TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Liina Uurman

Mehaaniliste võnkumiste ja majanduse mudelid

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: Ella Puman

Tartu 2014

Mehaaniliste võnkumiste ja majanduse mudelid

Bakalaureusetöö

Liina Uurman

Lühikokkuvõte. Antud bakalaureusetöös käsitletakse dünaamilisi süsteeme, mis muutuvad ajas ja põhinevad diferentsiaalvõrranditel. Töös on esitatud mõned mehaaniliste võnkumiste ja majanduse ülesannete mudelid koos ülesande kirjelduse, põhivalemite ja graafikutega. Mudelite koostamiseks on kasutatud modelleerimisprogrammi Stella.

Märksõnad. Stella, vedrupendel, matemaatiline pendel, harmoonilised võnkumised, sumbuvad võnkumised, konkureeriv ettevõte, monopolistlik ettevõte, turu tasakaal, piirtulu, piirkulu, kasum, toodang, kasumi maksimeerimine.

Models of mechanical oscillations and economics

Bachelor's thesis

Liina Uurman

Abstract. In this bachelor’s thesis there are dynamic systems, which change in time and are based on differential equations. The aim of this thesis is to present some models of mechanical oscillations and economics with description of the problems, basic formulas and graphs. Models are developed with graphical simulation program Stella.

Keywords. Stella, spring pendulum, mathematical pendulum, harmonic oscillation, damped oscillation, the competitive firm, the monopolistic firm, market equilibrium, marginal revenue, marginal cost, profit, production, maximizing profits.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesoleva töö eesmärk on esitada mõned mehaaniliste võnkumiste ja majanduse mudelid koos ülesande kirjelduse, põhimõistete ja valemitega. Kasutades modelleerimisprogrammi Stella, on koostatud mudelid antud ülesannetele. Saadud tulemused on esitatud peamiselt graafikutena. Töö sisaldab mudelite skeeme ja lisades on toodud vastavad programmikoodid.

Töö koosneb kahest osast. Mõlema peatüki alguses on sissejuhatus vastavasse teemasse. Esimeses peatükis käsitletakse mehaaniliste võnkumiste ülesandeid ja nende põhjal koostatud mudeleid. Esmalt vaadeldakse vedrupendli ning seejärel matemaatilise pendli ülesannet.

Teises peatükis antakse ülevaade erinevatest majanduse mudelitest. Kõigepealt vaadeldakse konkurentsivõimelise ettevõtte jaoks kasumi maksimeerimise ülesannet, teises alapunktis vaadeldakse monopolistliku firma kasumi maksimeerimise ülesannet ning kolmandana turu tasakaalustamise ülesannet.

Esimeses peatükis olevad mudelid on koostatud raamatute „Füüsika üldkursus“ [1] ja „Kaoseraamat“ [2] põhjal. Teine peatükk põhineb raamatul „Dynamic Modeling“ [3], kust on saadud vastavad mudelid ning nende kirjeldused, mis on tõlgitud eesti keelde ja läbi töötatud. Majanduse mõistete selgitamiseks on kasutatud aine „Mikroökonoomika“ konspekti [4].

1 Mehaanilised võnkumised

Võnkumisteks nimetatakse protsesse, millele on iseloomulik teatud korduvus. Olenevalt korduva protsessi füüsikalisest iseloomust võivad võnkumised olla mehaanilised, elektromagnetilised, elektromehaanilised jne. Käesolevas peatükis käsitletakse mehaanilisi võnkumisi. Tekst põhineb raamatutel „Füüsika üldkursus“ [1] ja „Kaoseraamat“ [2].

1.1 Sissejuhatus mehaaniliste võnkumiste ülesannetesse

Võnkumised on laialdaselt levinud nii looduses kui ka tehnikas. Olenevalt sellest, millistele mõjudele on allutatud võnkuv süsteem, liigitatakse võnkumised vabadeks ehk omavõnkumisteks, ise- ehk autovõnkumiseks ja parameetrilisteks võnkumisteks.

Vabadeks ehk omavõnkumisteks nimetatakse võnkumisi, mis toimuvad süsteemis pärast seda, kui süsteem on saanud tõuke või viidud välja tasakaaluasendist ning jäetud omapead, vabaks igasugustest välismõjudest. Niisuguse võnkumise näide võib olla niidi otsas rippuva kuulikese (pendli) võnkumine. Et selline süsteem võnkuma hakkaks, on tarvis kas tõugata kuulikest horisontaalsuunas või, viinud ta tasakaaluasendist kõrvale, lasta vabaks.

Sundvõnkumisteks nimetatakse võnkumisi, mille käigus võnkuvale süsteemile mõjub perioodiliselt muutuv välisjõud. Autovõnkumised, samuti kui sundvõnkumised, toimuvad välisjõudude mõjul, kuid viimasel juhul reguleerib võnkuv süsteem ise välismõju temale. Ajahetked, mil võnkuv süsteem välismõju vastu võtab, on selle süsteemi enese poolt määratud.

Parameetriliste võnkumiste korral muudab välismõju perioodiliselt süsteemi mingit parameetrit. Näiteks võib ta muuta niidi pikkust, mille otsas ripub võnkuv kuulike.

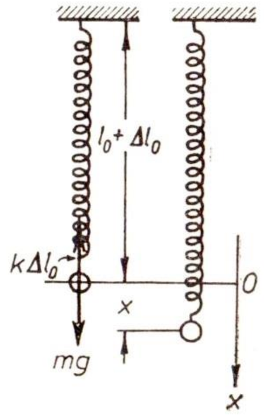
Lihtsamad võnkumised on harmoonilised võnkumised, st niisugused, kus võnkuva suuruse (näiteks pendli hälbe) sõltuvuse ajast määrab siinus- või koosinusfunktsioon. Harmoonilised võnkumised on väga tähtsad, sest looduses ja tehnikas esineb sageli võnkumisi, mis on lähedased harmoonilisele, ning paljusid teistsuguse ajalise sõltuvusega perioodilisi protsesse võib kujutada mitme harmoonilise võnkumise summana.

1.2 Vedrupendel

Vaatleme süsteemi, mis koosneb vedru otsas rippuvast kuulikesest massiga m (joonis 1.1). Tasakaaluasendis on kuulikesele mõjuv raskusjõud mg tasakaalustatud elastsusjõu $k\Delta l_0$ poolt:

$$mg = k\Delta l_0. \tag{1.1}$$

Võrrandis (1.1) on raskusjõud massi (m) ja raskuskiirenduse ($g = 9{,}8\, m/s^2$) korrutis, k tähistab vedru jäikust.



Joonis 1.1. Vedrupendel tasakaaluasendis ja väljavenitatult [1].

Hakkame kuulikese nihkumist tasakaaluasendist iseloomustama koordinaadiga x, kusjuures telg x on suunatud vertikaalselt alla ning selle nullpunkt ühtib kuulikese tasakaaluasendiga. Kui nihutada kuulike tasakaaluasendist koordinaadi x võrra kõrvale, siis vedru pikeneb $\Delta l_0 + x$ võrra ning resultantjõu projektsioon teljel x (tähistame selle tähega F) omandab väärtuse

$$F = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

Arvestades tasakaalutingimust (1.1), saame

$$F = -kx. \tag{1.2}$$

Miinusmärk valemis (1.2) tähendab seda, et hälve ja jõud on vastassuunalised: kui kuulike on nihutatud tasakaaluasendist allapoole ($x > 0$), on jõud suunatud ülespoole ($F < 0$), kuulikese nihkumisel ülespoole ($x < 0$) on jõud suunatud allapoole ($F > 0$). Seega on jõud F võrdeline kuulikese hälbega tasakaaluasendist ning suunatud alati tasakaaluasendi poole. Kirjeldatud näites on jõud (1.2) olemuselt elastsusjõud.

Anname kuulikesele hälbe $x = a$ ning pärast seda laseme süsteemi vabaks. Jõu $F = -kx$ mõjul hakkab kuulike liikuma tasakaaluasendi poole kasvava kiirusega $v = \dot{x}$. Süsteemi potentsiaalne energia kahaneb, kuid kasvab tema kineetiline energia. Jõudnud tasakaaluasendisse, jätkab kuulike liikumist inertsi tõttu. See liikumine on aeglustuv ning lakkab, kui kineetiline energia on täielikult muundunud potentsiaalseks, st kui kuulikese hälve on $-a$. Seejärel toimub sama protsess kuulikese liikumisel vastassuunas. Kui hõõrdumist süsteemis ei ole, jääb süsteemi energia muutumatuks ning kuulike liigub vahemikus $x = a$ kuni $x = -a$ kuitahes kaua.

Kirjutame Newtoni teise seaduse võrrandi kuulikese kohta:

$$m\ddot{x} = -kx$$

ning teisendame selle kujule

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{1.3}$$

Kuna suurus k/m on positiivne, võime anda talle kuju

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{1.4}$$

kus ω_0 on reaalne suurus.

Kasutades tähistust (1.4), saame võrrandi (1.3) kujul

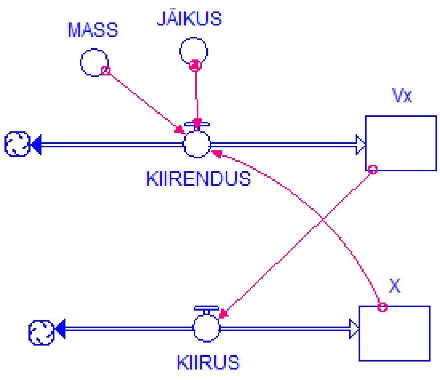
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1.5}$$

Seega kirjeldab jõu (1.2) mõjul toimuvat kuulikese liikumist teist järku lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand. Võrrandi (1.5) üldlahend on

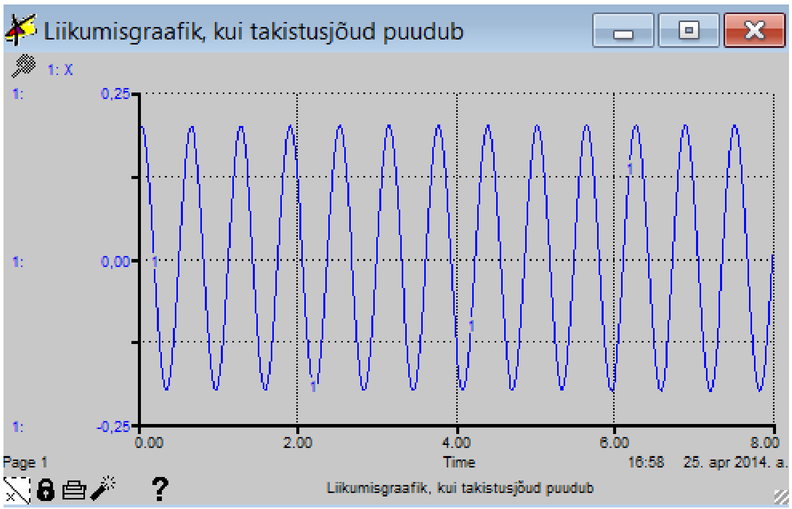
$$x = a\ \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

kus a ja α on suvalised konstandid.

