ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЛАНЖЕВЕНА РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Х.Ф. Таммет

П. Ланжевен в 1905 г. предложил метод вычисления спектра подвижностей аэроионов по второй производной вольт-амперной характеристики интегрального аспирационного конденсатора [I]. Зависимость характеристики $f(y)$ от спектра $\varphi(x)$ описывается при помощи интегрального уравнения первого рода [2]:

$$f(y) = \int G(y,x)\,\varphi(x)\,dx\ . \tag{I}$$

Ядро уравнения интегрального аспирационного спектрометра имеет специальный вид, который и позволяет выразить спектр через вторую производную характеристики:

$$G(y,x) = \begin{cases} 0 & \text{при } axy \leqslant 0 \\ axy & \text{при } 0 \leqslant axy \leqslant I \\ I & \text{при } I \leqslant axy \end{cases}\ . \tag{2}$$

Здесь a – постоянная аппаратуры.

Как известно [3], задача решения интегрального уравнения первого рода при ядрах, типичных для спектрометрии, некорректно поставлена в смысле Адамара. Метод Ланжевена не снимает проблему корректности, поскольку задача дифференцирования также относится к некорректно поставленным задачам.

Метод Ланжевена допускает обобщение на уравнения типа (I), ядро которых является по первому аргументу полиномиальным сплайном дефекта I, либо достаточно хорошо аппроксимируется сплайном.

Рассмотрим обобщенный метод Ланжевена p-того порядка. Допустим, что ядро уравнения (I) является по первому аргументу полиномиальным сплайном степени $p - I$ с n узлами и координаты некоторых узлов зависят от второго аргумента. Зависимость узлов от второго аргумента описывается уравнениями

$$y_i = \xi(x). \tag{3}$$

Предположим, что функции ξ монотонны, и если уравнение (3) имеет решение $x_i = x_i(y)$, то это решение единственно при рассматриваемых i и y.

Производная порядка p-1 от ядра G по первому аргументу y будет сплайном нулевой степени или ступенчатой функцией. Обозначим уровень производной в интервале между узлами (y_i, y_{i+1}) через :

$$g_i = \frac{\delta^{p-1} G(y,x)}{\delta y^{p-1}} \quad \text{при} \quad y_i < y < y_{i+1} \,. \qquad (4)$$

Уровни определены для $i = 0 \ldots n$, g_0 соответствует интервалу $(-\infty, y_1)$ и g_n – интервалу (y_n, ∞). Скачок производной в i-той узловой точке равен $g_i - g_{i-1}$.

Производная порядка p существует лишь в классе математических распределений или обобщенных функций и выражается через дельта-функцию

$$\frac{\delta^p G(y,x)}{\delta y^p} = \sum_{i=1}^{n} (g_i - g_{i-1})\, \delta(y - \xi_i(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i - g_{i-1}}{|\xi_i'(x)|}\, \delta(x - x_i). \qquad (5)$$

Здесь ξ_i' означает первую производную функции ξ_i по x, а x_i – решение уравнения (3). В сумме учитываются только те узлы, для которых существует решение x_i. Такие узлы называются существенными узлами.

Вычислим теперь из уравнения (1) производную порядка p по аргументу y:

$$\frac{\delta^p f(y)}{\delta y^p} = \int \frac{\delta^p G(y,x)}{\delta y^p}\, \varphi(x)\, dx \,. \qquad (6)$$

Если ядро уравнения относится к сплайн-функциям вышеописанного типа, то, используя (5), получим алгебраическое уравнение

$$\frac{\delta^p f(y)}{\delta y^p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i - g_{i-1}}{|\xi_i'(x_i)|}\, \varphi(x_i), \qquad (7)$$

где в сумме учитываются лишь существенные узлы.

Если существенный узел только один, то из уравнения (7) непосредственно можно выразить x_i. Тем самым и задача решения уравнения (1) сведена к задаче вычисления p-той производной функции $f(y)$.

Оригинальный метод Ланжевена является методом второго порядка с одним существенным узлом.

Если существенных узлов несколько, то уравнение (7) является линейным алгебраическим уравнением относительно нескольких неизвестных $\varphi(x_i)$. Поскольку производная функции $f(y)$ может быть вычислена во многих точках, то можно записать систему многих уравнений. Легко убедиться, что в такой системе число неизвестных всегда превышает число уравнений. Поэтому решение системы возможно только при наличии дополнительной информации. Например, иногда известно, что в некотором поддиапазоне аргумента $\varphi(x) = 0$. Тогда система уравнений может иметь однозначное решение.

Литература

1. Langevin M.P. Sur les ions de l'atmosphere. - C. r. Acad. sci., 1905, vol. 140, p. 232-234.
2. Таммет Х.Ф. Аспирационный метод измерения спектра аэроионов. - Учен. зап. Тарт. ун-та, 1967, вып. 195, 234 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1974, 223 с.

GENERALIZATION OF THE LANGEVIN METHOD FOR SOLVING INVERSE PROBLEMS

H. Tammet

Summary

The first kind of integral equation (1) is discussed. P. Langevin showed that in the case of a kernel (2) of an integral aspiration counter the solution of the equation is expressed by means of the second derivative of the known function f. The problem of the integral equation (1) is reduced to the problem of the calculation of derivatives in a general case where a more complex spline function may operate as a kernel. The algebraic equation (7) is derived from the integral equation, which contains a derivation of f. The reduction of the integral equation to the calculation of derivatives does not change the incorrectness of the problem, because the calculation of derivatives also belongs to the category of incorrect problems.