

# ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИДЕАЛЬНОЙ УНИПОЛЯРНОЙ КВАЗИКРОНЫ

Х.Ф.Таммет

## С о д е р ж а н и е

§ 1. Введение. 1.1. Необходимость в понятии квазикроны (4). 1.2. Идеальная униполярная квазикрона (4). 1.3. Допущения (5). 1.4. Эмиссионное и начальное напряжения (5). 1.5. К постановке задачи (6). 1.6. Обозначения (7).

§ 2. Плоские электроды. 2.1. Электрическое поле (8). 2.2. Вольтамперная характеристика (9). 2.3. Предельные случаи (10).

§ 3. Цилиндрические электроды. 3.1. Электрическое поле (10). 3.2. Вольтамперная характеристика (12). 3.3. Предел  $\mu \rightarrow 0$  (15). 3.4. Предел  $\mu \rightarrow 1$  (19). 3.5. Предел  $\mu \rightarrow 1$  (20). 3.6. Предел  $\mu \rightarrow \infty$  (20). 3.7. Формулы Таунсенда и Дьюи (21).

§ 4. Сферические электроды. 4.1. Электрическое поле (23). 4.2. Вольтамперная характеристика (24). 4.3. Предел  $\mu \rightarrow 0$  (29). 4.4. Предел  $\mu \rightarrow 1$  (29). 4.5. Предел  $\mu \rightarrow 1$  (30). 4.6. Предел  $\mu \rightarrow \infty$  (30).

§ 5. Дополнения и замечания. 5.1. Влияние зависимости эмиссионного напряжения от плотности тока на вольтамперную характеристику (31). 5.2. Об экспериментальном определении эмиссионного напряжения (32). 5.3. О методе численного решения основных уравнений (33). 5.4. О точности таблиц (34).

Благодарность (34)

Литература (35).

## § I. Введение.

**I.1. Необходимость в понятии квазикорона.** Методы расчета вольтамперных характеристик коронного разряда применяются не только для изучения коронного разряда, а также для изучения, например, радиоизотопных аэромонизаторов и нейтрализаторов статического электричества. При этом рассматриваются задачи, которые в приложении к коронному разряду иногда лишены смысла. В качестве примера можно указать расчет плоского нейтрализатора статического электричества [Таммет, 1969 а] .

Не исключена возможность применения методов теории коронного разряда для описания некоторых явлений в жидких и твердых диэлектриках или полупроводниках.

Известно, что обычная теория вольтамперных характеристик коронного разряда (изложенная, например, в работе [Попков, 1949] ) не точна в приложении к реальному коронному разряду. Достаточно указать на пренебрежение толщиной коронирующего слоя в этой теории.

Для предотвращения недоразумений как в отношении объекта приложения теории, так и в отношении допущений, полезно ввести понятие квазикорона.

**I.2. Идеальная униполярная квазикорона.** Назовем идеальной униполярной квазикороной явление протекания электрического тока между двумя электродами при следующих условиях:

1.<sup>0</sup> Каждый из электродов эквипотенциальный.

2.<sup>0</sup> Носители заряда возникают или поступают в среду только на поверхности одного электрода.

Электрод, оговоренный в условии 2<sup>0</sup>, называется эмиттером или активным электродом, другой электрод — пассивным электродом. Напряженность электрического поля в тех точ-

ках на поверхности эмиттера, в которых плотность тока не равняется нулю, называется эмиссионной напряженностью.

3<sup>0</sup>. Эмиссионная напряженность — универсальная (общая для всех точек) однозначная функция плотности тока в рассматриваемой точке.

4<sup>0</sup>. Скорость носителей заряда в любой точке среды — универсальная однозначная функция напряженности электрического поля в рассматриваемой точке.

Функции, оговоренные в условиях 3<sup>0</sup> — 4<sup>0</sup>, считаются заданными. Если задана также конфигурация электродов и поле электрической проницаемости среды, то вольтамперная характеристика идеальной униполярной квазикоронны однозначно определена.

1.3. Допущения. Вычисление вольтамперной характеристики идеальной униполярной квазикоронны может оказаться очень сложным. Поэтому ограничим рассматриваемую в настоящей статье задачу следующими допущениями:

5<sup>0</sup>. Электроды являются либо параллельными плоскостями, либо коаксиальными цилиндрами, либо концентрическими сферами. В двух последних случаях эмиттером предполагается внутренний электрод.

6<sup>0</sup>. Электрическая проницаемость среды — универсальная постоянная.

7<sup>0</sup>. Электрическая подвижность носителей заряда — универсальная постоянная.

8<sup>0</sup>. Процесс стационарный.

Из определяющих условий и допущений вытекает, что в прямоугольной, цилиндрической или сферической системе координат напряженность электрического поля и плотность заряда являются функциями лишь одной переменной, а электроды совпадают с координатными поверхностями. Это и обеспечивает достаточное упрощение.

1.4. Эмиссионное и начальное напряжение. Электрическое поле в среде и напряжение между электродами определяются как зарядом эмиттера, так и объемным зарядом носителей тока.

Назовем эмиссионным напряжением воображаемое напряжение между электродами, вычисляемое в предположении полного отсутствия объемного заряда и равенства напряженности на эмиттере к заданной эмиссионной напряженности. Это определение требует однородности электрического поля на эмиттере и опирается на допущение 5<sup>0</sup>.

Эмиссионное напряжение зависит лишь от размеров электродов и эмиссионной напряженности.

Предельное значение напряжения между электродами в процессе, когда плотность тока стремится к нулю, называется начальным напряжением. Поскольку тогда и плотность заряда стремится к нулю, то в этом же процессе предельное значение эмиссионного напряжения совпадает с начальным напряжением.

Если эмиссионная напряженность постоянна, то эмиссионное напряжение всегда равно начальному напряжению. В противном случае зависимость эмиссионной напряженности от плотности тока приведет к зависимости эмиссионного напряжения от плотности тока.

1.5. К постановке задачи. Задача, определенная заглавием настоящей статьи, условиями и допущения 1<sup>0</sup> - 8<sup>0</sup>, не новая. Принципиально она уже давно решена (см., например, [Попков, 1949] ).

К сожалению, в известных точных решениях вольтамперные характеристики представляются в неявном виде. Представление зависимостей уравнениями малонаглядно и для практики часто неприемлемо, требуя слишком объемистых вычислений.

Имеющиеся явные формулы, например, формула Таунсенда, описывают вольтамперные характеристики приближенно и притом без количественной оценки точности. Известно, что эти формулы могут привести к грубым ошибкам.

Автор поставил себе целью составить по возможности наиболее удобные точные формулы вольтамперных характеристик идеальной униполярной квазикоронны.

Хотя теоретические выкладки элементарны и в них мало нового, они будут ниже представлены в полном объеме. Это должно сделать статью доступной для читателя, предварительно не знакомого с теорией коронного разряда.

Номера важнейших практических формул будут напечатаны жирным шрифтом.

1.6. Обозначения. Принимаем некоторые универсальные обозначения, которые в дальнейшем будут использованы без дополнительных объяснений:

$x$  - расстояние между рассматриваемой точкой и плоским эмиттером,

$h$  - расстояние между параллельными плоскостями,

$r$  - расстояние между рассматриваемой точкой и осью или центром электродов,

$r_0$  - радиус цилиндрического или сферического эмиттера (внутреннего электрода),

$R$  - радиус цилиндрического или сферического пассивного (внешнего) электрода,

$$x = R/r_0,$$

$\epsilon$  - абсолютная электрическая проницаемость среды (для воздуха  $\epsilon \approx 8,85$  пф/м),

$k$  - электрическая подвижность носителей заряда,

$\rho$  - плотность заряда в рассматриваемой точке,

$j$  - плотность тока,

$J$  - сила тока с единицы длины электрода,

$I$  - сила тока,

$E$  - напряженность электрического поля в рассматриваемой точке,

$E_e$  - эмиссионная напряженность,

$U$  - напряжение между электродами,

$U_e$  - эмиссионное напряжение,

$$\mu = U_e/U.$$

Все формулы будут написаны в системе СИ.

## § 2. Плоские электроды.

2.1. Электрическое поле. Выбираем исходными соотношениями уравнение электрического поля  $\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \rho$ , которое в однородной среде между плоскопараллельными электродами имеет простой вид

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (1)$$

и формулу плотности тока

$$j = k E \rho. \quad (2)$$

В силу условия непрерывности тока плотность тока  $j$  постоянная.

