

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Margit Ojaots

**DIFERENTSIAALGEOMEETRIA MEETODITE
RAKENDUSED DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE
UURIMISEL**

Magistritöö (30EAP)

Juhendaja: prof. Viktor Abramov, füüs.-mat. kand
Kaasjuhendaja: dotsent Olga Liivapuu, PHD

Tartu 2015

Diferentsiaalgeomeetria meetodite rakendused dünaamiliste süsteemide uurimisel

Magistritöö

Margit Ojaots

Lühikokkuvõte. Käesolev magistritöö põhineb J-M. Ginoux monograafias *Differential Geometry Applied to Dynamical Systems* [4] kirjeldatud ja artiklites [*Differential geometry and mechanics: Applications to Chaotic Dynamical Systems* [5], *Slow invariant manifold of heartbeat model* [6], *Flow curvature method applied to canard explosion* [3]] uuritud meetoditel. Selles lähenemises me vaatleme n -dimensionaalse dünaamilise süsteemi trajektoori kõverat kui kõverat Eukleidi-lises ruumis. Seda meetodit nimetatakse kõveruse muutkonna meetodiks. Punktides, kus voo kõverus on null, saame defineerida muutkonna, mida nimetatakse kõveruse voo muutkonnaks. Konkreetsel juhul rakendame seda meetodit Van der Pol'i ostsillaatorile.

Märksõnad. Van der Pol'i ostsillaator, dünaamiline süsteem, aeglane-kiire muutkond, kõveruse voo muutkond.

Applications of differential geometry methods of dynamical systems study

Master's thesis

Margit Ojaots

Abstract. This thesis is based on the methods proposed by J-M. Ginoux in the monography *Differential Geometry Applied to Dynamical Systems* [4] and studies in the series of papers [*Differential geometry and mechanics: Applications to Chaotic Dynamical Systems* [5], *Slow invariant manifold of heartbeat model* [6], *Flow curvature method applied to canard explosion* [3]]. In this approach trajectory curve, integral of any n -dimensional dynamical system, can be considered as the curve in Eukleidean n -space. This approach is called the flow curvature method. Points where the curvature of the flow is zero define a manifold that is called flow curvature manifold. We apply this method to the Van der Pol oscillator.

Key words. Van der Pol oscillator, dynamical system, slow-fast manifold, flow curvature method.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Vajalikud eelteadmised	5
1.1 Parameetiline joon	5
1.2 Dünaamiliste süsteemide alused	7
1.3 Vektorväljad ja Frenet-Serret-Bartels'i valemid	9
1.4 Kiirendus füüsikalises mõttes	14
2 Dünaamilised süsteemid	19
2.1 Dünaamilise süsteemi voog	19
2.2 Dünaamilise süsteemi lineariseerimine püsipunktide ümbruses . .	22
2.3 Dünaamilise süsteemi stabiilsus	23
2.4 Kahe- ja kolmemõõtmeliste dünaamiliste süsteemide uurimine . .	24
2.5 Dünaamiliste süsteemide erinevad liigid	28
2.6 Süsteemi üldistatud lineaarne aproksimeerimine	30
3 Dünaamiliste süsteemide aeglase muutkonna uus käsitlus	32
3.1 Kinemaatika vektorfunktsioonid	32
3.2 Trajektoori kõverus ja vääne	34
3.3 Aeglased ja kiired piirkonnad	37
3.4 Kiirenduse singulaarne aproksimeerimine	37
3.5 Van der Poli mudel	40

Sissejuhatus

Jean-Marc Ginoux tutvustab oma raamatus *Differential Geometry Applied to Dynamical Systems* [4] uut lähenemist, kus n -dimensionaalse dünaamilise süsteemi trajektoori kõverat vaadeldakse kui kõverat Eukleidilises ruumis. Seda meetodit nimetab J-G Ginoux kõveruse voo meetodiks. Selline lähenemine võimaldab meil analüütiliselt arvutada dünaamilise süsteemi trajektoori kõverus ja voog. Veel selgub, et kohtades, kus voo kõverus on null, saame defineerida muutkonna, mida nimetatakse kõveruse voo muutkonnaks. Seostades selle muutkonna otseselt n -mõõtmelise dünaamilise süsteemiga, saame selle muutkonna aeglase analüütilise võrrandi. Voo kõveruse meetodit on võimalik rakendada mitmete autonoomsetele dünaamilistele süsteemidele, nagu Van der Pol'i Mudel, Chua Mudel ja Lorenzi mudel. Samuti ka mitte-autonoomsetele dünaamilistele süsteemidele, nagu sunnitud Van der Pol'i mudel.

Käesolev magistritöö on referatiivse iseloomuga ja põhineb suuresti J-M. Ginoux ja B. Rosseto artiklil *Diferential geometry and mechanics: applications to chaotic dynamical systems* [5].

Töö koosneb kolmest peatükist. Esimeses peatükis anname parameetrilise joone mõiste, kirjeldame dünaamilist süsteemi ja meenutame Frenet-Serrat-Bartels'i valemeid ning kiiruse ja kiirenduse mõisteid. Teises peatükis üldistame kõigepealt eespool kirjeldatud dünaamilist süsteemi. Anneme lühikese ülevaate lineariseeritud süsteemist ja siis konkreetsemalt 2-mõõtmelisest ja 3-mõõtmelisest dünaamilisest süsteemist ja toome ka näite 3-mõõtmelisest dünaamilisest süsteemi kohta. Samuti kirjeldame erinevaid dünaamiliste süsteemide liike ja võtame kasutusse uue mõiste: aeglase-kiire autonoomne dünaamiline süsteem (A-KADS). Peatüki lõpus anneme ülevaate üldistatud lineariseeritud aproksimeerimisest.

Kolmandas peatükis vaatleme dünaamilisi süsteeme uues käsitluses, kus meie lähenemine baseerub mehaanika ja diferentsiaalgeomeetria mõistetel. Kõigepealt uurime kuidas on omavahel seotud eelpool defineeritud dünaamiliste süsteemide integraalid ja liikuva punkti M asukoht ajahetkel t . Samuti kirjedame aeglaseid ja kiireid piirkondi. Peatüki lõpus räägime singulaarsetest muutkondadest ja kirjeldame Van der Pol'i mudelit (ostsillaatorit).

1 Vajalikud elteadmised

1.1 Parameetiline joon

Olgu $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ funktsioon määramispiirkonnaga (a, b) , kus $a < b$, ja $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ on muutujast t sõltuvad funktsioonid. Kujutust $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ nimetatakse siledaks kujutuseks, kui kõik funktsioonid $x_i(t)$, $i \in 1, 2, \dots, n$, on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid vahemikul (a, b) . [1]

Siledat kujutust $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, kus $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, nimetatakse ruumi \mathbb{R}^n parameetriliseks jooneks. Parameetrilise joone määramispiirkond I võib olla lõplik, see tähendab, et mõlemad arvud a ja b on lõplikud arvud. Kui $I \subset \mathbb{R}$ on poollõik $I = [a, b)$ või $I = (a, b]$ või lõik $I = [a, b]$, siis kujutust $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nimetatakse parameetriliseks jooneks määramispiirkonnaga I , kui leidub sile kujutus $\tilde{\alpha} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ selline, et $I \subset \tilde{I}$ ja $\tilde{\alpha}|_I \equiv \alpha$.

Vektorfunktsioon $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ nimetatakse joone α parameetriliseks võrrandiks parameetriga t . Järgmistes osades vaatleme peamiselt tasandilist parameetrilist joont $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ või ruumilist parameetrilist joont $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Kui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ on parameetiline joon, siis ruumi \mathbb{R}^n punktihulka $\alpha(I) = \mathfrak{S}(\alpha)$ nimetatakse parameetrilise joone kujutiseks. Parameetrilise joone α puutujavektoriks punktis $\alpha(t)$, $t \in I$, nimetatakse vektorit punktis

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t); \frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right) \in \mathbb{R}_{\alpha(t)}^n,$$

kus $\mathbb{R}_{\alpha(t)}^n$ kaudu on tähistatud vektorruum vektorite alguspunktiga punktis $\alpha(t)$. Puutujavektorit $\dot{\alpha}(t)$ nimetatakse sageli ka kiirusvektoriks. (Joonis 1)

Olgu $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parameetiline joon ruumis \mathbb{R}^3 , kus $\alpha = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Vaatleme kiirusvektorit punktis $\alpha(t)$, $t \in I$

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t); \frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dx_3(t)}{dt} \right).$$

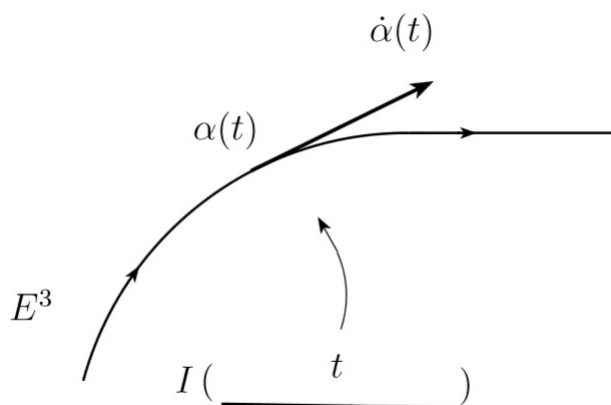
Funktsiooni $f \in \mathbb{R}$ tuletis kohal t on määratud valemiga

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{f(t + \Delta t) - f(x)}{\Delta t}.$$

Asendades eelnevas valemis funktsiooni f ruumilise parameetrilise joonega $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, saame

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)) &= \\ &= \left(\frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}, \frac{x_2(t + \Delta t) - x_2(t)}{\Delta t}, \frac{x_3(t + \Delta t) - x_3(t)}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

See on vektor alguspunktiga $\alpha(t)$ ja lõpp-punktiga $\alpha(t + \Delta t)$, mida on skalaarselt korrutatud muujuga $\frac{1}{\Delta t}$. Kui Δt väheneb, siis punkt $\alpha(t + \Delta t)$ ligineb punktile $\alpha(t)$ ja seega, kui $\Delta t \rightarrow 0$, saame kõverale puutujavektori $\left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dx_3(t)}{dt} \right)$, mille alguspunkt asub punktis $\alpha(t)$. Tihti tähistatakse kiiruse vektorit \vec{v} kaudu. [16]



Joonis 1: Kiirusvektor punktis $\alpha(t)$, $t \in I$ [16].

Kaks näidet parameetrilisest joonest ruumis \mathbb{R}^3 . Kõige lihtsamat tüüpi parameetriline joon on sirge. Olgu meil sirge $\alpha(t) = \vec{p} + t\vec{q} = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2, p_3 + tq_3)$. Näiteks, kui $p = (1, 2, 3)$ ja $q = (-1, 4, -7)$, siis $q - p = (-2, 2, -10)$ ja joon läbi punktide p ja q on määratud kõveraga

$$\alpha(t) = (1, 2, 3) + t(-2, 2, -10) = (1 - 2t, 2 + 2t, 3 - 10t).$$

Et α on sirge joon, siis kõik tema kiirusvektorid on paralleelsed ja erinevad vaid rakenduspunkti suhtes parameetri t muutumise tõttu. [17]

Kruvijoone

$$\alpha(t) = (\alpha \cos(t), \alpha \sin(t), bt)$$

kiirusvektor on

$$\dot{\alpha}(t) = (\alpha(t), -\alpha \sin t, \alpha \cos t, b).$$

Kruvijoone konstantne tõus järeldub sellest, et viimane koordinaat on konstant. [16]

1.2 Dünaamiliste süsteemide alused

Järgmine osa on kirjutatud, kasutades Ülo Lepiku ja Jüri Engelbrechti raamatut *Kaoseraamat* [9].

