

# 11. Mõõtmise stabiliseerimine.

## Vektormõõtmise pöördülesande ebakorrektsus või ebastabiilsus.

Nagu eespool öeldud, lõpmatumõõtmeline aparaativõrrand

$$y(w) = \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} g(w, v) x(v) dv$$

on matemaatiliselt ebakorrektselt püstitatud.

Algebraalse aparaativõrrandi

$$y = Gx$$

puhul ei saa ebakorrektsusest Hadamard'i mõttes rääkida, algebras sellist mõistet pole. Küll aga võib võrrandi lahend osutuda ebastabiilseks.

*Näide 1:*

$$x_1 + x_2 = y_1$$

$$x_1 + 1.001x_2 = y_2$$

$$x_2 = 1000(y_2 - y_1)$$

$$\sigma(x_2) = 1414 \sigma(y)$$

*Näide 2:*

$$y(w) = \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} g(w, v) x(v) dv + \xi(w)$$

Konkreetsed tingimused:  $g(w, v) = e^{-(w-v)^2}$ , valge müra,  $\sigma = 1$ .

Algebraiseerime:  $v = ci, \quad w = cj, \quad dv = c$

$$y_j = \sum g_{ji} x_i \quad g_{ji} = ce^{-c^2(i-j)^2} \quad D = E$$

$$C = (G^T G)^{-1} \quad \text{Veategur} = \langle \sigma_x \rangle = \sqrt{\frac{\text{Spur}(C)}{n}}$$

Mis juhtub, kui hakata algebraiseeritud võrrandit täpsustama vähendades sammu  $c$ ?

