

## 8. Faasid ja agregaatolekud.

### 8.1. Faasi ja agregaatoleku mõisted.

*Faas* = süsteemi homogeenne ja mehaaniliselt eraldatav osa.

*Keemiliselt heterogeense süsteemi näide*: õli + vesi.

*Keemiliselt homogeensete süsteemide näited*:

veeaur + vesi, teemant + grafiit, veeaur + vesi + jää.

*Faasisiire* = aine üleminek ühest faasist teise keemiliselt homogeeneses süsteemis.

? Kas vee keemine õhus on faasisiire?

*Agregaatolekud*: gaasiline, vedel ja tahke.

Agregaatoleku muutumine võib olla pidev ja esineb olekuid mida ei saa ühemõtteliselt määratleda.

*Näited*: vee kuumutamine suure surve all, voolav pigi, klaasi kuumutamine.

Gaasi iseärasus on molekulide nõrk vastasmõju: potentsiaalne energia on palju väiksem kui kineetiline. Auditoriumi õhus on:

- molekuli läbimõõt 0.3 nm,
- keskmine naabermolekulide vaheline kaugus 3 nm,
- vaba lennu tee 60 nm.

Gaasile vastandub *kondenseeritud aine*.

Vedeliku põhitunnused on võimalus olla gaasist erinevas faasis ja voolavus. Gaasist eristumise tunnuseks on pinna olemasolu. Hüdrodünaamikas käsitletakse gaaside ja vedelike voolamist ühtviisi ja sõnaga “vedelik” nimetatakse ka gaasi. Kui aga on tarvis agregaatolekut eristada, siis kasutatakse terminit “tilkvedelik”.

Vedeliku molekulaarstruktuuri iseloomustab lähikorrastus. Lähikorra mastaap määrab vedeliku sisehõõrdeteguri.

Tahke aine võib olla kristallilistene või amorfne ehk klaasiline. Esineb kõikvõimalikke üleminekuvorme (nt. nanokristalliline aine) ja terminoloogia pole stabiliseerunud.

## 8.2. Van der Waalsi võrrand.

Lepime kokku kirjutada järgnevas kõik võrrandid ühe mooli või ühe kilomooli jaoks. Clapeyroni mudeliga  $pV = RT$  kirjeldatud ideaalset gaasi saab kuitahes palju kokku suruda. Ideaalses gaasis ei ole ka molekulidevahelisi tõmbejõude, mistõttu gaas ei saa kondenseeruda kuitahes madalal temperatuuril. Van der Waalsi mudel on Clapeyroni mudeli edasiarendus, mis arvestab ka molekulide mõõtmeid ja nendevahelist tõmbejõudu.

Mõõtmeid ehk tõukejõude arvestatakse jääga sfääri mudeli kohaselt, asendades Clapeyroni võrrandis gaasi ruumala molekulivaba ruumalaga:  $V$  asemele kirjuta-

takse  $V-b$ , kus  $b$  on ruumala, millest väiksemaks üht mooli ei ole võimalik kokku suruda. Suurust  $b$  käsitletakse kui empiirilist konstanti, mille väärtuse saab teada mudeli sobitamisel katseandmetega.

Molekulidevahelist tõmbejõudu käsitletakse kui ruumala mõjutava sisemise lisarõhu allikat. Lisarõhk on seda suurem, mida lähemal on molekulid üksteisele ehk mida väiksem on ruumala. Van der Waals leidis, et tihedate gaasidega tehtud katsete tulemusi saab hästi lähendada, kui kirjutada Clapeyroni võrrandisse  $p$  asemele  $p + a/V^2$ . Lisarõhu pöördvõrdelisus ruumala ruuduga tähendab et molekulidevahelised tõmbejõud on pöördvõrdelised molekulitsentrite vahelise kauguse kuuenda astmega. Seda kasutas Lennard-Jones hiljem enda molekulidevahelise jõu mudelis.

Kokkuvõte: Clapeyroni võrrand asendatakse täpsema mudeliga:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT.$$

Van der Waalsi konstantide  $a$  ja  $b$  väärtused määratakse katseandmete järgi iga gaasi jaoks eraldi. Näiteks ühe kilomooli lämmastiku jaoks on  $a = 137000 \text{ Pa m}^6$  ja  $b = 0.0387 \text{ m}^3$ , standardtingimuste korral on lisarõhk  $1/371$  kogurõhust ning lisaruumala  $1/579$  koguruumalast.

