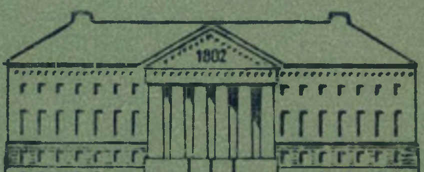
TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 374 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XVII



ТАРТУ 1975

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 374 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XVII

ТАРТУ 1975

ДОЦЕНТ АЛЬМА РУУБЕЛЬ
(к семидесятипятилетию со дня рождения)

Альма Иохановна Руубель родилась 28 сентября 1899 года в Эстонии в Вильяндийском районе в семье ремесленника. Она училась в Ыйзуской волостной школе, в прогимназии города Вильянди и в Вильяндийской женской гимназии, которую окончила в 1919 году. После окончания гимназии А. Руубель поступила на летние курсы, организованные при Тартуском университете для подготовки заместителей учителей средних школ. С 1919 по 1926 гг. она учительствовала в Пярнуской торговой школе и Вильяндийской женской гимназии. Осенью 1926 года она поступила на математическое отделение естественно-математического факультета Тартуского университета, которое окончила в 1932 году с отличием.

Уже на третьем году студенчества по предложению проф. Г. Ряго она поступила на работу при кафедре (институте) математики и механики Тартуского университета в качестве заместителя ассистента. Альма Руубель работала в Тартуском университете в начале ассистентом, позже старшим преподавателем и доцентом до 1955 года. Она была первой женщиной, которая преподавала математику в Тартуском университете.

С 1952 года доц. А. Руубель работала также заведующей кафедрой начертательной геометрии и графики в Эстонской сельскохозяйственной академии. В 1955 году она перешла полностью на работу в ЭСХА, где преподавала до 1973 года.

В Тартуском университете она преподавала различные дисциплины: теоретическую механику, вычислительные и графические методы прикладной математики, теорию вероятностей, аналитическую, дифференциальную и начертательную геометрии, высшую математику и пр. В ЭСХА основным предметом доцента А. Руубель была начертательная геометрия. Она уделяла большое внимание разработке методики преподавания и подбору задач для проведения соответствующих практических занятий [20, 21, 22, 29, 32, 33, 35, 36]. В течение многих лет принимала участие в работе методических советов ТГУ и ЭСХА.

После Великой Отечественной войны старший преподаватель А. Руубель приложила много сил для восстановления советского университета. Она выполняла неоднократно и административные должности: была деканом, продеканом, заведующей аспирантурой, заведующей кафедрой. Кроме того, постоянно вела общественную работу в женкомиссии, профбюро или профкоме.

В области научной работы на первых порах А. Руубель сосредоточила свое внимание на вопросах прикладной математики. В 1936 году она защитила магистерскую диссертацию [1], в которой был разработан метод графического интегрирования дифференциальных уравнений на основании метода Адамса и давалась формула для оценки погрешности получаемых результатов. Автором был также разработан прибор для интегрирования дифференциальных уравнений. Модель интегрирующего диска следует применять на подобии логарифмической линейки. Материалы, содержащиеся в магистерской диссертации, отпечатаны позднее с некоторыми дополнительными разработками в [2, 13]. При графическом интегрировании используются различные параметрические линии, простые графики функций, графическое сложение и умножение, а также целесообразное совмещение нескольких координатных систем. В этих работах А. И. Руубель исследуется целесообразность применения формул Мизеса для оценки погрешности результатов, полученных при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса. Доказывается, что эта формула дает слишком далекую границу погрешности. Автором предлагается формула, которая обеспечивает более точную оценку погрешности, не увеличивая при этом количества вычислений.

На основании переаттестации степени магистра математических наук Альма Иохановна Руубель в 1949 году получила диплом кандидата физико-математических наук. В том же году ей было присвоено звание доцента.

Направление основных научных исследований доц. А. Руубель определилось после того, как ее пригласили преподавателем начертательной геометрии в ЭСХА. В ее научной деятельности весьма плодотворными были уже 50-ые годы. Внимание заслуживают обобщения проекционных методов и введение новых видов проекций, при которых она исходит из практических требований упрощения решения инженерно-технических задач. В следствии этого доц. А. Руубель высказывает оригинальную мысль: она одна из первых предлагает применение криволинейного проецирования. Анализируя известные методы решения задач пересечения на эпюре и сравнивая отдельные приемы, доц. А. Руубель в первых своих работах [3] исследует применение центрального проецирования и не только из одного центра. Здесь же трактуется и возможное преобразование на одном экране в виде сжатия или растяжения.

Предлагаемый способ явился примером того, что в начертательной геометрии не целесообразно рассматривать отдельные

приемы для решения задач на пересечения. Автором доказывается возможность решать задачу в самом общем виде так, что отдельные задачи являются частным случаем пересечения двух поверхностей общего вида. Предлагаемый метод обладает достаточной гибкостью, так как допускается варьирование выбора центра проекции, а также экрана.

Для расширения проецирующего аппарата автор предлагает перейти к применению скрещивающихся лучей [4, 10]. В результате первых обобщений уже в 1958 году автор предлагает оригинальный метод криволинейного проецирования [5] и называет его ортогональным окружностным проецированием. В виде криволинейных проецирующих рассматриваются дуги окружностей, центры которых находятся в плоскости проекции на одной прямой, называемой осью центров и плоскости которых перпендикулярны к этой прямой. В этой работе излагается общая теория такого ортогонального окружностного проецирования при одной оси и при двух осях центров.

Автором рассматриваются криволинейные проецирующие в общем случае. В [6, 7, 8, 9, 11] исследуется возможность применения винтовых, спиральных и таких же окружностных, проецирующих, но экраном выбирается некоторая плоскость, параллельная оси центров. Это приводит в некоторых задачах к случаю, где имеется дело с неортогональной окружностной проекцией. Новшеством исследований А. Руубель является также применение аналитического метода, где проекционное соответствие между точками оригинала и его любой проекции рассматривается при помощи систем уравнений. Преимущество такой трактовки в том, что одновременно с заданием вида проецирования даются и основные инварианты соответствующего преобразования. При изучении свойств проекций [9] особо подчеркивается роль инвариантов тех преобразований, которые лежат в основе проецирований. При выборе обобщающего метода выдвигаются исходные требования: 1) получить основные инварианты в возможно простом виде; 2) получить в удобном виде критерии для решения вопроса, из каких проекций прообраза можно составить полный комплексный чертеж; 3) получить удобный общий способ для выяснения связей между проекциями одной и той же точки при различных комплексных чертежах. В этой же работе применяются некоторые координатные линии в качестве проецирующих. Алгебраический метод особо трактуется в [34, 37].

Кроме введения обобщенного проецирующего аппарата, А. Руубель предлагает применять комплексные чертежи, состоящие из двух обобщенных проекций [12, 14, 15, 16]. При исследованиях этих комплексных чертежей применяются системы параметрических уравнений для определения проецирующих в любой системе координат (декартовой, цилиндрической, сферической и пр.), при помощи которой отражается соответствие между проекциями и оригиналами точек. Рассмотрение обобщенного комплексного чертежа обусловило автора ввести новое понятие — направленных связывающих (односторонних или двухсторонних). В общем случае связывающие могут быть кривые любого вида. Вид и направленность зависят от того, какую из двух имеющихся проекций одной и той же точки выбирать за исходную.

Дальнейшие исследования привели автора к трактовке комплексных чертежей вторичных проекций [16]. Рассматриваются две проекции одной и той же точки на некоторые две поверхности. Полученные проекции точек на этих поверхностях проецируются в свою очередь на некоторую плоскость, итак получается комплексный чертеж вторичных проекций рассматриваемой точки. Свойства таких комплексных чертежей изучаются также аналитически, причем соотношения между координатами одной и той же точки рассматриваются при любых (различных) системах координат.

Для дальнейшего упрощения решения прикладных задач трактуемыми методами А. Руубель предлагает применять равномерное или неравномерное сжатие плоскостей проекции [19]. Это приводит в целом к своеобразному колебательному сжатию-растяжению каждой из двух совмещенных плоскостей проекций, из которых одна может скользить по другой и каждая из которых является носителем проекций линий одной данной поверхности или этой поверхности в целом.

Наконец следует особо подчеркнуть оригинальные результаты в научных исследованиях А. Руубель в обобщенной аксонометрии. На первых порах [26] формулируются 4 основные теоремы и основная задача окружностной аксонометрии. В теоремах исследуется возможное проективное соответствие равномасштабного ортогонального единичного репера координат и тройки равных векторов в плоскости проекции, если проецирующими являются окружности. В результате трактуется фундаментальная теорема односторонней окружностной аксонометрии. Доказательство проводится аналитическим методом.

Дальнейшие исследования [27] посвящаются определению оси центров возможных проецирований и построению оружностной проекции точки, заданной в одной из систем координат, определенных данной проекцией репера.

Полученные результаты натолкнули автора на решение более общей проблемы [30, 31], где рассматривается аксонометрия точки, заданной в обобщенной системе координат (в общем случае в криволинейной) и проецирующие могут быть любого вида (в общем случае криволинейные). Точка прикрепляется к некоторой системе координат при помощи координатной ломаной, состоящей из дуг координатных линий. В связи с этим формулируется общий критерий, по которому можно определить вид координатной сетки в проекции и доказываются отдельные частные случаи. Выделяются отдельные виды сеток координатных линий: 1) постоянные сетки с постоянными регулярными или нерегулярными шкалами, 2) постоянные сетки с непостоянными шкалами и 3) непостоянные сетки. Также трактуются здесь некоторые вопросы, связанные с формулированием и решением обратной задачи аксонометрии, т. е. реконструкцией прообраза, по крайней мере, с точностью до некоторого преобразования, соответственно видам сеток, и дается одна общая схема решения этой задачи.

Доц. А. Руубель неоднократно выступала с докладами по криволинейному проецированию на конференциях в Москве, Ленинграде, Таллине и Тарту. Ею разработанная теория привлекла внимание многих исследователей по начертательной геометрии и на сегодняшний день широкий круг научных работников занимается этой проблемой.

Следует также отметить доцента А. Руубель как популяризатора науки. Она неоднократно выступала с докладами перед разными аудиториями и опубликовала научно-популярные статьи [22, 23, 24, 25, 28].

За заслуги на научном и педагогическом поприще и в общественной жизни доценту А. Руубель неоднократно объявлялась благодарность и выдавались почетные грамоты Парткомом и Горсоветом города Тарту, а также ректоратами ТГУ и ЭСХА.

З. Рийвес

Труды доц. А. Руубель

1. J. C. Adamsi meetod harilikkude diferentsiaalvõrrandite numbriliseks integreerimiseks. Магистерская (кандидатская) диссертация, Тарту, 1936, 41 стр.
2. Способ графического интегрирования дифференциальных уравнений. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1955, **1,** 201—213.
3. Tsentraalprojekteerimise kasutamine lõikumisülesannete lahendamisel epüüris. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1957, **3,** 358—396.
4. Проектирование при помощи скрещивающихся лучей. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1958, **6,** 246—256.
5. Ортогональная окружностная проекция. Тарту, 1958, 32 стр.
6. Осевая окружностная проекция на плоскость, параллельную оси центров. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, **11,** 151—158.
7. Projektsiooniliikide üldistamisest kujutavas geomeetrias. ENSV matemaatikute ja füüsikute teaduslik-pedagoogilise konverentsi ettekannete teesid. Tartu, 1959, lk. 37.
8. Об одном обобщении методов проектирования и о применении его при решении задач на пересечение. Тезисы докладов и сообщений на совещании кафедр начертательной геометрии и черчения Московских втузов с участием представителей кафедр периферийных втузов. Москва, 1959, 15.
9. Проектирование при помощи координатных линий некоторых пространственных систем координат. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1969, **13,** 90—98.

10. Об осевой прямолинейной проекции. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1960, **17**, 176—181.
11. Об обобщенном проектировании типа $R^{11}_{ho,lmo}$. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1960, **17**, 182—189.
12. Комплексные чертежи криволинейных проекций. Тарту, 1961, 8 стр.
13. Adamsi meetodi jaoks antud Misese veavalemi täpsustamisest. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1961, **22**, 92—107.
14. О комплексных чертежах, состоящих из двух обобщенных проекций. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1961, **22**, 108—118.
15. О комплексных чертежах в криволинейных проекциях. Тезисы докладов научной конференции МАИ, посвященной XXII съезду КПСС. Москва, 1961, стр. 22.
16. Комплексные чертежи вторичных проекций. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 108—117.
17. Projektsiooni mõiste üldistamisest kujutavas geomeetrias. Loodus ja matemaatika, 1963, **3**, 114—124.
18. О проектировании при помощи координатных линий пространственных систем координат. Труды Московского научн.-мет. сем. по начерт. геом. и инж. графики, Москва, 1963, **2**, 75—78.
19. Применение колебательного сжатия-растяжения плоскости проекции при решении задач на пересечение поверхностей. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 111—121.
20. Kujutava geomeetria koduseid harjutusülesandeid I. Тарту, 1963, 28 стр. (совместно с З. Рийвес).
21. Kujutava geomeetria kontrolltööde metoodiline juhend. Тарту, 1964, 16 стр. (совместно с З. Рийвес).
22. Pöördkeha ruumala graafilisest määramisest. Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik, Tallinn, 1964, **2**, 41—45.
23. Математика в Советской Эстонии за последние двадцать лет. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 12—52 (совм. с Ю. Лумисте, Э. Тамме и др.).
24. Horneri skeem graafilises käsitluses. Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik, Tallinn, 1965, **3**, 60—67.
25. Väike eesti-vene ja vene-eesti matemaatika oskussõnastik. Тарту, 1965, 89 стр. (Kaasautorid J. Gabovitš, H. Espenberg jt.).
26. Основные теоремы круговой аксонометрии. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1965, **42**, 78—81.
27. Основная задача круговой аксонометрии. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1965, **42**, 82—91.
28. Sofia Kovalevskaja, Matemaatika ja kaasaeg, 1966, **10**, 61—69.
29. Kujutava geomeetria kontrolltööde metoodiline juhend. (Ümbertöötatud väljaanne). Тарту, 1966, 16 стр. (совм. с З. Рийвес).
30. Обобщенная аксонометрия. Тарту, 1967, 13 стр.
31. Обобщение методов отображения, применяемых в начертательной геометрии. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1967, **55**, 322—333.
32. Aksonomeetria. Тарту, 1968, 66 стр. (совм. с З. Рийвес).
33. Kujutava geomeetria kontrolltööde metoodiline juhend (täiendatud ja parandatud kordusväljaanne). Тарту, 1968, 16 стр. (совм. с З. Рийвес).
34. Об алгебраическом изучении обобщенного проецирования с учетом дополнительных условий. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 127—133.
35. Kujutava geomeetria harjutusülesandeid kontrollküsimustega II. Тарту, 1972, 96 стр. (совм. с З. Рийвес).
36. Kujutava geomeetria harjutusülesandeid kontrollküsimustega III. Тарту, 1972, 73 стр. (совм. с З. Рийвес).
37. Über die algebraische Untersuchung der verallgemeinerten Projizierung mit Berücksichtigung von Nebenbedingungen (Autoreferat). Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, 1972, **232**, 5007.

О РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ДВУМЕРНЫХ ОРБИТ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_3

А. Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли g и H — замкнутая подгруппа в ней с подалгеброй Ли h. Однородное пространство $M = G/H$ называется (*локально*) *редуктивным* [4, 12], если в алгебре g существует такое подпространство m, что $g = h \dotplus m$ (прямая сумма подпространств) и $[h, m] \subset m$. В этом случае пара (g, h) называется *редуктивной парой* [13]. Хорошо известно, что в редуктивном однородном пространстве всегда существует инвариантная аффинная связность. Редуктивная пара (g, h) с фиксированным разложением $g = h \dotplus m$ называется *симметрической*, если $[m, m] \subset h$; тогда универсальное накрывающее многообразие пространства G/H является симметрическим однородным пространством [11].

В работах [7, 8] среди однородных пространств орбит в проективном пространстве P_3 были выделены редуктивные однородные пространства. В данной работе редуктивные пространства орбит изучаются подробнее. Основное внимание уделяется связи между алгебраическим строением компонент редуктивного разложения $g = h \dotplus m$ и геометрией соответствующего однородного пространства орбит. Простота проективной группы $GP(3)$ дает возможность среди редуктивных пространств орбит выделить те, которые локально определяются парой Киллинга [9], т. е. допускают ортогональное оснащение подалгебры h относительно формы Киллинга алгебры g.

§ 1. Редуктивные пространства орбит

Здесь приведем краткую сводку о редуктивных пространствах орбит (подробнее см. [7, 8]).

Однородное пространство орбит общего вида $P1$. Стационарная подгруппа H_{P1} рассматриваемой орбиты задается системой дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\Theta^1 &\equiv \omega^3 = 0,\\
\Theta^2 &\equiv \omega^3{}_1 - \omega^1 = 0,\\
\Theta^3 &\equiv \omega^3{}_2 - \omega^2 = 0,\\
\Theta^4 &\equiv -\omega^2{}_1 - \varepsilon b\omega^1 + (a - 1/2)\,\omega^2 = 0,\\
\Theta^5 &\equiv -\omega^1{}_2 + b\omega^1 - \varepsilon\,(a + 1/2)\,\omega^2 = 0,\\
\Theta^6 &\equiv -\omega^1{}_1 + 1/2\omega^1 = 0,\\
\Theta^7 &\equiv -\omega^2{}_2 - 1/2\omega^1 = 0,\\
\Theta^8 &\equiv -\omega^3{}_3 + a\omega^1 + b\omega^2 = 0,\\
\Theta^9 &\equiv -\omega^1{}_3 + (a + 1/2)\,\omega^1 - b\omega^2 = 0,\\
\Theta^{10} &\equiv -\omega^2{}_3 - \varepsilon b\omega^1 - (a - 1/2)\,\omega^2 = 0,\\
\Theta^{11} &\equiv \omega^0{}_1 = 0,\\
\Theta^{12} &\equiv \omega^0{}_2 = 0,\\
\Theta^{13} &\equiv \omega^0{}_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Однородное пространство орбит $P1$ изоморфно фактор-пространству $GP(3)/H_{P1}$ левых смежных классов проективной группы $GP(3)$ по подгруппе H_{P1}. Однородное пространство орбит $P1$ является редуктивным в следующих двух случаях:

1) $a = -1/2$, b — любое;
2) $a = 0$, $b \neq 0$.

Оснащающее подпространство m подгруппы H_{P1} задается как аннулятор системы форм

1) при $a = -1/2$, $b = 0$:

$$\vartheta^1 = \omega^1 + \Theta^7 + \Theta^8 - \Theta^9 + (a + 1)\,\Theta^{11} + a\Theta^{13},$$
$$\vartheta^2 = \omega^2 + 1/2\varepsilon\,(\Theta^3 + \Theta^5 + \Theta^{12}) - 1/2\Theta^{10} + \beta\,(\Theta^{11} + \Theta^{13});$$

2) при $a = -1/2$, $b \neq 0$:

$$\vartheta^1 = \omega^1 + \varepsilon b\alpha_3\Theta^2 + \varepsilon\,(b\alpha_2 - \alpha_3)\,\Theta^3 + b\alpha_2\Theta^4 - \varepsilon\,(b\alpha_2 + \alpha_3)\,\Theta^5 - b\alpha_5\Theta^6 - (b\alpha_5 + \alpha_2)\,\Theta^7 + \alpha_1\Theta^8 + \alpha_2\Theta^9 + \alpha_3\Theta^{10} + \alpha_4\Theta^{11} + \alpha_5\Theta^{12} + \alpha_6\Theta^{13},$$

где

$$\alpha_1 = \varepsilon b\alpha_3 - \alpha_2 - b\alpha_5, \qquad \alpha_4 = \alpha_6 - \alpha_2, \qquad -2b\alpha_6 = \alpha_3 + \varepsilon\alpha_5,$$
$$3b\alpha_2 - 2\alpha_3 - b\alpha_1 = 0, \qquad (1 - 4\varepsilon b^2)\,\alpha_2 - 6\varepsilon b\alpha_3 - \alpha_1 + 2 = 0.$$

$$\vartheta^2 = \omega^2 + \varepsilon b\beta_3\Theta^2 + \varepsilon\,(b\beta_2 - \beta_3)\,\Theta^3 + b\beta_2\Theta^4 - \varepsilon\,(b\beta_2 + \beta_3)\,\Theta^5 - b\beta_5\Theta^6 + (\beta_2 - b\beta_5)\,\Theta^7 + \beta_1\Theta^8 + \beta_2\Theta^9 + \beta_3\Theta^{10} + \beta_4\Theta^{11} + \beta_5\Theta^{12} + \beta_6\Theta^{13}$$

и

$$\beta_1 = \beta_2 - b\beta_5 + \varepsilon b\beta_3, \qquad \beta_4 = \beta_6 - \beta_2, \qquad -2b\beta_6 = \beta_3 + \varepsilon\beta_5,$$
$$2\beta_3 - 3b\beta_2 + b\beta_1 + 1 = 0, \qquad (1 - 4\varepsilon b^2)\,\beta_2 - 6\varepsilon b\beta_3 - 2\beta_1 = 0.$$

3) при $a=0,\ b\neq 0$:

$$\vartheta^1=\omega^1-\frac{1}{2}\Theta^2-\frac{1}{4b}(\Theta^3+\Theta^5)-\frac{1}{4\varepsilon b}\Theta^4-$$
$$-\left(b\gamma_1+\frac{1}{2}\gamma_2\right)(\Theta^6+\Theta^7)-\frac{3}{4\varepsilon b^2}\Theta^8+\frac{1}{2\varepsilon b}\Theta^{10}+$$
$$+\gamma_1\Theta^{12}+\gamma_2\Theta^{13},$$

где

$$\gamma_1=-\left(\frac{1}{2b}+2\varepsilon b\gamma_2\right),\qquad \gamma_2=\frac{3}{2\varepsilon b^2(4\varepsilon b^2-1)},$$

$$\vartheta^2=\omega^2-\frac{1}{b}(\Theta^6+\Theta^7+\Theta^8)+\frac{4\varepsilon}{4\varepsilon b^2-1}\Theta^{12}-\frac{2}{b(4\varepsilon b^2-1)}\Theta^{13}.$$

Здесь при $a=-1/2$ допускаемые оснащающие подпространства составляют двупараметрическое семейство.

Однородное пространство невырожденных квадрик ${}^kQ_2(R^4)$ в пространстве P_3 (и вообще невырожденных гиперквадрик в P_n) является симметрическим псевдоримановым пространством [5]. Новое доказательство этого результата с помощью структурных уравнений Маурера—Картана дано в [6], где дополнительно показано, что существует только одно подпространство m в g, определяющее в ${}^kQ_2(R^4)$ структуру редуктивного пространства. Стационарная подгруппа H_Q квадрики в P_3 задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\Theta^1\equiv\omega^3=0, && \Theta^4\equiv\omega^1{}_0+\varepsilon\omega^3{}_1+\omega^1{}_3=0,\\
&\Theta^2\equiv\omega^3{}_1+\omega^1=0, && \Theta^5\equiv\tau\omega^2{}_1+\omega^1{}_2=0,\\
&\Theta^3\equiv\omega^3{}_2+\tau\omega^2=0, && \Theta^6\equiv\omega^0{}_2+\varepsilon\omega^3{}_2+\tau\omega^2{}_3=0,\\
&\Theta^7\equiv\omega^2{}_2-\omega^1{}_1=0, &&\\
&\Theta^8\equiv\omega^0{}_0+\omega^3{}_3-2\omega^1{}_1=0, &&\\
&\Theta^9\equiv\omega^0{}_3+\varepsilon(\omega^3{}_3-\omega^1{}_1)=0, &&
\end{aligned}$$

где $\tau=\pm1,\ \varepsilon=0,\pm1$. Однородное пространство ${}^kQ_2(R^4)$ изоморфно факторпространству $GP(3)/H_Q$. Оснащение m подгруппы H_Q единственно и задается как аннулятор системы форм

$$\begin{aligned}
&\vartheta^1=\omega^1-1/2\Theta^2, && \vartheta^4=\omega^0{}_0+1/2\varepsilon\Theta^1+1/4\Theta^7-1/4\Theta^8,\\
&\vartheta^2=\omega^2-1/2\tau\Theta^3, && \vartheta^5=\omega^0{}_1+1/2\varepsilon\Theta^2-1/2\Theta^4,\\
&\vartheta^3=\omega^2{}_1-1/2\tau\Theta^5, && \vartheta^6=\omega^0{}_2+1/2\varepsilon\Theta^3-1/2\Theta^6.
\end{aligned}\tag{1.2}$$

Однородное пространство развертывающихся орбит $R1$. Стационарная подгруппа H_{R1} рассматриваемой орбиты задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{lll} \Theta^1 \equiv \omega^3 = 0, & \Theta^5 \equiv \omega^1{}_1 + 3\omega^2{}_2 = 0, & \Theta^9 \equiv \omega^1{}_2 = 0, \\ \Theta^2 \equiv \omega^3{}_1 = 0, & \Theta^6 \equiv \omega^0{}_1 - 3\omega^2 = 0, & \Theta^{10} \equiv \omega^0{}_3 = 0, \\ \Theta^3 \equiv \omega^3{}_2 - \omega^2 = 0, & \Theta^7 \equiv \omega^0{}_0 + \omega^2{}_2 = 0, & \Theta^{11} \equiv \omega^0{}_2 - 4\omega^1 = 0, \\ \Theta^4 \equiv \omega^2{}_1 = 0, & \Theta^8 \equiv \omega^1{}_3 = 0, & \Theta^{12} \equiv \omega^2{}_3 - 3\omega^1 = 0. \end{array} \tag{1.3}$$

Однородное пространство орбит $R1$ изоморфно факторпространству $GP(3)/H_{R1}$. Оно является редуктивным с единственным подпространством m, определяющим в $GP(3)/H_{R1}$ редуктивную структуру. При этом m задается как аннулятор системы форм

$$\vartheta^1 = \omega^1 + 1/10\,(\Theta^{11} + \Theta^{12}),$$
$$\vartheta^2 = \omega^2 + 1/10\,(3\Theta^3 + \Theta^6),$$
$$\vartheta^3 = \omega^2{}_2 - 1/10\,(3\Theta^5 + 2\Theta^7).$$

Однородное пространство линейчатых орбит $L3$. Подгруппа стационарности H_{L3} этой орбиты задается системой уравнений

$$\begin{array}{ll} \Theta^1 \equiv \omega^3 = 0, & \Theta^7 \equiv \omega^0{}_0 - 3\omega^2{}_2 = 0, \\ \Theta^2 \equiv \omega^3{}_1 - \omega^2 = 0, & \Theta^8 \equiv \omega^0{}_3 - \omega^2 = 0, \\ \Theta^2 \equiv \omega^3{}_1 - \omega^2 = 0, & \Theta^9 \equiv \omega^1{}_3 - C\omega^2 = 0, \\ \Theta^3 \equiv \omega^3{}_2 - \omega^1 = 0, & \Theta^{10} = \omega^2{}_3 - \omega^1 = 0, \\ \Theta^4 \equiv \omega^2{}_1 = 0, & \Theta^{11} \equiv \omega^0{}_1 - \omega^1 = 0, \\ \Theta^5 \equiv \omega^1{}_2 - \omega^2 = 0, & \Theta^{12} \equiv \omega^0{}_2 - C\omega^2 = 0, \\ \Theta^6 \equiv \omega^1{}_1 + \omega^2{}_2 = 0, & \Theta^{13} \equiv \omega^2{}_2 = 0. \end{array} \tag{1.4}$$

Однородное пространство линейчатых орбит $L3$ изоморфно факторпространству $GP(3)/H_{L3}$ левых смежных классов проективной группы $GP(3)$ по подгруппе H_{L3}. Оснащающее подпространство m подгруппы H_{L3} задается как аннулятор системы форм

1) при $C = 0$:

$$\vartheta^1 = \omega^1 + \alpha\,(\Theta^1 + \Theta^4 + \Theta^9 + \Theta^{12}) + 1/4\,(\Theta^3 + \Theta^{10} + \Theta^{11}),$$
$$\vartheta^2 = \omega^2 + \beta\,(\Theta^1 + \Theta^4 + \Theta^9 + \Theta^{12}) + 1/4\,(\Theta^2 + \Theta^5 + \Theta^8),$$

2) при $C \neq 0$:

$$\vartheta^1 = \omega^1 + \frac{C^2 - 1}{C}\,\alpha\,(\Theta^1 + \Theta^4) + \frac{1}{4}\,(\Theta^3 + \Theta^{10} + \Theta^{11}) +$$
$$+ \alpha\Theta^5 - \frac{1}{C}\,\alpha\,(\Theta^9 + \Theta^{12}),$$

$$\vartheta^2 = \omega^2 + \frac{4(C^2 - 1)\beta + 1}{4C}\,(\Theta^1 + \Theta^4) + \frac{1}{4}\,\Theta^2 + \beta\Theta^5 + \frac{1 - 4\beta}{4C}\,\Theta^9.$$

Итак, однородное пространство линейчатых орбит $L3$ всегда редуктивно, причем допускаемые оснащающие подпространства в алгебре Ли проективной группы составляют двупараметрическое семейство.