Вставляя в выражение (1) плотность заряда из соотношения (2), получим уравнение

$$E dE = \frac{j}{\varepsilon k} dx, \quad (3)$$

общее решение которого следующее:

$$E^2 = \frac{2j}{\varepsilon k} x + A. \quad (4)$$

Определяя постоянную интегрирования  $A$  по начальному условию

$$(x = 0) \Rightarrow (E = E_0), \quad (5)$$

приходим к частному решению

$$E = \sqrt{\frac{2j}{\varepsilon k} x + E_0^2}. \quad (6)$$

Напряжение между электродами определяется интегралом

$$U = \int_0^h E dx, \quad (7)$$

который в настоящем случае легко вычисляется. Выражая эмиссионную напряженность через эмиссионное напряжение

$$E_e = \frac{U_e}{h}, \quad (8)$$

получаем

$$U = \frac{\epsilon k}{3j} \left[ \left( \frac{2hj}{\epsilon k} + \frac{U_e^2}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{U_e^3}{h^3} \right]. \quad (9)$$

2.2. Вольтамперная характеристика. По условию  $z^0$  эмиссионная напряженность, а следовательно, и эмиссионное напряжение – заданные функции плотности тока. Поэтому выражение (9) может рассматриваться как уравнение с одной неизвестной  $j$  и параметром  $U$ , решение которой  $j = j(U)$  – искомая вольтамперная характеристика. Запишем вольтамперную характеристику в следующем виде

$$j = P\ell(\mu) \frac{9\epsilon k U (U - U_e)}{8h^3}, \quad (10)$$

где  $P\ell(\mu)$  пока неопределенная функция аргумента  $\mu = U_e/U$ . Преимущество такой записи выяснится в дальнейшем.

Для определения функции  $P\ell(\mu)$  заменяем в уравнении (9)  $j$  на выражение (10) и  $U_e$  на  $\mu U$ . После несложных преобразований получаем квадратное уравнение, положительное решение которого дает

$$P\ell(\mu) = \frac{9 - 12\mu^2 + \sqrt{81 - 216\mu^2 - 192\mu^3 - 48\mu^4}}{18(1-\mu)}. \quad (11)$$

В п. 3.5 и 4.5 будет выяснено, что  $P\ell(\mu) = C_{y_1}(1, \mu) = S_{p_1}(1, \mu)$ . Значения последних функций можно найти в таблицах 2 и 5, а графики на рисунках 1 и 2.

Если эмиссионное напряжение не зависит от плотности тока, то оно равно начальному напряжению и формула (10)

выражает вольтамперную характеристику в явном виде. Противный случай обсуждается в п. 5.1 и 5.2.

2.3. Предельные случаи. Легко проверить, что  $P_l(0) = 1$ . Поэтому при условии  $U_e \ll U$  имеет место

$$j = \frac{9 \epsilon k U^2}{8 h^3} \quad (12)$$

Если  $\mu \rightarrow 1$ , то  $P_l(\mu) \rightarrow 16/9$  и при условии  $U - U_e \ll U_e$  получаем

$$j = \frac{2 \epsilon k U_e (U - U_e)}{h^3} \quad (13)$$

Формулу (12) легко получить прямым путем, допуская в уравнении (9)  $U_e = 0$ . Формулу (13) также можно вывести непосредственно, соблюдая, например, схему рассуждений, описанную в п. 3.4.

### § 3. Цилиндрические электроды.

3.1. Электрическое поле. В цилиндрической системе координат задача мало отличается от рассмотренной в § 2. Там, где рассуждения явно повторяются, будем аналоги формул предыдущего параграфа приводить без объяснения.

Аналоги формул (1-4) следующие,

$$\frac{1}{r} \frac{d(rE)}{dr} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (14)$$

$$J = 2\pi r k E \rho \quad (15)$$

$J$  — постоянная,

$$(rE) d(rE) = \frac{J}{2\pi \epsilon k} r dr \quad (16)$$



$$(rE)^2 = \frac{J}{2\pi\epsilon k} (r^2 + \alpha r_0^2), \quad (17)$$

$\alpha$  определяет постоянную интегрирования.

По начальному условию

$$(r=r_0) \Rightarrow (E=E_0) \quad (18)$$

находим

$$\alpha = \frac{2\pi\epsilon k}{J} E_0^2 - 1. \quad (19)$$

Для упрощения дальнейших расчетов полезно временно выразить  $J$  везде при помощи соотношения (19) через безразмерную величину  $\alpha$ . Формула (17) приводится тогда к виду

$$E = \frac{E_0}{t} \sqrt{\frac{t^2 + \alpha}{1 + \alpha}}, \quad (20)$$

где

$$t = \frac{r}{r_0}. \quad (21)$$

Интеграл напряжения записывается и преобразуется следующим образом:

$$U = \int_{r_0}^R E dr = r_0 \int_1^x E dt = \frac{r_0 E_0}{\sqrt{1+\alpha}} f(x, \alpha), \quad (22)$$

где

$$f(x, \alpha) = \int_1^x \frac{\sqrt{t^2 + \alpha}}{t} dt. \quad (23)$$

Последний интеграл вычисляется по-разному при отрицательных и при положительных значениях  $\alpha$ . Результат можно записать так:

$$f(x, \alpha) = \sqrt{x^2 + \alpha} - \sqrt{1 + \alpha} - \sqrt{|\alpha|} f_1(x, \alpha)$$

$$f_1(x, \alpha) = \begin{cases} \arcsin \frac{\sqrt{-\alpha} (\sqrt{x^2 + \alpha} - \sqrt{1 + \alpha})}{x} & \text{при } \alpha \leq 0 \\ \ln \frac{\sqrt{x^2 + \alpha} + \sqrt{\alpha}}{x \sqrt{1 + \alpha} + \sqrt{\alpha}} & \text{при } \alpha \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

3.2. Вольтамперная характеристика. Выражение (22) может рассматриваться как уравнение с одной неизвестной  $\alpha$ . Подстановкой

$$r_0 E = \frac{U_e}{\ln x} = \frac{\mu U}{\ln x} \quad (25)$$

оно приводится к более удобному виду

$$f(x, \alpha) - \frac{\ln x}{\mu} \sqrt{1 + \alpha} = 0. \quad (26)$$

Поскольку  $J$  и  $\alpha$  связаны однозначной зависимостью (19), то уравнение (26) и определяет вольтамперную характеристику.

Запишем вольтамперную характеристику в следующем практически удобном виде:

$$J = C_y(x, \mu) \frac{2\pi \epsilon k U(U - U_e)}{R^2}. \quad (27)$$

Вставляя это выражение в соотношение (19) и учитывая равенство (25), получаем

$$C_y(x, \mu) = \frac{x^2 \mu^2}{\ln^2 x (1 - \mu)(1 + \alpha)}. \quad (28)$$

При табулировании целесообразно эту функцию представить произведением двух сомножителей:

$$C_y(x, \mu) = C_{y_0}(x) C_{y_1}(x, \mu), \quad (29)$$

где  $C_{y_0}(x) = C_y(x, 0)$ . В п. 3.3 будет показано, что  $C_y(x)$  выражается в элементарных функциях (формула 35). Предлагаем еще более удобную приближенную формулу

$$C_{y_0}(x) \approx \tilde{C}_y(x) = \left(1 + \frac{1,04}{x-1}\right)^3 \quad (30)$$

В таблице I представлены значения функции  $C_{y_0}(x)$ , вычисленные по точной формуле (35), а также значения отношения  $\eta(x) = C_{y_0}(x) / \tilde{C}_y(x)$ . Это отношение удобно интерполируется, и оно может быть использовано, как поправочный множитель к формуле (30)

Таблица I

$x$	$C_{y_0}(x)$	$\eta(x)$	$x$	$C_{y_0}(x)$	$\eta(x)$
1	$\infty$	1,0001	30	1,1123	1,0007
1,1	1483,7	1,0014	40	1,0827	0,0005
1,2	238,89	1,0024	50	1,0655	1,0004
1,3	89,385	1,0030	70	1,0462	1,0003
1,5	29,331	1,0039	100	1,0321	1,0002
2	8,5283	1,0046	150	1,0212	1,0001
2,5	4,8773	1,0045	200	1,0159	1,0001
3	3,5268	1,0043	300	1,0105	1,0001
4	2,4512	1,0037	500	1,0063	1,0000
5	2,0068	1,0032	1000	1,0031	1,0000
7	1,6194	1,0025	2000	1,0016	1,0000
10	1,3909	1,0019	5000	1,0006	1,0000
15	1,2414	1,0013	10000	1,0003	1,0000
20	1,1745	1,0010	30000	1,0001	1,0000
25	1,1366	1,0008	$\infty$	1	1