### 8.3. Van der Waalsi isothermid ja gaasi kriitilised parameetrid.

Kordame: 
$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

ja avaldame rõhu:

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} .$$

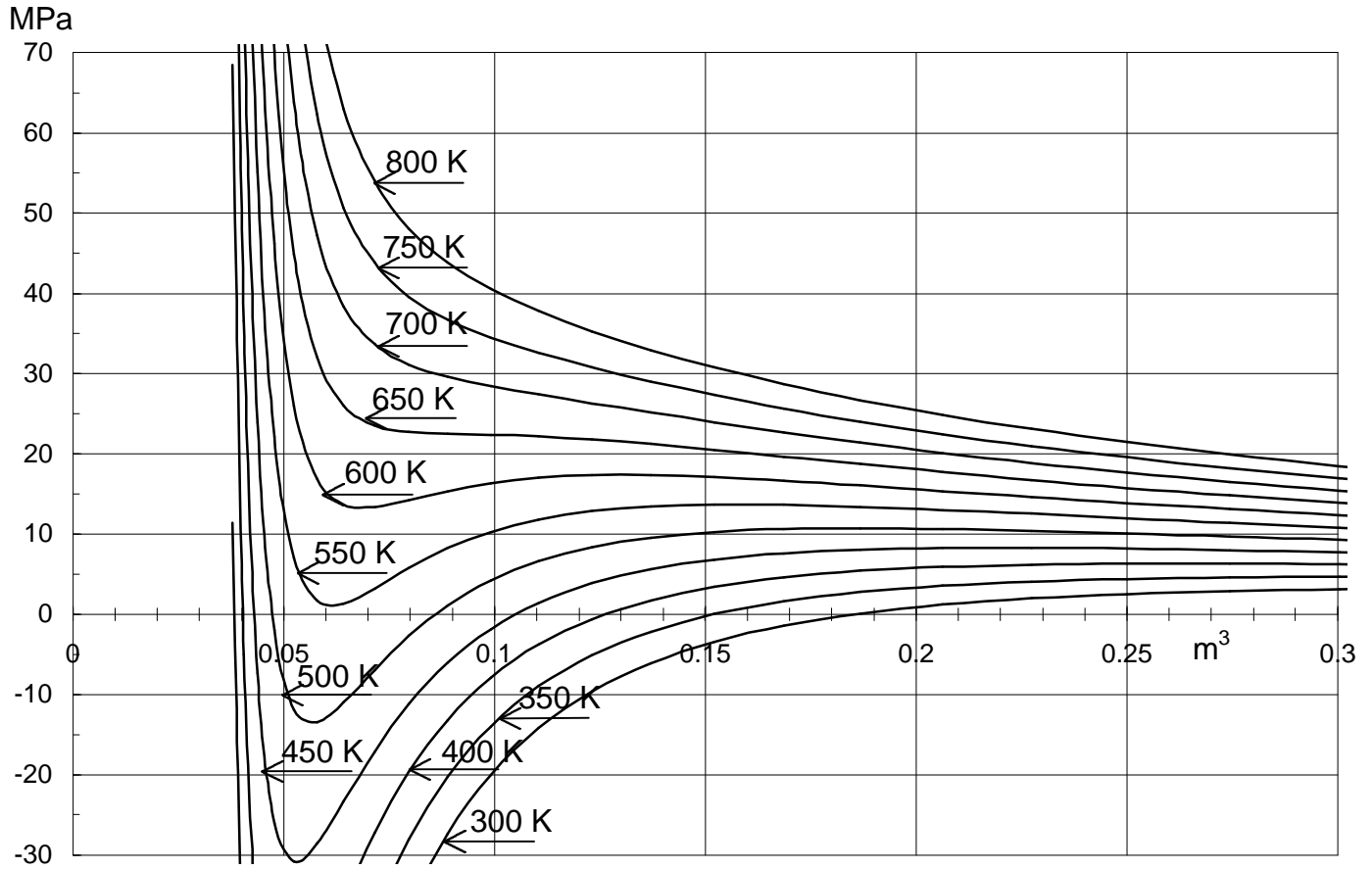
Kui Van der Waalsi võrrand murdude kaotamiseks  $V^2$ -ga korrutada ja siis sulud avada, saame ruumala suhtes kuupvõrrandi:

$$pV^3 - (RT + pb)V^2 + aV - ab = 0 ,$$

millest tulenevad funktsiooni  $p = f(V)$  omadused.