Olgu meil vaatluse all 3-mõõtmeline ruum seal liikuv masspunkt P , millele mõjub jõud \vec{F} . Jõud \vec{F} pole alati konstante: tema suund ja suurus võivad sõltuda ajast, kohavektorist $\vec{r} = (x, y, z)$ ja kiirusest $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Niisiis, võime üldisel juhul kirjeldada jõudu kui seitsme argumendiga funktsiooni: $\vec{F} = (t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, kus t on aeg. Meenutame Newtoni teist seadust seadust, mis ütleb, et kui kehale mõjub jõud, siis saab ta kiirenduse, mis on võrdeline selle jõuga ja pöördvõrdeline keha massiga, ehk

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1)$$

Vektor $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ on kiirendusvektor ja m on keha mass. Tähistame nüüd $\vec{f} = \frac{\vec{F}}{m}$, kus $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$. Projekteerides võrrandi (1) koordinaattelgedele saame

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \ddot{y} &= f_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \ddot{z} &= f_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (2)$$

Tehes muutujavahetuse $x = x_1, y = x_2, z = x_3, \dot{x} = x_4, \dot{y} = x_5, \dot{z} = x_6$, saame süsteemi esitada kujul

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, & \dot{x}_4 &= f_x(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \\ \dot{x}_2 &= x_5, & \dot{x}_5 &= f_y(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \\ \dot{x}_3 &= x_6, & \dot{x}_6 &= f_z(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \end{aligned} \quad (3)$$

mille üldlahendiks on

$$x_i = \phi_i(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6, \quad (4)$$

kus $C_1, C_2, C_3, \dots, C_6$ on ette antud integreerimiskonstandid.

Üldistame süsteemi (3):

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (5)$$

f_i -d on teadaolevad funktsioonid.

Võrrandisüsteemi (5) nimetatakse dünaamiliseks süsteemiks, kus $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ on faasimuutujad või sisendmuutujad, mis on defineeritud n -mõõtmelises ruumis \mathbb{R}^n . Seda ruumi nimetatakse faasiruumiks.

Kui funktsioonid f_i ei sõltu otseselt ajast, st $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, kus $i = 1, 2, 3, \dots, n$, siis sellist süsteemi nimetame autonoomseks süsteemiks.

Vaatleme võrrandite süsteemi (5), kui $f_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ehk $\dot{x}_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Sellisel juhul jäävad need punktid faasiruumis \mathbb{R}^n liikumise käigus paigale. Me nimetame neid punkte püsipunktideks või kriitilisteks punktideks. Püsipunktide faasikoordinaadid määratakse võrranditega:

$$f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Olgu meil vaatluse all järgmised algandmed:

$$x_i(t_0) = x_{i_0}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (6)$$

kus x_{i_0} on suvalised teadaolevad konstandid. Integreerides võrrandisüsteemi (5), saame funktsioonid $x_i = x_i(t)$, mis faasiruumis esitavad kõveraid. Neid kõveraid nimetatakse integraalkõverateks ehk faasitrajektorideks.

Defineerime Jacobi maatriksi:

$$\frac{\partial \vec{f}(t, \vec{x})}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Jacobi maatriksit tähistame tähega J .

Edaspidi kasutame süsteemi (5) tähistamiseks järgmist vektorkuju:

$$\dot{\vec{X}} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(t, \vec{X}), \quad (8)$$

kus $\vec{X} = x_i, i = 1, 2, \dots, n$ ja $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = [f_1(\vec{X}), \dots, f_n(\vec{X})]$ ning $\vec{X}, \vec{\mathfrak{F}} \in \mathbb{R}^n$.

Sõnastame olemasoloteoreemi (Peano teoreem): Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemi (8) parem pool $\vec{f}(t, \vec{x})$ on mingis piirkonnas D muutujate t, \vec{x} pidev funktsioon, siis läbi selle piirkonna iga punkti $(t_0, x_0) \in D$ läheb vähemalt üks integraalkõver. [9]

Sõnastame ühesuse teoreemi (Cauchy teoreem): Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemi (8) on parem pool $\vec{f}(t, \vec{x})$ ja Jacobi maatriks (7) on piirkonnas D pidevad, siis läbi selle piirkonna iga punkti $(t_0, x_0) \in D$ läheb parajasti üks integraalkõver. [9]

1.3 Vektorväljad ja Frenet-Serret-Bartels'i valemid

Järgneva osa on kirjutamisel on kasutatud Viktor Abramovi konspekti ainele Diferentsiaalgeomeetria [1] ja Ülo Lumiste raamatut *Diferentsiaalgeomeetria* [11].

Olgu $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ parameetiline joon ruumis \mathbb{R}^n . Kujutust $X : s \rightarrow X(s) \in T_{\alpha(s)}$, mis seab joone määramispiirkonna I igale punktile s vastavusse üheselt määratud ruumi puutujavektori $X(s)$ punktis $\alpha(s)$, nimetatakse vektorväljaks piki joont α . Iga vektorväli piki joont α on määratud funktsioonidega $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, kus $X_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ järgmiselt:

$$X(s) = (\alpha(s); X_1(s), X_2(s), X_3(s), \dots, X_n(s)),$$

kus vektorvälja X koordinaatfunktsioonid $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ on siledad funktsioonid.

Kui X, Y on vektorväljad piki joont α , siis vektorväljade liitmist, korrutamist arvuga, korrutamist funktsiooniga ja skalaarkorrutamist defineerime järgmiselt:

(i) $(X + Y)(s) \stackrel{def}{=} X(s) + Y(s)$

(ii) $(\lambda X)(s) \stackrel{def}{=} \lambda X(s)$

(iii) $(fX)(s) \stackrel{def}{=} f(s)X(s)$

(iv) $\langle X, Y \rangle(s) \stackrel{def}{=} \langle X(s), Y(s) \rangle,$

kus $s \in I$ ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on sile funktsioon.

Vektorvälja X pikkust joone punktist $\alpha(s)$ määratakse valemiga:

$$\|X(s)\| = \sqrt{\langle X(s), X(s) \rangle}.$$

Kui $\|X\|$ on konstantne funktsioon, siis ütleme, et vektorväli X on konstantse pikkusega vektorväli.

Kui $X = (\alpha(t); X_1, X_2, \dots, X_n)$ on vektori piki joont α , siis vektorvälja tuletis parameetri t järgi määratakse:

$$X' = (\alpha(t); \dot{X}_1, \dot{X}_2, \dots, \dot{X}_n).$$

Kui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ on parameetrliline joon, siis kiirusvektoriga $\dot{\alpha}(t)$ ja kiirendusvektoriga $\ddot{\alpha}(s)$ on määratud (siledad) vektorväljad piki joont α . Vektorvälja $\dot{\alpha}$ piki joont α nimetame joone puutujavektorväljaks ja vektorvälja $\ddot{\alpha}$ nimetame kiirendusvektorväljaks. Vektorvälja X piki joont α nimetame paralleelvektorväljaks piki joont α , kui $X(s) = (\alpha(s); c_1, c_2, \dots, c_n)$, s.o. kui vektorvälja koordinaat-funktsioonid on konstantsed arvud c_1, c_2, \dots, c_n . On ilmne, et vektorväli X on paralleelvektorväli piki joont α parajasti siis, kui $X' = \vec{0}_{\alpha(s)}$, kus $\vec{0}_{\alpha(s)}$ on nullvektor punktis $\alpha(s)$.

Olgu ruumi dimensioon kolm. Olgu $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ühikkiirusega parameetrliline joon kolmemõõtmelises ruumis, s.o. parameetri s suvalise väärtuse korral kehtib $\|\dot{\alpha}(s)\| = 1$. Puutujavektorvälja piki joont α tähistame T , s.o. $T = \dot{\alpha}$, mille väärtust joone punktis $\alpha(s)$ nimetatakse puutujavektoriks punktis $\alpha(s)$ ja tähistatakse $\tau(s)$. Kuna joon α on ühikkiirusega joon, vektorväli T on konstantse pikkusega ehk $\|T\| = 1$. Kiirendusvektorväli $T' = \ddot{\alpha}$ näitab, kui kiiresti muutub vektorväli T . Kuna T on konstantse pikkusega vektorväli, selle vektorvälja tuletis T' näitab, kui kiiresti muutub puutujavektori $\dot{\alpha}(s)$ suund, kui punkt liigub mööda joont. On ilmne, et puutujavektori suund punkti liikumisel mööda joont muutub seda kiiremini, mida rohkem on kõverdatud joon α . Järelikult kiirendusvektorväli T' on seotud joone α väga tähtsa geomeetrilise karakteristikuga, mida nimetatakse joone kõveruseks. Kui $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ on ühikkiirusega ruumiline joon, siis joone kõverusfunktsiooniks $\kappa : J \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse funktsiooni

$$\kappa(s) = \|\tau'(s)\|.$$

Kõverusfunktsiooni väärtus $\kappa(s)$ nimetatakse joone α kõveruseks punktis $\alpha(s)$.

Olgu $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ühikkiirusega parameetrliline joon. Järgmised tingimused on samaväärsed:

1. $\kappa(s) = 0, \forall s \in J$;
2. $\ddot{\alpha}(s) = 0, \forall s \in J$;
3. α on sirge.

Olgu $\alpha(s)$ ühikkiirusega parameetiline joon ja selle joone igas punktis kehtib $\kappa(s) \neq 0$. Vektorvälja N piki joont α , mis on määratud valemiga

$$N = \frac{1}{\kappa(s)} T',$$

iga $s \in J$ korral, nimetatakse joone α peanormaalketorväljaks, mille väärtust joone punktis $\alpha(s)$ nimetatakse peanormaalketoriks punktis $\alpha(s)$ ja tähistatakse $\nu(s)$. Sirget, mis läbib joone punkti $\alpha(s)$ sihivektoriga $\nu(s)$, nimetatakse joone α peanormaaliks punktis $\alpha(s)$. Parameetri s suvalise väärtuse korral kehtib:

- $\nu(s) \perp \tau(s)$
- $\|\nu(s)\| = 1$
- $\tau'(s) = \kappa(s) \cdot \nu(s)$.

Vektorvälja $B = T \times N$ piki joont β nimetatakse binormaalketorväljaks. Binormaalketorvälja väärtust joone punktis $\alpha(s)$ nimetatakse binormaalketoriks ja tähistatakse $\beta(s)$. Sirget, mis läbib punkti $\alpha(s)$ sihivektoriga $\beta(s)$ nimetatakse joone binormaaliks. Parameetri s suvalise väärtuse korral kehtib:

- $\beta(s) \perp \tau(s)$
- $\beta(s) \perp \nu(s)$
- $\|\beta(s)\| = 1$.

Järelikult vektorväljad T, N, B piki joont α moodustavad joone igas punktis $\alpha(s)$ ruumi ristreeperi $\{\tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$, s.o vektorid $\tau(s), \nu(s), \beta(s)$ on ühikvektorid, nad on paarikaupa risti ja nendest moodustatud vektorite kolmik $\{\tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ on parema käe kolmik.

Vektorite kolmik $\{\tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ nimetatakse joone α Frenet reeperiks punktis $\alpha(s)$. Vektorväljade kolmik $\{T, B, N\}$ nimetatakse Frenet reeperväljaks piki joont α või joone α liikuvaks reeperiks.

Lemma 1. Kui $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ on parameetiline joon ja X on ühikvektorväli piki joont α , siis kehtib järgmine valem

$$\langle X(t), X'(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in I$$

Tõestus:

Kuna X on ühikvektorväli, siis $\langle X(t), X(t) \rangle = 1$. Kasutades valemit

$$\langle \phi(t), \psi(t) \rangle' = \langle \phi'(t), \psi(t) \rangle + \langle \phi(t), \psi'(t) \rangle,$$

saame

$$\begin{aligned} \langle X(t), X(t) \rangle' &= \langle X'(t), X(t) \rangle + \langle X(t), X'(t) \rangle = 2\langle X(t), X'(t) \rangle = 0 & (9) \\ &\Rightarrow \langle X(t), X'(t) \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Valemeid

- $\tau'(s) = \kappa\nu(s)$
- $\nu'(s) = -\kappa\tau(s) + \chi\beta(s)$
- $\beta'(s) = -\chi\nu(s),$

kus χ on joone α vääne, nimetatakse Frenet-Serret-Bartels'i valemiteks, mis kirjeldavad kolmemõõtmelises Eukleidilises ruumis mööda pidevat ja siledat trajektoori liikuva osakese kinemaatilisi omadusi. Valemid on nime saanud kolme 19.sajandi matemaatiku järgi, kes kõik jõudsid teineteisest eraldi samale tulemusele. Jean F. Frenet (1816 – 1900) avaldas valemid 1847. aastal kaitstud doktoritöös *Sur les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroides quelconques. Programme d'une thèse sur quelque propriétés des courbes à double courbure* [14]. Aastal 1851 avaldas Joseph A. Serret (1819 – 1885) ajakirjas *Journal de mathématique pures et appliquées 1^{re} série, tome /16, p.193 – 207* samateemalise artikli [15]. Johann C.M Bartels(1769 – 1836) oma tulemusi laiemale publikule ei avaldanud, kuid jagas neid oma õpilastega. Bartels oli aastatel 1821 – 1836 Tartu Ülikooli matemaatika professor ja pani aluse diferentsiaalgeomeetria õpetamisele Tartu Ülikoolis. Aastal 1831 võitis Bartelsi õpilane Karl

Eduard Senff kuldmedali oma dissertatsiooni *Theoremata principalia e theoria curvarum et superficierum* eest, kus ta viitas Bartelsi tulemustele liikuva kolmiku kohta [13].

