^{-1}\right)$ | $\widehat{\text{Res}}\left(Q_{1,2}^{-1}\right)$ | ... | $\widehat{\text{Res}}\left(Q_{1,n-1}^{-1}\right)$ | $\widehat{\text{Res}}\left(Q_{1,n}^{-1}\right) = 0$ |
| 2 | $\widehat{\text{Res}}\left(Q_{2,1}^{-1}\right)$ | $\widehat{\text{Res}}\left(Q_{2,2}^{-1}\right)$ | ... | $\widehat{\text{Res}}\left(Q_{2,n-1}^{-1}\right)$ | |
| ... | ... | ... | ... | | |
| $n-1$ | $\widehat{\text{Res}}\left(Q_{n-1,1}^{-1}\right)$ | $\widehat{\text{Res}}\left(Q_{n-1,2}^{-1}\right)$ | | | |
| $n$ | $\widehat{\text{Res}}\left(Q_{n,1}^{-1}\right)$ | | | | |

**Korrelatsioonikordajad**

Vaatleme parameetri $\lambda^P$ hindamist. Valemist (1.3.2) on näha, et tegemist on lihtsa lineaarse regressioonimudeliga:

$$\frac{\mathrm{E}\left(F_{i,s}^P|\mathcal{B}_i(s)\right) - f_{s\to s+1}^P}{\sigma\left(F_{i,s}^P|\mathcal{P}_i(s)\right)} = \lambda^P \cdot \frac{Q_{i,s}^{-1} - \mathrm{E}\left(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)\right)}{\sigma\left(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)\right)},$$

kus $\lambda^P$ on korrelatsioonikordaja makstud kahjude üleminekukordaja $\mathrm{E}\left(F_{i,s}^P|\mathcal{B}_i(s)\right)$ ja (*I/P*)-suhte $Q_{i,s}^{-1}$ vahel.

Mudeli parameetrite hindamiseks kasutatakse vähimruutude meetodit, mille korral erinevused tegeliku uuritava tunnuse väärtuse ja mudeli järgi prognoositud väärtuse vahel minimeeritakse.

Vaatleme vähimruutude meetodi skeemi lihtsa lineaarse regressioonimudeli üldkuju jaoks. Olgu antud mudel $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$, kus $Y$ on uuritav tunnus, $X$ on argumenttunnus, $\beta$ on regressioonikordaja, $\alpha$ on vabaliige ja $\varepsilon$ on juhuslik viga. Siis regressiooniparameetri $\beta$ hinnang leitakse järgmisel viisil:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \mathrm{Corr}(X, Y) \cdot \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)},$$

kus $\bar{y}$ ja $\bar{x}$ on vastavalt uuritava tunnuse ja argumenttunnuse valimi põhjal saadud aritmeetilised keskmised, $\sigma(Y)$ ja $\sigma(X)$ on vastavad standardhälbed ja $\mathrm{Corr}(X, Y)$ on nende korrelatsioonikordaja. Vahed $(y_i - \bar{y})$ ja $(x_i - \bar{x})$ interpreteeritakse kui uuritava tunnuse ja argumenttunnuse *i*-ndate väärtuste jäägid.

Kuna tegemist on standardiseeritud jääkidega $\mathrm{Res}\left(F_{i,s}^P | \mathcal{P}_i(s)\right)$ ja $\mathrm{Res}\left(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s)\right)$, siis $\sigma\left(\mathrm{Res}\left(F_{i,s}^P | \mathcal{P}_i(s)\right)\right) = \sigma\left(\mathrm{Res}\left(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s)\right)\right) = 1$, seega regressioonikordaja ja korrelatsioonikordaja langevad antud juhul kokku, ning mudeli regressioonikordaja rollis esineb meie juhul parameeter $\lambda^P$.

Pannes võrrandisse jääkide väärtused, saame kordaja $\lambda^P$ hinnanguks:

$$\hat{\lambda}^P := \frac{\sum_{s=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-s} \widehat{\mathrm{Res}}\left(Q_{i,s}^{-1}\right) \cdot \widehat{\mathrm{Res}}\left(F_{i,s}^P\right)}{\sum_{s=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-s} \widehat{\mathrm{Res}}\left(Q_{i,s}^{-1}\right)^2}. \tag{1.4.8}$$

Ülaltoodud valemis käib summeerimine üle nende aastate, kus makstud kahjude jäägid on teada. Seega, (*I/P*)-suhte jääkide tabeli viimase diagonaali väärtused ei kasutata. Parameeter $\lambda^I$ hinnatakse analoogselt.

**Kahjude prognoosid**

Kasutades Eeldusi 6 ja 7, arvutame uued MCL-üleminekukordajad (individuaalsed) iga kahju toimumise aasta jaoks eraldi:

$$\hat{f}_{i,s\to s+1}^P := \hat{f}_{s\to s+1}^P + \widehat{\lambda^P} \cdot \frac{\hat{\sigma}_{s\to s+1}^P}{\hat{\rho}_s^P} \cdot \left(\hat{Q}_{i,s}^{-1} - \hat{q}_s^{-1}\right) \tag{1.4.9}$$

ning prognoosime kahjude suurused:

$$\hat{P}_{i,s+1} := \hat{P}_{i,s} \cdot \hat{f}^P_{i,s\to s+1} = \hat{P}_{i,s} \cdot \left( \hat{f}^P_{s\to s+1} + \hat{\lambda}^P \cdot \frac{\hat{\sigma}^P_{s\to s+1}}{\hat{\rho}^P_s} \cdot \left( \hat{Q}^{-1}_{i,s} - \hat{q}^{-1}_s \right) \right)$$

Esimese otsitava diagonaali korral ehk kui $i = 2, .., n, s = n - i + 1$, asendame ülaltoodud valemites hinnangud $\hat{Q}^{-1}_{i,s}$ ja $\hat{P}_{i,s}$ vastavate olemasolevate tabeliväärtustega $Q^{-1}_{i,s}$ ja $P_{i,s}$. Alates teisest prognoositavast diagonaalist (kui $i = 3, \dots, n, s = n - i + 2, \dots, n$) peab hinnangu $\hat{P}_{i,s+1}$ leidmiseks olema teada hinnangu $\hat{Q}^{-1}_{i,s}$ väärtus, seega ka $\hat{I}_{i,s}$ väärtus. Järelikult, makstud ja toimunud kahjude prognoosid arvutatakse MCL-meetodi puhul paralleelselt. Hinnangu $\hat{I}_{i,s+1}$ väärtus leitakse kasutades analoogset valemit.

Tulemuseks saame kaks ruuttabelit (vt Tabel 1.2.1). Makstud kahjude tabeli peadiagonaalil paiknevad vaadeldava perioodi viimase aasta olemasolevad kumulatiivsed makstud kahjude suurused ning temast paremal pool on prognoositud kahjusuurused. Viimases veerus paiknevad vastava kahju toimumise aasta summaarne prognoositud makstud kahjude suurus. Toimunud kahjude tabelis on analoogselt vastavad toimunud kahjude andmed.

Ülalkirjeldatud algoritm esitatakse manuses programmi R koodina (vt Lisa 1).

## 1.5. Reservide täpsus bootstrap-meetodiga

**Meetodi kirjeldus**

Selles peatükis on tuginetud allikale Liu jaVerrall (2008).

Siin esitame MCL-prognoosi täpsuse mõõtmist kasutades bootstrap-meetodit. See meetod võimaldab hinnata erinevaid statistikuid keerulistes mudelites.

Antud meetodi idee põhineb uute valimite mitmekordsel genereerimisel olemasoleva valimi põhjal. Edaspidi nimetatakse neid valimeid bootstrap-valimiteks või pseudo-valimiteks. Pseudo-valimid saadakse tagasipanekuga lihtsa juhusliku valikuga. Seega mõned esialgsed väärtused võivad genereeritavas pseudo-valimis puududa, teised võivad vastupidi mitu korda esineda. Meetodi eelduseks on see, et andmete aluseks olevad juhuslikud suurused on sõltumatud ja sama jaotusega.

Tegemist on kahe andmehulgaga (makstud ja toimunud kahjude suurused), mis on omavahel korreleeritud. Seega, sõltumatuse eeldus on rikutud ning tavalist bootstrap-meetodit ei saa puhtal kujul rakendada MCL-meetodi mudelile. Tasub tähele panna, et mudel on koostatud eeldades seda sõltuvust ning see peab jääma alles pseudo-valimite genereerimisel.

Probleemi lahenduseks on kasutada bootstrap-meetodit rekursiivselt, st kahjude väärtuste asemel genereerida vastavad jäägid (edaspidises nimetuses pseudo-jäägid). Sel juhul tegemist on skaleeritud väärtustega, mis pärinevad samast jaotusest. Jäägid grupeeritakse nelja kaupa, seega pseudo-valimi objektiks on komplekt neljast elemendist: makstud, toimunud, makstud ja toimunud suhte, toimunud ja makstud suhte pseudo-jäägid. Sel juhul ei kao kahe esialgse andmehulga vaheline sõltuvus ära ning meetodi eeldused on täidetud. Kuna bootstrap-valimid moodustatakse tagasipanekuga lihtsa juhusliku valikuga, võib vajaduse korral tekitada suurema pseudo-valimi kui esialgne, genereerides rohkem pseudo-jääke.

Kasutades makstud ja toimunud esialgseid andmeid, genereeritud pseudo-jääke ning eelnevalt arvutatud MCL-parameetreid, on võimalik leida uued parameetrid pseudo-valimi jaoks. Nende abil leitakse uued MCL-prognoosid. Selleks, et saavutada usaldusväärseid tulemusi, peab bootstrap-meetodi iteratsioonide arv olema vähemalt 1000. Bootstrap-tsükli parameetreid (ehk pseudo-parameetreid) tähistame ülaindeksiga *B*.

Meid huvitab makstud ja toimunud kahjude protsessides iga kahju toimumise aasta suhtes arvutatud reservi täpsus ning kogureservi täpsus. Prognoosi täpsuse näitajaks on keskmine ruutviga.

**Algoritm**

Kasutame makstud ja toimunud kahjude andmeid. Olgu $n$ on kahju toimumise aastate ja kujunemise aastate koguarv. Siis $i \in \{1, \dots, n\}$ on vaadeldav kahju toimumise aasta ning $s \in \{1, \dots, n\}$ on kujunemise aasta.

Leiame MCL-meetodil (vt valemid (1.4.6) ja (1.4.7)) makstud ja toimunud kahjude üleminekukordajate jäägid ning suhete (*P/I*) ja (*I/P*) jäägid. Korrutades need hinnangud koefitsiendiga $\sqrt{(n-s)/(n-s-1)}$ läbi, saame vastavate jääkide nihketa hinnangud (Liu jaVerrall, 2008, lk 129).

Saadud kolmnurkades on elementide arv erinev: üleminekukordajate jääkide tabelis on $i = 1, \dots, n-1, s = 1, \dots, n-i$, suhete (*P/I*) ja (*I/P*) jääkide tabelites on $i = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, n-i+1$. Jätame välja viimase diagonaali väärtused (*P/I*)- ja (*I/P*)-jääkide kolmnurkadest. Samuti jätame välja jäägid $\widehat{\mathrm{Res}}\left(F_{1,n-1}^{P}\right)$, $\widehat{\mathrm{Res}}\left(F_{1,n-1}^{I}\right)$, $\widehat{\mathrm{Res}}\left(Q_{1,n-1}^{-1}\right)$,

$\widehat{\mathrm{Res}}(Q_{1,n-1})$, kuna jääke $\widehat{\mathrm{Res}}(F_{1,n-1}^{P}) = \widehat{\mathrm{Res}}(F_{1,n-1}^{I}) = 0$ parameetrite hindamisel ei kasutata. Grupeerime saadud hinnangud nelja kaupa:

$$U_{i,s} = \{\widehat{\mathrm{Res}}(F_{i,s}^{P}), \widehat{\mathrm{Res}}(F_{i,s}^{I}), \widehat{\mathrm{Res}}(Q_{i,s}^{-1}), \widehat{\mathrm{Res}}(Q_{i,s})\},$$

kus $s = 1, \dots, n-2, i = 1, \dots, n-s$.

