Х. Ф. ТАММЕТ

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АЭРОИОНОВ ПО ПОДВИЖНОСТЯМ

Изучаются вопросы обработки наблюдений, выполненных аспирационными счетчиками аэроионов. Приведены формулы для практического вычисления характеристик распределения ионов и оценки погрешностей измерений, отсутствующей при использовании графического «метода касательных».

Для изучения ионизационного состояния воздуха наиболее широко применяются аспирационные счетчики аэроионов. Простейшей обработкой непосредственных наблюдений, выполненных аспирационным счетчиком, определяется ряд значений функции $\nu=\nu(\varphi)$ при разных напряжениях $\varphi_n$. Через $\nu(\varphi)$ обозначим условную плотность заряда

$$\nu(\varphi)=\frac{\varepsilon}{\Phi}I(\varphi),$$

где $\varepsilon=-\frac{\varphi}{|\varphi|}$ — функция полярности предельной подвижности, $\Phi$ — объемная скорость просасывания воздуха и $I(\varphi)$ — сила тока ионов, осаждающихся на внутренней обкладке измерительного конденсатора при напряжении $\varphi$ между внутренней и внешней обкладкой. Характеристики распределения ионов определяются путем вычислений, исходя из результатов измерения функции $\nu=\nu(\varphi)$. Чаще всего такие вычисления производятся известным графическим методом [1, 2], который называется «методом касательных». Метод касательных требует вычерчивания кривой $\nu=\nu(\varphi)$ по отдельным точкам $\nu_n=\nu(\varphi_n)$, что связано с некоторым произволом. На это обращает внимание Израель [3], выдвигая вопрос: «точка излома или искривление?» Для получения достоверных результатов необходимо строго определить границы этого произвола, которые характеризуют возможные погрешности результатов. Это заставляет прибегнуть к аналитическому методу обработки наблюдений, что позволяет выяснить максимальную достоверную информацию, которую допускают результаты наблюдений.

## Постановка задачи

При измерениях интегральными счетчиками являются следующие искомые величины: функция распределения плотности заряда $\rho(k)$, частные плотности заряда $\rho(k_1, k_2)$, частные проводимости $\lambda(k_1, k_2)$, средняя подвижность ионов (в промежутке $[k_1, k_2]$) $\bar{k}(k_1, k_2)$, полярные плотности заряда и полярные проводимости. Будем придерживаться определений характеристик распределения ионов, приведенных в статье [4].

При дифференциальном методе первого порядка с разделенной емкостью [4] измеряется ток ионов $\Delta I(\varphi)$, проходящий через вторую часть разделенной внутренней обкладки. Условная плотность заряда определяется аналогично интегральному методу

$$\Delta\nu(\varphi) = \frac{\varepsilon}{\Phi} \Delta I(\varphi).$$

Искомыми величинами являются функции $\rho(k)$ или частные плотности заряда $\rho(k_1, k_2)$.

Оставим вне рассмотрения дифференциальный метод первого порядка с разделенным потоком воздуха, который не представляет практического интереса, и дифференциальный метод второго порядка, при котором обработка наблюдений проста.

Основные характеристики распределения ионов при непрерывно заданном $\nu(\varphi)$ и $\Delta\nu(\varphi)$ определяются следующими формулами:

а) Интегральный метод [3, 4]:

$$\rho(k_0) = \frac{4\pi C\varphi^3}{\Phi} \frac{d^2\nu}{d\varphi^2}, \tag{1}$$

$$\rho(k_{01}, k_{02}) = h(\varphi_1) - h(\varphi_2), \tag{2}$$

где

$$h(\varphi) = \nu - \varphi \frac{d\nu}{d\varphi}, \tag{3}$$

$$\lambda(k_{01}, k_{02}) = \frac{\Phi}{4\pi C}\left[\frac{d\nu(\varphi_1)}{d\varphi} - \frac{d\nu(\varphi_2)}{d\varphi}\right], \tag{4}$$

$$\bar{k}(k_1 k_2) = \frac{\lambda(k_1, k_2)}{\rho(k_1, k_2)}. \tag{5}$$

В этих формулах $k_0 = -\frac{\Phi}{4\pi C\varphi}$ — предельная подвижность, $C$ — действующая емкость измерительного конденсатора и $\Phi$ — объемная скорость просасывания воздуха.

