

6. Statistilised hüpoteesid

Mõõtmistulemuste töötlemisel arvutatakse lisaks punkthinnangutele ka vahemikhinnanguid, mille kirjutamisel kasutatakse sageli \pm märki. Vahemikhinnangute koostamine ja tõlgendamine tugineb statistiliste hüpoteeside teooriale.

Hüpoteeside formuleerimine

Sisuline hüpotees, formaliseerimine ja statistiline hüpotees.

Näide: * aiateibad (kasvavad/kahanevad/muutuvad) kuuvalguse mõjul,
 * aiateivaste pikkuste (keskväärtus/mediaan/jaotusseadus) muutub kuuvalgetel öödel (pikemaks/...../.....),
 * aiateivaste hommikuste mõõtmistulemuste hulk on pärit teisest üldkogumist kui õhtuste mõõtmistulemuste hulk, (kusjuures).

Hüpoteeside tüübid

Näited: a) normaaljaotusega suuruse $\mu = m$ ja $\sigma = s$,
 b) normaaljaotusega suuruse $\mu = m$,
 c) suuruse jaotusseadus on normaaljaotusseadus,
 d) kaks suurust alluvad samale jaotusseadusele
 e) normaaljaotusega suuruse $\mu > m$ ja $\sigma = s$.

Parameetrilised (a, b, e) ja mitteparameetrilised (c, d) hüpoteesid.
 Lihtsad (a) ja ühendhüpoteesid (b, e).

Valimiruum ja testipiirkonnad

Kriitiline piirkond $w - x \in w \Rightarrow$ hüpotees kummutatakse, vastuvõtmise piirkond $W-w$, hüpoteesi tunnustatakse.

Alternatiivhüpoteesid

Pideva jaotuse puhul on “täpse tabamuse” tõenäosus null, milline mõte on hüpoteesidel (a–e)?

Praktilisem ülesanne: teha valik kahe mudeli vahel.

Tüüpsituatsioon: mitteformaalsest probleemist otseselt tulenev primaarhüpotees väidab mingi efekti olemasolu ja osutub ühendhüpoteesiks. Alternatiiv väidab efekti puudumist ja see formuleeritakse võimalikult lihtsalt kontrollitavana.

Sellisel juhul nimetatakse alternatiivi nullhüpoteesiks.

Näide

Sisuline hüpotees: magnetorm mõjustab inimeste enesetunnet.

Eksperiment: n vaatlusalust ei informeerita magnetormidest ja nad hindavad igal õhtul enda subjektiivset enesetunnet 100 pallises skaalas.

Defineerime x_i = hinne magnetormi päeval – hinne eelmisel päeval.

Aprioorne eeldus: mõju puudumise korral oleks x negatiivse ja positiivse väärtuse tõenäosused võrdsed.

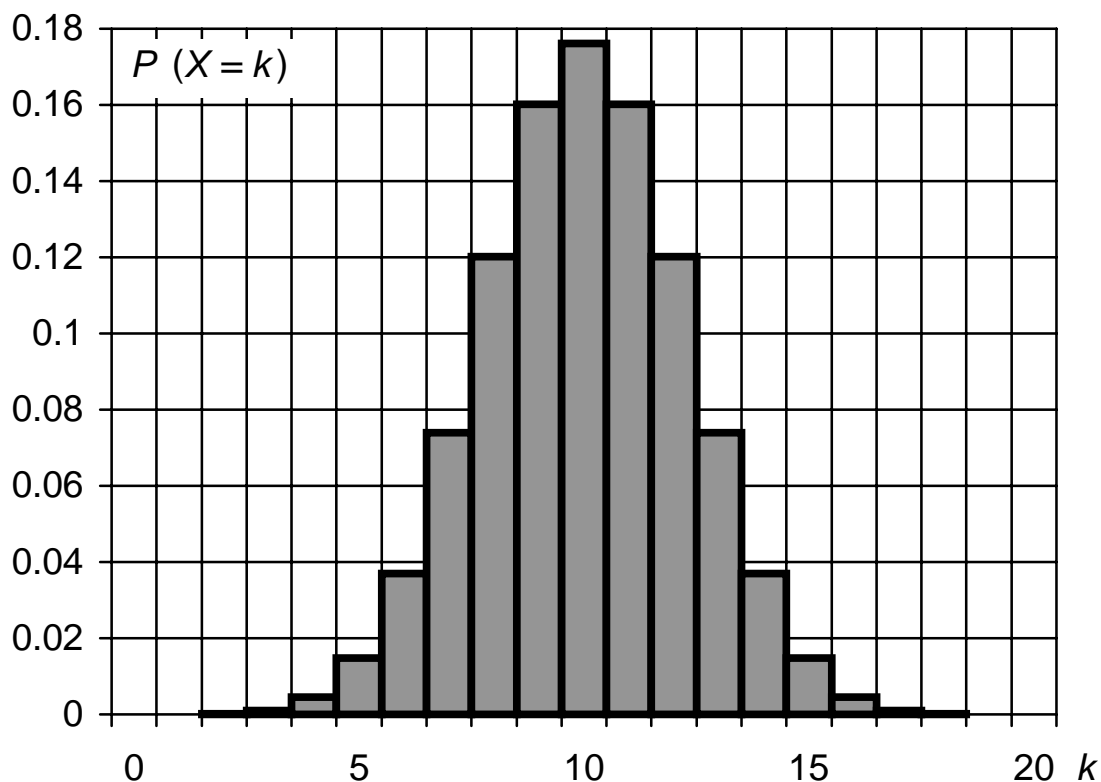
Statistiline primaarhüpotees H_1 : x mediaan erineb nullist.

