6. Statistilised hüpoteesid

Mõõtmistulemuste töötlemisel arvutatakse lisaks punkthinnangutele ka vahemikhinnanguid, mille kirjutamisel kasutatakse sageli ± märki. Vahemikhinnangute koostamine ja tõlgendamine tugineb statistiliste hüpoteeside teooriale.

Hüpoteeside formuleerimine

Sisuline hüpotees, formaliseerimine ja statistiline hüpotees.

Näide: * aiateibad (kasvavad/kahanevad/muutuvad) kuuvalguse mõjul,
* aiateivaste pikkuste (keskväärtus/mediaan/jaotusseadus) muutub kuuvalgetel öödel (pikemaks/…../..…),
* aiateivaste hommikuste mõõtmistulemuste hulk on pärit teisest üldkogumist kui õhtuste mõõtmistulemuste hulk, (kusjuures …..).

Hüpoteeside tüübid

Näited: a) normaaljaotusega suuruse $\mu = m$ ja $\sigma = s$,
b) normaaljaotusega suuruse $\mu = m$,
c) suuruse jaotusseadus on normaaljaotusseadus,
d) kaks suurust alluvad samale jaotusseadusele
e) normaaljaotusega suuruse $\mu > m$ ja $\sigma = s$.

Parameetrilised (a, b, e) ja mitteparameetrilised (c, d) hüpoteesid.
Lihtsad (a) ja ühendhüpoteesid (b, e).

Valimiruum ja testipiirkonnad

Kriitiline piirkond w – $\boldsymbol{x} \in w \Rightarrow$ hüpotees kummutatakse,
vastuvõtmise piirkond $W – w$, hüpoteesi tunnustatakse.

Alternatiivhüpoteesid

Pideva jaotuse puhul on “täpse tabamuse” tõenäosus null, milline mõte on hüpoteesidel (a–e)?

Praktilisem ülesanne: teha valik kahe mudeli vahel.

Tüüpsituatsioon: mitteformaalsest probleemist otseselt tulenev primaarhüpotees väidab mingi efekti olemasolu ja osutub ühendhüpoteesiks. Alternatiiv väidab efekti puudumist ja see formuleeritakse võimalikult lihtsalt kontrollitavana.
Sellisel juhul nimetatakse alternatiivi nullhüpoteesiks.

Näide

Sisuline hüpotees: magnettorm mõjustab inimeste enesetunnet.

Eksperiment: *n* vaatlusalust ei informeerita magnettormidest ja nad hindavad igal õhtul enda subjektiivset enesetunnet 100 pallises skaalas.

Defineerime x_i = hinne magnettormi päeval – hinne eelmisel päeval.

Aprioorne eeldus: mõju puudumise korral oleks *x* negatiivse ja positiivse väärtuse tõenäosused võrdsed.

