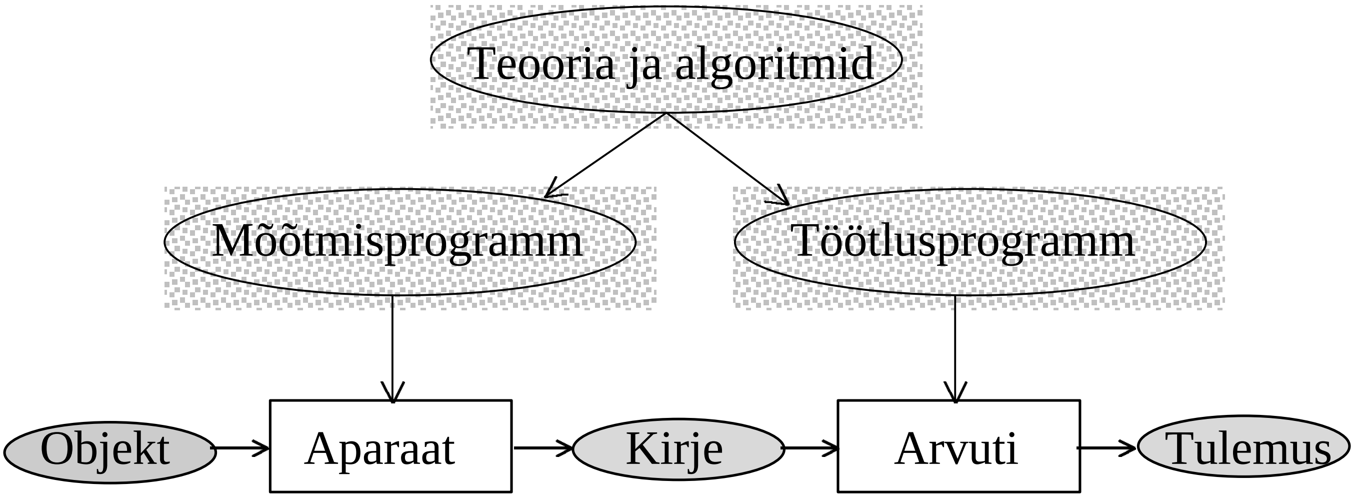
8. Mitmekanaliline mõõtmine

Mõõtmisprotsessi algebraline mudel

Informatsiooni teekond algab loodusest ja lõpeb mõõtmisprotokollis või artiklis, kus tulemusi esitakse mingi arvuhulga või selle järgi koostatud jooniste abil. Teisenemine võib olla keerukas ja on modelleeritav mitme-etapilises skeemis. Jämeda liigendusega skeem:



Objekti omadusi kirjeldatakse mingi füüsikalise mudeliga. Mudeli parameetriteks on arvud $\{x_1, x_1, ..., x_n\} = \boldsymbol{x}$, kus n on mudeli mõõtmete arv. Aparaat väljastab m objekti kirjeldavat arvu, mis sõltuvad objekti parameetritest kuid ei pruugi neid otse esitada. Mitmekanalilise mõõtmise korral nimetame neid arve kanalisignaalideks ja tähistame $\boldsymbol{y} = \{y_1, y_1, ..., y_m \}$, kus m on kanalite arv. Kanalisignaalide hulka nimetame aparaadi kirjeks. Aparaadi kanalite arv võib objekti parameetrite arvuga kokku langeda, võib olla aga ka sellest suurem või väiksem.

Kirje nihe ja müra

Juhul, kui objekti kõik parameetrid on nullid, siis on kanalisignaalid tõlgendatavad kui mõõtmisvead. Mõõtmisaparaate püütakse ehitada nii, et oleks võimalik mõõta ka nullparameetritega objekte ja niiviisi saadud kirjeid analüüsides uurida mõõtmisvigu. Kui *i*-nda kanali mõõtmisvea Δ_i keskväärtus ei ole null, siis esitatakse viga kui kahe komponendi summa:

$$\Delta_i = y_{i\mathrm{o}} + \xi_i \ ,$$

$y_{i\mathrm{o}}$ on siin nulli nihe ja ξ_i on tsentreeritud viga ehk kanalimüra.
ξ_i keskväärtus on null.