Tõestus:

Esimese väite, $\tau'(s) = \kappa\nu(s)$, tõestus järeldeb sihivektori $\nu(s)$ definitsioonist.

Kolmanda väite tõestuseks märkame, et $\beta'(s) \perp \beta(s)$ ja seega

$$\langle \beta(s), \beta'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \beta'(s) = \lambda\tau(s) + \mu\nu(s),$$

kus λ, μ on s funktsioonid. Kuna $\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s)$, siis

$$\beta'(s) = \tau'(s) \times \nu(s) + \tau(s) \times \nu'(s) = \kappa(\alpha)\nu(s) \times \nu(s) + \tau(s) \times \nu'(s) = \tau(s) \times \nu'(s).$$

Et $\nu'(s) \perp \nu(s) \Rightarrow \langle \nu'(s), \nu(s) \rangle = 0$ ja $\beta(s) = \tau(s) \times \nu(s) \Rightarrow -\nu(s) = \tau(s) \times \beta(s)$ ja seega

$$\beta'(s) = -\chi(\alpha)\nu(s).$$

Teise väite tõestuseks on meil vaja, et

$$\langle \nu'(s), \tau(s) \rangle = -\kappa(s) \text{ ja } \langle \nu'(s), \beta(s) \rangle = \chi(s).$$

Diferentseerides $\langle \nu(s), \tau(s) \rangle = 0$, saame

$$\langle \nu'(s), \tau(s) \rangle + \langle \nu(s), \tau'(s) \rangle = 0.$$

Esimese väite põhjal

$$\langle \nu'(s), \tau(s) \rangle + \langle \nu'(s), \kappa(s)\nu(s) \rangle = 0.$$

Et $\nu'(s) \perp \nu(s) \Rightarrow \langle \nu'(s), \nu(s) \rangle = 0$, siis $\langle \nu'(s), \tau(s) \rangle + \kappa(s) = 0$ ja sellest järeldeb, et

$$\langle \nu'(s), \tau(s) \rangle = -\kappa(s).$$

Teise liidetava kohta teame, et diferentseerides $\langle \nu(s), \beta(s) \rangle = 0$, saame

$$\langle \nu'(s), \beta(s) \rangle + \langle \nu(s), \beta'(s) \rangle = 0.$$

Kolmanda väite põhjal

$$\langle \nu'(s), \beta(s) \rangle + \langle \nu(s), -\chi(s)\nu(s) \rangle = 0.$$

Kuna $\beta(s)' \perp \beta(s)$, siis $\langle \nu'(s), \beta(s) \rangle - \chi(s) = 0$ ja sellest järeldub, et

$$\langle \nu'(s), \beta(s) \rangle = \chi.$$

Nüüd

$$\begin{aligned} \nu'(s) &= \langle \nu'(s), \tau(s) \rangle \tau(s) + \langle \nu'(s), \nu(s) \rangle \nu(s) + \langle \beta'(s), \nu(s) \rangle \beta(s) = \\ &= -\kappa \tau(s) + \chi(s) \beta(s). \end{aligned}$$

□

1.4 Kiirendus füüsikalises mõttes

Järgmine osa on kirjutatud, kasutades Ülo Lepiku ja Lembit Rootsi raamatut *Teoreetiline mehaanika* [10] ja Jüri Kirsi konspekti *Teoreetiline mehaanika II*. [8]

Kiirus on füüsikaline suurus, mis iseloomustab liikuva keha asukoha muutust ajaühikus. Punkti ühtlase sirgjoonelise kui ka ühtlas kõverjoonelise liikumise kiirus määratakse valemiga

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (10)$$

kus Δs tähistab läbitud teepikkust ja Δt on ajavahemik.

Olgu meil nüüd tegemist mitteühtlase liikumisega st punkt läbib võrdsetes ajavahemikes mittevõrdsed teepikkused. Olgu meil kõverjooneline trajektoor liikumiseadusega $s = f(t)$, kus $f(t)$ ei ole aja t lineaarfunktsioon.

Mitteühtlase liikumise korral tähistab valem (10) liikumise keskmist kiirust ja tähistatakse tähega v_k :

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Keskmine kiirus näitab kui pika teepikkuse liikuv punkt peaks läbima ajaühikus, et ühtlase kiirusega liikudes katta teepikkus Δs ajaühiku Δt jooksul. Mida lühem ajavahemik, seda paremini keskmine kiirus iseloomustab liikumist, seega on

liikumine suvalisel ajahetkel antud teatud veega. Mida väiksem ajavahemik Δt , seda väiksem on viga. Seega defineeritakse mitteühtlase liikumise kiirus hetkel t keskmise kiiruse v_k piirväärtusena, kus Δt läheneb tõkestamatult nullile:

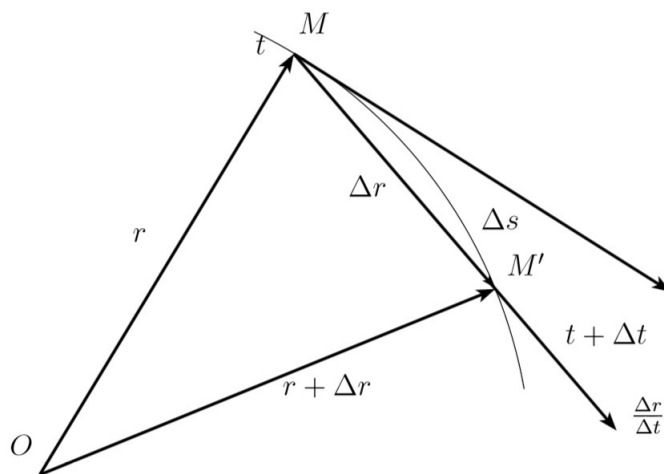
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ja tuletise definitsiooni põhjal:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s},$$

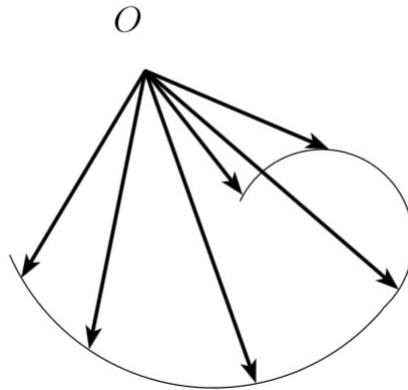
mis tähendab, et punkti kiirus on võrdne trajektoori kaarepikkuse tuletisega aja järgi [8]

Et peale arvulise väärtuse, iseloomustab kiirust veel ka tema liikumise suund, siis võime öelda, et kiirus on vektoriaalne suurus (Joonis 2).



Joonis 2: Kiirusvektor [10]

Vaatleme punkti, mis liigub mitteühtlase kiirusega mööda kõverjoonelist trajektoori. Et liikumise käigus muutuvad punkti kiirus ja suund, siis ühendades kõiki trajektoori punktidele vastavad vektorid ühisesse alguspunkti O , siis moodustavad lõpp-punktid joone, mida nimetatakse kiiruse hodograafiks(käigujooneks).



Joonis 3: Hodograaf [10]

Hodograaf annab meile parema ülevaate liikuva punkti kiiruse muutumisest aja jooksul. Analoogselt moodustatakse ka vektori hodograaf (Joonis 3).

Kiirendus on füüsikaline suurus, mis iseloomustab liikuva keha kiiruse muutust ajaühikus. Olgu ajahetkel t punkti kiiruseks \vec{v} ja hetkel $t + \Delta t$ punkti kiiruseks $\vec{v} + \Delta\vec{v}$, kus $\Delta\vec{v}$ ja $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ on kiiruse hodograafi kõõlu sihilised vektorid.

Punkti keskmiseks kiirenduseks ajavahemikus Δt nimetatakse suurust

$$\vec{a}_k = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},$$

ja punkti kiirenduseks ajahetkel t nimetatakse suurust

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Võrdusest

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}}$$

järeldub, et $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, millest omakorda $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$. Seega võime öelda, et kiirendusvektor võrdub kohavektori teist järku tuletisega aja suhtes.

Olgu meil ruumis üks kõver. Märgive sellel kaks punkti- M_1 ja M_2 - ja tõmbame nendes punktides puutujad. Tähistame puutujasihilisi ühikvektoreid vastavalt e_τ ja e_ν . Viime vektori e_ν punkti M_1 ja paneme läbi vektorite e_τ ja e_ν tasapinna. Punkti M_2 lähenemisel mööda kõverat punktile M_1 , hakkab lisatud tasapind oma asendit muutma ja ligineb piirseisule. Seda tasapinda nimetatakse kooldumistasapinnaks. Normaaltasapinnaks nimetatakse tasapinda, mis on punktis M_1 risti kõvera puutujaga. Normaaltasapinna lõikumisel kooldumistasapinnaga tekib sirge, mida nimetatakse peanormaaliks. Sirgestustasapinnaks nimetatakse tasapinda, mis punktis M_1 on risti peanormaaliga. Sirgestustasapinna lõikumisel normaaltasapinnaga tekib sirge, mida nimetatakse binormaaliks. Ja seega puutuja tekib sirgestustasapinna lõikumisel kooldumistasapinnaga. Selliselt moodustatud teljestikku nimetatakse kõvera loomulikuks teljestikuks.

Tähistame loomuliku teljestiku vastavaid ühikvektoreid nii: puutujavektor $\vec{\tau}$, normaalvektor $\vec{\nu}$ ja binormaalvektor $\vec{\beta}$. Kokkuleppe põhjal telg $\vec{\tau}$ on parameetrilise joone puutuja positiivses suunas, telg $\vec{\nu}$ on suunatud kõveruskeskpunkti poole ja telg $\vec{\beta}$ valitakse nii, et neist kolmest moodustuks parema käe kolmik

Et $\vec{v} = v\vec{\tau}$, siis $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}\vec{\tau} + v\dot{\vec{\tau}}$. Ühikvektor $\vec{\tau}$ sõltub ajast, sest punkti liikudes muutub puutuja siht ja seega

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} v,$$

kus s tähistab trajektoori kaarepikkust. Frenet-Serrat-Bartelsi valemite põhjal

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} \chi \vec{\nu} = \frac{1}{\mathfrak{R}} \vec{\nu},$$

kus χ tähistab trajektoori kõverust ja \mathfrak{R} kõverusraadiust ja

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{v}{\mathfrak{R}} \vec{\nu}$$

ja

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\mathfrak{R}} \vec{\nu}.$$

Sellest võrrandist järeldub, et kiirendusvektori \vec{a} komponendid on vaid puutuja ja peanormaali sihis.