Alternatiiv H_0 : x mediaan on null (nullhüpotees, mõju puudub).

H_0 on lihthüpotees.

n – valimi maht, X – positiivsete nihete arv valimis. Jaotusseadus:

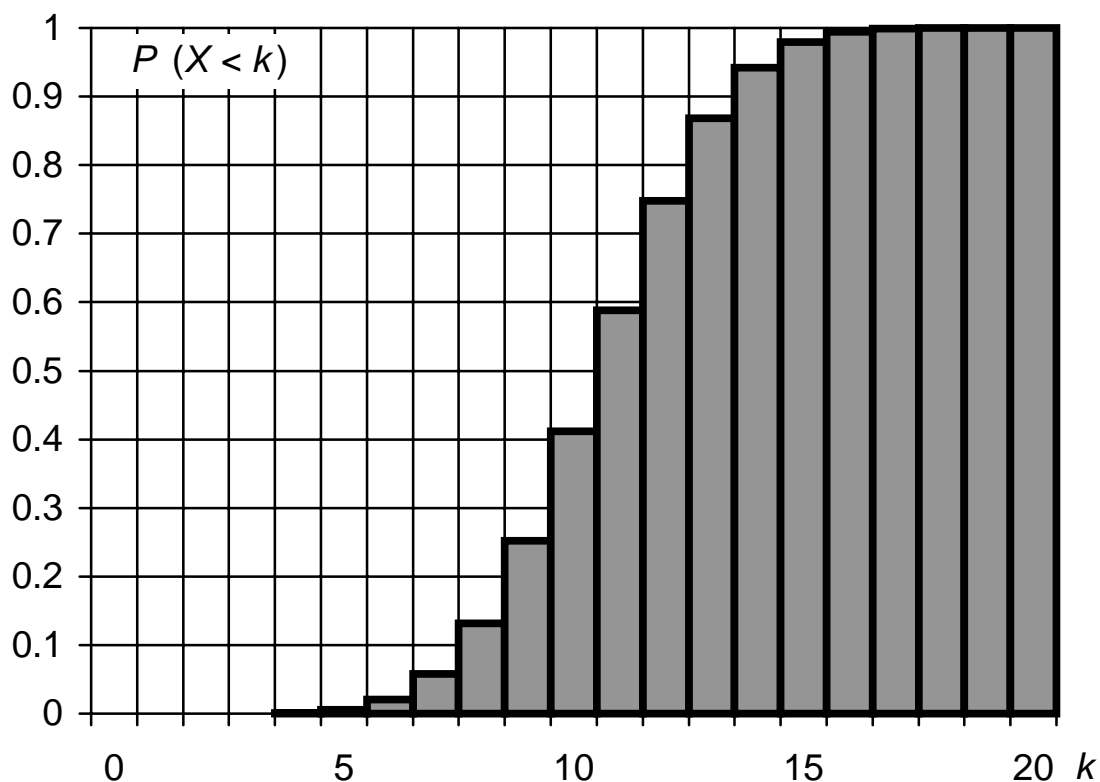
$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!2^n}$$