б) Дифференциальный метод первого порядка с разделенной емкостью [4]:

$$\rho\left(-\frac{\Phi}{4\pi C\varphi}, -\frac{\Phi}{4\pi(C-\Delta C)\varphi}\right) = \Delta h(\varphi), \tag{6}$$

где

$$\Delta h(\varphi) = \Delta\nu - \varphi \frac{d(\Delta\nu)}{d\varphi}, \tag{7}$$

$$\rho(\xi) = -\frac{4\pi C(C-\Delta C)\varphi}{\Delta C\Phi} \Delta h(\varphi), \tag{8}$$

где подвижность $\xi$ находится в промежутке

$$\left[-\frac{\Phi}{4\pi C\varphi}, -\frac{\Phi}{4\pi(C-\Delta C)\varphi}\right].$$

В последних формулах $\Delta C$ обозначает действующую емкость второй части разделенной внутренней обкладки, а $C$ — действующую емкость всего измерительного конденсатора.

Задачей обработки наблюдений является вычисление искомых величин, если задано только конечное число точек $\nu_n = \nu(\varphi_n)$, и опредление возможных погрешностей результатов.

## Определение производных

Искомые характеристики распределения ионов зависят от производных функций $\nu(\varphi)$. При определении производных следует учитывать, что функция $\rho(k)$ не является аналитической, ее поведение в каком-нибудь промежутке в математическом смысле полностью независимо от поведения в некотором другом промежутке. Обычные интерполяционные методы при этом не обоснованы. Максимальная информация обеспечивается при определении значений производных функции $\nu(\varphi)$ из минимального числа соседних точек $\nu_n = \nu(\varphi_n)$; для первой производной это число два, для второй — три.

Первая производная определяется известной формулой Лагранжа. Физические соображения позволяют предполагать непрерывность функции $\nu(\varphi)$, а также $\frac{d\nu}{d\varphi}$ и $\frac{d^2\nu}{d\varphi^2}$, причем $\frac{d^2\nu}{d\varphi^2}$ не может иметь положительных значений. Условимся при вычислении производных точки $\varphi_n$ выбирать в монотонной очереди только положительной или только отрицательной полярности. При отмеченных предположениях действительны следующие утверждения:

а) в промежутке $[\varphi_1, \varphi_2]$ всегда существует такое $\varphi = \xi$, что

$$h(\xi) = \frac{\varphi_2\nu_1 - \varphi_1\nu_2}{\varphi_2 - \varphi_1}; \tag{9}$$

б) в промежутке $[\varphi_1, \varphi_2]$ всегда существует такое $\varphi = \zeta$, что

$$\zeta h(\zeta) = 2\varphi_1\varphi_2 \frac{\varphi_2\nu_1 - \varphi_1\nu_2}{\varphi_2^2 - \varphi_1^2}; \tag{10}$$

в) в промежутке $[\varphi_1, \varphi_2]$ всегда существует такое $\varphi = \vartheta$ и в промежутке $[\varphi_3, \varphi_4]$ — такое $\varphi = \eta$, что

$$\frac{\frac{d\nu(\vartheta)}{d\varphi} - \frac{d\nu(\eta)}{d\varphi}}{h(\vartheta) - h(\eta)} = \frac{(\varphi_4 - \varphi_3)(\nu_2 - \nu_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)(\nu_4 - \nu_3)}{(\varphi_4 - \varphi_3)(\varphi_2\nu_1 - \varphi_1\nu_2) - (\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_4\nu_3 - \varphi_3\nu_4)}; \tag{11}$$

г) если $\varphi_2$ находится в промежутке $[\varphi_1, \varphi_3]$, то в этом же промежутке находится такое $\varphi = \mu$, что

$$\mu^3 \frac{d^2\nu(\mu)}{d\varphi^2} = 2\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \frac{(\varphi_3 - \varphi_2)\nu_1 - (\varphi_3 - \varphi_1)\nu_2 + (\varphi_2 - \varphi_1)\nu_3}{(\varphi_3 - \varphi_2)(\varphi_3 - \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1)}. \tag{12}$$