Järgmist protseduuri kordame $N$ korda ($N \geq 1000$):

1. Tagasipanekuga lihtsa juhusliku valikuga tekitame kolmnurga, mis koosneb pseudo-jääkide komplektidest:
$$U_{i,s}^{B} = \{\widehat{\mathrm{Res}}^{B}(F_{i,s}^{P}), \widehat{\mathrm{Res}}^{B}(F_{i,s}^{I}), \widehat{\mathrm{Res}}^{B}(Q_{i,s}^{-1}), \widehat{\mathrm{Res}}^{B}(Q_{i,s})\},$$
kus $i = 1, \dots, n, s = 1, \dots, n-i+1$.
2. Kasutades valemeid (1.4.6) ja (1.4.7), arvutame individuaalsed üleminekukordajad ning (*P/I*)- ja (*I/P*)-suhted:
$$\left(\hat{F}_{i,s}^{P}\right)^{B} \coloneqq \frac{\widehat{\mathrm{Res}}^{B}(F_{i,s}^{P}) \cdot \hat{\sigma}_{s\to s+1}^{P}}{\sqrt{P_{i,s}}} + \hat{f}_{s\to s+1}^{P}, \qquad \left(\hat{Q}_{i,s}^{-1}\right)^{B} \coloneqq \frac{\widehat{\mathrm{Res}}^{B}(Q_{i,s}^{-1}) \cdot \hat{\rho}_{s}^{P}}{\sqrt{P_{i,s}}} + \hat{q}_{s}^{-1}.$$
Parameetrid $\left(\hat{F}_{i,s}^{I}\right)^{B}$ ja $\left(\hat{Q}_{i,s}\right)^{B}$ leitakse analoogselt. Üleminekukordajate $\left(\hat{F}_{i,s}^{P}\right)^{B}$ ja $\left(\hat{F}_{i,s}^{I}\right)^{B}$ korral vaatleme piirkonda $i = 1, \dots, n-1, s = 1, \dots, n-i$, suhete $\left(\hat{Q}_{i,s}^{-1}\right)^{B}$ ja $\left(\hat{Q}_{i,s}\right)^{B}$ korral $i = 1, \dots, n, s = 1, \dots, n-i+1$.

3. Valemite (1.4.1) ja (1.4.4) põhjal leiame üleminekukordajad ning (*P/I*)- ja (*I/P*)-suhete parameetrid:
$$\left(\hat{f}_{s\to s+1}^{P}\right)^{B} \coloneqq \frac{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s} \cdot \left(\hat{F}_{i,s}^{P}\right)^{B}}{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}}, \qquad (\hat{q}_{s}^{-1})^{B} \coloneqq \frac{\sum_{i=1}^{n-s+1} P_{i,s} \cdot \left(\hat{Q}_{i,s}^{-1}\right)^{B}}{\sum_{i=1}^{n-s+1} P_{i,s}}.$$
Analoogselt saame $\left(\hat{f}_{s\to s+1}^{I}\right)^{B}$ ja $(\hat{q}_{s})^{B}$. Üleminekukordajate $\left(\hat{f}_{s\to s+1}^{P}\right)^{B}$ ja $\left(\hat{f}_{s\to s+1}^{I}\right)^{B}$ korral on $s = 1, \dots, n-1$, suhete $(\hat{q}_{s}^{-1})^{B}$ ja $(\hat{q}_{s})^{B}$ korral $s = 1, \dots, n$.
4. Korrelatsioonikordaja leiame valemi (1.4.8) põhjal (analoogselt $\left(\hat{\lambda}^{I}\right)^{B}$):
$$\left(\hat{\lambda}^{P}\right)^{B} \coloneqq \frac{\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-s} \widehat{\mathrm{Res}}^{B}(Q_{i,s}^{-1}) \cdot \widehat{\mathrm{Res}}^{B}(F_{i,s}^{P})}{\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-s} \widehat{\mathrm{Res}}^{B}(Q_{i,s}^{-1})^{2}}.$$

5. Leiame standardhälbed kasutades valemeid (1.4.2) ja (1.4.5):

$$(\hat{\sigma}^P_{s\to s+1})^B \coloneqq \sqrt{\frac{1}{n-s-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}\cdot\left(\left(\hat{F}^P_{i,s}\right)^B - \left(\hat{f}^P_{s\to s+1}\right)^B\right)^2},$$

$$(\hat{\rho}^P_s)^B \coloneqq \sqrt{\frac{1}{n-s}\cdot\sum_{i=1}^{n-s+1} P_{i,s}\cdot\left(\left(\hat{Q}^{-1}_{i,s}\right)^B - (\hat{q}^{-1}_s)^B\right)^2},$$

Analoogselt arvutatakse $(\hat{\sigma}^I_{s\to s+1})^B$ ja $(\hat{\rho}^I_s)^B$. Üleminekuhajuvuste korral $s = 1,\dots,n-2$ ning $(\hat{\rho}^P_s)^B$ ja $(\hat{\rho}^I_s)^B$ puhul $s = 1,\dots,n-1$.

Standardhälbed $(\hat{\sigma}^P_{n-1\to n})^B$ ja $(\hat{\sigma}^I_{n-1\to n})^B$ hinnatakse vastavalt eeldustele.

6. Individuaalsed üleminekukordajad ja prognoosid leitakse alumises kolmnurgas diagonaalhaaval:
   - MCL-üleminekukordajad arvutatakse kasutades uusi parameetreid valemi (1.4.9) põhjal:

$$\left(\hat{f}^P_{i,s}\right)^B \coloneqq \left(\hat{f}^P_{s\to s+1}\right)^B + \left(\hat{\lambda}^P\right)^B\cdot\frac{(\hat{\sigma}^P_{s\to s+1})^B}{(\hat{\rho}^P_s)^B}\cdot\left(\left(\hat{Q}^{-1}_{i,s}\right)^B - (\hat{q}^{-1}_s)^B\right),$$

$$\left(\hat{f}^I_{i,s}\right)^B \coloneqq \left(\hat{f}^I_{s\to s+1}\right)^B + \left(\hat{\lambda}^I\right)^B\cdot\frac{(\hat{\sigma}^I_{s\to s+1})^B}{(\hat{\rho}^I_s)^B}\cdot\left(\left(\hat{Q}_{i,s}\right)^B - (\hat{q}_s)^B\right),$$

   kus $i = 2,\dots,n, s = n-i+1,\dots,n-1$.
   - Esimese sammu prognoosid ehk hinnangud esimeses tundmatus diagonaalis leitakse kasutades viimase teadaoleva diagonaali väärtusi. Hinnangud arvutatakse lähtudes normaaljaotuse eeldusest ($i = 2,\dots,n, s = n-i+1$):

$$\hat{P}^B_{i,s+1}\sim N\left(\left(\hat{f}^P_{i,s}\right)^B\cdot P_{i,s},\ ((\hat{\sigma}^P_{s\to s+1})^B)^2\cdot P_{i,s}\right).$$

   Järgmised prognoosid leitakse kasutades eelnevalt arvutatud kahjusuuruste hinnanguid ($i = 3,\dots,n, s = n-i+3,\dots,n$):

$$\hat{P}^B_{i,s+1}\sim N\left(\left(\hat{f}^P_{i,s}\right)^B\cdot \hat{P}^B_{i,s},\ ((\hat{\sigma}^P_{s\to s+1})^B)^2\cdot \hat{P}^B_{i,s}\right).$$

   Hinnangud $\hat{I}_{i,s+1}$ arvutatakse analoogselt.
7. Mõlemas protsessis arvutame pseudo-hinnangud reservidele kasutades valemeid (1.2.1), (1.2.2) ja (1.2.3). Salvestame meid huvitavate parameetrite hinnangud ning läheme esimese punkti juurde.

Prognoositud hinnangu keskmise ruutvea valem üldkujul on MSE $\coloneqq \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2$, kus $Y$ on tegelike väärtuste vektor pikkusega $n$ ja $\hat{Y}$ on hinnangute vektor. Makstud kahjude (analoogselt toimunud kahjude puhul) reservi keskmine ruutviga $i$-nda kahju toimumise aastal on ($i = 2, \dots, n$):

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{R}_i^P\right) := \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\left(\hat{R}_i^P\right)_k^B - \hat{R}_i^P\right)^2,$$

kus $\left(\hat{R}_i^P\right)_k^B$ on bootstrap-tsükli $k$-s prognoos ($k = 1, \dots, N$) makstud kahjude reservile $i$-nda kahju toimumise aasta jaoks ning $\hat{R}_i^P$ on makstud kahjude reservi hinnang $i$-nda kahju toimumise aasta jaoks, mis on arvutatud MCL-algoritmiga. Analoogselt arvutatakse summaarse reservi täpsus $\mathrm{MSE}\left(\hat{R}^P\right)$.

Ülalkirjeldatud algoritm esitatakse programmi R koodina (vt Lisa 2).

## 1.6. Algoritmi probleemid

Algoritmi põhjal on võimalik, et mingi parameetri leidmisel tuleb ette nulliga jagamine. Samuti on võimalik, et mingi parameetri leidmiseks tuleb ette jagamine teise parameetriga, mille väärtus on väga lähedane nullile, kuid ei ole nulliga võrdne. Sel juhul võib otsitava parameetri väärtus väga suuremaks minna, mis ei ole eeldustega loogilises mõttes kooskõlas. Teisena kirjeldatud probleem on ohtlikum, kuna ta ei ole alati lihtsasti avastatav.

Kirjeldatud olukordade puhul ei saa etteantud eeskirja puhtal kujul kasutada, neid tuleb vältida tehes vastavaid eeldusi. Käesolevas peatükis käsitleme need probleemid, näitame, millised tagajärjed nad võivad kaasa tuua ning esitame võimalikud lahendused.

**Null-hajuvuse probleem**

Valemitest (1.4.1) ja (1.4.2) on näha, et kui ühe kujunemise aasta makstud kahjude individuaalsed üleminekukordajad on võrdsed iga kahju toimumise aasta korral, siis vastaval üleminekul puudub varieeruvus. Vaatleme järgmist olukorda:

$$\exists s \in \{1, \dots, n-2\}\colon\ F_{i,s}^P = F_{j,s}^P\ \forall i, j \in \{1, \dots, n-s\}.$$

Sel juhul iga $i = 1, \dots, n-s$ korral $F_{i,s}^P = \hat{f}_{s\to s+1}^P$, millest omakorda järeldub, et $\hat{\sigma}_{s\to s+1}^P = 0$. Analoogselt kehtib ka toimunud kahjude protsessis.

Samasugune olukord tekib, kui mingil kujunemise aastal makstud ja toimunud kahjude individuaalsed suhted on konstantsed. Valemitest (1.4.4) ja (1.4.5) näeme, et kui ühe kujunemise aasta individuaalsed makstud ja toimunud kahjude suhted on võrdsed iga kahju toimumise aasta korral, siis sellel kujunemise aastal puudub varieeruvus makstud ja toimunud kahjude vahel. Vaatleme olukorda:

$$\exists s \in \{1, \dots, n-1\}: Q_{i,s} = Q_{j,s}\ \forall i, j \in \{1, \dots, n-s+1\}.$$

Sel juhul iga $i = 1, \dots, n-s+1$ korral $Q_{i,s} = \hat{q}_s, Q_{i,s}^{-1} = \hat{q}_s^{-1}$, seega $\hat{\rho}_s^I = 0, \hat{\rho}_s^P = 0$.

Tinglike jääkide arvutusalgoritmist (vt valem (1.4.6)) on näha, et sellisel olukorral, kui mingi ülemineku dispersiooni hinnang on täpselt võrdne nulliga, siis algoritmi põhjal jääkide leidmisel toimub nulliga jagamine $(0/0)$. Analoogne probleem tekib, kui mingi (*P/I*)-suhte dispersiooni hinnang on täpselt võrdne nulliga. Üks võimalus on omistada sel juhul jäägile väärtus 0.