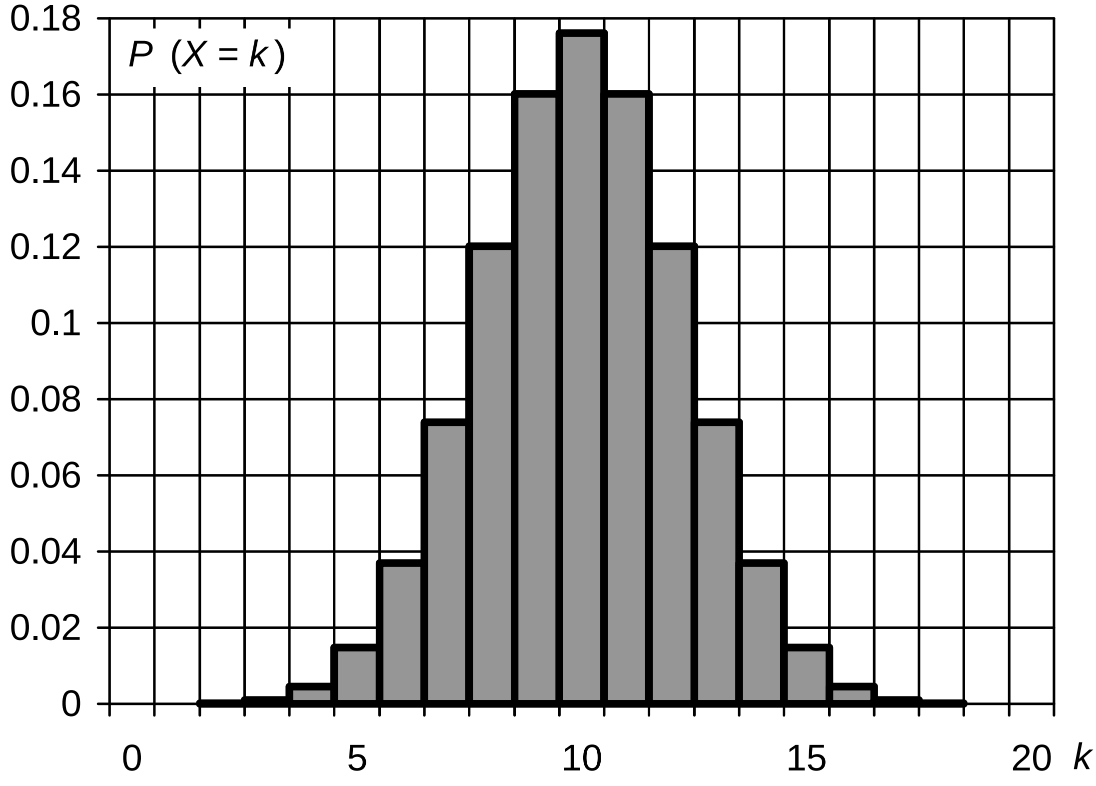
Statistiline primaarhüpotees H_1: *x* mediaan erineb nullist.

Altenatiiv H_o: *x* mediaan on null (nullhüpotees, mõju puudub).

H_o on lihthüpotees.

n – valimi maht, *X* – positiivsete nihete arv valimis. Jaotusseadus:

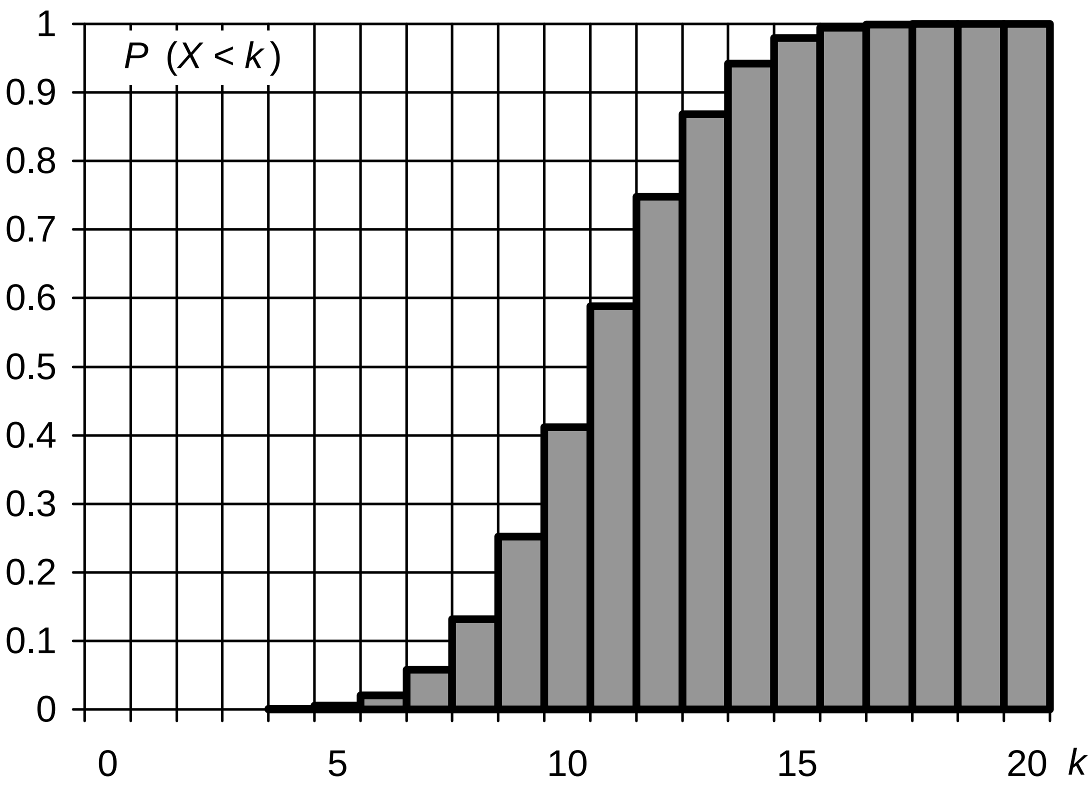
$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!2^n}$$