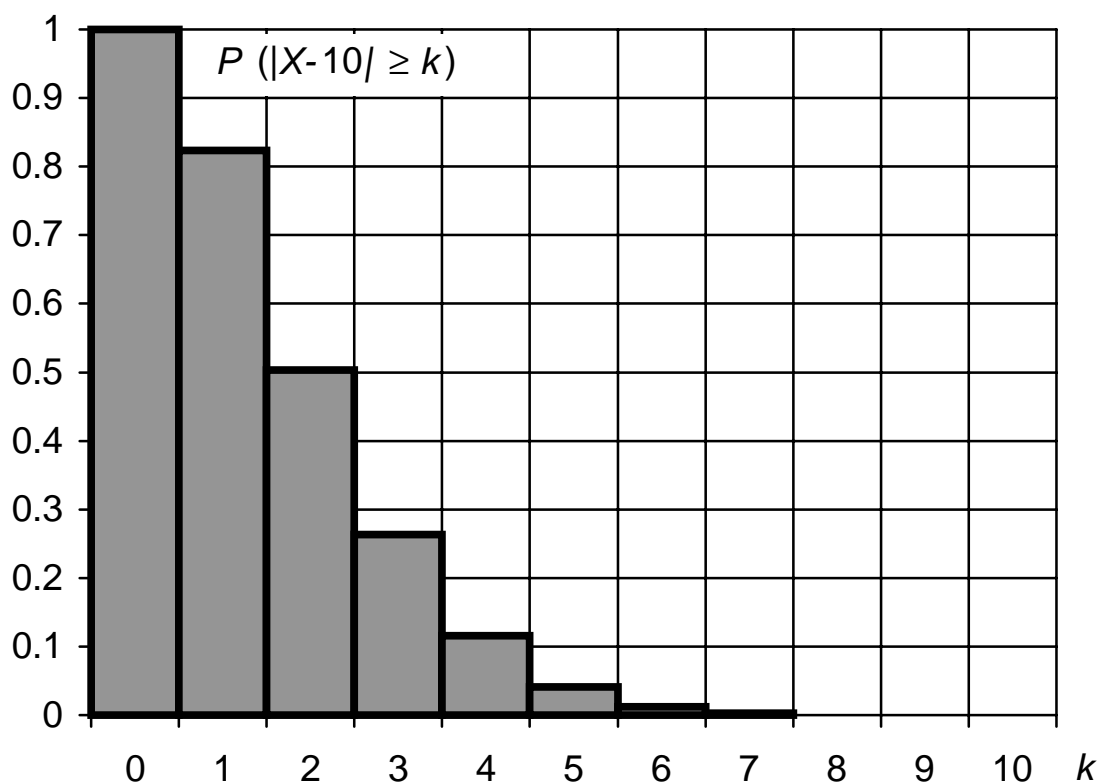
Binoomjaotuse tõenäosused erijuhul $n = 20$, $p = q = 0.5$

Binoomjaotus erijuhul $n = 20, p = q = 0.5$

Jaotusfunktsioon diskreetsel skaalal



Tõenäosus, et absoluutne tsentraalhälve pole väiksem ettantud arvust k



k	$P(X-10 \geq k)$
0	1.000000
1	0.823803
2	0.503445
3	0.263176
4	0.115318
5	0.041389
6	0.011818
7	0.002577
8	0.000402

Testipiirkonna konstrueerimine ühemõõtmelise valimifunktsiooni abil.
Kahepoolsed ja ühepoolsed testid

Hüpoteeside kontrollimise standardmeetod ja võimalikud vead

- Hüpoteesile H_1 Püstitatakse selline alternatiiv H_0 , mille korral mingi statistiku t tõenäosusjaotus on teoreetilise mudeli abil määratav.
- Määratakse statistiku väärtuste piirkond S , mille puhul alternatiiv H_0 kuulutatakse uskumatuks ja H_1 tunnustatavaks.