**Langeva (*P/I*)-suhte hajuvuse probleem**

Nüüd vaatame olukorda, kus arenguperioodi alguses makstud ja toimunud kahjude suhted märgatavalt varieeruvad, aga mingist kujunemise aastast alates see varieeruvus kaob ära (hajuvuse hinnangud lähenevad nullile, kuigi ei võrdu nulliga). St selle perioodi jooksul on individuaalsed makstud ja kahjude suhted ligikaudu võrdsed iga kahju toimumise aasta korral (vaadates kujunemise aastate kaupa).

Vaatleme individuaalse üleminekukordaja korrigeerivat osa (vt valem (1.4.9)). Tavalises olukorras suhte $\left(\hat{Q}_{i,s}^{-1} - \hat{q}_s^{-1}\right)/\hat{\rho}_s^P$ nimetaja suurenemisel (vähenemisel) suureneb (väheneb) ka lugeja. Paneme tähele, et hinnangud $\hat{q}_s^{-1}$ ja $\hat{\rho}_s^P$ arvutatakse kasutades ainult teadaolevaid kahjude suurusi ja ainult $s$-ndal kujunemise aastal ning need jäävad prognooside leidmisel samaks iga kahju toimumise aasta korral. Hinnang $\hat{Q}_{i,s}^{-1}$ saadakse kasutades eelnevaid kahjude suurusi $i$-ndal kahju toimumise aastal. Seega, tema väärtust mõjutavad ka eelmiste kujunemise aastate parameetrid (sh ka eelnevate aastate hajuvused $\hat{\rho}_t^P, t \in \{1, \dots, s-1\}$).

Ülalkirjeldatud juhul võib hinnangu $\hat{Q}_{i,s}^{-1}$ väärtus erineda hinnangu $\hat{q}_s^{-1}$ väärtusest vaatamata sellele, et makstud ja toimunud kahjude suhted on sel kujunemise aastal ligikaudu võrdsed. Seega, madala hajuvuse korral ei pruugi individuaalse ja üldise suhete vahe olla madal.

Sel juhul individuaalse üleminekukordaja korrigeeriv osa oluliselt suureneb (või väheneb) ning vastavalt muutub ka hinnang $\hat{f}^P_{i,s\to s+1}$ võrreldes üldise üleminekukordajaga $\hat{f}^P_{s\to s+1}$. Järgmise kujunemise aasta prognoosid leitakse arvestades eelmisel sammul saadud prognoose ning hinnangu $\hat{Q}^{-1}_{i,s+1}$ väärtus erineb hinnangust $\hat{q}^{-1}_{s+1}$ veel olulisemalt.

Sõnastame kirjeldatud probleemi järgmiselt:

Kui arenguperioodi alguses makstud ja toimunud kahjude suhted märgatavalt varieeruvad ja seejärel see varieeruvus kaob mingiks perioodiks ära, siis on võimalik, et prognoositavad MCL-üleminekukordajad oluliselt erinevad teadaolevatest üldistest üleminekukordajatest.

Niiviisi saadud prognoosid ei ole usaldusväärsed, seega tuleb kirjeldatud probleemi vältida. Esiteks tuleb otsustada, mis juhul tekkinud olukorda probleemseks pidada, st otsustada, milliste (*I/P*)-suhete varieeruvuste korral tuleb algoritmisse kitsendusi sisse tuua. Seda teeb kasutaja lähtudes oma eeldustest. Edasises pakume välja kolm võimalust.

1. Fikseerida varieeruvuse minimaalne lubatud väärtus $\rho^{min}$. Kui mingil kujunemise aastal (*I/P*)-suhte varieeruvus on sellest väärtusest väiksem, siis vastaval aastal individuaalsete üleminekukordajate arvutamisel omistada korrigeerivatele osadele väärtus 0:
$$\exists s \in \{1, \dots, n-1\}: \hat{\rho}^P_s < \rho^{min} \Longrightarrow \hat{\lambda}^P \cdot \frac{\hat{\sigma}^P_{s\to s+1}}{\hat{\rho}^P_s} \cdot \left(\hat{Q}^{-1}_{i,s} - \hat{q}^{-1}_s\right) \coloneqq 0.$$
On lihtne näha, et MCL-üleminekukordaja võrdub sel juhul tavalise ahel-redel meetodi üleminekukordajaga: $\hat{f}^P_{i,s\to s+1} = \hat{f}^P_{s\to s+1}$.
2. Fikseerida varieeruvuse alumine tõke $\rho^{min}$. Kui mingil kujunemise aastal (*I/P*)-suhte varieeruvus on sellest väiksem, siis omistada varieeruvusele alumise tõkke väärtus: $\exists s \in \{1, \dots, n-1\}: \hat{\rho}^P_s < \rho^{min} \Longrightarrow \hat{\rho}^P_s \coloneqq \rho^{min}$ ehk $\forall s \in \{1, \dots, n-1\}: \hat{\rho}^P_s \geq \rho^{min}$. Sel juhul võib analoogselt käituda üleminekuhajuvuste puhul, st fikseerida $\sigma^{min}$, et: $\forall s \in \{1, \dots, n-1\}: \hat{\sigma}^P_{s\to s+1} \geq \sigma^{min}$.
3. Fikseerida varieeruvuse minimaalne lubatud väärtus $\rho^{min}$. Kui mingil kujunemise aastal (*I/P*)-suhte varieeruvus on sellest väärtusest väiksem, siis hinnata seda varieeruvust lähtudes oma eeldustest (nt meetodiga, mis on esitatud valemis (1.4.3)). Samamoodi võib käituda ka üleminekuhajuvuste puhul fikseerides $\sigma^{min}$.

Juhul, kui kirjeldatud probleem esineb paljudes kujunemise aastates, siis esimese variandi korral taandub mudel tavalise ahel-redel mudeli peale. Sel juhul makstud ja toimunud kahjude vaheline seos ei mängi prognooside leidmisel rolli.

Praktilised uuringud näitavad, et teist varianti on mõistlik kasutada siis, kui madalate (*P/I*)-suhete hajuvuste periood on lühike (2-3 aastat).

Paneme tähele, et teisel juhul lahendatakse ka nulliga jagamise probleem jääkide puhul: $\hat{\sigma}^P_{s\to s+1} = 0 \Rightarrow \widehat{\mathrm{Res}}\left(F^P_{i,s}\right) \coloneqq \frac{0}{\sigma^{min}} = 0, \hat{\rho}^P_s \Rightarrow \widehat{\mathrm{Res}}\left(Q^{-1}_{i,s}\right) \coloneqq \frac{0}{\rho^{min}} = 0.$

Teame, et tinglikud jäägid näitavad, kui palju vaadeldava ülemineku (või (*P/I*)-suhte) väärtus erineb üldisest ülemineku (või (*P/I*)-suhte) väärtusest sellel kujunemise aastal, st jäägid kirjeldavad väärtuste varieeruvust. Lugeja võib tähele panna, et antud juhul tekib vastuolu: vaadeldaval kujunemise aastal üleminekutel (või (*P/I*)-suhetel) on varieeruvus olemas, aga kõik tinglikud jäägid on võrdsed nulliga. Jätame iga lugeja enda otsustada, kumba ideed kasutada.

# 2. MCL-MEETODI RAKENDAMINE ANDMETELE

Selles peatükis rakendame MCL-meetodit reaalsetele andmetele kasutades eelmises osas kirjeldatud skeemi. Eesmärk on näidata, kuidas MCL-prognoose arvutatakse praktikas ning pöörata lugeja tähelepanu sellele, millised tulemused annab algoritm erinevate andmete korral. Selleks esitame kahe portfelli andmete analüüsi. Vaadeldavate andmestike arenguperioodid on 10 aastat. Esimese andmekomplekti puhul kasutame MCL-algoritmi sellisel kujul, mis on antud peatükis 1.4. Teise portfelli juures tuleb ette peatükis 1.6 kirjeldatud probleem, seega arvutusalgoritmis tehakse vastavad muudatused.

Analüüsi tulemused toome tabelitena. Paneme tähele, et tabelites toodud hinnangud on ümardatud. Arvutuskäigus kasutame tegelikke väärtusi.

## 2.1. MCL-meetodi rakendamine reaalsetele andmetele

Meie käsutuses on kindlustusseltsi andmed makstud ja toimunud kahjude kohta (vt Tabelid 2.1.1 ja 2.1.2). Eesmärk on olemasolevate andmete põhjal koostada MCL-prognoosid.

Tabel 2.1.1. Makstud kahjude algandmed esimeses portfellis.

| AY \ DY | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 740 | 3692 | 4489 | 4595 | 4683 | 4778 | 4824 | 4867 | 4889 | 4897 |
| 2 | 716 | 3395 | 4575 | 5624 | 5892 | 6012 | 6073 | 6124 | 6196 | |
| 3 | 790 | 4588 | 5585 | 5615 | 6075 | 6360 | 6486 | 6605 | | |
| 4 | 617 | 3461 | 4945 | 5367 | 5667 | 5832 | 5917 | | | |
| 5 | 545 | 2670 | 4139 | 4614 | 4868 | 4931 | | | | |
| 6 | 486 | 2708 | 4050 | 4569 | 4768 | | | | | |
| 7 | 779 | 3029 | 4747 | 5064 | | | | | | |
| 8 | 776 | 3601 | 5363 | | | | | | | |
| 9 | 811 | 3940 | | | | | | | | |
| 10 | 704 | | | | | | | | | |

Tabel 2.1.2. Toimunud kahjude algandmed esimeses portfellis.

| AY \ DY | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1411 | 4612 | 5411 | 4812 | 4844 | 4880 | 4884 | 4906 | 4911 | 4916 |
| 2 | 1420 | 5384 | 5968 | 6089 | 6139 | 6188 | 6160 | 6206 | 6237 | |
| 3 | 1793 | 5816 | 6272 | 6466 | 6559 | 6684 | 6713 | 6734 | | |
| 4 | 1273 | 4809 | 6399 | 6370 | 6049 | 6091 | 6027 | | | |
| 5 | 894 | 4015 | 5004 | 5069 | 5210 | 5138 | | | | |
| 6 | 952 | 3810 | 4905 | 4991 | 4997 | | | | | |
| 7 | 1563 | 3500 | 5298 | 5352 | | | | | | |
| 8 | 2163 | 5202 | 6672 | | | | | | | |
| 9 | 1937 | 5229 | | | | | | | | |
| 10 | 1769 | | | | | | | | | |

**MCL-parameetrite arvutamine**

MCL-parameetrite arvutamiseks kasutame teoreetilises osas esitatud valemeid (vt 1.3 Kasutatud parameetrid ja tähistused, 1.4. Parameetrite arvutamine).

Esiteks leiame individuaalsed üleminekukordajad makstud ja toimunud kahjude protsessides ning individuaalsed (*P/I*)- ja (*I/P*)-suhted. Antud juhul otsitakse üleminekukordajad kahju toimumise aastate jaoks 1 kuni 9 ning üleminekute jaoks 1 → 2 kuni 9 → 10. Suhted leitakse iga kahju toimumise ning iga kujunemise aasta jaoks. Seega, individuaalsete (*P/I*)- ja (*I/P*)-suhete tabelid on ühe diagonaali/rea/veeru suuremad, kui individuaalsete üleminekute tabelid.

Üldiste üleminekukordajate suhete arvutamiseks kasutame valemeid (1.4.1) ja (1.4.4). Üleminekukordajad leitakse üleminekutel 1 → 2 kuni 9 → 10, (*I/P*)- ja (*P/I*)-suhted otsitakse kujunemise aastatel 1 kuni 10. Hajuvuste leidmiseks kasutame valemeid (1.4.2) ja (1.4.5). Viimaste üleminekute ja viimaste suhete puhul hajuvusi ei arvutata. Käesolevas analüüsis omistame nendele hinnangutele väärtuse 0,1. Üldiste üleminekute ja nende hajuvuste hinnangud esitatakse Tabelis 2.1.3. Üldiste (*I/P*)- ja (*P/I*)-suhete ning vastavate hajuvuste hinnangud on Tabelis 2.1.4. Viimase kujunemise aasta suhete hajuvuste väärtuseks võetakse 0,1. See hinnang kasutatakse bootstrap-tsüklis.