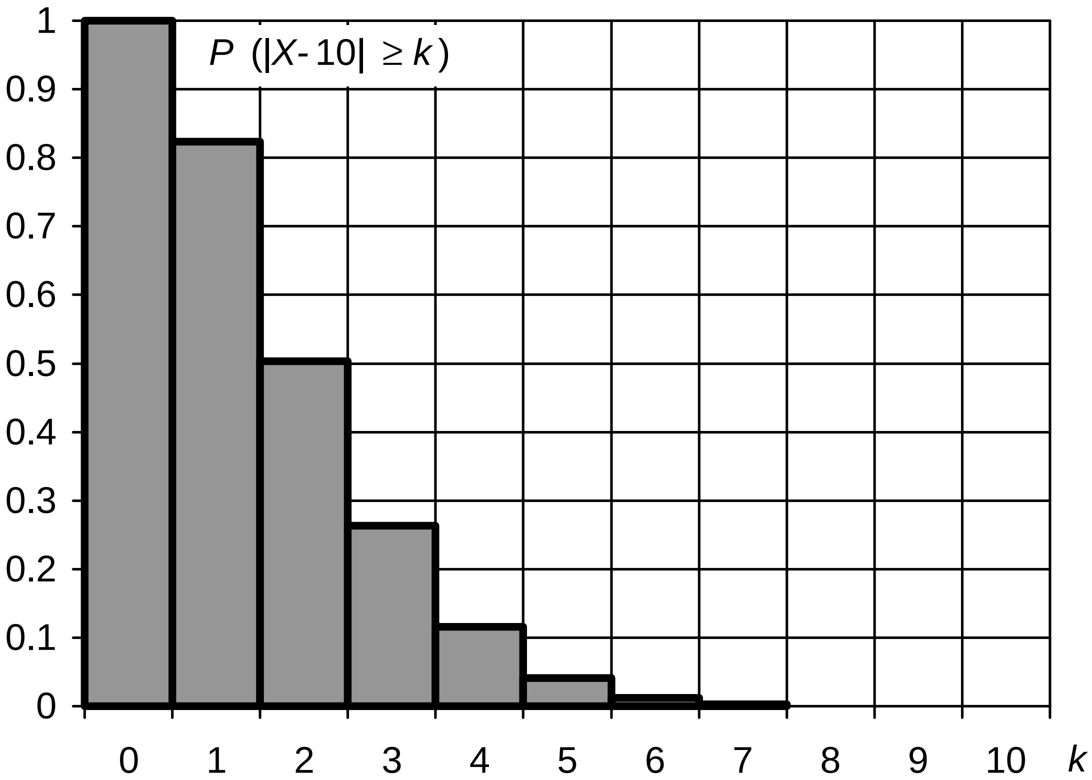
Binoomjaotuse tõenäosused erijuhul n = 20, p = q = 0.5

Binoomjaotus erijuhul n = 20, p = q = 0.5

Jaotusfunktsioon diskreetsel skaalal



Tõenäosus, et absoluutne tsentraalhälve pole väiksem ettantud arvust *k*



k	$P\,(\lvert X-10\rvert \geq k)$
0	1.000000
1	0.823803
2	0.503445
3	0.263176
4	0.115318
5	0.041389
6	0.011818
7	0.002577
8	0.000402

Testipiirkonna konstrueerimine ühemõõtmelise valimifunktsiooni abil.

Kahepoolsed ja ühepoolsed testid

Hüpoteeside kontrollimise standardmeetod ja võimalikud vead

- Hüpoteesile H_1 Püstitatakse selline alternatiiv H_o, mille korral mingi statistiku *t* tõenäosusjaotus on teoreetilise mudeli abil määratav.
- Määratakse statistiku väärtusete piirkond *S*, mille puhul alternatiiv H_o kuulutatakse uskumatuks ja H_1 tunnustatavaks.