Järgmisel leheküljel on ühe kilomooli vee isothermid kõrgel rõhul arvatud Van der Waalsi võrrandi järgi.

$$(T_k = 374^\circ\text{C} = 647 \text{ K}, \quad p_k = 219 \text{ at} = 22.2 \text{ Mpa}, \quad V_k = 0.091 \text{ m}^3).$$



Madala temperatuuri (vee puhul näiteks ka 500K) puhul on võrrandil

$$pV^3 - (RT + pb)V^2 + aV - ab = 0$$

kolm reaalarvulist juurt. Väga kõrgel temperatuuri puhul on võrrandil üks reaalarvuline ja kaks kompleksarvulist juurt. Üleminekuolekut, mille puhul kolm reaalarvulist juurt langevad kokku, nimetatakse gaasi kriitiliseks olekuks. Kriitilise oleku parameetreid tähistatakse  $T_k$ ,  $p_k$  ja  $V_k$  (kriitiline ruumala on määratud ühe mooli või kilomooli jaoks).

Kriitiliste parameetrite leidmiseks peaks lahendama kahest kahe tundmatuga ( $V$ ,  $T$ ) võrrandist koosneva süsteemi

$$\left. \frac{dp}{dV} \right|_{T=const} = 0 \quad \left. \frac{d^2 p}{dV^2} \right|_{T=const} = 0$$

ja seejärel leidma kriitilise rõhu Van der Waalsi võrrandist. Tulemused on

$$V_k = 3b \quad T_k = \frac{8a}{27b} R \quad p_k = \frac{a}{27b^2}.$$

Siit võimalus leida kriitilisi parameetreid Van der Waalsi konstantide järgi ja vastupidi:  $(T_k, p_k, V_k) \Leftrightarrow (a, b)$ .

Van der Waalsi võrrandi süstemaatilise kasutamise korral saab arvutamise ja kirjutamise teha lihtsamaks dimensioonitute parameetrite abil:

$$p' = \frac{p}{p_k}, \quad T' = \frac{T}{T_k}, \quad V' = \frac{V}{V_k}$$

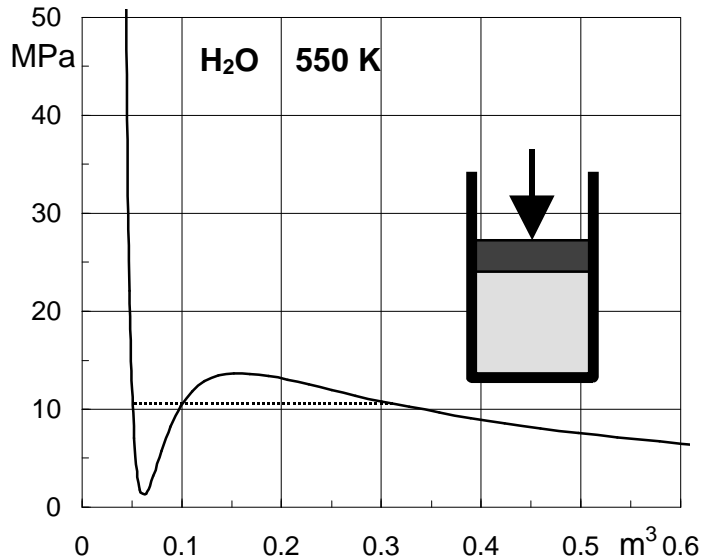
Võrrand saab siis lihtsa kuju

$$\left( p' + \frac{3}{V'^2} \right) (3V' - 1) = 8T'$$

ja arvutamisel ei ole tarvis tegelda mõõtühikutega.

|             |      |                |                  |      |
|-------------|------|----------------|------------------|------|
| Aine        | He   | N <sub>2</sub> | H <sub>2</sub> O | Hg   |
| $T_k$ : K   | 5.2  | 126            | 647              | 1460 |
| $p_k$ : MPa | 0.23 | 3.4            | 22.2             | 166  |

## 8.4. Reaalse gaasi isoterimid, agregaatolekud ja kriitiline olek.



Allakriitilise temperatuuri puhul sisaldab Van der Waalsi isotherm tõusvat osa. Sellisel lõigul peaks ruumala vähenedes rõhk langema. Kujutleme gaasi järkjärgulist kokkusurumist vertikaalses silindris, mille kolvile lisatakse raskust. Kolb oleks tasakaalus siis, kui allapoole vajudes rõhk tõuseks ja püüaks sellega kolvi asendit taastada. Vastupidisel juhul hakkaks kolvi vajudes kandev jõud vähenema ja gaas kolvi all kollapseeeruks. Tavaliselt nii ei ole, gaasi kokkusurumisel jääb rõhk

kolvi all alates mingist ruumalast konstantseks ja isotherm ei lähe mööda pidevat joont, vaid mööda isobaarilist punktiiri. Maxwelli reegli (tõestus on õpikutes) kohaselt on kaks punktiiri ja pideva joone vahele jäävat graafiku osa võrdpindsed.