## Вычисление характеристики распределения ионов и оценка погрешностей результатов

Характеристики распределения ионов вычисляются при помощи формул (1)—(8), при этом производные функции — по формулам (9) — (12). Неопределенность аргумента производных при этом сводится к возможным погрешностям определения аргумента. Ширина промежутка неопределенности ограничивает предельную погрешность аргумента. Обычно погрешность аргумента $X$ некоторой функции $f=f(x)$ приводится к погрешности функции, при этом зависимость $f$ от $X$ должна быть известна. В данном случае это нецелесообразно и может быть даже невыполнимо, ввиду недостаточности сведений о функции $\rho(k)$. Поэтому будем характеризовать погрешности функции и аргумента отдельно и даже разными критериями, так как для аргумента, при котором функция распределения погрешностей ограничена, наиболее естественно определяется предельная погрешность, а для функции — средняя квадратическая погрешность.

При наблюдениях обычно измеряются значения случайной функции двух переменных $\nu=\nu(\varphi,t)$, где $t$ — время. Считая колебания функции $\rho(k)$ в изучаемом воздухе во времени случайными, можем $\nu_n$ при определенном временном режиме измерений рассматривать, как точки случайной функции одной переменной $\nu=\nu(\varphi)$, дисперсионная функция которой зависит, кроме остальных факторов, и от стабильности $\rho(k)$ исследуемого воздуха во времени. Подавляющая доля погрешностей измерения характеристик распределения ионов обусловливается в практике погрешностями разностей типа $\nu_{n+1}-\nu_n$, что позволяет обычно пренебрегать всеми остальными погрешностями. Для пренебрежения автокорреляцией функции $\nu(\varphi, t)$ во времени при вычислениях, определяем среднюю квадратическую погрешность

$$\sigma_\nu = \sqrt{\frac{\Sigma\,(\delta\nu_\kappa)^2}{m-1}},$$

где $\delta\nu_k$ — отклонение $\nu_k$ от средней и $m$ — число наблюдений при постоянном значении $\varphi$ серией трех-четырех наблюдений, которые произведены, соблюдая временной режим измерений $\nu_n=\nu(\varphi_n)$. Так как $\sigma_\nu$ практически слабо зависит от напряжения, то достаточно проводить такие наблюдения при двух-трех значениях напряжения в широком диапазоне применяемых напряжений. Ввиду слабой зависимости от напряжения принимаем $\sigma_\nu$ в соседних точках $\nu_n$, которые входят в одну формулу типа (9)—(12) постоянной, что значительно упрощает вычисления. Оправданность сделанных допущений при оценке погрешностей проверяется в конкретных условиях.

Чтобы получить возможно однородную информацию во всем исследуемом промежутке подвижностей и упростить вычислительные работы, целесообразно в случае возможности точки $\varphi_n$ выбирать в определенном порядке. При определении функции $\rho(k)$ целесообразно выбрать $\varphi_n$ с постоянным отношением $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$. Значения $\rho(k)$ вычисляются для каждой тройки соседних $\varphi_n$, получая при $m$ точках функции $\nu(\varphi)$ всего $(m-2)$ точек функции $\rho(k)$. При определении $\rho(k_1, k_2)$ и $\lambda(k_1, k_2)$ целесообразно $\varphi_n$ выбирать попарно, что позволяет более четко определить границы промежутка $[k_1, k_2]$. Удобно принять отношение $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$ для всех четных $n$ постоянной, которая определяет ширину промежутка, а $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$ для всех нечетных $n$ меньше постоянной, которая определяет погрешность аргумента.

Приводим формулы вычисления основных характеристик распределения ионов и соответствующих погрешностей измерения. Условимся характеризовать погрешности некоторой величины $x$ определенной относительной погрешностью $\delta_x$ и средней квадратичной погрешностью $\sigma_x$.

1. Вычисления $\rho(k)$ при измерениях интегральным счетчиком.