Tegelikult on õige	Testi tulemus	
	$t \notin S \Rightarrow H_0$	$t \in S \Rightarrow H_1$
H_0	Tehakse õige otsus	Esimest liiki viga
H_1	Teist liiki viga	Tehakse õige otsus

Olulisuse nivoo q = esimest liiki vea suurim lubatud tõenäosus.

Usaldusnivoo $p = 1 - q$.

Testi võimsus = teist liiki vea vältimise tõenäosus.

7. Vahemikhinnangud

Gaussi ülesanne

Normaalselt jaotatud mõõtmisvigadega suuruse mõõtmistulemused on $x_1 \dots x_n$. Leida vahemik (a, b) , mis $p\%$ tõenäosusega sisaldaks X kesk-
väärtust μ . Lisaeeldus: n on suur.

Lahendus: Arvutame μ ja σ_m punkthinnangud m ja $s_m = s/\sqrt{n}$.

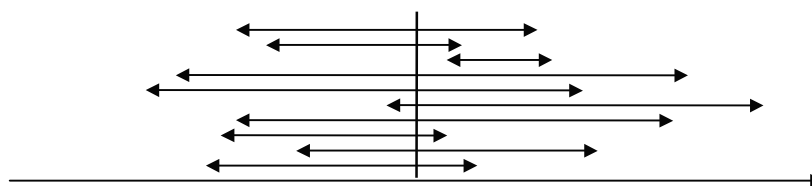
Tõenäosus, et m jääb vahemikku $\mu \pm k\sigma_m$ on $p_k = \Phi(k) - \Phi(-k)$.

$\Phi(k) = P\left(\frac{m - \mu}{\sigma_m} < k\right)$ – standardiseeritud normaaljaotusfunktsioon.

Valime k nii, et $p_k = p\%$. See on tõlgendatav kui tõenäosus, et m ja μ vahe ei ületa $k\sigma_m$ ehk $\mu = m \pm k\sigma_m$. Kui n on suur,

siis $\sigma_m \approx s_m$ ja $\mu \approx m \pm ks_m$.

p	90%	99%	99.9%	99.99%
k	1.64	2.58	3.29	3.89



Näide: 10 vahemikhinnangut ($p = 90\%$)

Studenti ülesanne

Gaussi lahenduse puudulikkus lõpliku n puhul oli selge juba Gaussile endale. Lahenduse leidis aga alles 1908. a. Gosset.