Tabel 2.1.3. Üldised üleminekukordajad ja nende hajuvused esimeses portfellis.

| Üleminek $s \to s+1$ | $\hat{f}^{P}_{s\to s+1}$ | $\hat{f}^{I}_{s\to s+1}$ | $\hat{\sigma}^{P}_{s\to s+1}$ | $\hat{\sigma}^{I}_{s\to s+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| $1 \to 2$ | 4,9655 | 3,1610 | 15,9245 | 28,0823 |
| $2 \to 3$ | 1,3960 | 1,2364 | 8,3530 | 9,1414 |
| $3 \to 4$ | 1,0897 | 0,9972 | 5,1582 | 3,5940 |
| $4 \to 5$ | 1,0516 | 1,0000 | 1,4518 | 2,1008 |
| $5 \to 6$ | 1,0268 | 1,0062 | 0,9830 | 0,8948 |
| $6 \to 7$ | 1,0138 | 0,9975 | 0,3637 | 0,5106 |
| $7 \to 8$ | 1,0123 | 1,0050 | 0,4387 | 0,1764 |
| $8 \to 9$ | 1,0086 | 1,0032 | 0,3769 | 0,2081 |
| $9 \to 10$ | 1,0016 | 1,0010 | 0,1000 | 0,1000 |

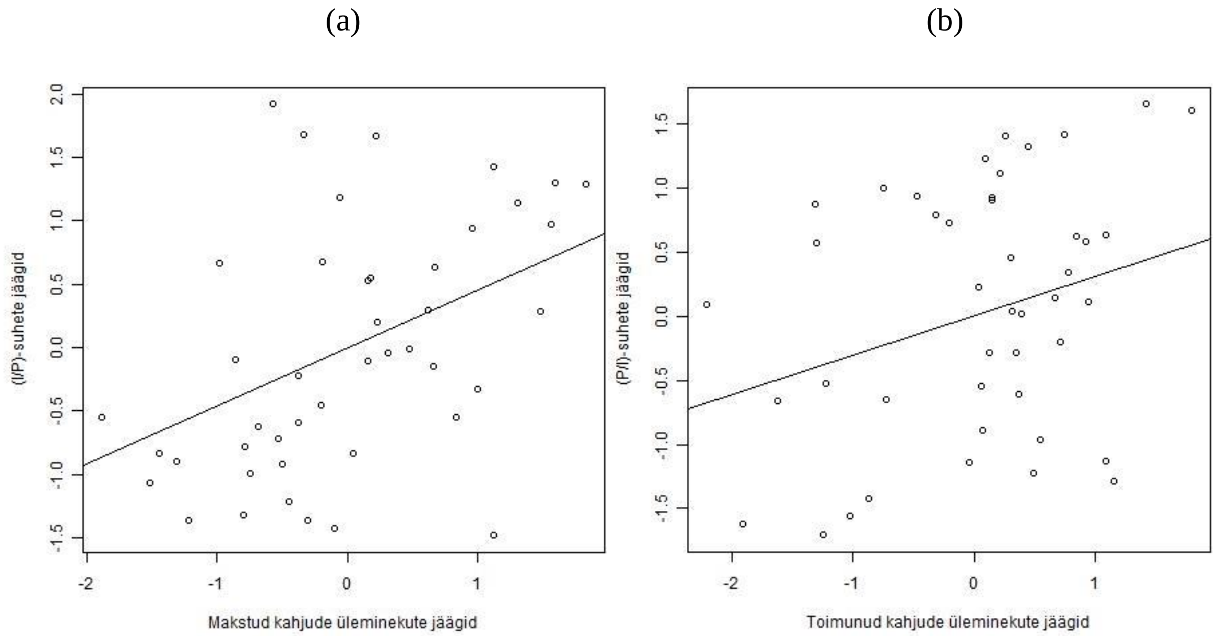
Tabel 2.1.4. Üldised (*I/P*)- ja (*P/I*)-suhted ja nende hajuvused esimeses portfellis.

| Kujunemise aasta $s$ | $\hat{q}_s^{-1}$ | $\hat{q}_s$ | $\hat{\rho}^{P}_{s}$ | $\hat{\rho}^{I}_{s}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,1791 | 0,4589 | 8,8389 | 2,7305 |
| 2 | 1,3633 | 0,7335 | 7,7311 | 4,8627 |
| 3 | 1,2121 | 0,8250 | 4,8708 | 3,6749 |
| 4 | 1,1044 | 0,9055 | 3,6270 | 3,0922 |
| 5 | 1,0577 | 0,9454 | 1,3186 | 1,2129 |
| 6 | 1,0383 | 0,9631 | 0,8894 | 0,8424 |
| 7 | 1,0208 | 0,9797 | 0,8017 | 0,7746 |
| 8 | 1,0142 | 0,9860 | 0,4347 | 0,4257 |
| 9 | 1,0057 | 0,9943 | 0,1107 | 0,1098 |
| 10 | 1,0039 | 0,9961 | 0,1000 | 0,1000 |

Tinglikud jäägid leiame valemite (1.4.6) ja (1.4.7) abil. Üleminekute jäägid $\widehat{\mathrm{Res}}(F^{P}_{i,s})$ ja $\widehat{\mathrm{Res}}(F^{I}_{i,s})$ arvutatakse iga individuaalse ülemineku $F^{P}_{i,s}$ ja $F^{I}_{i,s}$ jaoks ($i = 1, \dots, 9$, $s = 1, \dots, n-i$) ning $\widehat{\mathrm{Res}}(F^{P}_{1,9}) = \widehat{\mathrm{Res}}(F^{I}_{1,9}) = 0$. Analoogselt, suhete jäägid $\widehat{\mathrm{Res}}(Q^{-1}_{i,s})$ ja $\widehat{\mathrm{Res}}(Q_{i,s})$ leitakse iga individuaalse suhte $Q^{-1}_{i,s}$ ja $Q_{i,s}$ jaoks ($i = 1, \dots, 10, s = 1, \dots, n-i+1$) ning $\widehat{\mathrm{Res}}(Q^{-1}_{1,10}) = \widehat{\mathrm{Res}}(Q_{1,10}) = 0$.

Korrelatsioonikordaja $\hat{\lambda}^{P}$ arvutamiseks (analoogselt $\hat{\lambda}^{I}$ puhul) võetakse makstud kahjude ja (*I/P*)-suhete jäägid $\widehat{\mathrm{Res}}(F^{P}_{i,s})$ ja $\widehat{\mathrm{Res}}(Q^{-1}_{i,s})$, kus $s = 1, \dots, n-2, i = n-s$. Paneme tähele, et viimase diagonaali väärtusi suhete jääkide tabelites ei kasutata. Valemi (1.4.8) järgi leiame:

$\hat{\lambda}^P = 0{,}4547,\ \ \hat{\lambda}^I = 0{,}3071.$ Mõlemad kordajad on positiivsed ning paiknevad vahemikus (0,3; 0,7), st mõlemal juhul on olemas positiivne seos üleminekute jääkide ja suhete jääkide vahel. Sisuliselt tähendab see, et ühel kahju toimumise aastal üleminek ühest kujunemise aastast teise sõltub vastavast kahju suurusest teises protsessis. Mida suurem on toimunud ja makstud kahjude suhe (vaadeldava kahju toimumise aasta ja antud kujunemise aasta puhul), seda suurem on üleminek makstud kahjude protsessis (vaadeldaval toimumise aastal antud kujunemise aastast järgmisse). Antud juhul on see korrelatsioon 45,5%. Saadud makstud üleminekute ja (*I/P*)-suhete jääkide hinnangud on toodud Joonise 2.1.1. (a) osas. Analoogselt interpreteeritakse ka korrelatsiooni 30,7% toimunud kahjude üleminekute ja (*P/I*)-suhete vahel. Hinnangud on toodud Joonisel 2.1.1 (b) osas.




Joonis 2.1.1. (a): makstud kahjude üleminekute ja (*I/P*)-suhete jäägid esimeses portfellis. (b): toimunud kahjude üleminekute ja (*P/I*)-suhete jäägid esimeses portfellis.

Kasutades leitud parameetreid arvutame individuaalsed üleminekukordajaid (valemi (1.4.9) järgi) ning nende abil prognoosime kahjude väärtusi. Siin vaatleme esimest üleminekut viimasel kahju toimumise aastal:

$$\hat{f}^P_{10,1\to 2} = \hat{f}^P_{1\to 2} + \widehat{\lambda^P} \cdot \frac{\hat{\sigma}^P_{1\to 2}}{\hat{\rho}^P_1} \cdot \left(Q^{-1}_{10,1} - \hat{q}_1^{-1}\right) =$$

$$4{,}9655 + 0{,}4547 \cdot \frac{15{,}9245}{8{,}8389} \cdot \left(\frac{1769}{704} - 2{,}1791\right) = 5{,}2389,$$

$$\hat{f}^{I}_{10,1\to 2} = 3{,}1610 + 0{,}3071 \cdot \frac{28{,}0823}{2{,}7305} \cdot \left(\frac{704}{1769} - 0{,}4589\right) = 2{,}9685.$$

Leiame vastavad prognoosid:

$$\hat{P}_{10,2} = P_{10,1} \cdot \hat{f}^{P}_{10,1\to 2} = 704 \cdot 5{,}2389 = 3688,$$

$$\hat{I}_{10,2} = 1769 \cdot 2{,}9685 = 5251.$$

Järgmise sammu prognooside $\hat{P}_{10,3}$ ja $\hat{I}_{10,3}$ leidmiseks võtame arvesse prognooside $\hat{P}_{10,2}$ ja $\hat{I}_{10,2}$ suhted $\hat{Q}^{-1}_{10,2}$ ja $\hat{Q}_{10,2}$. Niimoodi jätketes saame kätte prognoosid $\hat{P}_{i,s}$ ja $\hat{I}_{i,s}$, kus $i = 2, \dots, 10, s = 10 - i + 2, \dots, 10$.

**MCL-prognoosi tulemused**

Tulemuseks saame ruuttabelid makstud ja toimunud kahjude protsesside jaoks. Makstud kahjude esialgsed andmed ja MCL-prognoosid on esitatud Tabelis 2.1.5, toimunud kahjude andmed on Tabelis 2.1.6. Jämedate joontega on näidatud prognoositavad väärtused.