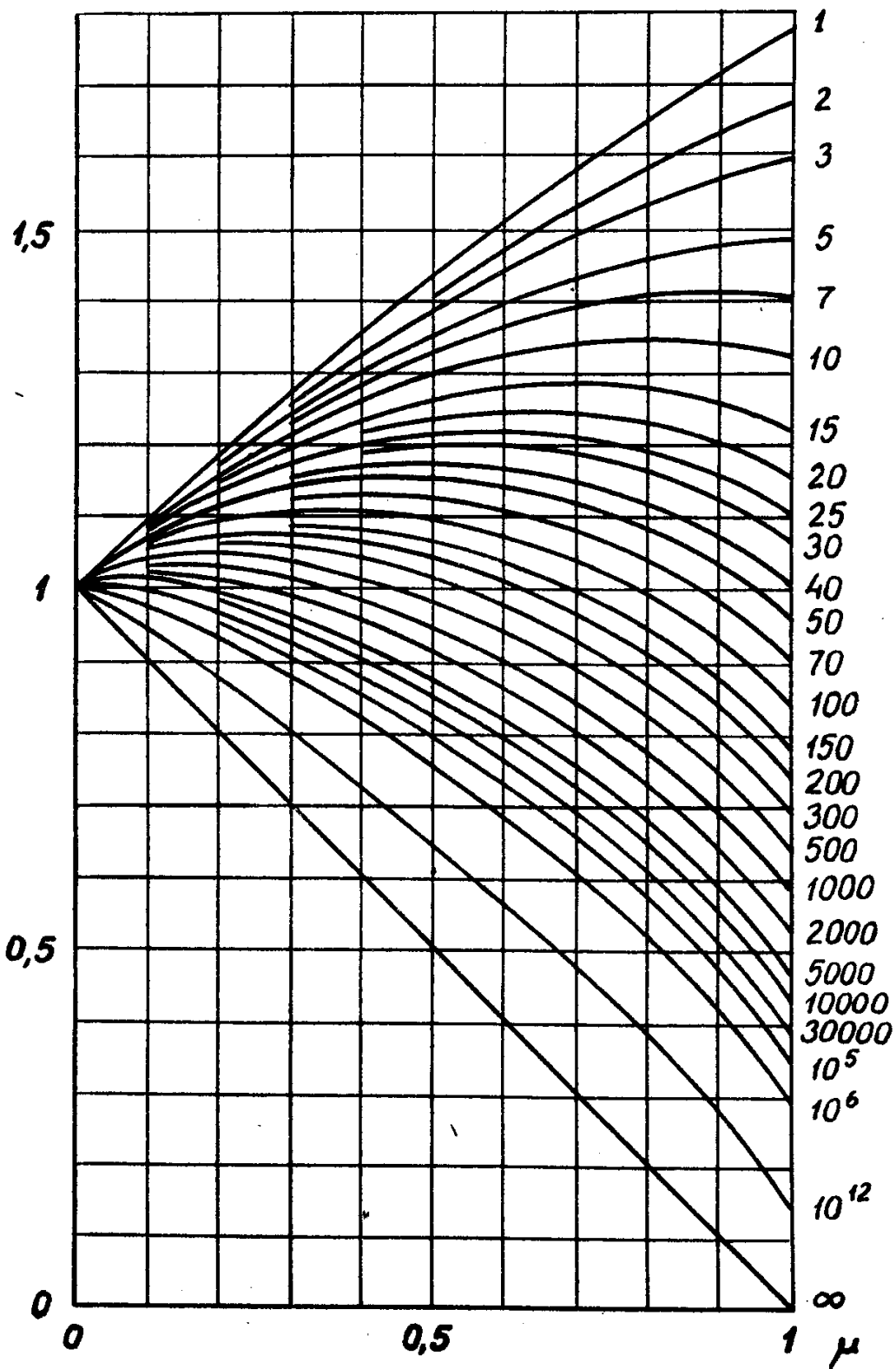


Рис. 1. Графики функции  $C_y(\omega, \mu)$ . Отдельные кривые соответствуют указанным фиксированным значениям аргумента  $\omega$ .

В таблице 3 представлены значения функции  $C_y(x, \mu)$ . Эта таблица составлена по результатам численного решения уравнения (26). Графики функций  $C_y(x, \mu)$  изображены на рис. 1.

На трех обычных границах  $(x, 0)$ ,  $(x, 1)$ ,  $(1, \mu)$  и одной несобственной границе  $(\infty, \mu)$  области определения функции  $C_y(x, \mu)$  уравнение (26) или формула (28) непосредственно неприменимы. В следующих пунктах предельные случаи подвергаются специальному изучению. Оказывается, что на всех четырех границах функция  $C_y(x, \mu)$  выражается или имеет асимптотическое выражение в элементарных функциях. При составлении таблиц 1 и 2 эти результаты учтены.

3.3. Предел  $\mu \rightarrow 0$ . Принимая  $E_e = 0$ , найдем по формуле (19)  $\alpha = -1$  и по формулам (17), (21)

$$E = \sqrt{\frac{J}{2\pi\epsilon k}} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t} \quad (31)$$

Интеграл напряжения будет следующий

$$U = r_0 \int_1^{\infty} E dt = r_0 \sqrt{\frac{J}{2\pi\epsilon k}} f(x, -1) \quad (32)$$

Функцию  $f(x, -1)$  можно согласно формуле (24) записать так:

$$f(x, -1) = \sqrt{x^2 - 1} - \arcsin \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2 - 1} - \arccos \frac{1}{x} \quad (33)$$

Теперь уже легко из интеграла напряжения выявить вольтамперную характеристику:

$$J = \frac{2\pi\epsilon k U^2}{R^2 \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \arccos \frac{1}{x} \right)^2} \quad (34)$$

Таблица 2

$\mu$	1	2	3	5	7	10	15	20	25
0,00	I, 0000	I, 0000	I, 0000	I, 0000	I, 0000	I, 0000	I, 0000	I, 0000	I, 0000
0,05	I, 0492	I, 0488	I, 0485	I, 0480	I, 0475	I, 0496	I, 0461	I, 0453	I, 0447
0,10	I, 0969	I, 0955	I, 0943	I, 0923	I, 0906	I, 0885	I, 0856	I, 0832	I, 0812
0,15	I, 1432	I, 1401	I, 1376	I, 1334	I, 1300	I, 1257	I, 1200	I, 1154	I, 1116
0,20	I, 1883	I, 1830	I, 1787	I, 1718	I, 1662	I, 1592	I, 1502	I, 1431	I, 1372
0,25	I, 2322	I, 2243	I, 2179	I, 2076	I, 1994	I, 1895	I, 1767	I, 1668	I, 1587
0,30	I, 2751	I, 2640	I, 2551	I, 2411	I, 2300	I, 2167	I, 1999	I, 1870	I, 1766
0,35	I, 3169	I, 3022	I, 2906	I, 2723	I, 2581	I, 2412	I, 2201	I, 2041	I, 1913
0,40	I, 3577	I, 3390	I, 3243	I, 3015	I, 2838	I, 2631	I, 2374	I, 2182	I, 2030
0,45	I, 3975	I, 3745	I, 3565	I, 3286	I, 3073	I, 2825	I, 2521	I, 2296	I, 2118
0,50	I, 4365	I, 4086	I, 3870	I, 3538	I, 3286	I, 2995	I, 2642	I, 2383	I, 2179
0,55	I, 4745	I, 4415	I, 4159	I, 3770	I, 3477	I, 3141	I, 2737	I, 2443	I, 2214
0,60	I, 5117	I, 4731	I, 4433	I, 3983	I, 3647	I, 3264	I, 2807	I, 2477	I, 2221
0,65	I, 5480	I, 5034	I, 4691	I, 4177	I, 3795	I, 3362	I, 2851	I, 2483	I, 2200
0,70	I, 5834	I, 5324	I, 4934	I, 4350	I, 3920	I, 3436	I, 2867	I, 2462	I, 2151
0,75	I, 6180	I, 5601	I, 5159	I, 4503	I, 4021	I, 3483	I, 2856	I, 2411	I, 2072
0,80	I, 6518	I, 5865	I, 5368	I, 4634	I, 4098	I, 3503	I, 2813	I, 2328	I, 1959
0,85	I, 6846	I, 6115	I, 5560	I, 4741	I, 4148	I, 3492	I, 2737	I, 2210	I, 1810
0,90	I, 7166	I, 6350	I, 5732	I, 4824	I, 4168	I, 3448	I, 2623	I, 2050	I, 1619
0,95	I, 7477	I, 6570	I, 5883	I, 4878	I, 4155	I, 3364	I, 2464	I, 1842	I, 1375
1,00	I, 7778	I, 6773	I, 6012	I, 4899	I, 4101	I, 3232	I, 2247	I, 1570	I, 1065

Таблица 2 (продолжение)