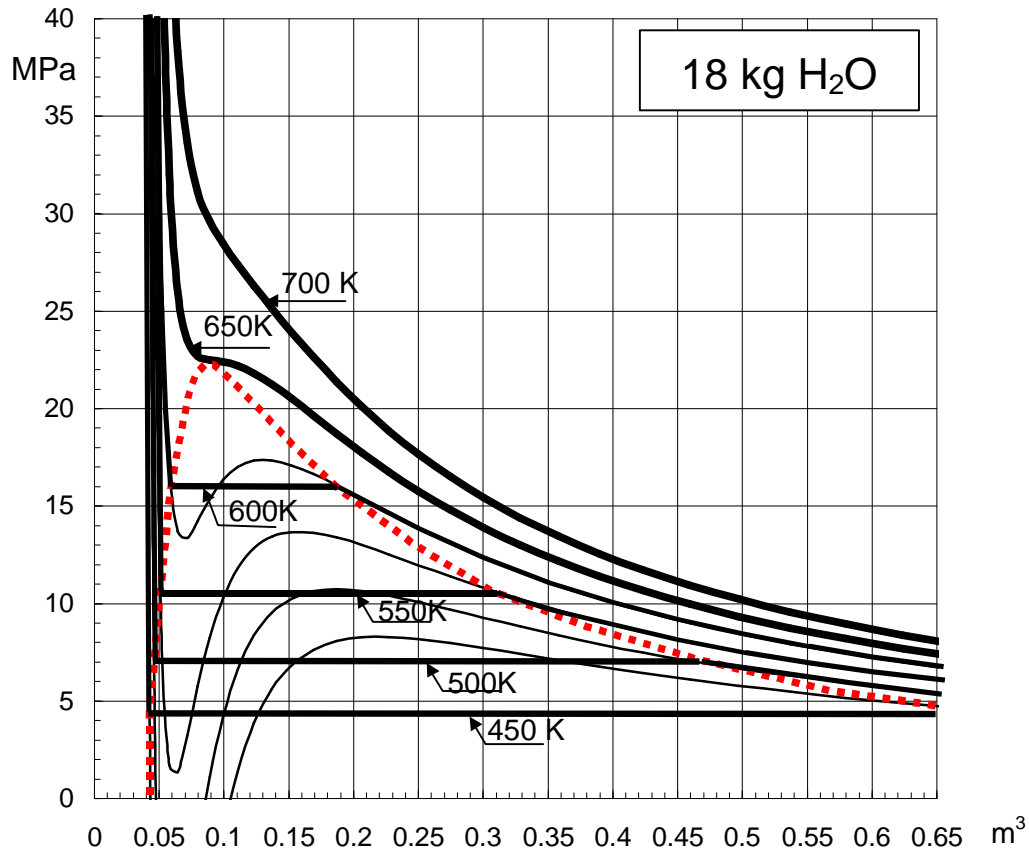
Isotermi punktiiriosa pidi liikudes on silindri põhjas vedelik ja selle kohal küllastatud aur. Veeldumine toimub punktiirjoone ulatuses. Diagrammi vasakus osas on kolvi all ainult vedelik.

Van der Waalsi võrrandi ja Maxwelli reegli abil ehitatud Andrews'i diagramm selgitab agregaatoleku muutumist ja viimase mõiste tinglikkust. Gaasi on võimalik veeldada ja vastupidi ilma, et vahepeal pinda tekkiks. Niisuguse protsessi käigus ei saagi alati öelda, kas aine on vedelas või gaasilises olekus.