Tabel 2.1.5. Makstud kahjude algandmed ja MCL-prognoosid esimese portfelli jaoks.

| AY \ DY | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 740 | 3692 | 4489 | 4595 | 4683 | 4778 | 4824 | 4867 | 4889 | 4897 |
| 2 | 716 | 3395 | 4575 | 5624 | 5892 | 6012 | 6073 | 6124 | 6196 | 6209 |
| 3 | 790 | 4588 | 5585 | 5615 | 6075 | 6360 | 6486 | 6605 | 6675 | 6702 |
| 4 | 617 | 3461 | 4945 | 5367 | 5667 | 5832 | 5917 | 5986 | 6032 | 6048 |
| 5 | 545 | 2670 | 4139 | 4614 | 4868 | 4931 | 5003 | 5068 | 5114 | 5130 |
| 6 | 486 | 2708 | 4050 | 4569 | 4768 | 4880 | 4942 | 4999 | 5037 | 5049 |
| 7 | 779 | 3029 | 4747 | 5064 | 5282 | 5359 | 5416 | 5469 | 5500 | 5508 |
| 8 | 776 | 3601 | 5363 | 5927 | 6245 | 6410 | 6496 | 6575 | 6628 | 6646 |
| 9 | 811 | 3940 | 5430 | 5890 | 6197 | 6351 | 6434 | 6510 | 6560 | 6577 |
| 10 | 704 | 3688 | 5258 | 5742 | 6044 | 6198 | 6280 | 6354 | 6405 | 6421 |

Tabel 2.1.6. Toimunud kahjude algandmed ja MCL-prognoosid esimese portfelli jaoks.

| AY \ DY | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1411 | 4612 | 5411 | 4812 | 4844 | 4880 | 4884 | 4906 | 4911 | 4916 |
| 2 | 1420 | 5384 | 5968 | 6089 | 6139 | 6188 | 6160 | 6206 | 6237 | 6242 |
| 3 | 1793 | 5816 | 6272 | 6466 | 6559 | 6684 | 6713 | 6734 | 6751 | 6747 |
| 4 | 1273 | 4809 | 6399 | 6370 | 6049 | 6091 | 6027 | 6058 | 6080 | 6082 |
| 5 | 894 | 4015 | 5004 | 5069 | 5210 | 5138 | 5122 | 5147 | 5162 | 5162 |
| 6 | 952 | 3810 | 4905 | 4991 | 4997 | 5038 | 5031 | 5057 | 5075 | 5078 |
| 7 | 1563 | 3500 | 5298 | 5352 | 5398 | 5472 | 5475 | 5506 | 5530 | 5536 |
| 8 | 2163 | 5202 | 6672 | 6611 | 6599 | 6642 | 6628 | 6661 | 6684 | 6685 |
| 9 | 1937 | 5229 | 6525 | 6521 | 6519 | 6567 | 6556 | 6589 | 6613 | 6615 |
| 10 | 1769 | 5251 | 6398 | 6374 | 6368 | 6414 | 6401 | 6434 | 6457 | 6459 |

Saadud hinnangud moodustavad prognoositava reservi. Mõlema kolmnurga korral huvitavad meid reservid aastate kaupa ning kogureservid (vt 1.2. Kasutatud parameetrid ja tähistused).

Vaatleme viimase kahju toimumise aasta reserve. Makstud kahjude reservi leidmiseks lahutame viimase kujunemise aasta makstud kahju prognoosist esimese kujunemise aasta makstud kahju väärtuse (vt valem (1.2.1)): $\hat{R}^P_{i=10} \coloneqq \hat{P}_{10,10} - P_{10,1} = 6421 - 704 = 5717$. See prognoos näitab, et vaadeldava perioodi viimasel (kümnendal) aastal toimunud kahjude kompenseerimiseks makstakse järgneva 9 kujunemise aasta jooksul välja veel 5717 rahaühikut. Toimunud kahjude reservi leiame lahutades viimase kujunemise aasta toimunud kahju prognoosist esimese kujunemise aasta makstud kahju väärtuse (vt valem (1.2.2)): $\hat{R}^I_{i=10} \coloneqq \hat{I}_{10,10} - P_{10,1} = 6459 - 704 = 5755$. See prognoos näitab, et viimasel (kümnendal) aastal toimunud kahjude välja makstud summa ja reservi lisatud summa kogusumma vaadeldavas perioodis (9 järgnevat kujunemise aastat) on 5755 rahaühikut.

Analoogselt leiame ülejäänud makstud ja toimunud kahjude reservide hinnangud ning valemi (1.2.3) abil arvutame kogureservid vaadeldavaks perioodiks: $\hat{R}^P = 10802, \hat{R}^I = 11137$.

Saadud reservide hinnangud esitatakse koos nende veahinnangutega Tabelites 2.1.7 ja 2.1.8.

**Reservide täpsus ja lõpptulemused**

Prognoositud reservide veahinnangute leidmiseks kasutame bootstrap-meetodit, mille algoritmi kirjeldasime osas 1.5. Bootstrap-tsükli iteratsioonide arv on 10000, st me genereerime 10000 jääkide komplekti (pseudo-valimid), mille põhjal leiame toimumise aastate reservide (vt Tabel 2.1.7) ja kogureservide (vt Tabel 2.1.8) veahinnangud. Tabelites antakse makstud ja toimunud kahjude reservide prognoosid (Prognoos), ruutjuured keskmistest ruutvigadest ($\sqrt{\text{MSE}}$), veahinnangud protsentides ($\sqrt{\text{MSE}}$ %-des) ja prognooside 95% usaldusintervallid (Prognoosi 95% UI). Samad tähistused kasutatakse ka järgmises peatükis.

Tabel 2.1.7. Esimese portfelli reservide prognoosid ja veahinnangud toimumise aastate kaupa.

| | Makstud kahjude reservid | | | | Toimunud kahjude reservid | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AY | Prognoos | $\sqrt{\text{MSE}}$ | $\sqrt{\text{MSE}}$ %-des | Prognoosi 95% UI | Prognoos | $\sqrt{\text{MSE}}$ | $\sqrt{\text{MSE}}$ %-des | Prognoosi 95% UI |
| 1 | 0 | 0 | | (0; 0) | 19 | 0 | 0,0% | (19; 19) |
| 2 | 13 | 11 | 87,3% | (-9; 35) | 46 | 11 | 25,1% | (24; 68) |
| 3 | 97 | 30 | 31,0% | (38; 156) | 142 | 26 | 18,4% | (91; 193) |
| 4 | 131 | 32 | 24,2% | (68; 194) | 165 | 27 | 16,1% | (112; 218) |
| 5 | 199 | 40 | 20,3% | (121; 277) | 231 | 40 | 17,2% | (153; 309) |
| 6 | 281 | 64 | 22,6% | (156; 406) | 310 | 64 | 20,6% | (185; 435) |
| 7 | 444 | 135 | 30,4% | (179; 709) | 472 | 137 | 29,0% | (203; 741) |
| 8 | 1283 | 300 | 23,4% | (695; 1871) | 1322 | 301 | 22,7% | (732; 1912) |
| 9 | 2637 | 585 | 22,2% | (1490; 3784) | 2675 | 588 | 22,0% | (1523; 3827) |
| 10 | 5717 | 1137 | 19,9% | (3488; 7946) | 5755 | 1146 | 19,9% | (3509; 8001) |

Tabelist 2.1.7 näeme, et teisel kahju toimumise aastal makstud kahjude reservi suhteline viga on 87,3%, mis on suurem, kui toimunud kahjude puhul (25,1%). Teise toimumise aasta prognoosi leidmiseks on meie käsutuses andmed ainult ühe ülemineku kohta (üleminek esimesel toimumise aastal kujunemise aastast 9 aastasse 10). Vastava hajuvuse $\hat{\sigma}^{P}_{9\to10}$ hinnanguks võetakse fikseeritud väärtus 0,1 mõlema protsessi jaoks (makstud ja toimunud), ning see jääb bootstrap-tsükli iga iteratsiooni puhul samaks. Makstud ja toimunud kahjude reservide absoluutvead on mõlemad 11 ühikut. Kuna prognooside suurused on erinevad (13 ja 46 ühikut), siis hinnangud protsentides on ka erinevad. Järgmistel toimumise aastatel arvesse tulevad teised üleminekud ning viimase ülemineku fikseeritud väärtus mängib väiksemat rolli, seega makstud ja toimunud kahjude reservide veahinnangute vahed vähenevad. Viimasel aastal on mõlemas protsessis veahinnangud 19,9%.

Tabel 2.1.8. Esimese portfelli kogureservide prognoosid ja nende veahinnangud.

| Protsess | Prognoos | $\sqrt{\text{MSE}}$ | $\sqrt{\text{MSE}}$ %-des | 95% UI |
|---|---|---|---|---|
| Makstud kahjud | 10802 | 1402 | 13,0% | (8054; 13550) |
| Toimunud kahjud | 11137 | 1411 | 12,7% | (8371; 13903) |

Makstud kahjude kogureservi prognoosiks saime 10802 veahinnanguga 1402, st usaldusnivoo 0,95 korral oodatav kogureservi suurus jääb vahemikku (8054; 13550). Toimunud kahjude reservi prognoos on 11137, veahinnanguga 1411, st 95% usaldusintervall on (8371; 13903). Seega, analüüsides kahjusid, mis on toimunud toimumise aastatel 1 kuni 10, peab prognoositavaks perioodiks reservis kokku olema 8371 kuni 13903 rahaühikut. Sellest summast 8054 kuni 13550 rahaühikut läheb kahjude välja maksmiseks ja ülejäänud jääb maksmata. Reservi jääva summa punkthinnang on 335 ühikut (ehk erinevus toimunud ja makstud kahjude kogureservi vahel). Vaadates kogureservide 95% usalduspiire on näha, et see erinevus võib ka puududa.

## 2.2. MCL-meetodi rakendamine „probleemsele“ portfellile

Järgmisena vaatleme teise portfelli andmeid. Makstud ja toimunud kahjude kumulatiivsed suurused on toodud vastavalt Tabelites 2.2.4 ja 2.2.5 ülemistes kolmnurkades. Alumistes kolmnurkades paiknevad prognoosid, millest räägitakse hiljem.

Alltoodud Tabelist 2.2.1 näeme, et arenguperioodi esimesel poolel hajuvuste väärtused märgatavalt varieeruvad (vaadates kujunemise aastate kaupa). Kuuendal ja seitsmendal kujunemise aastal on suhted peaaegu konstantsed. Selline olukord toob kaasa peatükis 1.6 kirjeldatud probleemi tekkimist. Arvutame MCL-parameetrid selliste andmete põhjal kasutades algoritmi esialgsel kujul. Saadud üleminekute ja (*I/P*)- ja (*P/I*)-suhete hajuvused esitame Tabelis 2.2.2.

Tabel 2.2.1. Toimunud ja makstud kahjude individuaalsed suhted teises portfellis.

| AY \ DY | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,300 | 1,095 | 1,173 | 1,175 | 1,045 | 1,0362 | 1,0142 | 1,015 | 1,006 | 1,006 |
| 2 | 1,591 | 1,334 | 1,332 | 1,118 | 1,071 | 1,0358 | 1,0144 | 1,027 | 1,015 | |
| 3 | 3,002 | 1,857 | 1,403 | 1,172 | 1,076 | 1,0358 | 1,0144 | 1,004 | | |
| 4 | 1,571 | 1,260 | 1,442 | 1,228 | 1,120 | 1,0359 | 1,0143 | | | |
| 5 | 1,574 | 1,455 | 1,171 | 1,126 | 1,068 | 1,0358 | | | | |
| 6 | 1,170 | 1,335 | 1,273 | 1,161 | 1,067 | | | | | |
| 7 | 1,431 | 1,402 | 1,299 | 1,086 | | | | | | |
| 8 | 1,893 | 1,660 | 1,320 | | | | | | | |
| 9 | 1,787 | 1,162 | | | | | | | | |
| 10 | 1,256 | | | | | | | | | |

Tabelis 2.2.2. Üleminekute ja suhete hajuvuste hinnangud teises portfellis.

| Kujunemise aasta $s$ | $\hat{\sigma}^{P}_{s\rightarrow s+1}$ | $\hat{\sigma}^{I}_{s\rightarrow s+1}$ | $\hat{\rho}^{P}_{s}$ | $\hat{\rho}^{I}_{s}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 22,1827 | 15,1851 | 11,8381 | 5,0348 |
| 2 | 8,9308 | 4,6645 | 11,9278 | 7,1439 |
| 3 | 5,7740 | 1,6609 | 5,4861 | 3,7242 |
| 4 | 1,4461 | 1,5097 | 2,8307 | 2,2841 |
| 5 | 1,0404 | 1,5420 | 1,5616 | 1,3867 |
| 6 | 0,3150 | 0,3037 | 0,0117 | 0,0111 |
| 7 | 0,6508 | 0,3894 | 0,0062 | 0,0061 |
| 8 | 0,0355 | 0,0966 | 0,7622 | 0,7452 |
| 9 | 0,1000 | 0,1000 | 0,3766 | 0,3706 |

Vaatleme kuuenda kujunemise aasta makstud kahjude prognooside arvutust. Tabelist 2.2.2 näeme, et kuuendal aastal toimunud ja makstud kahjude suhte hajuvus on 0,0117. Eelmise aasta (*I/P*)-suhte hajuvus on palju suurem (1,5616). See hinnang mõjutab oluliselt prognoositavate individuaalsete üleminekukordajate väärtusi. Seega, kuuenda aasta prognoosid leitakse arvestades viienda aasta (*I/P*)-suhte suhteliselt suurt hajuvust. Samasugune olukord tekib ka toimunud kahjude prognooside leidmisel. Seega, kuuendal aastal võivad prognooside suhted oluliselt erineda teadaolevate kahjude suhetest. Saadud suhted võetakse arvesse järgmise aasta prognooside leidmisel ja nii käib arenguperioodi lõpuni. Toome saadud makstud kahjude MCL-prognoosid Tabelis 2.2.3.