§ 2. Исследование редуктивных пространств орбит

1. Как видим, стационарные подалгебры рассматриваемых нами орбит либо двумерны, либо трехмерны (исключая шестимерную стационарную подалгебру квадрики). Все такие алгебры Ли (алгебры Ли малых размерностей) описаны (см. [1], стр. 20). Для целостности изложения приведем здесь их краткое описание. Если g — алгебра Ли, то под g' будем понимать подпространство, порожденное всеми коммутаторами.

I. $\dim g = 2$.

а) $g' = 0$, g — абелева алгебра;

б) $g' \neq 0$. Существует единственная неабелева алгебра Ли размерности 2 с базисом (x, y) таким, что

$$[x, y] = x = -[y, x]. \tag{2.1}$$

Итак, существуют две неизоморфные неполупростые алгебры Ли размерности 2.

II. $\dim g = 3$.

а) $g' = 0$, g — абелева;

б) $\dim g' = 1$; $g' \subset Z$, где Z — центр алгебры g.

В этом случае алгебра g имеет базис (x, y, z) с таблицей умножения

$$[x, y] = z, \qquad [x, z] = [y, z] = 0; \tag{2.2}$$

в) $\dim g' = 1$, $g' \not\subset Z$, где Z — центр алгебры g.

В этом случае алгебра g имеет базис (x, y, z) с таблицей умножения

$$[x, y] = [y, z] = 0, \qquad [x, z] = z; \tag{2.3}$$

г) $\dim g' = 2$. В этом случае алгебра g имеет базис (x, y, z) с таблицей умножения

$$[x, y] = 0, \qquad [x, z] = x, \qquad [y, z] = \alpha y, \qquad \alpha \neq 0; \tag{2.4}$$

$$[x, y] = 0, \qquad [x, z] = x + \beta y, \qquad [y, z] = y, \qquad \beta \neq 0. \tag{2.5}$$

Различным элементам α соответствуют различные алгебры, поэтому получаем бесконечно много неизоморфных алгебр.

д) $\dim g' = 3$. Существует две неизоморфные трехмерные алгебры Ли, для которых $\dim g = \dim g'$. Их таблицы умножения имеют вид

$$[x, y] = z, \qquad [y, z] = x, \qquad [x, z] = -y; \tag{2.6}$$

$$[x, y] = 2y, \qquad [x, z] = -2z, \qquad [y, z] = x. \tag{2.7}$$

Алгебры Ли, для которых $\dim g = \dim g'$, просты, т. е. не имеют идеалов, отличных от нуля и самих себя.

2. Согласно критерию Картана (см. [1], стр. 82), алгебра Ли g над полем нулевой характеристики полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырождена. Знание структурных постоянных $C^k{}_{ij}$ алгебры Ли g дает возможность найти ее тензор Киллинга по формуле

$$g_{ij} = C^l{}_{ik} C^k{}_{jl}.$$

Невырожденность матрицы $\|g_{ij}\|$ укажет на полупростоту рассматриваемой алгебры Ли.

Выясняя строение стационарных подалгебр рассматриваемых орбит, получаем:

Для однородного редуктивного пространства орбит $P1$ с $\dim h_{P1} = 2$ подалгебра h_{P1} абелева и неполупроста.

Для однородного пространства линейчатых орбит $L3$ с $\dim h_{L3} = 2$ подалгебра h_{L3} неабелева и неполупроста.

В случае однородного редуктивного пространства невырожденных квадрик ${}^hQ_2(R^4)$ с $\dim h_Q = 6$

$$\left.\begin{aligned} d\vartheta^1 &= \vartheta^3 \wedge \vartheta^1 + \vartheta^1 \wedge \vartheta^4, \\ d\vartheta^2 &= \vartheta^3 \wedge \vartheta^2 + \vartheta^4 \wedge \vartheta^2, \\ d\vartheta^3 &= \vartheta^1 \wedge \vartheta^5 + \vartheta^2 \wedge \vartheta^6, \\ d\vartheta^4 &= \vartheta^5 \wedge \vartheta^1 + \vartheta^2 \wedge \vartheta^6, \\ d\vartheta^5 &= \vartheta^5 \wedge \vartheta^3 + \vartheta^4 \wedge \vartheta^5, \\ d\vartheta^6 &= \vartheta^6 \wedge \vartheta^3 + \vartheta^6 \wedge \vartheta^4, \end{aligned}\right\} \pmod{\Theta^a}$$

и искомая матрица Киллинга принимает вид

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Она невырождена и, таким образом, стационарная подалгебра h_Q полупроста.

Для однородного редуктивного пространства развертывающихся орбит R1 с $\dim h_{R1} = 3$ имеем

$$\left.\begin{aligned} d\vartheta^1 &= -2\vartheta^1 \wedge \vartheta^3, \\ d\vartheta^2 &= 2\vartheta^2 \wedge \vartheta^3, \\ d\vartheta^3 &= -\vartheta^1 \wedge \vartheta^2. \end{aligned}\right\} \pmod{\Theta^a} \qquad (2.8)$$

Отличными от нуля элементами матрицы Киллинга являются $g_{12} = g_{21} = 16$, $g_{33} = 32$, в силу чего $\det \|g_{ij}\| \neq 0$ и потому подалгебра h_{R1} полупроста. Сравнивая теперь выражения (2.8) с соотношениями коммутации (2.7), заключаем, что данная подалгебра h_{R1} проста.

3. Следуя [13], оснащающее подпространство m можно превратить в антикоммутативную алгебру, положив для $X, Y \in m$

$$X\cdot Y=[X, Y]_m=[X, Y]-[X, Y]_h,$$

где $[X, Y]_m$ (соответственно $[X, Y]_h$) является проекцией элемента $[X, Y]\in g$ на m (соответственно h). Алгебра m называется *простой*, если $m^2=m\cdot m\neq 0$ и m не содержит собственных идеалов. Строение алгебры m оказывается тесно связанным с геометрией соответствующего однородного пространства [13, 14]. В частности, имеет место следующая

Теорема 1. (Сэйгл [13]). *Пусть G/H — односвязное редуктивное однородное пространство и $g=h\dotplus m$ — редуктивное разложение. Если $m^2\neq 0$ и G/H голономно неприводимо относительно естественной связности без кручения, то алгебра m проста. Обратно, если G/H является псевдоримановым пространством и m проста, то G/H голономно неприводимо.*

Об алгебре m в случае рассматриваемых нами пространств можно привести следующие результаты.

Однородное редуктивное пространство невырожденных квадрик ${}^kQ_2(R^4)$ с $\dim m=9$ является симметрическим, в силу чего $m^2=0$ и алгебра m непроста по определению.

Ввиду несимметричности однородного редуктивного пространства развертывающихся орбит $R1$ с $\dim m=12$, [8], имеем $m^2\neq 0$. Простота алгебры Ли проективной группы дает возможность использовать теорему 8 из [14], в силу которой из простоты алгебр g и h следует простота алгебры m.

4. Редуктивная пара (g, h) с фиксированным разложением $g=h\dotplus m$ называется *приводимой*, если алгебра Ли $\mathrm{ad}\, h$ действует приводимо в m; она называется *неприводимой*, если $\mathrm{ad}\, h$-инвариантны только 0 и m.

Однородное симметрическое пространство ${}^kQ_2(R^4)$ невырожденных квадрик является неприводимым (см. [3], стр. 358) и потому, в силу теоремы 10 из [9], стационарная подалгебра h_Q является максимальной в алгебре Ли проективной группы, т. е. не содержится ни в какой подалгебре этой алгебры.

Найдем структурные уравнения приводимого редуктивного пространства. Пусть редуктивная пара (g, h) приводима с $\mathrm{ad}\, h$-инвариантным подпространством $m_1\subset m$ и векторы

e_α, e_β, $e_\gamma\ldots$ образуют базис подалгебры h,

e_a, e_b, $e_c\ldots$ образуют базис подпространства m_1,

e_i, e_k, $e_l\ldots$ образуют базис дополнительного подпространства m_2 к m_1 в m.

Тогда структурные уравнения запишутся в виде

$$d\Theta^a=C^a{}_{\beta b}\vartheta^\beta\wedge\Theta^b+C^a{}_{\beta k}\vartheta^\beta\wedge\Theta^k+C^a{}_{bd}\Theta^b\wedge\Theta^d+$$
$$+C^a{}_{bk}\Theta^b\wedge\Theta^k+C^a{}_{kl}\Theta^k\wedge\Theta^l,$$
$$d\Theta^i=C^i{}_{\beta k}\vartheta^\beta\wedge\Theta^k+C^i{}_{kl}\Theta^k\wedge\Theta^l+C^i{}_{bk}\Theta^b\wedge\Theta^k+C^i{}_{bd}\Theta^b\wedge\Theta^d,$$
$$d\vartheta^\alpha=C^\alpha{}_{\beta\gamma}\vartheta^\beta\wedge\vartheta^\gamma+C^\alpha{}_{bd}\Theta^b\wedge\Theta^d+C^\alpha{}_{bk}\Theta^b\wedge\Theta^k+C^\alpha{}_{kl}\Theta^k\wedge\Theta^l,$$

где уравнения $\Theta^a=0$, $\Theta^i=0$ задают стационарную подгруппу H, а уравнения $\vartheta^\alpha = 0$ — оснащающее подпространство m. Непосредственная проверка показывает, что справедливо следующее

Предложение 1. *Если стационарная подгруппа орбиты проективного пространства P_3 оставляет инвариантной плоскость $(E_0E_1E_2)$, либо плоскость $(E_1E_2E_3)$, либо точку E_1, либо точку E_2, либо точку E_3, то однородное редуктивное пространство таких орбит приводимо.*

Как следует из результатов работ [7, 8], стационарные подгруппы орбит $P1$ и $L3$ оставляют инвариантной плоскость $(E_1E_2E_3)$ и потому *редуктивные пространства орбит $P1$ и $L3$ приводимы.*

5. Для выяснения вопроса максимальности стационарных подалгебр обратимся к работе [2], где дано описание всех максимальных связных комплексных (вещественных) подгрупп в группе $SL(N)$ всех унимодулярных линейных преобразований N-мерного комплексного (вещественного) пространства.

Теорема 2 (Дынкин [2]). *Пусть R' — произвольное подпространство пространства $R^{(N)}$, отличное от нуля и $R^{(N)}$. Тогда группа всех линейных преобразований из $SL(N)$, преобразующих R' в самого себя, является максимальной подгруппой в группе $SL(N)$ и все приводимые подгруппы описываются этой конструкцией.*

Как показал Э. Картан в [3], всякая неприводимая группа унимодулярных линейных преобразований полупроста. Следовательно, неполупростые группы линейных преобразований, которыми являются H_{P1} и H_{L3}, приводимы в R^4 (т. е. оставляют инвариантным подпространство размерности 1, 2 или 3) и потому задаются матрицами вида

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{Vmatrix}.$$

Но тогда максимальная приводимая подгруппа $G \subset SL(4, R)$ должна иметь размерность $\dim G \geqslant 6$, и потому стационарные подалгебры h_{P1} и h_{L3} не являются максимальными в алгебре Ли проективной группы $GP(3)$, изоморфной, как известно, фактор-группе $GL(4, R)/Z$ полной линейной группы $GL(4, R)$ по ее центру Z из скалярных матриц. Тем самым выяснен вопрос о максимальности стационарных подалгебр редуктивных пространств 2-мерных орбит в пространстве P_3.

§ 3. Редуктивные пространства орбит с ортогональным оснащением подалгебры h

Простота алгебры Ли проективной группы $GP(3)$ дает возможность выделить среди редуктивных пространств орбит те, которые локально определяются парой Киллинга, т. е. допускают ортогональное оснащение относительно формы Киллинга алгебры Ли проективной группы (подробнее о парах Киллинга см. [9]).

Так как любая симметрическая пара (g, h) с полупростой g является парой Киллинга (см. [11], стр. 219), то оснащение стационарной подгруппы однородного симметрического пространства невырожденных квадрик ${}^kQ_2(R^4)$ ортогонально к h_Q относительно формы Киллинга алгебры Ли проективной группы.

По теореме IV работы [4] пара (g, h) с полупростыми алгебрами g и h является парой Киллинга и потому полученное нами оснащение стационарной подгруппы однородного редуктивного пространства развертывающихся орбит $R1$ также ортогонально к h_{R1} относительно формы Киллинга алгебры Ли проективной группы.

Пусть G/H — однородное пространство, локально определяемое парой Киллинга (g, h) с разложением $g = h \dotplus m$. Тогда ограничение формы Киллинга B на m определяет G-инвариантную неопределенную риманову метрику на G/H (см. [9]) и потому G/H является псевдоримановым однородным пространством. По теореме 1 *редуктивное пространство развертывающихся орбит* $R1$ *является голономно неприводимым* относительно естественной связности без кручения.

Дальнейшее выделение редуктивных пространств орбит с ортогональным оснащением основывается на теореме 1 работы [9], согласно которой пара (g, h) с полупростой g является парой Киллинга тогда и только тогда, когда ограничение формы Киллинга алгебры g на $h \times h$ невырождено.

Как уже было указано, для нахождения матрицы Киллинга некоторой алгебры Ли необходимо знать все ее структурные постоянные. За кобазис алгебры Ли проективной группы $GP(3)$ можно принять формы

$$\begin{array}{llll} \Phi^1 = \omega^1, & \Phi^2 = \omega^2, & \Phi^3 = \omega^3, & \Phi^4 = \omega^0{}_1, \\ \Phi^5 = \omega^2{}_1, & \Phi^6 = \omega^3{}_1, & \Phi^7 = \omega^0{}_2, & \Phi^8 = \omega^1{}_2, \\ \Phi^9 = \omega^3{}_2, & \Phi^{10} = \omega^0{}_3, & \Phi^{11} = \omega^1{}_3, & \Phi^{12} = \omega^2{}_3, \\ \Phi^{13} = \omega^0{}_0 - \omega^1{}_1, & \Phi^{14} = \omega^1{}_1 - \omega^2{}_2, & \Phi^{15} = \omega^2{}_2 - \omega^3{}_3. & \end{array} \tag{3.1}$$

С помощью структурных уравнений

$$d\Phi^1 = \Phi^{13} \wedge \Phi^1 + \Phi^2 \wedge \Phi^8 + \Phi^3 \wedge \Phi^{11},$$

$$d\Phi^2 = (\Phi^{13} + \Phi^{14}) \wedge \Phi^2 + \Phi^1 \wedge \Phi^5 + \Phi^3 \wedge \Phi^{12},$$

. . . .

$$d\Phi^{15} = \Phi^7 \wedge \Phi^2 + \Phi^8 \wedge \Phi^5 + 2\Phi^9 \wedge \Phi^{12} - \Phi^{10} \wedge \Phi^3 - \Phi^{11} \wedge \Phi^6$$

находим отличные от нуля структурные константы:

$$C^1{}_{13,1}=1,\quad C^1{}_{2,8}=1,\quad C^1{}_{3,11}=1,\quad C^2{}_{13,2}=1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ C^{15}{}_{10,3}=-1,\quad C^{15}{}_{11,6}=-1.$$

Наконец, пользуясь формулой

$$g_{ij}=C^l{}_{ik}C^k{}_{jl}\qquad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ \ldots,\ 15),$$

находим отличные от нуля элементы симметричной матрицы Киллинга:

$$g_{1,4}=g_{2,7}=g_{3,10}=g_{5,8}=g_{6,11}=g_{9,12}=8;$$
$$g_{13,13}=6;\quad g_{13,14}=4;\quad g_{13,15}=2;$$
$$g_{14,14}=8;\quad g_{14,15}=4;\quad g_{15,15}=6.$$

Полученная матрица $\|g_{ij}\|$, как и следовало ожидать, оказалась невырожденной. При переходе от базиса $\{\Phi^a\}$ к новому базису $\{\Theta^a\}$ матрица Киллинга рассматриваемой алгебры заменится новой, согласно известному правилу. Именно, если $\|A_{ij}\|$ есть матрица перехода от старого базиса к новому, то в новом базисе

$$\|g'_{ij}\|=\|A_{ij}\|\cdot\|g_{ij}\|\cdot\|A^T{}_{ij}\|,\tag{3.2}$$

причем $\|g'_{ij}\|$ сохраняет свойства невырожденности и симметричности матрицы $\|g_{ij}\|$.

Однородное редуктивное пространство орбит $P1$. Пусть $b=0$. В этом случае из формул (1.1) и (3.1) имеем

$$\Theta^1=\Phi^3,\qquad \Theta^6=\frac{1}{4}\Phi^{13}-\frac{1}{4}\Phi^{15}-\frac{1}{2}\Phi^{14}+\frac{1}{2}\Phi^1,$$
$$\Theta^2=\Phi^6-\Phi^1,\qquad \Theta^7=\frac{1}{4}\Phi^{13}-\frac{1}{4}\Phi^{15}+\frac{1}{2}\Phi^{14}-\frac{1}{2}\Phi^1,$$
$$\Theta^3=\Phi^9-\varepsilon\Phi^2,\qquad \Theta^8=\frac{1}{4}\Phi^{13}+\frac{3}{4}\Phi^{15}+\frac{1}{2}\Phi^{14}-\frac{1}{2}\Phi^1,$$
$$\Theta^4=-\Phi^5-\Phi^2,$$
$$\Theta^5=-\Phi^8,$$
$$\Theta^9=-\Phi^{11},$$
$$\Theta^{10}=-\Phi^{12}+\Phi^2,$$
$$\Theta^{11}=\Phi^4,$$
$$\Theta^{12}=\Phi^7,$$
$$\Theta^{13}=\Phi^{10},$$
$$\Theta^{14}=\Phi^1+\Theta^7+\Theta^8-\Theta^9+\alpha\Theta^{11}+(\alpha-1)\Theta^{13},$$
$$\Theta^{15}=\Phi^2+\frac{1}{2}\varepsilon(\Theta^3+\Theta^5+\Theta^{12})-\frac{1}{2}\Theta^{10}+\beta(\Theta^{11}+\Theta^{13}).$$

Формулы перехода от старого базиса к новому имеют вид

$$\Phi^1 = \Theta^{14} - \Theta^7 - \Theta^8 + \Theta^9 - \alpha\Theta^{11} - (\alpha - 1)\Theta^{13},$$

$$\Phi^2 = \Theta^{15} - \frac{1}{2}\varepsilon(\Theta^3 + \Theta^5 + \Theta^{12}) - \frac{1}{2}\Theta^{10} + \beta(\Theta^{11} + \Theta^{13}),$$

$$\Phi^3 = \Theta^1, \qquad \Phi^4 = \Theta^{11},$$

$$\Phi^5 = -\Theta^4 - \Theta^{15} + \frac{1}{2}\varepsilon(\Theta^3 + \Theta^5 + \Theta^{12}) + \frac{1}{2}\Theta^{10} - \beta(\Theta^{11} + \Theta^{13}),$$

$$\Phi^6 = \Theta^2 + \Theta^{14} - \Theta^7 - \Theta^8 + \Theta^9 - \alpha\Theta^{11} - (\alpha - 1)\Theta^{13},$$

$$\Phi^7 = \Theta^{12}, \qquad \Phi^8 = -\Theta^5,$$

$$\Phi^9 = \frac{1}{2}\Theta^3 + \varepsilon\Theta^{15} - \frac{1}{2}(\Theta^5 + \Theta^{12}) - \frac{1}{2}\varepsilon\Theta^{10} + \varepsilon\beta(\Theta^{11} + \Theta^{13}),$$

$$\Phi^{10} = \Theta^{13}, \qquad \Phi^{11} = -\Theta^9,$$

$$\Phi^{12} = \Theta^{15} - \frac{1}{2}\varepsilon(\Theta^3 + \Theta^5 + \Theta^{12}) - \frac{3}{2}\Theta^{10} + \beta(\Theta^{11} + \Theta^{13}),$$

$$\Phi^{13} = 2\Theta^6 + \Theta^7 + \Theta^8, \qquad \Phi^{14} = \Theta^{14} - \Theta^6 - \Theta^8 + \Theta^9 - \alpha\Theta^{11} - (\alpha - 1)\Theta^{13},$$

$$\Phi^{15} = \Theta^8 - \Theta^7.$$

С помощью формулы (3.2) найдем матрицу Киллинга $\|g'_{ij}\|$ в новом базисе $\{\Theta^a\}$. Ее ограничение на $h_{P1} \times h_{P1}$ задается матрицей

$$\begin{Vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

и потому вырождено. Заметим, что форма Киллинга самой алгебры h_{P1} может иметь матрицу, отличную от полученной.

Аналогичное рассмотрение в случае $b \neq 0$ приводит к невырожденному ограничению матрицы Киллинга $\|g'_{ij}\|$ на $h_{P1} \times h_{P1}$, задаваемым матрицей

$$\begin{Vmatrix} 24 & -4b \\ -4b & 2b^2 \end{Vmatrix}$$

и потому стационарная подгруппа H_{P1} (при $b \neq 0$) является ортогонально оснащаемой относительно формы Киллинга алгебры Ли проективной группы. Ортогональное оснащение подалгебры h_{P1} выделяется из двупараметрического семейства оснащающих подпространств при $\alpha_2 = \beta_2 = 0$.

Однородное редуктивное пространство линейчатых орбит $L3$.

1). Пусть $C = 0$. Из формул (1.4) и (3.1) получаем

$$\Theta^1 = \Phi^3, \qquad \Theta^6 = -\frac{1}{2}(\Phi^{13} - \Phi^{15}),$$

$$\Theta^2 = \Phi^6 - \Phi^2, \qquad \Theta^7 = \frac{3}{2}\Phi^{13} + 2\Phi^{14} - \frac{1}{2}\Phi^{15},$$
$$\Theta^3 = \Phi^9 - \Phi^1, \qquad \Theta^8 = \Phi^{10} - \Phi^2,$$
$$\Theta^4 = \Phi^5, \qquad \Theta^9 = \Phi^{11},$$
$$\Theta^5 = \Phi^8 - \Phi^2, \qquad \Theta^{10} = \Phi^{12} - \Phi^1,$$
$$\Theta^{11} = \Phi^4 - \Phi^1,$$
$$\Theta^{12} = \Phi^7,$$
$$\Theta^{13} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Phi^{13} - \frac{1}{2}\Phi^{15} + \Phi^{14}\right),$$
$$\Theta^{14} = \Phi^1 + \alpha(\Theta^1 + \Theta^4 + \Theta^9 + \Theta^{12}) + \frac{1}{4}(\Theta^3 + \Theta^{10} + \Theta^{11}),$$
$$\Theta^{15} = \Phi^2 + \beta(\Theta^1 + \Theta^4 + \Theta^9 + \Theta^{12}) + \frac{1}{4}(\Theta^4 + \Theta^5 + \Theta^8).$$

С помощью формулы (3.2) найдем матрицу Киллинга $\|g'_{ij}\|$ в новом базисе $\{\Theta^a\}$. Ее ограничение на $h_{L3} \times h_{L3}$ задается вырожденной матрицей

$$\begin{Vmatrix} 24 & -48 \\ -48 & 96 \end{Vmatrix}. \tag{3.3}$$

2). Пусть $C \neq 0$. Тогда

$$\Theta^1 = \Phi^3, \qquad \Theta^5 = \Phi^8 - \Phi^2,$$
$$\Theta^2 = \Phi^6 - \Phi^2, \qquad \Theta^6 = -\frac{1}{2}(\Phi^{13} - \Phi^{15}),$$
$$\Theta^3 = \Phi^9 - \Phi^1, \qquad \Theta^7 = \frac{3}{2}\Phi^{13} + 2\Phi^{14} - \frac{1}{2}\Phi^{15},$$
$$\Theta^4 = \Phi^5, \qquad \Theta^8 = \Phi^{10} - \Phi^2,$$
$$\Theta^9 = \Phi^{11} - C\Phi^2, \qquad \Theta^{10} = \Phi^{12} - \Phi^1,$$
$$\Theta^{11} = \Phi^4 - \Phi^1, \qquad \Theta^{12} = \Phi^7 - C\Phi^2,$$
$$\Theta^{13} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Phi^{13} - \frac{1}{2}\Phi^{15} + \Phi^{14}\right),$$
$$\Theta^{14} = \Phi^1 + \alpha\left(C - \frac{1}{C}\right)(\Theta^1 + \Theta^4) + \frac{1}{4}(\Theta^3 + \Theta^{10} + \Theta^{11}) +$$
$$+ \alpha\Theta^5 - \frac{1}{C}\alpha(\Theta^9 + \Theta^{12}),$$
$$\Theta^{15} = \Phi^2 + \frac{4(C^2-1)\beta + 1}{4C}(\Theta^1 + \Theta^4) + \frac{1}{4}\Theta^2 + \beta\Theta^5 + \frac{1 - 4\beta}{4C}\Theta^9.$$

Оказывается, что и в этом случае ограничение формы Киллинга алгебры Ли проективной группы $GP(3)$ на h_{L3} задается вырожденной матрицей (3.3). Таким образом, ни одно из редуктивных оснащений подгруппы H_{L3} не является ортогональным.

Литература

1. Джекобсон Н., Алгебры Ли. Москва, 1964.
2. Дынкин Е. Б., Максимальные подгруппы классических групп. Тр. Моск. матем. о-ва, 1952, **1**, 39—166.
3. Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства. Москва, 1949.
4. Рашевский П. К., О геометрии однородных пространств. Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 1952, **9**, 49—74.
5. Розенфельд Б. А., Метрика и аффинная связность в пространствах плоскостей, сфер и квадрик. Докл. АН СССР, 1947, **57**, № 6, 543—546.
6. Спесивых В., Об однородном пространстве квадрик в P_n. Студенч. труды по алгебре и геометрии, Тартуск. ун-т, 1972, 78—84.
7. Фляйшер А., О двумерных орбитах в действительном P_3 и их однородных пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 96—115.
8. Фляйшер А., Линейчатые орбиты в P_3 и их однородные пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 62—75.
9. Фляйшер А., Об одном классе редуктивных пространств. Тр. Геом. семинара, Ин-т научн. информ. АН СССР, 1974, **6**, 267—276.
10. Фляйшер А., Заметки о редуктивных парах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **355**, 27—34.
11. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Москва, 1964.
12. Nomizu K., Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1954, **76**, 33—65.
13. Sagle A. A., On anticommutative algebras and homogeneous spaces. J. Math. and Mech., 1967, **16**, № 12, 1381—1393.
14. Sagle A. A., A note on simple anticommutative algebras obtained from reductive homogeneous spaces. Nagoya Math. J., 1968, **31**, № 1, 105—124.