Tegelikult on õige	Testi tulemus	
	$t \notin S \Rightarrow H_o$	$t \in S \Rightarrow H_1$
H_o	Tehakse õige otsus	Esimest liiki viga
H_1	Teist liiki viga	Tehakse õige otsus

Olulisuse nivoo q = esimest liiki vea suurim lubatud tõenäosus.

Usaldusnivoo p = 1 – *q*.

Testi võimsus = teist liiki vea vältimise tõenäosus.

7. Vahemikhinnangud

Gaussi ülesanne

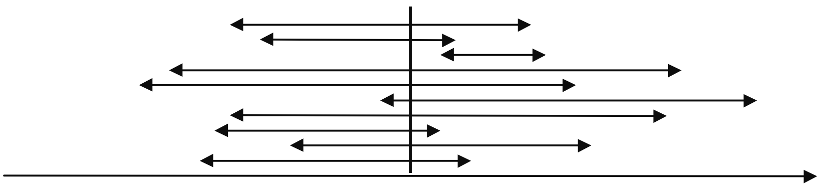
Normaalselt jaotatud mõõtmisvigadega suuruse mõõtmistulemused on $x_1 \ldots x_n$. Leida vahemik (a, b), mis p% tõenäosusega sisaldaks X kesk-väärtust μ. Lisaeeldus: n on suur.

Lahendus: Arvutame μ ja σ_m punkthinnangud m ja $s_m = s/\sqrt{n}$.
Tõenäosus, et m jääb vahemikku $\mu \pm k\sigma_m$ on $p_k = \Phi(k) - \Phi(-k)$.

$\Phi(k) = P\left(\dfrac{m-\mu}{\sigma_m} < k\right)$ – standardiseeritud normaaljaotusfunktsioon.

Valime k nii, et $p_k = p$%. See on tõlgendatav kui tõenäosus, et m ja μ vahe ei ületa $k\sigma_m$ ehk $\mu = m \pm k\sigma_m$. Kui n on suur, siis $\sigma_m \approx s_m$ ja $\mu \approx m \pm ks_m$.

p	90%	99%	99.9%	99.99%
k	1.64	2.58	3.29	3.89



Näide: 10 vahemikhinnangut (p = 90%)

Studenti ülesanne

Gaussi lahenduse puudulikkus lõpliku n puhul oli selge juba Gaussile endale. Lahenduse leidis aga alles 1908. a. Gosset.