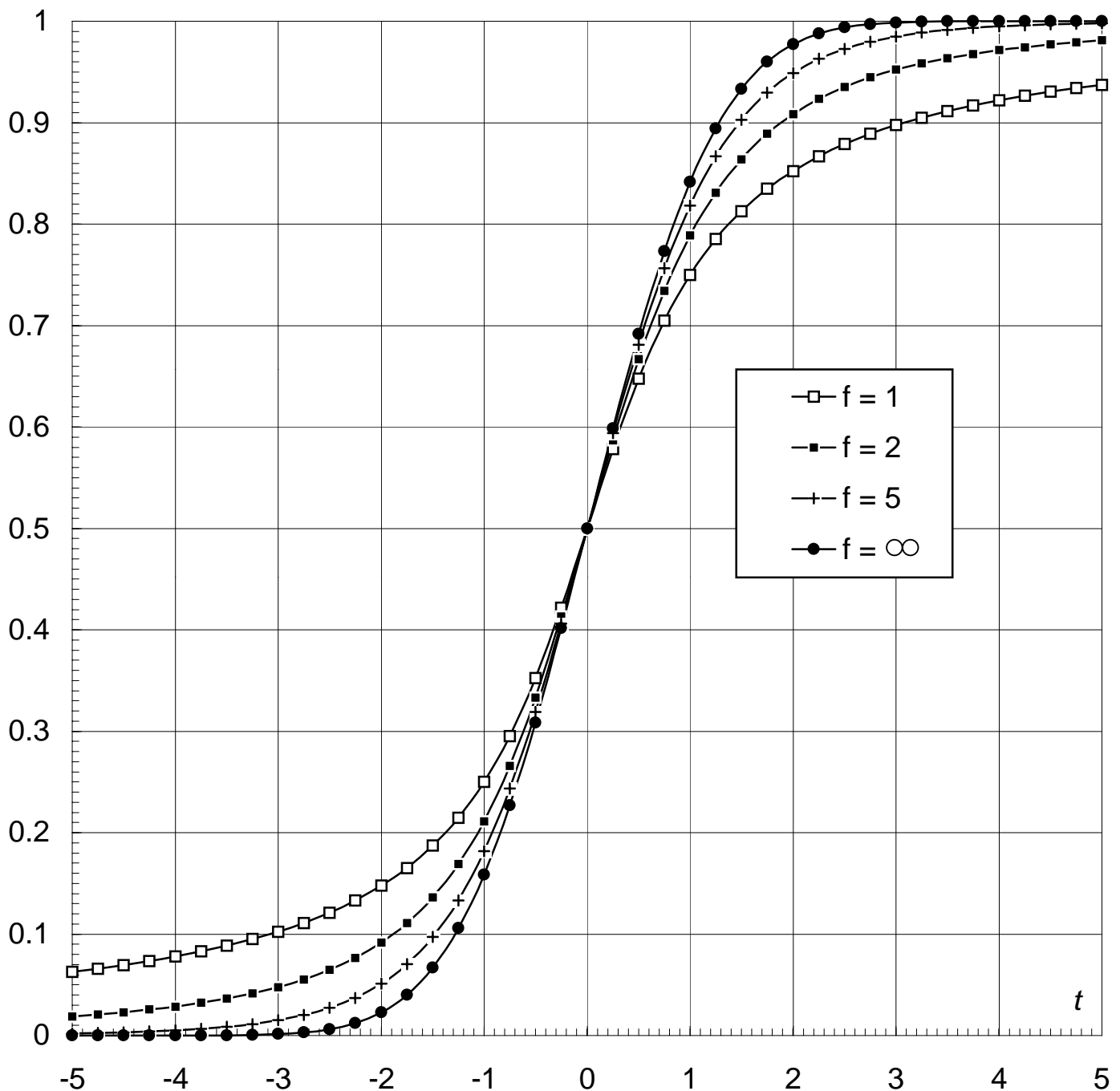
Idee: kuidas on jaotatud statistik $t_f = \frac{m - \mu}{s_m}$?

(n mõõtmist, $f = n - 1$ vabadusastet)

$$S_f(t) = P\left(\frac{m - \mu}{s_m} < t\right)$$

$$\mu = m \pm ts_m, \text{ kus } p = S_f(t) - S_f(-t)$$

Studenti jaotus ($f = 1$ korral sama kui Cauchy jaotus, $f = \infty$ korral sama kui Gaussi jaotus)