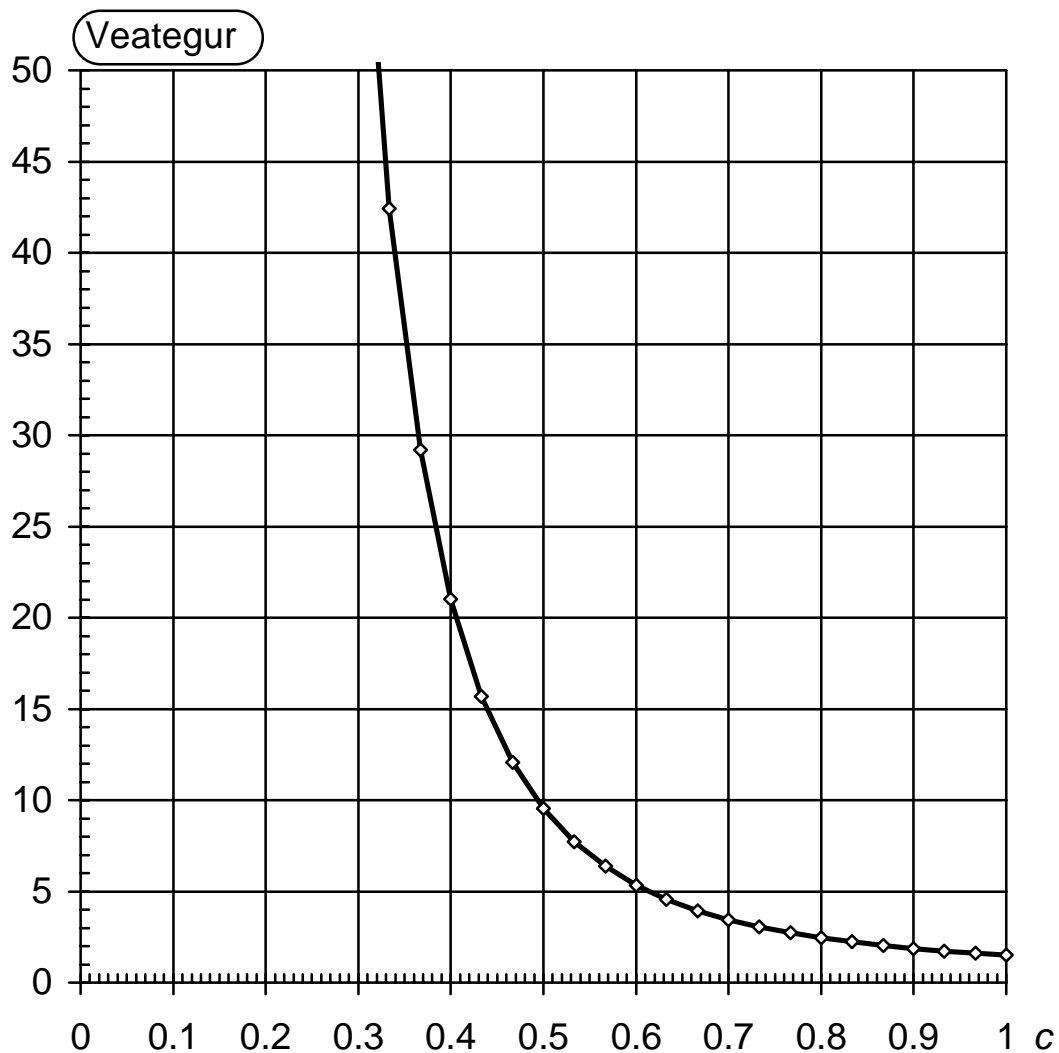
```

Program Demo;
Const nmatrix = 5;
{$I MATRIX.PAS}

Var i, j, n, k : integer;
    x, y, c : double;
    a, g : matrix;
    f : text;

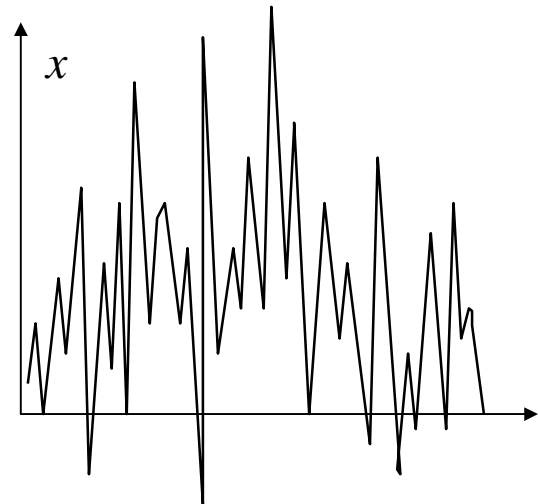
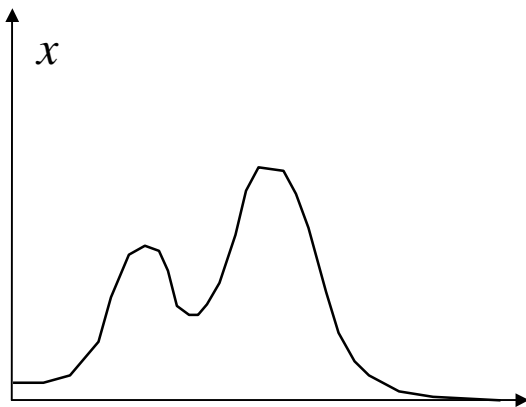
BEGIN
assign (f, '\b\demo.xls'); rewrite (f);
n := nmatrix;
for k := 9 to 30 do begin
    c := k / 30;
    for i := 1 to n do for j := 1 to n do
        g [i,j] := c*exp(-c*sqr(i-j));
    multm (g, g, a); x := invdet (a);
    y := 0; for i := 1 to n do y := y + a [i, i];
    writeln (f, c:9:3, sqrt (y/n):9:3);
end;
close (f);
END.

```



## Mõõtmise stabiliseerimine aprioorse informatsiooni abil.

*Näide:* Ühe ja sama spektri kaks erinevat mõõtmistulemust



Objekti tundmata võib öelda, et teine spekter ei saa olla õige. Väite aluseks on aprioorne informatsioon, mille kohaselt spektrifunktsioonil ei saa olla negatiivseid väärtusi. Objekti tundes lisandub täiendav aprioorne informatsioon, mille kohaselt spektri graafik peaks olema suhteliselt sile kõver. Esimene aprioorne informatsioon ei ole lineaarses mudelis formaliseeritav, teine aga on.