Niisiis määrab hälbe x muutumise ajas koosinusfunktsioon. Järelikult on jõu $F = -kx$ mõjul toimuv liikumine harmooniline võnkumine. Vedrupendli mudel on kujutatud joonisel 1.2. Joonisel 1.3 on kujutatud vedrupendli liikumise graafik algtingimustel $x(0) = 0.2$ ja $\dot{x}(0) = 0$, kui mass $m = 2$ ja vedru jäikus $k = 200$.



Joonis 1.2. Vedrupendli mudel.



Joonis 1.3. Vedrupendli liikumine.

Harmooniliste võnkumiste võrrandi tuletamisel oletasime, et võnkuvale punktile mõjub ainult elastsusjõud. Igas reaalses võnkuvas süsteemis esinevad aga ka takistusjõud, mille mõjul süsteemi energia kahaneb. Kui energia kahanemist ei kompenseerita välisjõudude töö arvel, hakkavad võnkumised sumbuma.

Võtame vaatluse alla sumbuvad vabad võnkumised. Kui võnkumised on vabad, siis see tähendab, et süsteem, mis on välisjõudude poolt tasakaaluasendist välja viidud või saanud välisjõududelt algtõuke, on edaspidi jäetud vabaks ning temas mõjuvad vaid elastsusjõud ja keskkonnatakistus. Piirdume väikeste võngete uurimisega, siis on nii kiirus kui ka kiirendus väikesed. Väikeste kiiruste puhul aga on takistusjõud võrdeline kiiruse suurusega:

$$F_r = -rv = -r\dot{x},$$

kus r on konstant, mida nimetatakse takistusteguriks. Miinusmärk on tingitud sellest, et F ja v on vastassuunalised.

Kirjutame võnkuva keha jaoks Newtoni teise seaduse võrrandi

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x},$$

ning avaldame selle järgmisel kujul:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1.6}$$

kus on kasutatud tähistusi

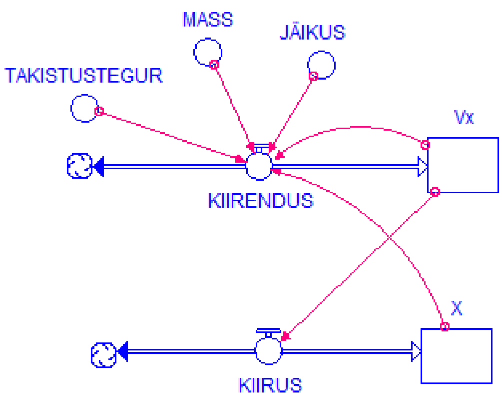
$$2\beta = \frac{r}{m},$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

ω_0 on see sagedus, millega toimuks süsteemi vabavõnkumine keskkonnatakistuse puudumisel, st kui $r = 0$. Võrrandi (1.6) lahend on kujul

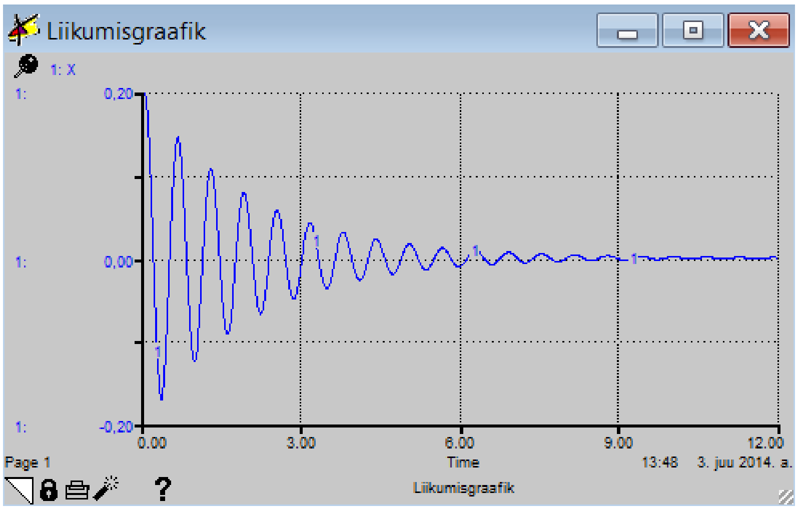
$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Joonisel 1.4 on kujutatud vedrupendli mudel, kuhu on lisatud ka takistustegur.



Joonis 1.4. Vedrupendli mudel takistusteguriga.

Sumbuva võnkumise graafikud on kujutatud joonisel 1.5 ja 1.6, kui mass $m = 2$, vedru jäikus $k = 200$, $takistustegur = 0.98$ ning algtingimused on $x(0) = 0.2$ ja $\dot{x}(0) = 0$.

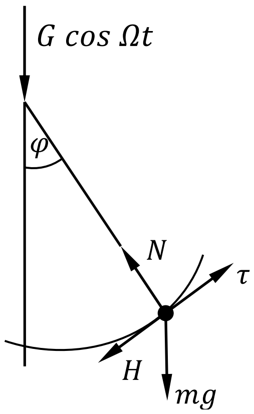


Joonis 1.5. Vedrupendli liikumine, kui kuulile mõjub takistusjõud.

Joonis 1.6. Vedrupendli liikumise faasidiagramm.

1.3 Matemaatline pendel

Vaatleme pendlit, mille pikkus on l, kuulikese mass olgu m. Pendel võngub vertikaaltasapinnas, tema asendi määrame nurgaga φ (joonis 1.7). Lisaks raskusjõule mg ja normaalreaktsioonile N mõjugu veel keskkonnatakistus H ja sundvõnkumisi põhjustav harmooniline jõud $G \cos \Omega t$ (Ω on sundvõnkumiste sagedus). Keskkonnatakistus olgu puutujasihiline ja mõjugu liikumise vastassuunas. Selle suurus olgu võrdeline kiiruse esimese astmega, st $H = \mu v$, kus μ on võrdetegur.



Joonis 1.7. Matemaatiline pendel ja sellele mõjuvad jõud [2].

Lähtume Newtoni teisest seadusest $ma = R$, kus a on liikumiskiirendus ja R kõikide mõjuvate jõudude peavektor. Projekteerides selle võrrandi puutuja τ suunale ja võttes arvesse, et tangentsiaalne kiirendus $a_t = \dot{v} = l\ddot{\varphi}$, saame

$$ml\ddot{\varphi} = -\mu\dot{\varphi} - (mg + G\cos\Omega t)\sin\varphi.$$

Uurime algul pendli vabavõnkumisi, siis $\mu = G = 0$. Tähistades $k^2 = g/l$, saame diferentsiaalvõrrandi

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin\varphi = 0. \tag{1.7}$$

See võrrand on mittelineaarne, sest $\sin\varphi$ ei ole aja suhtes lineaarne funktsioon. Võrrand (1.7) on täpne ja kirjeldab suuri võnkumisi.

Väikse nurga φ korral

$$\sin\varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} + \cdots$$

Seega väikeste nurkade puhul taandub mittelineaarne võrrand (1.7) lineaarseks võrrandiks

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Selle võrrandi lahend on

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt,$$

mis vastab järgmisele algtingimustele: $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ja $\dot{\varphi}(t_0) = 0$.

Võrrandist (1.7) mudeli koostamiseks võrrandi järgu alandamiseks on tehtud järgmised asendused:

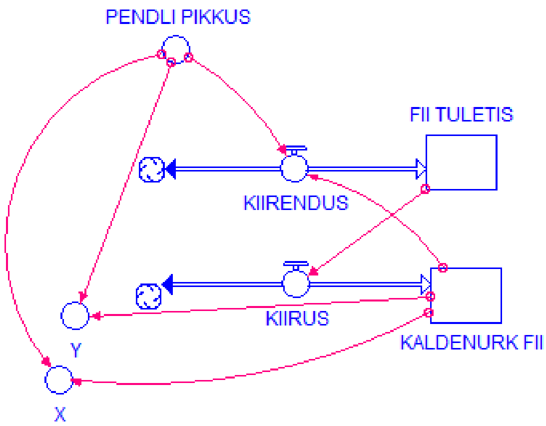
$$\dot{a} = \frac{\sin\varphi \cdot g}{l},$$
$$\dot{\varphi} = a. \tag{1.8}$$

Koordinaadid x ja y arvutatakse järgmiselt:

$$x = \sin\varphi \cdot l,$$

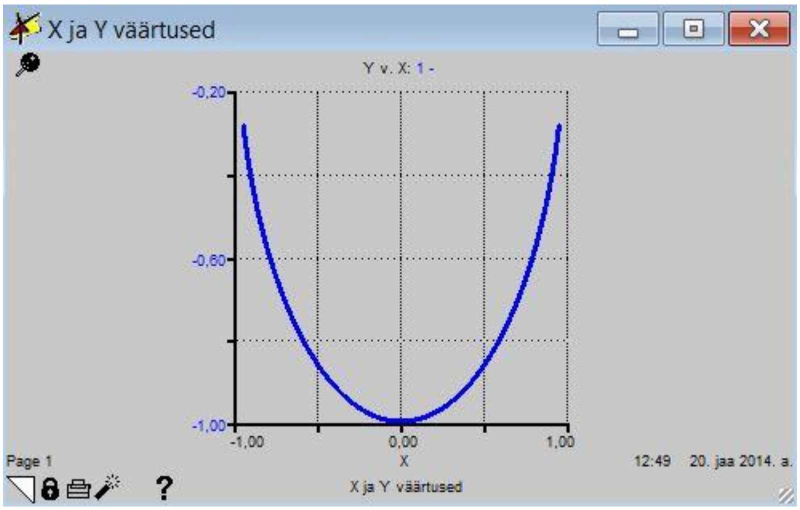
$$y = -\cos\varphi \cdot l.$$

Mudelis võrrandisüsteemi (1.8) lahendamisel on kasutatud järgnevaid algtingimusi: $\varphi(0) = 5°$ ja $\dot{\varphi}(0) = 0$. Süsteemi (1.8) põhjal koostatud mudel on kujutatud joonisel 1.8.