Me nimetame tangentsiaal- ehk puutujakiirenduseks parameetrilise joone puutuja

sihilist kiirendusvektori komponenti

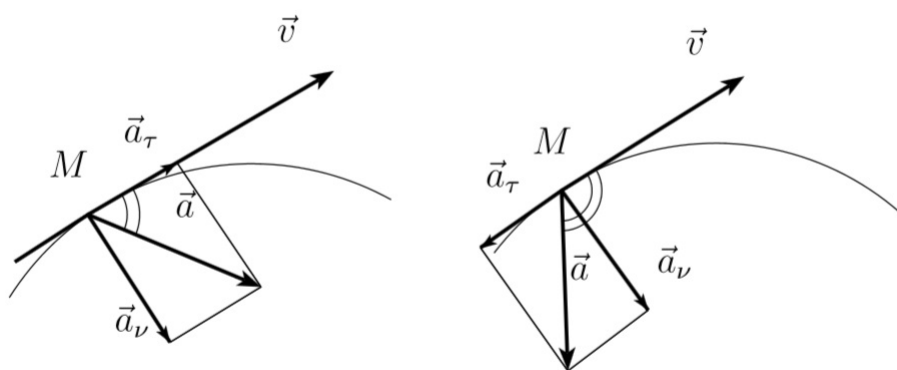
$$\vec{a}_\tau = \dot{v},$$

mis esineb alati kui punkti liikumine on mitteühtlane. Me nimetame normaalkiirenduseks parameetrilise peanormaali sihilist komponenti

$$\vec{a}_\nu = \frac{v^2}{\mathfrak{R}},$$

mis erineb nullist, kui liikumine on kõverjooneline. Lühidalt tangentsiaalkiirendus iseloomustab punkti kiiruse suuruse ja normaalkiirendus punkti suuna muutumist.

Kui meil on tegemist ühtlase sirgjoonelise liikumisega, siis on tangentsiaal- ja normaalkiirenduse väärtus null. Võttes tangentsiaalkiirenduse väärtuse võrdseks nulliga, aga normaalkiirenduse väärtuse mitte, siis toimub liikumine ühtlase kiirusega mööda kõverjoonelist trajektoori. Vastupidisel juhul, kui tangentsiaalkiirenduse väärtus ei võrdu nulliga, kuid normaalkiirenduse väärtus võrdub, siis liigutakse sirgjoonelisel trajektooriga mitteühtlase kiirusega. Kui tangentsiaalkiirenduse väärtus on suurem nullist, siis liikumine kiireneb, kui väiksem nullist, siis aeglustub. Lõpuks, kui mõlema kiirenduse väärtused ei võrdu nulliga, siis liikumine toimub kõverjoonelisel trajektooriga mitteühtlase kiirusega. Ja siis vastavalt tangentsiaalkiirenduse väärtusele, liikumine on kas kiirenev või aeglustuv (Joonis 4).



Joonis 4: Tangentsiaal- ja normaalkiirendus [10]

2 Dünaamilised süsteemid

Antud peatüki on kirjutamisel on kasutatud nii Jean-Marc Ginoux monograafiat *Differential Geometry Applied to Dynamical Systems* [4] kui ka Jean-Marc Ginoux ja Bruno Rossetto artiklit *Differential geometry and mechanics applications to chaotic dynamical systems* [5].

2.1 Dünaamilise süsteemi voog

Üldistame nüüd süsteemi, mis on kirjutatud punktis (1.2). Esitame selle süsteemi järgmisel kujul: olgu meil antud n -mõõtmeline ruum, millel on antud faasimuutujad $\vec{X} = \{x_i, i = 1, \dots, n\}$.

Olgu meil vaatluse all diferentsiaalvõrrandite süsteem, mis on määratud ruumi \mathbb{R}^n kompaktsel alamhulgal E :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}), \quad (11)$$

kus $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = [f_1(\vec{X}), f_2(\vec{X}), \dots, f_n(\vec{X})]^t \in E \subset \mathbb{R}^n$ defineerivad hulgas E sileda kiirusvektorvälja, mille komponendid $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ on siledad funktsioonid. Selle süsteemi lahendiks on parameetiline joon $\vec{X}(t)$, mille väärtused määravad dünaamilise süsteemi oleku. Parameetrilist joont $\vec{X}(t)$ nimetatakse ka trajektooriks. Kui kiirusvektorvälja komponendid ei sõltu ajast t , siis öeldakse, et see süsteem on autonoomne.

Meenutame siinkohal süsteemi lahendi ühesuse ja olemasolu teoreeme. Kui $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$ ja $\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$, kus $\vec{X}_0 \in E \subset \mathbb{R}^n$. Kui $\vec{\mathfrak{F}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on C^1 - funktsioon \vec{X}_0 ümbruses, siis süsteemil leidub parajasti üks lahend. See tähendab, et leidub $\alpha > 0$ ja süsteemi ühine lahend $\vec{X} : (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$, mis rahuldab algtingimust $\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$.

Autonoomne dünaamiline süsteem võib olla esitatud järgmisel kujul:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Definitsioon 2. Me nimetame muutkonnaks $M \subset \mathbb{R}^n$ punktide hulka ruumis \mathbb{R}^n ,

mis rahuldavad m võrrandiga süsteemi:

$$\phi(\vec{X}) = 0,$$

kus $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$ ja $\vec{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \in E \subset \mathbb{R}^n$.

Muutkonda M nimetatakse diferentseeruvaks, kui ϕ on sile kujutus ja süsteemi Jacobi maatriksi astak $\text{rank}(J(\phi)) = m$, iga $\vec{X} \in M$. Diferentseeruva muutkonna M iga punkti \vec{X} korral on defineeritud $(n - m)$ -mõõtmeline puutujaruum $T_{\vec{X}}M$. Kui ruumi dimensioon on 2, siis muutkonnaks on kõverjoon tasandil, ruumi \mathbb{R}^3 jaoks muutkonnaks on pind ruumis.

Definitsioon 3. Olgu $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$ dünaamiline süsteem, kus $\vec{X} \in E \subset \mathbb{R}^n$ ja $\vec{X}(\vec{X}_0, t)$ on dünaamilise süsteemi trajektoor, mis rahuldab algingimust $\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$. Vektorväli $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$ tekitab voo $\Phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ järgmiselt: $\Phi_t(\vec{X}_0) = \vec{X}(\vec{X}_0, t)$ ja täidetud on järgmised tingimused:

- (i) $\Phi_t(\vec{X}_0)$ on C^r funktsioon,
- (ii) $\Phi_0(\vec{X}_0) = \vec{X}_0$,
- (iii) $\Phi_{t+s}(\vec{X}_0) = \Phi_t(\Phi_s(\vec{X}_0))$.

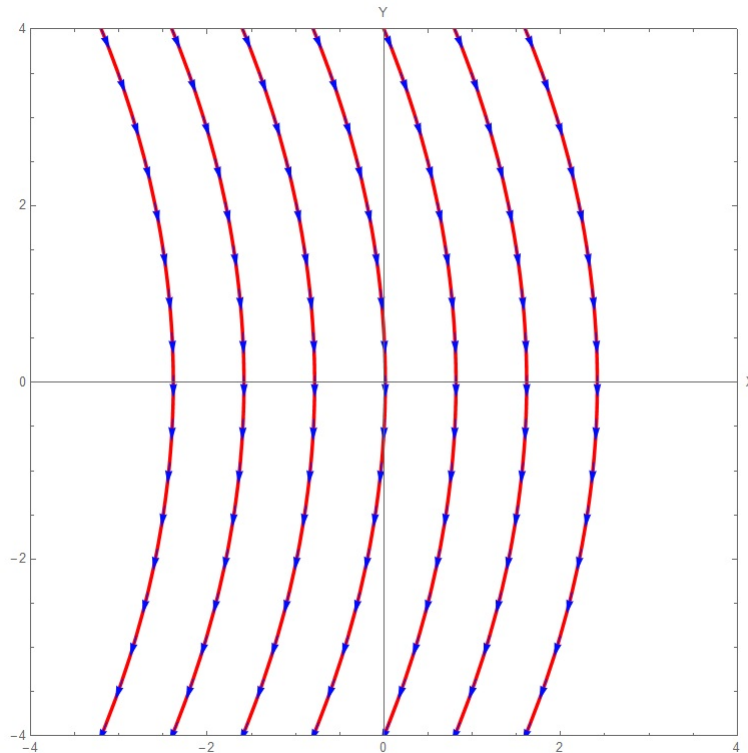
Vaatleme näidet keha vaba langemise kohta. On teada, et kehad langevad vaakumis ühesuguse kiirendusega. Vaba langemise kiirendus on g , selle ligikaudne väärtus Maa pinnal on $9.8m/s^2$ ja see ei sõltu langeva keha massist. Õhus langevate kehade kiirendust mõjutab ka õhutakistus.

Langegu keha ilma algkiirusega kõrguselt z . Kasutades Newtoni II seadust, saame:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} \left(\begin{array}{c} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{array} \right) = \vec{\mathfrak{F}} \left(\begin{array}{c} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} y \\ -g \end{array} \right).$$

Algingimused on kujul $x(0) = 0$ ja $\dot{x}(0) = 0$. Need võivad olla esitatud ka järgmiselt: $x(0) = 0$ ja $y(0) = 0$. Süsteemi voog on $(x(t), y(t)) = (-\frac{1}{2}gt^2, -gt)$ või $y^2 + 2gx = c$, kus $c = y^2(0) + 2gx(0)$. Selle süsteemi voog on esitatud joonisel algingimustega $(x(0), y(0)) = (\pm 0.8k, 4)$, kus $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (Joonis 5).

Meenutame siinkohal veelkord, et dünaamilise süsteemi püsipunktideks nimetatakse punkte \vec{X}^* , mille jaoks kehtib järgmine seos $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}^*) = \vec{0}$. Nendes punktides trajektoori puutujat ei saa defineerida.



Joonis 5: Keha vaba langemine. [4]

Definitsioon 4. Voo $\Phi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ globaalset invariantset hulka S , mis on seotud dünaamilise süsteemiga (11), defineeritakse kui alamhulka $S \subset \mathbb{R}^n$ selliselt, et

$$\Phi_t(\vec{X}) \in S$$

iga $\vec{X} \in S$ ja $t \in \mathbb{R}$ korral.

Definitsioon 5. Voo $\Phi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokaalset invariantset hulka S , mis on seotud dünaamilise süsteemiga (11), defineeritakse kui alamhulka $S \subset \mathbb{R}^n$ selliselt, et

$$\Phi_t(\vec{X}) \in S$$

iga $\vec{X} \in S$ ja $|t| < T$ korral, kus $T > 0$.

Definitsioon 6. Kõveruse voo muutkond defineeritakse valemiga

$$\phi(\vec{X}) = \dot{\vec{X}} \times (\ddot{\vec{X}} \times \overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{X}} \dots \overset{(n)}{\vec{X}}) = \det(\dot{\vec{X}}, \ddot{\vec{X}}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{X}} \dots \overset{(n)}{\vec{X}}) = 0,$$

kus $\vec{X}^{(n)}$, $\vec{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$, on n järku tuletis aja järgi.

2.2 Dünaamilise süsteemi lineariseerimine püsipunktide ümbruses

Olgu meil vaatluse all dünaamiline süsteem $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$, kus $\vec{X} \in E \subset \mathbb{R}^n$. Vektorvälja $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$ Tayloriga rittaarendus püsipunkti \vec{X}^* ümbruses on

$$\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}^*) + D_{\vec{X}}\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}^*)(\vec{X} - \vec{X}^*) + O[(\vec{X} - \vec{X}^*)^2].$$

Maatriks $D_{\vec{X}}\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = \left(\frac{\partial f_i(\vec{X})}{\partial x_j}\right) = J(\vec{X})$ on dünaamilise süsteemi Jacobi maatriks.

Lihtsuse mõttes vaatleme kahemõõtmelist dünaamilist süsteemi $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$, kus $\vec{X} = [x, y]^t \in E \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = [f(\vec{X}), g(\vec{X})]^t \in \mathbb{R}^2$ ehk

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (12)$$

Arendame funktsioonid f ja g Tayloriga ritta püsipunkti $\vec{X}^* = (x_0, y_0)$ ümbruses, st

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{y=y_0} (y - y_0) + \dots$$

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\Big|_{y=y_0} (y - y_0) + \dots$$

Kuna \vec{X}^* on püsipunkt, siis $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, järelikult süsteemi (12) kuju on

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{y=y_0} (y - y_0)$$

$$\dot{y} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\Big|_{y=y_0} (y - y_0).$$

2.3 Dünaamilise süsteemi stabiilsus

Kui $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$, kus $A \in Mat(n, n)$, ja $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ ning λ on arv, siis arvu λ nimetatakse maatriksi A omaväärtuseks ja vektorit \vec{x} sellele omaväärtusele vastavaks omavektoriks. Võrrandit $\det(A - \lambda E) = 0$, kus on n -järku ruutmaatriks, nimetatakse maatriksi A karakteristlikuks võrrandiks ja polünoomi $p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0$, kus kordajad $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_0$ on maatriksi A elementidest moodustatud avaldised.