Mõõtmisinformatsiooni kirjeldab spektri hinnangu tõenäosusjaotus

$$f_m(x) = cn \times \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \hat{x})^T A_m (x - \hat{x})\right) \quad A_m = G^T D^{-1} G$$

ja mõõtmisvigu iseloomustavat aprioorset informatsiooni kirjeldab

$$f_p(x) = cn \times \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \hat{x})^T A_p (x - \hat{x})\right)$$

Kui need informatsioonid on sõltumatud, siis arvutatakse ühendatud informatsioonil baseeruv tõenäosustihedus korrutamise teel

$$f(x) = f_p(x) f_m(x) \quad A = G^T D^{-1} G + A_p$$

Tulemuseks on modifitseeritud algoritm:

$$C = (G^T D^{-1} G + A_p)^{-1} \quad \hat{x} = C G^T D^{-1} y$$

Ebalineaarse aprioorse informatsiooni formaliseerimine ei ole nii lihtne.

*Probleem:* kuidas kirjutada aprioorne informatsioon üles maatriksi kujul?

## Aprioorsete võrrandite meetod.

Me alustasime lõplikumõõtmelise aparaativõrrandi formuleerimist järgmiselt:

Üks kanalisignaali  $y_1 = g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + g_{13}x_3 + \dots + \xi_1$

Aparaativõrrand

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} \quad \text{ehk} \quad y_j = \sum_{i=1}^n G_{ji}x_i + \xi_j$$

Aparaativõrrand on üksikuid kanalisignaale kirjeldavate skalaarsete võrrandite hulk. Nendele võrranditele võib juurde kirjutada aprioorseid võrrandeid:

Mõõtmisvõrrandid:  $y_1 = g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + g_{13}x_3 + \dots + \xi_1$   
 $y_2 = g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + g_{23}x_3 + \dots + \xi_2$   
 .....

Aprioorsed võrrandid:  $0 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + \dots + \xi_{p1}$   
 $0 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3 + \dots + \xi_{p2}$   
 .....

Tõkestatuse tingimused on  $x_i = 0 + \xi$ ,  $\sigma$  väärtus on aprioorne

Esimese astme sileduse tingimused on

$$x_i - x_{i+1} = 0 + \xi, \quad \sigma \text{ väärtus on aprioorne}$$

Teise astme sileduse tingimused on

$$x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2} = 0 + \xi, \quad \sigma \text{ väärtus on aprioorne}$$

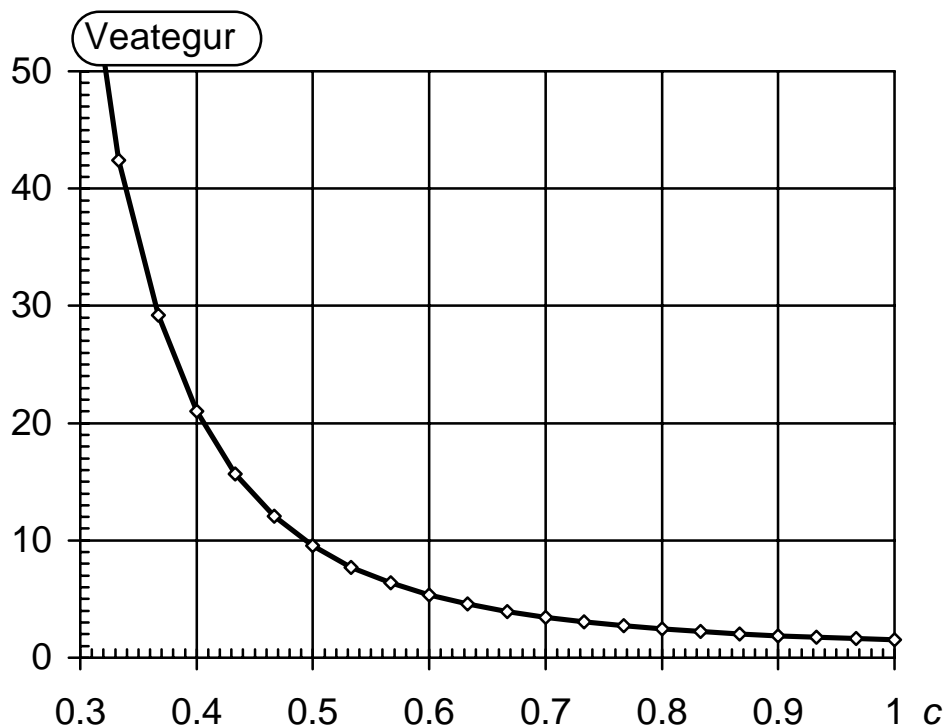
Aprioorsetest võrranditest saab aprioorse maatriksi  $G_p$  täpselt samal viisil kui mõõtmisvõrranditest aparaadimaatriksi. Kui nüüd edasi jätkata ilma mõõtmisvõrranditeta, saame aprioorse informatsioonimaatriksi