$\mu$	30	40	50	70	100	150	200	300	500
0,00	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000
0,05	I,0441	I,0431	I,0422	I,0408	I,0390	I,0368	I,0351	I,0325	I,0291
0,10	I,0794	I,0763	I,0737	I,0696	I,0649	I,0593	I,0551	I,0493	I,0420
0,15	I,1082	I,1027	I,0981	I,0910	I,0831	I,0739	I,0674	I,0584	I,0475
0,20	I,1321	I,1238	I,1172	I,1069	I,0958	I,0832	I,0744	I,0623	I,0479
0,25	I,1518	I,1407	I,1318	I,1184	I,1041	I,0881	I,0771	I,0622	I,0446
0,30	I,1679	I,1538	I,1428	I,1261	I,1087	I,0894	I,0763	I,0586	I,0379
0,35	I,1806	I,1636	I,1504	I,1306	I,1100	I,0876	I,0723	I,0520	I,0284
0,40	I,1904	I,1704	I,1549	I,1319	I,1084	I,0828	I,0655	I,0427	I,0163
0,45	I,1972	I,1742	I,1565	I,1305	I,1039	I,0752	I,0561	I,0307	I,0016
0,50	I,2013	I,1753	I,1554	I,1262	I,0967	I,0650	I,0440	I,0163	0,9846
0,55	I,2027	I,1736	I,1515	I,1192	I,0868	I,0522	I,0293	0,9993	0,9651
0,60	I,2013	I,1691	I,1448	I,1095	I,0742	I,0368	I,0121	0,9798	0,9432
0,65	I,1972	I,1619	I,1353	I,0970	I,0588	I,0186	0,9921	0,9577	0,9187
0,70	I,1901	I,1517	I,1229	I,0815	I,0405	0,9975	0,9695	0,9328	0,8916
0,75	I,1800	I,1384	I,1073	I,0629	I,0190	0,9733	0,9434	0,9048	0,8615
0,80	I,1665	I,1216	I,0883	I,0408	0,9941	0,9456	0,9141	0,8735	0,8280
0,85	I,1493	I,1010	I,0653	I,0147	0,9651	0,9139	0,8808	0,8381	0,7905
0,90	I,1276	I,0759	I,0378	0,9838	0,9314	0,8774	0,8425	0,7978	0,7482
0,95	I,1007	I,0451	I,0044	0,9470	0,8914	0,8344	0,7978	0,7510	0,6992
I,00	I,0666	I,0068	0,9631	0,9017	0,8425	0,7821	0,7434	0,6941	0,6396

Таблица 2 (продолжение)

$\mu$	1000	2000	5000	10000	30000	$10^5$	$10^6$	$10^{12}$	$\infty$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	1,0244	1,0198	1,0142	1,0104	1,0051	1,0003	0,9932	0,9740	0,9500
0,10	1,0325	1,0237	1,0134	1,0066	0,9973	0,9889	0,9765	0,9428	0,9000
0,15	1,0336	1,0211	1,0067	0,9973	0,9845	0,9729	0,9559	0,9096	0,8500
0,20	1,0301	1,0142	0,9961	0,9843	0,9683	0,9539	0,9326	0,8749	0,8000
0,25	1,0229	1,0039	0,9823	0,9683	0,9494	0,9323	0,9072	0,8391	0,7500
0,30	1,0128	0,9908	0,9659	0,9499	0,9282	0,9087	0,8800	0,8023	0,7000
0,35	0,9999	0,9751	0,9472	0,9292	0,9050	0,8832	0,8512	0,7645	0,6500
0,40	0,9845	0,9571	0,9263	0,9065	0,8799	0,8560	0,8208	0,7258	0,6000
0,45	0,9668	0,9368	0,9034	0,8818	0,8530	0,8270	0,7890	0,6862	0,5500
0,50	0,9468	0,9145	0,8784	0,8552	0,8242	0,7964	0,7556	0,6457	0,5000
0,55	0,9246	0,8899	0,8514	0,8267	0,7937	0,7641	0,7208	0,6043	0,4500
0,60	0,9000	0,8631	0,8222	0,7961	0,7612	0,7300	0,6844	0,5620	0,4000
0,65	0,8729	0,8340	0,7909	0,7635	0,7268	0,6941	0,6463	0,5185	0,3500
0,70	0,8433	0,8024	0,7572	0,7285	0,6902	0,6561	0,6063	0,4738	0,3000
0,75	0,8108	0,7680	0,7209	0,6910	0,6512	0,6158	0,5642	0,4277	0,2500
0,80	0,7750	0,7304	0,6815	0,6504	0,6093	0,5727	0,5196	0,3799	0,2000
0,85	0,7354	0,6890	0,6384	0,6063	0,5639	0,5263	0,4719	0,3298	0,1500
0,90	0,6908	0,6428	0,5905	0,5575	0,5139	0,4754	0,4199	0,2765	0,1000
0,95	0,6395	0,5898	0,5359	0,5019	0,4572	0,4179	0,3614	0,2177	0,0500
1,00	0,5773	0,5254	0,4693	0,4342	0,3880	0,3474	0,2895	0,1448	0,0000



Сравнение выражений (27) и (34) дает

$$C_y(x, 0) = C_{y_0}(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \arccos \frac{1}{x}\right)^2} \quad (35)$$

3.4. Предел  $\mu \rightarrow 1$ . В этом случае  $U \rightarrow U_e$  и  $J \rightarrow 0$  что влечет  $\rho \rightarrow 0$  и  $E \rightarrow r_0 E_e / r$ . Поскольку  $r E$  приближается к постоянной, то согласно формуле (15) плотность заряда будет независимой от  $r$ . Вообразив цилиндрическую поверхность с радиусом  $r$ , вычисляем по формуле Гаусса во втором приближении напряженность электрического поля.

$$E = \frac{r_0 E_e}{r} + \frac{\rho}{\epsilon} \frac{r^2 - r_0^2}{2r} = \frac{U_e}{r \ln x} + \frac{\rho}{\epsilon} \frac{r^2 - r_0^2}{2r} \quad (36)$$

Найденное выражение легко интегрируется. По интегралу напряжения определяется плотность заряда

$$\rho = \frac{4\epsilon(U - U_e)}{R^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} \ln x\right)} \quad (37)$$

Вольтамперную характеристику дает непосредственно формула (15), в которой теперь можно вторым слагаемым выражения (36) пренебрегать. Окончательно получим

$$J = \frac{8\pi\epsilon k U_e(U - U_e)}{R^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} \ln x\right) \ln x} \quad (38)$$

и

$$C_y(x, 1) = \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} \ln x\right) \ln x} \quad (39)$$

К этим же результатам можно прийти, рассматривая  $\alpha$  в

уравнении (26) как бесконечно большую величину или решая это же уравнение относительно  $\alpha / (1 - \mu)$

3.5. Предел  $\varepsilon \rightarrow 1$ . В настоящем случае можно пользоваться уже имеющимся решением для плоских электродов. Вставляя в формулу (10)  $h = R - r_0 = R(1 - \frac{1}{\varepsilon})$  и принимая  $J = 2\pi Rj$  получаем асимптотическое выражение

$$J = \frac{9}{8} \frac{Pl(\mu)}{(1 - \frac{1}{\varepsilon})^3} \frac{2\pi \varepsilon k U(U - U_e)}{R^2} \quad (40)$$

и отсюда

$$C_y(\varepsilon \rightarrow 1, \mu) \approx \frac{9}{8} \frac{Pl(\mu)}{(1 - \frac{1}{\varepsilon})^3} \quad (41)$$

В процессе  $\varepsilon \rightarrow 1$  относительная погрешность написанных формул стремится к нулю. Запишем еще очевидные результаты:

$$C_{y_0}(\varepsilon \rightarrow 1) = \frac{9}{8(1 - \frac{1}{\varepsilon})^3} \quad (42)$$

$$C_{y_1}(1, \mu) = Pl(\mu) \quad (43)$$

3.6. Предел  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Ради общности предположим  $U_e \neq 0$ , что влечет  $E_e \rightarrow \infty$ . Принимаем обозначение

$$\varphi = \frac{\varepsilon^2}{(\alpha + 1) \ln^2 \varepsilon} \quad (44)$$

что позволяет формулу (28) переписать так:

$$C_y(\varepsilon, \mu) = \frac{\mu^2}{1 - \mu} \varphi \quad (45)$$

$C_y(\infty, \mu)$  - очевидно конечная величина. Если  $\mu \neq 0$ , то и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \varphi$  должно быть конечной величиной. Следовательно,  $\alpha$  в пределе бесконечно большая величина, что позволя-

от везде в дальнейшем считать  $\alpha$  и  $\alpha + 1$  равными. Учитывая сказанное, приведем уравнению (26) следующий вид

$$\frac{f(x, \alpha)}{x} - \frac{1}{\mu \sqrt{\varphi}} = 0. \quad (46)$$

Делаем в формуле (24) подстановку  $\alpha = x^2 / (\varphi \ln^2 x)$  и вычисляем предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x, \alpha)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\varphi}}. \quad (47)$$

Вставляя этот предел в уравнение (46), получаем

$$\varphi = \frac{(1 - \mu)^2}{\mu^2}. \quad (48)$$

По формуле (45)

$$C_y(\infty, \mu) = 1 - \mu, \quad (49)$$

отсюда

$$J = \frac{2\pi \varepsilon k (U - U_e)^2}{R^2}. \quad (50)$$

Дополнительно можно показать, что в случае  $x \rightarrow \infty$  напряженность  $E$  во всех точках среды одинакова, а потенциал имеет при  $r = 0$  скачок на  $U_e$

В частном случае  $x \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow 0$  получаем

$$C_y(\infty, 0) = 1$$

и

$$J = \frac{2\pi \varepsilon k U^2}{R^2}. \quad (51)$$

3.7. Формулы Таунсенда и Дюлюи. На практике наиболее часто используется приближенная формула

$$J = \frac{8\pi \varepsilon k U(U - U_e)}{R^2 \ln x}, \quad (52)$$

предложенная Таунсендом. К этой же формуле приводит вычисление вольтамперной характеристики по методу Дейча. Вывод формулы (52) подробно обсуждается в монографии [Капцов, 1947] .