Поступило
7 I 1975

KAHEMÕÕTMELISTE PROJEKTIIVSES RUUMIS P_3 SISALDUVATE ORBIITIDE REDUKTIIVSETEST HOMOGEENSETEST RUUMIDEST

A. Fljaišer

Resümee

Artiklites [7, 8] on leitud projektiivses ruumis P_3 sisalduvate kahemõõtmeliste orbiitide kõikide homogeensete ruumide seas need, mis on reduktiivsed. Käesolevas töös pööratakse peatähelepanu seostele reduktiivse lahutuse $g = h \dotplus m$ komponentide algebralise struktuuri ja orbiitide ruumi geomeetria vahel. Leitakse kõnesolevate ruumide seas kõik need, mille puhul leidub alamalgebraga h Killingi vormi suhtes ortogonaalne m.

ÜBER REDUKTIVE HOMOGENRÄUME DER ZWEIDIMENSIONALEN ORBITEN IM PROJEKTIVEN RAUM P_3

A. Fleischer

Zusammenfassung

In den Artikeln [7, 8] sind aus allen Homogenräumen der zweidimensionalen Orbiten im projektiven Raum P_3 reduktive Homogenräume ausgesucht. In dieser Arbeit wird das Hauptaugenmerk der Verbindung zwischen der algebraischen Struktur der Komponenten der reduktiven Zerlegung $g = h + m$ und der Geometrie des entsprechenden Raumes der Orbiten G/H gerichtet. Außerdem sind aus allen reduktiven Homogenräumen solche ausgesucht, die eine orthogonale Ergänzung der Unteralgebra h in Bezug auf die Killingform der Algebra g zulassen.

ОДНОРОДНЫЕ ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА R_4

К. Рийвес и А. Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

1. Постановка задачи и основные результаты. В настоящей работе исследуются однородные фактор-пространства G/H группы Ли движений $G = O(4) * T_4$ вещественного евклидова пространства R_4 по ее замкнутым подгруппам Ли H, в частности однородные пространства орбит V_m $(1 \leqslant m < 4)$ максимальных размерностей подгрупп Ли H движений в R_4. При этом применяются некоторые понятия, определенные в работе [3]. Напомним, что *флагом Φ* евклидова пространства R_4 называется специальная последовательность либо плоскостей R_m $(0 \leqslant m < 4)$, либо векторных пространств $V(R_m)$, составленных из векторов R_m. Именно: *точечным флагом* $\Phi = \{m_0, \ldots, m_k\}$ в R_4 называется последовательность плоскостей $R_{m_0} \subset \ldots \subset R_{m_k}$ при $0 \leqslant m_0 < \ldots < m_k < 4$; *векторным флагом* $\Phi = [m_1, \ldots, m_k]$ в R_4 называется последовательность векторных подпространств $V(R_{m_1}) \subset \ldots \subset V(R_{m_k})$ пространства $V(R_4)$ при $0 < m_1 < \ldots < m_k < 4$; *векторно-точечным флагом* $\Phi = [m_1, \ldots, m_l; m_{l+1}, \ldots, m_k\}$ в R_4 называется последовательность векторных пространств $V(R_{m_1}) \subset \ldots \subset V(R_{m_l})$ с $0 < m_1 < \ldots < m_l$ и плоскостей $R_{m_{l+1}} \subset \ldots \subset R_{m_k}$ с $m_l < m_{l+1} < \ldots < m_k < 4$ при $V(R_{m_l}) \subset V(R_{m_{l+1}})$.

Если все векторные пространства или плоскости некоторого флага Φ инвариантны при всех движениях подгруппы Ли $H \subset G$, то H называется *приводимой с инвариантным флагом Φ*. Если инвариантного относительно движений подгруппы Ли H флага Φ в R_4 не существует, то H называется *неприводимой*. Приводимая группа H называется *подгруппой стационарности флага Φ*, если H содержит все движения в R_4, относительно которых Φ инвариантен, и *винтовой подгруппой* в противном случае.

Настоящее исследование опирается на результаты работы [3], в которой дан полный перечень связных подгрупп Ли движений H пространства R_4, указывая для каждой приводимой подгруппы H соответствующий ей инвариантный флаг Φ и задавая все подгруппы H вполне интегрируемыми системами

$$\Theta^a=0, \quad a=\dim H+1, \ \ldots, \ \dim G=10. \tag{1}$$

Здесь все формы Θ^a независимы и являются линейными комбинациями базисных инвариантных форм Маурера—Картана группы Ли движений G с постоянными коэффициентами. Пусть $\{M, \boldsymbol{e}_I\}$, $I = 1, 2, 3, 4$, является ортонормированным подвижным репером, присоединенным к точке $M \in R_4$. Тогда базисные инвариантные формы группы движений G определяют с помощью формул

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M}&=\omega^K \boldsymbol{e}_K, \qquad I,\ K,\ \ldots=1,\ 2,\ 3,\ 4,\\ d\boldsymbol{e}_I&=\omega^K{}_I \boldsymbol{e}_K, \qquad \omega^K{}_I+\omega^I{}_K=0, \end{aligned} \tag{2}$$

инфинитезимальное перемещение репера $\{M, \boldsymbol{e}_I\}$ и при этом они удовлетворяют структурным уравнениям (или условиям интегрируемости системы (2))

$$\begin{aligned} d\omega^K&=\omega^L \wedge \omega^K{}_L,\\ d\omega^K{}_I&=\omega^L{}_I \wedge \omega^K{}_L. \end{aligned} \tag{3}$$

Возможен переход к новой системе базисных инвариантных форм группы G, содержащей подсистему форм Θ^a, $a = r+1, \ldots, 10$, где $r = \dim H$. Пусть $\{\Theta^a | a = r+1, \ldots, 10\}$ дополняется до полной системы базисных форм группы G формами

$$\vartheta^\alpha=\Omega^\alpha+p^\alpha{}_a\Theta^a, \qquad \alpha=1,\ \ldots,\ r, \tag{4}$$

где $\Omega^\alpha \in \{\omega^K, \omega^K{}_I\}$ — базисные инвариантные формы подгруппы Ли движений $H \subset G$ и $p^\alpha{}_a$ — некоторые неизвестные постоянные. Тогда уравнения Маурера—Картана имеют вид

$$d\Theta^a=-\frac{1}{2}C^a{}_{bc}\Theta^b \wedge \Theta^c-C^a{}_{b\gamma}\Theta^b \wedge \vartheta^\gamma, \tag{5А}$$

$$d\vartheta^\alpha=-\frac{1}{2}C^\alpha{}_{bc}\Theta^b \wedge \Theta^c-C^\alpha{}_{b\gamma}\Theta^b \wedge \vartheta^\gamma-\frac{1}{2}C^\alpha{}_{\beta\gamma}\vartheta^\beta \wedge \vartheta^\gamma. \tag{5Б}$$

В п. 2 исследуется вопрос о структуре фактор-пространств G/H, соответствующих перечисленным в [3] подгруппам Ли движений $H \subset G$. Из всех рассматриваемых фактор-пространств выделяются редуктивные пространства, допускающие, как известно [7], инвариантную аффинную связность. Необходимым и достаточным условием редуктивности пространства G/H является выполнение равенств

$$C^\alpha{}_{b\gamma}=0. \tag{6}$$

Если, кроме того, имеют место

$$C^a{}_{bc}=0, \tag{7}$$

то рассматриваемое пространство является симметрическим [7].

Пусть формы Θ^a, ϑ^α выражаются через ω^K, $\omega^K{}_I$ формулами (1), (4). Тогда, с помощью структурных уравнений (3) и равенств (6), из уравнений (5Б) получается конечная система для определения постоянных $p^\alpha{}_a$. Совместность полученной системы указывает на редуктивность соответствующего пространства G/H и тогда система (4) определяет оснащение подгруппы H (см. [5]). Заключительные исследования связаны с проверкой условия (7) симметричности редуктивных пространств G/H.

В п. 3 редуктивные фактор-пространства G/H группы движений пространства R_4 изучаются подробнее. Основное внимание уделяется вопросу о приводимости рассматриваемых пространств [7] и строении стационарных подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ (здесь через $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ обозначены алгебры Ли групп Ли H и G, соответственно).

Пусть G/H — однородное редуктивное пространство с разложением алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{m}$. Оно называется *приводимым*, если $\mathfrak{m}$ содержит собственное $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$-инвариантное подпространство $\mathfrak{n}$; *вполне приводимым*, если $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$-инвариантное подпространство $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$ имеет инвариантное дополнение в $\mathfrak{m}$; *неприводимым*, если $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$-инвариантны только 0 и $\mathfrak{m}$.

В случае приводимого редуктивного пространства G/H необходимо существование такого разбиения множества форм $\{\Theta^\alpha | a = r+1, \ldots, 10\}$, определенных системой (1), на две части $\{\Theta^a\} = \{\Theta^u\} \cup \{\Theta^i\}$, чтобы

$$C^i{}_{\alpha u} = 0, \tag{8}$$

если уравнения $\vartheta^\alpha = 0$ задают оснащающее подпространство $\mathfrak{m}$ и при этом число форм Θ^u равно $\dim \mathfrak{n}$. Если же, кроме того,

$$C^u{}_{\alpha i} = 0, \tag{9}$$

то G/H является вполне приводимым.

Вопрос о строении подалгебр Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ решается с помощью известного критерия Картана (см. [1], стр. 82), согласно которому алгебра Ли над полем нулевой характеристики полупроста тогда и только тогда, когда ее матрица Киллинга невырождена.

Результаты, полученные для подгрупп H стационарности флагов Φ в R_4, представлены в таблице 1. Результаты, относящиеся к винтовым и неприводимым подгруппам H, представлены отдельно в таблице 2. В этих таблицах, а также в дальнейшем изложении пользуемся следующими обозначениями:

$\mathfrak{K}^{4,m}$	— класс связных подгрупп Ли H группы $O(4) * T_4$ орбиты максимальной размерности которых m-мерны $(1 \leqslant m \leqslant 4)$;
$K^{4,m}(\Phi)$	— подгруппа стационарности флага Φ;
$K_r{}^{4,m}(\Phi)$	— r-параметрическая винтовая подгруппа в подгруппе стационарности флага Φ;
$K_r{}^{4,m}$	— r-параметрическая неприводимая подгруппа;
R_m	— m-мерная плоскость в R_4 (при $m = 4$ все R_4);

$R_m{}^{[m_1,\ldots,m_k]}$ — m-мерная плоскость в R_4 (при $m = 4$ все R_4) с фиксированным в ней векторным флагом $[m_1, \ldots, m_k]$;
S_m — m-мерная ($m = 1, 2, 3$) сфера в R_4;
$R_{m_1} \times S_{m_2}$ — $(m_1 + m_2)$-мерный цилиндр вращения с m_1-мерными образующими $(m_1 + m_2 \leqslant 3)$;
$S_1 \times S_1$ — поверхность Клиффорда в R_4;
$\Gamma_{(m)}$ — винтовая линия в R_m;
$R_1 \times \Gamma_{(3)}$ — цилиндр с одномерными образующими R_1, построенный на винтовой линии плоскости R_3, вполне ортогональной к R_1 в R_4.

2. Редуктивность и симметричность однородных фактор-пространств группы движений в R_4. Результаты, полученные при исследовании редуктивности и симметричности пространств G/H и представленные в таблицах 1, 2, формулируются в терминах приводимости подгрупп и инвариантных флагов (в введенных обозначениях) коротко следующим образом.

Предложение. *Пусть G является группой Ли движений вещественного евклидова пространства R_4, т. е. $G = O(4) * T_4$. Однородные фактор-пространства G/H группы G по ее замкнутым приводимым связным подгруппам Ли $H \in \mathfrak{K}^{4,m}$ с инвариантными точечными флагами Φ и только они являются редуктивными. Среди них фактор-пространства G/H по подгруппам Ли стационарности точечных флагов Φ из класса $\mathfrak{K}^{4,3}$ и только они являются симметрическими.*

Если подгруппа Ли $H \in \mathfrak{K}^{4,m}$ группы G приводима с инвариантным векторно-точечным или векторным флагом Φ или неприводима, то однородное фактор-пространство G/H будет нередуктивным.

Замечание. Все однородные фактор-пространства G/H группы движений G по ее замкнутым связным подгруппам Ли H с инвариантными точечными и векторно-точечными флагами Φ можно рассматривать как однородные пространства орбит V_m $(1 \leqslant m < 4)$ максимальных размерностей соответствующих подгрупп Ли H.

Для доказательства предложения надо для каждого из указанных в [3] типов собственных подгрупп Ли H группы движений G составить систему, являющуюся следствием условий (6), для определения коэффициентов $p^{\alpha}{}_a$ в выражениях (4), как было описано в п. 1. В случае совместности получаемой системы проверяются условия (7) симметричности пространства G/H. Для краткости изложения ограничимся в дальнейшем подробным рассмотрением только пяти типов подгрупп Ли движений $H \subset G$. Они будут представителями тех серий типов подгрупп, на которые можно разбить множество всех 28 типов подгрупп Ли H движений следуя утверждениям предложения.

Таблица 1

Однородные фактор-пространства G/H при $H = K^{4,m}(\Phi)$

№	Тип подгруппы $H \subset O(4) * * T_4$	Орбиты максимальных размерностей	Формы Θ^a ($a = \dim H + 1, \dots, 10$) в уравнениях $\Theta^a = 0$ подгруппы H	Редуктивность	Формы ϑ^α ($\alpha = 1, \dots, \dim H$) в уравнениях $\vartheta^\alpha = 0$ оснащения $\mathfrak{m}$	Число параметров оснащения	Симметричность	Приводимость	Подалгебра $\mathfrak{h}$
1	$K^{4,1}\{1, 2, 3\}$	R_1	$\Theta^2 = \omega^2$, $\Theta^3 = \omega^3$, $\Theta^4 = \omega^4$, $\Theta^5 = \omega^2{}_1$, $\Theta^6 = \omega^3{}_1$, $\Theta^7 = \omega^4{}_1$, $\Theta^8 = \omega^3{}_2$, $\Theta^9 = \omega^4{}_2$, $\Theta^{10} = \omega^4{}_3$	да	$\vartheta^1 = \omega^1 + p^1{}_5\omega^2{}_1 + p^1{}_6\omega^3{}_1 + p^1{}_7\omega^4{}_1 + p^1{}_8\omega^3{}_2 + p^1{}_9\omega^4{}_2 + p^1{}_{10}\omega^4{}_3$	6	нет	вполне приводимо	неполупроста
2	$K^{4,1}\{0, 2, 3\}$	S_1	$\Theta^2 = \omega^2$, $\Theta^3 = \omega^3$, $\Theta^4 = \omega^4$, $\Theta^5 = \omega^2{}_1 - k\omega^1$, $\Theta^6 = \omega^3{}_1$, $\Theta^7 = \omega^4{}_1$, $\Theta^8 = \omega^3{}_2$, $\Theta^9 = \omega^4{}_2$, $\Theta^{10} = \omega^4{}_3$	да	$\vartheta^1 = kp^1{}_8\omega^3 + kp^1{}_9\omega^4 + k^{-1}\omega^2{}_1 + p^1{}_8\omega^3{}_2 + p^1{}_9\omega^4{}_2 + p^1{}_{10}\omega^4{}_3$	3	нет	вполне приводимо	неполупроста
3	$K^{4,2}[1; 2, 3]$	$R_2^{[1]}$	$\Theta^3 = \omega^3$, $\Theta^4 = \omega^4$, $\Theta^5 = \omega^2{}_1$, $\Theta^6 = \omega^3{}_1$, $\Theta^7 = \omega^4{}_1$, $\Theta^8 = \omega^3{}_2$, $\Theta^9 = \omega^4{}_2$, $\Theta^{10} = \omega^4{}_3$	нет					
4	$K^{4,2}\{1, 2\}$	$R_1 \times S_1$	$\Theta^3 = \omega^3$, $\Theta^4 = \omega^4$, $\Theta^5 = \omega^2{}_1$, $\Theta^6 = \omega^3{}_1 - 2\alpha\omega^1$, $\Theta^7 = \omega^4{}_1$, $\Theta^8 = \omega^3{}_2$, $\Theta^9 = \omega^4{}_2$, $\Theta^{10} = \omega^4{}_3$	да	$\vartheta^1 = (2\alpha)^{-1}\omega^3{}_1 + p^1{}_9\omega^4{}_2$, $\vartheta^2 = \omega^2 - (2\alpha)^{-1}\omega^3{}_2 + p^2{}_9\omega^4{}_2$	2	нет	приводимо	неполупроста
5	$K^{4,2}\{0, 2\}$	$S_1 \times S_1$	$\Theta^3 = \omega^3$, $\Theta^4 = \omega^4$, $\Theta^5 = \omega^2{}_1$, $\Theta^6 = \omega^3{}_1 - (\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2})\,\omega^1$, $\Theta^7 = \omega^4{}_1 - \beta\omega^1$, $\Theta^8 = \omega^3{}_2 - (\alpha - \sqrt{\alpha^2+\beta^2})\,\omega^2$, $\Theta^9 = \omega^4{}_2 - \beta\omega^2$, $\Theta^{10} = \omega^4{}_3$	да	$\vartheta^1 = (2\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^{-1}\omega^3{}_1 + \beta[2\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \times (\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2})]^{-1}\omega^4{}_1$, $\vartheta^2 = (-2\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^{-1}\omega^3{}_2 - \beta[2\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \times (\alpha - \sqrt{\alpha^2+\beta^2})]^{-1}\omega^4{}_2$	0	нет	приводимо	неполупроста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	$K^{4,2}\{2, 3\}$	R_2	$\Theta^4=\omega^3,\ \Theta^5=\omega^4,\ \Theta^6=\omega^3{}_1,$ $\Theta^7=\omega^4{}_1,\ \Theta^8=\omega^3{}_2,\ \Theta^9=\omega^4{}_2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3$	да	$\vartheta^1=\omega^1+p^1{}_6\omega^3{}_1+p^1{}_7\omega^4{}_1+$ $+p^1{}_8\omega^3{}_2+p^1{}_9\omega^4{}_2,$ $\vartheta^2=\omega^2-p^1{}_8\omega^3{}_1-p^1{}_9\omega^4{}_1+$ $+p^1{}_6\omega^3{}_2+p^1{}_7\omega^4{}_2,$ $\vartheta^3=\omega^2{}_1$	4	нет	вполне приводимо	неполупроста
7	$K^{4,2}\{0, 1\}$	S_2	$\Theta^4=\omega^3,\ \Theta^5=\omega^4,$ $\Theta^6=\omega^3{}_1-\alpha\omega^1,\ \Theta^7=\omega^4{}_1,$ $\Theta^8=\omega^3{}_2-\alpha\omega^2,\ \Theta^9=\omega^4{}_2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3$	да	$\vartheta^1=-\alpha p^1{}_8\omega^2+\alpha^{-1}\omega^3{}_1+$ $+p^1{}_8\omega^3{}_2+p^1{}_9\omega^4{}_2,$ $\vartheta^2=\alpha p^1{}_8\omega^1-p^1{}_8\omega^3{}_1-p^1{}_9\omega^4{}_1+$ $+\alpha^{-1}\omega^3{}_2,$ $\vartheta^3=\alpha^2p^1{}_8\omega^3+\omega^2{}_1-\alpha p^1{}_9\omega^4{}_3$	2	нет	вполне приводимо	полупроста
8	$K^{4,3}[1, 2; 3]$	$R_3^{[1,2]}$	$\Theta^4=\omega^4,\ \Theta^5=\omega^2{}_1,\ \Theta^6=\omega^3{}_1,$ $\Theta^7=\omega^4{}_1,\ \Theta^8=\omega^3{}_2,\ \Theta^9=\omega^4{}_2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3$	нет					
9	$K^{4,3}[1; 2]$	$R_2^{[1]}\times S_1$	$\Theta^4=\omega^4,\ \Theta^5=\omega^2{}_1,\ \Theta^6=\omega^3{}_1,$ $\Theta^7=\omega^4{}_1,\ \Theta^8=\omega^3{}_2,\ \Theta^9=\omega^4{}_2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3-k\omega^3$	нет					
10	$K^{4,3}\{2\}$	$R_2\times S_1$	$\Theta^5=\omega^4,\ \Theta^6=\omega^3{}_1,\ \Theta^7=\omega^4{}_1,$ $\Theta^8=\omega^3{}_2,\ \Theta^9=\omega^4{}_2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3-k\omega^3$	да	$\vartheta^1=\omega^1-k^{-1}\omega^4{}_1,$ $\vartheta^2=\omega^2-k^{-1}\omega^4{}_2,$ $\vartheta^3=k^{-1}\omega^4{}_3,\quad \vartheta^4=\omega^2{}_1$	0	да	приводимо	неполупроста
11	$K^{4,3}\{1\}$	$R_1\times S_2$	$\Theta^5=\omega^4,\ \Theta^6=\omega^3{}_1,$ $\Theta^7=\omega^4{}_1-k\omega^1,\ \Theta^8=\omega^3{}_2,$ $\Theta^9=\omega^4{}_2-k\omega^2,\ \Theta^{10}=\omega^4{}_3$	да	$\vartheta^1=k^{-1}\omega^4{}_1,\quad \vartheta^2=k^{-1}\omega^4{}_2,$ $\vartheta^3=\omega^3-k^{-1}\omega^4{}_3,\quad \vartheta^4=\omega^2{}_1$	0	да	приводимо	неполупроста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	$K^{4,3}[1;3\}$	$R_3^{[1]}$	$\Theta^5=\omega^4,\ \Theta^6=\omega^3{}_1,\ \Theta^7=\omega^4{}_1,$ $\Theta^8=\omega^3{}_2,\ \Theta^9=\omega^4{}_2,\ \Theta^{10}=\omega^4{}_3$	нет					
13	$K^{4,3}\{3\}$	R_3	$\Theta^7=\omega^4,\ \Theta^8=\omega^4{}_1,\ \Theta^9=\omega^4{}_2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3$	да	$\vartheta^1=\omega^1+p^1{}_8\omega^4{}_1,$ $\vartheta^2=\omega^2+p^1{}_8\omega^4{}_2,$ $\vartheta^3=\omega^3+p^1{}_8\omega^4{}_3,\ \vartheta^4=\omega^2{}_1,$ $\vartheta^5=\omega^3{}_1,\ \vartheta^6=\omega^3{}_2$	1	да	приводимо	неполупроста
14	$K^{4,3}\{0\}$	S_3	$\Theta^7=\omega^4,\ \Theta^8=\omega^4{}_1-k\omega^1,$ $\Theta^9=\omega^4{}_2-k\omega^2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3-k\omega^3$	да	$\vartheta^1=\omega^4{}_1,\ \vartheta^2=\omega^4{}_2,\ \vartheta^3=\omega^4{}_3,$ $\vartheta^4=\omega^2{}_1,\ \vartheta^5=\omega^3{}_1,\ \vartheta^6=\omega^3{}_2$	0	да	приводимо	полупроста
15	$K^{4,4}[1,2,3]$	$R_4^{[1,2,3]}$	$\Theta^5=\omega^2{}_1,\ \Theta^6=\omega^3{}_1,\ \Theta^7=\omega^4{}_1,$ $\Theta^8=\omega^3{}_2,\ \Theta^9=\omega^4{}_2,\ \Theta^{10}=\omega^4{}_3$	нет					
16	$K^{4,4}[1,2]$	$R_4^{[1,2]}$	$\Theta^6=\omega^3{}_1,\ \Theta^7=\omega^4{}_1,\ \Theta^8=\omega^3{}_2,$ $\Theta^9=\omega^4{}_2,\ \Theta^{10}=\omega^4{}_3$	нет					
17	$K^{4,4}[2]$	$R_4^{[2]}$	$\Theta^7=\omega^3{}_1,\ \Theta^8=\omega^4{}_1,\ \Theta^9=\omega^3{}_2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_2$	нет					
18	$K^{4,4}[1]$	$R_4^{[1]}$	$\Theta^8=\omega^4{}_1,\ \Theta^9=\omega^4{}_2,\ \Theta^{10}=\omega^4{}_3$	нет					

Таблица 2

Однородные фактор-пространства G/H при $H=K_r^{4,m}(\Phi)$ и $H=K_r^{4,4}$

№	Тип подгруппы $H \subset O(4) * * T_4$	Орбиты максимальных размерностей	Формы Θ^a ($a=\dim H+1, \ldots, 10$) в уравнениях $\Theta^a=0$ подгруппы H	Редуктивность	Формы ϑ^α ($\alpha=1, \ldots, \dim H$) в уравнениях $\vartheta^\alpha=0$ оснащения $\mathfrak{m}$	Число параметров оснащения	Симметричность	Приводимость	Подалгебра $\mathfrak{h}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
19	$K_1^{4,1}\{1,2\}$	$\Gamma_{(3)}$	$\Theta^2=\omega^2$, $\Theta^3=\omega^3$, $\Theta^4=\omega^4$, $\Theta^5=\omega^2{}_1-k_1\omega^1$, $\Theta^6=\omega^3{}_1$, $\Theta^7=\omega^4{}_1$, $\Theta^8=\omega^3{}_2-k_2\omega^2$, $\Theta^9=\omega^4{}_2$, $\Theta^{10}=\omega^4{}_3$	да	$\vartheta^1=(2k_1)^{-1}[k_1-(k_1{}^2+k_2{}^2)p^1{}_5]\omega^1+(2k_2)^{-1}[k_1-(k_1{}^2+k_2{}^2)p^1{}_5]\omega^3+p^1{}_5\omega^2{}_1+p^1{}_7\omega^4{}_1+(2k_1k_2)^{-1}[k_1-(k_1{}^2-k_2{}^2)p^1{}_5]\omega^3{}_2+k_1k_2{}^{-1}p^1{}_7\omega^4{}_3$	2	нет	вполне приводимо	неполупроста
20	$K_1^{4,1}\{0,2\}$	$\Gamma_{(4)}$	$\Theta^2=\omega^2$, $\Theta^3=\omega^3$, $\Theta^4=\omega^4$, $\Theta^5=\omega^2{}_1-k_1\omega^1$, $\Theta^6=\omega^3{}_1$, $\Theta^7=\omega^4{}_1$, $\Theta^8=\omega^3{}_2-k_2\omega^1$, $\Theta^9=\omega^4{}_2$, $\Theta^{10}=\omega^4{}_3-k_3\omega^1$	да	$\vartheta^1=(2k_1k_2)^{-1}[k_2+(k_1{}^2-k_2{}^2-k_3{}^2)p^1{}_8]\omega^2{}_1+(2k_1k_3)^{-1}[k_2-(k_1{}^2+k_2{}^2+k_3{}^2)p^1{}_8]\omega^4{}_1+p^1{}_8\omega^3{}_2+(2k_2k_3)^{-1}[k_2-(k_1{}^2+k_2{}^2-k_3{}^2)p^1{}_8]\omega^4{}_3$	1	нет	вполне приводимо	неполупроста
21	$K_2^{4,2}[1;2\}$	$R_1\times\Gamma_{(3)}$	$\Theta^3=\omega^3$, $\Theta^4=\omega^4$, $\Theta^5=\omega^2{}_1$, $\Theta^6=\omega^3{}_1-2a\omega^1$, $\Theta^7=\omega^4{}_1$, $\Theta^8=\omega^3{}_2$, $\Theta^9=\omega^4{}_2$, $\Theta^{10}=\omega^4{}_3-A\omega^1$	нет					

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22	$K_3^{4,3}[1;3\}$	$R_3^{[1]}$	$\Theta^4=\omega^4,\ \Theta^5=\omega^2{}_1,\ \Theta^6=\omega^3{}_1,$ $\Theta^7=\omega^4{}_1,\ \Theta^8=\omega^3{}_2-k\omega^1,$ $\Theta^9=\omega^4{}_2,\ \Theta^{10}=\omega^4{}_3$	нет					
23	$K_3^{4,3}\{0\}$	S_3	$\Theta^4=\omega^4,\ \Theta^5=\omega^2{}_1-k\omega^3,$ $\Theta^6=\omega^3{}_1+k\omega^2,$ $\Theta^7=\omega^4{}_1-k\omega^1,$ $\Theta^8=\omega^3{}_2-k\omega^1,$ $\Theta^9=\omega^4{}_2-k\omega^2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3-k\omega^3$	да	$\vartheta^1=(2k)^{-1}(\omega^4{}_1+\omega^3{}_2),$ $\vartheta^2=(2k)^{-1}(-\omega^3{}_1+\omega^4{}_2),$ $\vartheta^3=(2k)^{-1}(\omega^2{}_1+\omega^4{}_3)$	0	нет		полупроста
24	$K_4^{4,3}\{0\}$	S_3	$\Theta^5=\omega^4,\ \Theta^6=\omega^3{}_1+k\omega^2,$ $\Theta^7=\omega^4{}_1-k\omega^1,$ $\Theta^8=\omega^3{}_2-k\omega^1,$ $\Theta^9=\omega^4{}_2-k\omega^2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3-k\omega^3$	да	$\vartheta^1=(2k)^{-1}(\omega^4{}_1+\omega^3{}_2),$ $\vartheta^2=(2k)^{-1}(-\omega^3{}_1+\omega^4{}_2),$ $\vartheta^3=k^{-1}\omega^4{}_3,$ $\vartheta^4=\omega^2{}_1$	0	нет		полупроста
25	$K_4^{4,4}[1,2]$	$R_4^{[1,2]}$	$\Theta^5=\omega^2{}_1,\ \Theta^6=\omega^3{}_1,\ \Theta^7=\omega^4{}_1,$ $\Theta^8=\omega^3{}_2-k\omega^1,\ \Theta^9=\omega^4{}_2,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3$	нет					
26	$K_5^{4,4}[1]$	$R_4^{[1]}$	$\Theta^6=\omega^3{}_1,\ \Theta^7=\omega^4{}_1,\ \Theta^8=\omega^3{}_2,$ $\Theta^9=\omega^4{}_2,\ \Theta^{10}=\omega^4{}_3-k\omega^2{}_1$	нет					
27	$K_7^{4,4}$	R_4	$\Theta^8=\omega^3{}_2-\omega^4{}_1,$ $\Theta^9=\omega^4{}_2+\omega^3{}_1,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_3-\omega^2{}_1$	нет					
28	$K_8^{4,4}$	R_4	$\Theta^9=\omega^3{}_2-\omega^4{}_1,$ $\Theta^{10}=\omega^4{}_2+\omega^3{}_1$	нет					

I. В первую серию типов подгрупп Ли H входят приводимые подгруппы с инвариантными точечными флагами, кроме подгрупп стационарности точечных флагов из класса $\mathfrak{K}^{4,3}$. Таких типов десять (1, 2, 4, 5, 6, 7, 19, 20, 23, 24 из таблиц 1, 2). Оказывается, что однородные пространства орбит максимальных размерностей этих подгрупп являются редуктивными, но не симметрическими.