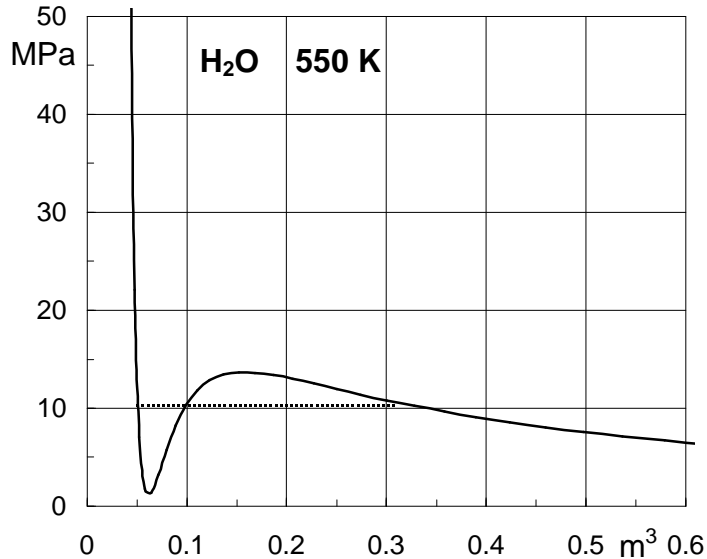
Mida kõrgem temperatuur, seda väiksem vedeliku ja auru tiheduste suhe. Kriitilises punktis on tihedused võrdsed. Gaasi ja vedeliku segunemisel tekkib kriitiline opalestsents. Kriitilist temperatuuri saab mõõta meniski kadumise meetodi abil.

 Eetri kriitiline olek.

Andrews'i diagramm:



## 8.5. Metastabiilsed olekud ja kriitiline olek.



Vaatleme uuesti veeauru isotermilise kokkusurumise protsessi. Pidevjoone ja punktiiri lahknemisel peaks algama kondensatsioon, st. väikeste vedelikutilkade tekkimine gaasis. Pindpinevus aga sunniks üliväikesi tilku auruma ka veel enam kokku surutud gaasis.

Reaalne protsess oleneb sellest, kas gaas sisaldab kondensatsioonituumi (üliväikesed kõrvalist päritolu vedelad või tahked osakesed) või mitte. Piisava hulga ja piisava suurusega kondensatsioonituumade olemasolu korral läheb

reaalne protsess mööda Andrews'i punktiiri, vastasel juhul toimub esialgu auru üleküllastumine ja gaas sattub metastabiilsesse olekusse. Metastabiilsest olekust väljumine on plahvatuslik.

Sama toimub auru isobaarilisel jahutamisel, vedeliku soojendamisel ja vedeliku jahutamisel.

 Ülekuumenenud vee keemine.

Pilvede tekkimine ja evolutsioon oleneb kondensatsioonituumade olemasolust. Lennukite ja elektrijuhtmete jäätumises on enamasti süüdlane ülejahtunud vesi. Kondensatsioonituumad on seni praktiliselt ainus vahend meteoroloogiliste protsesside reguleerimiseks. Sademete reguleerimiseks külvatatakse pilvedesse hõbejodiidi. Meetodi leiutas Bernhard Vonnegut (29.08.14. – 25.04.97).

Aatomisese energia metastabiilseid olekuid kasutatakse laserites.

## 8.6. Van der Waalsi gaasi siseenergia.

Ideaalse gaasi ühe kilomooli siseenergia  $U_{id} = C_v T$  on molekulaarkineetilises mudelis molekulide kineetiline energia. Van der Waalsi mudel arvestab lisaks molekulidevahelisi jõude ja toob sisse nende jõudude potentsiaalse energia.

Jäikadest sfääridest molekulidel ei ole tõukejõudude potentsiaalset energiat, sest jäiga pörke jõul ei ole ei ulatust ega kestvust. Tõmbejõud aitavad gaasi kokku suruda ja nende potentsiaalne energia on negatiivne. Seepärast on Van der Waalsi gaasi  $U < U_{id}$ .

Arvutame sisemise tõmberõhu  $\Delta p = a/V^2$  töö gaasi kokkusurumisel:

$$\int_{\infty}^V \frac{a}{x^2} dx = - \left. \frac{a}{x} \right|_{\infty}^V = - \frac{a}{V}.$$

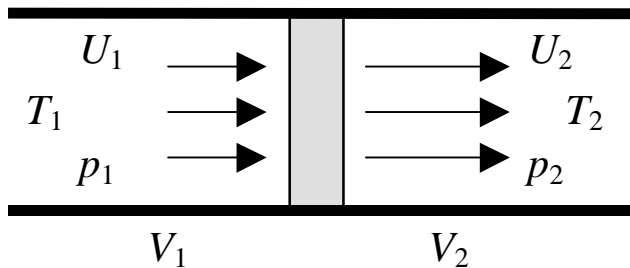
Kineetilise ja potentsiaalse siseenergia summa on

$$U = C_v T - \frac{a}{V}.$$

Kui molekulid ei ole jäigad sfäärid, siis lisanduks veel tõukejõudude potentsiaalne energia  $U_{tõuke} = f(V)$ , mis on positiivne. See kolmas liidetav osutub oluliseks ainult eriti suure rõhu puhul.