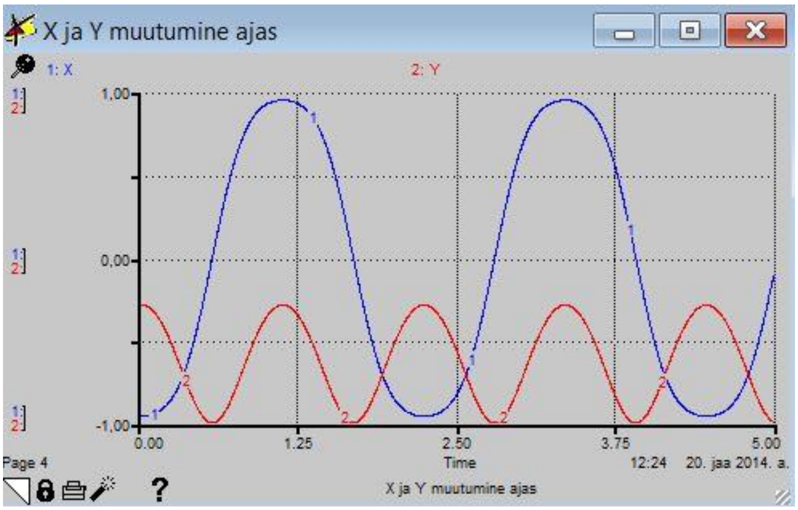


Joonis 1.8. Matemaatilise pendli mudel.

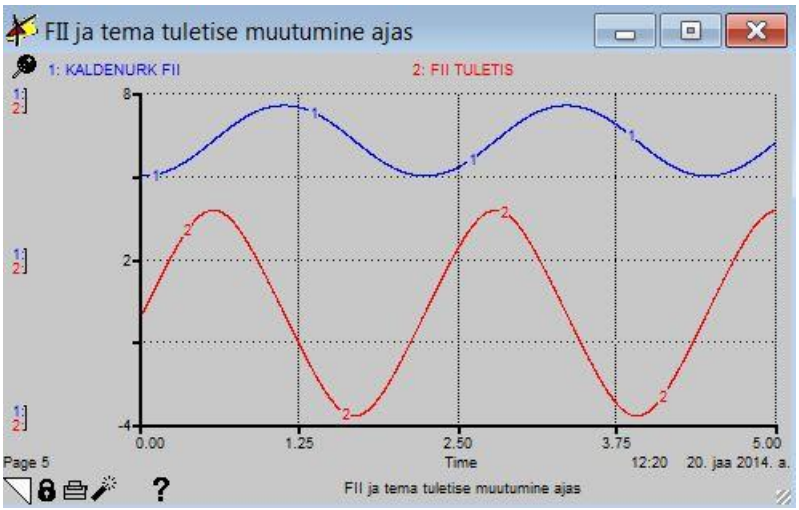
Mudelis saadud tulemused on kujutatud joonistel 1.9-1.12 pendli pikkuse $l = 1$ korral. Joonistel 1.9 ja 1.10 on kujutatud pendli koordinaadid, joonisel 1.11 kaldenurk ja tema tuletis. Kasutades mudeli tundlikkuse analüüsi pendli pikkuse muutmisel, on saadud tulemused, mis on kujutatud joonisel 1.12. Joonistel 1.13 ja 1.14 on esitatud mõningad võnkumiste graafikud erinevate algtingimuste korral, kui algkiirus $\dot{\varphi}_0 = 0$.



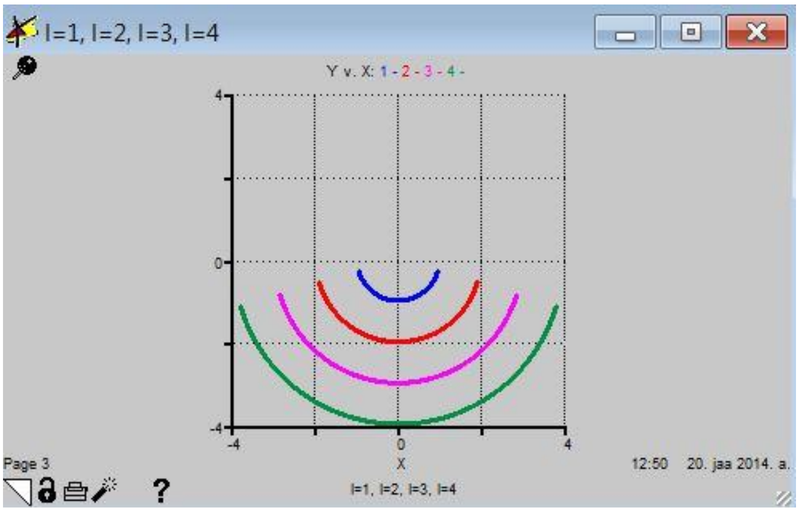
Joonis 1.9. Pendli liikumise trajektoor pikkuse $l = 1$ korral.



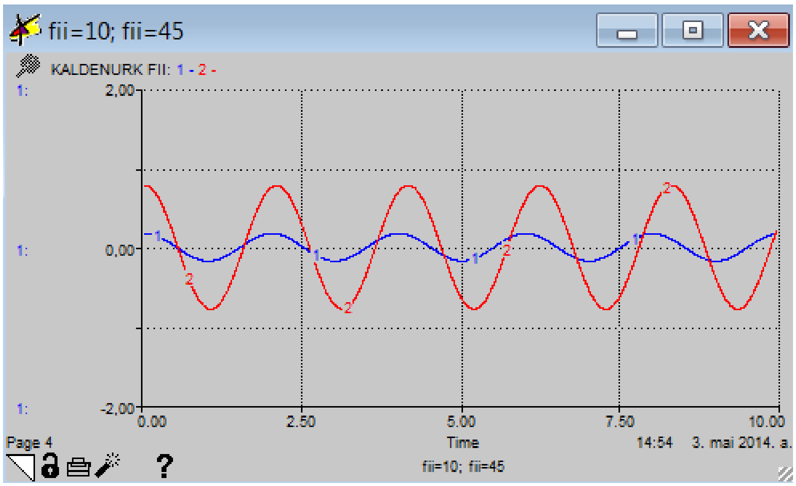
Joonis 1.10. X ja Y muutumine ajas.



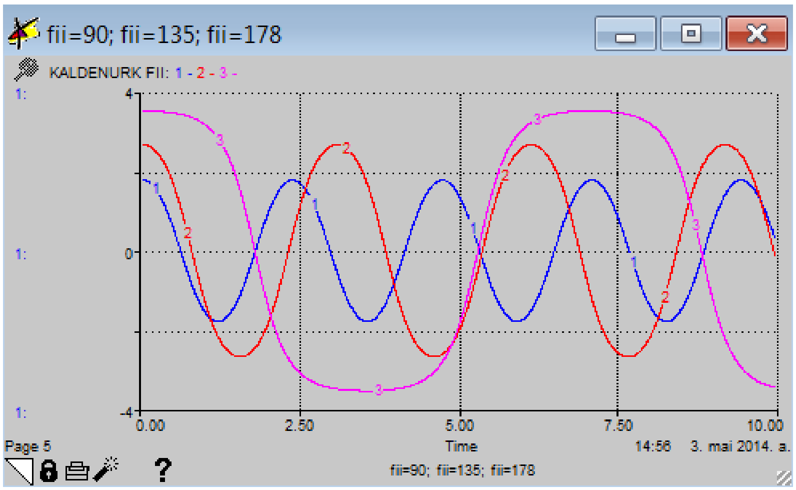
Joonis 1.11. Kaldenurga ja tema tuletise muutumine ajas.



Joonis 1.12. Tundlikkuse analüüs pendli pikkuse muutmisel.



Joonis 1.13. Tundlikkuse analüüs kaldenurga muutmisel: (1) $\varphi_0 = 10°$; (2) $\varphi_0 = 45°$.

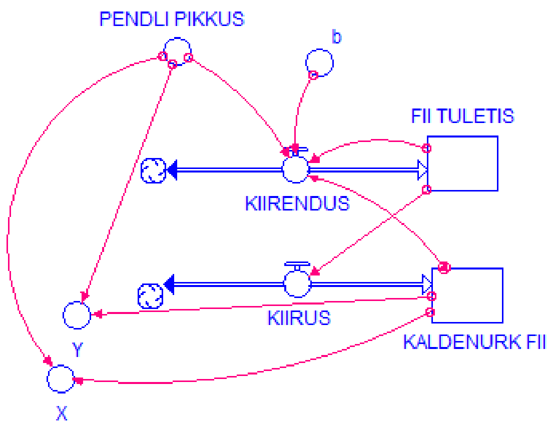


Joonis 1.14. Tundlikkuse analüüs kaldenurga muutmisel: (1) $\varphi_0 = 90°$; (2) $\varphi_0 = 135°$; (3) $\varphi_0 = 178°$.

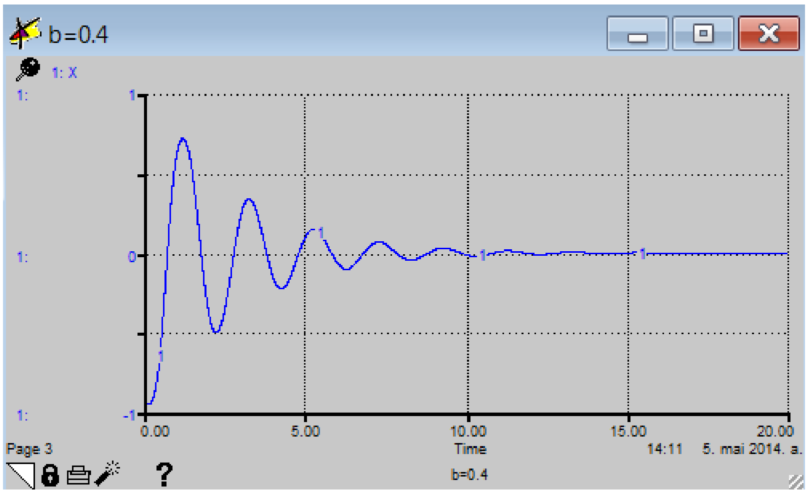
Sumbumise (hõõrdumise, õhutakistuse jm) puhul läheb ka mudel keerukamaks. Lihtsaim sumbuva võnkumise võrrand näeb välja järgmine

$$\ddot{\varphi} + 2b\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

kus b on nn sumbuvustegur. Vastav mudel on kujutatud joonisel 1.15. Kui $b < k$, siis on tegemist eksponentsiaalselt sumbuva võnkumisega. Joonisel 1.16 on kujutatud sumbuva võnkumise graafik, kui $b = 0.4$ ja $l = 1$.