Рассмотрим случай подгруппы $H = K^{4,1}\{0, 2\}$ (№ 20). Замкнутая подгруппа $K^{4,1}\{0, 2\}$ определяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega^2{}_1 - k_1\omega^1 = \omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^3{}_2 - k_2\omega^1 =$$
$$= \omega^4{}_2 = \omega^4{}_3 - k_3\omega^1 = 0$$

при рациональном отношении k_1/k_3 (в случае иррациональности k_1/k_3 подгруппа $K^{4,1}\{0, 2\}$ не замкнута). Ее орбитами максимальной размерности являются винтовые линии $\Gamma_{(4)}$ (линии с тремя отличными от нуля постоянными кривизнами) в R_4. Сравнение последней системы с (1) дает

$$\Theta^2 = \omega^2, \quad \Theta^3 = \omega^3 \quad \Theta^4 = \omega^4, \quad \Theta^5 = \omega^2{}_1 - k_1\omega^1, \quad \Theta^6 = \omega^3{}_1,$$
$$\Theta^7 = \omega^4{}_1, \quad \Theta^8 = \omega^3{}_2 - k_2\omega^1, \quad \Theta^9 = \omega^4{}_2, \quad \Theta^{10} = \omega^4{}_3 - k_3\omega^1. \tag{10A}$$

Система независимых форм $\{\Theta^a | a = 2, \ldots, 10\}$ дополняется до полного базиса инвариантных форм группы G единственной формой

$$\vartheta^1 = \omega^1 + p^1{}_a\Theta^a =$$
$$= (1 - k_1p^1{}_5 - k_2p^1{}_8 - k_3p^1{}_{10})\,\omega^1 + p^1{}_2\omega^2 + p^1{}_3\omega^3 + p^1{}_4\omega^4 +$$
$$+ p^1{}_5\omega^2{}_1 + p^1{}_6\omega^3{}_1 + p^1{}_7\omega^4{}_1 + p^1{}_8\omega^3{}_2 + p^1{}_9\omega^4{}_2 + p^1{}_{10}\omega^4{}_3. \tag{10Б}$$

С учетом структурных уравнений (3) и выражений (10), для внешнего дифференциала $d\vartheta^1$ имеет место:

$$d\vartheta^1 = \vartheta^1 \wedge [\{k_1(1 - k_1p^1{}_5 - k_2p^1{}_8 - k_3p^1{}_{10}) - k_2p^1{}_3\}\,\Theta^2 +$$
$$+ (k_2p^1{}_2 - k_3p^1{}_4)\,\Theta^3 + k_3p^1{}_3\Theta^4 + (p^1{}_2 - k_2p^1{}_6)\,\Theta^5 +$$
$$+ (p^1{}_3 + k_2p^1{}_5 - k_3p^1{}_7 - k_1p^1{}_8)\,\Theta^6 + (p^1{}_4 + k_3p^1{}_6 - k_1p^1{}_9)\,\Theta^7 +$$
$$+ (k_1p^1{}_6 - k_3p^1{}_9)\,\Theta^8 + (k_1p^1{}_7 + k_3p^1{}_8 - k_2p^1{}_{10})\,\Theta^9 + k_2p^1{}_9\Theta^{10}] + \Theta \wedge \Theta,$$

где через $\Theta \wedge \Theta$ обозначена форма, являющаяся линейной комбинацией произведений типа $\Theta^b \wedge \Theta^c$. Учитывая условия (6) редуктивности пространства G/H, приходим к системе

$$k_1(1 - k_1p^1{}_5 - k_2p^1{}_8 - k_3p^1{}_{10}) - k_2p^1{}_3 = 0,$$
$$k_2p^1{}_2 - k_3p^1{}_4 = 0,$$
$$k_3p^1{}_3 = 0,$$
$$p^1{}_2 - k_2p^1{}_6 = 0,$$
$$p^1{}_3 + k_2p^1{}_5 - k_3p^1{}_7 - k_1p^1{}_8 = 0,$$

$$p^1{}_4+k_3p^1{}_6-k_1p^1{}_9=0,$$
$$k_1p^1{}_6-k_3p^1{}_9=0,$$
$$k_1p^1{}_7+k_3p^1{}_8-k_2p^1{}_{10}=0,$$
$$k_2p^1{}_9=0,$$

решением которой, в предположении $k_1k_2k_3\neq 0$, будет

$$p^1{}_2=p^1{}_3=p^1{}_4=0,$$
$$p^1{}_5=(2k_1k_2)^{-1}[k_2+(k_1{}^2-k_2{}^2-k_3{}^2)p^1{}_8],$$
$$p^1{}_6=0,$$
$$p^1{}_7=(2k_1k_3)^{-1}[k_2-(k_1{}^2+k_2{}^2+k_3{}^2)p^1{}_8],$$
$$p^1{}_9=0,$$
$$p^1{}_{10}=(2k_2k_3)^{-1}[k_2-(k_1{}^2+k_2{}^2-k_3{}^2)p^1{}_8].$$

Решение определяется с произволом одного параметра. Следовательно, и оснащение подгруппы H, определяющее редуктивную структуру G/H, существует с 1-параметрическим произволом.

Рассматриваемое пространство не является симметрическим, так как условие (7) не выполняется. Действительно:

$$d\Theta^2=d\omega^2=\omega^1\wedge\omega^2{}_1-\omega^3\wedge\omega^3{}_2-\omega^4\wedge\omega^4{}_2=$$
$$=(\vartheta^1-p^1{}_a\Theta^a)\wedge\Theta^5-\Theta^3\wedge[\Theta^8+k_2(\vartheta^1-p^1{}_a\Theta^a)]-\Theta^4\wedge\Theta^9=$$
$$=\vartheta^1\wedge(k_2\Theta^3+\Theta^5)+\Theta^3\wedge(p^1{}_a\Theta^a-\Theta^8)-p^1{}_a\Theta^a\wedge\Theta^5-\Theta^4\wedge\Theta^9,$$

тем самым $C^2{}_{49}=-1\neq 0$.

Нами доказано, что при замкнутой $H=K^{4,1}\{0,2\}$ фактор-пространство G/H или, что то же самое, пространство замкнутых винтовых линий $\Gamma_{(4)}$ является редуктивным, но несимметрическим.

Аналогичный результат получится для всех типов подгрупп рассматриваемой серии. Отметим лишь, что при различных типах H число параметров ее оснащения различно и в случаях № 5, 23, 24 оснащение определено однозначно.

II. Во вторую серию типов подгрупп Ли H входят приводимые подгруппы стационарности точечных флагов Φ из класса $\mathfrak{K}^{4,3}$. Их существует четыре (№ 10, 11, 13, 14 из таблицы 1). Соответствующие однородные пространства трехмерных орбит являются редуктивными симметрическими пространствами.

Рассмотрим случай подгруппы $H=K^{4,3}\{2\}\in\mathfrak{K}^{4,3}$ (№ 10). Она определяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^4=\omega^3{}_1=\omega^4{}_1=\omega^3{}_2=\omega^4{}_2=\omega^4{}_3-k\omega^3=0.$$

Орбитами максимальной размерности подгруппы H являются гиперцилиндры вращения с плоскими образующими: $V_3=R_2\times S_1$. Системой форм Θ^a $(a=5,\ldots,10)$ будет

$$\Theta^5=\omega^4,\quad \Theta^6=\omega^3{}_1,\quad \Theta^7=\omega^4{}_1,\quad \Theta^8=\omega^3{}_2,\quad \Theta^9=\omega^4{}_2,$$
$$\Theta^{10}=\omega^4{}_3-k\omega^3. \tag{11А}$$

Она дополняется до полного базиса инвариантных форм группы Ли G формами вида (4):

$$\begin{aligned} &\vartheta^1=\omega^1+p^1{}_a\Theta^a, && \vartheta^2=\omega^2+p^2{}_a\Theta^a,\\ &\vartheta^3=\omega^3+p^3{}_a\Theta^a, && \vartheta^4=\omega^2{}_1+p^4{}_a\Theta^a. \end{aligned} \tag{11Б}$$

С учетом структурных уравнений (3) и равенств (11) для дифференциалов $d\vartheta^\alpha$ ($\alpha=1,\ldots,4$) получаются выражения

$$\begin{aligned} d\vartheta^1={}&\vartheta^1\wedge[-kp^1{}_{10}\Theta^6+p^1{}_5\Theta^7]+\vartheta^2\wedge[p^4{}_a\Theta^a-kp^1{}_{10}\Theta^8+p^1{}_5\Theta^9]+\\ &+\vartheta^3\wedge[-k^2p^1{}_{10}\Theta^5-(1+kp^1{}_7)\,\Theta^6+\\ &+kp^1{}_6\Theta^7-kp^1{}_9\Theta^8+kp^1{}_8\Theta^9+p^1{}_5\Theta^{10}]+\\ &+\vartheta^4\wedge[-p^2{}_a\Theta^a-p^1{}_8\Theta^6-p^1{}_9\Theta^7+p^1{}_6\Theta^8+p^1{}_7\Theta^9]+\vartheta\wedge\vartheta+\Theta\wedge\Theta,\\ d\vartheta^2={}&\vartheta^1\wedge[-p^4{}_a\Theta^a-kp^2{}_{10}\Theta^6+p^2{}_5\Theta^7]+\\ &+\vartheta^2\wedge[-kp^2{}_{10}\Theta^8+p^2{}_5\Theta^9]+\\ &+\vartheta^3\wedge[-k^2p^2{}_{10}\Theta^5-kp^2{}_7\Theta^6+kp^2{}_6\Theta^7-\\ &-(1+kp^2{}_9)\,\Theta^8+kp^2{}_8\Theta^9+p^2{}_5\Theta^{10}]+\\ &+\vartheta^4\wedge[p^1{}_a\Theta^a-p^2{}_8\Theta^6-p^2{}_9\Theta^7+p^2{}_6\Theta^8+p^2{}_7\Theta^9]+\vartheta\wedge\vartheta+\Theta\wedge\Theta,\\ d\vartheta^3={}&\vartheta^1\wedge[(1-kp^3{}_{10})\,\Theta^6+p^3{}_5\Theta^7]+\vartheta^2\wedge[(1-kp^3{}_{10})\,\Theta^8+p^3{}_5\Theta^9]+\\ &+\vartheta^3\wedge[k(1-kp^3{}_{10})\,\Theta^5-kp^3{}_7\Theta^6+\\ &+kp^3{}_6\Theta^7-kp^3{}_9\Theta^8+kp^3{}_8\Theta^9+p^3{}_5\Theta^{10}]+\\ &+\vartheta^4\wedge[-p^3{}_8\Theta^6-p^3{}_9\Theta^7+p^3{}_6\Theta^8+p^3{}_7\Theta^9]+\vartheta\wedge\vartheta+\Theta\wedge\Theta,\\ d\vartheta^4={}&\vartheta^1\wedge[-kp^4{}_{10}\Theta^6+p^4{}_5\Theta^7]+\vartheta^2\wedge[-kp^4{}_{10}\Theta^8+p^4{}_5\Theta^9]+\\ &+\vartheta^3\wedge[-k^2p^4{}_{10}\Theta^5-kp^4{}_7\Theta^6+\\ &+kp^4{}_6\Theta^7-kp^4{}_9\Theta^8+kp^4{}_8\Theta^9+p^4{}_5\Theta^{10}]+\\ &+\vartheta^4\wedge[-p^4{}_8\Theta^6-p^4{}_9\Theta^7+p^4{}_6\Theta^8+p^4{}_7\Theta^9]+\\ &+\vartheta\wedge\vartheta+\Theta\wedge\Theta. \end{aligned}$$

Здесь через $\vartheta\wedge\vartheta$ и $\Theta\wedge\Theta$ обозначены формы, являющиеся линейными комбинациями, соответственно, произведений вида $\vartheta^\beta\wedge\vartheta^\gamma$ и $\Theta^b\wedge\Theta^c$. Прямой подстановкой легко проверить, что при

$$\begin{aligned} &p^1{}_5=p^1{}_6=0,\quad p^1{}_7=-k^{-1}, && p^1{}_8=p^1{}_9=p^1{}_{10}=0,\\ &p^2{}_5=p^2{}_6=p^2{}_7=p^2{}_8=0, && p^2{}_9=-k^{-1},\quad p^2{}_{10}=0,\\ &p^3{}_5=p^3{}_6=p^3{}_7=p^3{}_8=p^3{}_9=0, && p^3{}_{10}=k^{-1},\quad p^4{}_a=0 \end{aligned}$$

удовлетворяются условия (6) редуктивности пространства G/H. Оснащение подгруппы H, определяющее редуктивную структуру G/H, определено однозначно и

$$\vartheta^1 = \omega^1 - k^{-1}\omega^4{}_1, \qquad \vartheta^2 = \omega^2 - k^{-1}\omega^4{}_2,$$
$$\vartheta^3 = k^{-1}\omega^4{}_3, \qquad \vartheta^4 = \omega^2{}_1.$$

Вычисляя дифференциалы $d\Theta^a$, с учетом полученных выражений ϑ^α, получаем

$$\begin{aligned}
d\Theta^5 &= \vartheta^1 \wedge \Theta^7 + \vartheta^2 \wedge \Theta^9 + k\vartheta^3 \wedge \Theta^{10},\\
d\Theta^6 &= \vartheta^4 \wedge \Theta^8 + k\vartheta^3 \wedge \Theta^7,\\
d\Theta^7 &= \vartheta^4 \wedge \Theta^9 - k\vartheta^3 \wedge \Theta^6,\\
d\Theta^8 &= -\vartheta^4 \wedge \Theta^6 + k\vartheta^3 \wedge \Theta^9,\\
d\Theta^9 &= -\vartheta^4 \wedge \Theta^7 - k\vartheta^3 \wedge \Theta^8,\\
d\Theta^{10} &= -k\vartheta^1 \wedge \Theta^6 - k\vartheta^2 \wedge \Theta^8 - k^2\vartheta^3 \wedge \Theta^5.
\end{aligned}$$

Пространство G/H является симметрическим, так как условия (7) в рассматриваемом случае выполнены.

Тем самым доказано, что при $H = K^{4,3}\{2\} \in \mathfrak{K}^{4,3}$ фактор-пространство G/H (или пространство орбит $R_2 \times S_1$) является симметрическим пространством.

Аналогичный результат получится, если проделать вычисления, подобные приведенным, для типов 11, 13, 14 подгрупп Ли H группы G.

III. Третью серию типов подгрупп образуют приводимые подгруппы Ли H с инвариантными векторно-точечными флагами. Их существует шесть (№ 3, 8, 9, 12, 21, 22 по таблицам 1, 2). Все однородные пространства орбит максимальной размерности упомянутых подгрупп не редуктивны.

Рассмотрим подробно случай подгруппы $H = K^{4,2}[1; 2, 3\}$ (№ 3). Такая подгруппа определяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^4{}_2 = \omega^4{}_3 = 0,$$

и ее орбитами максимальной размерности являются двумерные плоскости R_2 с инвариантными направлениями, т. е. $V_2 = R_2{}^{[1]}$. Из (1) следует, что

$$\begin{aligned}
&\Theta^3 = \omega^3, \quad \Theta^4 = \omega^4, \quad \Theta^5 = \omega^2{}_1, \quad \Theta^6 = \omega^3{}_1,\\
&\Theta^7 = \omega^4{}_1, \quad \Theta^8 = \omega^3{}_2, \quad \Theta^9 = \omega^4{}_2, \quad \Theta^{10} = \omega^4{}_3,
\end{aligned} \tag{12А}$$

и система форм Θ^a $(a = 3, \ldots, 10)$ дополняется до полного базиса инвариантных форм группы G формами

$$\begin{aligned}
\vartheta^1 &= \omega^1 + p^1{}_a\Theta^a,\\
\vartheta^2 &= \omega^2 + p^2{}_a\Theta^a.
\end{aligned} \tag{12Б}$$

Вычисление дифференциалов $d\vartheta^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ дает

$$\begin{aligned}
d\vartheta^1 &= \vartheta^1 \wedge [p^1{}_3\Theta^6 + p^1{}_4\Theta^7] + \vartheta^2 \wedge [-\Theta^5 + p^1{}_3\Theta^8 + p^1{}_4\Theta^9] + \Theta \wedge \Theta,\\
d\vartheta^2 &= \vartheta^1 \wedge [\Theta^5 + p^2{}_3\Theta^6 + p^2{}_4\Theta^7] + \vartheta^2 \wedge [p^2{}_3\Theta^8 + p^2{}_4\Theta^9] + \Theta \wedge \Theta,
\end{aligned}$$

где $\Theta \wedge \Theta$ — формы, содержащие произведения типа $\Theta^b \wedge \Theta^c$.

Как видим, здесь $C^1{}_{25} = -1$, $C^2{}_{15} = 1$. Тем самым условия (6) не удовлетворяются и однородное пространство G/H является при $H = K^{4,2}[1; 2, 3\}$ нередуктивным.

IV. Четвертую серию типов подгрупп образуют приводимые подгруппы Ли H с инвариантными векторными флагами. Их существует шесть (№ 15, 16, 17, 18, 25, 26 по таблицам 1, 2). Эти подгруппы действуют в R_4 транзитивно и соответствующие им фактор-пространства G/H нередуктивны.

Докажем это для случая подгруппы $H = K_4{}^{4,4}[1, 2]$ (№ 25). Подгруппа H определяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^3{}_2 - k\omega^1 = \omega^4{}_2 = \omega^4{}_3 = 0,$$

и ее орбитой является $R_4{}^{[1,2]}$. В рассматриваемом случае системой Θ^a ($a = 5, \ldots, 10$) будет

$$\begin{aligned} &\Theta^5 = \omega^2{}_1, &&\Theta^6 = \omega^3{}_1, &&\Theta^7 = \omega^4{}_1, \\ &\Theta^8 = \omega^3{}_2 - k\omega^1, &&\Theta^9 = \omega^4{}_2, &&\Theta^{10} = \omega^4{}_3, \end{aligned} \tag{13А}$$

которая дополняется до полного базиса инвариантных форм группы G формами

$$\begin{aligned} &\vartheta^1 = \omega^1 + p^1{}_a\Theta^a, &&\vartheta^2 = \omega^2 + p^2{}_a\Theta^a, \\ &\vartheta^3 = \omega^3 + p^3{}_a\Theta^a, &&\vartheta^4 = \omega^4 + p^4{}_a\Theta^a. \end{aligned} \tag{13Б}$$

Внешние дифференциалы последних форм вычисляются с учетом выражений (13) и уравнений (3):

$$\begin{aligned} d\vartheta^1 = {}& k\vartheta^1 \wedge [-p^1{}_6\Theta^5 + p^1{}_5\Theta^6 - p^1{}_{10}\Theta^9 + p^1{}_9\Theta^{10}] + (kp^1{}_8 - 1)\vartheta^2 \wedge \Theta^5 + \\ &+ (kp^1{}_8 - 1)\vartheta^3 \wedge \Theta^6 + (kp^1{}_8 - 1)\vartheta^4 \wedge \Theta^7 + \Theta \wedge \Theta, \\ d\vartheta^2 = {}& \vartheta^1 \wedge [-kp^3{}_a\Theta^a + (1 - kp^2{}_6)\Theta^5 + kp^2{}_5\Theta^6 - kp^2{}_{10}\Theta^9 + kp^2{}_9\Theta^{10}] + \\ &+ kp^2{}_8\vartheta^2 \wedge \Theta^5 + \vartheta^3 \wedge [kp^1{}_a\Theta^a + kp^2{}_8\Theta^6 - \Theta^8] + \\ &+ \vartheta^4 \wedge [kp^2{}_8\Theta^7 - \Theta^9] + \vartheta \wedge \vartheta + \Theta \wedge \Theta, \\ d\vartheta^3 = {}& \vartheta^1 \wedge [kp^2{}_a\Theta^a - kp^3{}_6\Theta^5 + (1 - kp^3{}_5)\Theta^6 - kp^3{}_{10}\Theta^9 + kp^3{}_9\Theta^{10}] + \\ &+ \vartheta^2 \wedge [-kp^1{}_a\Theta^a + kp^3{}_8\Theta^5 + \Theta^8] + kp^3{}_8\vartheta^3 \wedge \Theta^6 + \\ &+ \vartheta^4 \wedge [kp^3{}_8\Theta^7 - \Theta^{10}] + \vartheta \wedge \vartheta + \Theta \wedge \Theta, \\ d\vartheta^4 = {}& \vartheta^1 \wedge [-kp^4{}_6\Theta^5 + kp^4{}_5\Theta^6 + \Theta^7 - kp^4{}_{10}\Theta^9 + kp^4{}_9\Theta^{10}] + \\ &+ \vartheta^2 \wedge [kp^4{}_8\Theta^5 + \Theta^9] + \vartheta^3 \wedge [kp^4{}_8\Theta^6 + \Theta^{10}] + kp^4{}_8\vartheta^4 \wedge \Theta^7 + \Theta \wedge \Theta, \end{aligned}$$

где, как и раньше, через $\vartheta \wedge \vartheta$ и $\Theta \wedge \Theta$ обозначены формы, являющиеся линейными комбинациями форм $\vartheta^\beta \wedge \vartheta^\gamma$ и $\Theta^b \wedge \Theta^c$, соответственно. Здесь $C^2{}_{49} = C^3{}_{4,10} = -1$, $C^4{}_{17} = C^4{}_{29} = C^4{}_{3,10} = 1$, условия (6) не выполняются и соответствующее пространство G/H является нередуктивным. В оставшихся случаях доказательства аналогичны изложенному.

V. В пятую серию типов подгрупп Ли H группы G входят неприводимые подгруппы H. Их две (№ 27, 28 из таблицы 2).

Эти подгруппы действуют в R_4 транзитивно и соответствующие им однородные фактор-пространства G/H нередуктивны.

Рассмотрим, к примеру, подгруппу $H = K_7^{4,4}$ (№ 27). Она определяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^4{}_1 - \omega^3{}_2 = \omega^4{}_2 + \omega^3{}_1 = \omega^4{}_3 - \omega^2{}_1 = 0,$$

и ее орбитой будет все пространство R_4. При этом в пространстве R_4 не существует инвариантных относительно действия H направлений. Здесь

$$\Theta^8 = \omega^4{}_1 - \omega^3{}_2, \qquad \Theta^9 = \omega^4{}_2 + \omega^3{}_1, \qquad \Theta^{10} = \omega^4{}_3 - \omega^2{}_1. \tag{14А}$$

Формами, дополняющими систему Θ^a $(a = 8, 9, 10)$ до полного базиса инвариантных форм группы будут

$$\vartheta^1 = \omega^1 + p^1{}_a\Theta^a, \quad \vartheta^2 = \omega^2 + p^2{}_a\Theta^a, \quad \vartheta^3 = \omega^3 + p^3{}_a\Theta^a, \quad \vartheta^4 = \omega^4 + p^4{}_a\Theta^a,$$
$$\vartheta^5 = \omega^2{}_1 + p^5{}_a\Theta^a, \quad \vartheta^6 = \omega^3{}_1 + p^6{}_a\Theta^a, \quad \vartheta^7 = \omega^3{}_2 + p^7{}_a\Theta^a. \tag{14Б}$$

Вычисление внешних дифференциалов форм ϑ^1 и ϑ^2 покажет, что рассматриваемое однородное пространство G/H будет нередуктивным. Действительно,

$$d\vartheta^1 = \vartheta^2 \wedge [p^5{}_a\Theta^a] + \vartheta^3 \wedge [p^6{}_a\Theta^a] + \vartheta^4 \wedge [p^7{}_a\Theta^a - \Theta^8] +$$
$$+ \vartheta^5 \wedge [-p^2{}_a\Theta^a] + \vartheta^6 \wedge [-p^3{}_a\Theta^a] +$$
$$+ \vartheta^7 \wedge [-p^4{}_a\Theta^a] + \vartheta \wedge \vartheta + \Theta \wedge \Theta,$$
$$d\vartheta^2 = \vartheta^1 \wedge [-p^5{}_a\Theta^a] + \vartheta^3 \wedge [p^7{}_a\Theta^a] + \vartheta^4 \wedge [-p^6{}_a\Theta^a - \Theta^9] +$$
$$+ \vartheta^5 \wedge [p^1{}_a\Theta^a] + \vartheta^6 \wedge [p^4{}_a\Theta^a] + \vartheta^7 \wedge [-p^3{}_a\Theta^a] + \vartheta \wedge \vartheta + \Theta \wedge \Theta.$$

Чтобы выполнялись условия (6), должны иметь место равенства

$$p^1{}_a = p^2{}_a = p^3{}_a = p^4{}_a = p^5{}_a = p^6{}_a = p^7{}_a = 0,$$

но тогда $C^1{}_{48} = C^2{}_{49} = -1 \neq 0$, что доказывает требуемое.