## 8.7. Joule'i-Thomsoni efekt.

Joule'i ja Thomsoni katses oli varem juttu seoses gaasi ideaalsuse tingimuse katselise kontrollimisega. Katseseadme põhimõte:



Ideaalse gaasi voolamisel läbi drosseli on  $U_1 = U_2$  ja  $T_1 = T_2$ . Van der Waalsi gaasi siseenergia aga muutub gaasi hõrenemisel ja sellest tuleneb  $T_1 \neq T_2$ . Siseenergia muutuse saab arvutada tehtud töö järele:

$$U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2 .$$

Võrrand kinnitab asjaolu, et Joule'i ja Thomsoni protsess on isoentalpne:

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2 \text{ ehk } H_1 = H_2 .$$

Ideaalse gaasi puhul kehtib Boyle'i-Mariotte'i seadus:

$$T_1 = T_2 \text{ puhul on } p_1 V_1 = p_2 V_2$$

ja siseenergia ei muutu. Realse gaasi puhul see nii ei ole. Siseenergia muutuse  $U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2$  saab arvutada Van der Waalsi võrrandit kasutades (õppida Saveljevi raamatust lk. 323...324). Tulemus: madala algtemperatuuriga gaas jahtub (positiivne Joule'i-Thomsoni efekt) ja kõrge algtemperatuuriga gaas soojeneb (negatiivne Joule'i-Thomsoni efekt). Üleminekutemperatuuri nimetatakse Joule'i-

Thomsoni inversioonitemperatuuriks. Inversioonitemperatuur on reeglina üsna kõrge, näiteks õhu puhul  $+240^{\circ}\text{C}$ .

Erandlik gaas on vesinik, mille inversioonitemperatuur on  $-80^{\circ}\text{C}$ .

## 8.8. Gaaside veeldamine ja krüogeenika.

Järgnevas on veeldumistemperatuurid atmosfäärirõhu korral:

| Gaas                                     | $^3\text{He}$ | $^4\text{He}$ | $\text{H}_2$ | $\text{N}_2$ | $\text{O}_2$ |
|--|---------------|---------------|--------------|--------------|--------------|
| Veeldumistemperatuur: $^{\circ}\text{C}$ | -270          | -271          | -253         | -196         | -183         |
| Veeldumistemperatuur: K                  | 3.2           | 4.2           | 20           | 77           | 90           |

1822. a. sai Humphry Davy laborant Michael Faraday juhuse läbi tilga vedelat kloori, seda toatemperatuuril, kuid kõrgel rõhul (7–8 at). 1822–1823 veeldasid Faraday ja Davy mitmeid gaase. Raskeks pähkliks osutus vesinik (*miks?*) mida õnnestus veeldada alles käesoleval sajandil.

Olmesügavkülmütid võimaldavad saada temperatuuri kuni  $-30^{\circ}\text{C}$ . Samal põhimõttel töötavad laboratoorsed külmkapid  $-80^{\circ}\text{C}$ . Madalamate temperatuuride saamiseks on tarvis eritehnoloogiat.

Adiabaatilisel protsessil põhineva jahutamismasina ehk detandri patenteeris 1857. a. Wilhelm Siemens. Õhu veeldamiseni ta ei jõudnud. Raskuste põhjus on hõõrdumine ja külmakindlate määrdeainete puudumine. Esimese töötava detander-vedelõhumasina konstrueeris prantsuse insener Claude alles 1902. a.

Carl von Linde konstrueeris 1876. a. esimese pidevalt töötava ja produktiivse vedela õhu masina ning alustas 1895. a. vedelõhu tööstuslikku tootmist. Linde masinas kasutatakse õhu veeldumiseni jahutamiseks Joule'i-Thomsoni efekti.

Kasaegsed suure tootlikkusega turbodetandrid leiutati 30-ndatel aastatel. Ülikooli füüsikutel oli varem 4 vedela lämmastiku masinat, ühe masina tootlikkus on 8 liitrit tunnis (tarbimisvõimsus ca 20 kW). Tänapäeval on aga odavam osta vedelat lämmastikku kommertsettevõttest.