Kui mõõtmisvea parameetrid on tuntud, siis on nulli nihe arvutuslikult korrigeeritav (?):

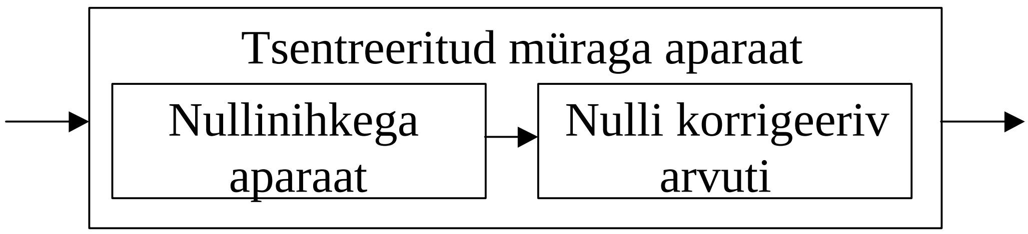
$$y_i := y_i - y_{i\mathrm{o}} \quad (i = 1 \ldots n).$$

Pärast seda operatsiooni on kanalisignaalid nihkevabad ja mõõtmisveaks jääb tsentreeritud müra. Järgnevas seda ka eeldatakse.

Kirjeldatud mudeli nõrk külg on, et see ei arvesta võimalikku nulli triivi. Täpsemini, eeldab, et triiv on piisavalt aeglane selleks, et nulli nihe ühes nulli korrektsiooni tsüklis oleks tähtsusetu.

Täpsemas teoorias käsitletakse nulli triivi kui müra ülimadalsageduslikku komponenti.

Nullikorrektsiooniga aparaat:



Järgnevate arutluste teine oluline kitsendus on lihtsustav oletus, et müra ei sõltu signaalist. Niisugust müra nimetatakse aditiivseks. Kui signaal kasvab, jääb absoluutne viga muutumatuks ja relatiivne viga kahaneb. Äärmuslikult teistsuguses mudelis loetakse relatiivne viga muutumatuks ja müra nimetatakse multiplikatiivseks. Paremates mudelites koosneb müra aditiivsest ja multiplikatiivsest komponendist.

Aparaadi homogeenne ja lineaarne matemaatiline mudel

Aparaat on lineaarne siis, kui kanalisignaal sõltub parameetritest lineaarselt:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j + \xi_i , \qquad i = 1...m$$

ξ_i on ehk kanalimüra väärtus ehk mõõtmisviga. “Homogeenne” tähendab, et kanalisignaalide müra keskväärtus on null ja keskväärtustest rääkides võiks aparaaditeisenduse võrrandi ehk aparaadivõrrandi kirjutada

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j \quad .$$

See on vormilt lineaarteisenduse üldine võrrand. Algebra kursuses kirjutatakse niisugune võrrand maatrikskujul:

$$\boldsymbol{y} = \{y_i\}, \ \ \boldsymbol{G} = \{g_{ij}\}, \ \ \boldsymbol{x} = \{x_j\},$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ on mõõdetavate parameetrite vektor,
$\boldsymbol{y}$ kirje vektor ja
$\boldsymbol{G}$ aparaadimaatriks.

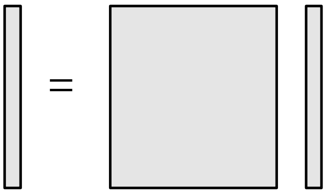
Müra arvesse võttes kirjutatakse aparaadivõrrand kujul

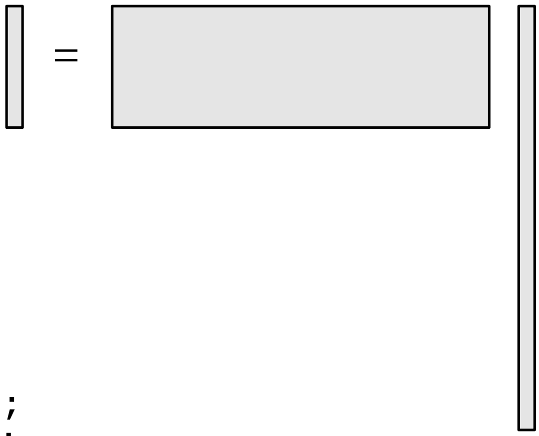
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \xi$$

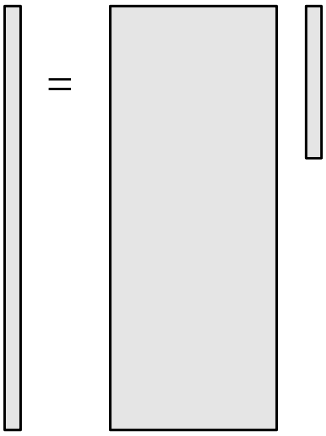
kus ξ on juhuslik tsentreeritud vektor koordinaatidega ξ_i.