3. Исследование редуктивных фактор-пространств группы движений в R_4. Вопрос о приводимости найденных симметрических фактор-пространств решается с помощью следующей теоремы.

Теорема (Номидзу [5]). *Пусть G/H — неприводимое симметрическое пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{m}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Тогда либо $\mathfrak{g}$ полупроста, либо $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = 0$.*

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G движений пространства R_4 (и вообще пространства R_n) неполупроста. Легко проверить, что для всех симметрических пространств G/H, соответствующих подгруппам Ли H типов 10, 11, 13, 14 по таблице 1 с алгебрами Ли $\mathfrak{h}$ при $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{m}$, имеет место $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \neq 0$. Следовательно, все симметрические фактор-пространства G/H группы движений пространства R_4 приводимы. Подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ рассматриваемых подгрупп $H \subset G$ не являются максимальными в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Действительно, если G/H — приводимое симметрическое пространство с ad $\mathfrak{h}$-инвариантным подпространством $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$, то, в силу включений

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{m}, \qquad [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{h},$$

подпространство $\mathfrak{h}+\mathfrak{n}$ есть подалгебра в $\mathfrak{g}$, строго содержащая $\mathfrak{h}$.

Как уже отмечалось выше, весь вопрос о приводимости редуктивных несимметрических пространств G/H будет заключаться в том, можно ли разбить множество форм $\{\Theta^a|a = r+1, \ldots, 10\}$, определенных системой (1), на две части $\{\Theta^a\} = \{\Theta^u\} \cup \{\Theta^i\}$ так, чтобы имели место условия (8) или (9).

1°. Пространства однородных орбит R_1 и S_1 (подгруппа H, соответственно, типа 1 и 2 из таблицы 1). Здесь условия (8) и (9) выполняются, если взять $\{\Theta^u\} = \{\Theta^3, \Theta^4, \Theta^6, \Theta^7, \Theta^8, \Theta^9, \Theta^{10}\}$, $\{\Theta^i\} = \{\Theta^2, \Theta^5\}$, и потому данные пространства вполне приводимы.

2°. Пространства одномерных орбит $\Gamma_{(3)}$ и $\Gamma_{(4)}$ винтовых подгрупп (H — типов 19 и 20 из таблицы 2). Если взять $\{\Theta^u\} = \{\Theta^4, \Theta^7, \Theta^9\}$, $\{\Theta^i\} = \{\Theta^2, \Theta^3, \Theta^5, \Theta^6, \Theta^8, \Theta^{10}\}$, то условия (8) и (9) выполняются, в силу чего данные пространства вполне приводимы.

3°. Пространство двумерных орбит $R_1 \times S_1$ (т. е. H — типа 4 из таблицы 1). Данное пространство является приводимым, так как возможно разбиение $\{\Theta^u\} = \{\Theta^3, \Theta^4, \Theta^5, \Theta^6, \Theta^8, \Theta^9\}$, $\{\Theta^i\} = \{\Theta^7, \Theta^{10}\}$, при котором выполняется условие (8).

4°. Пространства двумерных орбит R_2 и S_2 (т. е. H — соответственно типов 6 и 7 из таблицы 1). Данные пространства вполне приводимы, так как возможно разбиение $\{\Theta^u\} = \{\Theta^4, \Theta^6, \Theta^8\}$, $\{\Theta^i\} = \{\Theta^5, \Theta^7, \Theta^9, \Theta^{10}\}$, при котором условия (8) и (9) выполняются.

Для выяснения вопроса приводимости пространства двумерных орбит $S_1 \times S_1$ (т. е. H — типа 5 из таблицы 1) воспользуемся результатом Э. Картана [2], согласно которому всякая неполупростая группа линейных преобразований, какой является стационарная подгруппа H орбиты $S_1 \times S_1$, (см. далее случай 1′), оставляет инвариантным подпространство размерности 1, 2 или 3. Пусть $H_1 \subset O(4)$ является максимальной группой линейных преобразований, оставляющих инвариантным некоторое подпространство $V(R_m) \subset V(R_n)$. По предположению максимальности H_1 имеем $m=3$ или, что то же самое, $m = 1 = 4-3$. Следовательно, $H_1 = O(3)$ и тем самым справедливо $\dim H_1 = 3$ (ср. [2]). Так как для стационарной подалгебры $\mathfrak{h}$ рассматриваемой орбиты $S_1 \times S_1$ имеет место $\dim \mathfrak{h} = 2$, то она не является максимальной в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Это влечет приводимость пространства орбит $S_1 \times S_1$ (см. [6], теорема 10). Вопрос о приводимости пространств орбит S_3 винтовых подгрупп пока остается открытым.

Изучим строение стационарных подалгебр орбит подгрупп $H \subset G$. Знание структурных постоянных $C^\alpha{}_{\beta\gamma}$ алгебры Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ дает возможность найти ее матрицу Киллинга по формуле

$$B_{\alpha\beta} = C^{\delta}{}_{\alpha\gamma} C^{\gamma}{}_{\beta\delta}.$$

Невырожденность $\|B_{\alpha\beta}\|$ укажет на полупростоту рассматриваемой алгебры Ли.

1′. Если для стационарной подалгебры $\mathfrak{h}$ орбиты подгруппы $H \subset G$ выполняется неравенство $\dim \mathfrak{h} \leqslant 2$, то подалгебра $\mathfrak{h}$ всегда неполупроста.

2′. Стационарная подалгебра орбиты R_2 (где $\dim \mathfrak{h}_{R_2} = 3$) неполупроста, так как здесь $d\vartheta^3 = 0 \pmod{\Theta^a}$ и единственным ненулевым элементом матрицы Киллинга является $B_{33} = -2$.

3′. Стационарная подалгебра орбиты S_2 (где $\dim \mathfrak{h}_{S_2} = 3$) проста, так как она изоморфна алгебре Ли группы $O(3)$. Однородное фактор-пространство G/H группы движений G по подгруппе стационарности H рассматриваемой орбиты S_2 является афинно-однородным в смысле П. К. Рашевского (см. [4], теорема 4), т. е. допускает оснащение $\mathfrak{m}$, ортогональное к стационарной подалгебре $\mathfrak{h}$ относительно формы Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}$ (см. [6]). Ортогональное оснащение выделяется из двупараметрического семейства оснащающих подпространств при нулевых значениях параметров.

4′. Стационарные подалгебры орбит $R_2 \times S_1$ (где $\dim \mathfrak{h}_{R_2 \times S_1} = 4$) и $R_1 \times S_2$ (где $\dim \mathfrak{h}_{R_1 \times S_2} = 4$) неполупросты. Действительно, здесь ненулевыми элементами матрицы Киллинга являются $B_{11} = B_{22} = B_{44} = -2$, но все $B_{3\beta} = 0$ и потому $\det \|B_{\alpha\beta}\| = 0$.

5′. Стационарная подалгебра орбиты R_3 (где $\dim \mathfrak{h}_{R_3} = 6$) неполупроста, так как здесь все $B_{1\beta} = B_{2\beta} = B_{3\beta} = 0$ $(\beta = 1, \ldots, 6)$.

6′. Стационарная подалгебра орбиты S_3 (где $\dim \mathfrak{h}_{S_3} = 6$) проста, так как она изоморфна алгебре Ли простой группы $O(4)$. Единственное оснащение $\mathfrak{m}$ подгруппы H, определяющее в G/H структуру симметрического пространства, ортогонально к стационарной подалгебре $\mathfrak{h}$ относительно формы Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$.

7′. Стационарные подалгебры орбит S_3 (где $\dim \mathfrak{h}_{S_3} = 3;\ 4$) винтовых подгрупп полупросты. Действительно, все $B_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$, в то время как $B_{\alpha\alpha} \neq 0$ и потому $\det \|B_{\alpha\beta}\| \neq 0$. Соответствующие фактор-пространства G/H являются аффинно-однородными: единственные оснащения ортогональны к соответствующим стационарным подалгебрам относительно формы Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$.

Литература

1. Джекобсон Н., Алгебры Ли. Москва, 1964.
2. Дынкин Е. Б., Максимальные подгруппы классических групп. Тр. Моск. матем. о-ва, 1952, 1, 39—166.

3. Лумисте Ю., Рийвес К., Перечисление и орбиты подгрупп Ли группы движений в евклидовом пространстве R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 12—30.
4. Рашевский П. К., О геометрии однородных пространств. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1952, **9**, 49—74.
5. Фляйшер А., О двумерных орбитах в действительном P_3 и их однородных пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 96—115.
6. Фляйшер А., Об одном классе редуктивных пространств. Тр. Геометр. семинара. Ин-т науч. информ. АН СССР, 1974, **6**, 267—276.
7. Nomizu K., Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1954, **76**, 33—65.

Поступило
20 I 1975

EUKLEIDILISE RUUMI R_4 LIIKUMISTE RÜHMA HOMOGEENSED FAKTOR-RUUMID

K. Riives ja A. Fljaišer

Resümee

Töös [3] on leitud reaalse eukleidilise ruumi R_4 liikumiste rühma G kõik paarikaupa mittekonjugeeritud sidusad Lie alamrühmad H. Käesolevas töös uuritakse kõigi vastavate homogeensete ruumide G/H omadusi. On näidatud, millised neist on reduktiivsed ja millised viimaste hulgas sümmeetrilised. Lõpuks on üksikasjalikumalt uuritud reduktiivseid ruume.

HOMOGENEOUS FACTOR-SPACES OF THE GROUP OF MOTIONS IN EUCLIDEAN SPACE R_4

K. Riives and A. Fleischer

Summary

In [3] all connected Lie subgroups H unconjugated in pairs are found in the group of motions G in real Euclidean space R_4. In this paper some properties of all corresponding homogeneous factor-spaces G/H are examined. It is shown which of them are reductive and which of the latter are symmetric. At the end the reductive spaces are described in greater detail.

КОНГРУЭНЦИИ 2-ПЛОСКОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА R_4 С МИНИМАЛЬНЫМИ ГРАССМАНОВЫМИ ОБРАЗАМИ

И. Маазикас

Кафедра алгебры и геометрии

Введение

Настоящая работа примыкает к предыдущим статьям [3, 4] автора. В [3] были даны общие основы исследования грассманова образа конгруэнции неизотропных 2-плоскостей пространства ${}^lR_n$, а в [4] исследованы конгруэнции 2-плоскостей пространств R_4 и ${}^1R_4$ с вполне геодезическими грассмановыми образами. В настоящей работе рассматриваются конгруэнции 2-плоскостей в четырехмерном евклидовом пространстве R_4, грассмановы образы которых являются несколько более общими и представляют собой минимальные поверхности. Из них более подробно исследуются такие конгруэнции, образы которых обладают индикатрисами нормальной кривизны, являющимися окружностями. Доказывается, что таких конгруэнций существует среди конгруэнций с нераспадающимися фокальными линиями четыре типа и среди конгруэнций с распадающимися фокальными линиями тоже четыре типа.

§ 1. Конгруэнции с минимальными грассмановыми образами

1. Допустим, что в пространстве R_4 дана конгруэнция $\mathfrak{K}$ 2-плоскостей и она отнесена к такому ортонормированному подвижному реперу $\{M, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$, что начало репера и векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ принадлежат данной 2-плоскости $p \in \mathfrak{K}$, а векторы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ ортогональны к этой 2-плоскости. Тогда формулы инфинитезимального перемещения этого репера можно писать в виде

$$d\boldsymbol{M} = \omega^i \boldsymbol{e}_i, \qquad d\boldsymbol{e}_i = \omega^j{}_i \boldsymbol{e}_j, \qquad \omega^j{}_i + \omega^i{}_j = 0, \qquad i, j, \ldots = 1, 2, 3, 4.$$

В этом случае систему форм $\omega^3{}_1$, $\omega^4{}_1$, $\omega^3{}_2$, $\omega^4{}_2$ можно рассматривать как кобазис для грассманова многообразия $G_{2,4}$ двумерных подпространств, проходящих через некоторую фиксированную точку пространства R_4. Обозначим элементы дуального базиса, которые мы называем *векторами*, через $e^1{}_3$, $e^1{}_4$, $e^2{}_3$ и $e^2{}_4$.

Пусть конгруэнция $\mathfrak{K}$ определяется системой (см. [2, 3])

$$\omega^3 = \pi\omega^3{}_1 + \varrho\omega^4{}_1, \qquad \omega^4 = \sigma\omega^3{}_1 + \tau\omega^4{}_1, \tag{1.1}$$

$$\omega^3{}_2 = z\omega^4{}_1, \qquad \omega^4{}_2 = \zeta\omega^3{}_1. \tag{1.2}$$

В таком случае фокальная линия на каждой 2-плоскости $p \in \mathfrak{K}$ имеет уравнение

$$(x^1)^2 - z\zeta(x^2)^2 + (\pi+\tau)x^1 - (\zeta\varrho + z\sigma)x^2 + \pi\tau - \varrho\sigma = 0. \tag{1.3}$$

Для 2-форм кручения и кривизны внутренней связности канонического расслоения $\Sigma(\mathfrak{K})$ над $\mathfrak{K}$ получаем [2] выражения

$$\Sigma^1 = T^1\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1, \qquad \Sigma^2 = T^2\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1,$$

$$\Omega^1{}_1 = \Omega^2{}_2 = 0, \qquad \Omega^2{}_1 = -\Omega^1{}_2 = R\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1,$$

где

$$T^1 = \varrho - \sigma, \qquad T^2 = \tau\zeta - \pi z, \qquad R = \zeta - z.$$

В дальнейшем мы величину R называем *кривизной* конгруэнции $\mathfrak{K}$.

В случае, когда $R \neq 0$, существует на $p \in \mathfrak{K}$ единственная точка T, которую мы называем *точкой нулевого кручения*, в которой кручение названной связности равно нулю. Она имеет координаты

$$t^1 = \frac{\pi z - \tau\zeta}{\zeta - z}, \qquad t^2 = \frac{\varrho - \sigma}{\zeta - z}. \tag{1.4}$$

Если на каждой $p \in \mathfrak{K}$ фиксирована какая-нибудь точка, то к каждой $p \in \mathfrak{K}$ присоединяется 2-плоскость, ортогональная к данной, и возникает конгруэнция этих 2-плоскостей (см. [3]), которую мы называем конгруэнцией 2-плоскостей, присоединенной к данной конгруэнции и обозначим через $\mathfrak{N}$. Если начало репера на $p \in \mathfrak{K}$ перенесена в эту точку, то имеем

$$\omega^1 = p\omega^3{}_1 + r\omega^4{}_1, \qquad \omega^2 = q\omega^3{}_1 + s\omega^4{}_1.$$

Фокальная линия на каждой 2-плоскости $q \in \mathfrak{N}$ имеет уравнение

$$z(x^3)^2 - \zeta(x^4)^2 - (q + zp)x^3 + (s + \zeta r)x^4 + pq - rs = 0. \tag{1.5}$$

Для 2-форм кривизны векторного расслоения $\mathfrak{N}(\mathfrak{K})$ нормальных над $\mathfrak{K}$ векторов получаем выражения (см. [3])

$$\Omega^3{}_3 = \Omega^4{}_4 = 0, \qquad \Omega^4{}_3 = -\Omega^3{}_4 = S\omega^3{}_1 \wedge \omega^4{}_1,$$

где

$$S = z\zeta - 1.$$

В дальнейшем величину S называем *кривизной* конгруэнции $\mathfrak{N}$.

2. В [3] показано, что матрицей основного метрического тензора для грассманова образа K изучаемой конгруэнции $\mathfrak{K}$ в грассмановом многообразии $G_{2,4}$ относительно поля реперов $\{p, f_3, f_4\}$, является

$$\|G_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} 1+\zeta^2 & 0 \\ 0 & 1+z^2 \end{Vmatrix},$$

где $\alpha, \beta, \ldots = 3, 4$, а

$$f_3 = e^1{}_3 + \zeta e^2{}_4, \qquad f_4 = e^1{}_4 + z e^2{}_3,$$

касательные к K векторы.

Матрицей основного метрического тензора нормального над K расслоения $N(K)$ является

$$\|H_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} (1+z^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (1+\zeta^2)^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Базис нормального к K в точке $p \in K$ подпространства $N_p(K)$ состоит из векторов

$$h_3 = (1+z^2)^{-1}(-z e^1{}_4 + e^2{}_3),$$
$$h_4 = (1+\zeta^2)^{-1}(-\zeta e^1{}_3 + e^2{}_4).$$

Внешнее дифференцирование уравнений (1.2) и последующее применение леммы Картана дают

$$\begin{aligned} (z\zeta+1)\,\omega^2{}_1 - (z+\zeta)\,\omega^4{}_3 &= a\omega^3{}_1 + b\omega^4{}_1, \\ dz &= b\omega^3{}_1 + c\omega^4{}_1, \\ d\zeta &= \gamma\omega^3{}_1 + \beta\omega^4{}_1, \\ (z\zeta+1)\,\omega^2{}_1 + (z+\zeta)\,\omega^4{}_3 &= \beta\omega^3{}_1 + \alpha\omega^4{}_1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

В статье [3] показано, что относительно вышеуказанного поля реперов компонентами второго фундаментального тензора для K будут

$$\|B^3{}_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} a & b \\ b & c \end{Vmatrix}, \qquad \|B^4{}_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} \gamma & \beta \\ \beta & \alpha \end{Vmatrix}.$$

Компоненты $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ и $K^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ тензоров внутренней кривизны для K и $N(K)$, соответственно, выражаются по следующим формулам

$$R^4{}_{334} = A(1+z^2)^{-1}, \qquad R^3{}_{434} = -A(1+\zeta^2)^{-1},$$
$$R^3{}_{334} = 0, \qquad R^4{}_{434} = 0,$$

где

$$A = \frac{1}{2}\left[(b^2 - ac)(1+z^2)^{-1} + (\beta^2 - \alpha\gamma)(1+\zeta^2)^{-1}\right],$$

и

$$K^3{}_{334} = 0, \qquad K^4{}_{434} = 0,$$
$$K^4{}_{334} = B(1+z^2)^{-1}, \qquad K^3{}_{434} = -B(1+\zeta^2)^{-1},$$

где

$$B=\frac{1}{2}\left[(a\beta-b\gamma)(1+\zeta^2)^{-1}+(b\alpha-c\beta)(1+z^2)^{-1}\right].$$

Средняя кривизна H^2 для K равна

$$H^2=\frac{1}{4}G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}B^{\lambda}{}_{\alpha\beta}B^{\mu}{}_{\gamma\delta}H_{\lambda\mu}=$$

$$=\frac{1}{4(1+z^2)}\left(\frac{a}{1+\zeta^2}+\frac{c}{1+z^2}\right)^2+\frac{1}{4(1+\zeta^2)}\left(\frac{\gamma}{1+\zeta^2}+\frac{\alpha}{1+z^2}\right)^2,$$

где $G^{\alpha\beta}G_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}{}_{\gamma}$; гауссова кривизна равна

$$R=-G^{\beta\gamma}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\alpha}=A(1+z^2)^{-1}(1+\zeta^2)^{-1},$$

и скалярная нормальная кривизна K_N равна

$$K_N=B^2(1+z^2)^{-2}(1+\zeta^2)^{-2}.$$

Пусть $(X)_p=X^3(f_3)_p+X^4(f_4)_p$ — произвольный ненулевой вектор из касательного к K пространства $T_p(K)$. Тогда вектор

$$(N)_p=\frac{B^{\alpha}{}_{\beta\gamma}X^{\beta}X^{\gamma}}{G_{\beta\gamma}X^{\beta}X^{\gamma}}(h_\alpha)_p$$

называется *вектором нормальной кривизны* для K в точке p. Если $(X)_p$ является единичным вектором, т. е.

$$(\zeta^2+1)(X^3)^2+(z^2+1)(X^4)^2=1,$$

то можем последнее соотношение параметризировать следующим образом

$$X^3=(1+\zeta^2)^{1/2}\cos\varphi,\qquad X^4=(1+z^2)^{1/2}\sin\varphi,$$

где φ — угол, образованный векторами $(f_3)_p$ и $(X)_p$. При изменении φ конец вектора $(N)_p$ описывает в $N_p(K)$ некоторую кривую, называемую *индикатрисой нормальной кривизны*. Его параметрическими уравнениями в репере $\{p, h_3, h_4\}$ будут

$$Y^3=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+\zeta^2}+\frac{c}{1+z^2}\right)+\frac{b\sin 2\varphi}{\sqrt{(1+\zeta^2)(1+z^2)}}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+\zeta^2}-\frac{c}{1+z^2}\right)\cos 2\varphi,$$
$$Y^4=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{1+\zeta^2}+\frac{\alpha}{1+z^2}\right)+\frac{\beta\sin 2\varphi}{\sqrt{(1+\zeta^2)(1+z^2)}}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{1+\zeta^2}-\frac{\alpha}{1+z^2}\right)\cos 2\varphi.$$

3. Поверхность K является *минимальной* (см. [5], стр. 100) тогда и только тогда, когда ее средняя кривизна равна нулю

(см. [5], стр. 183). Из выражения для H^2 видно, что K является минимальной поверхностью тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} a(1+z^2)+c(1+\zeta^2)=0, \\ \gamma(1+z^2)+\alpha(1+\zeta^2)=0. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Исследуя совместность систем (1.1—2) при условиях (1.8), получаем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Конгруэнция $\mathfrak{K}$ в R_4, грассманов образ K которой в $G_{2,4}$ является минимальной поверхностью, существует с произволом двух функций двух аргументов.*

В силу (1.8) можем уравнение (1.7) индикатрисы нормальной кривизны для минимальной K переписать в виде

$$Y^3=b[(1+\zeta^2)(1+z^2)]^{-1/2}\sin 2\varphi+a(1+\zeta^2)^{-1}\cos 2\varphi,$$
$$Y^4=\beta[(1+\zeta^2)(1+z^2)]^{-1/2}\sin 2\varphi-\alpha(1+\zeta^2)^{-1}\cos 2\varphi,$$

В случае $b\alpha(1+\zeta^2)+a\beta(1+z^2)\neq 0$ она является эллипсом или окружностью и ее уравнение после исключения параметра имеет вид

$$\begin{aligned} &[\alpha^2(1+z^2)^{-2}+\beta^2(1+\zeta^2)^{-1}(1+z^2)^{-1}](Y^3)^2+ \\ &+2(a\alpha-b\beta)[(1+\zeta^2)(1+z^2)]^{-1}Y^3Y^4+ \\ &+[a^2(1+\zeta^2)^{-2}+b^2(1+\zeta^2)^{-1}(1+z^2)^{-1}](Y^4)^2= \\ &=[(1+\zeta^2)(1+z^2)]^{-1}[b\alpha(1+z^2)^{-1}+a\beta(1+\zeta^2)^{-1}]^2. \end{aligned} \qquad (1.9)$$

§ 2. Конгруэнции с минимальными грассмановыми образами, индикатрисы которых — окружности

1. В этом параграфе предполагаем, что индикатрисы нормальной кривизны для K являются окружностями. Из уравнения (1.9) видно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы имели место

$$\begin{aligned} a\alpha-b\beta=0, \\ \alpha^2(1+\zeta^2)+\beta^2(1+z^2)=(1+z^2)a^2+(1+\zeta^2)b^2. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Параметризируем первое из этих соотношений следующим образом:

$$\alpha=\varrho b, \qquad \beta=\varrho a. \qquad (2.2)$$

Заметим, что этим никакие конгруэнции, которые принадлежат к рассматриваемому подклассу, из рассмотрения не исключаются. Действительно, в предположении $a=b=0$ из второго уравнения (2.1) следует $\alpha=\beta=0$. В последнем случае K является вполне геодезическим. Поскольку конгруэнции с вполне геодезическими грассмановыми образами подробно исследованы в [4], то здесь мы исключаем их из рассмотрения.

Подставляя соотношения (2.2) во второе уравнение системы (2.1), получаем

$$(\varrho^2-1)\left[b^2(1+\zeta^2)+a^2(1+z^2)\right]=0.$$

В случае, когда K не является вполне геодезическим, последнее равенство выполняется только при

$$\varrho^2=1. \tag{2.3}$$

Для определения всех конгруэнций $\mathfrak{K}$, принадлежащих к рассматриваемому подклассу, надо теперь вывести условия совместности систем (1.1—2) при условиях (2.2) и (2.3). Результаты можно выразить в виде следующих теорем.

Теорема 2.1. *Если конгруэнция $\mathfrak{K}$ пространства R_4 имеет нераспадающие фокальные линии, то ее грассманов образ K является минимальной поверхностью, индикатриса нормальной кривизны которой является окружностью, тогда и только тогда, когда*

1) *либо фокальные линии на 2-плоскостях конгруэнции $\mathfrak{K}$ — окружности;*

2) *либо $\mathfrak{K}$ является конгруэнцией, у которой поля единичных векторов в главных направлениях фокальных линий на ее 2-плоскостях в расслоении $\mathfrak{T}(\mathfrak{K})$ параллельны;*

3) *либо точки T нулевого кручения на 2-плоскостях конгруэнции $\mathfrak{K}$ совпадают с центрами фокальных линий на этих 2-плоскостях;*

4) *либо присоединенная к $\mathfrak{K}$ конгруэнция $\mathfrak{N}$ является такой, что поля единичных векторов в главных направлениях фокальных линий на 2-плоскостях конгруэнции $\mathfrak{N}$ в расслоении $\mathfrak{N}(\mathfrak{K})$ параллельны.*

Доказательство. Если фокальные линии на 2-плоскостях $p\in\mathfrak{K}$ — нераспадающие, то имеем

$$(\pi-\tau)^2+(\zeta\varrho-z\sigma)^2\neq 0. \tag{2.4}$$

Пусть грассмановым образом конгруэнции $\mathfrak{K}$ является указанная в теореме минимальная поверхность. Тогда имеют место соотношения (1.8), (2.2) и (2.3). При $\varrho=-1$ система (1.6) принимает вид

$$\begin{aligned}
&(z\zeta+1)\,\omega^2{}_1-(z+\zeta)\,\omega^4{}_3=a\omega^3{}_1+b\omega^4{}_1,\\
&\qquad dz=b\omega^3{}_1-a(1+z^2)(1+\zeta^2)^{-1}\omega^4{}_1,\\
&\qquad d\zeta=b(1+\zeta^2)(1+z^2)^{-1}\omega^3{}_1-a\omega^4{}_1,\\
&(z\zeta+1)\,\omega^2{}_1+(z+\zeta)\,\omega^4{}_3=-a\omega^3{}_1-b\omega^4{}_1,
\end{aligned}$$

и из ее крайних уравнений следует, что $(z\zeta+1)\omega^2{}_1=0$. Здесь при $z\zeta+1=0$ получаем немедленно, что системы (1.1) и

$$\begin{aligned}
&\omega^3{}_2=z\omega^4{}_1,\qquad \omega^4{}_2=-z^{-1}\omega^3{}_1,\\
&(z^{-1}-z)\,\omega^4{}_3=a\omega^3{}_1+b\omega^4{}_1,\\
&\qquad dz=b\omega^3{}_1-az^2\omega^4{}_1
\end{aligned} \tag{2.5}$$

являются совместными и определяют конгруэнцию с названным грассмановым образом. Уравнение (1.3) в силу $z\zeta+1=0$ принимает вид

$$\left(x^1+\frac{\pi+\tau}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{\sigma z^2-\varrho}{2z}\right)^2=\left(\frac{\pi-\tau}{2}\right)^2+\left(\frac{\varrho+\sigma z^2}{2z}\right)^2,$$

откуда в силу (2.4) видно, что фокальные линии конгруэнции $\mathfrak{K}$ — окружности.