а) Общий случай. Выбраны произвольные $\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3$:

$$\rho(\xi)=\frac{8\pi C}{\Phi}\frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}{(\varphi_3-\varphi_2)(\varphi_3-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_1)}\times$$
$$\times[(\varphi_3-\varphi_2)\nu_1-(\varphi_3-\varphi_1)\nu_2+(\varphi_2-\varphi_1)\nu_3], \tag{13}$$

$$\xi=-\frac{\Phi}{4\pi C\sqrt{\varphi_1\varphi_3}}, \tag{14}$$

где $\sqrt{\varphi_1\varphi_3}$ принимается с полярностью напряжения,

$$\delta_\xi=\sqrt{\frac{\varphi_3}{\varphi_1}}-1, \tag{15}$$

$$\sigma_\rho=\sigma_\nu\frac{8\pi C}{\Phi}\frac{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\sqrt{(\varphi_3-\varphi_2)^2+(\varphi_3-\varphi_1)^2+(\varphi_2-\varphi_1)^2}}{(\varphi_3-\varphi_2)(\varphi_3-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_1)}. \tag{16}$$

б) Выбраны $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$ так, что

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}=1+\delta,$$

где $\delta$ — постоянная:

$$\rho(\xi)=-\frac{4\pi C\varphi_3}{\Phi\delta^2}\left[(2\nu_2-\nu_1-\nu_3)+\frac{\delta}{2+\delta}(\nu_3-\nu_1)\right], \tag{17}$$

$$\xi=-\frac{\Phi}{4\pi C\varphi_2}, \tag{18}$$

$$\delta_\xi=\delta, \tag{19}$$

$$\sigma_\rho=\sigma_\nu\frac{8\pi C\varphi_3}{\Phi\delta^2(2+\delta)}\sqrt{2\delta^2+6\delta+6}. \tag{20}$$

2. Вычисление $\rho(k_1, k_2)$, $\lambda(k_1, k_2)$ и $\overline{k}(k_1, k_2)$ при измерениях интегральным счетчиком.

а) Общий случай. Выбраны произвольные $\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\varphi_4$:

$$\rho(\vartheta,\eta)=\frac{(\varphi_4-\varphi_3)(\varphi_2\nu_1-\varphi_1\nu_2)-(\varphi_2-\varphi_1)(\varphi_4\nu_3-\varphi_3\nu_4)}{(\varphi_4-\varphi_3)(\varphi_2-\varphi_1)}, \tag{21}$$

$$\sigma_\rho=\sigma_\nu\sqrt{\frac{\varphi_4^2+\varphi_3^2}{(\varphi_4-\varphi_3)^2}+\frac{\varphi_2^2+\varphi_1^2}{(\varphi_2-\varphi_1)^2}}, \tag{22}$$

$$\lambda(\vartheta,\eta)=\frac{\Phi}{4\pi C}\frac{(\varphi_4-\varphi_3)(\nu_2-\nu_1)-(\varphi_2-\varphi_1)(\nu_4-\nu_3)}{(\varphi_4-\varphi_3)(\varphi_2-\varphi_1)}, \tag{23}$$

$$\sigma_\lambda=\sigma_\nu\frac{\Phi}{4\pi C}\sqrt{\frac{2}{(\varphi_4-\varphi_3)^2}+\frac{2}{(\varphi_2-\varphi_1)^2}}, \tag{24}$$

$$\overline{k}(\vartheta,\eta)=\frac{\Phi}{4\pi C}\frac{(\varphi_4-\varphi_3)(\nu_2-\nu_1)-(\varphi_2-\varphi_1)(\nu_4-\nu_3)}{(\varphi_4-\varphi_3)(\varphi_2\nu_1-\varphi_1\nu_2)-(\varphi_2-\varphi_1)(\varphi_4\nu_3-\varphi_3\nu_4)}, \tag{25}$$

$$\sigma_{\overline{k}}=\sigma_\nu\overline{k}(\vartheta,\eta)\frac{\sqrt{(\varphi_4-\varphi_3)^2(\varphi_2-\overline{\varphi})^2+(\varphi_4-\varphi_3)^2(\varphi_1-\overline{\varphi})^2+(\varphi_2-\varphi_1)^2(\varphi_4-\overline{\varphi})^2+(\varphi_2-\varphi_1)^2(\varphi_3-\overline{\varphi})^2}}{(\varphi_4-\varphi_3)(\varphi_2\nu_1-\varphi_1\nu_2)-(\varphi_2-\varphi_1)(\varphi_4\nu_3-\varphi_3\nu_4)}, \tag{26}$$