Cayley-Hamiltoni teoreem väidab, et kui $A \in Mat(n, n)$ ja $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, siis $p(A) = 0$, st maatriks rahuldab oma karakteristlikku võrrandit.

Sõnastame Ljapunovi stabiilsusteoreemi. Olgu meil vaatluse all dünaamiline süsteem $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$, kus $\vec{X} \in E \subset \mathbb{R}^n$ ja püsipunkt \vec{X}^* esitub kujul $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}^*) = \vec{0}$. Selle süsteemi Jacobi maatriks, mis on arvutatud püsipunktis \vec{X}^* on $J(\vec{X}^*)$. Püsipunkt \vec{X}^* on stabiilne, kui kõigi maatriksi $J(\vec{X}^*)$ omaväärtuste $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ reaalsad on negatiivsed, st $Re(\lambda_i) < 0$.

Tähistame ruumis \mathbb{R}^n liikuva punkti M algasendit hetkel t_0 punktiga M_0 ja lõpphetke t_1 punktiga M_1 . Muutes punkti M_0 asendit, saame uue, häiritud trajektoori, mis võib kulgeda põhitrajektoori läheduses või eemaldub sellest. Esimesel juhul nimetame liikumist stabiilseks, teisel juhul ebastabiilseks.

Olgu meil autonoomsete võrrandite süsteem

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}),$$

kus (\vec{X}) ja $\vec{\mathfrak{F}}$ on vektorid ruumis \mathbb{R}^n . Sellel süsteemil leidub trajektoor $\vec{X} = \vec{X}(t)$, mis lähtub punktist $\vec{X}_0 = \vec{X}(t_0)$. Olgu häiritud trajektoor $\vec{X}^* = \vec{X}^*(t)$, mis rahuldab võrrandit

$$\frac{d\vec{X}^*}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}^*).$$

Me nimetame liikumist $\vec{X} = \vec{X}(t)$ stabiilseks, kui suvalise $\varepsilon > 0$ korral eksisteerib $\delta(\varepsilon) > 0$, nii et mingi teise lahendi $\vec{X}^* = \vec{X}^*(t)$ korral kehtib

$$|\vec{X}(t_0) - \vec{X}^*(t_0)| < \delta,$$

ja iga $t > 0$ on täidetud võrratus

$$|\vec{X}(t) - \vec{X}^*(t)| < \varepsilon.$$

Me nimetame liikumist $\vec{X} = \vec{X}(t)$ asümptootiliselt stabiilseks, kui ta on stabiilne ja täidetud on järgmine tingimus:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{X}(t) - \vec{X}^*(t)| = 0.$$

2.4 Kahe-ja kolmemõõtmeliste dünaamiliste süsteemide uurimine

Vaatleme 2-mõõtmelist dünaamilist süsteemi $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$, kus $\vec{X} = [x, y]^t \in E \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = [f(\vec{X}), g(\vec{X})]^t \in E \subset \mathbb{R}^2$ ja $J(\vec{X}^*)$ on selle süsteemi Jacobi maatriks punktis \vec{X}^* :

$$J(\vec{X}^*) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right) \Big|_{\vec{X}=\vec{X}^*}.$$

Arvutame maatriksi $J(\vec{X}^*)$ karakteristliku polünoomi:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(J - \lambda E) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \lambda \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = \lambda^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \cdot \lambda + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = \lambda^2 - \text{Tr}(J) \cdot \lambda + \det(J) = 0 \end{aligned}$$

Omaväärtused λ_i on Cayley-Hamiltoni karakteristliku võrrandi juured:

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \det(J) = 0.$$

Toome sisse järgmised tähistused

$$p = \text{Tr}(J) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \Big|_{\vec{X}=\vec{X}^*} = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (13)$$

$$q = \det(J) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \Big|_{\vec{X}=\vec{X}^*} = \lambda_1 \lambda_2, \quad (14)$$

$$\Delta = p^2 - 4q = \text{Tr}(J)^2 - 4 \det(J). \quad (15)$$

- Kui $\Delta > 0$, siis omaväärtused on erinevad reaalarvud.
- Kui $\Delta = 0$, siis omaväärtused on võrdsed reaalarvud.
- Kui $\Delta < 0$, siis üks omaväärtus kompleksarv ja teine selle kaaskompleks.

(i) $\Delta \geq 0, q > 0$ ja $p > 0$

Kui mõlemad omaväärtused on positiivsed reaalarvud, siis püsipunkt \vec{X}^* on asümptootiliselt ebastabiilne sõlm (repeller).

(ii) $\Delta > 0$ ja $q < 0$

Kui mõlemad omaväärtused on vastandmärgilised reaalarvud, siis püsipunkt \vec{X}^* on sadul-punkt.

(iii) $\Delta \geq 0, q > 0$ ja $p < 0$

Kui mõlemad omaväärtused on negatiivsed reaalarvud, siis püsipunktpunkt \vec{X}^* on asümptootiliselt stabiilne sõlm (atraktor).

(iv) $\Delta < 0$

Kui mõlemad omaväärtused on kompleksarvud ja $p < 0$ ($p > 0$), siis püsipunkt \vec{X}^* on asümptootiliselt stabiilne (ebastabiilne) fookus.

(v) $\Delta < 0$ ja $p = 0$

Kui mõlemad omaväärtused on imaginaarsed, siis püsipunkt \vec{X}^* on tsepter, stabiilne, kuid mitte asümptootiliselt stabiilne.

Nüüd olgu meil vaatluse all 3–mõõtmeline dünaamiline süsteem $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$, kus $\vec{X} = [x, y, z]^t \in E \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = [f(\vec{X}), g(\vec{X}), h(\vec{X})]^t \in E \subset \mathbb{R}^3$ ja $J(\vec{X}^*)$ on selle süsteemi Jacobi maatrks punktis \vec{X}^* :

$$J(\vec{X}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \Big|_{\vec{X}=\vec{X}^*}.$$

Leiame selle maatriksi karakteristlik polünoomi:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\right) \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \lambda\right) \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \lambda\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \lambda\right) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \lambda\right) \\
&- \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\right) \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \lambda - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} \lambda + \frac{\partial f}{\partial x} \lambda^2 - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} \lambda + \frac{\partial g}{\partial y} \lambda^2 + \frac{\partial h}{\partial z} \lambda^2 \\
&- \lambda^3 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} \lambda + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} \lambda \\
&- \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \lambda - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} \lambda = -\lambda^3 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) \lambda^2 \\
&- \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y}\right) \lambda + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} \\
&- \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} = -\lambda^3 + p_2 \lambda^2 - p_1 \lambda + p_0.
\end{aligned}$$

Antud polünoomi võime esitada kujul

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \text{Tr}(J)\lambda^2 - M(J)\lambda + \det(J),$$

kus $p_2 = \text{Tr}(J) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$, $p_0 = \det(J)$ on matriksi J determinat ja $p_1 = M(J)$ on matriksi J peamiinorite kordajate summa, ehk

$$p_1 = M(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Karakteristliku võrrandi $\lambda^3 - \text{Tr}(J)\lambda^2 + M(J)\lambda - \det(J) = 0$ juurteks on matriks $J(\vec{X}^*)$ omaväärtused.

Omaväärtuste olemust kirjeldab Girolamo Cardano diskriminant:

$$R = 4P^3 + 27Q^2, \quad (16)$$

kus $P = p_1 - \frac{p_2^2}{3}$ ja $Q = -\frac{2p_2^3}{27} + \frac{p_2 p_1}{3} - p_0$.

- Kui $R < 0$, siis kõik omaväärtused on reaalarvud ja erinevad.
- Kui $R = 0$, siis kõik omaväärtust reaalarvud, nendest kaks on korduval ja üks erinev.

- Kui $R > 0$, siis üks omaväärtus on reaalarv, teine on kompleksarv ja kolmas selle kaaskompleksarv.
- (i) $R \leq 0, p_0 > 0$ ja $p_2 > 0$
Kui omaväärtused on positiivsed reaalarvud, siis püsipunkt \vec{X}^* on ebastabiilne sõlm.
- (ii) $R \leq 0, p_0 > 0$ ja $p_2 < 0$
Kui omaväärtused on negatiivsed reaalarvud, siis püsipunktpunkt \vec{X}^* on stabiilne sõlm.
- (iii) $R \leq 0$
Kui omaväärtused on vastandmärgilised reaalarvud, siis püsipunkt \vec{X}^* on sadul-punkt.
- (iv) $R > 0$
Kui kaks omaväärtust on kaaskompleksarvud ja üks on positiivne reaalarv (negatiivne reaalarv), siis püsipunktpunkt \vec{X}^* on fookus (sadul-fookus).
- (v) $R > 0$
Kui kõik omaväärtused on kompleksarvud, siis püsipunkt \vec{X}^* on tšenter.

Näide 7. Sadul-fookus

Olgu meil antud järgmine dünaamiline süsteem:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \vec{\mathfrak{F}} \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y \\ -x - y \\ -2z \end{pmatrix}.$$

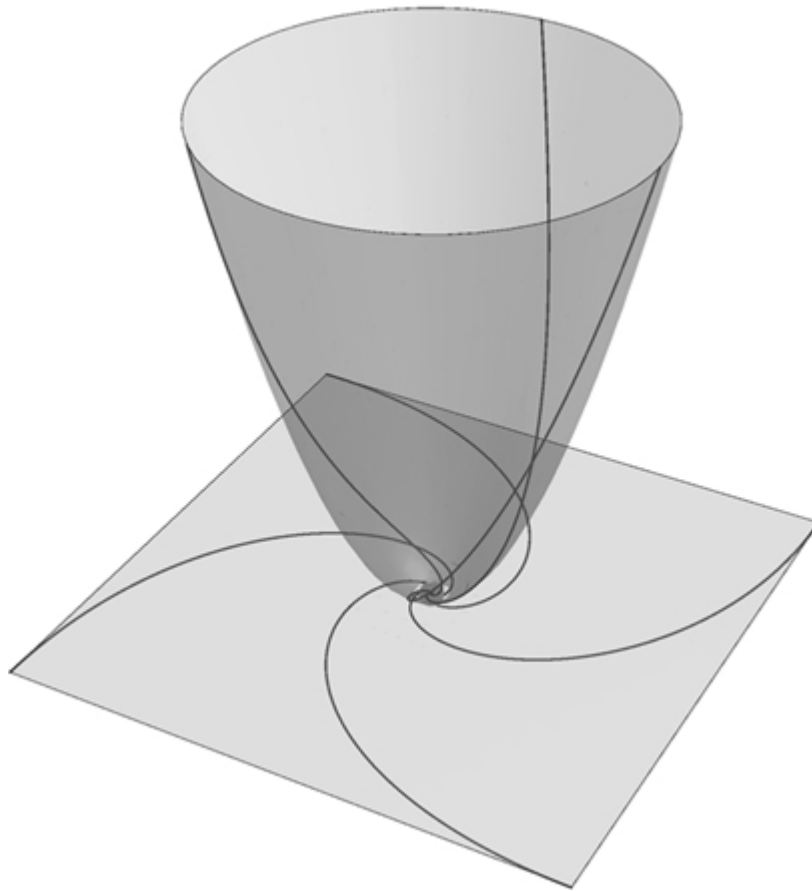
Selle süsteemi Jacobi maatriks on kujul:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Jacobi maatriksi jälg on $p_2 = Tr(J) = -4$, determinant $p_0 = \det(J) = -4$ ja peamiinorid $p_1 = M(J) = 6$.