Vahemikhinnangute koostamise üldine meetod

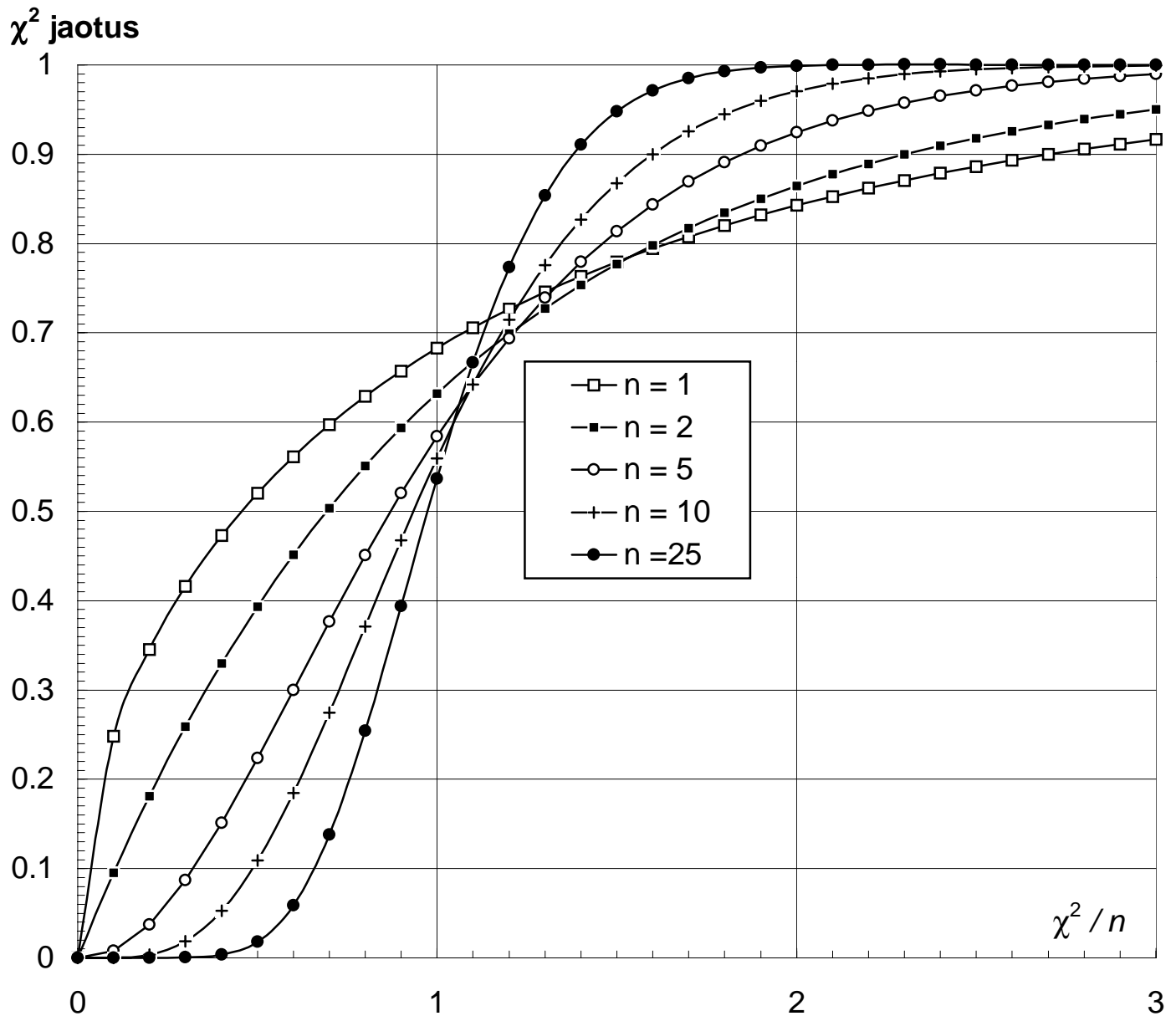
Statistiline hüpotees: hinnatav suurus on vahemikus (a, b) ,
 alternatiiv: hinnatav suurus on väljaspool vahemikku (a, b) .

Koostatakse hüpoteesi kontrollimise eeskiri ja leitakse minimaalne võimalik alternatiivi kummutamise olulisuse nivoo q . $p = 1 - q$.

Ülesanne: konstrueerida vahemik (a, b) nii, et etteantud p puhul
 $b - a \rightarrow \min$.

Hii-ruut jaotus ja dispersiooni vahemikhinnang

$$X \sim N(0, 1), \chi_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2, \text{ jaotusfunktsioon } F_n(x) = P(\chi_n^2 < x)$$



$$(n-1) \frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Mitteparameetrilised vahemikhinnangud

Hinnangu $\lambda \in (x_{(1)}, x_{(n)})$ usaldustõenäosus.

Hinnangu $\lambda \in (x_{(k)}, x_{(n+1-k)})$ usaldustõenäosus.

Matemaatilise statistika erifunktsioonid

```
{ $I statfunc.pas }
```

```
function Fisher (m, n : integer; x : real) : real;
function Hii2 (m : integer; h2 : real) : real;
function Student (n : integer; t : real) : real;
function Gauss (x : real) : real;
function Binom (m, n : integer; p : real) : real;
```

```
=====
```

```
function Student (n : integer; t : real) : real;
  {Probability of (Student statistic < t) using Fisher}
  var sign : real;
  begin
    if t < 0 then sign := -1 else sign := 1;
    Student := 0.5*(1+sign*Fisher (1, n, sqr (t)))
  end;
```

```
=====
```

```
Program StudTab;
{ $I statfunc.pas }
```

```
const f : array [1..5] of integer = (1, 2, 3, 5, 30000);
var i, j : integer; t : real; s : text;
```

```
begin
  assign (s, 'stud.tab'); rewrite (s);
  for i := 0 to 40 do begin
    t := (i-20)/4;
    write (s, t:7:2);
    for j := 1 to 5 do write (s, student (f[j], t):7:4);
    writeln (s);
  end;
  close (s);
end.
```