В случае, когда $\omega^2{}_1=0$, получаем после внешнего дифференцирования этого уравнения $z=\zeta$. Вследствие этого, системы (1.1) и

$$\begin{gathered}\omega^3{}_2=z\omega^4{}_1,\qquad \omega^4{}_2=z\omega^3{}_1,\qquad \omega^2{}_1=0,\\ 2z\omega^4{}_3=-a\omega^3{}_1-b\omega^4{}_1,\\ dz=b\omega^3{}_1-a\omega^4{}_1\end{gathered}\tag{2.6}$$

являются совместными и определяют в R_4 тоже конгруэнцию $\mathfrak{K}$ с названным грассмановым образом. В силу $\omega^2{}_1=0$ поля векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ являются в расслоении $\mathfrak{T}(\mathfrak{K})$ параллельными.

При $\varrho=1$ система (1.6) в силу (1.8) и (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned}&(z\zeta+1)\,\omega^2{}_1-(z+\zeta)\,\omega^4{}_3=a\omega^3{}_1+b\omega^4{}_1,\\ &\qquad dz=b\omega^3{}_1-a\,(1+z^2)\,(1+\zeta^2)^{-1}\omega^4{}_1,\\ &\qquad d\zeta=-b\,(1+\zeta^2)\,(1+z^2)^{-1}\omega^3{}_1+a\omega^4{}_1,\\ &(z\zeta+1)\,\omega^2{}_1+(z+\zeta)\,\omega^4{}_3=a\omega^3{}_1+b\omega^4{}_1,\end{aligned}$$

и из ее крайних уравнений следует $(z+\zeta)\,\omega^4{}_3=0$. Здесь при $z+\zeta=0$ получаем сразу, что системы (1.1) и

$$\begin{gathered}\omega^3{}_2=z\omega^4{}_1,\qquad \omega^4{}_2=-z\omega^3{}_1,\\ (1-z^2)\,\omega^2{}_1=a\omega^3{}_1+b\omega^4{}_1,\\ dz=b\omega^3{}_1-a\omega^4{}_1\end{gathered}\tag{2.7}$$

являются совместными и определяют в R_4 конгруэнцию с указанным образом. Из уравнения (1.3) и выражений (1.4) видно, что в этом случае точка T совпадает с центром фокальной линии.

При $\omega^4{}_3=0$ получаем после внешнего дифференцирования этого равенства $z\zeta-1=0$. Системы (1.1) и

$$\begin{gathered}\omega^3{}_2=z\omega^4{}_1,\qquad \omega^4{}_2=z^{-1}\omega^3{}_1,\qquad \omega^4{}_3=0,\\ 2\omega^2{}_1=a\omega^3{}_1+b\omega^4{}_1,\\ dz=b\omega^3{}_1-az^2\omega^4{}_1\end{gathered}\tag{2.8}$$

являются совместными и определяют в R_4 конгруэнцию $\mathfrak{K}$ с названным грассмановым образом. В силу $\omega^4{}_3=0$ поля векторов $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ являются в расслоении $\mathfrak{N}(\mathfrak{K})$ параллельными.

Перейдем к доказательству обратных утверждений теоремы. В случае, когда фокальные линии на 2-плоскостях $p\in\mathfrak{K}$ —

окружности, имеют место $z\zeta+1=0$ и (2.4). В силу этого равенства из (1.6) получается

$$\beta=-a, \quad \alpha=-b, \quad b=\gamma z^2, \quad c=\beta z^2.$$

Поскольку теперь удовлетворены соотношения (1.8) и (2.1), то грассмановым образом этой конгруэнции является в теореме указанная минимальная поверхность.

Допустим, что выполняется предположение 2). Из (1.3) видно, что главными направлениями фокальной линии являются направления векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Из требования параллельности этих векторных полей в расслоении $\mathfrak{T}(\mathfrak{K})$ вытекает, что $\omega^2{}_1=0$. Внешнее дифференцирование этого равенства дает $\zeta=z$, вследствие чего из системы (1.6) получаем

$$a=-\beta, \quad b=-\alpha, \quad b=\gamma, \quad c=\beta,$$

и доказательство завершается, как в случае 1).

В случае, когда T совпадает с центром фокальной линии, имеем

$$(\pi-\tau)(z+\zeta)=0, \quad (\zeta\varrho-z\sigma)(z+\zeta)=0.$$

В силу (2.4) из последних равенств заключаем, что $z+\zeta=0$. Из системы (1.6) получаем тогда

$$a=\beta, \quad b=\alpha, \quad b=-\gamma, \quad c=-\beta,$$

и доказательство завершается как в случае 1).

При выполнении предположения 4) должно иметь место $\omega^4{}_3=0$. Внешнее дифференцирование этого равенства дает $z\zeta=1$. Из системы (1.6) получаем тогда, что

$$a=\beta, \quad b=\alpha, \quad b=-\gamma z^2, \quad c=-\beta z^2,$$

и опять доказательство завершается как в случае 1). Теорема доказана.

Замечание 1. В ходе доказательства необходимости утверждений теоремы 2.1 найдены все конгруэнции, грассманов образ в $G_{2,4}$ которых является минимальной поверхностью, индикатриса нормальной кривизны которой — окружность; они определяются системой (1.1) и одной из систем (2.5), (2.6), (2.7) или (2.8).

Замечание 2. Заметим, что фокальные линии всех конгруэнций, грассманов образ которых является указанной минимальной поверхностью, центральные. Действительно, в случаях 1) и 4) имеем, соответственно, $z\zeta=-1$ и $z\zeta=1$, а в случаях 2) и 3) дополнительное предположение $z\zeta=0$ привело бы к равенствам $z=\zeta=0$, а это, в свою очередь, к конгруэнциям с вполне геодезическими грассмановыми образами.

2. Допустим, что фокальные линии на 2-плоскостях конгруэнции $\mathfrak{K}$ — центральные и распадающиеся. Из уравнения (1.3) получается, что в этом случае имеют место

$$z\varrho \neq 0, \tag{2.9}$$

$$\pi - \tau = 0, \quad \varrho\zeta - \sigma z = 0. \tag{2.10}$$

Легко видеть, что при выполнении равенств (2.10) конгруэнция $\mathfrak{K}$ является конгруэнцией касательных 2-плоскостей к двумерной поверхности $\mathfrak{K}^*$ (последняя может быть вырождена в линию или точку). Помещая начало репера на $p \in \mathfrak{K}$ в точку касания, имеем

$$\pi + \tau = 0, \quad \varrho\zeta + \sigma z = 0.$$

Из последних двух равенств и из (2.10) в силу (2.9) вытекает, что $\pi = \tau = \varrho = \sigma = 0$. Теперь имеем $\omega^3 = \omega^4 = 0$ и продолжение этих уравнений дает нам

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \lambda\zeta\omega^3{}_1 + \mu z\omega^4{}_1, \\ \omega^2 &= \mu\omega^3{}_1 + \lambda\omega^4{}_1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Обозначим

$$C = \lambda^2\zeta - \mu^2 z.$$

Если $\mathfrak{K}^*$ не вырождается в линию или в точку, то имеем $C \neq 0$, и из уравнений (2.11) тогда получается

$$\omega^3{}_1 = C^{-1}(\lambda\omega^1 - \mu z\omega^2), \quad \omega^4{}_1 = C^{-1}(-\mu\omega^1 + \lambda\zeta\omega^2). \tag{2.12}$$

Теперь при помощи (2.12) можем (1.2) переписать в виде

$$\omega^3{}_2 = C^{-1}(-\mu z\omega^1 + \lambda z\zeta\omega^2), \quad \omega^4{}_2 = C^{-1}(\lambda\zeta\omega^1 - \mu z\zeta\omega^2).$$

Поверхность $\mathfrak{K}^*$ в R_4 обладает следующими четырмя независимыми инвариантами (см. [1], стр. 33):

1) средняя кривизна

$$^*H^2 = (\lambda^2 + \mu^2)(1 + z\zeta)^2(4C)^{-2}; \tag{2.13}$$

2) гауссова кривизна

$$^*R = C^{-1}(z - \zeta);$$

3) скалярная нормальная кривизна [1]

$$^*K_N = C^{-2}(1 - z\zeta)^2;$$

4) и

$$I_4 = 4C^{-2}z\zeta.$$

Имеет место

Теорема 2.2. *Если $\mathfrak{K}$ является конгруэнцией касательных 2-плоскостей к двумерной поверхности $\mathfrak{K}^*$, то грассманов образ этой конгруэнции в $G_{2,4}$ является минимальной поверхностью, индикатриса нормальной кривизны которой — окружность, тогда и только тогда, когда*

---

[1] В [1] вместо K_N рассматривается инвариант $I_3 = (K_N)^{1/2}$.

1) *либо* $\mathfrak{K}^*$ — *минимальная поверхность;*

2) *либо* $\mathfrak{K}^*$ — *поверхность нулевой гауссовой кривизны, у которой связность в расслоении* $\mathfrak{T}(\mathfrak{K})$ *плоская;*

3) *либо инварианты* $^*R$ *и* I_4 *поверхности* $\mathfrak{K}^*$ *связаны соотношением* $^*R^2=-I_4$;

4) *либо* $\mathfrak{K}^*$ — *поверхность нулевой скалярной нормальной кривизны, у которой связность в расслоении* $\mathfrak{N}(\mathfrak{K})$ *плоская.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}$ — конгруэнция касательных 2-плоскостей к поверхности $\mathfrak{K}^*$. Из (2.13) видно, что $^*H^2=0$ тогда и только тогда, когда

$$z\zeta+1=0. \tag{2.14}$$

Предположения 2) и 4) выполнены только при

$$\omega^2{}_1=0, \tag{2.15}$$

$$\omega^4{}_3=0, \tag{2.16}$$

соответственно, и $^*R^2=-I_4$, тогда и только тогда, когда

$$z+\zeta=0. \tag{2.17}$$

Поскольку в ходе доказательства теордемы 2.1 выяснено, что при выполнении одной из равенств (2.14), (2.15), (2.16) или (2.17) образ K конгруэнции $\mathfrak{K}$ является минимальной поверхностью, то теорема 2.2 доказана.

3. Вычисляем гауссову и скалярную нормальную кривизну для этих минимальных поверхностей. Для поверхностей K, определяемых системами (2.6) и (2.7), получаем

$$R=-2(1+z^2)^{-3}(a^2+b^2), \qquad K_N=4(1+z^2)^{-6}(a^2+b^2)^2,$$

а для поверхностей, определяемых системами (2.5) и (2.8) имеем

$$R=-2z^2(1+z^2)^{-3}(a^2z^2+b^2), \qquad K_N=4z^4(1+z^2)^{-6}(a^2z^2+b^2)^2.$$

Как мы видим, указанные поверхности таковы, что у них $K_N=R^2$. Верно и обратное. Итак, имеет место

Теорема 2.3. *Если образ K конгруэнции $\mathfrak{K}$ пространства R_4 в $G_{2,4}$ является минимальной поверхностью, то индикатриса нормальной кривизны для K является окружностью тогда и только тогда, когда $K_N=R^2$.*

Доказательство. Осталось доказать только достаточность утверждения этой теоремы. Для минимальных поверхностей K, учитывая (1.8), получаем

$$R=-[(1+\zeta^2)(1+z^2)]^{-1}[(a^2+\beta^2)(1+\zeta^2)^{-1}+(b^2+\alpha^2)(1+z^2)^{-1}],$$

$$K_N=4[(1+\zeta^2)(1+z^2)]^{-2}[a\beta(1+\zeta^2)^{-1}+b\alpha(1+z^2)^{-1}]^2.$$

Равенство $R^2=K_N$ влечет здесь за собой соотношения

$$ab-\alpha\beta=0, \qquad a^2-\beta^2=0,$$

$$a\alpha-b\beta=0, \qquad b^2-\alpha^2=0,$$

из которых следует, либо $\alpha = b$ и $\beta = a$, либо $\alpha = -b$ и $\beta = -a$. Дальше доказательство совпадает с доказательством теоремы 2.1.

Литература

1. Березина Л. Я., К теории поверхностей многомерного пространства. Рига, 1965.
2. Лумисте Ю. Г., К теории многообразий плоскостей евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 12—46.
3. Маазикас И., Грассманово отображение конгруэнции 2-плоскостей в евклидовых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **355**, 57—75.
4. Маазикас И., Конгруэнции 2-плоскостей с вполне геодезическими грассмановыми образами. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **355**, 76—85.
5. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы в дифференциальной геометрии, Т. II. Москва, 1948.

Поступило
15 I 1975

RUUMI R_4 KAHEMÕÕTMELISTE TASANDITE KONGRUENTSID, MILLE GRASSMANNI KUJUTISEKS ON MINIMAALPIND

I. Maasikas

Resümee

Artiklis jätkatakse artikleis [3, 4] alustatud ruumi R_4 2-tasandite kongruentsi Grassmanni kujutise uurimist. Leitakse kõik kongruentsid, mille kujutiseks Grassmanni muutkonnas $G_{2,4}$ on seline minimaalpind, mille normaalkõveruse indikatrissiks on ringjoon. Näidatakse, et ruumis R_4 eksisteerib neli erinevat tüüpi nimetatud omadusega 2-tasandite kongruentsi. Eraldi teoreemis iseloomustatakse neid kahemõõtmelisi pindu ruumis R_4, mille puutujatasandite kongruentsi Grassmanni kujutiseks on nimetatud minimaalpind.

DIE KONGRUENZEN DER ZWEIDIMENSIONALEN EBENEN IM R_4, DEREN GRASSMANNSCHE ABBILDUNG EINE MINIMALFLÄCHE IST

I. Maasikas

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden alle Kongruenzen von zweidimensionalen Ebenen im euklidischen Raum R_4 ausgesucht, deren grassmannsche Abbildung [3] in der grassmannschen Mannigfaltigkeit solche Minimalfläche ist, welcher Normalkrümmungsindikatrix ein Kreis ist. Diese Kongruenzen werden durch ihre Fokal- und Krümmungseigenschaften geometrische charakterisiert. Zuletzt werden alle zweidimensionalen Flächen in R_4 ausgesucht, deren Tangentialebenenkongruenz die obengenannte Eigenschaft hat.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ V_3 РАНГА 2 СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ В НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ${}^{l}S_N$

Э. Абель

Кафедра алгебры и геометрии

В настоящей работе исследуются некоторые классы трехмерных неизотропных поверхностей V_3 ранга 2 в неевклидовом пространстве ${}^{l}S_N$. Такие поверхности V_3 рассматривались нами в [1]. Они обладают, как известно, двухпараметрическим семейством прямолинейных образующих, вдоль которых касательные 3-плоскости постоянны. Такое семейство часто называется фокальной псевдоконгруэнцией, оно состоит из общих касательных двух 2-мерных поверхностей (вещественных, мнимых или совпадающих) — своих фокальных поверхностей. Если в [1] главное внимание было уделено вопросам метрической теории фокальных псевдоконгруэнций с неизотропными образующими в ${}^{l}S_N$ (в частности были выделены классы рибокуровых и нормальных V_3 ранга 2, а также V_3 класса C), то в настоящей работе приведены в основном результаты, касающиеся фокальных поверхностей рассматриваемой V_3 ранга 2 в ${}^{l}S_N$. Некоторые из них являются аналогами результатов, полученных в [3—4] для V_3 ранга 2 в евклидовом R_4. Выделяются некоторые классы поверхностей V_3 ранга 2 с постоянными гауссовыми кривизнами или кручениями фокальной подповерхности, в частности, с нулевыми гауссовыми кривизнами или кручениями. Полученные результаты сформулированы в виде теорем 1—5. При выводе этих результатов применяется аппарат, подготовленный в [1], его краткое изложение будет дан здесь в § 1.

§ 1. Предварительные понятия

Автополярный подвижной репер $\{M_I\}$ $(I, K, \ldots, = 0, \ldots, N)$ присоединим к неизотропной поверхности V_3 ранга 2 с неизотропными образующими в ${}^{l}S_N$ так (см. [1]), чтобы две точки M_i $(i, j, \ldots, = 0, 1)$ принадлежали прямолинейной образующей, две точки M_α $(\alpha, \beta, \ldots, = 2, 3)$ — касательной 3-плоскости к V_3 в точках этой образующей, а остальные $(N-3)$ точки M_p $(p, q, \ldots, = 4, \ldots, N)$ принадлежат $(N-4)$-мерной плоскости, полярной к касательной плоскости $[M_i, M_\alpha]$. Кроме того предполагаем, что соответствующий базис $\{\boldsymbol{M}_I\}$ состоит из нормированных векторов. Тогда

$$(\boldsymbol{M}_J, \boldsymbol{M}_K) = g_{JK} = \begin{cases} 0, & \text{если } J \neq K, \\ 1 \text{ или } -1, & \text{если } J = K, \end{cases} \tag{1.1}$$

и поэтому в формулах

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M}_J &= \omega^K{}_J \boldsymbol{M}_K, \\ d\omega^K{}_J &= \omega^L{}_J \wedge \omega^K{}_L, \end{aligned} \tag{1.2}$$

имеют место

$$\omega^K{}_J = -\varepsilon_{JK}\omega^J{}_K \qquad (\varepsilon_{JK} = g_{JJ} \cdot g_{KK}). \tag{1.3}$$

Рассматриваемая поверхность V_3 ранга 2 определяется следующей системой уравнений (см. [1]):

$$\begin{aligned} &\omega^p{}_i = 0, \qquad \omega^\alpha{}_i = \lambda^\alpha{}_{i\beta}\omega^\beta{}_0, \qquad \lambda^\alpha{}_{0\beta} = \delta^\alpha{}_\beta, \\ &\omega^p{}_\alpha = \Lambda^p{}_{\alpha\beta}\omega^\beta{}_0, \\ &\lambda^\alpha{}_{1\beta}\Lambda^p{}_{\alpha\gamma} = \lambda^\alpha{}_{1\gamma}\Lambda^p{}_{\alpha\beta}, \qquad \Lambda^p{}_{\alpha\beta} = \Lambda^p{}_{\beta\alpha}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\omega^1{}_0$, $\omega^2{}_0$ линейно независимы.

Точка X фокальной поверхности определяется вектором $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M}_0 + x\boldsymbol{M}_1$, удовлетворяющим при некотором $\omega^1{}_0 : \omega^2{}_0$ условию

$$d\boldsymbol{X} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \boldsymbol{M}_i).$$

Отсюда для параметра x фокуса F получается уравнение

$$\det \|\lambda^\alpha{}_{1\beta}\|\, x^2 + (\lambda^2{}_{12} + \lambda^3{}_{13})x + 1 = 0. \tag{1.5}$$

Следовательно, на каждой образующей $[M_0, M_1]$ существуют два фокуса (вещественных, мнимых или совпадающих). Точки образующей $[M_0, M_1]$, равноудаленные от фокусов, называются *центрами*. Как показано в [1], в общем случае на каждой образующей имеется два полярно сопряженных центра C_1 и C_2.

В дальнейшем предполагается, что

1) $\det \|\lambda^\alpha{}_{1\beta}\| \neq 0$; этим исключаются V_3 с вырожденной фокальной поверхностью;

2) $(\lambda^2{}_{12} + \lambda^3{}_{13})^2 + (\det \|\lambda^\alpha{}_{1\beta}\| - \varepsilon_{01})^2 \neq 0$, т. е. исключаются V_3, фокусы которой лежат на абсолюте;

3) $(\lambda^2{}_{12} - \lambda^3{}_{13})^2 + (\lambda^2{}_{13} + \varepsilon_{23}\lambda^3{}_{12})^2 \neq 0$, т. е. исключаются V_3, горловые точки которой не зависят от направления $\omega^1{}_0 : \omega^2{}_0$ (см. [1]).

Поверхность V_3 ранга 2 удовлетворяющая требованиям 1)—3) будем называть *поверхностью V_3 ранга 2 общего типа.*

Для поверхности V_3 ранга 2 общего типа можно провести частичную канонизацию репера, фиксируя для каждой образующей вершины M_i и M_α на касательной плоскости к V_3 следующим образом: точки M_0 и M_1 находятся в центрах образующей, а сама поверхность V_3 ранга 2 общего типа отнесено к распределительным подповерхностям (см. [1]). Так выбранный репер называется *центральным репером* и такая частичная канонизация определяется условиями

$$\lambda^2{}_{12}=\lambda^3{}_{13}=0. \tag{1.6}$$

Таким образом, поверхность V_3 ранга 2 общего типа в ${}^lS_N$ определяется в центральном репере системой (1.4), где учтены условия (1.6) и где

$$\begin{aligned} &\varrho^2=\lambda^2{}_{13}\lambda^3{}_{12}\neq 0,\\ &\nu=\lambda^2{}_{13}\lambda^3{}_{12}+\varepsilon_{01}\neq 0,\\ &\mu=\lambda^2{}_{13}+\varepsilon_{23}\lambda^3{}_{12}\neq 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Тогда продолженная система уравнений (1.4) при условиях (1.6—7) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} &\omega^1{}_0=\lambda^1{}_{0\beta}\omega^\beta{}_0,\\ &\omega^3{}_2=\lambda^3{}_{2\beta}\omega^\beta{}_0,\\ &d\lambda^2{}_{13}=(\nu\lambda^1{}_{03}-\mu\lambda^3{}_{23})\,\omega^2{}_0+\lambda^2{}_{133}\omega^3{}_0,\\ &d\lambda^3{}_{12}=\lambda^3{}_{122}\omega^2{}_0+(\nu\lambda^1{}_{02}+\mu\lambda^3{}_{23})\,\omega^3{}_0,\\ &d\Lambda^p{}_{22}=-\Lambda^q{}_{22}\omega^p{}_q+[\Lambda^p{}_{22\beta}+\Lambda^p{}_{23}(2\lambda^3{}_{2\beta}-\lambda^3{}_{12}\lambda^1{}_{0\beta})\,]\omega^\beta{}_0,\\ &d\Lambda^p{}_{23}=-\Lambda^q{}_{23}\omega^p{}_q+\\ &\qquad+\{\Lambda^p{}_{22\beta}+\Lambda^p{}_{22}[\,(\lambda^2{}_{13}-\varepsilon_{23}\lambda^3{}_{12})\,\lambda^3{}_{2\beta}(\lambda^3{}_{12})^{-1}-\lambda^2{}_{13}\lambda^1{}_{0\beta}]\}\,\omega^\beta{}_0,\\ &\qquad\qquad\lambda^3{}_{12}d\Lambda^p{}_{33}=\lambda^2{}_{13}d\Lambda^p{}_{22}+d\lambda^2{}_{13}\Lambda^p{}_{22}-\Lambda^p{}_{23}d\lambda^3{}_{12}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned} &\lambda^3{}_{12}\Lambda^p{}_{233}=\lambda^2{}_{13}\Lambda^p{}_{222}-\Lambda^p{}_{22}[\lambda^2{}_{13}(\lambda^3{}_{12})^{-1}\lambda^3{}_{122}+\\ &\qquad+\nu\lambda^1{}_{03}-\mu\lambda^3{}_{23}]+2\Lambda^p{}_{23}\lambda^3{}_{22}\nu,\\ &\Lambda^p{}_{223}=\Lambda^p{}_{232}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

§ 2. Реперы фокальных поверхностей

После указанной частичной канонизации репера, фокусы ${}^1F$ и ${}^2F$ на каждой образующей определяются, в силу (1.5) и (1.6—7), с помощью

$${}^\varepsilon\boldsymbol{F}=\varrho\boldsymbol{M}_0+(-1)^\varepsilon\boldsymbol{M}_1 \qquad (\varepsilon=1,\ 2). \tag{2.1}$$

Они образуют 2-мерные фокальные поверхности ${}^1V$ и ${}^2V$ рассматриваемой V_3 ранга 2 общего типа.