Формула Таунсенда равносильна следующему приближенному выражению:

$$C_y(x, \mu) \approx C_{yT}(x) = \frac{4}{\ln x} \quad (53)$$

В работе [Дуруу, 1958] предложена более точная, но зато и более сложная формула, которая равносильна другому приближенному выражению:

$$C_y(x, \mu) \approx C_{y0}(x, \mu) = 1 - \mu + \frac{2\mu}{\ln x} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{2\mu}{(1-\mu)\ln x} \right) \ln \left( 1 + \frac{(1-\mu)\ln x}{2\mu} \right) \right] \quad (54)$$

Для выяснения точности описанных приближений значения функций  $C_{yT}(x)$  и  $C_{y0}(x, \mu)$  подвергались сравнению со значениями  $C_y(x, \mu)$  в точках, распределенных по всей области определения. Результаты представлены в таблице 3, где верхние числа - значения отношения  $C_{yT}(x) / C_y(x, \mu)$  а нижние числа - значения отношения  $C_{y0}(x, \mu) / C_y(x, \mu)$ .

В процессе  $x \rightarrow \infty$   $\mu \rightarrow 1$  отношение  $C_{yT}(x) / C_y(x, \mu)$  не имеет однозначного предела.

Таблица 3

$\mu$ \ $\infty$	1	2	10	100	$10^3$	$10^4$	$10^6$	$\infty$
0	0	0,677	1,249	0,841	0,577	0,434	0,290	0
	0	0,117	0,719	0,969	0,997	1,000	1,000	1
$\frac{1}{4}$	0	0,552	1,050	0,762	0,564	0,448	0,319	0
	0	0,238	0,837	0,979	0,989	0,992	0,995	1
$\frac{1}{2}$	0	0,480	0,961	0,767	0,610	0,508	0,383	0
	0	0,301	0,861	0,962	0,972	0,978	0,984	1
$\frac{3}{4}$	0	0,434	0,926	0,826	0,712	0,628	0,513	0
	0	0,353	0,888	0,954	0,957	0,959	0,965	1
$\frac{7}{8}$	0	0,417	0,927	0,887	0,809	0,745	0,684	0
	0	0,378	0,909	0,961	0,958	0,956	0,956	1
$\frac{15}{16}$	0	0,410	0,933	0,933	0,884	0,840	0,768	0
	0	0,391	0,924	0,974	0,968	0,964	0,959	1
1	0	0,403	0,944	0,999	1,000	1,000	1,000	-
	0	0,403	0,944	0,999	1,000	1,000	1,000	1

#### § 4. Сферические электроды.

4.1. Электрическое поле. Выбираем сферическую координатную систему. Сохраняя полностью схему рассуждений п.3.1, переписываем лишь те формулы, в которые вносятся изменения:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (55)$$

$$I = 4\pi r^2 k E \rho, \quad (56)$$

$$(r^2 E) d(r^2 E) = \frac{I}{4\pi \varepsilon k} r^2 dr, \quad (57)$$

$$(r^2 E) = \frac{I}{6\pi \varepsilon k} (r^3 + \beta r_0^3), \quad (58)$$

$$\beta = \frac{6\pi\epsilon k r_0}{I} E_e^2 - 1, \quad (59)$$

$$E = \frac{E_e}{t} \sqrt{\frac{t^3 + \beta}{1 + \beta}}, \quad (60)$$

$$U = r_0 \int_1^{\infty} E dt = \frac{r_0 E_e}{\sqrt{1 + \beta}} g(\infty, \beta), \quad (61)$$

$$g(\infty, \beta) = \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{t^3 + \beta}}{t^2} dt. \quad (62)$$

В отличие от п. 3.1 этот интеграл не выражается в элементарных функциях.

4.2. Вольтамперная характеристика. Сохраняя схему рассуждений п. 3.2, переписываем аналоги формул (25-29):

$$r_0 E_e = \frac{\infty U_e}{\infty - 1} = \frac{\infty \mu U}{\infty - 1}, \quad (63)$$

$$g(\infty, \beta) - \frac{\infty - 1}{\infty \mu} \sqrt{1 + \beta} = 0, \quad (64)$$

$$I = Sp(\infty, \mu) \frac{3\pi\epsilon k U(U - U_e)}{2R}, \quad (65)$$

$$Sp(\infty, \mu) = \frac{4\infty^3 \mu^2}{(\infty - 1)^2 (1 - \mu)(1 + \beta)}, \quad (66)$$

$$S_p(x, \mu) = S_{p_0}(x) S_{p_1}(x, \mu), \quad (67)$$

где  $S_{p_0}(x) = S_p(x, 0)$ . В п. 4.3 будет выведена точная формула (72) для вычисления  $S_{p_0}(x)$ . Предлагаем также приближенную формулу.

$$S_{p_0}(x) \approx \tilde{S}_{p_0}(x) = 3 \left( \frac{x}{x-1} \right)^3 - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x} + \frac{22}{\sqrt{x}} - 2. \quad (68)$$

При составлении этой формулы учитывались асимптотические свойства функции  $S_{p_0}(x)$ .

В таблице 4 представлены значения функции  $S_{p_0}(x)$  и  $\vartheta(x) = S_{p_0}(x) / \tilde{S}_{p_0}(x)$ .

Таблица 4

$x$	$S_{p_0}(x)$	$\vartheta(x)$	$x$	$S_{p_0}(x)$	$\vartheta(x)$
1	$\infty$	1	7	3,0049	1,0029
1,1	3916,2	1,0068	10	2,3974	0,9995
1,2	623,99	1,0069	15	1,9794	0,9966
1,3	231,03	1,0051	20	1,7801	0,9954
1,5	74,243	1,0015	30	1,5803	0,9950
1,7	38,261	0,9999	50	1,4119	0,9956
2	20,559	1,0001	100	1,2682	0,9972
2,5	11,265	1,0026	200	1,1794	0,9987
3	7,8488	1,0047	500	1,1083	0,9998
4	5,1317	1,0062	5000	1,0325	1,0003
5	4,0030	1,0056	$\infty$	1	1
			...		

Таблица 5

$\mu$	I	I,5	2	3	4	5	7	10	I5
0,00	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000	I,0000
0,05	I,0492	I,0488	I,0476	I,0476	I,0470	I,0463	I,0453	I,0439	I,0420
0,10	I,0969	I,0953	I,0910	I,0910	I,0886	I,0864	I,0825	I,0778	I,0717
0,15	I,1432	I,1398	I,1307	I,1307	I,1256	I,1211	I,1133	I,1040	I,0922
0,20	I,1883	I,1824	I,1671	I,1671	I,1586	I,1512	I,1387	I,1239	I,1056
0,25	I,2322	I,2233	I,2004	I,2004	I,1880	I,1772	I,1592	I,1383	I,1129
0,30	I,2751	I,2626	I,2310	I,2310	I,2140	I,1994	I,1754	I,1478	I,1149
0,35	I,3169	I,3004	I,2589	I,2589	I,2369	I,2181	I,1875	I,1529	I,1121
0,40	I,3577	I,3367	I,2843	I,2843	I,2567	I,2334	I,1957	I,1537	I,1048
0,45	I,3975	I,3716	I,3072	I,3072	I,2736	I,2454	I,2003	I,1504	I,0932
0,50	I,4365	I,4051	I,3277	I,3277	I,2877	I,2542	I,2011	I,1431	I,0774
0,55	I,4745	I,4373	I,3457	I,3457	I,2988	I,2598	I,1983	I,1318	I,0574
0,60	I,5117	I,4681	I,3613	I,3613	I,3069	I,2620	I,1917	I,1164	I,0331
0,65	I,5480	I,4975	I,3743	I,3743	I,3120	I,2608	I,1812	I,0967	I,0043
0,70	I,5834	I,5256	I,3847	I,3847	I,3139	I,2559	I,1664	I,0723	0,9706
0,75	I,6180	I,5523	I,3923	I,3923	I,3123	I,2471	I,1470	I,0429	0,9316
0,80	I,6518	I,5775	I,3969	I,3969	I,3068	I,2338	I,1224	I,0075	0,8862
0,85	I,6846	I,6012	I,3982	I,3982	I,2971	I,2155	I,0917	0,9652	0,8334
0,90	I,7166	I,6234	I,3956	I,3956	I,2823	I,1911	0,0533	0,9139	0,7705
0,95	I,7477	I,6439	I,3886	I,3886	I,2613	I,1588	I,0046	0,8497	0,6927
I,00	I,7778	I,6625	I,3760	I,3760	I,2318	I,1152	0,9395	0,7629	0,5848