Joonis 1.15. Matemaatilise pendli mudel sumbuvusteguriga.



Joonis 1.16. Matemaatilise pendli sumbuva võnkumise graafik, kui $b = 0.4$.

2 Majanduse mudelid

Selles peatükis käsitleme kolme erinevat majandusülesannet: vaatleme, kuidas maksimeerivad oma kasumit konkurentsivõimelised ettevõtted ning monopolid ja uurime turu tasakaalustamist. Mudelid koos kirjeldusega põhinevad raamatul „Dynamic Modeling“ [3], sissejuhatus aine „Mikroökonoomika“ konspektil [4].

2.1 Sissejuhatus majanduse ülesannetesse

Vastavalt konkurentsi iseloomule turul, saab turutüübid liigitada täielikuks ja mittetäielikuks konkurentsiks. Täielikku konkurentsi iseloomustavad järgmised omadused: väga palju firmasid, identne toodang, väga palju ostjaid, pole turule sisenemise ja turult väljumise takistusi ning müüjad ja ostjad omavad täielikku informatsiooni hindade kohta. Tulenevalt kõigist nimetatud täieliku konkurentsi tekkimise eeldustest ning sellise turuvormi omadustest, satub täieliku konkurentsiga turul tegutsev firma olukorda, kus ta on hinnavõtja. See tähendab, et kuna turul on väga palju firmasid ja kõik toodavad identset toodangut, ei suuda üks firma turuhinda mõjutada. Kui firma tõstab hinda, siis nõudlus puudub, kuna identset toodangut pakuvad ka teised firmad.

Tulenevalt sellest, et täieliku konkurentsiga turul tegutsev firma on hinnavõtja, siis selleks, et oma kasumit maksimeerida, saab ta valida üksnes erinevate tootmismahtude vahel. Tootmismahu maksimeerimiseks saab kasutada marginaalanalüüsi, st tuleb võrrelda piirtulu (*marginal revenue, MR*) ja piirkulu (*marginal cost, MC*). Piirkulu all mõeldakse kogukulude suurenemist, mis kaasneb seoses toodangumahu suurenemisega ühe ühiku võrra. Piirtulu tähistab muutust kogutuludes, mis tekib ühe täiendava toodanguühiku müümisel. Senimaani, kui piirtulu ületab piirkulu, tuleb tootmismahtu suurendada, sest siis kasum suureneb. Kasum on maksimaalne sellise tootmismahu juures, kus $MR = MC$. Seda tingimust nimetatakse vahel ka kasumi maksimeerimise kuldreegliks.

Kui täieliku konkurentsi tingimustes firmadel puudus võime turgu ja turuhinda mõjutada, siis monopoolsel turul on firmal väga tugev mõju hinna üle. Monopoli nimetatakse seetõttu ka hinnategijaks. See ongi peamine erinevus täieliku ja mittetäieliku konkurentsi vahel. Monopoli iseloomustavad järgmised omadused: tootjaid on üks, toodang on unikaalne ja turule on väga suured sisenemisbarjäärid.

Monopolid maksimeerivad oma kasumit põhimõtteliselt samal moel nagu firmad täieliku konkurentsi tingimustes. Kui $MR > MC$, siis on võimalik tootmismahtu suurendades kasumit suurendada. Punktis, kus $MR = MC$, on kasum maksimaalne. Erinevus seisneb selles, et kui täieliku konkurentsi tingimustes tegutsevate firmade nõudlus moodustas väikese osa turunõudlusest, siis monopoli nõudlus ongi turunõudlus (sest ta on ainuke firma).

2.2 Konkurentsivõimeline ettevõte

Eeldame, et on suur hulk ettevõtteid, mis toodavad samu tooteid, mida müüakse samal turul. Iga ettevõtte poolt saadav toodangu hulk on väga väike võrreldes selle toote nõudlusega. Selle tulemusena ei saa iga ettevõte eraldi mõjutada selle toote hinda: kui ettevõte otsustab müüa toote hinnaga, mis on pisut kõrgem kui konkurentidel, kaotab ta oma kliente. Kui ettevõte müüb alla turuhinna, siis toote nõudlus kasvab, viies toote hinna üles, seejuures sundides ettevõtet suurendama toote hinda. Sellises täielikus konkureerivas regulatsioonis on toote hind määratud iga ettevõtte jaoks. Täielik konkurents võib eeldada turgudelt lõplikke tooteid või turge toote sisendi jaoks, nagu näiteks tööjõud, kapital, materjal, energia ja informatsioon.

Lisaks täielikule konkurentsile võime eeldada, et iga ettevõte üritab maksimeerida oma kasumit. Lihtsuse mõttes võime eeldada, et on ainult üks ressurss, mida kasutatakse tootmisprotsessis. Ressursi hind, $R1$, on antud ettevõtetele ette. Toodangu kogumaksumus, C, on võrdeline ressursi kogusega.

$$C = R1 \cdot X.$$

Ettevõtted lähtuvad etteantud tootmisfunktsioonist. Tootmisfunktsioon meie ettevõtte jaoks on

$$Q = A \cdot X^{\alpha}, \tag{2.1}$$

kus A on parameeter ja α konstant.

Et kasumit maksimeerida tuleb varieerida ressursi kogust, mida kasutatakse tootmisprotsessis. Ressursi koguse suurendamisega suureneb ka toodang. See toodang müüakse turul hinnaga P ja toodab tulu

$$R = P \cdot Q.$$

Seejuures, koguste suurendamine suurendab ka toodangu maksumust. Selleks, et maksimeerida kasumit, peab konkureeriv ettevõte maksimeerima erinevust tulu ja maksumuse vahel:

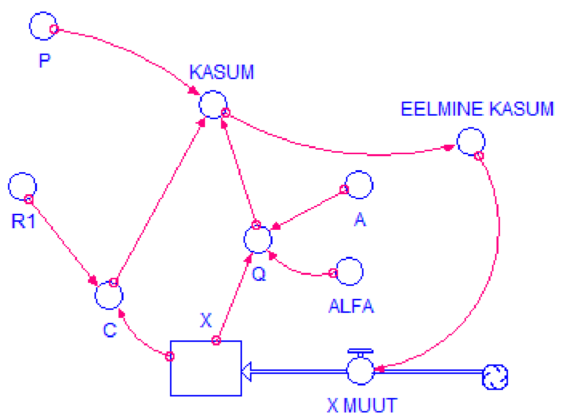
$$KASUM = R - C.$$

Konkurentsivõimelise ettevõtte mudelis kirjeldab diferentsiaalvõrrand kasumi muutust. Kui kasumi muutus on positiivne kasvava ressursi korral, siis on ettevõttele kasulik hoida see suurenevana. Kui suurenemine ressursis viib kahanemiseni kasumis, siis optimaalne ettevõtte suurus on ületatud. Seega, on olemas optimaalne tootmisfunktsiooni Q väärtus, mille korral on kasum maksimaalne.

Suhet tootmisfunktsiooni Q muutuste ja kasumi vahel võib väljendada matemaatiliselt kui tuletist. Programmis Stella arvutatakse tuletisi kahe muutuja muudu suhtena. Tuletised on kasulikud maksimumi või miinimumi leidmisel, nii et üks muutuja jõuab selleni teise muutmisel. Matemaatiliselt väljendatakse selliseid muutusi kui täistuletisi.

Stella abil saab leida täistuletisi, kuid mitte osatuletisi. Täistuletised on erinevused olekumuutujate vahel. Osatuletiste korral tuleb funktsionaalne kuju sisestada programmi.

Et leida ettevõtte optimaalne toodangu hulk, peab ettevõte järjest reguleerima ressursi hulka nii, et saavutatakse kasumi maksimum. See reguleerimisprotsess on tehtav mudelis juhtimises nimega X_MUUT. Selle optimeerimisülesande mudel on näidatud joonisel 2.1.



Joonis 2.1. Konkurentsivõimelise ettevõte mudel.

Optimeerimismudelis kontrollitakse võrreldavat piirkulu hinnaga, mis selles mudelis on konstant. Majandusteooriast on teada, et optimaalne lahend leidub juhul, kui piirkulu on võrdne hinnaga. Seda saab näidata matemaatiliselt võttes tuletise funktsioonist $KASUM$ muutuja Q järgi võrdseks nulliga.

$$\frac{\partial KASUM}{\partial Q} = \frac{\partial R}{\partial Q} - \frac{\partial C}{\partial Q}. \tag{2.2}$$

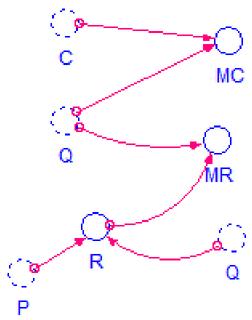
Tähistades osatuletised järgmiselt: $MR \doteq \frac{\partial R}{\partial Q}$; $MC \doteq \frac{\partial C}{\partial Q}$, saame võrrandist (2.2)

$$MR - MC = P - MC.$$

Optimaalse lahendi korral peab osatuletis võrduma nulliga. Seega,

$$P - MC = 0 \Rightarrow P = MC. \tag{2.3}$$

Joonisel 2.1 kujutatud mudel ettevõtte kasumi maksimeerimise jaoks koosneb veel ühest osast, mis on kujutatud joonisel 2.2 ja mille abil kontrollime optimaalsustingimust (2.3). Selles mudeli osas arvutatakse igas perioodis piirkulu ja piirtulu. Piirtulu on võrdne hinnaga. Kui optimumile on lähenetud, peaks piirkulu kõver tõusma piirtulu kõverani, mõlemad peavad olema võrdsed optimumiga.