Võrrand (16) saab kuju

$$R = 4P^3 + 27Q^2 = 16 > 0,$$



Joonis 6: Sadul-fookus [4]

kus $P = p_1 - \frac{p_2^2}{3} = \frac{2}{3}$ ja $Q = -\frac{2p_2^3}{27} + \frac{p_2 p_1}{3} - p_0 = \frac{20}{27}$. Seega kaks omaväärtust on kaaskompleksarvud ja üks reaalne ja negatiivne ($\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \lambda_3 = -2$) ja püsipunkt $\vec{X}^*(0, 0, 0)$ on sadul-fookus.

2.5 Dünaamiliste süsteemide erinevad liigid

Dünaamilist süsteemi (11) nimetatakse lineaarseks, kui vektorvälja $\vec{f}(\vec{X})$ kõik komponendid f_i on x_i -st sõltuvad lineaarfunktsioonid. Vastupidisel juhul on dünaamiline süsteem (11) mittelineaarne.

Polünoomi nimetatakse homogeenneks, kui kõik tema nullist erinevad liikmed on samas astmes. Kui vektorvälja $\vec{f}(\vec{X})$ iga komponent f_i on x_i suhtes homogeenne polünoom, siis öeldakse, et dünaamiline süsteem on homogeenne. Kui vektorvälja

$\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$ iga komponent f_i on x_i suhtes homogeenne polünoom ja astmega p ($p \in \mathbb{N}$), siis kujutuse $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ võib kirjutada maatriks kujul $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = \frac{1}{p} J \vec{X}$, kus J on Jacobi maatriks. Veelgi enam, kui $p = 1$, siis süsteem muutub lineaarseks ja seda nimetatakse Jacobi süsteemiks.

Kui vektorvälja $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$ iga komponent f_i on x_i suhtes polünoom astmes p , siis öeldakse, et dünaamiline süsteem on polünoomiaalne. Kui $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$ iga komponent f_i on polünoom astmega p ($p \in \mathbb{N}$), siis kujutuse $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ võib kirjutada maatriks kujul $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = \frac{1}{p} J_p \vec{X} + \vec{X}_0$, kus J_p on Jacobi maatriks, mis on seotud polünoomi liikme astmega p ja $\vec{X}_0 = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{0}) = [c_1, c_2, \dots, c_n]^t \in E \subset \mathbb{R}^n$, kus c_i on konstant. Veelgi enam, kui kõik konstandid c_i on nullid, siis süsteem muutub homogeennseks.

Aeglane-kiire dünaamiline süsteem hõlmab endas kahesuguseid dünaamilisi muutujaid, mis selles süsteemis esituvates protsessides toimuvad erinevate ajagraafikute järgi. Kiire ja aeglase aja suhet määratakse väikese parameetriga ε . Aeglast-kiiret dünaamilist süsteemi kirjutatakse

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (17)$$

kus $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ ja $0 < \varepsilon \ll 1$. Kui f ja g on pidevalt diferentseeruvad funktsioonid, siis antud süsteemi nimetatakse aeglaseks-kiireks: x on kiire muutuja ja y on aeglane muutuja.

Aeglane-kiire autonoomne dünaamiline süsteem (A-KADS) on punktis 1.2 defineeritud tingimustega dünaamiline süsteem, kuid tema kiirusvektorvälja

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) \quad (18)$$

vähemalt ühele komponendile lisatud on parameeter ε .

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \left[\varepsilon \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right]^t \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Näide 8. Vaatleme järgmist dünaamilist süsteemi

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{X}}{dt} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} &= \vec{\mathfrak{F}} \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix} = J_1(\vec{X})\vec{X} + \frac{1}{2}J_2(\vec{X})\vec{X} + \vec{X}_0 \\ &= \begin{pmatrix} a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 \\ b_{00} + b_{10}x_1 + b_{01}x_2 + b_{20}x_1^2 + b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kus a_{ij} ja b_{ij} , $i, j = 0, 1, 2$, on reaalarvud. Selline süsteem on polünoomiaalne, sest ta koosneb teise astme polünoomidest, mis sõltuvad x_i -st.

Kui nii $a_{00} = a_{10} = a_{01} = 0$ ja $b_{00} = b_{10} = b_{01} = 0$, siis dünaamiline süsteem muutub homogeennseks, sest teisendusest $x_1 \rightarrow kx_1, x_2 \rightarrow kx_2$ järeljub $f(x_1, x_2) \rightarrow k^2f(x_1, x_2)$ ja $g(x_1, x_2) \rightarrow k^2g(x_1, x_2)$ iga parameetri k korral.

Siis võime süsteemi kirjutada kujul

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{X}}{dt} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} &= \vec{\mathfrak{F}} \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}J(\vec{X})\vec{X} + \vec{X}_0 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_{20}x_1 + a_{11}x_2a_{11}x_1 + 2a_{02}x_2 \\ 2b_{20}x_1 + b_{11}x_2b_{11}x_1 + 2b_{02}x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kui üks parameetritest $\{a_{00}, a_{10}, a_{01}, b_{00}, b_{10}, b_{01}\}$ ei ole null, siis süsteem on ikkagi polünoomiaalne, aga pole enam homogeenne ja seega ei seda kirjutata nagu eelnevalt.

2.6 Süsteemi üldistatud lineaarne aproksimeerimine

Üldistatud lineaarseks aproksimeerimiseks on vaja, et dünaamiline süsteem (11) rahuldaks järgmisi eeldusi:

- (i) Vektorvälja $\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})$ komponendid $f_i \in E$ on pidevad C^∞ funktsioonid hulgas E ja nende väärtused kuuluvad hulka \mathbb{R} .
- (ii) Dünaamiline süsteem (11) peab olema lineariseeritud.

$$\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}_0) + (\vec{X} - \vec{X}_0) \left. \frac{d\vec{\mathfrak{F}}(\vec{X})}{d\vec{X}} \right|_{\vec{X}_0} + O((\vec{X} - \vec{X}_0)^2)$$

(iii) Dünaamilise süsteemi (11) Jacobi maatriksil on vähemalt üks kiire omaväärtus λ_1 .

Dünaamilise süsteemi (11) lineariseeritud süsteem defineeritakse järgmiselt:

$$\frac{d\delta\vec{X}}{dt} = J(\vec{X}_0)\delta\vec{X},$$

kus $\delta\vec{X} = \vec{X} - \vec{X}_0$, $\vec{X}_0 = \vec{X}(t_0)$ ja $\left.\frac{d\vec{s}(\vec{X})}{d\vec{X}}\right|_{\vec{X}_0} = J(\vec{X}_0)$.

Lineariseeritud süsteemi lahend kirjutatakse kujul:

$$\delta\vec{X} = e^{J(\vec{X}_0)(t-t_0)}\delta\vec{X}(t_0).$$

Seega

$$\delta\vec{X} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{Y}_{\lambda_i},$$

kus n on omavektorite ruumi dimensioon, a_i on kordaja, mis sõltub ilmutatud kujul ruumi koordinaatidest ja ilmutamata kujul ajast. \vec{Y}_{λ_i} on lineariseeritud süsteemi Jaokobi maatriksi omavektorid.

Komplanaarsuse tingimus n -dimensionaalse dünaamilise süsteemi kiirusvektorvälja \vec{v} ja tema Jacobi maatriksi aeglase omaväärtuste λ_i aeglase omavektorite \vec{Y}_{λ_i} vahel annab meile sellise süsteemi aeglase muutkonna:

$$\vec{v} = \sum_{i=2}^n a_i \vec{Y}_{\lambda_i} = a_2 \vec{Y}_{\lambda_2} + \dots + a_n \vec{Y}_{\lambda_n} \Leftrightarrow \phi(\vec{X}) = \vec{v} \cdot (\vec{Y}_{\lambda_2} \times \dots \times \vec{Y}_{\lambda_n}) = 0.$$

N -dimensionaalse dünaamilise süsteemi aeglase muutkonna lineariseeritud süsteemi aproksimatsiooni võrrandi võime kirjutada:

$$\phi(\vec{X}) = \vec{v} \cdot (\vec{Y}_{\lambda_2} \times \dots \times \vec{Y}_{\lambda_n}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \sum_{i=2}^n a_i \vec{Y}_{\lambda_i}.$$

3 Dünaamiliste süsteemide aeglase muutkonna uus käsitus

Dünaamiliste süsteemide uurimisel kasutatakse meetodeid diferentsiaalgeomeetriast ja mehaanikast. [5]

3.1 Kinemaatika vektorfunktsioonid

Olgu antud dünaamiline süsteem

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}),$$

kus $\vec{X} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}) = [f_1(\vec{X}), f_2(\vec{X}), \dots, f_n(\vec{X})]^t \in E \subset \mathbb{R}^n$. Selle süsteemi integraaljoon on seotud liikuva punkti M asukohaga (koordinaatidega) ajahetkel t . See integraaljoon kujutab endast punkti M trajektoori.

Meenutades punktis 1.1, vektorfunktsiooni $\vec{X}(t)$ tuletiseks on vektorfunktsioon $\vec{v}(t)$, mis näitab liikuva punkti M kiirust ajahetkel t

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(\vec{X}). \quad (19)$$

Punktis M on kiiruse vektor trajektoori puutujavektor.

Punkti M kiiruse vektori $\vec{v}(t)$ tuletis on vektorfunktsioon $\vec{a}(t)$, mis kujutab endast liikuva punkti M kiirendust ajahetkel t

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (20)$$

Kuna funktsioonid f_i on siledad funktsioonid ruumi \mathbb{R}^n mingis alamruumis E , siis on võimalik leida vektorvälja $\vec{v}(t)$ tuletis. Kasutades liitfunktsiooni tuletist, kirjutame vektortvälja $\vec{V}(t)$ tuletise:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\vec{X}} \frac{d\vec{X}}{dt}, \quad (21)$$

kus $\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\vec{X}}$ on süsteemide (11) ja (18) Jacobi maatriks J . Võrranditest (19) ja (20) järeldub:

$$\vec{a} = J\vec{v}. \quad (22)$$

Vaatleme punkti M liikumise trajektoori ja konstrueerime Frenet' reeperi. Olgu $\vec{X}(t)$ trajektoori \vec{r} trajektoori $\vec{X}(t)$ puutujavektorit punktis M , \vec{v} peanormaalvektorit ja $\vec{\beta}$ binormaalvektorit nii, et kolmik $\{\vec{r}, \vec{v}, \vec{\beta}\}$ on parema käe kolmik. Et kiiruse vektor \vec{v} on punkti M trajektoori puutujavektor igas joone $\vec{X}(t)$ punktis, saame konstrueerida puutujavektori

$$\vec{r} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}. \quad (23)$$

Samal viisil saame konstrueerida binormaalvektori

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} \quad (24)$$

ja peanormaalvektori

$$\vec{v} = \vec{\beta} \times \vec{r} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|} \quad (25)$$

Nüüd saame avaldada punktis M kiirenduse vektori \vec{a} tangentsiaal- ja normaalkiirenduse

$$a_\tau = \frac{\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} \quad (26)$$

$$a_\nu = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}. \quad (27)$$

Punktis M kiiruse vektori \vec{v} võib kirjutada ka kujul

$$\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|}. \quad (28)$$

Kasutades võrduseid (26) ja (27), saame eelneva kirjutada kujul

$$\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = a_\tau. \quad (29)$$

Kasutades võrduseid (26) – (28), saame punktis M kiirenduse vektori \vec{a} kirjutada kujul

$$a_\tau = \frac{\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \|\vec{a}\| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{v})) \quad (30)$$

$$a_\nu = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \|\vec{a}\| |\sin(\angle(\vec{a}, \vec{v}))| \quad (31)$$

Kasutades Lagrange'i samasust

$$\begin{aligned}\|\vec{a} \times \vec{v}\|^2 + \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle^2 &= (|\vec{a}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha)^2 + (|\vec{a}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha)^2 \\ &= (|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|)^2 \cdot [\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha] = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2,\end{aligned}\quad (32)$$

leiame lihtsalt punktis M kiirenduse vektori pikkuse:

$$\|\vec{a}\|^2 = a_\tau^2 + a_\nu^2 = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|^2 + \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle^2}{\|\vec{v}\|^2} = \|\vec{a}\|^2 \quad (33)$$

3.2 Trajektoori kõverus ja vääne

Olgu $\vec{X}(t)$ punkti M liikumise trajektoor, $\vec{v}(t)$ kiiruse ja $\vec{a}(t)$ kiirenduse vektor punktis M .