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{G}_p^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{G}_p.$$

Otstarbekam on aga käsitleda arvutamisel kõiki võrrandeid üht ja sama viisi nagu oleks tegemist mõõtmisvõrranditega. Tulemuse poolest on see eelmises punktis käsitletuga ekvivalentne.

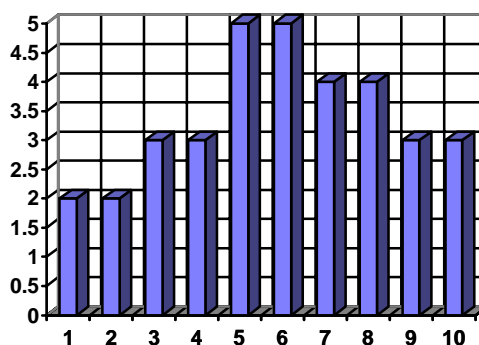
## Mõõtmise stabiliseerimine mudeli struktuuri abil.

Meenutame tuttavat graafikut:



Valides diskretiseerimissammuks  $c = 0.4$ , saame veavõimenduseks 21. Defineerime nüüd aprioorse informatsiooni võrranditega, mis nõuavad spektri naaberpunktide paarikaupa võrdsust ( $\sigma = 0$ ):

$$x_1 = x_2, \quad x_3 = x_4, \quad x_5 = x_6 \quad \text{jne.}$$

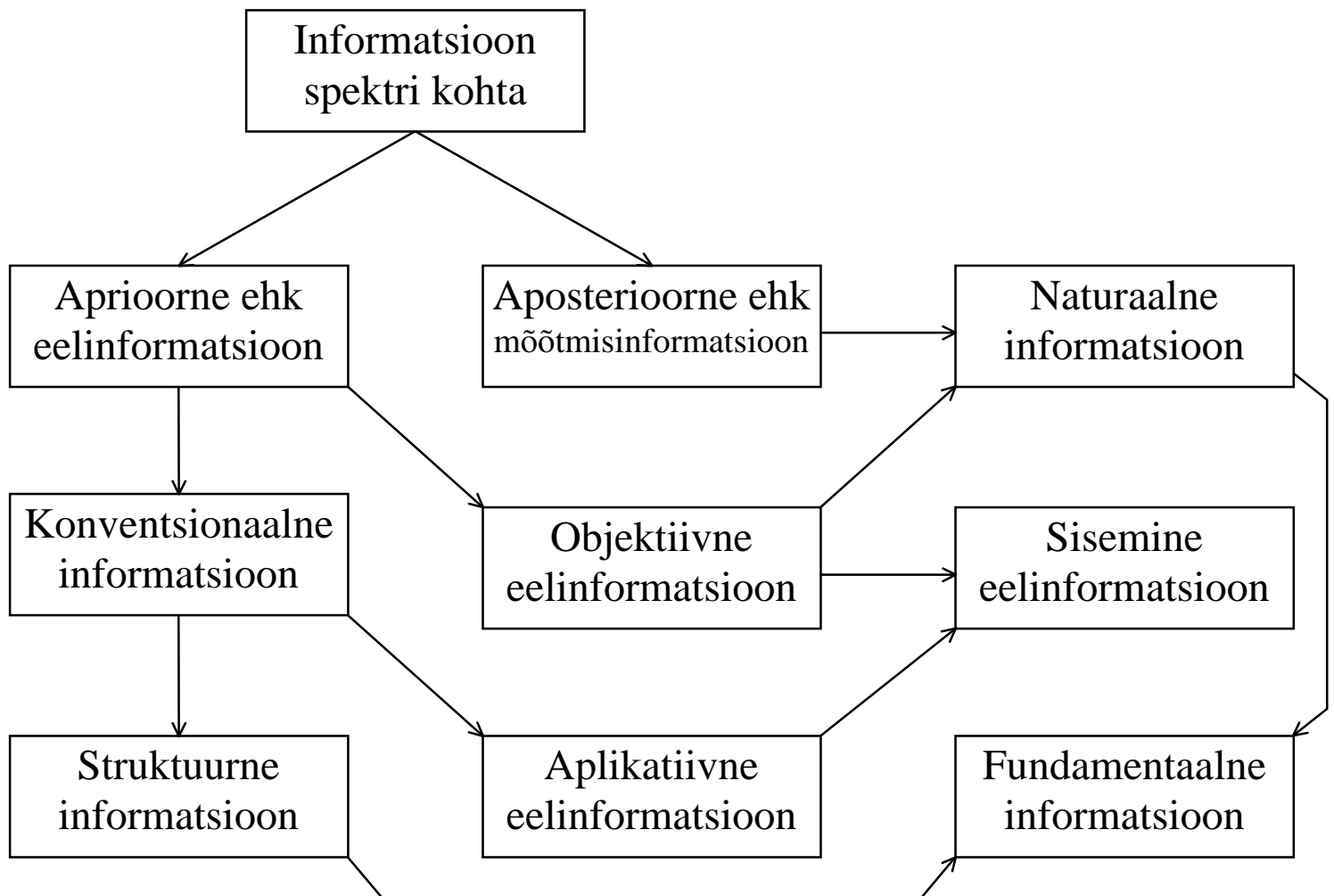


Nõue on samaväärne diskretiseerimissammu kahekordistamisega.

Kui  $c = 0.8$ , saame veavõimenduseks 2.5 mis on 8.5 korda vähem kui algse diskretiseerimissammu puhul. Täpselt sama tulemuse saaksime ka aprioorseid võrrandeid ja/või aprioorset informatsioonimaatriksit kasutades.

*Küsimus:* Milliseid stabiliseerimismeetodeid oleme käsitlenud ja kuivõrd nad sobivad füüsiku jaoks praktiliseks kasutamiseks?

## Mõõtmise ja andmeteisenduse informatsiooni allikad



Informatsioon müra kohta?