Müra loetakse aditiivseks seepärast, et säilitada mudeli lineaarsust.

Maatriksi ja vektori korrutamine:







```
Const n = ...;
      m = ...;
......
Var   s : real;
x : array [1..n] of real;
y : array [1..m] of real;
g : array [1..m, 1..n] of real;
......
for i:= 1 to m do begin
       s := 0;
for j := 1 to n do s := s + g [i, j] * x [j]
     y [i] := s;
end;
```

```
Program Skalaarkorrutise_demo;

Const dim = 10;

Type vector = array [1..dim] of double;
     matrix = array [1..dim] of vector;

Function Skalaar (a, b : vector) : double;
   Var i : integer;
       s : double;
   Begin
   s := 0;
   for i := 1 to dim do s := s + a [i] * b [i];
   skalaar := s;
   End;

VAR y, x : vector;
       g : matrix;
       i : integer;

BEGIN
   {........}
   for i := 1 to dim do y [i] := skalaar (g [i], x);
   {........}
END.
```

Probleem: Praktikas on enamasti y tuntud (mõõdetud) ja x tundmatu.

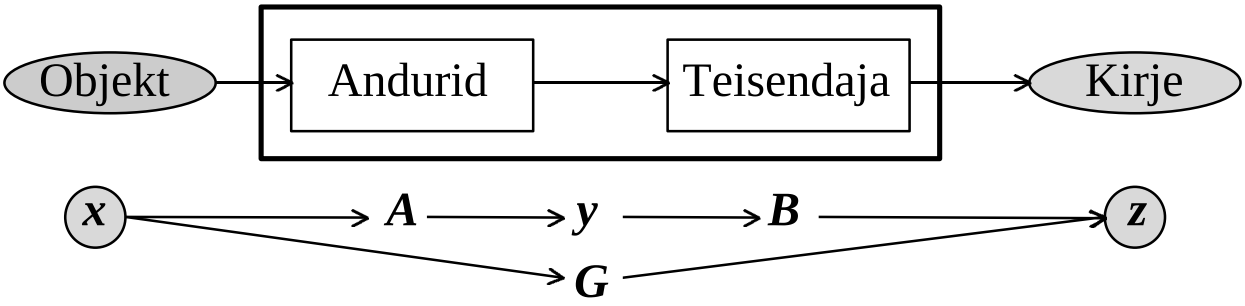
Näide: Tikutoosi mõõtmine.

Näide: Kahe paberitüki kaalumine (DEMO 4).

Näide: EAS aparaadimaatriks A. Mirme dissertatsioonist.

9803	242	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24067	2703	107	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8000	9032	296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8339	4996	2080	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
202	1506	6836	103	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	34	2117	1695	6.9	0	0	0	0	0	0	0	0
0	260	737	3272	507	20	0	0	0	0	0	0	6.9
0	60	278	1151	2062	273	20	0	0	0	0	0	23.7
0	0	40	741	1713	1315	93	0	0	0	0	4.9	67.3
0	0	15	402	537	1859	588	56.4	0	0	8.0	90.1	61.3
0	0	0	158	250	625	1497	247	136	169	174	138	8.0
0	0	0	78.3	120	200	1622	747	475	482	358	70.6	0
0	0	0	0	60	105	403	1262	655	634	320	11.7	0
0	0	0	0	0	20.0	60.0	1171	691	504	154	0	0
0	0	0	116.5	195	673	622	692	0	0	0	0	0
0	0	0	147.4	323	651	337	884	450	0	0	0	0
0	0	0	123.7	464	305	626	548	1039	0	0	0	0
0	0	269	28.0	704	200	416	350	1318	95	0	0	0
0	0	584	4.4	360	78.6	147	131	472	589	0	0	0
0	0	70	394	130	40.2	0	0	107	733	62	0	0
0	0	167	14	46.8	0	0	0	0	251	494	0	0
0	74	275	68	13.8	0	0	0	0	20	711	0	0
0	0	329	0	0	0	0	0	0	0	321	94.9	0
0	0	162	0	0	0	0	0	0	0	0	659	17.8
916	0	364	0	0	0	0	0	0	0	0	228	472
0	1998	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	232