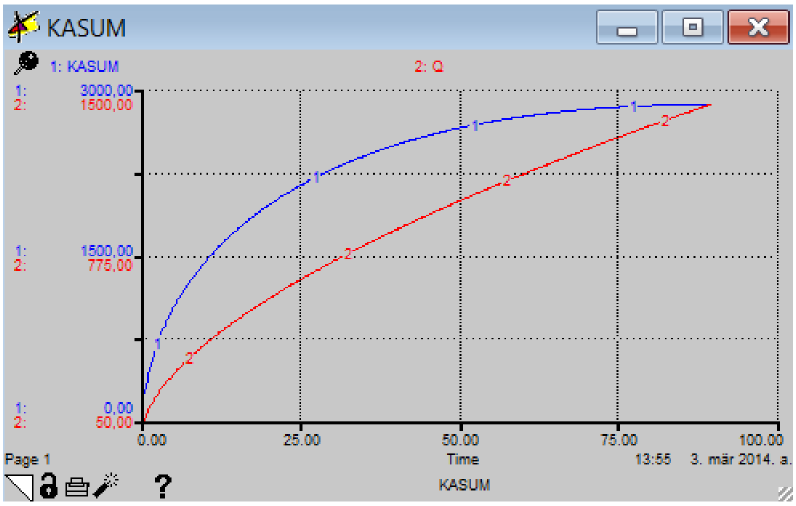


Joonis 2.2. Konkurentsivõimelise ettevõtte mudeli teine osa.

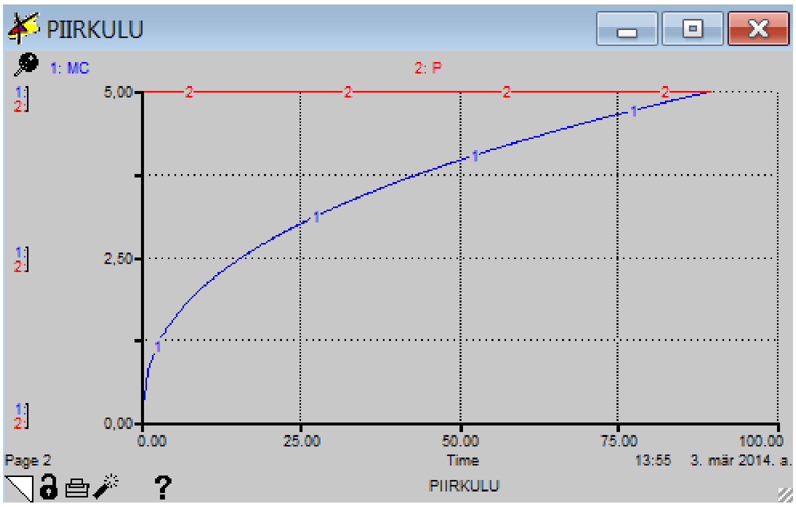
Kasumi tuletis tootmisfunktsiooni Q suhtes on leitav selles mudelis võrreldes antud kasumit eelmise sammu kasumiga, kasumimääraga üks ajasamm tagasi. Kui kasumi muut on 0 või negatiivne, siis juhtimine X_MUUT saab väärtuse 0. Kui kasumimäär on positiivne, juhtimise X_MUUT väärtus on 3.

$$X\_MUUT = \begin{cases} 3, & \Delta KASUM > 0 \\ 0, & \Delta KASUM \leq 0 \end{cases}$$

Muutuja X lubab tootmisfunktsiooni Q suurenemist läbi tootmisfunktsiooni ja samuti annab kulu arvutuse ressursi X jaoks ühikuhinnaga $R1$. Mudelis saadud tulemused on kujutatud joonistel 2.3 ja 2.4.



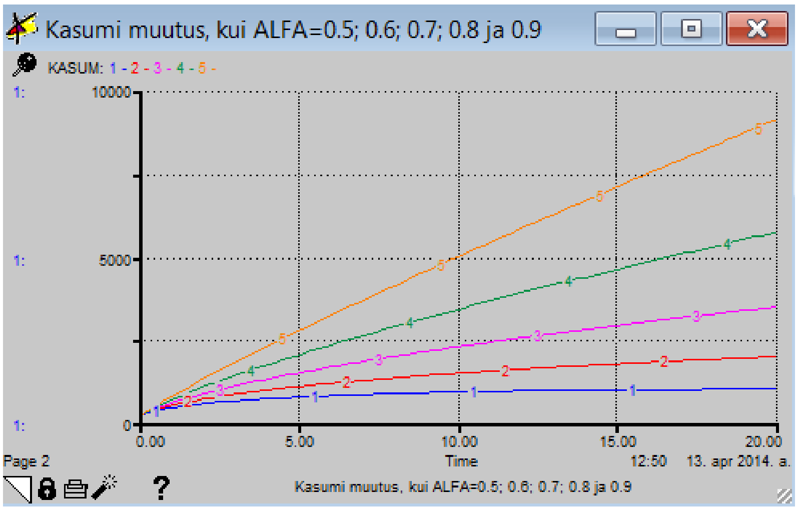
Joonis 2.3. Konkurentsivõimelise ettevõtte kasumi ja tootmisfunktsiooni graafik.



Joonis 2.4. Konkurentsivõimelise ettevõtte piirkulu ja hinna graafik.

Joonis 2.3 näitab kasumi tõusu selle algväärtusest maksimumini ressursi X kasvamisel. Joonisel 2.4 on kujutatud piirkulu tõusu kuni see on võrdne fikseeritud hinnaga maksimaalse kasumi korral. Maksimaalne kasum selles konkureerivas ettevõtte mudelis on 2878 optimaalse tootmisfunktsiooni Q väärtuse 1437 korral. Mida rohkem ettevõtteid siseneb turule, seda rohkem viiakse hinda alla ja nende ühist tootmisfunktsiooni Q üles seni, kuni kasumimäär viimases ettevõttes on 0. Kasumimäära maksimeerimine on juhitud juhtimise X_MUUT poolt. Tegelikus elus on see määr seatud keerulisemalt.

Märgime, et kasvumäär maksimumkasumini on ligikaudne. Tegelik ettevõtte kasvumäär ligikaudse sihtmärgi suuruseni on investeeringu määr uues ja asenduskapitalis, koolitatud tööjõu kättesaadavus ja naturaalsed ressursid ning arusaam, kuidas palgata neid miinimumi lähedase kuluga. Teeme mudeli tundlikkuse analüüsi, muutes tootmisfunktsioonis (2.1) asuvat parameetrit α. Kui α on väiksem kui 1, saame esitada ühte peamist majandustõde: kasvu jooksul, varem või hiljem, hakkab tulu kahanema. Kahanevate tulude skaleerimine tähendab, et suurenemine ressursi hulgas põhjustab suurenemist toodangus, aga väheneva kiirusega. Mudeli tundlikkuse analüüsis saadav tulemus on kujutatud joonisel 2.5 esimese 20 ajasammu jaoks. Jooniselt 2.5 on näha, et parameetri α suurendamisel kasvab kasum aja jooksul kiiresti.



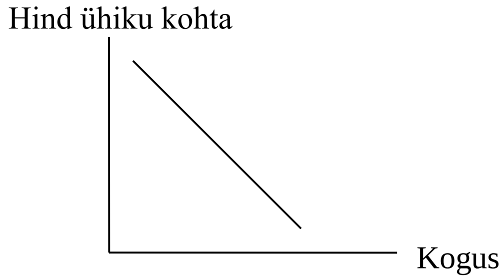
Joonis 2.5. Mudeli tundlikkuse analüüs tootmisfunktsioonis oleva parameetri $ALFA$ muutmisel.

2.3 Monopolistlik ettevõte

2.3.1 Põhimudel

Tegemist on sama ettevõtega, nagu eelmise paragrahvi ülesandes, aga ettevõte on nüüd monopolistlik. Ettevõte saab kohandada toodangu suurust ja müügihinda, et maksimeerida oma kasumit. See tähendab, et kasumid saavad olla kõrgemad kui konkurentsivõimelise ettevõtte puhul sellel turul ja toodangu hulk võib olla madalam.

Ainus erinevus võrreldes eelmise ülesandega on see, et hind on nüüd tarbitava koguse funktsioon. Suhe hinna ja tarbitava koguse hinna vahel on antud nõudluskõvera poolt. Üldine linaarne nõudluskõver on näidatud joonisel 2.6.



Joonis 2.6. Lineaarne nõudluskõver [3].

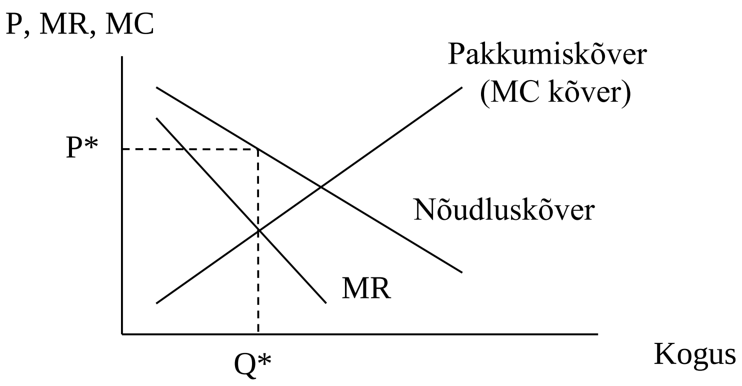
Iga toodanguühik annab kasumi. Kui tarbimine kasvab, tõuseb kasum väheneva kiirusega. Seega on nõudluskõver langev, väljendades fakti, et tarbijad maksavad vähem suurema koguse toodete eest. Selles mudelis olev nõudluskõver koostatakse nii, et oleks rahuldatud võrrand $P = MC$. Lisaks valitakse selline hind, kus kogusenõudlus jõuab nullini. See „šokihind“ on mudelis 10 ja vastab lõikepunktile nõudluskõverast ülevalpool vertikaalteljega.