## 12. Empiiriliste võrrandite koostamine

### Lähendusvalemid ja empiirilised võrrandid.

Lähendusvalemite üheks tuntud rakenduseks on mittealgebraliste funktsioonide arvutamine. Suvaline arvuti oskab vahetult teha ainult algebralisi põhitehteid. Funktsioone alates siinusest ja koosinusest saab arvutada ainult algebraliste lähendusvalemite abil. Lihtsaim meetod selliste valemite tuletamiseks on funktsiooni astmeritta arendamine ja rea esimeste liikmete kasutamine lähendusvalemina. Arvutusmatemaatika kursustes näidatakse, kuidas lõplike summade kordajaid määrata nii, et saada lõigatud astmerekordajaga võrreldes veidi täpsemaid tulemusi või hoida kokku arvutustööd. Meie kursuses neid probleeme ei käsitleta.

Meie vaatleme probleemi, kus mingi funktsioon on algselt kirjeldatud ainult numbrilise tabeliga ja otsitavaks on funktsiooni ligikaudne analüütiline avaldis.

Algne numbriline tabel võib olla arvutuslikku päritolu, näiteks koostatud mingi diferentsiaalvõrrandi numbrilise lahendamise teel. Niisugust tabelit võib koostada kuitahes täpselt.

Algne numbriline tabel võib olla saadud ka mõõtmiste teel ning varustatud tabeliväärtuse mõõtmisvigade hinnangutega. Sellisel juhul nimetatakse otsitavat funktsiooniavaldist empiiriliseks võrrandiks.