Liitaparaat ja mudeli universaalsus



$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

Järeldus: $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}$, kus $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$

Mida tähendab ***BA***?

$$x_j, \quad j = 1..n,$$

$$y_k, \quad k = 1..p,$$

$$z_i, \quad i = 1..m,$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \qquad\qquad z_i = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} y_k$$

$$z_i = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj} \right) x_j$$

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j$$

$$\boxed{g_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj}}$$

Spektromeeter

Termin “spekter” tähistab mingi suuruse jaotust. Näited: kiirgusenergia jaotus sageduse järgi, aerosooliosakeste jaotus suuruste järgi jne. Füüsikaline spekter on looduslik objekt ja see ei tähenda ei graafikut, funktsiooni ega arvutabelit. Need viimased on matemaatilised objektid, mida kasutatakse spektri mudelitena.

Optilist spektrit tavatsetakse kirjeldada funktsiooniga

$$f(\nu) = \frac{\mathrm{d}\,E}{\mathrm{d}\,\nu} \ ,$$

kus E on sagedusest ν madalama sagedusega kiirgusenergia voo tihedus. Spektrite mõõtmise tulemusi aga ei esitata tavaliselt funktsioonivalemiga, vaid spektrifunktsiooni graafikuga.

Aerosoolispektrit tavatsetakse kirjeldada fraktsioonikontsentratsioonide tabeliga või sellele vastava tulpdiagrammiga. Kui fraktsioonide arvu suurendada, siis läheneb tulpdiagramm sujuvale graafikule. Teiselt poolt, reaalne sujuv graafik ei sisalda kunagi lõpmatut hulka defineeritud väärtustega punkte, neid punkte on tavalisel mõnisada kuni mõnikümmend tuhat.

Spektrit mõõdetakse kas paralleelkanalitega aparaadi või skaneeriva aparaadi abil, mõlemal juhul on tulemuseks lõplik hulk arve. See asjaolu ei takista aga spektrit modelleerimast lõpmatut arvu punkte sisaldava pideva funktsiooniga.

Ei tohi küsida, kas spekter on funktsioon või lõplik tabel. Spekter on looduslik objekt ja teda võib modelleerida kas funktsiooniga või lõpliku tabeliga, ühel mudelil on ühed head omadused ja teisel mudelil teised head omadused.

Spektromeeter on aparaat, mis seab spektrile $\boldsymbol{x}$ vastavusse kirje $\boldsymbol{y}$. Sellest kirjest lähtudes on tarvis kirjeldada spektrit. Enamus spektromeetreid on lineaarsed aparaadid ja juhul kui spektrit ja kirjet kirjeldatakse lõplike arvutabeliga, saab kasutada eelpool kirjeldatud lineaarse aparaadi algebralist mudelit. Spektromeetri enda omaduste kirjelduseks on siis aparaadimaatriks ja spektromeetri kaliibrimine tähendab aparaadimaatriksi määramist.

Näide A. Mirme dissertatsioonist

3. EAS spectrum printout.

EAS TU No. 4 DATA=1994 5 25 TIME=19 59 59

D (nm)	N (1/cm^3)	SN (1/cm^3)	
10 - 18	32.46	19.44	:************
18 - 32	598.80	28.75	:*****************
32 - 56	1715.06	24.30	:*******************
56 - 100	2567.56	28.29	:********************
100 - 178	1218.39	10.02	:******************
178 - 316	313.29	3.48	:****************
316 - 562	80.64	0.73	:*************
562 - 1000	11.64	0.16	:**********
1000 - 1778	1.02	0.07	:******
1778 - 3162	0.53	0.06	:*****
3162 - 5624	0.11	0.01	:**
5624 - 10000	0.01	0.00	:

The first row presents the version number, date and time. The spectrum is presented as a distribution of fraction concentrations in the form; the fraction limits, the estimated number concentration of particles in particles per cm^3 of the fraction and the standard deviation of the estimate. The distribution is visualised by asterisks on the logarithmic scale.