Temperatuuri edasiseks alandamiseks kasutatakse pumpamiskrüostaate:

$$\text{N}_2 \ 77 \rightarrow 63 \text{ K}, \quad \text{H}_2 \ 20 \rightarrow 14 \text{ K}, \quad {}^4\text{H} \ 4 \rightarrow 1 \text{ K}, \quad {}^3\text{H} \ 3 \rightarrow 0.3 \text{ K}.$$

Millikelvintehnika meetodid:

$${}^3\text{H} \text{ lahustumine } {}^4\text{H-s} \rightarrow 8 \text{ mK},$$

$$\text{adiabaatiline demagneetimine} \rightarrow 0.1 \text{ mK}.$$



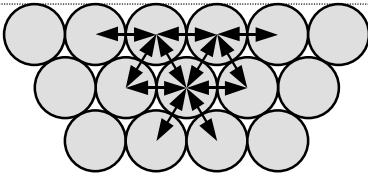
Eesti külmarekordite autor on akadeemik Georg Liidja. Ca 10 aastat tagasi õnnestus Tartus esmakordselt maailmas teha optilisi katseid temperatuuril 35 mK. Praegu töötab G. Liidja Tallinnas ja ka Eesti külmim koht temperatuuriga 8 mK on Tallinnas KBFI-s. 8 mK temperatuurini jahutatakse ca 1 kg detaile. Meetodiks on  $^3\text{H}$  (seda on ca 20 l) lahustumine  $^4\text{H}$ -s.

Maakera külmim koht on Helsingi eeslinnas Espoos O. Lounasmaa laboratooriumis.

 Eetri aurumine kellaklaasilt.

 Katsed vedela lämmastikuga.

## 8.9. Vedeliku pindpinevus.



Vedeliku välimistele molekulidele mõjuvad jõud ei ole tasakaalus. Molekuli vedeliku seest pinnale lükkamiseks on tarvis energiat. Vedeliku pinna isotermiliseks suurendamiseks  $\Delta S$  võrra on tarvis teha tööd  $\Delta A \sim \Delta S$ .

Et see protsess oleks isotermiline, peab vedelikule soojust juurde andma. Ühtaegu kasvab süsteemi siseenergia. Isotermilise protsessi töö varu nimetati vabaks energiaks  $F_t = U - TS_t$  (ajutine indeks  $t$  eristab siin vaba energiat ja entroopiat jõust ja pindalast) ja isotermiliselt pindpinevuse vastu tehtud töö salvestub vabaks energiaks  $\Delta A = \Delta F_t$ .

Võrdelisus  $\Delta A \sim \Delta S$  kirjutatakse tavaliselt  $\Delta A = \alpha \Delta S$  ja tegurit  $\alpha$  nimetatakse pindpinevusteguriks. Mõõtühik on  $\text{J/m}^2 = \text{N/m}$ .

Puhta pinna pindpinevustegureid õhus:

| $\text{N}_2$ | Piiritus | Vesi | Elavhõbe |      |
|--------------|----------|------|----------|------|
| 6            | 23       | 73   | 490      | mN/m |

Pind on kahe keskkonna eraldaja ja pindpinevustegur on kahe aine suhe. Vett, õli ja õhku uurides saab määrata kolm erinevat pindpinevustegurit. vesi–õhk, vesi–õli ja õli–õhk.

Pindpinevustegureid saab silma järgi võrrelda jälgides kapillaarlaineid erinevate vedelike pinnal.

Pindpinevustegurit saab defineerida ka jõu kaudu.

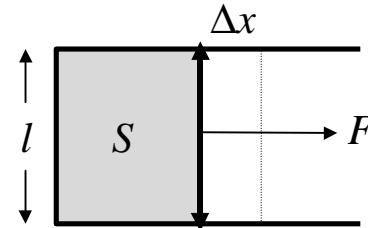
$$A = \alpha \Delta S = F \Delta x \Rightarrow F = \alpha \Delta S / \Delta x = \alpha l \quad \Rightarrow \alpha = F / l.$$

👁 Seebikile raamil.

👁 Minimaalpinnad.

👁 Metallesemed veepinnal.

👁 Pindaktiivsed ained.



NB! Seebikilel on kaks pinda ja  $F = 2\alpha l$ .

## 8.10. Tilgad ja mullid.

Tähtsusetu välisjõu korral on tilk ja mull minimaalpindalaga kehad.

 Tilga teke.

 Plateau katse.