Для нахождения инвариантов фокальной поверхности ${}^\varepsilon V$ целесообразно отнести поверхность ${}^\varepsilon V$ к автополярному нормироранному реперу $\{{}^{\varepsilon}F_0, {}^{\varepsilon}F_1, {}^{\varepsilon}F_2, {}^{\varepsilon}F_3, {}^{\varepsilon}F_p\}$, где ${}^{\varepsilon}F_0 = {}^{\varepsilon}F$, вершины ${}^{\varepsilon}F_1$ и ${}^{\varepsilon}F_2$ принадлежат касательной 2-плоскости к ${}^{\varepsilon}V$ в точке ${}^{\varepsilon}F$, а ${}^{\varepsilon}F_3$ и ${}^{\varepsilon}F_p$ $(p=4, \ldots, N)$ — полярной к ней $(N-3)$-мерной плоскости. Для этого достаточно положить

$$\begin{aligned}
&{}^{\varepsilon}\boldsymbol{F}_0 = \nu^{-1/2}\,{}^{\varepsilon}\boldsymbol{F},\\
&{}^{\varepsilon}\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{M}_p,\\
&{}^{\varepsilon}\boldsymbol{F}_1 = \nu^{-1/2}[\varepsilon_{01}\boldsymbol{M}_0 - (-1)^{\varepsilon}\varrho\boldsymbol{M}_1],\\
&{}^{\varepsilon}\boldsymbol{F}_2 = \mu^{-1/2}[\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\boldsymbol{M}_2 + (-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^3{}_{12}}\boldsymbol{M}_3],\\
&{}^{\varepsilon}\boldsymbol{F}_3 = \mu^{-1/2}[\sqrt{\lambda^3{}_{12}}\boldsymbol{M}_2 - (-1)^{\varepsilon}\varepsilon_{23}\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\boldsymbol{M}_3].
\end{aligned} \tag{2.2}$$

При таком выборе репера $\{{}^{\varepsilon}F_I\}$ в силу выражений (1.1) и (2.1—2) для ${}^{\varepsilon}\boldsymbol{F}_I$ имеем

$$({}^{\varepsilon}\boldsymbol{F}_J, {}^{\varepsilon}\boldsymbol{F}_K) = \begin{cases} 0, & \text{если } J \neq K, \\ g_{JJ}, & \text{если } J = K. \end{cases} \tag{2.3}$$

Тогда в формулах

$$d\,{}^{\varepsilon}\boldsymbol{F}_J = {}^{\varepsilon}\Theta^K{}_J\,{}^{\varepsilon}\boldsymbol{F}_K$$

в силу (1.2), (1.8) и (2.1—2) имеют место равенства

$$\begin{aligned}
&{}^{\varepsilon}\Theta^1{}_0 = \nu^{-1}[d\varrho - (-1)^{\varepsilon}\nu\omega^1{}_0],\\
&{}^{\varepsilon}\Theta^2{}_0 = \mu^{1/2}\nu^{-1/2}[\sqrt{\lambda^3{}_{12}}\omega^2{}_0 + (-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\omega^3{}_0],\\
&{}^{\varepsilon}\Theta^2{}_1 = (\nu\mu)^{-1/2}\}\varepsilon_{23}\sqrt{\lambda^2{}_{13}}[\varepsilon_{01}\varepsilon_{23} - (\lambda^3{}_{12})^2]\omega^2{}_0 +\\
&\qquad + (-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^3{}_{12}}[\varepsilon_{01}\varepsilon_{23} - (\lambda^2{}_{13})^2]\omega^3{}_0,\\
&{}^{\varepsilon}\Theta^3{}_1 = \varepsilon_{23}\nu^{1/2}\mu^{-1/2}[\sqrt{\lambda^3{}_{12}}\omega^2{}_0 - (-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\omega^3{}_0],\\
&{}^{\varepsilon}\Theta^3{}_2 = \varepsilon_{23}(2\varrho\mu)^{-1}[\lambda^3{}_{12}d\lambda^2{}_{13} - \lambda^2{}_{13}d\lambda^3{}_{12} - (-1)^{\varepsilon}2\varrho\mu\omega^3{}_2],\\
&{}^{\varepsilon}\Theta^p{}_2 = \mu^{-1/2}[\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\omega^p{}_2 + (-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^3{}_{12}}\omega^p{}_3],\\
&{}^{\varepsilon}\Theta^p{}_3 = \mu^{-1/2}[\sqrt{\lambda^3{}_{12}}\omega^p{}_2 - \varepsilon_{23}(-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\omega^p{}_3],
\end{aligned} \tag{2.4}$$

и, кроме того,

$${}^{\varepsilon}\Theta^K{}_J = -\varepsilon_{JK}\,{}^{\varepsilon}\Theta^J{}_K, \qquad {}^{\varepsilon}\Theta^3{}_0 = {}^{\varepsilon}\Theta^p{}_0 = {}^{\varepsilon}\Theta^p{}_1 = 0. \tag{2.5}$$

Вводим ряд новых обозначений:

$$\begin{aligned}
&A = (2\varrho)^{-1}(\lambda^2{}_{13}\lambda^3{}_{122} + 3\nu\lambda^3{}_{12}\lambda^1{}_{03} - \mu\lambda^3{}_{12}\lambda^3{}_{23}),\\
&B = (2\varrho)^{-1}(\lambda^3{}_{12}\lambda^2{}_{133} + 3\nu\lambda^2{}_{13}\lambda^1{}_{02} + \mu\lambda^2{}_{13}\lambda^3{}_{22}),\\
&{}^{\varepsilon}C = \nu\varrho^{-1}[(-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\lambda^1{}_{02} + \sqrt{\lambda^3{}_{12}}\lambda^1{}_{03}],\\
&{}^{\varepsilon}D = \sqrt{\lambda^2{}_{13}}\lambda^3{}_{22} + (-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^3{}_{12}}\lambda^3{}_{23}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

и

$${}^{\varepsilon}\Delta = (-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^2{}_{13}}A - \sqrt{\lambda^3{}_{12}}B, \tag{2.7}$$

где в силу невырожденности фокальной поверхности ${}^{\varepsilon}V$ имеем

$${}^{\varepsilon}\Delta \neq 0. \tag{2.8}$$

Следовательно, формы ${}^{\varepsilon}\Theta^1{}_0$ и ${}^{\varepsilon}\Theta^2{}_0$ являются базисными формами фокальной поверхности ${}^{\varepsilon}V$ при поверхности V_3 ранга 2 общего типа, и формы $\omega^\alpha{}_0$ можно выразить через ${}^{\varepsilon}\Theta^a{}_0$ $(a, b, \ldots, = 1, 2)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\omega^2{}_0 &= \nu^{1/2}\mu^{-1/2}({}^{\varepsilon}\Delta)^{-1}\{(-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^2{}_{13}\nu\mu}\,{}^{\varepsilon}\Theta^1{}_0 + [(-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\,{}^{\varepsilon}C - B]\,{}^{\varepsilon}\Theta^2{}_0\},\\
\omega^3{}_0 &= \nu^{1/2}\mu^{-1/2}({}^{\varepsilon}\Delta)^{-1}[-\sqrt{\lambda^3{}_{12}\nu\mu}\,{}^{\varepsilon}\Theta^1{}_0 + (A - \sqrt{\lambda^3{}_{12}}\,{}^{\varepsilon}C)\,{}^{\varepsilon}\Theta^2{}_0].
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Теперь не трудно найти компоненты второй фундаментальной формы фокальной поверхности ${}^{\varepsilon}V$, т. е. коэффициенты в уравнениях

$${}^{\varepsilon}\Theta^3{}_a = {}^{\varepsilon}f^3{}_{ab}\,{}^{\varepsilon}\Theta^b{}_0, \qquad {}^{\varepsilon}\Theta^p{}_2 = {}^{\varepsilon}f^p{}_{2b}\,{}^{\varepsilon}\Theta^b{}_0, \tag{2.10}$$

где мы обозначили, в частности,

$$\begin{aligned}
&{}^{\varepsilon}f^3{}_{11} = 2\cdot(-1)^{\varepsilon}\cdot\varepsilon_{23}\cdot\varrho\nu^{3/2}\mu^{-1/2}({}^{\varepsilon}\Delta)^{-1},\\
&{}^{\varepsilon}f^p{}_{21} = 0,\\
&{}^{\varepsilon}f^3{}_{12} = {}^{\varepsilon}f^3{}_{21} = -\varepsilon_{23}\nu(\mu\,{}^{\varepsilon}\Delta)^{-1}[(-1)^{\varepsilon}(\sqrt{\lambda^2{}_{13}}A - 2\varrho\,{}^{\varepsilon}C) + \sqrt{\lambda^3{}_{12}}B],\\
&{}^{\varepsilon}f^3{}_{22} = \varepsilon_{23}\nu^{1/2}\mu^{-3/2}(\varrho\cdot{}^{\varepsilon}\Delta)^{-1}\{(\varrho B - \mu\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\,{}^{\varepsilon}D - 2\nu\lambda^2{}_{13}\lambda^1{}_{02})\times\\
&\quad\times(A - \sqrt{\lambda^3{}_{12}}\,{}^{\varepsilon}C) + [\varrho A + (-1)^{\varepsilon}\mu\sqrt{\lambda^3{}_{12}}\,{}^{\varepsilon}D - 2\nu\lambda^3{}_{12}\lambda^1{}_{03}]\times\\
&\quad\times[B - (-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\,{}^{\varepsilon}C]\},\\
&{}^{\varepsilon}f^p{}_{22} = \nu^{1/2}\mu^{-1}(\lambda^3{}_{12})^{-1/2}[\sqrt{\lambda^2{}_{13}}\,\Lambda^p{}_{22} + (-1)^{\varepsilon}\sqrt{\lambda^3{}_{12}}\,\Lambda^p{}_{23}].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Дифференцирование компонентов ${}^{\varepsilon}f^3{}_{ab}$ и ${}^{\varepsilon}f^p{}_{22}$ второй фундаментальной формы на основании (1.8), (2.6—7) и (2.11) дает

$$\begin{aligned}
d\,{}^{\varepsilon}f^3{}_{ab} &= 0 \pmod{{}^{\varepsilon}\Theta^c{}_0},\\
d\,{}^{\varepsilon}f^p{}_{22} &= -{}^{\varepsilon}f^q{}_{22}\,{}^{\varepsilon}\Theta^p{}_q \pmod{{}^{\varepsilon}\Theta^c{}_0}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

§ 3. Инвариантные объекты фокальной поверхности

В работах [3—4] рассмотрены некоторые инварианты (гауссовы кривизна и кручение) фокальной поверхности фокальной псевдоконгруэнции в евклидовом пространстве R_4. Приведем здесь некоторые обобщения этих понятий для фокальной поверхности ${}^{\varepsilon}V$ поверхности V_3 ранга 2 общего типа в ${}^lS_N$.

Гауссова кривизна. В автополярном репере $\{{}^{\varepsilon}F_I\}$ среди форм ${}^{\varepsilon}\Theta^b{}_a$ отличным от нуля будет форма ${}^{\varepsilon}\Theta^2{}_1$. Дифференцируя внешним образом форму ${}^{\varepsilon}\Theta^2{}_1$, получим

$$d\,{}^{\varepsilon}\Theta^2{}_1 = {}^{\varepsilon}\Theta^a{}_1 \wedge {}^{\varepsilon}\Theta^2{}_a + {}^{\varepsilon}\Theta^0{}_1 \wedge {}^{\varepsilon}\Theta^2{}_0 + {}^{\varepsilon}\Theta^{p^*}{}_1 \wedge {}^{\varepsilon}\Theta^2{}_{p^*},$$

$$(p^*,\ q^*,\ \ldots,\ = 3,\ \ldots,\ N)$$

или в силу (2.4) и (2.11) имеем

$$d\,{}^{\varepsilon}\Theta^2{}_1 = {}^{\varepsilon}\Theta^a{}_1 \wedge {}^{\varepsilon}\Theta^2{}_a - {}^{\varepsilon}K\,{}^{\varepsilon}\Theta^1{}_0 \wedge {}^{\varepsilon}\Theta^2{}_0,$$

где

$$ {}^{\varepsilon}K=\varepsilon_{01}+\varepsilon_{23}[{}^{\varepsilon}f^3{}_{11}\,{}^{\varepsilon}f^3{}_{22}-({}^{\varepsilon}f^3{}_{12})^2]. \qquad (3.1)$$

Величина ${}^{\varepsilon}K$ инвариантна связана с фокальной поверхностью ${}^3V$, так как из равенств (2.12) вытекает, что

$$d\,{}^{\varepsilon}K=0 \pmod{{}^{\varepsilon}\Theta^a{}_0}.$$

Объект ${}^{\varepsilon}K$ называется *гауссовой кривизной* фокальной поверхности ${}^{\varepsilon}V$ поверхности V_3 ранга 2 общего типа в ${}^lS_N$.

Гауссово кручение. Введем величину ${}^{\varepsilon}S^{q^*}{}_{p^*ab}$, антисимметричную по индексам a и b, следующим образом:

$$ {}^{\varepsilon}S^{q^*}{}_{p^*ab}=g_{r^*p^*}\,{}^{\varepsilon}f^{r^*}{}_{c[a}\,{}^{\varepsilon}f^{q^*}{}_{|d|b]}\,g^{cd}. \qquad (3.2)$$

В силу автополярности репера $\{{}^{\varepsilon}F_I\}$ имеет место свойство

$$ {}^{\varepsilon}S^{p^*}{}_{q^*ab}=-\varepsilon_{p^*q^*}\,{}^{\varepsilon}S^{q^*}{}_{p^*ab}. \qquad (3.3)$$

Введем объект ${}^{\varepsilon}\varkappa$ формулой

$$ {}^{\varepsilon}\varkappa=g_{q^*s^*}g^{p^*r^*}\,{}^{\varepsilon}S^{q^*}{}_{p^*ab}\quad {}^{\varepsilon}S^{s^*}{}_{r^*cd}g^{ac}g^{bd},$$

которое на оснований соотношений (2.4), (2.11) и (3.2—3) принимает вид

$$ {}^{\varepsilon}\varkappa=\varepsilon_{12}\varepsilon_{3p}({}^{\varepsilon}f^3{}_{12}\,{}^{\varepsilon}f^p{}_{22})^2. \qquad (3.4)$$

Поскольку

$$d\,{}^{\varepsilon}\varkappa=0 \pmod{{}^{\varepsilon}\Theta^a{}_0},$$

то величина ${}^{\varepsilon}\varkappa$ инвариантна связана с фокальной поверхностью ${}^{\varepsilon}V$. Инвариантный объект ${}^{\varepsilon}\varkappa$ называется *гауссовым кручением* фокальной поверхности ${}^{\varepsilon}V$ поверхности V_3 ранга 2 общего типа в ${}^lS_N$.

§ 4. Некоторые свойства инвариантов поверхности V_3 класса C

1. Поверхность V_3 ранга 2 в ${}^lS_N$, полный и средний параметры распределения которой оба постоянны, называется *поверхностью V_3 класса C*. В работе [1] показано, что поверхности V_3 ранга 2 общего типа класса C характеризуются в построенном центральном репере следующими условиями

$$\lambda^2{}_{13}=t=\text{const},\qquad \lambda^3{}_{12}=u=\text{const}. \qquad (4.1)$$

Следовательно, в системе (1.8) имеют место равенства

$$\begin{aligned}&\lambda^2{}_{133}=\lambda^3{}_{122}=0,\\ &\lambda^3{}_{22}=-\mu^{-1}\nu\lambda^1{}_{02},\qquad \lambda^3{}_{23}=\mu^{-1}\nu\lambda^1{}_{03},\end{aligned} \qquad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned}&\nu=tu+\varepsilon_{01}=\text{const},\\ &\mu=t+\varepsilon_{23}u=\text{const}.\end{aligned} \qquad (4.3)$$

Следовательно, в выражениях (2.11) компонентов второй фундаментальной формы фокальной поверхности ${}^{\varepsilon}V$ происходят следующие упрощения:

$$\begin{aligned} {}^{\varepsilon}f^3{}_{12} &= \varepsilon_{23}\nu^2(\mu\,{}^{\varepsilon}\Delta)^{-1}[\sqrt{t}\,\lambda^1{}_{02}+(-1)^{\varepsilon}\sqrt{u}\,\lambda^1{}_{03}], \\ {}^{\varepsilon}f^3{}_{22} &= 2\varepsilon_{23}\nu^{3/2}\mu^{-3/2}({}^{\varepsilon}\Delta)^{-1}\lambda^1{}_{02}\lambda^1{}_{03}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$${}^{\varepsilon}\Delta=\nu[(-1)^{\varepsilon}\sqrt{u}\,\lambda^1{}_{03}-\sqrt{t}\,\lambda^1{}_{02}]. \tag{4.5}$$

Поэтому гауссова кривизна фокальной поверхности ${}^{\varepsilon}V$ выражается формулой

$${}^{\varepsilon}K=\varepsilon_{01}-\varepsilon_{23}\mu^{-2}\nu^2. \tag{4.6}$$

Отсюда непосредственно вытекает следующая

Теорема 1. *Гауссовы кривизны фокальных поверхностей ${}^1V$ и ${}^2V$ поверхности V_3 ранга 2 общего типа класса C в ${}^lS_N$ постоянны и равны. Если касательные к V_3 плоскости являются неевклидовыми пространствами с овальными абсолютами, то эта постоянная отрицательна или положительна в зависимости от того, пересекают ли прямолинейные образующие абсолют или не пересекают.*

2. Введем одно понятие, которое известно в теории фокальных псевдоконгруэнции в R_4 (см. [3—4]).

Определение 1. *Поверхность V_3 ранга 2 общего типа в ${}^lS_N$ с фокальными 2-поверхностями нулевой гауссовой кривизны называется поверхностью V_3 класса K.*

Из теоремы 1 следует, что поверхность V_3 ранга 2 общего типа класса C может принадлежать классу K только тогда, когда $\varepsilon_{01}\cdot\varepsilon_{23}=1$, т. е. когда 3-плоскости, касательные к V_3, имеют мнимые или кольцевидные (по терминологии в [2], стр. 510—511) абсолюты. При этом поверхности V_3 класса $C\cap K$ характеризуются в силу (4.6) и по определению 1 равенством $\nu^2=\mu^2$, которое, как следует из (4.3), равносильно условию $(t^2-1)(1-u^2)=0$.

В работе [1] показано, что параметр распределения p имеет на распределительных подповерхностях значения p_1 и p_2 для которых

$$\tan p_1=-\sqrt{\varepsilon_{01}\varepsilon_{23}}\,\lambda^2{}_{13},$$

$$\tan p_2=\sqrt{\varepsilon_{01}\varepsilon_{23}}\,\lambda^3{}_{12}.$$

Отсюда выясняется геометрическое значение коэффициентов $\lambda^2{}_{13}$ и $\lambda^3{}_{12}$. При поверхности V_3 ранга 2 общего типа класса C, касательные 3-плоскости которой имеют мнимые или кольцевидные абсолюты, имеем

$$\tan p_1=-t,\qquad \tan p_2=u,\qquad {}^{\varepsilon}K=\varepsilon_{01}\mu^{-2}(\tan^2 p_1-1)(1-\tan^2 p_2).$$

Следовательно, имеет место

Теорема 2. *В пространстве* ^lS_N *поверхность* V_3 *ранга 2 общего типа класса C является поверхностью класса K тогда и только тогда, когда ее касательные 3-плоскости являются неевклидовыми пространствами с мнимыми или кольцевидными абсолютами и на распределительных подповерхностях значения параметра распределения* p_1 *и* p_2 *удовлетворяют равенству* $(\tan^2 p_1 - 1)(1 - \tan^2 p_2) = 0$.

Следствие 1. *Если касательные 3-плоскости к поверхности* V_3 *ранга 2 общего типа класса C являются неевклидовыми пространствами с мнимыми или кольцевидными абсолютами и на распределительных поверхностях значения параметра распределения* p_1 *и* p_2 *такие, что* $\tan p_1 \in (-1, 1)$ и $\tan p_2 \notin [-1, 1]$, *то гауссовы кривизны фокальных поверхностей* ^1V *и* ^2V *отрицательны или положительны в зависимости от того, пересекают ли прямолинейные образующие абсолют или не пересекают.*

3. Определим теперь произвол существования поверхности V_3 ранга 2 общего типа класса $C \cap K$ в 4-мерном пространстве $^lS_4$. Из (1.4), (1.6—7) и (4.1) следует, что система

$$\begin{aligned} &\omega^4{}_i = 0, \quad \omega^2{}_1 = t\omega^3{}_0, \quad \omega^3{}_1 = u\omega^2{}_0, \\ &\omega^4{}_2 = \Lambda^4{}_{2\beta}\omega^\beta{}_0, \quad \omega^4{}_3 = \Lambda^4{}_{23}\omega^2{}_0 + tu^{-1}\Lambda^4{}_{22}\omega^3{}_0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

определяет поверхность V_3 ранга 2 общего типа класса C в 4-мерном пространстве $^lS_4$. Система ковариантов уравнений (4.7) имеет вид

$$\begin{aligned} &(-\nu\omega^1{}_0 + \mu\omega^3{}_2) \wedge \omega^2{}_0 = 0, \\ &(\nu\omega^1{}_0 + \mu\omega^3{}_2) \wedge \omega^3{}_0 = 0, \\ &(d\Lambda^4{}_{22} + u\Lambda^4{}_{23}\omega^1{}_0 - 2\Lambda^4{}_{23}\omega^3{}_2) \wedge \omega^2{}_0 + \\ &+ [d\Lambda^4{}_{23} + t\Lambda^4{}_{22}\omega^1{}_0 + (\varepsilon_{23}u - t)u^{-1}\Lambda^4{}_{22}\omega^3{}_2] \wedge \omega^3{}_0 = 0, \\ &[d\Lambda^4{}_{23} + t\Lambda^4{}_{22}\omega^1{}_0 + (\varepsilon_{23}u - t)u^{-1}\Lambda^4{}_{22}\omega^3{}_2] \wedge \omega^2{}_0 + \\ &+ (u^{-1}t\, d\Lambda^4{}_{22} + t\Lambda^4{}_{23}\omega^1{}_0 + 2\varepsilon_{23}\Lambda^4{}_{23}\omega^3{}_2) \wedge \omega^3{}_0 = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь имеется четыре уравнения, содержащие четыре вторичные формы. Ранг соответствующей матрицы $s_1 = 4$, т. е. число Картана $Q = 4$. Применяя лемму Картана к системе (4.8), получаем

$$\begin{aligned} &\omega^1{}_0 = \lambda^1{}_{0\beta}\omega^\beta{}_0, \\ &\mu\omega^3{}_2 = -\nu\lambda^1{}_{02}\omega^2{}_0 + \nu\lambda^1{}_{03}\omega^3{}_0, \\ &d\Lambda^4{}_{22} = [\Lambda^4{}_{222} - (u\mu + 2\nu)\mu^{-1}\Lambda^4{}_{23}\lambda^1{}_{02}]\omega^2{}_0 + \\ &\quad + [\Lambda^4{}_{223} + (2\nu - u\mu)\mu^{-1}\Lambda^4{}_{23}\lambda^1{}_{03}]\omega^3{}_0, \end{aligned}$$

$$dA^4{}_{23} = \{A^4{}_{223} + [\nu(\varepsilon_{23}u - t) - tu\mu](u\mu)^{-1}A^4{}_{22}\lambda^1{}_{02}\}\omega^2{}_0 +$$
$$+\{tu^{-1}A^4{}_{222} - 2u^{-1}\nu\lambda^1{}_{02}A^4{}_{23} -$$
$$-[\nu(\varepsilon_{23}u - t) + tu\mu](u\mu)^{-1}A^4{}_{22}\lambda^1{}_{03}\}\omega^3{}_0,$$

где $\lambda^1{}_{02}$, $\lambda^1{}_{03}$, $A^4{}_{222}$, $A^4{}_{223}$ — новые величины. Следовательно, $Q = N = 4$, и нами доказана

Теорема 3. *Поверхность V_3 ранга 2 общего типа класса C в 4-мерном пространстве ${}^lS_4$ существует и определяется с произволом четырех функций одного аргумента.*

Из теоремы 2 и теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие 2. *В пространстве ${}^lS_4$ поверхность V_3 ранга 2 общего типа класса $C \cap K$, касательные 3-плоскости которой являются неевклидовыми пространствами с мнимым или кольцевидными абсолютами, существует и определяется с произволом четырех функций одного аргумента.*

4. Перенесем на случай неевклидова пространства ${}^lS_N$ еще одно понятие.

Определение 2. *Поверхность V_3 ранга 2 в ${}^lS_N$ с фокальными 2-поверхностями нулевого гауссова кручения называется поверхностью V_3 класса $\varkappa$.*

При поверхности V_3 ранга 2 общего типа класса C в ${}^lS_N$ из выражений (4.4—5) компонентов второй фундаментальной формы фокальной поверхности ${}^\varepsilon V$ вытекает, что

$$({}^1f^3{}_{12})^2 = \nu^4\mu^{-4}({}^2f^3{}_{12})^{-2} = \mu^{-2}\nu^2({}^1\Delta)^{-2}({}^2\Delta)^2 \neq 0.$$

Поэтому в рассматриваемом случае гауссовы кручения ${}^\varepsilon\varkappa = \varepsilon_{12}\varepsilon_{3p}({}^\varepsilon f^3{}_{12})^2 \cdot ({}^\varepsilon f^p{}_{12})^2$ равны нулю только тогда, когда $g_{pp}({}^\varepsilon f^p{}_{22})^2 = 0$. Последняя равносильно требованиям

$$g_{pp}[t(A^p{}_{22})^2 + u(A^p{}_{23})^2] = 0, \qquad g_{pp}A^p{}_{22}A^p{}_{23} = 0. \tag{4.9}$$

Если теперь рассматривать 4-мерное пространство ${}^lS_4$ $(p, q, \ldots, = 4)$, то из (4.9) вытекает, что поверхность V_3 ранга 2 общего типа класса C в ${}^lS_4$ принадлежит классу $\varkappa$ тогда и только тогда, когда $A^4{}_{22} = A^4{}_{23} = 0$, т. е. поверхность V_3 вырождается в конгруэнцию 3-мерного неевклидова пространства. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 4. *Если в 4-мерном пространстве ${}^lS_4$ поверхность V_3 ранга 2 общего типа принадлежит классу $C \cap \varkappa$, то это поверхность V_3 вырождается в конгруэнцию 3-мерного неевклидова пространства.*

§ 5. Свойство инварианта поверхности V_3 класса $C \cap N$

1. Поверхность V_3 ранга 2 в ${}^lS_N$, которая допускает однопараметрическое семейство нормальных поверхностей, называется *нормальной поверхностью* V_3. В работе [1] показано, что такая поверхность V_3 характеризуется в построенном центральном репере условием

$$\lambda^2{}_{13} - \varepsilon_{23}\lambda^3{}_{12} = 0. \tag{5.1}$$

Следовательно, фокусами теперь будут точки ${}^\varepsilon F$, для которых

$${}^\varepsilon \boldsymbol{F} = \sqrt{\varepsilon_{23}}\,\lambda^3{}_{12}\boldsymbol{M}_0 + (-1)^\varepsilon \boldsymbol{M}_1.$$

В настоящем параграфе мы будем рассматривать только такие нормальные поверхности V_3 ранга 2 общего типа, для которых прямые, полярные к образующим в касательной 3-плоскости к V_3, не пересекают абсолют в вещественных точках, т. е. $\varepsilon_{23} = 1$. Такие нормальные V_3 имеют вещественные фокусы. Теперь в системе (1.8) имеют место

$$\begin{aligned} \lambda^3{}_{122} &= \nu\lambda^1{}_{03} - 2\varrho\lambda^3{}_{23}, \\ \lambda^2{}_{133} &= \nu\lambda^1{}_{02} + 2\varrho\lambda^3{}_{22}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где

$$\varrho = \lambda^2{}_{13} = \lambda^3{}_{12}, \quad \nu = \varrho^2 + \varepsilon_{01}, \quad 2\varrho = \mu. \tag{5.3}$$

Следовательно, в выражениях (2.11) компонентов второй фундаментальной формы фокальной поверхности ${}^\varepsilon V$ произойдут следующие упрощения

$$\begin{aligned} {}^\varepsilon f^3{}_{11} &= (-1)^\varepsilon \sqrt{2\varrho\nu}\,\nu({}^\varepsilon\Delta)^{-1}, \\ {}^\varepsilon f^3{}_{12} &= \nu\varrho^{1/2}({}^\varepsilon\Delta)^{-1}[(-1)^\varepsilon\lambda^3{}_{23} - \lambda^3{}_{22}], \\ {}^\varepsilon f^3{}_{22} &= (-1)^\varepsilon\nu^{1/2}(2\varrho)^{-1}({}^\varepsilon\Delta)^{-1}\{\nu[(-1)^\varepsilon\lambda^1{}_{02} - \lambda^1{}_{03}][(-1)^\varepsilon\lambda^3{}_{22} + \lambda^3{}_{23}] + \\ &\quad + 2\varrho[(\lambda^3{}_{22})^2 + (\lambda^3{}_{23})^2]\}, \\ {}^\varepsilon f^p{}_{22} &= \nu^{1/2}(2\varrho)^{-1}[(-1)^\varepsilon\Lambda^p{}_{23} + \Lambda^p{}_{22}], \end{aligned} \tag{5.4}$$

где

$${}^\varepsilon\Delta = 2\varrho^{1/2}\{\nu[(-1)^\varepsilon\lambda^1{}_{03} - \lambda^1{}_{02}] - \varrho[\lambda^3{}_{22} + (-1)^\varepsilon\lambda^3{}_{23}]\}. \tag{5.5}$$

2. Рассмотрим поверхность V_3 ранга 2 общего типа класса $C \cap N$ с вещественными фокусами ($\varepsilon_{23} = 1$). Для таких поверхностей V_3 на распределительных подповерхностях значения параметра распределения p_1 и p_2 связаны соотношением

$$\tan p_1 = -\tan p_2 = -\sqrt{\varepsilon_{01}}\,t,$$

и, следовательно, полный и средний параметры распределения в рассматриваемом случае имеют соответственно значения (см. [1]):

$$\begin{aligned} k &= \tan p_1 \cdot \tan p_2 = -\varepsilon_{01}t^2, \\ h &= \tan p_1 + \tan p_2 = 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Поскольку $k \cdot \varepsilon_{01} = -t^2 < 0$, то из теоремы 1 и из соотношений (5.3—6) вытекает теорема.

Теорема 5. *Гауссовы кривизны фокальных поверхностей* ^1V *и* ^2V *поверхности* V_3 *ранга 2 общего типа класса* $C \cap N$ *в* ^lS_N, *для которой прямые, полярные к образующим в касательной 3-плоскости к* V_3, *не пересекают абсолют, равны неположительной постоянной* $(4\varepsilon_{01}k)^{-1}(k+1)^2$.

Литература

1. Абель Э., О некоторых классах поверхностей V_3 ранга 2 в ^lS_N. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **358**, 143—169.
2. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия. Москва, 1970.
3. Туулметс Л., Фокальные поверхности фокальной псевдоконгруэнции в R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 46—62.
4. Туулметс Л., Пюсса Т., Фокальные псевдоконгруэнции в R_4, фокальные поверхности которых имеют нулевые гауссовы кривизны и кручения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 72—84.