Таблица 5 (продолжение)

$\mu$	20	30	50	100	200	500	5000	$\infty$	$1/\mu$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	$\infty$
0,05	1,0405	1,0380	1,0345	1,0288	1,0224	1,0131	0,9900	0,9500	20,000
0,10	1,0668	1,0593	1,0491	1,0341	1,0187	0,9986	0,9567	0,9000	10,000
0,15	1,0832	1,0697	1,0518	1,0272	1,0031	0,9737	0,9174	0,8500	6,6667
0,20	1,0919	1,0719	1,0462	1,0120	0,9800	0,9426	0,8750	0,8000	5,0000
0,25	1,0942	1,0675	1,0340	0,9908	0,9516	0,9071	0,8304	0,7500	4,0000
0,30	1,0911	1,0575	1,0164	0,9646	0,9189	0,8683	0,7842	0,7000	3,3333
0,35	1,0830	1,0426	0,9940	0,9342	0,8826	0,8267	0,7366	0,6500	2,8571
0,40	1,0704	1,0232	0,9674	0,9000	0,8431	0,7827	0,6880	0,6000	2,5000
0,45	1,0534	0,9995	0,9367	0,8623	0,8007	0,7365	0,6383	0,5500	2,2222
0,50	1,0322	0,9716	0,9022	0,8213	0,7555	0,6882	0,5876	0,5000	2,0000
0,55	1,0067	0,9397	0,8639	0,7771	0,7077	0,6379	0,5360	0,4500	1,8182
0,60	0,9770	0,9036	0,8217	0,7296	0,6571	0,5856	0,4836	0,4000	1,6667
0,65	0,9427	0,8631	0,7755	0,6786	0,6038	0,5312	0,4302	0,3500	1,5385
0,70	0,9036	0,8179	0,7249	0,6240	0,5476	0,4747	0,3758	0,3000	1,4286
0,75	0,8591	0,7674	0,6695	0,5653	0,4880	0,4157	0,3204	0,2500	1,3333
0,80	0,8082	0,7108	0,6085	0,5019	0,4245	0,3539	0,2638	0,2000	1,2500
0,85	0,7497	0,6466	0,5404	0,4325	0,3563	0,2886	0,2056	0,1500	1,1765
0,90	0,6808	0,5721	0,4627	0,3549	0,2814	0,2185	0,1454	0,1000	1,1111
0,95	0,5961	0,4813	0,3692	0,2635	0,1952	0,1401	0,0817	0,0500	1,0526
1,00	0,4765	0,3503	0,2315	0,1275	0,0682	0,0289	0,0031	0,0000	1,0000

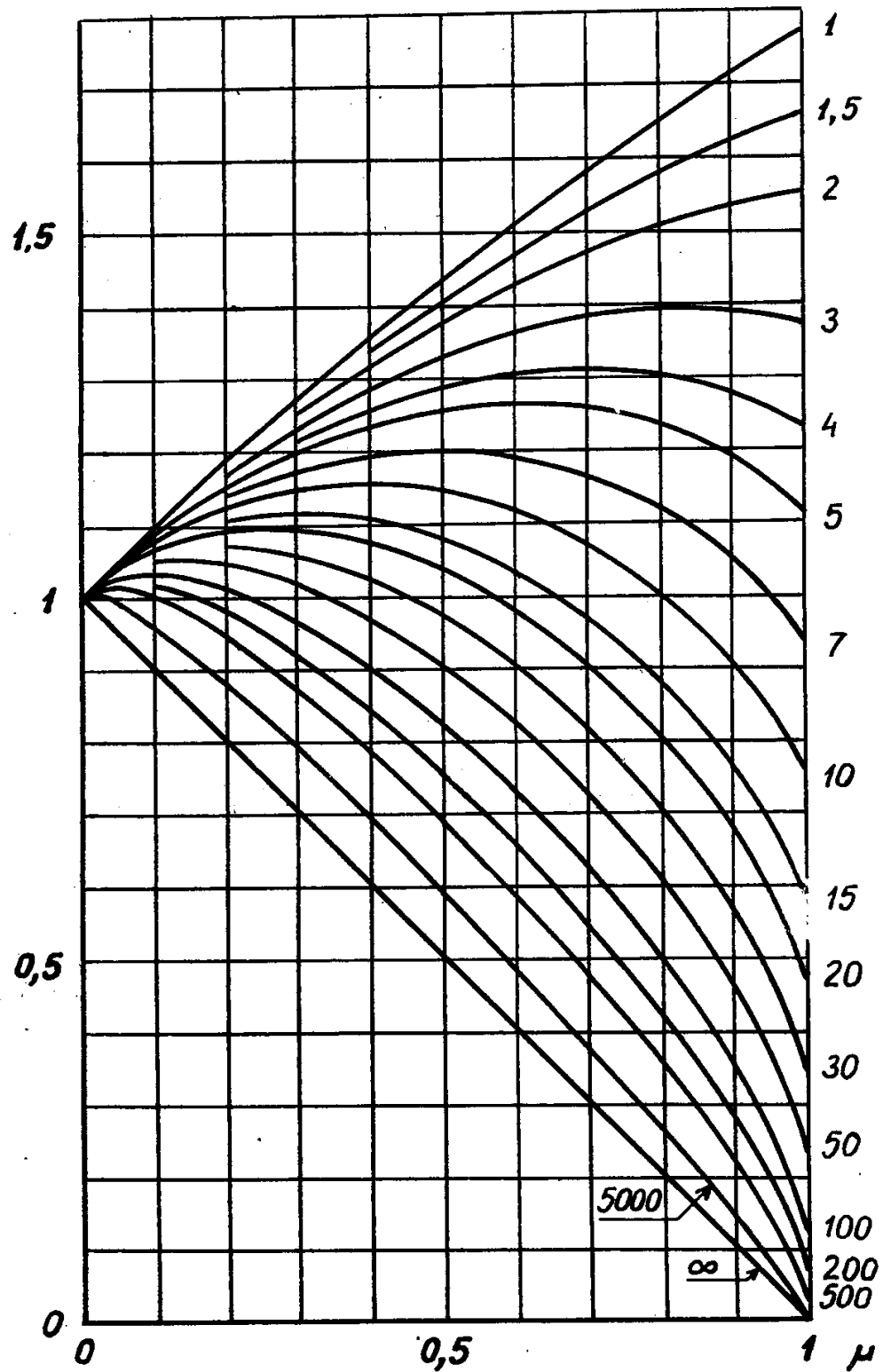


Рис. 2. Графики функции  $S_{p_1}(\varphi, \mu)$ . Отдельные кривые соответствуют указанным фиксированным значениям аргумента  $\varphi$ .

Численные значения функции  $S_p(x, \mu)$  представлены в таблице 5, а графики на рисунке 2.

4.3. Предел  $\mu \rightarrow 0$ . Предположение  $E_e = 0$  влечет к  $\beta = -1$ . Вполне аналогично п. 3.3 получаем

$$E = \sqrt{\frac{I}{6\pi\epsilon k r_0}} \frac{\sqrt{t^3 - 1}}{t^2}, \quad (69)$$

$$U = \sqrt{\frac{I r_0}{6\pi\epsilon k}} g(x, -1), \quad (70)$$

$$I = \frac{6\pi\epsilon k U^2 x}{R [g(x, -1)]^2}, \quad (71)$$

$$S_p(x, 0) = S_{p_0}(x) = \frac{4x}{[g(x, -1)]^2}. \quad (72)$$

Значения  $g(x, -1)$  вычисляются численным интегрированием по формуле (62).

4.4. Предел  $\mu \rightarrow 1$ . Поступая аналогично п. 3.4 находим

$$E = \frac{r_0^2 E_e}{r^2} + \frac{\rho}{\epsilon} \frac{r^3 - r_0^3}{3r^2}, \quad (73)$$

$$\rho = \frac{6\epsilon x^3 (U - U_e)}{R^2 (x^3 - 3x + 2)}, \quad (74)$$

$$I = \frac{24\pi\epsilon k U_e (U - U_e) x^3}{R(x-1)(x^3 - 3x + 2)}, \quad (75)$$

$$S_p(x, 1) = \frac{16x^3}{(x-1)(x^3 - 3x + 2)}. \quad (76)$$

Как в п. 3.4, так и здесь к этим же результатам можно прийти путем формального предельного перехода в уравнении (64).