Kuidas monopol valib selle kasumi maksimeerimise toodangu taset ja mis on vastav hind? Nagu ka eelmises ülesandes, saab võtta esimese tuletise kasumifunktsioonis tootmisfunktsiooni järgi. Jõuame tingimuseni, et piirtulu peab olema võrdne piirkuluga, kui ettevõte tahab saavutada kasumi maksimumi:

$$\frac{\partial KASUM}{\partial Q} = \frac{\partial R}{\partial Q} - \frac{\partial C}{\partial Q} = MR - MC.$$

$$MR - MC = 0 \Rightarrow MR = MC.$$

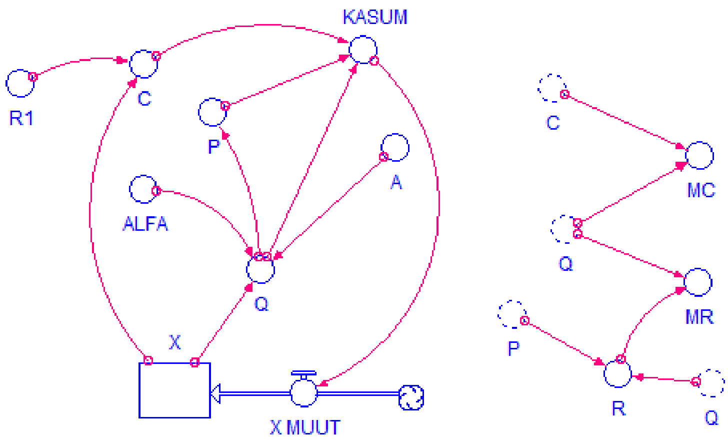
Siiski, $MR \neq P$, sest hind sõltub nõudluskõverast. Erinevus hinna ja piirkulu vahel on monopoli hinnavaru. Lahenduseks monopolisti kasumi maksimeerimise probleemile on näidatud joonisel 2.7 kui $Q*$, vastav hind on $P*$. Pakkumiskõver on monopolisti piirkulu kõver.



Joonis 2.7. Nõudluskõver ja pakkumiskõver [3].

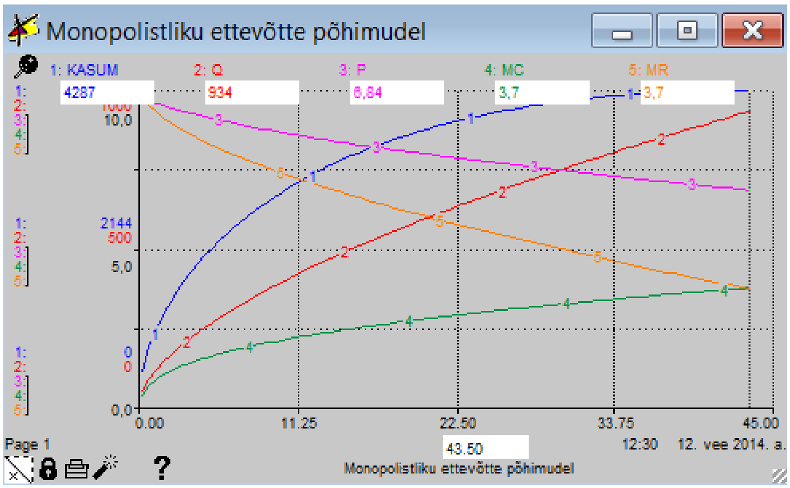
Joonis 2.7 illustreerib seda, et optimumis monopolist toodab vähem ja küsib kõrgemat hinda, kui ettevõte täielikul konkureerival turul. Tulemusena on ka kasumid suuremad.

Monopolistliku ettevõtte põhimudel on toodud joonisel 2.8. Mudel töötab seni, kuni saavutab optimaalse tulemuse, siis enam edasi ei saa arvutada ($MC = MR = 0$).



Joonis 2.8. Monopolistliku ettevõtte põhimudel.

Mudelis saadud tulemused on kujutatud joonisel 2.9. Kasum kasvab ühtlaselt kuni maksimum on saavutatud. Sellisel juhul on piirtulu võrdne piirkuluga ja alates sellest hetkest on hind ja toodang konstantsed. Niipea kui optimaalne lahend on saavutatud, pole piirkulu ja piirtulu kõverad enam mudelis defineeritud, nende suuruste arvutamisel jagatakse väärtusega $Q - DELAY(Q, DT)$, mis on 0. Kasutades programmi Stella, saame arvutada monopoli hinnavaru ja vaadelda selle muutumist ajas.



Joonis 2.9. Monopolistliku ettevõtte põhimudeli graafik.

Joonisel 2.9 on näha, et maksimumkasum 4287 dollarit on toodangu 934 ühiku jaoks, tükihinnaga 6.84 dollarit. Selles mudelis ei ole piirtulu enam täpselt võrdne hinnaga, aga saab võrdseks piirkuluga, kui kasum on maksimeeritud.

2.3.2 Monopolide maksustamine

Sageli on monopolide hind reguleeritud. Ühine monopol võib olla hinnaga reguleeritud, kus $P = MC$. Sellisel juhul on monopoli hinnavaru 0 ja ettevõte ikka teenib kasumit. Kui reguleerijad peaks vähendama hinda, mille on määranud monopol ettevõtte toodangu keskmiseks maksumuseks, siis kasumid läheksid nulli.

Ettevõtted valivad tavaliselt toodagu hulga vastavalt kasvu hulgale nende piirkulu ja keskmise kulu kõveratel. On olemas loomulikud monopolid, kuigi need töötavad langeva keskmise ja piirkulu piirkonnas. Sellesse gruppi kuuluvad elektrijaamad. Saab kergesti näidata, et madalaim hind, et reguleerida sellist loomulikku monopoli, on seal, kus keskmine kulu on võrdne keskmise tuluga, st

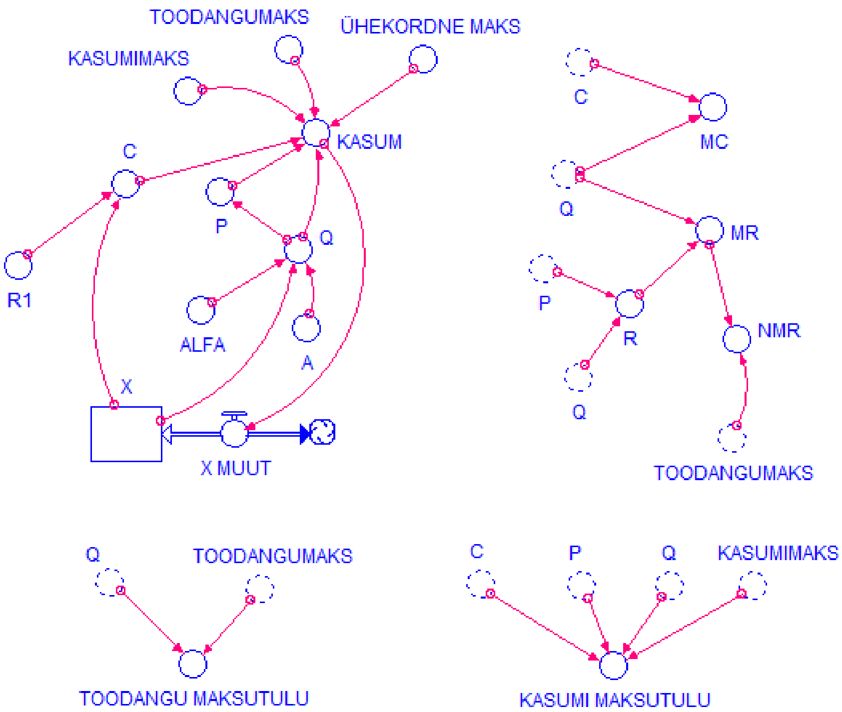
$$AC = \frac{R}{Q} = P.$$

Kui toodang on reguleeritud nii, et

$$MC = \frac{R}{Q} = P,$$

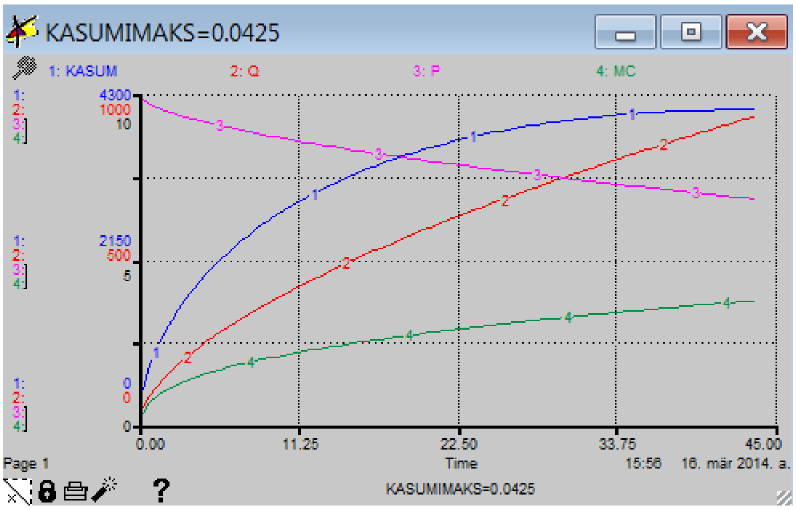
siis ettevõte kukub läbi.

Teine võimalik meetod, on lasta monopolidel valitseda ja siis nad maksustada. Järgmises mudelis uurime erinevat liiki monopolide maksustamise strateegiate mõjutusi. Kasutame makse, mis põhinevad osal kasumist, kogusepõhiseid makse ja aastast ühekordset maksu. Mudeli skeemis (joonis 2.10) on kõik maksud, neist ainult ühe kasutamisel muudame teised nullideks. Piirkulu ja piirtulu erinevad toodangu kasumi maksimeerimise tasemel maksukoguse poolest. See on arvutatud mudelis kui NMR, uus piirtulu.