Otsitava funktsiooni matemaatiline struktuur võib olla määratud teoreetiliste kaalutlustega. Tegelikult otsitavateks on siis teoreetilise mudeli parameetrid.

Paraku tuleb sageli ette olukordi, kus otsitava funktsiooni kohta pole pea mingeid eelteadmisi peale mõõtmistulemuste tabeli. Otsitavaks on siis ka funktsiooni matemaatiline struktuur. Funktsiooni matemaatilise struktuuri varieerimiseks on lõpmatu palju võimalusi ja sellise varieerimise kirjeldamiseks ei ole olemas rakendusliku väärtusega teooriat. Funktsiooni struktuuri otsimine on kunst ja meetodiks teoreetilise süsteemita katsetamine.

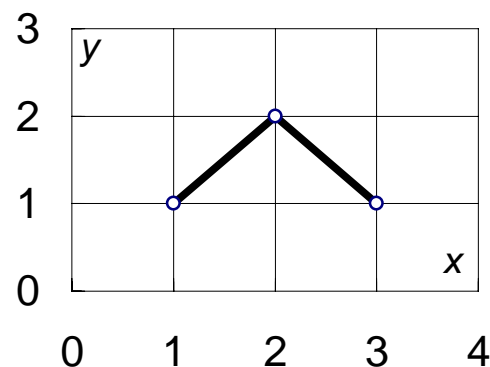
Niiviisi osutub lähendusvalemite koostamine paljuharuliseks õpetuseks, millest me jõuame käsitleda vaid üksikuid valitud küsimusi.

## Kahe muutuja lineaarne ülesanne

Vaatleme kaht juhuslikku viga sisaldavat suurust  $x$  ja  $y$ . Ühe suuruse tinglikuks tõenäosusjaotuseks nimetatakse suuruse jaotust juhul, kui teine suurus pole vaba, vaid fikseeritud kindlal nivool. Kui ühe suuruse tinglik tõenäosusjaotus sõltub teisest suurusest siis on suurused statistiliselt sõltuvad. Üks sõltuvuse kirjeldamise vahendeid on regressioon  $\mu_{y/x} = f(x)$ . Seda kirjeldavat võrrandit nimetatakse ühe muutuja regressioonmudeliks.

Näide:

| $x$ | $\mu_{y/x}$ |
|-----|-------------|
| 1   | 1           |
| 2   | 2           |
| 3   | 1           |



Lihtsaimal erijuhul on regressioon lineaarne

$$\mu_{y/x} = ax + b, \quad \mu_{x/y} = cy + d.$$

Tõenäosusteoorias näidatakse, et

$$a = \rho_{xy} \sigma_y / \sigma_x, \quad b = \mu_y - a \mu_x.$$

Lineaarse regressiooni konstantide hindamiseks piisab arvutada tavalised ühemõõtmelise analüüsi statistikud ja korrelatsioonikordaja hinnang.