Spektri mõõtmise lõpmatumõõtmeline mudel

Tähistused: spektri argument *v*, spektraalfunktsioon *x*, kirje (ja müra) argument *w*, kirje *y*, müra ξ.

Kirje üksik punkt on spektraalfunktsiooni väärtuste lineaarkombinatsioon, millele liitub müra:

$$y_\circ = \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} g_\circ(v)x(v)\,\mathrm{d}v + \xi_\circ$$

Milline on funktsiooni *g* füüsikaline sisu?

Homogeense aparaadi korral on $\langle\xi_o\rangle = 0$.

Üldine aparaadivõrrand:

$$y(w) = \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} g(w,v)x(v)\,\mathrm{d}v + \xi(w)$$

Aparaadifunktsiooni interpretatsioon.

Analoogia lineaarse filtriga (signaaliteooria).

Sidumaparaat

Ülesanded lihtsustuvad oluliselt erijuhul kui $g(w, v) = g(w-v)$:

$$y(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w-v)x(v)\,\mathrm{d}v + \xi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)x(w-u)\,\mathrm{d}u + \xi(w)$$

Kui $\xi = 0$, siis on ülaltoodud teisendus konvolutsioon ehk sidum (vene k. “svertka”).

Tähistame Fourier pärioperaatori F ja pöördoperaatori $\mathsf{F}' = \mathsf{F}^{-1}$:

$$S(\omega) = \mathsf{F}\{s(x)\} = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$s(x) = \mathsf{F}^{-1}\{S(\omega)\} = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\,\omega$$

$$c_1 c_2 = \frac{1}{2\pi}, \text{ tavaliselt } c_1 = \frac{1}{2\pi} \text{ ja } c_2 = 1$$

Vahel kasutatakse argumendina ω asemel $f = \omega/(2\pi)$.

Küsimus: millised on ω ja Fourier kujutise mõõtühikud?

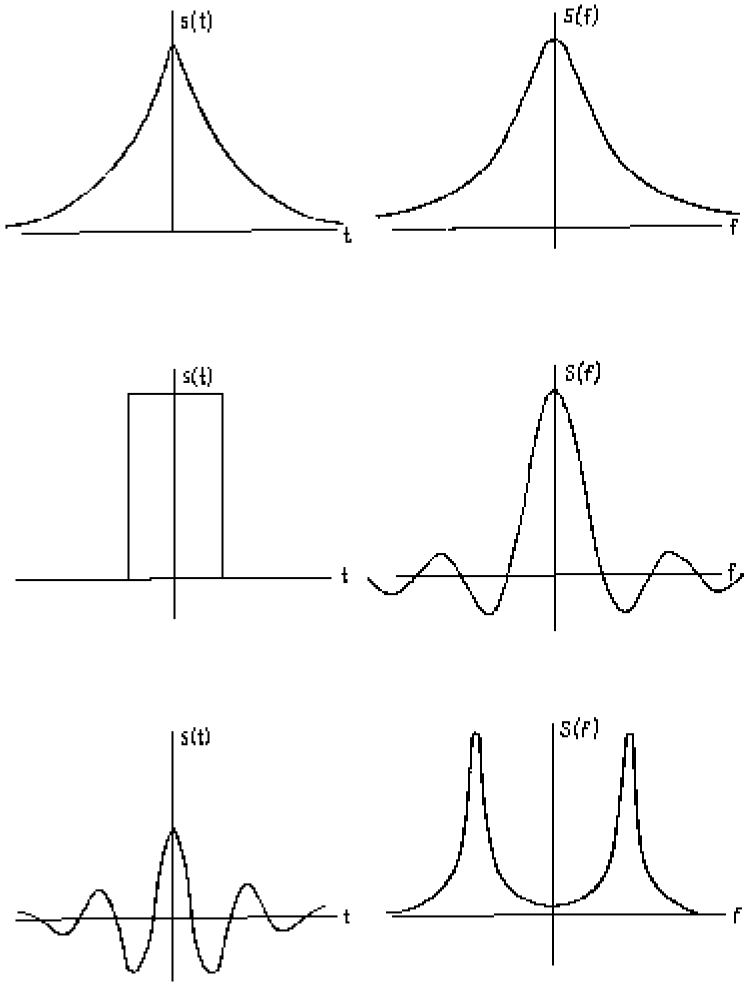
Sidumi omadus:

$$\mathsf{F}\{y\} = \mathsf{F}\{g\}\ \mathsf{F}\{x\}$$

PS: matemaatikahariduseta raadioamatööri arutlus lineaarsest filtrist.