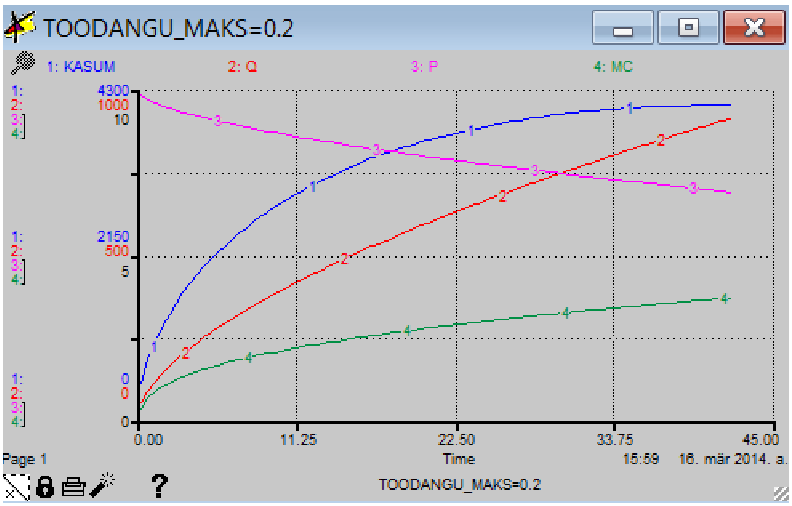


Joonis 2.10. Monopolistliku ettevõtte mudel koos maksudega.

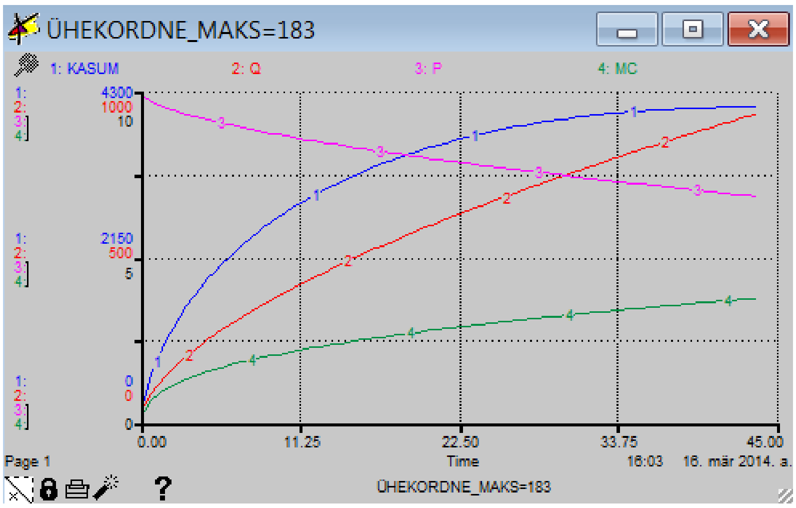
Vastavad tulemused on näidatud joonistel 2.11-2.13. Joonistel 2.11 ja 2.12 on kujutatud vastavalt kasumimaksu ja kogusepõhise maksu efekti. Joonis 2.13 näitab, et ühekordse aastamaksu efekt toodangu hinnas on olematu. Ettevõtte kasum on vähendatud maksu koguse poolt, aga kasumit maksimeeriv monopol ei muuda selle hinda või selle toodangu taset. See on puhas maksukogumise roll monopolis. Kuigi joonistel 2.11 ja 2.12 kujutatud tulemused on sarnased, siiski erinevad nad arvuliselt, nagu on näha tabelist 2.1.



Joonis 2.11. Monopolistliku ettevõtte mudel kasumimaksu kasutamisel.



Joonis 2.12. Monopolistliku ettevõtte mudel toodangumaksu kasutamisel.



Joonis 2.13. Monopolistliku ettevõtte mudel ühekordse aastamaksu kasutamisel.

kasumimaks

18:52 27. mai 2014. a. kasumimaks (kasumimaks)

Time	KASUM	Q	P	MC
37,5	4081,96	855,00	7,11	3,53
38,0	4086,16	861,76	7,09	3,55
38,5	4089,92	868,49	7,06	3,57
39,0	4093,25	875,18	7,04	3,59
39,5	4096,16	881,84	7,02	3,60
40,0	4098,66	888,47	7,00	3,62
40,5	4100,75	895,06	6,97	3,64
41,0	4102,44	901,62	6,95	3,66
41,5	4103,73	908,15	6,93	3,68
42,0	4104,63	914,64	6,91	3,69
42,5	4105,15	921,11	6,89	3,71
Final	4105,29	927,55	6,86	3,73

toodangumaks

18:59 27. mai 2014. a. toodangumaks (toodangumaks)

Time	KASUM	Q	P	MC
36,0	4080,30	834,50	7,18	3,47
36,5	4084,72	841,37	7,16	3,49
37,0	4088,66	848,20	7,13	3,51
37,5	4092,15	855,00	7,11	3,53
38,0	4095,18	861,76	7,09	3,55
38,5	4097,76	868,49	7,06	3,57
39,0	4099,90	875,18	7,04	3,59
39,5	4101,61	881,84	7,02	3,60
40,0	4102,89	888,47	7,00	3,62
40,5	4103,76	895,06	6,97	3,64
41,0	4104,21	901,62	6,95	3,66
Final	4104,25	908,15	6,93	3,68

Tabel 2.1. Kasumimaksu ja toodangumaksu kasutamisel saadud arvulised tulemused.

2.4 Turu tasakaal

Konkureerivate ettevõtete ülesandes eeldasime, et turul on suur hulk aktiivseid ettevõtteid. Tegelikkuses on majanduses nende ettevõtete arv, mis suudavad edukalt konkurentsi pakkuda, sageli pigem piiratud. Selles peatükis koostame mudeli, et määrata konkurentsivõimeliste kasumit maksimeerivate ettevõtete arvu, kasutades ette antud nõudluskõverat. Eelmiste mudelite lihtsat tootmisfunktsiooni ei saa enam kasutada. Peame kasutama keerulisemat funktsionaalset vormi. Uus tootmisfunktsioon on järgmise kujuga:

$$Q = A \cdot X^2 - \alpha \cdot X^3.$$

Majandusteooriast on teada, et kui ettevõtte toodangutase on konkurentsi tõttu langenud tasemele, kus turuhind on võrdne selle keskmise kuluga, siis kasum on null. Kasumi maksimeerimine selles punktis annab maksimaalseks kasumiks nulli. Seega, ainult selle tootmisfunktsiooni jaoks võrdub hind keskmise kuluga ja piirkuluga ettevõtte jaoks. Seda saab näidata analüütiliselt järgnevalt. Võttes AC tuletise Q suhtes võrdseks nulliga, näeme, et miinimumpunktis $MC = AC$

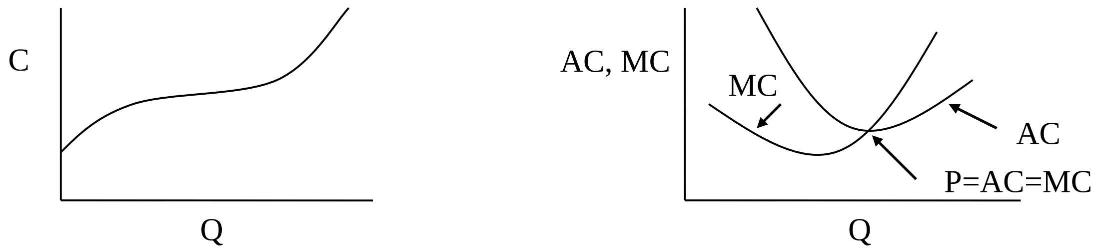
$$\frac{\partial AC}{\partial Q} = \frac{\partial (C/Q)}{\partial Q} = \frac{\frac{\partial C}{\partial Q} Q - C}{Q^2} = 0.$$

Järelikult

$$\frac{MC}{Q} = \frac{AC}{Q} \Rightarrow MC = AC. \qquad (2.4)$$

Me teame, et kasumi maksimeerimisel $P = MC$, järelikult valemist (2.4) saame, et $P = AC$ $(= MC)$. Järelikult, $KASUM = 0$, kui $MC = AC$. Need suhted on nähtavad joonisel 2.14.

a) b)

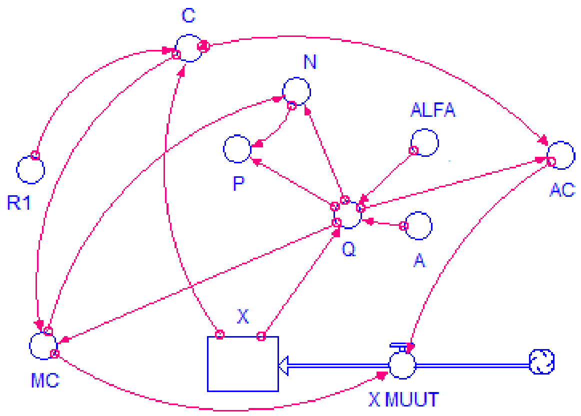


Joonis 2.14. Tootmisfunktsiooni ja kulude graafikud [3].

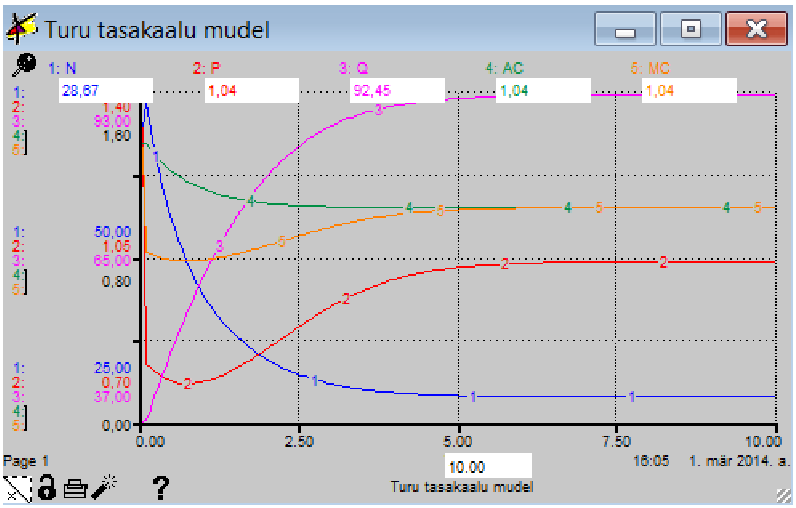
Eeldame, et kõigil N ettevõttetel sellel turul on sarnased tehnoloogiad ja sama hind nende ainsal ressursil, $R1$. Nõudluskõver avaldub seega kujul

$$P = 10 - 0.00338 \cdot Q \cdot N.$$

Ülesanne on nüüd viia vahe piirkulu ja piirtulu vahel nullini, samal ajal nõudes, et iga ettevõtte maksimeeriks oma kasumeid $(P = MC)$. Põhimuutuja X suurendamisega me saame kõik kasumid läbi ettevõtete arvu suurendamise turul. Piirkulu on võetud võrdseks toodangu hinnaga, et kindlustada maksimaalne kasum iga X jaoks. Mudeli skeem on toodud joonisel 2.15 ja tulemused joonisel 2.16.