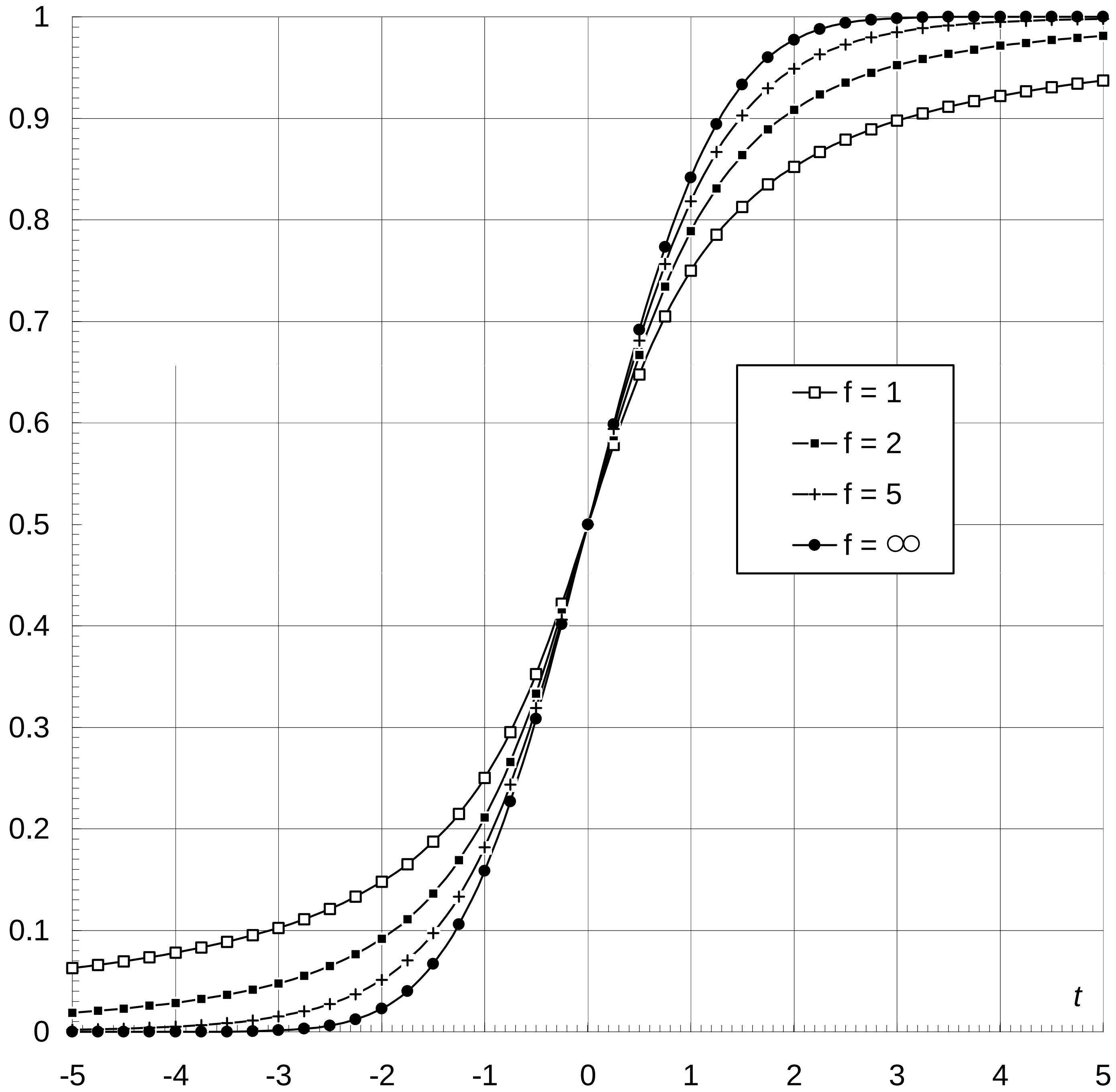
Idee: kuidas on jaotatud statistik $t_f = \dfrac{m-\mu}{s_m}$?

(n mõõtmist, $f = n - 1$ vabadusastet)

$$S_f(t) = P\left(\frac{m-\mu}{s_m} < t\right)$$

$\mu = m \pm ts_m$, kus $p = S_f(t) - S_f(-t)$

Studenti jaotus (f = 1 korral sama kui Cauchy jaotus, f = ∞ korral sama kui Gaussi jaotus)