Tabel 2.2.3. Teise portfelli makstud kahjude MCL-prognoosid esialgse algoritmi põhjal.

| AY \ DY | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 680 | 3008 | 3291 | 3218 | 3438 | 3451 | 3522 | 3525 | 3569 | 3575 |
| 2 | 606 | 2762 | 3178 | 4030 | 4226 | 4389 | 4433 | 4442 | 4501 | 4511 |
| 3 | 440 | 2229 | 3292 | 4019 | 4435 | 4643 | 4735 | 4822 | 4883 | 4879 |
| 4 | 573 | 2740 | 3143 | 3738 | 4137 | 4257 | 4322 | 4356 | 4413 | 4416 |
| 5 | 653 | 2197 | 3121 | 3314 | 3532 | 3600 | 3655 | 3883 | 3927 | 3899 |
| 6 | 764 | 2121 | 2854 | 3145 | 3437 | 3525 | 3272 | 23243 | 22973 | 19835 |
| 7 | 694 | 2139 | 2993 | 3581 | 3801 | 3837 | 2260 | 107475 | 105851 | 89295 |
| 8 | 776 | 2264 | 3580 | 4138 | 4483 | 4602 | 4360 | 24701 | 24439 | 21246 |
| 9 | 731 | 3143 | 3827 | 4057 | 4343 | 4416 | 3269 | 81452 | 80266 | 67967 |
| 10 | 701 | 2415 | 2954 | 3145 | 3368 | 3426 | 2573 | 60920 | 60036 | 50858 |

Niiviisi saadud hinnangud ei ole usaldusväärsed, seega antud juhul ei saa MCL-algoritmi kasutada samal kujul nagu eelmise näite juures. Käesolevas töös valime selle probleemi lahenduseks peatükis 1.6 toodud teise variandi, võttes suhete hajuvuste minimaalseks lubatud väärtuseks 0,5. Viimase aasta hajuvuste hindamiseks võetakse samad väärtused. Tabeli 2.2.4 alumises kolmnurgas (näidatud jämeda joonega) esitame makstud kahjude MCL-prognoosid, mis on saadud selle tingimuse põhjal. Tabelis 2.2.5 on vastavad toimunud kahjude andmed. Toodud tabelitest näeme, et saadud prognoosid on mõistlikud.

Tabel 2.2.4. Teise portfelli makstud kahjude algandmed ja MCL-prognoosid.

| AY \ DY | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 680 | 3008 | 3291 | 3218 | 3438 | 3451 | 3522 | 3525 | 3569 | 3575 |
| 2 | 606 | 2762 | 3178 | 4030 | 4226 | 4389 | 4433 | 4442 | 4501 | 4511 |
| 3 | 440 | 2229 | 3292 | 4019 | 4435 | 4643 | 4735 | 4822 | 4883 | 4881 |
| 4 | 573 | 2740 | 3143 | 3738 | 4137 | 4257 | 4322 | 4356 | 4412 | 4416 |
| 5 | 653 | 2197 | 3121 | 3314 | 3532 | 3600 | 3658 | 3687 | 3735 | 3738 |
| 6 | 764 | 2121 | 2854 | 3145 | 3437 | 3524 | 3575 | 3597 | 3644 | 3647 |
| 7 | 694 | 2139 | 2993 | 3581 | 3794 | 3833 | 3870 | 3876 | 3926 | 3930 |
| 8 | 776 | 2264 | 3580 | 4142 | 4486 | 4601 | 4668 | 4698 | 4758 | 4762 |
| 9 | 731 | 3143 | 3797 | 4043 | 4349 | 4440 | 4498 | 4520 | 4579 | 4583 |
| 10 | 701 | 2387 | 2943 | 3180 | 3425 | 3500 | 3547 | 3565 | 3611 | 3614 |

Tabel 2.2.5. Teise portfelli toimunud kahjude algandmed ja MCL-prognoosid.

| AY \ DY | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 884 | 3295 | 3861 | 3781 | 3591 | 3576 | 3572 | 3578 | 3592 | 3596 |
| 2 | 964 | 3685 | 4234 | 4504 | 4524 | 4546 | 4497 | 4560 | 4568 | 4572 |
| 3 | 1321 | 4139 | 4619 | 4711 | 4772 | 4809 | 4803 | 4842 | 4856 | 4865 |
| 4 | 900 | 3452 | 4533 | 4590 | 4635 | 4410 | 4384 | 4421 | 4433 | 4439 |
| 5 | 1028 | 3196 | 3653 | 3730 | 3771 | 3729 | 3711 | 3742 | 3752 | 3757 |
| 6 | 894 | 2832 | 3632 | 3651 | 3668 | 3636 | 3620 | 3651 | 3661 | 3666 |
| 7 | 993 | 2999 | 3889 | 3887 | 3914 | 3908 | 3896 | 3934 | 3944 | 3950 |
| 8 | 1469 | 3757 | 4727 | 4795 | 4791 | 4748 | 4727 | 4768 | 4781 | 4787 |
| 9 | 1306 | 3652 | 4489 | 4589 | 4596 | 4565 | 4547 | 4588 | 4600 | 4606 |
| 10 | 883 | 2899 | 3549 | 3623 | 3627 | 3601 | 3586 | 3618 | 3628 | 3633 |

Tabelis 2.2.6 toome reservide prognoosid toimumise aastate kaupa koos bootstrap-meetodi abil leitud veahinnangutega. Kogureservide hinnangud ja veahinnangud on Tabelis 2.2.7.

Tabel 2.2.6. Teise portfelli reservide prognoosid ja veahinnangud toimumise aastate kaupa.

| | Makstud kahjude reservid | | | | Toimunud kahjude reservid | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AY | Prognoos | $\sqrt{\text{MSE}}$ | $\sqrt{\text{MSE}}$ %-des | Prognoosi 95% UI | Prognoos | $\sqrt{\text{MSE}}$ | $\sqrt{\text{MSE}}$ %-des | Prognoosi 95% UI |
| 1 | 0 | 0 | | (0; 0) | 21 | 0 | 0,0% | (21; 21) |
| 2 | 10 | 9 | 94,4% | (-8; 28) | 71 | 10 | 13,7% | (51; 91) |
| 3 | 59 | 10 | 17,9% | (39; 79) | 43 | 13 | 29,8% | (18; 68) |
| 4 | 94 | 40 | 42,9% | (16; 172) | 117 | 28 | 24,3% | (62; 172) |
| 5 | 138 | 40 | 28,9% | (60; 216) | 157 | 31 | 19,4% | (96; 218) |
| 6 | 210 | 84 | 39,7% | (45; 375) | 229 | 84 | 36,8% | (64; 394) |
| 7 | 349 | 123 | 35,3% | (108; 590) | 369 | 125 | 33,9% | (124; 614) |
| 8 | 1182 | 198 | 16,7% | (794; 1570) | 1207 | 199 | 16,5% | (817; 1597) |
| 9 | 1440 | 357 | 24,8% | (740; 2140) | 1463 | 357 | 24,4% | (763; 2163) |
| 10 | 2913 | 592 | 20,3% | (1753; 4073) | 2932 | 596 | 20,3% | (1764; 4100) |

Tabel 2.2.7. Teise portfelli kogureservide prognoosid ja nende veahinnangud.

| Protsess | Prognoos | $\sqrt{\text{MSE}}$ | $\sqrt{\text{MSE}}$ %-des | 95% UI |
|---|---|---|---|---|
| Makstud kahjud | 6394 | 828 | 12,9% | (4771; 8017) |
| Toimunud kahjud | 6609 | 827 | 12,5% | (4988; 8230) |

Tabelitest 2.2.6 ja 2.2.7 näeme, et saadud reservide veahinnangud (protsentides) on suhteliselt sarnased esimeses portfellis saadud tulemustele (vt Tabelid 2.1.7 ja 2.1.8). Samas tuleb tähele panna, et antud juhul ei kattu teise kujunemise aasta makstud ja toimunud kahjude 95%-usaldusintervallid üldse. Seda võib põhjendada lähteandmete eripäraga: ka esimese toimumise aasta kahjudest on veel 21 rahaühikut jäänud välja maksmata (st on reservis).

Makstud kahjude kogureservi hinnanguks saime 6394 ühikut ning tema 95% usaldusvahemik on (4771; 8017). Toimunud kahjude prognoositav kogureserv on 6609 ja usaldusvahemik on (4988; 8230). Makstud ja toimunud kahjude kogureservide vahe punkthinnang on 215, samas usaldusintervallid kattuvad suures osas, seega makstud kahjude ja toimunud kahjude kogureservid võivad langeda kokku.

Antud näite puhul oleme proovinud hajuvuste probleemi lahenduseks kasutada ka esimest väljapakutud varianti (vt 1.6 Algoritmi probleemid) ning oleme saanud ligikaudu samad tulemused. See tähendab, et tehtud muudatused ei mõjutanud antud juhul veahinnanguid. Üldisel juhul seda ei saa väita. Kui andmestikus esineb null-hajuvuse või langeva hajuvuse probleem, seda tuleb individuaalselt analüüsida ning sobivat lahendust otsida.

# KOKKUVÕTE

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk oli uurida reservide hindamismeetodit Munich Chain Ladder, teha selgeks arvutusalgoritm ning näidata meetodi eeliseid ja puuduseid.

Selleks jagati töö kaheks osaks. Esimeses osas tutvustati uuritava teema teoreetilist poolt. Teises osas rakendati MCL-meetodit kahele praktilisele ülesandele, kus arvutati kahjusuuruste prognoosid vaadeldaval arenguperioodil ning leiti toimumise aastate reservide ja kogureservide prognoosid koos veahinnangutega.

Läbiviidud analüüs näitas, et mõlema näite korral saadud makstud ja toimunud kahjude kogureservide prognooside vahed on suhteliselt väikesed. Vaadates hinnangute usalduspiire osutub, et need erinevused võivad ka puududa. Seega probleem, mis tekib reservide hindamisel paljude hindamismeetodite puhul, sai MCL-meetodiga lahendatud: makstud ja toimunud kahjude prognoosid langevad kokku.

Kui vaadata reservide veahinnanguid eraldi toimumise aasta kaupa, siis esimestel aastatel saadud toimunud kahjude prognoosid on täpsemad kui makstud kahjude prognoosid. Seda erinevust on võimalik vältida hinnates viimase üleminekuhajuvused teistmoodi, lähtudes konkreetsest olukorrast. Viimastel aastatel antud näidetes makstud ja toimunud kahjude veahinnangud praktiliselt ei erine.

Läbiviidud uuring näitas, et MCL-meetodi realiseerimisel võivad tekkida probleeme, mida tavalise ahel-redel meetodi puhul ei teki. Seega, on võimalik, et tulemuste saamiseks tuleb algoritmis teha vajalikke muudatusi. Teisena vaadeldud portfelli andmetes esines langeva makstud ja toimunud kahjude suhete hajuvuse probleem. Tekkinud probleemi lahendasime võttes hajuvuse alumise tõkkeks fikseeritud väärtuse. Rõhutame, et üldjuhul valitud lahendus ei pruugi oodatavat tulemust anda ning iga olukord nõuab individuaalset lähenemist.