Joonis 2.15. Turu tasakaalu mudel.



Joonis 2.16. Turu tasakaalu mudeli graafik.

Joonisel 2.16 on näha, et ettevõtete arv N läheneb arvule 29 ja see näitab jätkuvalt hinna ja MC võrdust – maksimaalset võimalikku kasumit iga ettevõtte jaoks – ja lõplikku võrdust MC ja AC vahel. Ettevõtete arv, mis siseneb turule, on stabiliseerunud – maksimaalne, kuid kasum on null igale firmale. See on turu tasakaalustamine. Ettevõtte tasakaalustamist on eeldatud alguses tingimusega $P = MC$.

Kokkuvõte

Dünaamilised süsteemid on süsteemid, mis muutuvad ajas. Selliseid ajas muutuvaid protsesse leidub nii looduses kui tehnikas. Käesolevas bakalaureusetöös on vaadeldud mehaanilisi võnkumisi vedrupendli ning matemaatilise pendli näitel. Lihtsaimad võnkumised on harmoonilised vabavõnkumised, mille puhul võib võnkumine kesta lõpmata kaua, sest sellisel süsteemil takistustegur puudub. Võnkumised hakkavad sumbuma siis, kui neile mõjub mingi välistegur, näiteks hõõrdejõud või õhutakistus. Töös on uuritud nii vabavõnkumisi, kui ka sumbuvaid võnkumisi ning vaadeldud, kuidas mõjutab pendli võnkumist kaldenurga ja pendli pikkuse muutmine.

Teises peatükis on käsitletud majanduse üht põhiküsimustest – kuidas maksimeerida oma kasumit. Kuna turge on erinevat tüüpi, siis on ka nende meetodid pisut erinevad. Antud töös on vaadeldud konkureerivaid ettevõtteid ja monopole, mille kohta on tehtud mudelid. Täielikus konkurentsis on palju ettevõtteid ning seetõttu ei saa üks firma turuhinda mõjutada, seega tuleb reguleerida oma kasumeid tootmismahtude muutmisega. Monopolistlik ettevõte on aga ainus ja saab ise hinda reguleerida, kuid selliseid ettevõtteid ka maksustatakse. Käesolevas töös on uuritud nii kasumil põhineva, toodangu kogusepõhise ning aastase ühekordse maksu efekti monopoli kasumile, kui ka maksustamata ettevõtte kasumit. Kuna majanduses ei suuda kõik ettevõtted konkurentsi pakkuda, saab koostada mudeli, mille abil leida kasumit maksimeerivate ettevõtete arv, mida on tehtud peatüki kolmandas osas.

Kirjandus

[1] I. Saveljev, *Füüsika üldkursus 1*, Valgus, Tallinn, 1978.

[2] Ü. Lepik, J. Engelbrecht, *Kaoseraamat*, Teaduste Akadeemia Kirjastus, Tallinn, 1999.

[3] B. Hannon, M. Ruth, *Dynamic Modeling*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[4] I. Saar, *Mikroökonoomika* http://www.cs.tlu.ee/filcore/wp-content/uploads/2012/05/Mikro%C3%B6konoomika.-Konspekt-2010..pdf (viimati vaadatud 29.05.2014)

Lisad

Lisa 1. Vedrupendli mudeli programmikood Stellas

Vx(t) = Vx(t-dt) + (KIIRENDUS)*dt

Vx(0) = 0

KIIRENDUS = -(JÄIKUS*X/MASS)

X(t) = X(t-dt) + (KIIRUS)*dt

X(0) = 0.2

KIIRUS = Vx

JÄIKUS = 200

MASS = 2

Lisa 2. Takistusteguriga vedrupendli mudeli programmikood Stellas

Vx(t) = Vx(t-dt) + (KIIRENDUS)*dt

Vx(0) = 0.0001

KIIRENDUS = -(JÄIKUS*X/MASS)-TAKISTUSTEGUR*Vx

X(t) = X(t-dt) + (KIIRUS)*dt

X(0) = 0.2

KIIRUS = Vx

JÄIKUS = 200

MASS = 2

TAKISTUSTEGUR = 0.98

Lisa 3. Matemaatilise pendli programmikood Stellas

FII_TULETIS(t) = FII_TULETIS(t-dt) + (KIIRENDUS)*dt

FII_TULETIS(0) = 0

KIIRENDUS = -SIN(KALDENURK_FII)*9.8/PENDLI_PIKKUS

KALDENURK_FII(t) = KALDENURK_FII(t-dt) + (KIIRUS)*dt

KALDENURK_FII(0) = 5

KIIRUS = FII_TULETIS

PENDLI_PIKKUS = 1

X = SIN(KALDENURK_FII)*PENDLI_PIKKUS

Y = -COS(KALDENURK_FII)*PENDLI_PIKKUS

Lisa 4. Sumbuvusteguriga matemaatilise pendli programmikood Stellas

FII_TULETIS(t) = FII_TULETIS(t-dt) + (KIIRENDUS)*dt

FII_TULETIS(0) = 0

KIIRENDUS = -SIN(KALDENURK_FII)*9.8/PENDLI_PIKKUS – 2*b*FII_TULETIS

KALDENURK_FII(t) = KALDENURK_FII(t-dt) + (KIIRUS)*dt

KALDENURK_FII(0) = 5

KIIRUS = FII_TULETIS

B = 0.4

PENDLI_PIKKUS = 1

X = SIN(KALDENURK_FII)*PENDLI_PIKKUS

Y = -COS(KALDENURK_FII)*PENDLI_PIKKUS

Lisa 5. Konkurentsivõimelise ettevõtte mudeli programmikood Stellas

X(t)=X(t-dt)+(X_MUUT)*dt

X(0)=1{X kogus}

X_MUUT=IF EELMINE_KASUM>0 THEN 3 ELSE 0 {X kogus ajasammul}

A=50 {Q kogus X koguse kohta}

ALFA=0.6

C=R1*X {Dollarit}

EELMINE_KASUM=KASUM-DELAY(KASUM,DT,0.1)

KASUM=P*Q-C {Dollarit}

MC=(C-DELAY(C,DT,0.1))/(Q-DELAY(Q,DT,0.1)) {Dollarit Q koguse kohta}

MR=(R-DELAY(R,DT,0.1))/(Q-DELAY(Q,DT,0.1)) {Dollarit Q koguse kohta}

P=5 {Dollarit ühiku kohta}

Q=A*X^ALFA {Q kogus}

R=P*Q {Dollarit}

R1=16 {Dollarit X ühiku kohta}

Lisa 6. Monopolistliku ettevõtte põhimudeli programmikood Stellas

X(t)=X(t-dt)+(X_MUUT)*dt

X(0)=1 {X kogus}

X_MUUT=IF (KASUM-DELAY(KASUM,DT,1))>0 THEN 3 ELSE 0 {X kogus ajasammul}

A=50 {Q kogus X koguse kohta}

ALFA=0.6

C=R1*X {Dollarit}

KASUM=P*Q-C {Dollarit}

MC=(C-DELAY(C,DT,0.01))/(Q-DELAY(Q,DT,0.01)) {Dollarit Q koguse kohta}

MR=(R-DELAY(R,DT,10))/(Q-DELAY(Q,DT,0.1)) {Dollarit Q koguse kohta}

P=10-0.00338*Q {Müügihind on Q funktsioon. Dollarit Q ühiku kohta}

Q=A*X^ALFA {Q kogus}

R=P*Q {Dollarit}

R1=16 {Dollarit X koguse kohta}

Lisa 7. Maksudega monopolistliku ettevõtte mudeli programmikood Stellas

X(t)=X(t-dt)+(X_MUUT)*dt

X(0)=1 {X kogus}

X_MUUT=IF (KASUM-DELAY(KASUM,DT,1))>0 THEN 3 ELSE 0 {X kogus ajasammul}

A=50 {Q kogus X koguse kohta}

ALFA=0.6

C=R1*X {Dollarit ajasammul}

KASUM=((P-TOODANGUMAKS)*Q-C)*(1-KASUMIMAKS)-ÜHEKORDNE_MAKS {Dollarit ajasammul}

KASUMIMAKS=0 {0.0425 on väärtus siis, kui teised maksud on nullid; dollarit kasumi dollari kohta}

KASUMI_MAKSUTULU=(P*Q-C)*KASUMIMAKS

MC=(C-DELAY(C,DT,0.01))/(Q-DELAY(Q,DT,0.1)) {Dollarit Q koguse kohta}

MR=(R-DELAY(R,DT,10))/(Q-DELAY(Q,DT,0.1)) {Dollarit Q koguse kohta}

NMR=MR-TOODANGUMAKS {Dollarit Q koguse kohta}

P=10-0.00338*Q {Müügihind on Q funktsioon. Dollarit Q ühiku kohta}

Q=A*X^ALFA {Q kogus}

R=P*Q {Dollarit ajasammul}

R1=16 {Dollarit X ühiku kohta}

TOODANGUMAKS=0 {Väärtus on 0.2 kui teised maksud puuduvad; dollarit Q ühiku kohta}

TOODANGU_MAKSUTULU=TOODANGUMAKS*Q

ÜHEKORDNE_MAKS=183 {Dollarit ajasammul}

Lisa 8. Turu tasakaalu mudeli programmikood Stellas

X(t)=(t-dt)+(X_MUUT)*dt

X(0)=1 {X kogus}

X_MUUT=AC-MC {X kogus ajasammul}

A=50 {Toodangu kogus sisendi ühiku kohta}

AC=C/Q {Dollarit Q ühiku kohta}

ALFA=13 {Toodangu kogus sisendi ühiku kohta}

C=R1*X {Dollarit}

MC=(C-DELAY(C,DT,1))/(Q-DELAY(Q,DT,0.001)) {Dollarit Q ühiku kohta}

N=(10-MC)/(0.00338*Q) {Ettevõtete arv}

P=10-0.00338*N*Q

Q=A*X^2-ALFA*X^3

R1=50 {Dollarit X ühiku kohta}

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Liina Uurman (30.07.1991),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Mehaaniliste võnkumiste ja majanduse mudelid“, mille juhendaja on Ella Puman,
   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 03.06.2014