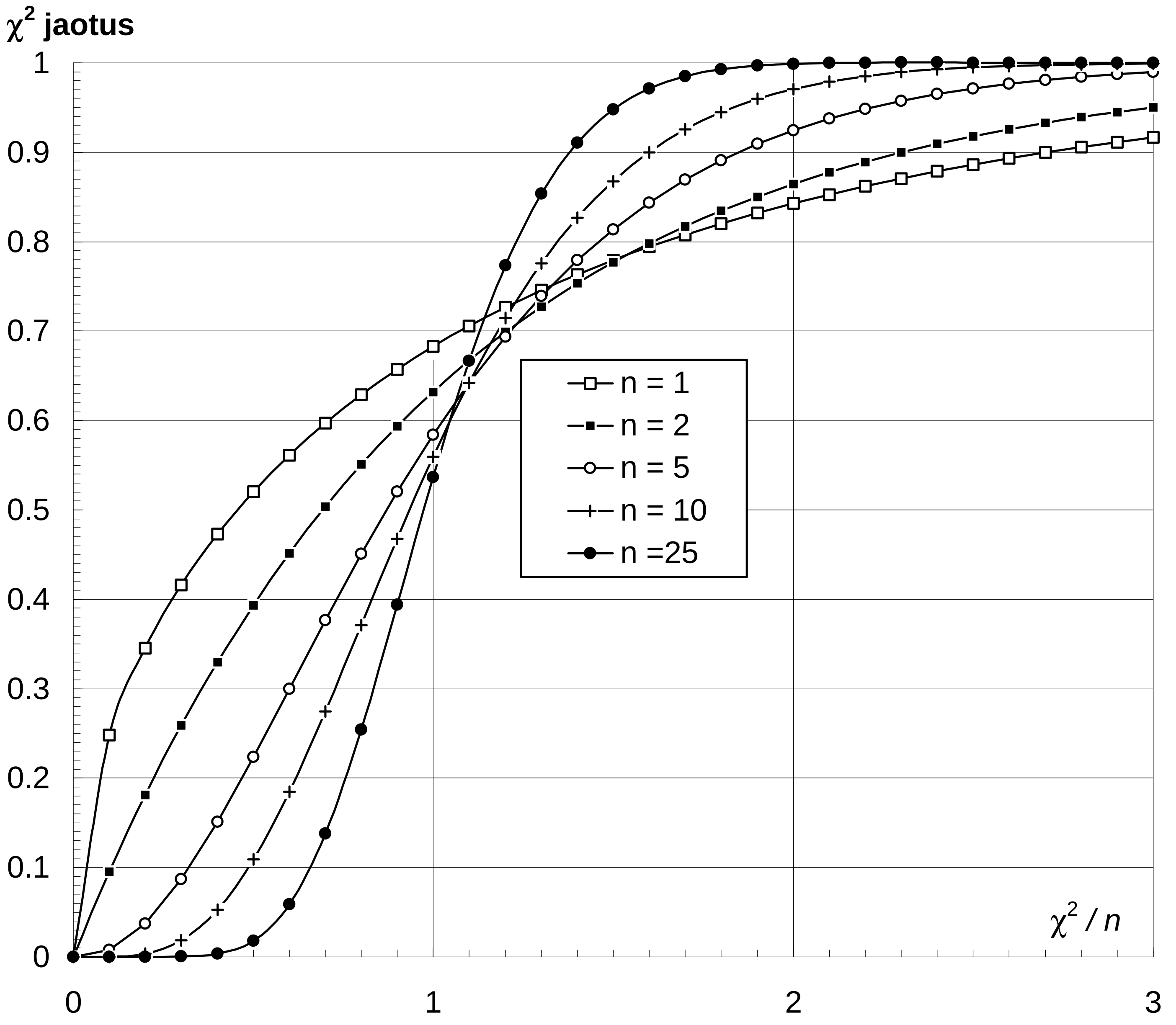
Vahemikhinnangute koostamise üldine meetod

Statistiline hüpotees: hinnatav suurus on vahemikus (a, b), alternatiiv: hinnatav suurus on väljaspool vahemikku (a, b). Koostatakse hüpoteesi kontrollimise eeskiri ja leitakse minimaalne võimalik alternatiivi kummutamise olulisuse nivoo q. $p = 1 - q$.

Ülesanne: konstrueerida vahemik (a, b) nii, et etteantud p puhul $b - a \to \min$.

Hii-ruut jaotus ja dispersiooni vahemikhinnang

$$X \sim \mathrm{N}\,(0,\,1),\quad \chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2\text{, jaotusfunktsioon}\quad F_n(x) = P\,(\chi_n^2 < x)$$



$$(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Mitteparameetrilised vahemikhinnangud

Hinnangu $\lambda \in (x_{(1)}, x_{(n)})$ usaldustõenäosus.

Hinnangu $\lambda \in (x_{(k)}, x_{(n+1-k)})$ usaldustõenäosus.

Matemaatilise statistika erifunktsioonid

```
{$I statfunc.pas}

 function Fisher  (m, n : integer; x : real) : real;
 function Hii2    (m : integer; h2 : real) : real;
 function Student (n : integer; t : real) : real;
 function Gauss   (x : real) : real;
 function Binom   (m, n : integer; p : real) : real;

========================================================

function Student (n : integer; t : real) : real;
   {Probability of (Student statistic < t) using Fisher}
   var sign : real;
   begin
   if t < 0 then sign := -1 else sign := 1;
   Student := 0.5*(1+sign*Fisher (1, n, sqr (t)))
   end;

========================================================

Program StudTab;
{$I statfunc.pas}

const f : array [1..5] of integer = (1, 2, 3, 5, 30000);
var i, j : integer; t : real; s : text;

begin
assign (s, 'stud.tab'); rewrite (s);
for i := 0 to 40 do begin
   t := (i-20)/4;
   write (s, t:7:2);
   for j := 1 to 5 do write (s, student (f[j], t):7:4);
   writeln (s);
end;
close (s);
end.
```