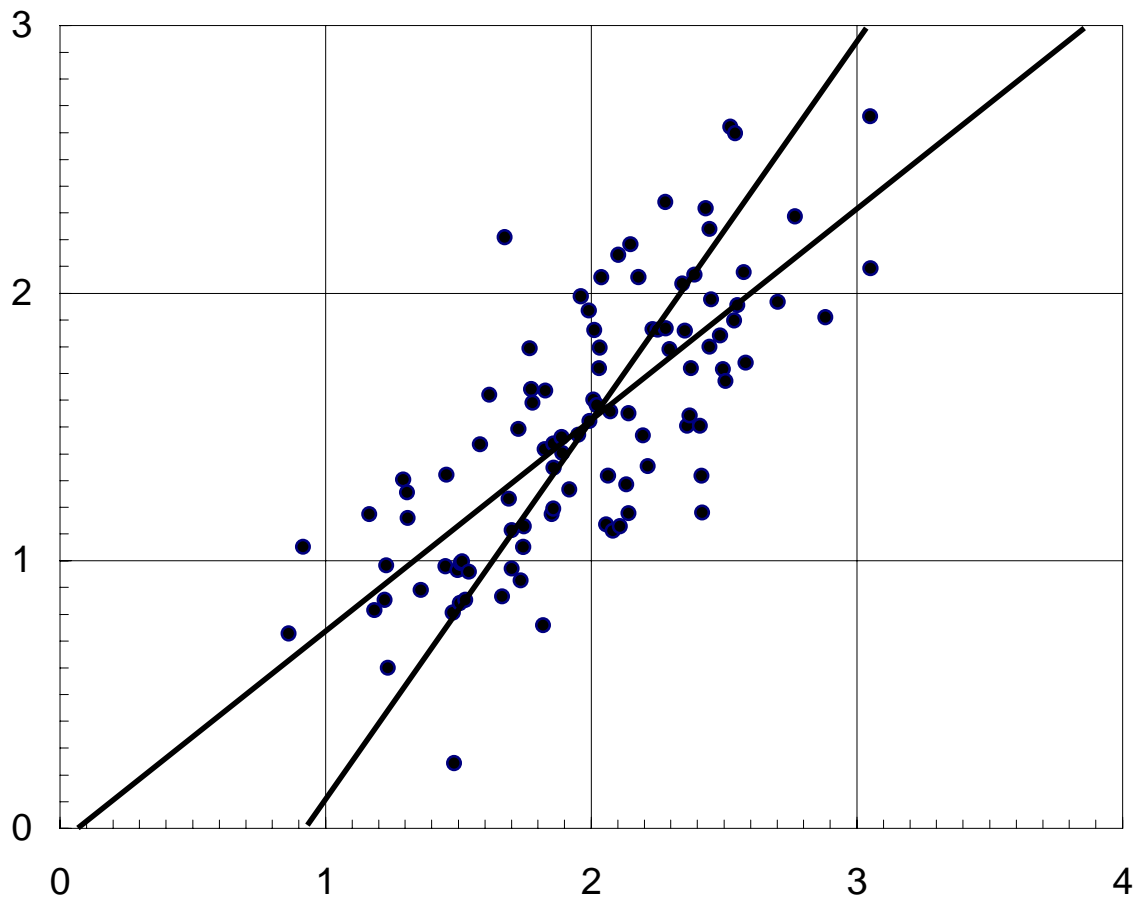
Hälbe  $y - (ax + b)$  ruudu keskvärtuse ruutjuurt nimetatakse jääkhälbeks. Jääkhälve on

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}$$

Hälvete suhe mõõdab lineaarse prognoosi informatsioonihulka

$$I = \log \frac{\sigma_y}{\sigma_{y/x}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1 - \rho_{xy}^2}$$

Näide:



$$m_x = 1.98, \quad m_y = 1.51, \quad s_x = 0.46, \quad s_y = 0.49, \quad r = 0.742,$$

$$\mu_{y/x} \approx 0.788x - 0.053, \quad \mu_{x/y} \approx 0.698y + 0.927$$

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2} \approx 0.49 \times 0.67 = 0.33$$

Regressioonprognoosi  $y \approx 0.788x - 0.053$       $I = 0.58$  bitti.

## Praktiline algoritm

Lineaarne regressioonimudel  $y = \alpha x + \beta$

Tähistused:  $x = \{x_i\}$ ,  $y = \{y_i\}$ ,  $i = 1..n$   $\Sigma z = \sum_{i=1}^n z_i$

*Parameetrid:* *Hinnangud:*

Keskväärtused  $\bar{x}$   $\bar{y}$

Standardhälbed  $\hat{s}_x$   $\hat{s}_y$   $s_x$   $s_y$

Korrelatsioonikordaja  $r$

Regressiooniparameetrid  $a$   $b$

Mõõtmise ajal kogutakse 6 summat väärtustest:

1,  $x$ ,  $y$ ,  $xx$ ,  $yy$ ,  $xy$

Pärast mõõtmisi arvutatakse:

$$n = \Sigma 1$$

$$\bar{x} = \Sigma x / n$$

$$\bar{y} = \Sigma y / n$$

$$\hat{s}_x^2 = \Sigma xx / n - \bar{x}^2$$

$$s_x^2 = n\hat{s}_x^2 / (n-1)$$

$$\hat{s}_y^2 = \Sigma yy / n - \bar{y}^2$$

$$s_y^2 = n\hat{s}_y^2 / (n-1)$$

$$r = (\Sigma xy / n - \bar{x}\bar{y}) / (\hat{s}_x \hat{s}_y)$$

$$a = rs_y / s_x$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

## Mitmene lineaarne regressioonimudel.

Lähteandmete tabel:

| $j$ | $x_1$ | $x_2$ | ..... | $x_n$ | $y_j$ | $\sigma(y_j)$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| 1   | 2.34  | 14.7  | ..... | -2.3  | 18.6  | 0.9           |
| 2   | 3.12  | 13.1  | ..... | -0.2  | 22.3  | 1.5           |
| 3   | 0.75  | 9.9   | ..... | 1.7   | 31.0  | 1.3           |
| ... | ...   | ...   | ..... | ...   | ...   | ...           |

Homogeenne mudel

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \xi$$

Iga üksikmõõtmise jaoks kirjutatuna

$$y_j = \sum a_i x_{ji} + \xi_i = \sum x_{ji} a_i + \xi_i$$

Tähistame

$$\mathbf{X} = \{x_{ji}\} \quad \mathbf{D} = \text{cov}(\xi)$$

Saame

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \xi$$

Vormilt on see täpselt sama kui lineaarse aparadi võrrand ja  $\mathbf{a}$  hindmiseks sobib Gauss-Markovi algoritm:

$$\mathbf{C} := (\mathbf{X}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X})^{-1}$$

$$\mathbf{a} := \mathbf{C} \mathbf{X}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y}$$

Mitthehomogeenses mudelis on lisaks vabaliige

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \xi$$

Sellise mudeli saab formaalselt taandada homogeenseks mudeliks valides

$$i = 0 \dots n \quad \text{ja} \quad x_0 \equiv 1$$

## Ühe muutuja funktsiooni lähendusvalemi koostamine.

Lihtsaim moodus ebalineaarse funktsiooni kirjeldamiseks on valida mingi baasfunktsioonide komplekt  $\{f_i(x)\}$  ja esitada  $y \approx y^* = f(x)$  koordinaatfunktsioonide kaalutud summa kujul:

$$y^* = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

*Näited:*

$$n = 2, f_1(x) = x, f_2(x) = 1,$$

$$f_i(x) = x^{i-1},$$

$$n = 5, f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin(x), f_3(x) = \cos(x), f_4(x) = \sin(2x), f_5(x) = \cos(2x).$$

Koordinaatfunktsioonide väärtused  $x$  fikseeritud tasemetel on arvud:

$$x_{ji} = f_i(x_j) \quad (i \text{ numereerib koordinaatfunktsioone ja } j \text{ katsepunkte})$$

ja prognoosivõrrand saab tuttava kuju:

$$y_j \approx y_j^* = a_1 x_{j1} + a_2 x_{j2} + \dots + a_n x_{jn} = \sum_{i=1}^n a_i x_{ji} = \sum_{i=1}^n x_{ji} a_i, \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{Xa}$$

Siinkohal jääb probleemiks: kuidas valida koordinaatfunktsioone?

Mõned lihtsamad ebalineaarsed mudelid taanduvad teistsugusel viisil lineaarmudeliks.

$$\text{Näited: } y = ax^b \rightarrow \ln y = \ln a + b \ln x, \quad y = ab^x \rightarrow \ln y = \ln a + x \ln b,$$

Ebalineaarse ja lineaarmudeliks mittetaandatava parameetrilise mudeli

$$y = f(x|a_1, a_2, \dots, a_m) + \xi$$

parameetrite otsimiseks vähimruutude meetodil tarvis lahendada arvutusmahukas ekstreemumülesanne, mis sõltumatute mõõtmisvigade puhul on

$$g(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_j \frac{(y_j - f(x_j|a_1, a_2, \dots, a_m))^2}{\xi_j^2} \rightarrow \min$$

*Näide:* SigmaStat.

Sageli on ebalineaarne mudel pärit teoreetilistest kaalutlustest ja sihitu otsing pole ei tarvilik ega õigustatud. Niisugustel juhtudel räägitakse ka poolempiirilistest mudelitest.