Meetodi edaspidisel kasutamisel tuleb enne algoritmi rakendamist andmeid hoolikalt analüüsida, võttes arvesse kõiki aspekte, mis võivad prognoositavat tulemust mõjutada.

# KASUTATUD KIRJANDUS


1. Mack, T., 1993. Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates. *ASTIN Bulletin*, 23(2), lk 213-225.
2. Quarg, G., Mack, T., 2004. Munich Chain Ladder. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik*, 26(4), lk 597-630.
3. Liu, H., Verrall, R., 2010. Bootstrap Estimation of the Predictive Distribution of Reserves Using Paid and Incurred Claims. *Variance,* 4(2), lk 121-135.

# LISAD

## Lisa 1. R-i kood MCL-algoritmi rakendamiseks andmetele

```
############################################ MCL-MEETOD ############################################

# ANDMETE SISSELUGEMINE

paid<-read.table("...txt", sep="\t", header=F,dec = ",")       # makstud kahjude kolmnurk (panna dokumendi aadress)
incurred<-read.table("...txt", sep="\t", header=F,dec = ",") # toimunud kahjude kolmnurk (panna dokumendi aadress)

###################################
estsigma=0.1        # viimase ülemineku standardhälve (lubatud min. väärtus / al.tõke)
estrho=0.1          # viimase kujunemise aasta (P/I)- ja (I/P)-suhete standardhälve (lubatud min. väärtus / al.tõke)
n=length(paid)      # arenguperioodi pikkus

###################################
# INDIVIDUAALSED ÜLEMINEKUKORDAJAD JA SUHTED

F_p=1/(paid[1:n-1]/paid[2:n])                    # makstud kahjude individuaalsed üleminekukordajad
F_i=1/(incurred[1:n-1]/incurred[2:n])            # toimunud kahjude individuaalsed üleminekukordajad
Q=paid/incurred                                  # individuaalsed (P/I)-suhted
Q_inverse=incurred/paid                          # individuaalsed (I/P)-suhted

###################################
# ÜLDISED ÜLEMINEKUKORDAJAD JA SUHTED

f_p=rep(NA,n-1); f_i=f_p
f_p_mat=matrix(rep(NA,n*(n-1)),nrow=n); f_i_mat=f_p_mat
for (s in 1:(n-1)){
f_p[s]=sum(paid[1:(n-s),(s+1)])/sum(paid[1:(n-s),s])                  # makstud kahjude üldine ü.k. kujunemise aastal s
f_i[s]=sum(incurred[1:(n-s),(s+1)])/sum(incurred[1:(n-s),s])          # toimunud kahjude üldine ü.k. kujunemise aastal s
f_p_mat[1:(n-s),s]=f_p[s]; f_i_mat[1:(n-s),s]=f_i[s]}

q=rep(NA,n)
q_mat=matrix(rep(NA,n^2),nrow=n)
for (s in 1:n){
q[s]=sum(paid[1:(n+1-s),s])/sum(incurred[1:(n+1-s),s])                # (P/I)-suhe kujunemise aastal s
q_mat[1:(n-s+1),s]=q[s]}
q_inverse=1/q                                                         # (I/P)-suhe kujunemise aastal s
q_inverse_mat=1/q_mat

###################################
# ÜLEMINEKUTE JA SUHETE HAJUVUSED

sigma_p=rep(NA,n-1); sigma_i=sigma_p; rho_p=sigma_p; rho_i=sigma_p
sigma_p_mat=matrix(rep(NA,n*(n-1)),nrow=n); sigma_i_mat=sigma_p_mat
rho_p_mat=matrix(rep(NA,n*n),nrow=n); rho_i_mat=rho_p_mat

for (s in 1:(n-1)){
sigma_p[s]=(sqrt(sum((paid[,s]*((F_p[,s]-f_p[s])^2))[1:(n-s)])/(n-s-1)))          # makstud kahjude ülemineku s->s+1 std
sigma_i[s]=(sqrt(sum((incurred[,s]*((F_i[,s]-f_i[s])^2))[1:(n-s)])/(n-s-1)))      # toimunud kahjude ülemineku s->s+1 std
rho_p[s]=(sqrt(sum((paid[,s]*((Q_inverse[,s]-q_inverse[s])^2))[1:(n-s+1)])/(n-s)))        # (I/P)-suhete std kujunemise aastal s
rho_i[s]=(sqrt(sum((incurred[,s]*((Q[,s]-q[s])^2))[1:(n-s+1)])/(n-s)))                    # (P/I)-suhete std kujunemise aastal s

# Tingimus: hajuvustel on alumised tõkked (vt Algoritmi probleemid):
#if (s<(n-1) & sigma_p[s]<estsigma) {sigma_p[s]=estsigma}         # makstud kahjude hajuvus on >= estsigma
#if (s<(n-1) & sigma_i[s]<estsigma) {sigma_i[s]=estsigma}         # toimunud kahjude hajuvus on >= estsigma
if (rho_p[s]<estrho) {rho_p[s]=estrho}                            # (I/P)-suhte hajuvus on >= estrho
if (rho_i[s]<estrho) {rho_i[s]=estrho}                            # (P/I)-suhte hajuvus on >= estrho

sigma_p_mat[1:(n-s),s]=sigma_p[s]; sigma_i_mat[1:(n-s),s]=sigma_i[s]
rho_p_mat[1:(n-s+1),s]=rho_p[s]; rho_i_mat[1:(n-s+1),s]=rho_i[s]
```

```
}
sigma_p[n-1]=estsigma; sigma_i[n-1]=estsigma                    # viimase ülemineku standardhälbed on estsigma
sigma_p_mat[1,n-1]=estsigma; sigma_i_mat[1,n-1]=estsigma

rho_p[n]=estrho          # viimase (I/P)-suhte standardhälve on estrho
rho_i[n]=estrho          # viimase (P/I)-suhte standardhälve on estrho
rho_p_mat[1,n]=estrho; rho_i_mat[1,n]=estrho

##################################
# JÄÄGID

res_p=matrix(rep(NA,n^2-n),nrow=n); res_i=res_p; res_q=res_p; res_q_inverse=res_p
res_p=(F_p-f_p_mat)*sqrt(paid[,1:(n-1)])/sigma_p_mat                # makstud kahjude üleminekute jäägid
res_i=(F_i-f_i_mat)*sqrt(incurred[,1:(n-1)])/sigma_i_mat            # toimunud kahjude üleminekute jäägid
res_q_inverse=(Q_inverse-q_inverse_mat)*sqrt(paid)/rho_p_mat        # (I/P)-suhete jäägid
res_q=(Q-q_mat)*sqrt(incurred)/rho_i_mat                            # (P/I)-suhete jäägid

# Tingimus: kui jäägi väärtus on 0/0, talle omistatakse väärtus 0:
res_p[is.na(res_p)] <- 0; res_i[is.na(res_i)] <- 0; res_q[is.na(res_q)] <- 0; res_q_inverse[is.na(res_q_inverse)] <- 0

##################################
# KORRELATSIOONIPARAMEETRID

sum1p=0; sum2p=0; sum1i=0; sum2i=0
for (s in 1:(n-2)){
sum1p=sum1p+sum((res_q_inverse[,1:(n-1)]*res_p)[1:(n-s),s])
sum2p=sum2p+sum((res_q_inverse[,1:(n-1)]^2)[1:(n-s),s])
sum1i=sum1i+sum((res_q[,1:(n-1)]*res_i)[1:(n-s),s])
sum2i=sum2i+sum((res_q[,1:(n-1)]^2)[1:(n-s),s])}
lambda_p=sum1p/sum2p          # korrelatsioon makstud kahjude üleminekukordajate ning (I/P)-suhte vahel
lambda_i=sum1i/sum2i          # korrelatsioon toimunud kahjude üleminekukordajate ning (P/I)-suhte vahel

##################################
# MCL-PROGNOOSIDE ARVUTAMINE

mcl_paid=paid
mcl_incurred=incurred

for (i in 2:n){
for (s in (n-i+1):(n-1)){
# Makstud kahjude prognoosid:
#if (rho_p[s]<estrho){mcl_paid[i,s+1]=mcl_paid[i,s]*f_p[s]} else{          # tingimus: hajuvustel on min. lubatud väärtus
mcl_paid[i,s+1]=mcl_paid[i,s]*(f_p[s]+lambda_p*sigma_p[s]/rho_p[s]*(mcl_incurred[i,s]/mcl_paid[i,s]-q_inverse[s]))
#}                                                                          # sama tingimus
# Toimunud kahjude prognoosid:
#if (rho_i[s]<estrho){mcl_incurred[i,s+1]=mcl_incurred[i,s]*f_i[s]}else{   # sama tingimus
mcl_incurred[i,s+1]=mcl_incurred[i,s]*(f_i[s]+lambda_i*sigma_i[s]/rho_i[s]*(mcl_paid[i,s]/mcl_incurred[i,s]-q[s]))
#}                                                                          # sama tingimus
}}

##################################
# RESERVID

p_ultimate=mcl_paid[,n]            # saadud makstud kahjude ruuttabeli viimane veerg
i_ultimate=mcl_incurred[,n]        # saadud toimunud kahjude ruuttabeli viimane veerg
# makstud kahjude kolmnurga viimane diagonaal:
p_last_diag=rev((diag(n)[n:1,1:n]*mcl_paid)[!(diag(n)[n:1,1:n]*mcl_paid)==0])

reserve_p_row=(p_ultimate-p_last_diag)      # makstud kahjude reservid kahju toimumise aasta kaupa
reserve_i_row=(i_ultimate-p_last_diag)      # toimunud kahjude reservid kahju toimumise aasta kaupa
reserve_p_all=sum(reserve_p_row)            # makstud kahjude kogureserv
reserve_i_all=sum(reserve_i_row)            # toimunud kahjude kogureserv
```