Arvutame pindpinevusrõhu vees asuvas mullis. Selleks leiame töö, mis kulub mulli ruumala suurendamiseks  $dV$  võrra ja vastavalt raadiuse suurendamiseks  $dr$  võrra:

$$\delta A = p dV = \alpha dS \quad \Rightarrow \quad p = \alpha \frac{dS}{dV}.$$

$$\left. \begin{array}{l} S = 4\pi r^2 \quad dS = 8\pi r dr \\ V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad dV = 4\pi r^2 dr \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dS}{dV} = \frac{2}{r} \Rightarrow p = \frac{2\alpha}{r}.$$

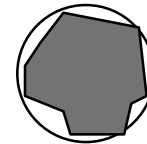
NB! Kilemullil on kaks pinda (mull tilgas) ja siserõhk kaks korda suurem, kui vedelikus asuval mullil.

☞ Ühendatud seebimullid.

*Ülesanne:* Leida lisarõhk  $1 \mu\text{m}$  raadiusega mullis. Vastus  $0.146 \text{ Mpa}$  ehk  $1.5 \text{ at}$ . Kui välisrõhk on  $1 \text{ at}$ , siis mulli sees on  $2.5 \text{ at}$ , mispuhul vee keemistemperatuur oleks ca  $128^\circ\text{C}$ . Kuidas saab mull tekkida, kui keeva vee temperatuur on vaid  $100^\circ\text{C}$ ?

Meenutame ülekuumutatud vee keetmise katset.

Vette visatud liivaterade raadius oli ca  $100 \mu\text{m}$  ja nende ümber tekkisid kohe suured mullid.

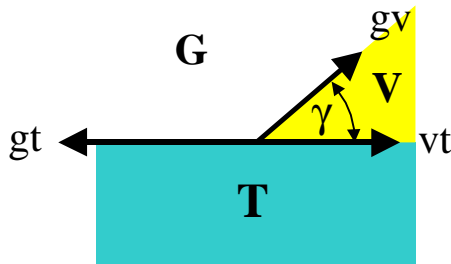


Juba Laplace oskas tuletada siserõhu valemi ka mitesfäärilise kõverpinna jaoks. Kui pinna ristuvate normaallõigete kõverusraadiused on  $r_1$  ja  $r_2$ , siis siserõhk on

$$p = \alpha \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

## 8.11. Märgamine ja kapillaarsus.

*Küsimused:* 1) mis juhtub pindpinevusega vedela klaasi tahkumisel,  
2) kas tahke aine pindpinevus võib kuidagi avalduda?



Vaatame tahke keha, vedeliku ja gaasi lahutuspiiri. Ühine piir on risti joonisega. Piirilõigule, mille pikkus on  $l$ , mõjub kolm pindpinevusjõudu:

$$F_{gt} = \alpha_{gt}l, \quad F_{gv} = \alpha_{gv}l \quad \text{ja} \quad F_{vt} = \alpha_{vt}l.$$

Nende jõudude vertikaalkomponendi tasakaalustab tahket keha fikseeriv välisjõud.

Kui aga jõudude horisontaalkomponent ei oleks tasakaalus, siis hakkaks piirjoon libisema ülekaaluka jõu suunas. “Luige, haugi ja vähi” tasakaaluvõrrandist  $F_{gt} = F_{vt} + F_{gv} \cos \gamma$  saab pärast asendamist ja taandamist  $\alpha_{gt} = \alpha_{vt} + \alpha_{gv} \cos \gamma$ . Piirnurga

$$\gamma = \arccos \left( \frac{\alpha_{gt} - \alpha_{vt}}{\alpha_{gv}} \right)$$

leidmine pole alati võimalik, sest argumendi väärtus võib olla ka suurem kui üks või väiksem kui miinus üks. Siis ei ole ka tasakaal võimalik ja piirjoon tõmmatakse kas vasakule või paremale ära:

- Kui  $\alpha_{gt} - \alpha_{vt} > \alpha_{gv}$ , siis vasakule, see on täielik märgamine.
- Kui  $\alpha_{vt} - \alpha_{gt} > \alpha_{gv}$ , siis paremale, see on täielik mittemärgamine.

☞ Äärenurk.

Mõõtnud  $\gamma$ , võib arvutada  $\alpha_{gt} - \alpha_{vt}$ ,  $\alpha_{gt}$  ja  $\alpha_{vt}$  aga jäävad tundmatuks.

☞ Kapillaarsus.

Kapillaarsusnähtused.

Vedeliku tõus või langus kapillaaris sõltub nii pindpinevustegurist kui äärenurgast. Täieliku märgamise korral on toru übermõõdu tõstejõud  $2\pi r\alpha$ , osalise märgamise puhul  $2\pi r\alpha \cos \gamma$ . vedelikusamba raskus on  $\pi r^2 h \rho g$ , tasakaalutingimusest saame

$$h = \frac{2\alpha \cos \gamma}{\rho g r} .$$