4.5. Предел  $\varkappa \rightarrow 1$ . Пользуясь решением для плоских электродов, легко найти асимптотическое выражение

$$I = 3 \frac{Pl(\mu)}{\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right)^3} \frac{3\pi \varepsilon R U(U - U_0)}{2R} \quad (77)$$

Очевидно

$$S_{p_0}(\varkappa \rightarrow 1) \approx 3 \left(\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\right)^3, \quad (78)$$

$$S_{p_1}(1, \mu) = Pl(\mu) \quad (79)$$

4.6. Предел  $\varkappa \rightarrow \infty$ . Этот переход влечет  $\beta \rightarrow \infty$ . Придаем уравнению (64) следующий вид:

$$\frac{g(\varkappa, \beta)}{\sqrt{\beta}} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa \mu} = 0 \quad (80)$$

и разбиваем  $g(\varkappa, \beta)/\sqrt{\beta}$  на сумму двух слагаемых  $y_1 + y_2$ , где

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_1^{\sqrt[3]{\beta}} \frac{\sqrt{t^3 + \beta}}{t^2} dt = \int_1^{\sqrt[3]{\beta}} \frac{\sqrt{1 + \frac{t^3}{\beta}}}{t^2} dt, \quad (81)$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{\sqrt[3]{\beta}}^{\varkappa} \frac{\sqrt{t^3 + \beta}}{t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{\sqrt[3]{\beta}}^{\varkappa} \frac{\sqrt{1 + \frac{\beta}{t^3}}}{\sqrt{t}} dt. \quad (82)$$

Разлагая корни в ряды по степеням  $t^3/\beta$  или  $\beta/t^3$  можно показать, что  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \gamma_1 = 1$  и  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \gamma_2 = 2 \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sqrt{\beta/t^3}$ . Вставляя эти результаты в уравнение (80) получаем

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{(1-\mu)^2}{4\mu^2}. \quad (83)$$

Теперь уже легко найти предел выражения (66)

$$S_p(\infty, \mu) = 1 - \mu. \quad (84)$$

и соответствующую предельную формулу

$$I = \frac{3\pi\epsilon k (U - U_e)^2}{2R}. \quad (85)$$

## § 5. Дополнения и замечания.

5.1. Влияние зависимости эмиссионного напряжения от плотности тока на вольтамперные характеристики. В теории коронного разряда обычно принимается дополнительное допущение:

9<sup>0</sup>. Эмиссионная напряженность не зависит от плотности тока.

В таком случае эмиссионное напряжение постоянно и равно начальному напряжению  $U_0$ , что позволяет вообще отказаться от понятий эмиссионной напряженности и напряжения, заменяя всюду  $E_e$  на  $E_0$  и  $U_e$  на  $U_0$ . При этом формулы (10), (27) и (65) — явные выражения вольтамперных характеристик.

К сожалению, допущение 9<sup>0</sup> не всегда приемлемо. Тогда приходится формулы (10), (27) и (65) толковать как уравне-

ния. Поскольку функции  $E_e = E_e(j)$  разных эмиттеров могут быть весьма разнообразны, то эти уравнения решаются лишь в конкретных случаях. Пример решения одной конкретной задачи приведен в статье [Таммет, 1969 б] .

Весьма часто зависимость  $E_e$  от плотности тока относительно слабая, и для решения уравнений (10), (27) и (65) можно рекомендовать метод простой итерации по этим же формулам (10), (27) и (65).

5.2. Об экспериментальном определении эмиссионного напряжения. Рассмотрим принцип простейшего эксперимента для изучения эмиссионных напряженности и напряжения.

Пусть экспериментальная установка состоит из цилиндрического эмиттера с радиусом  $r_0$  и двух сменных внешних цилиндрических электродов с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  . Обозначаем  $R_1/r_0 = \alpha_1$  и  $R_2/r_0 = \alpha_2$  . Измеряя напряжения  $U_1$  и  $U_2$  при разных внешних электродах, но при одном и том же заданном значении  $J$  , можно на основе формул (37) и (27) писать

$$\begin{aligned} C_y \left( \alpha_1, \frac{r_0 E_e \ln \alpha_1}{U_1} \right) \frac{U_1 (U_1 - r_0 E_e \ln \alpha_1)}{R_1^2} = \\ = C_y \left( \alpha_2, \frac{r_0 E_e \ln \alpha_2}{U_2} \right) \frac{U_2 (U_2 - r_0 E_e \ln \alpha_2)}{R_2^2} . \end{aligned} \quad (86)$$

Это - уравнение с одной неизвестной. Определив отсюда  $E_e$  , можно вычислить  $U_e$  для любого радиуса внешнего цилиндра.

Предложенный метод существенно опирается на допущение 7<sup>0</sup>. Для проверки правомерности этого допущения желательно повторить измерения при многих значениях радиуса внешнего электрода и сравнить результаты. Тогда эксперимент сводится к снятию вольт-метровых характеристик.

Описание одного конкретного эксперимента снятия вольт-метровых характеристик коронного разряда можно найти в статье [Гринман, Бахтаев, 1967] .

Подобный опыт можно провести и без смены электродов, используя технику зондов (в случае коронного разряда зонды Сато).

Аналогично можно изучить эмиссионную напряженность также на плоских или сферических электродах.

### 5.3. О методе численного решения основных уравнений.

Уравнения (26) и (64) решаются лишь численным способом. Особенно неудобно уравнение (64), так как значения функции  $g(x, \beta)$  приходится определять численным интегрированием. Поэтому желательно применять по возможности наиболее быстро сходящийся итерационный процесс.

Заметив, что значения производных функции  $f(x, \alpha)$  и  $g(x, \beta)$  по  $\alpha$  или  $\beta$  выражаются относительно просто через значения самих функций, можно легко построить итерацию высокого порядка по схеме Чебышева. При табулировании функции  $S_p(x, \mu)$  использовалась итерация четвертого порядка:

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{y}{y'} - \frac{y''y^2}{2(y')^3} + \left( y''' - 3 \frac{(y'')^2}{y'} \right) \frac{y^3}{6(y')^4}, \quad (87)$$

где  $y = y(\beta)$  - левая часть уравнения (64), а  $y', y'', y'''$  - его производные по  $\beta$  при  $\beta = \beta_n$ . Величина  $x$  считается параметром. Производные функций  $g = g(\beta)$  и  $y = y(\beta)$  вычислялись по следующей рекуррентной схеме:

$$g' = \frac{1}{3\beta} \left( \omega - \frac{v}{x} + \frac{g}{2} \right); \quad (88)$$

$$g'' = \frac{1}{6\beta} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{xv} - 5g' \right); \quad (89)$$

$$g''' = \frac{1}{12\beta} \left( \frac{1}{xv^3} - \frac{1}{\omega^3} - 22g'' \right); \quad (90)$$

$$y' = g' - \frac{x-1}{2x\mu\omega}; \quad (91)$$

$$y'' = g'' + \frac{\alpha - 1}{4\alpha\mu\omega^3}, \quad (92)$$

$$y''' = g''' - \frac{3(\alpha - 1)}{8\alpha\mu\omega^5}, \quad (93)$$

где

$$\omega = \sqrt{1 + \beta}, \quad (94)$$

$$\nu = \sqrt{\alpha^3 + \beta}. \quad (95)$$

Уравнение (26) можно решать аналогично. Ввиду простоты вычисления значений функции  $f(\alpha, \alpha)$  использовалась итерация лишь второго порядка (метод Ньютона).

5.4. О точности таблиц. Основные функции табулированы с четырьмя значащими цифрами. При выборе числа значащих цифр имелась в виду потребность точности при количественном изучении отклонений реальных явлений от идеальной униполярной квазикороны.

Все табулированные значения вычислены непосредственно, не прибегая к интерполяции. Ошибки представленных цифр не должны превосходить единицу последнего знака.

Благодарность.

Завершение настоящей работы стало возможным благодаря предоставлению автору возможности пользоваться машинами Вычислительного центра Казанского государственного университета имени В.И.Ульянова-Ленина. За непосредственную помощь при вычислениях автор признателен В.В.Салум и В.Г.Беловой.



## Л и т е р а т у р а

- Гринман И.Г., Бахтаев Ш.А. - 1967 - Экспериментальное исследование коронного разряда на тонких проволоках, Изв. АН Казахской ССР, сер. физ-мат. № 6, с. 72-78.
- Капцов Н.А. - 1947 - Коронный разряд. Гостехиздат, М.-Л.
- Попков В.И. - 1949 - К теории униполярной короны постоянного тока, Электричество, № 1, с. 33-48.
- Таммет Х.Ф. - 1969 а - Теория простейшей модели плоского нейтрализатора статического электричества, Уч. зап. Тартуского гос. ун-та, 240.
- Таммет Х.Ф. - 1969 б - Вольтамперные характеристики григнелевского нейтрализатора статического электричества, Уч. зап. Тартуского гос. ун-та, 239, с. 41-46.
- Dupuy, J. - 1958 - Effet de couronne et champs ionises, Rev. gén. de l'électricité 67, № 2, p.85-104.

### IDEAALSE UNIPOLAARSE KVAASIKOROONA VOLTAMPER- KARAKTERISTIKUD

H. Tammet

#### Sisukord

§ 1. Sissejuhatus. 1.1. Kvaasikoroona mõiste tarvilikkus. 1.2. Ideaalne unipolaarne kvaasikoroona. 1.3. Lihtsustused. 1.4. Emissioonpinge ja alppinge. 1.5. Ülesande seadest. 1.6. Tähistused.