## Lisa 2. R-i kood MSE leidmiseks MCL-prognoosidele

Alltoodud kood töötab juhul, kui Lisas 1 olev kood on läbi lastud.

```
############################## BOOTSTRAP-MEETOD MSE HINDAMISEKS ##############################

# VAJALIKUD TABELID

# Algandmete tabelid, kus alumistes kolmnurkades on 0-d:
paid_null=paid; incurred_null=incurred; paid_null[is.na(paid_null)]<-0; incurred_null[is.na(incurred_null)]<-0

# Jääkide tabelid (n)x(n-2), kus alumistes kolmnurkades on NA-d:
res_p_na=res_p[,1:(n-2)]; res_i_na=res_i[,1:(n-2)]; res_q_na=res_q[,1:(n-2)]; res_q_inverse_na=res_q_inverse[,1:(n-2)]
for (i in 2:n){
res_p_na[i,((n-i+1):(n-1))]=NA; res_i_na[i,((n-i+1):(n-1))]=NA
res_q_na[i,((n-i+1):(n-1))]=NA; res_q_inverse_na[i,((n-i+1):(n-1))]=NA}

# Jäägid vektoritena:
res_p_vec=as.vector(as.matrix(res_p_na))[!is.na(as.vector(as.matrix(res_p_na)))]
res_i_vec=as.vector(as.matrix(res_i_na))[!is.na(as.vector(as.matrix(res_i_na)))]
res_q_vec=as.vector(as.matrix(res_q_na))[!is.na(as.vector(as.matrix(res_q_na)))]
res_q_inverse_vec=as.vector(as.matrix(res_q_inverse_na))[!is.na(as.vector(as.matrix(res_q_inverse_na)))]
ind=seq(1,length(res_p_vec)) # indeksid juhusliku valiku jaoks

# Tabelid nxn, kus ülemistes kolmnurkades on 1-d, alumistes NA-d:
res_p_structure=matrix(rep(NA,n^2),nrow=n)    # ülemine kolmnurk on (n-1)x(n-1)
res_q_structure=matrix(rep(NA,n^2),nrow=n)    # ülemine kolmnurk on nxn
for (i in 1:n){res_q_structure[i,(1:(n-i+1))]=1; res_p_structure[i,(1:(n-i))]=1}; res_p_structure[n,1]=NA

# Tabelid nxn, kus ülemistes kolmnurkades on 1-d, alumistes 0-d:
res_p_structure_null=res_p_structure                    # ülemine kolmnurk on (n-1)x(n-1)
res_p_structure_null[is.na(res_p_structure_null)]<-0
res_q_structure_null=res_q_structure                    # ülemine kolmnurk on nxn
res_q_structure_null[is.na(res_q_structure_null)]<-0

######################################################################################################
# BOOTSTRAP-TSÜKKEL

N=10000 # iteratsioonide arv
# Tühjad maatriksid reservide hinnangute jaoks:
B_reserves_p_row=matrix(rep(NA,n*N),nrow=n)             # toimumise aastate makstud kahjude reservid
B_reserves_i_row=B_reserves_p_row                       # toimumise aastate toimunud kahjude reservid
B_reserves_p_all=rep(NA,N)                              # makstud kahjude kogureservid
B_reserves_i_all=rep(NA,N)                              # toimunud kahjude kogureservid

for (iteration in 1:N){                                         # BOOTSTRAP-TSÜKLI ALGUS
random_ind_mat=matrix(sample(ind,n*n,replace=T),nrow=n)         # juhuslike arvude tabel nxn:

#################################
# BOOTSTRAP: JÄÄGID

B_res_p=res_p_structure*(res_p_vec[random_ind_mat])   # makstud kahjude üleminekute jäägid
B_res_i=res_p_structure*(res_i_vec[random_ind_mat])   # toimunud kahjude üleminekute jäägid
B_res_q=res_q_structure*(res_q_vec[random_ind_mat])                   # (P/I)-suhete jäägid
B_res_q_inverse=res_q_structure*(res_q_inverse_vec[random_ind_mat])   # (I/P)-suhete jäägid

#################################
# BOOTSTRAP: INDIVIDUAALSED ÜLEMINEKUKORDAJAD JA SUHTED

# Individuaalsete üleminekukordajate ja suhete tabelid, kus alumistes kolmnurkades on NA-d:
B_F_p=B_res_p[,1:(n-1)]*sigma_p_mat/sqrt(paid[,1:(n-1)])+f_p_mat              # makstud kahjude üleminekud
B_F_i=B_res_i[,1:(n-1)]*sigma_i_mat/sqrt(incurred[,1:(n-1)])+f_i_mat          # toimunud kahjude üleminekud
B_Q=B_res_q*rho_i_mat/sqrt(incurred)+q_mat                                    # (P/I)-suhted
B_Q_inverse=B_res_q_inverse*rho_p_mat/sqrt(paid)+q_inverse_mat                # (I/P)-suhted
```

```
# Individuaalsete üleminekute ja suhete tabelid, kus alumistes kolmnurkades on 0-d:
B_F_p_null=B_F_p; B_F_p_null[is.na(B_F_p_null)]<-0; B_F_i_null=B_F_i; B_F_i_null[is.na(B_F_i_null)]<-0
B_Q_null=B_Q; B_Q_null[is.na(B_Q_null)]<-0
B_Q_inverse_null=B_Q_inverse; B_Q_inverse_null[is.na(B_Q_inverse_null)]<-0

#################################
# BOOTSTRAP: ÜLDISED ÜLEMINEKUKORDAJAD JA SUHTED

# Üldiste üleminekute ja suhete vektorid:
# makstud kahjude üldised üleminekukordajad:
B_f_p=colSums(paid_null[,1:(n-1)]*B_F_p_null)/colSums(res_p_structure_null*paid_null[,1:(n-1)])
# toimunud kahjude üldised üleminekukordajad:
B_f_i=colSums(incurred_null[,1:(n-1)]*B_F_i_null)/colSums(res_p_structure_null*incurred_null[,1:(n-1)])
B_q=colSums(incurred_null*B_Q_null)/colSums(incurred_null)                    # üldised (P/I)-suhted
B_q_inverse=colSums(paid_null*B_Q_inverse_null)/colSums(paid_null)       # üldised (I/P)-suhted

# Üldiste üleminekute ja suhete kolmnurgad:
B_f_p_triang=matrix(rep(B_f_p,n),nrow=n,byrow=T)*res_p_structure_null[,1:(n-1)]
B_f_i_triang=matrix(rep(B_f_i,n),nrow=n,byrow=T)*res_p_structure_null[,1:(n-1)]
B_q_inverse_triang=matrix(rep(B_q_inverse,n),nrow=n,byrow=T)*res_q_structure_null
B_q_triang=matrix(rep(B_q,n),nrow=n,byrow=T)*res_q_structure_null

# Üldiste üleminekute ja suhete ristkülikud:
B_f_p_mat=matrix(rep(B_f_p,n),nrow=n,byrow=T); B_f_i_mat=matrix(rep(B_f_i,n),nrow=n,byrow=T)
B_q_inverse_mat=matrix(rep(B_q_inverse,n),nrow=n,byrow=T); B_q_mat=matrix(rep(B_q,n),nrow=n,byrow=T)

#################################
# BOOTSTRAP: KORRELATSIOONIPARAMEETRID

B_lambda_p=sum((B_res_q_inverse*B_res_p)[!is.na(B_res_p)])/sum(((B_res_q_inverse^2)*res_p_structure)[!is.na(B_res_p
)])
B_lambda_i=sum((B_res_q*B_res_i)[!is.na(B_res_p)])/sum(((B_res_q^2)*res_p_structure)[!is.na(B_res_p)])

#################################
# BOOTSTRAP: ÜLEMINEKUTE JA SUHETE HAJUVUSED

# Üleminekute ja suhete hajuvuste vektorid:
# makstud kahjude üldised üleminekuhajuvused:
B_sigma_p=sqrt(colSums(paid_null[,1:(n-2)]*((B_F_p_null-B_f_p_triang)^2))/(n-(1:(n-2))-1))
# toimunud kahjude üldised üleminekuhajuvused:
B_sigma_i=sqrt(colSums(incurred_null[,1:(n-2)]*((B_F_i_null-B_f_i_triang)^2))/(n-(1:(n-2))-1))
# üldised (P/I)-suhete hajuvused:
B_rho_p=sqrt(colSums(paid_null[,1:(n-1)]*((B_Q_inverse_null-B_q_inverse_triang)^2))/(n-(1:(n-1))))
# üldised (I/P)-suhete hajuvused:
B_rho_i=sqrt(colSums(incurred_null[,1:(n-1)]*((B_Q_null-B_q_triang)^2))/(n-(1:(n-1))))
B_sigma_p[n-1]=estsigma; B_sigma_i[n-1]=estsigma        # viimased üleminekuhajuvused on estsigma

# Tingimus, et hajuvustel on alumised tõkked:
#B_sigma_p[B_sigma_p<estsigma]=estsigma; B_sigma_i[B_sigma_i<estsigma]=estsigma
#B_rho_p[B_rho_p<estrho]=estrho; B_rho_i[B_rho_i<estrho]=estrho

# Üleminekute ja suhete hajuvuste ristkülikud:
B_sigma_p_mat=matrix(rep(B_sigma_p,n),nrow=n,byrow=T); B_sigma_i_mat=matrix(rep(B_sigma_i,n),nrow=n,byrow=T)
B_rho_p_mat=matrix(rep(B_rho_p,n),nrow=n,byrow=T); B_rho_i_mat=matrix(rep(B_rho_i,n),nrow=n,byrow=T)

#################################
# BOOTSTRAP: MCL-PROGNOOSID

B_mcl_paid=paid; B_mcl_incurred=incurred
for(s in 1:(n-1)){
#if (B_rho_p[s]<estrho){B_mcl_f_p_col=B_f_p_mat[(n-s+1):n,s]}else{ # tingimus, et (I/P)-hajuvusel on min. väärtus estrho
B_mcl_f_p_triang=(B_f_p_mat+B_lambda_p*(B_sigma_p_mat/B_rho_p_mat)*(B_mcl_incurred/B_mcl_paid-
B_q_inverse_mat)[,1:(n-1)])
B_mcl_f_p_col=B_mcl_f_p_triang[(n-s+1):n,s]            # s-nda kujunemise aasta makstud kahjude MCL-üleminekud
#}                                                       # sama tingimus
B_sigma_p_col=B_sigma_p_mat[(n-s+1):n,s]               # s-nda kujunemise aasta makstud kahjude üleminekuhajuvus
B_mcl_p_col=B_mcl_paid[(n-s+1):n,s]                    # eelmise aasta makstud kahjude väärtused
```

```
# makstud kahjude prognooside leidmine normaaljaotuse tingimusel:
B_mcl_p_norm_col=t(mapply(rnorm, 1, B_mcl_f_p_col*B_mcl_p_col, sqrt(abs((B_sigma_p_col^2)*B_mcl_p_col))))
B_mcl_paid[(n-s+1):n,s+1]=t(B_mcl_p_norm_col)            # makstud kahjude MCL prognoos

#if (B_rho_i[s]<estrho){B_mcl_f_i_col=B_f_i_mat[(n-s+1):n,s]}else{ # tingimus, et (P/I)-hajuvusel on min. väärtus estrho
B_mcl_f_i_triang=(B_f_i_mat+B_lambda_i*(B_sigma_i_mat/B_rho_i_mat)*(B_mcl_paid/B_mcl_incurred-B_q_mat)[,1:(n-1)])
B_mcl_f_i_col=B_mcl_f_i_triang[(n-s+1):n,s]              # s-nda kujunemise aasta toimunud kahjude MCL-üleminekud
#}                                                       # sama tingimus
B_sigma_i_col=B_sigma_i_mat[(n-s+1):n,s]                 # s-nda kujunemise aasta toimunud kahjude üleminekuhajuvus
B_mcl_i_col=B_mcl_incurred[(n-s+1):n,s]                  # eelmise aasta toimunud kahjude väärtused
# toimunud kahjude prognooside leidmine normaaljaotuse tingimusel:
B_mcl_i_norm_col=t(mapply(rnorm, 1, B_mcl_f_i_col*B_mcl_i_col, sqrt(abs((B_sigma_i_col^2)*B_mcl_i_col))))
B_mcl_incurred[(n-s+1):n,s+1]=t(B_mcl_i_norm_col) }    # toimunud kahjude MCL-prognoos

#################################
# BOOTSTRAP: RESERVID

# Makstud ja toimunud kahjude prognoosid viimasel kujunemise aastal:
B_p_ultimate=B_mcl_paid[,n]; B_i_ultimate=B_mcl_incurred[,n]
# Makstud ja toimunud kahjude reservid kahju toimumise aasta kaupa:
B_reserve_p_row=(B_p_ultimate-p_last_diag); B_reserve_i_row=(B_i_ultimate-p_last_diag)
# Makstud ja toimunud kahjude kogureservid:
B_reserve_p_all=sum(B_reserve_p_row); B_reserve_i_all=sum(B_reserve_i_row)
# Reservide hinnangud salvestatakse:
B_reserves_p_row[,iteration]=B_reserve_p_row; B_reserves_i_row[,iteration]=B_reserve_i_row
B_reserves_p_all[iteration]=B_reserve_p_all; B_reserves_i_all[iteration]=B_reserve_i_all

}        # BOOTSTRAP-TSÜKLI LÕPP

#################################
# RESERVIDE VEAHINNANGUD (MSE)

mse_reserve_p_all=sum((B_reserves_p_all-reserve_p_all)^2)/N           # makstud kahjude kogureservi MSE
mse_reserve_i_all=sum((B_reserves_i_all-reserve_i_all)^2)/N           # toimunud kahjude kogureservi MSE
mse_reserve_p_row=rowSums((B_reserves_p_row-reserve_p_row)^2)/N       # makstud kahjude aastate reservide MSE
mse_reserve_i_row=rowSums((B_reserves_i_row-reserve_i_row)^2)/N       # toimunud  kahjude aastate reservide MSE
```

**Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Matvei Mirošnikov,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Munich Chain Ladder meetod reservide hindamiseks kahjukindlustuseks,

mille juhendaja on Meelis Käärik,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **28.04.2014**