Lõpmatumõõtmeline teooria on väga hea teoreetilistes arutlustes. Eksperimentaatori jaoks arendab see füüsikalist intuitsiooni. Tegelikuks andmetöötluseks see teooria aga vahetult ei sobi, sest lõpmatumõõtmelist kirjet pole kuskilt võtta. Lõpmatumõõtmelisest teooriast lähtudes peab praktilises andmetöötluses kasutama matemaatilisi numbrilisi meetodeid, mis tähendab teise astme modelleerimist: esialgse lõpmatumõõtmelise mudeliga seatakse vastavusse sekundaarne lõplikumõõtmeline mudel.

Koopia raamatust: valik Fourier kujutisi



Lõpmatumõõtmelise mudeli algebraiseerimine

Delta-summa meetod. Ristkülikfraktsioonide meetod.

Algebraiseerimine numbrilise integreerimise valemite abil.

Universaalne mudel: algebraiseerimine koordinaatesituse abil.

Baas $\{f^{\,i}(\nu)\}$, $i = 1..n$. $x(\nu) = \sum_{i=1}^{n} x_i f^{\,i}(\nu)$

Erijuhtumid: δ-baas, tulp-baas, kolmnurkbaas, spline-baas, ...,
Fourier baas?

Näide A. Mirme dissertatsioonist:

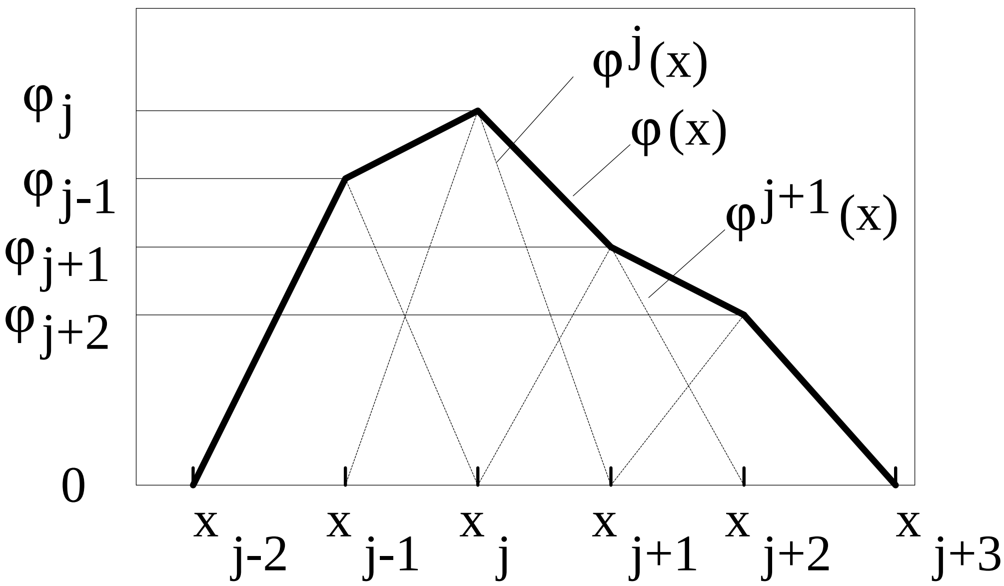


Figure 12. Linear sectioned spectrum model

Valik eriomadustega aparaate

- Ühikaparaat
- Diagonaalaparaat
- Tsirkulatsioonaparaat
- Ortogonaalaparaat
- Fourier aparaat
- Multipleksaparaadid ja Fellgeti (1951, 1958) võit
  näide: kahe keha kaalumine.

```
1  0  0  0  0        5  0  0  0  0        1  2  3  4  5
0  1  0  0  0        0  6  0  0  0        5  1  2  3  4
0  0  1  0  0        0  0  1  0  0        4  5  1  2  3
0  0  0  1  0        0  0  0  3  0        3  4  5  1  2
0  0  0  0  1        0  0  0  0  7        2  3  4  5  1
```