Joone kõverus, mis väljendab parameetrilise joone puutuja määra muutust, defineeritakse

$$\kappa = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|^3} = \frac{a_\nu}{\|\vec{v}\|^2}, \quad (34)$$

Vääne, mis väljendab erinevust trajektoori ja tasandi kõverate vahel, defineeritakse

$$\chi = -\frac{\langle \dot{\vec{a}}, (\vec{a} \times \vec{v}) \rangle}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|^2}, \quad (35)$$

Lause 9. Punktide asukoht, kus 2 -mõõtmelise süsteemi integraaljoone kõverus on null, määrab süsteemiga (11) assotsieeritud aeglase muutonna.

Lause analüütiline tõestus: Tingimusest, et kõverus peab võrduma nulliga,

$$\kappa = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|^3} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{v} = \vec{0}. \quad (36)$$

Punktis (24) me leidsime binormaalvektori: $\vec{\beta} = \frac{\vec{a} \times \vec{v}}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}$.

Skalaarkorrutades

$$\langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle = \frac{\langle \vec{\beta}, (\vec{a} \times \vec{v}) \rangle}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|} = 1,$$

millest järeldub, et

$$\|\vec{a} \times \vec{v}\| = \langle \vec{\beta}, (\vec{a} \times \vec{v}) \rangle.$$

Võrrandi $\vec{a} = J\vec{v}$ (22) põhjal, kus $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kiirenduse vektori koordinaadid esituvad kujul

$$\vec{a} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\dot{x} + b\dot{y} \\ c\dot{x} + d\dot{y} \end{pmatrix}.$$

Koostame voo kõveruse muutkonna: $\phi(x, y) = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}$,

arvestades, et $\ddot{x} = a\dot{x} + b\dot{y}$ ja $\ddot{y} = c\dot{x} + d\dot{y}$.

Arvutades, et

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ a\dot{x} + b\dot{y} & c\dot{x} + d\dot{y} \end{vmatrix} = c\dot{x}^2 + d\dot{x}\dot{y} - a\dot{x}\dot{y} - b\dot{y}^2 = 0,$$

saame eelneva võrrandi kirjutada kujul $c\dot{x}^2 - (a - d)\dot{x}\dot{y} - b\dot{y}^2 = 0$.

Lause geomeetriline tõestus: Kasutades paragrahvi 2.6 võime kirjutada:

$$\vec{v} = \alpha \vec{Y}_{\lambda_1} + \beta \vec{Y}_{\lambda_2} \approx \beta \vec{Y}_{\lambda_2}.$$

Asendades võrrandisse (29), saame

$$\vec{a} = J\vec{v} = J(\beta \vec{Y}_{\lambda_2}) = \beta \lambda_2 \vec{Y}_{\lambda_2} = \lambda_2 \vec{v},$$

mis näitab, et punkti M kiiruse ja kiirenduse vektorid on kollineaarsed ja

$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

□

Lause 10. Punktide asukoht, kus 3 -mõõtmelise süsteemi integraaljoone vääne on null, määrab süsteemiga (11) assotsieeritud aeglase muutkonna.

Lause analüütiline tõestus: Tingimusest, et vääne peab võrduma nulliga,

$$\chi = -\frac{\langle \dot{\vec{a}}, (\vec{a} \times \vec{v}) \rangle}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|^2} = 0 \Leftrightarrow \langle \dot{\vec{a}}, (\vec{a} \times \vec{v}) \rangle = 0, \quad (37)$$

saame

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Võttes tuletise võrrandist (29), saame

$$\dot{\vec{a}} = J \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dJ}{dt} \vec{v} = J\vec{a} + \frac{dJ}{dt} \vec{v} = J^2 \vec{v} + \frac{dJ}{dt} \vec{v} \approx J^2 \vec{v}.$$

Nüüd saab võrrand (37) kuju:

$$\langle (J^2 \vec{v}), (\vec{a} \times \vec{v}) \rangle = 0.$$

Lause geomeetriline tõestus:

$$\vec{v} = \alpha \vec{Y}_{\lambda_1} + \beta \vec{Y}_{\lambda_2} + \delta \vec{Y}_{\lambda_3} \approx \beta \vec{Y}_{\lambda_2} + \delta \vec{Y}_{\lambda_3}$$

Nüüd asendame võrrandisse (29), saame

$$\vec{a} = J\vec{v} = J(\beta \vec{Y}_{\lambda_2} + \delta \vec{Y}_{\lambda_3}) = \beta \lambda_2 \vec{Y}_{\lambda_2} + \delta \lambda_3 \vec{Y}_{\lambda_3}.$$

Eelneva põhjal võime ülekiirenduse vektori kirjutada

$$\dot{\vec{a}} \approx J^2 \vec{v}.$$

Asendame kiiruse, saame

$$\dot{\vec{a}} \approx J^2(\beta \vec{Y}_{\lambda_2} + \delta \vec{Y}_{\lambda_3}) = \beta \lambda_2^2 \vec{Y}_{\lambda_2} + \delta \lambda_3^2 \vec{Y}_{\lambda_3}.$$

Seega

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \beta \vec{Y}_{\lambda_2} + \delta \vec{Y}_{\lambda_3} \\ \vec{a} &= \beta \lambda_2 \vec{Y}_{\lambda_2} + \delta \lambda_3 \vec{Y}_{\lambda_3} \\ \dot{\vec{a}} &= \beta \lambda_2^2 \vec{Y}_{\lambda_2} + \delta \lambda_3^2 \vec{Y}_{\lambda_3} \end{aligned}$$

mis näitab, et kiiruse, kiirenduse ja ülekiirenduse vektorid on koplanaarsed ja

$$\langle \dot{\vec{a}}, (\vec{a} \times \vec{v}) \rangle = 0.$$

eelnev võrrand tähistab kohta, kus vääne on null.

□

3.3 Aeglased ja kiired piirkonnad

Kui $\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle > 0$, kiirusvektori \vec{v} Eukleidiline norm on positiivne ja toimub liikumise kiirenemine. Sellel juhul on tegemist kiire piirkonnaga. Kui $\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle < 0$, on kiirusvektori \vec{v} Eukleidiline norm negatiivne liikumine aeglustub. Sellel juhul on tegemist aeglase piirkonnaga. Kui $\langle \vec{a}, \vec{v} \rangle = 0$, siis kiirusvektori \vec{v} Eukleidiline norm on konstant ja liikumine on ühtlane. Sellisel juhul toimub üleminek ühelt piirkonnalt teisele.

Seega, me nimetame faasiruumi piirkonda, kus kiirenduse vektori \vec{a} tangentsiaal-kiirendus a_τ on negatiivne, aeglaseks piirkonnaks ja piirkonda, kus kiirenduse vektori \vec{a} tangentsiaal-kiirendus a_τ on positiivne, kiireks muutkonnaks.

3.4 Kiirenduse singulaarne aproksimeerimine

Lause 11. Muutkonna võrrand, mis on seotud A-KADS'i kiirenduse vektori \vec{a} singulaarse aproksimatsiooniga, moodustab parameetri ε esimest järku apromaktsiooni aeglase muutkonna võrrandis.

Tõestus 2–dimensionaalsel kujul

Punktis (36) on kirjeldatud kollineaarset tingimust kiiruse \vec{V} ja kiirenduse vektori \vec{a} vahel ja sealt saame:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{ja} \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = g$$

Aeglase muutkonna võrrand kirjutatakse kujul:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \dot{x}^2 - g \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \dot{x} - \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y}\right) g^2 = 0 \quad (38)$$

See on ruutvõrrand \dot{x} suhtes ja võrrandi diskriminant avaldub kujul:

$$\Delta = g^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 4 \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y}\right) g^2$$

Arendame diskriminandi Δ ruutjuure Tayloriga ritta

$$\sqrt{\Delta} \approx \frac{1}{\varepsilon} \left| g \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \right| \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \left[2 \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}$$

Eelnevat arvesse võttes, saame võrrandi (38) kirjutada kujul:

$$\dot{x} \approx -g \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} + O(\varepsilon) \quad (39)$$

Saadud võrrand on parameetri ε teist järku singulaarne aproksimatsioon.

Punkti (22) saame kiirenduse vektori \vec{a} kirjutata kujul:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

Kiirenduse singulaarne aproksimatsioon annab meile võrrandi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$

ja asendades $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ja $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = g$, saame

$$\dot{x} = -g \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} \quad (40)$$

Kui võrrand (39) annab meile teist järku parameetri ε aproksimatsiooni, siis võrrand (40) annab meile parameetri ε esimest järku aproksimatsiooni.

Tõestus 3–dimensionaalsel kujul Punktis (37) on kirjeldatud koplanaarset tingimust kiiruse vektori \vec{v} , kiirenduse vektori \vec{a} vahel ja kiirenduse vektori tuleise $\vec{\dot{a}}$ vahel. Aeglase muutkonna võrrandi saame kirjutada kujul:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} \begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2 z}{dt^2} \end{vmatrix} + \frac{d^3 y}{dt^3} \begin{vmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} & \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} + \frac{d^3 z}{dt^3} \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2 y}{dt^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (41)$$

Et lihtsustada, asendame determinandid

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2 z}{dt^2} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} & \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2 y}{dt^2} \end{vmatrix}$$

ja saame kirjutada võrrandi (41) kujul

$$(\ddot{x})\Delta_1 + (\ddot{y})\Delta_2 + (\ddot{z})\Delta_3 = 0 \quad (42)$$

Asendame

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \frac{dy}{dt} = \dot{y} = g, \frac{dz}{dt} = \dot{z} = h.$$

Jagades võrrandi (42) läbi (\ddot{z}) , saame

$$(\dot{x}\dot{y} - \ddot{x}y) + \frac{1}{(\ddot{z})}[(\ddot{x})\Delta_1 + (\ddot{y})\Delta_2] = 0 \quad (43)$$

Kirjutame võrrandi (43) esimese liikme lahti:

$$(\dot{x}\dot{y} - \ddot{x}y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\dot{x} - g\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\frac{h}{g}\right)\dot{x} - \frac{g^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{h}{g}\right) \quad (44)$$

Homogeensuse tõttu märgime, et

$$g^2G = \frac{1}{(\ddot{z})}[(\ddot{x})\Delta_1 + (\ddot{y})\Delta_2]$$

Ja võrrand (43) saab kuju

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\dot{x}^2 - g\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\frac{h}{g}\right)\dot{x} - \frac{g^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{h}{g}\right) + g^2G = 0 \quad (45)$$

Sellel ruutvõrrandi diskriminant \dot{x} suhtes avaldub kujul:

$$\Delta = g^2\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{h}{g}\right)\right]^2 + 4g^2\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{h}{g}\right) - G\right]$$

$$\sqrt{\Delta} \approx \frac{1}{\varepsilon}\left|g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|\left\{1 + \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}\left[2\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{h}{g}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{h}{g}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] + O(\varepsilon^2)\right\} \quad (46)$$

Eelnevat arvestades, saame võrrandi(45) kirjutada kujul:

$$\dot{x} \approx -g\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{h}{g}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} + O(\varepsilon) \quad (47)$$

Tegemist parameetri ε teist järku aproksimatsiooniga. Kiirendusvektor \vec{a} 3–mõõtmelisel kujul:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}.$$

Kiirenduse vektori singulaarne aproksimatsioon annab meile võrrandi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0.$$

Asendades

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = g, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z} = h,$$

saame

$$\dot{x} = -g \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} h \right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}. \quad (48)$$