где

$$\overline{\varphi}=-\frac{\Phi}{4\pi C\,\overline{k}\,(\vartheta,\ \eta)},\tag{27}$$

$$\vartheta=-\frac{\Phi}{4\pi C\sqrt{\varphi_1\varphi_2}}\tag{28}$$

($\sqrt{\varphi_1\varphi_2}$ принимается с полярностью напряжения),

$$\delta_\vartheta=\sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}-1,\tag{29}$$

$$\eta=-\frac{\Phi}{4\pi C\sqrt{\varphi_3\varphi_4}}\tag{30}$$

($\sqrt{\varphi_3\varphi_4}$ принимается с полярностью напряжения),

$$\delta_\eta=\sqrt{\frac{\varphi_4}{\varphi_3}}-1;\tag{31}$$

б) Выбраны $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ и $\varphi_4$ так, что

$$\frac{\varphi_4}{\varphi_3}=\frac{\varphi_2}{\varphi_1}=\alpha$$

и

$$\frac{\varphi_4}{\varphi_2}=\frac{\varphi_3}{\varphi_1}=\beta,$$

где $\alpha$ и $\beta$ — постоянные:

$$\rho(\vartheta,\ \eta)=\frac{\nu_4-\nu_2-\alpha(\nu_3-\nu_1)}{\alpha-1},\tag{32}$$

$$\sigma_\rho=\sigma_\nu\frac{\sqrt{2(\alpha^2+1)}}{\alpha-1},\tag{33}$$

$$\lambda(\vartheta,\ \eta)=\frac{\Phi}{4\pi C}\,\frac{\beta(\nu_2-\nu_1)-(\nu_4-\nu_3)}{\varphi_4-\varphi_3},\tag{34}$$

$$\sigma_\lambda=\sigma_\nu\frac{\Phi}{4\pi C}\,\frac{\sqrt{2(\beta^2+1)}}{\varphi_4-\varphi_3},\tag{35}$$

$$\overline{k}(\vartheta,\ \eta)=-\frac{\Phi}{4\pi C\varphi_3}\,\frac{\beta(\nu_2-\nu_1)-(\nu_4-\nu_3)}{\alpha(\nu_3-\nu_1)-(\nu_4-\nu_2)},\tag{36}$$

$$\sigma_{\overline{k}}=\sigma_\nu\overline{k}(\vartheta,\ \eta)\,\frac{\sqrt{\beta^2(\varphi_1-\overline{\varphi})^2+\beta^2(\varphi_2-\overline{\varphi})^2+(\varphi_3-\overline{\varphi})^2+(\varphi_4-\overline{\varphi})^2}}{\varphi_3[\alpha(\nu_3-\nu_1)-(\nu_4-\nu_2)]},\tag{37}$$

где $\overline{\varphi}$ выражается формулой (27),

$$\vartheta=-\frac{\Phi}{4\pi C\varphi_1\sqrt{\alpha}},\tag{38}$$

$$\eta=-\frac{\Phi}{4\pi C\varphi_3\sqrt{\alpha}},\tag{39}$$

$$\delta_\vartheta=\delta_\eta=\sqrt{\alpha}-1.\tag{40}$$

3. Вычисления $\rho(k_1,\ k_2)$ при измерениях дифференциальным счетчиком первого порядка с разделенной емкостью.

## ВЫВОДЫ

1. Графический метод обработки наблюдений при измерениях аспирационными счетчиками нагляден, но не позволяет определить пределы произвола, который связан вычерчиванием графика функции $\nu(\varphi)$ по заданным точкам и затрудняет оценку погрешностей результатов.

2. Обработка наблюдений при помощи формул конечных приращений позволяет строго определить пределы произвола, связанного с заданием функции $\nu(\varphi)$ по отдельным точкам, сводя этот произвол к погрешности определения аргумента.

3. Аналитический метод обработки наблюдений является при рациональном выборе точек $\varphi_n$ менее трудоемким, чем графический метод. Особым преимуществом является то, что вычисления могут выполняться при помощи специальных приспособлений или вычислительной машиной.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. Имянитов И. М. Приборы и методы для изучения электричества атмосферы, гл. 5, Гос. изд. техн. теор. лит. М., 1957.
2. Israël H. Zur Theorie und Methodik der Grössenbestimmung von Luftionen. Gerl. Beitr. z. Geophys. 31, 1931.
3. Israël H. Atmosphärische Elektrizität. Teil I, Akademische Verlagsgesellschaft Geest — Portig K. G. Leipzig, 1957.
4. Таммет Х. Ф. К теории аспирационных счетчиков аэроионов. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 1960.