§ 2. Tasased elektroodid. 2.1. Elektriväli. 2.2. Volt-amperekarakteristik. 2.3. Piirjuhud.

§ 3. Silindrilised elektroodid. 3.1. Elektriväli. 3.2. Voltamperkarakteristik. 3.3. Piir  $\mu \rightarrow 0$ . 3.4. Piir  $\mu \rightarrow 1$ . 3.5. Piir  $\alpha \rightarrow 1$ . 3.6. Piir  $\alpha \rightarrow \infty$ . 3.7. Townsendi ja Dupuy valemid.

§ 4. Sfäärilised elektroodid. 4.1. Elektriväli. 4.2. Voltamperkarakteristik. 4.3. Piir  $\mu \rightarrow 0$ . 4.4. Piir  $\mu \rightarrow 1$ . 4.5. Piir  $\alpha \rightarrow 1$ . 4.6. Piir  $\alpha \rightarrow \infty$ .

§ 5. Täiendused ja märkused. 5.1. Emissioonpinge ja voolutiheduse vahelise sõltuvuse mõju voltamperkarakteristikule. 5.2. Emissioonpinge katselisest määramisest. 5.3. Põhivõrrandite numbrilise lahendamise meetodist. 5.4. Tabelite täpsusest.

Tänuavaldus.

Kirjandus.

#### Olulisemad tähistused

$x$  - vaadeldava punkti kaugus tasasest emitterist,  $h$  - paralleeltasandite vaheline kaugus,  $r$  - vaadeldava punkti kaugus elektroodide teljest või tsentrist,  $r_0$  - emitteri raadius,  $R$  - passiivse elektroodi raadius,  $\alpha = R/r_0$ ,  $\epsilon$  - keskkonna absoluutne elektriline läbitavus,  $k$  - laengukandjate elektriline liikuvus,  $\rho$  - laengutihedus,  $j$  - voolutihedus,  $J$  - voolutugevus pikkusühiku kohta,  $I$  - voolutugevus,  $E$  - elektrivälja tugevus,  $E_e$  - emissioonvälja tugevus (väljatugevus emitteri pinnal),  $U$  - elektroodidevaheline pinge,  $U_e$  - emissioonpinge (kujuteldav pinge, mis tekitaks ruumlaengu puudumise korral emitteri pinnal antud emissioonväljatugevusega võrdse tugevusega elektrivälja),  $\mu = U_e/U$ .

Kõik valemid on kirjutatud SI ühikutes.

#### Resüme

Koroonalahenduse voltamperkarakteristikute arvutusmeetodid on rakendatavad ka koroonalahendusest hoopiski erinevate nähtuste uurimisel. Et vältida arusaamatusi nii teooria rakendusobjekti kui ka ranguse küsimustes,

võetakse kasutusele kvaasikoroona mõiste. Ideaalne unipolaarne kvaasikoroona on defineeritud p. 1.2 esitatud tingimustega, mis lühendatult on järgmised:

1°. Kumbki elektrood on ekvipotentsiaalne.

2°. Laengukandjad tekivad ainult ühe elektroodi (emitteri) pinnal.

3°. Emissioonväljatugevus sõltub ainult voolutihedusest.

4°. Laengukandjate kiirus sõltub ainult elektrivälja tugevusest.

Autori eesmärgiks oli ideaalse unipolaarse kvaasikoroona voltamperkarakteristikute jaoks võimalikult mugavate rangete valemite koostamine lihtsustavate eeldustega 5° - 8° kitsendatud juhul. Nimetatud eeldused nõuavad elektroodide sümmeetriat, keskkonna elektrilise läbitavuse ning laengukandjate liikuvuse konstantsust ja protsessi statsionaarsust.

Lugeja huvides on ka elementaarsed ja tuntud tule-tuskäigud esitatud täielikult.

Põhitulemusteks on voltamperkarakteristikute praktilised valemid tasaste (10), silindriliste (27, 29) ja sfääriliste (65, 67) elektroodide jaoks. Valemities esinevad spetsiaalfunktsioonid on tabuleeritud /tabelid 1, 2, 4, 5;  $P_1(\mu) = Cy_1(1, \mu) = Sp_1(1, \mu) /$ , ülevaate nende funktsioonide iseloomust annavad ligikaudsed valemid (30, 68) ja joonised 1, 2. Piirjuhte kirjeldavad valemid (34, 35, 72, 38, 40, 41, 49, 50, 71, 75, 76, 77, 78, 84, 85).

Koroonalahenduse teoorias eeldatakse tavaliselt emissioonpinge konstantsust. Niisugusel eeldusel võrdub emissioonpinge lahenduse algpingega ja valemid (10, 27, 65) esitavad voltamperkarakteristikud vahetult. Vastasel korral esitavad need valemid voltamperkarakteristikuid ilmutamata kujul.

# VOLTAMPERE CHARACTERISTICS OF AN IDEAL UNIPOLAR QUASI-CORONA

H. Tammet

## Table of contents of the paper

§ 1. Introduction. 1.1. Need for the concept of a quasi-corona. 1.2. An ideal unipolar quasi-corona. 1.3. Simplifications. 1.4. Emission voltage and initial voltage. 1.5. The posing of the problem. 1.6. Symbols.

§ 2. Plane electrodes. 2.1. Electric field. 2.2. Volt-ampere characteristic. 2.3. Limiting cases.

§ 3. Cylindrical electrodes. 3.1. Electric field. 3.2. Voltampere characteristic. 3.3. Limit  $\mu \rightarrow 0$ . 3.4. Limit  $\mu \rightarrow 1$ . 3.5. Limit  $\alpha \rightarrow 1$ . 3.6. Limit  $\alpha \rightarrow \infty$ . 3.7. Townsend and Dupuy formulas.

§ 4. Spherical electrodes. 4.1. Electric field. 4.2. Voltampere characteristic. 4.3. Limit  $\mu \rightarrow 0$ . 4.4. Limit  $\mu \rightarrow 1$ . 4.5. Limit  $\alpha \rightarrow 1$ . 4.6. Limit  $\alpha \rightarrow \infty$ .

§ 5. Additions and notes. 5.1. Effect of the dependence of emission voltage and current density on the voltampere characteristic. 5.2. On the experimental determination of emission voltage. 5.3. On the method of numerically solving basic equations. 5.4. On the accuracy of tables.

Acknowledgements.

References.

## Some important notations

$x$  - distance of the point under observation from the plane emitter;  $h$  - distance between parallel planes;  $r$  - distance of the point under observation from the electrode axis or centre;  $r_0$  - radius of the emitter;  $R$  - ra-

dius of the passive electrode;  $\alpha = R/r_0$  ; - absolute electric permeability of the medium;  $k$  - electric mobility of charge carriers;  $\rho$  - charge density;  $j$  - current density;  $J$  - current per unit length;  $I$  - current;  $E$  - electric field strength;  $E_e$  - strength of the emission field (field strength on the surface of the emitter);  $U$  - voltage between electrodes;  $U_e$  - emission voltage between the electrodes (imaginary voltage which in absence of a space charge would produce an electric field equal to the strength of the emission field on the surface of the emitter);  $\mu = U_e/U$ . All formulas have been written in the SI system.

### Summary

The calculation methods of the voltampere characteristics of a corona discharge are applicable to the study of phenomena quite different from a corona discharge. To avoid misunderstandings on questions of the applicability of theory to the subject under study as well as on matters of accuracy, the concept of a quasi-corona is introduced. An ideal unipolar quasi-corona is defined by conditions presented in section 1.2, which are briefly as follows:

- 1°. Either of the electrodes is equipotential.
- 2°. Charge carriers arise only on the surface of one electrode (the emitter).
- 3°. The strength of the emission field depends only on current density.
- 4°. The velocity of the charge carriers depends only on the electric field strength.

The aim of the author has been to draw up rigorous formulas for the voltampere characteristics of an ideal unipolar quasi-corona which would be as convenient as possible and be restricted by simplifying assumptions listed under 5° to 8°. These assumptions call for the symmetry of electrodes, constancy of the electric permeability of

the medium and that of carrier mobility, as well as stationarity of processes.

In the interests of the reader all derivational operations, including elementary and well-known ones, have been presented completely.

The basic results are the practical formulas of volt-ampere characteristics for plane (10), cylindrical (27, 29) and spherical (65, 67) electrodes. The specific functions occurring in the formulas have been tabulated (Tables 1, 2, 4, 5;  $Fl(\mu) = Cy_1(1, \mu) = Sp_1(1, \mu)$ ). A review of the nature of these functions is provided by approximate formulas (30, 68) and figures 1 and 2. Limiting cases are described by formulas (34, 35, 72, 38, 40, 41, 49, 50, 71, 75, 76, 77, 78, 84, 85).

In the theory of corona discharges the constancy of the emission voltage is, as a rule, assumed. Under this assumption, the emission voltage equals the initial voltage of the discharge and formulas (10, 27, 65) represent voltampere characteristics directly. In an inverse case they represent voltampere characteristics in implicit form.