□

3.5 Van der Poli mudel

Balthasar Van der Pol oli Hollandi füüsik ja raadioinsener. Ta sündis 27. jaanuaril 1889 Utrechti, Hollandis. Peale Utrechti Ülikooli lõpetamist siirdus ta Inglismaale, kus kõigepealt töötas Londoni Ülikooli Penderi Elektrilaboris koos John A. Fleminguga, hiljem aga Cambridge Ülikooli Cavendishi Laboratooriumis Joseph J. Thompsoniga. Aastatel 1919 – 1922 töötas Van der Pol Haarlemi Ülikoolis Teyleri Instituudis Hendrik Lorentzi assistendina. Aastal 1922 võttis ta vastu töökohta peafüüsikuna Philipsi Füüsikalaboris, kus ta töötas pensionile minekuni. Van der Pol oli ka professor Delfti ja Einhoveri ülikoolides, peale pensionile jäämist esines külalisprofessorina Californias Berkley Ülikoolis ja New Yorkis Cornelli ülikoolis. Van der Pol suri 6. oktoobril 1959. Aastast 1963 annab URSI (*Union Radio-Scientifique Internatsionaale*) ehk Rahvusvaheline Raadioteadlaste Ühing iga kolme aasta tagant välja Balthasar van der Poli nimelist kuldmedalit. [18]

20. sajandi alguses kasutati raadiotes vooluringi saatjate ja vastuvõtjate juhtimiseks vaakumtorusid [7]. Uurides vooluringe vaakumtorudes leidis Van der Pol, et neil

on stabiilne ostsillaator, mida praegu nimetatakse piirtsükkliks. Kui signaal juhitaks piirtsükkli lähedale, siis see "haaratakse" piirtükkliksse kaasa. [2] Seda süsteemi saab rakendada erinevatele dünaamilistele süsteemidele, nagu näiteks närvisüsteem, inimsüda ja maavärinad. [12]

Van der Poli ostsillatorit kirjeldav võrrand on teist järku süsteem mittelineaarse hõõrdumisega, mis kirjutatakse kujul:

$$\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (49)$$

kus x on dünaamiline muutuja ja γ on skalaarne parameeter, mis näitab sumbuvus-tugevust.

Võrrandit (49) on võimalik kirjutada ka esimest järku süsteemina:

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma(x + y - \frac{x^3}{3}) \\ \dot{y} = -\frac{x}{\gamma} \end{cases} \quad (50)$$

Skalaarse muutuja γ kasvades muutub x 'kiireks' ja y 'aeglaseks' muutujaks. Et uurida võnkumise käitumist piirprotsessil $\gamma \rightarrow \infty$, määrame ühe väikese parameetri $\varepsilon = \frac{1}{\gamma^2}$ ja uue aja $t' = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{\varepsilon}t$. Kirjutame süsteemi kujul:

$$\vec{v} \begin{pmatrix} \varepsilon \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \vec{\mathfrak{F}} \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - \frac{x^3}{3} \\ -x \end{pmatrix}, \quad (51)$$

kus funktsioonid $f, g : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on muutujate x_i ja t lõpmatult diferentseeruvad funktsioonid ja $\varepsilon = 0.05$. Parameetri ε olemasolu vektori \vec{v} ühe komponendi ees näitab meile, et süsteem (51) on A-KADS. Nüüd saame kasutada lauseid 3.2 ja 3.4. Kiirendusvektori \vec{a} saame kirjutada kujul:

$$\vec{a} \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{dt} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x^2 \frac{dx}{dt} \right) \\ -\frac{dx}{dt} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Lause 3.1 põhjal

$$\kappa = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|^3} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{v} \Leftrightarrow \ddot{x}y - \dot{x}\ddot{y} = 0.$$

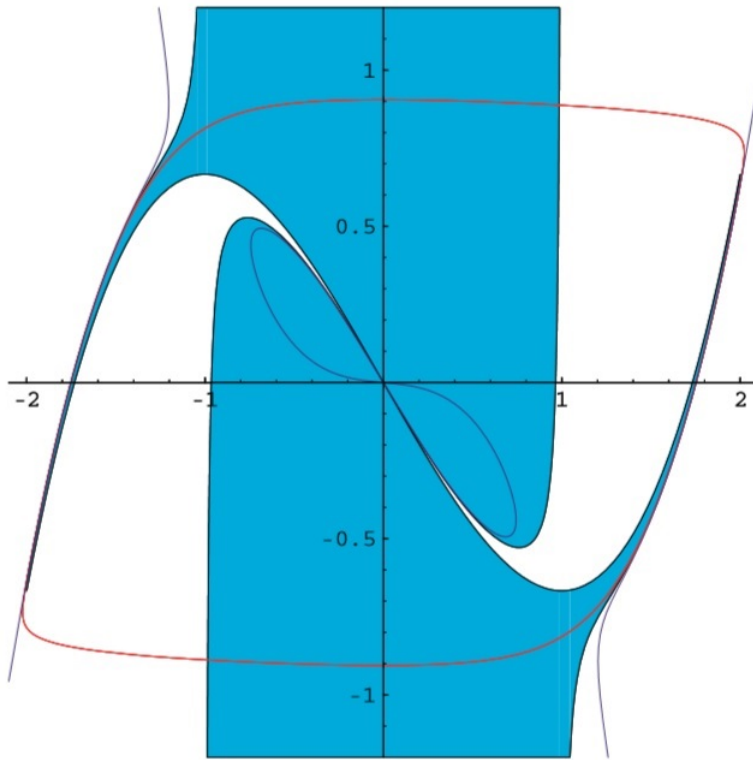
Seega saame järgneva võrrandi:

$$\frac{1}{9\varepsilon^2} [9y^2 + (9x + 3x^3)y + 6x^4 - 2x^6 + 9x^2\varepsilon] = 0. \quad (53)$$

Lahendame selle y -i suhtes:

$$y_{1,2} = -\frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} \pm \frac{x}{2} \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 - 4\varepsilon} \quad (54)$$

Joonisel 7 on sinise joonega kujutatud Van der Pol'i süsteemi aeglane muutkonna võrrand (54) parameetri $\varepsilon = 0.05$ korral ja punase joonega piirtsükkel. Alapeatüki 3.3 põhjal saame piirata faasiruumi piirkonna, kus skalaarkorrutis kiirerusvektori \vec{v} ja kiirendusvektori \vec{a} vahel on negatiivne, mis tähendab, et kiirenduse vektori \vec{a} tangentsiaalkiirendus \vec{a}_τ on negatiivne.



Joonis 7: Van der Pol'i võrrandi aeglane muutkond [4]

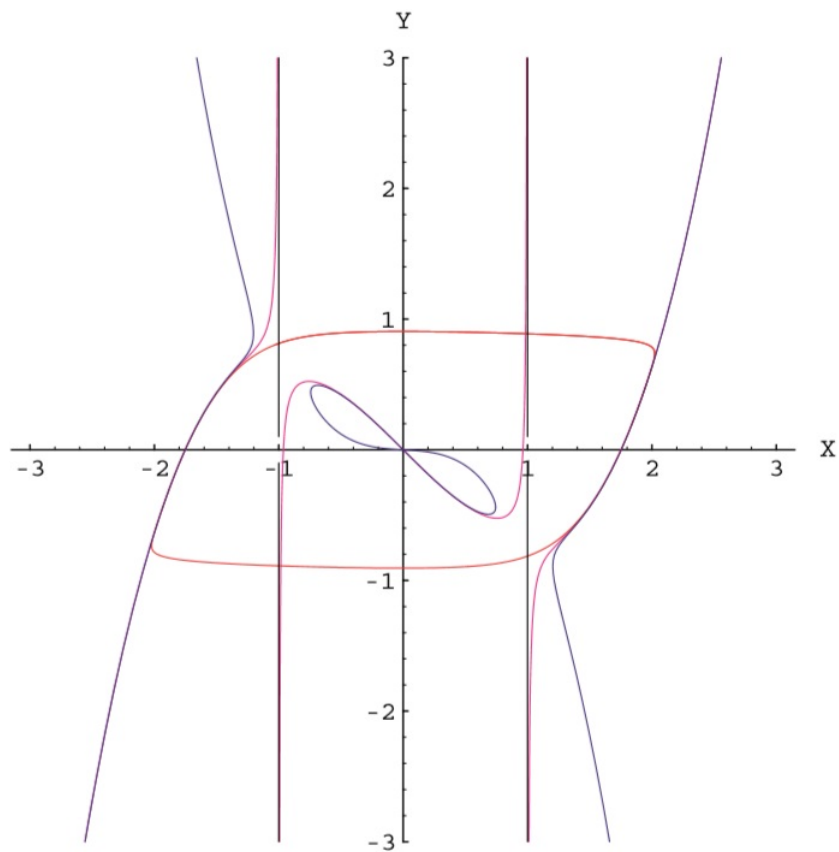
Lause 11 põhjal saame järgmise aeglase muutkonna võrrandi:

$$\frac{1}{3\varepsilon^2} [3x - 4x^3 + x^5 + (3 + 3x^2)y - 3x\varepsilon] = 0, \quad (55)$$

millest avaldades y , saame

$$y = \frac{x^5 - 4x^3 + 3x(1 - \varepsilon)}{3(-1 + x^2)}. \quad (56)$$

Joonisel 8 on sinise joonega kujutatud Van der Pol'i süsteemi aeglase muutkonna võrrand (54), fuksiinpunasega singulaarse aproksimatsiooni kiirendusvektor \vec{a} (56) ja punasega piirtsükkel.



Joonis 8: Van der Pol'i võrrandi kiirenduse singulaarne aproksimatsioon [4]

Viited

- [1] V. Abramov, *Diferentsiaalgeomeetria*, konspekt
- [2] A. Clark, Jr, *Dynamical Systems*, konspekt, 2009, <http://www.me.rochester.edu/courses/ME406/webexamp5/vanpol.pdf>, 10.05.2015
- [3] J.M. Ginoux, J. Llibre *Flow curvature method applied to canard explosion*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 44(46), 465203 (2011) (IF 1,540)
- [4] J-M. Ginoux, *Differential Geometry Applied to Dynamical Systems*, World Scientific Publishing Co. Pre.Ltd, 2009, Singapore
- [5] J-M. Ginoux, B. Rossetto, *Differential geometry and mechanics applications to chaotic dynamical systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, World Scientific Publishing Company, Vol. 16, No. 4(2006) 880-910,
- [6] J-M. Ginoux, B. Rossetto, *Slow invariant manifold of heartbeat model*, Journal of Nonlinear Systems and Applications, Vol. 4 (2013), pp. 30-35.
- [7] J. Guckenheimer, K. Hoffman, W. Weckesser, *The Forced van der Pol Equation I: The Slow Flow and Its Bifurcations*, Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Applied Dynamical Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 2, No. 1(2003), pp. 1-35,
- [8] J. Kirs, *Teoreetiline mehaanika II*, konspekt
- [9] Ü. Lepik, J. Engelbrecht, *Kaoseraamat*, Teaduste Akadeemia Kirjastus, 1999, Tallinn
- [10] Ü. Lepik, L. Roots, *Teoreetiline Mehaanika*, Valgus, 1971, Tallinn
- [11] Ü. Lumiste, *Diferentsiaalgeomeetria*, Valgus, 1987, Tallinn
- [12] R. F. Martin, Jr, *Nonlinear Science*, konspekt, 2013, http://www2.phy.ilstu.edu/~rfm/380s13/chapters/ch9_limitcycles.pdf, 10.05.2015
- [13] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Johann Christian Martin Bartels*, JOC/EFR, 2009 <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Bartels.html> 10.05.2015

- [14] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Jean Frederic Frenet*, JOC/EFR, 2006
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Frenet.html> 1.05.2015
- [15] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Joseph Alfred Serret*, JOC/EFR, 2014
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Serret.html> 1.05.2015
- [16] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press Inc, 1966, New York
- [17] J. Oprea, *Differential Geometry And Its Applications*, Prentice-Hall Inc, 1997, New Jersey
- [18] *Dr. Balthasar van der Pol*(1889–1959), <http://www.dos4ever.com/EF50/Pol.html>, 10.05.2015

**Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele
kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Margit Ojaots (sünnikuupäev 08.11.1986)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
*Diferentsiaalgeomeetria meetodite rakendused dünaamiliste süsteemide
uurimisel,*
mille juhendajad on professor Viktor Abramov ja Olga Liivapuu,
 - a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 03.06.2015