Поступило
9 IV 1975

SPETSIAALSETE FOKAALPINDADEGA PINDADE V_3, MILLE ASTAK ON 2, MÕNINGATEST KLASSIDEST MITTEEUKLEIDILISES RUUMIS ^lS_N

E. Abel

Resümee

Käesolevas artiklis jätkatakse töös [1] alustatud mitteisotroopsete pindade V_3, mille astak on 2, uurimist mitteeukleidilises ruumis ^lS_N. Kui töös [1] oli põhirõhk asetatud selliste pindade V_3 meetrilise teooria küsimustele, siis siin saadud tulemused puudutavad vaadeldavate pindade V_3 fokaalpindade teatavaid omadusi. Lähemalt vaadeldakse pindade V_3 mõningaid alamklasse, mille fokaalpindade Gaussi kõverused või Gaussi väänded on konstantsed.

SOME CLASSES OF THE SURFACES V_3 WITH RANK 2 AND WITH SPECIAL FOCAL SURFACES IN NONEUCLIDEAN SPACE ^lS_N

E. Abel

Summary

In the present paper the study of non-isotropical surfaces V_3 with rank 2 in non-euclidean space ^lS_N is continued, the beginning of which is in [1]. Especially some classes of the surfaces V_3 with rank 2, whose Gaussian curvature or Gaussian torsion of the focal surfaces are constant, are considered.

ДВЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ТИПА $S^1{}_{32(1)}$ ИЗ МЕХАНИКИ С ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ТРИТКАНЬЮ ХАРАКТЕРИСТИК (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

Х. Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

Введение

1. В настоящей работе автор продолжает изучение геометрии квазилинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях, двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками. Обозначим такие системы через $S^1{}_{m2(1)}$. Общая теория таких систем при произвольном m строилась автором в работе [3]. Там же был рассмотрен ряд задач, касающихся внутренней геометрии множества интегральных многообразий данной системы. Одной из таких задач являлась задача отыскания интегральных многообразий системы $S^1{}_{m2(1)}$ с шестиугольной тритканью некоторых трех характеристик на них. Необходимым и достаточным условием для шестиугольности такой триктани является равенство нулю кривизны аффинной связности без кручения с абсолютным параллелизмом направлений, которую можно присоединить к этой триткани.

В настоящей работе изучим последнюю задачу на примере двух конкретных систем, встречающихся в механике. Это есть задача плоского стационарного потока несжимаемой идеальной жидкости в консервативном силовом поле и задача одномерного движения политропного газа в адиабатическом процессе, которые оба описываются некоторыми квазилинейными системами типа $S^1{}_{32(1)}$. Общая теория систем $S^1{}_{32(1)}$ строилась А. М. Васильевым [2], а в качестве иллюстрации этой общей теории он рассматривал именно названные две системы.

Обозначим систему $S^1{}_{32(1)}$, соответствующую первой задаче, через ${}^1S$, и систему, соответствующую второй задаче, через ${}^2S$.

Целью настоящей работы является изучение вопроса существования у систем ${}^1S$ и ${}^2S$ решений с шестиугольной тритканью характеристик.

2. Если обозначить главные формы пространства зависимых и независимых переменных системы $S^1{}_{32(1)}$ через ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5 и выбрать формы ω^1, ω^2 за независимые на интегральных многообразиях данной системы, то квазилинейная система типа $S^1{}_{32(1)}$ эквивалентна системе квадратичных уравнений

$$\omega^3 \wedge \omega^1=0, \qquad \omega^4 \wedge \omega^2=0, \qquad \omega^5 \wedge (\omega^1+\omega^2)=0, \tag{1}$$

причем система S_{12}: $\omega^1=0$, $\omega^2=0$ предполагается вполне интегрируемой. Следовательно, интегральными многообразиями системы будут все те, на которых выполнены уравнения

$$\omega^3=\lambda\omega^1, \qquad \omega^4=\mu\omega^2, \qquad \omega^5=\nu(\omega^1+\omega^2). \tag{2}$$

Три характеристики определяются на интегральных многообразиях соответственно уравнениями

$$\omega^1=0, \qquad \omega^2=0, \qquad \omega^1+\omega^2=0. \tag{3}$$

3. Известно [1], что если на двумерном многообразии задана триткань дифференциальными уравнениями

$$\pi^1=0, \qquad \pi^2=0, \qquad \pi^1+\pi^2=0,$$

где π^1, π^2 — главные формы многообразия, то

$$d\pi^1=\varphi \wedge \pi^1+a\pi^1 \wedge \pi^2, \qquad d\pi^2=\varphi \wedge \pi^2+b\pi^1 \wedge \pi^2.$$

Если ввести форму $\Theta=\varphi-a\pi^2+b\pi^1$, то $d\pi^1=\Theta \wedge \pi^1$, $d\pi^2= =\Theta \wedge \pi^2$, $d\Theta=R\pi^1 \wedge \pi^2$. Последние формулы показывают, что к данной триткани присоединяется связность без кручения с формой связности Θ и кривизной R. Эта связность будет с абсолютным параллелизмом, ибо имеется лишь одна форма связности Θ.

§ 1. Интегральные многообразия системы ${}^1S$ с шестиугольной тритканью характеристик

4. Плоский стационарный поток несжимаемой идеальной жидкости в консервативном силовом поле описывается системой

$$uu_x+vu_y+p_x=0, \qquad uv_x+vv_y+p_y=0, \qquad u_x+v_y=0, \tag{4}$$

где x, y — пространственные координаты, u, v — компоненты вектора скорости, p — давление. К системе ${}^1S$ можно инвариантно присоединить [2] шесть форм

$$\omega^3=\frac{1}{u^2+v^2}(-dp+i(v\,du-u\,dv)),$$

$$\omega^4=-\frac{1}{u^2+v^2}(dp+i(v\,du-u\,dv)),$$

$$\omega^5=\frac{1}{u^2+v^2}(u\,du+v\,dv+dp), \qquad \omega=d\ln\alpha,$$
$$\omega^1=\alpha(-u+iv)(dx+i\,dy), \qquad \omega^2=\alpha(u+iv)(dx-i\,dy) \tag{5}$$

от шести переменных x, y, u, v, p и α (здесь α — произвольная отличная от нуля величина). Система ${}^1S$ эквивалентна системе (1), в которой формы $\omega^1, \ldots, \omega^5$ имеют вид (5) и удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^5=-(\omega^3+\omega^4)\wedge\omega^5, \quad d\omega^4=(\omega^3+\omega^4)\wedge\omega^5, \quad d\omega^3=(\omega^3+\omega^4)\wedge\omega^5,$$
$$d\omega=0, \quad d\omega^1=(\omega+\omega^5+\omega^3)\wedge\omega^1, \quad d\omega^2=(\omega+\omega^5+\omega^4)\wedge\omega^2. \tag{6}$$

5. На интегральных многообразиях (2) данной системы структурные уравнения (6) будут иметь вид

$$d\omega^3=\nu(\lambda-\mu)\,\omega^1\wedge\omega^2, \quad d\omega^4=\nu(\lambda-\mu)\,\omega^1\wedge\omega^2,$$
$$d\omega^5=\nu(\mu-\lambda)\,\omega^1\wedge\omega^2, \tag{7}$$
$$d\omega^1=(\omega+\nu\omega^2)\wedge\omega^1, \quad d\omega^2=(\omega+\nu\omega^1)\wedge\omega^2.$$

Значит, триткань характеристик (3) определяет на интегральных многообразиях рассматриваемой системы связность с формой $\Theta=\omega+\nu(\omega^1+\omega^2)$, удовлетворяющей уравнению

$$d\Theta=(d\nu+\nu\omega)\wedge(\omega^1+\omega^2). \tag{8}$$

Следовательно, требование шестиугольности $d\Theta=0$ данной триткани равносильно требованию $d\nu+\nu\omega=\sigma(\omega^1+\omega^2)$, где σ — произвольная функция. Продолжение последнего равенства дает $d\sigma+2\sigma\omega=\zeta(\omega^1+\omega^2)$. С другой стороны, продифференцируя последнее из уравнений (2) на основе структурных уравнений задачи (7), получим

$$d\Theta=(d\nu+\nu\omega)\wedge(\omega^1+\omega^2)=\nu(\mu-\lambda)\,\omega^1\wedge\omega^2.$$

Значит, требование $d\theta=0$ дает

$$d\nu+\nu\omega=\sigma(\omega^1+\omega^2)=\nu(\mu-\lambda)=0.$$

Здесь возможны два случая: 1) $\nu=0$ и 2) $\lambda=\mu$. Интегральные многообразия данной системы, на которых $\nu=0$, существуют с произволом в две функции одного аргумента, а произвол интегральных многообразий, на которых $\lambda=\mu$, в одну функцию одного аргумента. Первые из них представляют потенциальное течение, а последние — течение, у которой ортогональные траектории — прямые. Покажем это.

Пусть $\nu=0$. Тогда третье из уравнений системы (2) в силу (5) дает $dp+u\,du+v\,dv=0$, что равносильно

$$p_x+uu_x+vv_x=0, \qquad p_y+uu_y+vv_y=0.$$

Подстановка последних соотношений в систему (4) дает нужный результат

$$u_y = v_x, \qquad u_x = -v_y.$$

Пусть: $\lambda = \mu$. Выпишем сумму и разность первых двух уравнений системы (2) в этом случае:

$$\frac{i}{u^2+v^2} d\left(\frac{u}{v}\right) = -\lambda a (u\,dx + v\,dy),$$

$$\frac{1}{u^2+v^2} dp = i\lambda a (v\,dx - u\,dy).$$

Поскольку u, v — компоненты вектора скорости, а p — давление, то уравнением $vdx - udy = 0$ задаются линии течения, а уравнением $udx + vdy = 0$ — ортогональные к течению траектории. Последняя система показывает, что в данном случае давление по линиям течения постоянно и ортогональные траектории течения — прямые.

Верно и обратное. Тем самым доказана

Теорема 1. *У системы ^1S интегральные многообразия с шестиугольной тритканью характеристик представляют из себя либо потенциальное движение, и существуют с произволом в две функции одного аргумента, либо течение с постоянным давлением по линиям течения и с постоянным направлением ортогональных траекторий, и существуют с произволом в одну функцию одного аргумента.*

§ 2. Интегральные многообразия системы ^2S с шестиугольной тритканью характеристик

6. Одномерное движение политропного газа или жидкости в адиабатическом процессе описывается системой

$$u_t + uu_x + \frac{p_x}{\varrho} = 0, \quad p_t + up_x + \gamma p u_x = 0, \quad \varrho_t + u\varrho_x + \varrho u_x = 0, \tag{9}$$

где x — пространственная координата, t — время, u — скорость, ϱ — плотность, p — давление, $\gamma = \text{const}$.

К системе ^2S можно при $\gamma \neq 3$ инвариантно присоединить [2] шесть форм

$$\omega^3 = \frac{1}{8\gamma}\left(\sqrt{\gamma}\frac{du}{l} + d\ln(l^2\varrho)\right), \qquad \omega^4 = \frac{1}{8\gamma}\left(-\sqrt{\gamma}\frac{du}{l} + d\ln(l^2\varrho)\right),$$

$$\omega^5 = -\frac{1}{4\gamma} d\ln(l^2\varrho^{1-\gamma}), \qquad \omega = d\ln a, \tag{10}$$

$$\omega^1 = a(dx - (u + \sqrt{\gamma}\, l)\,dt, \qquad \omega^2 = a(dx - (u - \sqrt{\gamma}\, l)\,dt,$$

где α — произвольная отличная от нуля величина, и введена переменная $l = (p/\varrho)^{1/2}$. Эти шесть форм удовлетворяют системе квадратичных уравнений (1) и структурным уравнениям

$$
\begin{aligned}
&d\omega^3 = ((1-\gamma)(\omega^3+\omega^4)+\omega^5)\wedge(\omega^3-\omega^4), \qquad d\omega^5=0,\\
&d\omega^4 = ((1-\gamma)(\omega^3+\omega^4)+\omega^5)\wedge(\omega^4-\omega^3), \qquad d\omega=0,\\
&d\omega^1 = \omega\wedge\omega^1+((\gamma+1)\omega^3+(\gamma-3)\omega^4-\omega^5)\wedge(\omega^1-\omega^2),\\
&d\omega^2 = \omega\wedge\omega^2+((\gamma-3)\omega^3+(\gamma+1)\omega^4-\omega^5)\wedge(\omega^2-\omega^1).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

7. Приступим к отысканию решений данной системы с шестиугольной тритканью характеристик на них. На этот раз результат выясняется лишь на пятом продолжении.

На интегральных многообразиях (2) рассматриваемой системы структурные уравнения (11) задачи примут вид

$$
\begin{aligned}
&d\omega^1=\omega\wedge\omega^1-T\omega^1\wedge\omega^2, \quad d\omega^2=\omega\wedge\omega^2+S\omega^1\wedge\omega^2,\\
&d\omega^3=-[2(1-\gamma)\lambda\mu+\nu(\lambda+\mu)]\omega^1\wedge\omega^2,\\
&d\omega^4=[2(1-\gamma)\lambda\mu+\nu(\lambda+\mu)]\omega^1\wedge\omega^2,\\
&d\omega^5=0,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где

$$
T=(\gamma+1)\lambda+(\gamma-3)\mu-2\nu, \qquad S=(\gamma-3)\lambda+(\gamma+1)\mu-2\nu. \tag{13}
$$

Из уравнений (12) видно, что триткань характеристик (3) определяет в данном случае на интегральных многообразиях (2) системы связность с формой

$$
\Theta=\omega+T\omega^2+S\omega^1.
$$

Отсюда

$$
d\Theta=(dT+T\omega)\wedge\omega^2+(dS+S\omega)\wedge\omega^1.
$$

Продолжим два первых уравнения из (12):

$$
dT+T\omega=T_1\omega^1+T_2\omega^2, \qquad dS+S\omega=S_1\omega^1+S_2\omega^2 \tag{14}
$$

и запишем форму $d\Theta$ в продолженных переменных: $d\Theta = (T_1-T_2)\omega^1\wedge\omega^2$. Значит, интегральные многообразия с шестиугольной тритканью характеристик выделяются среди остальных условием

$$
T_1=S_2. \tag{15}
$$

Чтобы исследовать (15), запишем его, во-первых, в первоначальных переменных задачи λ, μ, ν. Продолжение системы (2) в данном случае дает

$$
\begin{aligned}
&d\lambda+\lambda\omega=K\omega^2+A\omega^1,\\
&d\mu+\mu\omega=L\omega^1+B\omega^2,\\
&d\nu+\nu\omega=M(\omega^1-\omega^2)+C(\omega^1+\omega^2),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где

$$\begin{aligned}K&=-\lambda^2(\gamma+1)-(3\gamma-5)\lambda\mu+3\lambda\nu+\nu\mu,\\ L&=-\mu^2(\gamma+1)-(3\gamma-5)\lambda\mu+3\nu\mu+\nu\lambda,\\ M&=-2\nu(\mu-\lambda).\end{aligned}\tag{17}$$

Если продифференцировать выражения (13) величин T и S с учетом уравнений (16), получим выражения для T_1 и S_2 через λ, μ, ν, а условие (15) примет вид:

$$(\gamma+1)[A-B+(\gamma-3)(\lambda^2-\mu^2)+2\nu(\mu-\lambda)]=0.$$

В случае $\gamma+1=0$ оно выполняется тождественно. Но для реальных газов $1<\gamma<5/3$ и $\gamma+1$ не обращается в нуль. Тогда условие шестиугольности триткани характеристик на интегральных многообразиях равносильно

$$A+(\gamma-3)\lambda^2+\nu(\mu-\lambda)=B+(\gamma-3)\mu^2+\nu(\lambda-\mu).\tag{18}$$

Для дальнейшего исследования введем обозначение

$$H=A+(\gamma-3)\lambda^2+\nu(\mu-\lambda)=B+(\gamma-3)\mu^2+\nu(\lambda-\mu),\tag{19}$$

которое позволяет в первом продолжении (16) исследуемой системы заменить две величины A, B на одну H:

$$\begin{aligned}d\lambda+\lambda\omega&=(H-P)\omega^1+K\omega^2,\\ d\mu+\mu\omega&=L\omega^1+(H-Q)\omega^2,\\ d\nu+\nu\omega&=M(\omega^1-\omega^2)+C(\omega^1+\omega^2).\end{aligned}\tag{20}$$

Здесь P и Q выражаются через первоначальные переменные

$$P=(\gamma-3)\lambda^2+\nu(\mu-\lambda),\qquad Q=(\gamma-3)\mu^2+\nu(\lambda-\mu),\tag{21}$$

также как и K, L, M в предыдущем.

Изучим произвол в существовании интегральных многообразий, выделяемых условием (18). Для этого находим последующее продолжение системы (2), (18) в данном случае, т. е. продолжим соотношения (20). Будем иметь

$$\begin{aligned}&dH+2H\omega=\\ &=\{[-4(\gamma-2)\lambda-3(\gamma+1)\mu+6\nu]H+2(\lambda+\mu)C+(3\gamma-5)\lambda^2\nu-\\ &-4\nu^2(\mu+\lambda)+(\gamma-3)(3\gamma-1)\lambda\mu^2+(\gamma+1)\nu\mu^2+2(\gamma+1)\lambda\mu\nu\}\omega^1+\\ &+\{[-4(\gamma-2)\mu-3(\gamma+1)\lambda+6\nu]H+2(\lambda+\mu)C+(3\gamma-5)\mu^2\nu-\\ &-4\nu^2(\lambda+\mu)+(\gamma-3)(3\gamma-1)\mu\lambda^2+(\gamma+1)\nu\lambda^2+2(\gamma+1)\lambda\mu\nu\}\omega^2,\end{aligned}\tag{22$_1$}$$

$$dC+2C\omega=4C(\lambda-\mu)(\omega^1-\omega^2)+C_0(\omega^1+\omega^2),\tag{22$_2$}$$

где C_0 — новая, появляющая при продолжении величина. Последующее продолжение уравнения $(22)_1$ приводит к конечному соотношению

$$(\lambda-\mu)[-C(\lambda+\mu)+6\nu^2(\lambda+\mu)-$$
$$-(\gamma-3)\nu(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2)-(\gamma+1)\lambda\mu\nu]=0, \qquad (23)$$

и уравнения $(22)_2$ к соотношению

$$dC_0+3C_0\omega=C_{00}(\omega^1+\omega^2)+6C_0(\lambda-\mu)(\omega^1-\omega^2).$$

Здесь возможны два случая: во-первых, $\lambda-\mu=0$, во-вторых,

$$-C(\lambda+\mu)+6\nu^2(\lambda+\mu)-(\gamma-3)\nu(\lambda^2+\mu^2)-2(\gamma-1)\lambda\mu\nu=0. \qquad (24)$$

Первым случаем займемся позже, а сейчас изучим второй. Для исследования совместности продолжим его, получим

$$H\nu(\lambda-\mu)+3C(\mu^2-\lambda^2)+16(\lambda^2-\mu^2)\nu^2+$$
$$+4\lambda\mu\nu(\mu-\lambda)+3(\gamma-3)\nu(\mu^3-\lambda^3)=0. \qquad (25)_1$$

Кроме того, получим выражение для C_0 через λ, μ, ν:

$$-C_0(\lambda+\mu)+C[10\nu(\lambda+\mu)+2(\lambda^2+\mu^2)+(\gamma-3)2\mu]+$$
$$+H[C-6\nu^2+2(\gamma-2)(\lambda+\mu)]-2(5\gamma-9)(\lambda^2+\mu^2)\nu^2+$$
$$+12(\lambda+\mu)\nu^3+2\nu(\gamma-1)(\gamma-3)(\lambda^3+\mu^3)-$$
$$-2(13\gamma-19)\lambda\mu\nu^2+2(4\gamma^2-13\gamma+11)\lambda\mu\nu(\lambda+\mu)=0. \qquad (25)_2$$

Подставим в $(25)_1$ соотношение (24), получим окончательно

$$\nu(\lambda-\mu)[H-2\nu(\lambda+\mu)+(3\gamma-1)\lambda\mu]=0. \qquad (26)$$

Здесь возможны три случая, во-первых, уже полученный $\lambda-\mu=0$, во-вторых, $\nu=0$ и, в-третьих,

$$H=2\nu(\lambda+\mu)-(3\gamma-1)\lambda\mu. \qquad (27)$$

Дифференцирование соотношения (27) дает тождество $0=0$. Надо еще проверить, не дает ли продолжение выражения $(25)_2$ добавочных условий. Для этого подставим выражение (27) для H в $(25)_2$ (по последующим п. 8 и 9 станет ясно, что это не лишает нас общности), получим

$$-C_0(\lambda+\mu)+C[8\nu(\lambda+\mu)+2(\lambda^2+\mu^2)+4(\gamma-1)\lambda\mu]-$$
$$-(52\gamma-60)\lambda\mu\nu^2+24(\lambda+\mu)\nu^3+2(\gamma-1)(\gamma-3)(\lambda^3+\mu^3)\nu-$$
$$-(14\gamma-26)(\lambda^2+\mu^2)\nu^2+2(7\gamma^2-20\gamma+13)\lambda\mu\nu(\lambda+\mu)=0. \qquad (28)$$

Продолжение соотношения (28) дает выражение для C_{00} и соотношение, которое есть само (28), умноженное на $\lambda-\mu$. Значит, мы пришли к замкнутой системе условий, определяющей интегральные многообразия с шестиугольной триткань характеристик.

8. Рассмотрим теперь случай $\lambda-\mu=0$ и $\nu=0$. Пусть, во-первых, $\lambda=\mu\equiv\varkappa$. Тогда

$$A=B=H-(\gamma-3)\varkappa^2.$$

При этом $S-T=0$, т. е. уравнение $\omega^1+\omega^2=0$ вполне интегрируемо. Первое продолжение (20) системы (2) получит вид

$$d\lambda+\lambda\omega=[H-(\gamma-3)\varkappa^2]\omega^1+4\varkappa[(1-\gamma)\varkappa+\nu]\omega^2,$$

$$d\mu+\mu\omega=4\varkappa[(1-\gamma)\varkappa-\nu]\omega^1+[H-(\gamma-3)\varkappa^2]\omega^2,$$

$$d\nu+\nu\omega=C(\omega^1+\omega^2),$$

откуда

$$H=4(1-\gamma)\varkappa^2+4\varkappa\nu+(\gamma-3)\varkappa^2=4\varkappa\nu-(3\gamma-1)\varkappa^2, \tag{29}$$

$$d\varkappa+\varkappa\omega=4\varkappa[(1-\gamma)\varkappa+\nu](\omega^1+\omega^2). \tag{30}$$

Продолжение уравнения (30) дает тождество $0=0$, результат дифференцирования соотношения (29) есть

$$dH+2H\omega=4\varkappa[C-(\gamma-1)\varkappa+\nu](\omega^1+\omega^2).$$

Дифференцирование последнего дает, в силу полной интегрируемости уравнения $\omega^1+\omega^2=0$, тождество $0=0$. Значит, случай $\lambda-\mu=0$ совместный, и в этом случае интегральные многообразия изучаемой системы с шестиугольной тритканью характеристик, выделяемые условием $\lambda=\mu$, существуют с произволом в две функции одного аргумента.

Рассмотрим случай $\nu=0$. Тогда первое продолжение (20) имеет вид

$$\begin{aligned} d\lambda+\lambda\omega&=K\omega^2-(\gamma-3)\lambda^2\omega^1+H\omega^1,\\ d\mu+\mu\omega&=L\omega^1-(\gamma-3)\mu^2\omega^2+H\omega^2, \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$K=-\lambda^2(\gamma+1)-(3\gamma-5)\lambda\mu,\qquad L=-\mu^2(\gamma+1)-(3\gamma-5)\lambda\mu.$$

Продолжение соотношений (31) приводит к уравнению

$$dH+2H\omega+\{[3\mu(\gamma+1)+4\lambda(\gamma-2)]H-(3\gamma^2-10\gamma+3)\lambda\mu^2\}\omega^1+$$
$$+\{[3\lambda(\gamma+1)+4\mu(\gamma-2)]H-(3\gamma^2-10\gamma+3)\lambda^2\mu\}\omega^2=0.$$

Дифференцирование последнего добавочных условий не дает. Значит, интегральные многообразия изучаемой системы (2) с шестиугольной тритканью характеристик, выделяемые условием $\nu=0$, существуют с произволом в шесть постоянных.

9. Выделим теперь всевозможные случаи изучаемых систем (2) с шестиугольной тритканью характеристик. На первом продолжении налагалось условие (18), затем мы ввели величину H по (19), так что второе продолжение записывалось после этого системой $(22)_1$, $(22)_2$, после чего в результате продолжения $(22)_1$ получилось конечное соотношение (23), которое дало два случая: 1) $\lambda-\mu=0$ и 2) случай (24). Далее продолжалось условие (24), в результате чего мы получили выражение $(25)_2$ для C_0 и условие (26). В (26) возможны три случая (они получились при выполнении условия (24)):

1) $\nu=0$, тогда и $C=0$, $C_0=0$;

2) $\lambda=\mu\equiv\varkappa$. Но тогда (см. п. 8) $H=-(3\gamma-1)\varkappa^2+4\varkappa\nu$, из (24) получим $\varkappa[-C+6\nu^2-2(\gamma-2)\nu\varkappa]=0$, а из (28) $\varkappa[-C_0+72\nu^3-44\varkappa\nu^2(\gamma-2)+4\varkappa^2\nu(3\gamma^2-10\gamma+8)=0$. Отсюда

а) $\varkappa=0$, $H=0$, а C и C_0 — произвольные,

б) $\varkappa\neq0$, $C=6\nu^2-2(\gamma-2)\nu\varkappa$, $C_0=72\nu^3-44\varkappa\nu^2(\gamma-2)+$ $+4\varkappa^2\nu(3\gamma^2-10\gamma+8)=0$;

3) $H=2\nu(\lambda+\mu)+(3\gamma-1)\lambda\mu$.

Значит, имеем три существенно различных случая, из которых два пересекаются, и имеется одно вырождение:

I) $\lambda-\mu=0$; тогда $\lambda=\mu\equiv\varkappa$ и $H=-(3\gamma-1)\varkappa^2+4\varkappa\nu$;

II) $\nu=0$;

III) $-C(\lambda+\mu)+6\nu^2(\lambda+\mu)-(\gamma-3)(\lambda^2+\mu^2)-2(\gamma-1)\lambda\mu\nu=0$,
$H=2\nu(\lambda+\mu)-(3\gamma-1)\lambda\mu$

(здесь произвол тоже в шесть постоянных). Кроме того, мы получили еще

IV) $\lambda=\mu\equiv\varkappa$, $H=-(3\gamma-1)\varkappa^2+4\varkappa\nu$, $C=6\nu^2-2(\gamma-2)\nu\varkappa$,
$C_0=72\nu^3-44\varkappa\nu^2(\gamma-2)+4\varkappa^2\nu(3\gamma^2-10\gamma+8)$,

который есть пересечение I и III случая;

V) $\lambda=\mu\equiv\varkappa=0$, $H=0$, который есть вырождение I случая.

10. Постараемся теперь выяснить физический смысл этих трех существенных случаев. Для этого подставим в систему (2) выражения (10) встречающих там форм и выразим оттуда дифференциалы скорости u, давления p и плотности ϱ:

$$
\begin{aligned}
du&=4\sqrt{\gamma}(\lambda-\mu)l(dx-u\,dt)-4\gamma(\lambda+\mu)l^2\,dt,\\
dp&=4\gamma(\lambda+\mu)p(dx-u\,dt)+4\gamma(\mu-\lambda)\sqrt{\gamma}pl\,dt,\\
d\varrho&=4\varrho(2\nu+\lambda+\mu)(dx-u\,dt)+4(\mu-\lambda)\sqrt{\gamma}l\varrho\,dt.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Здесь положено $\omega=0$, тогда $\alpha=1$. Это означает некоторое преобразование и на существо дела наших рассуждений не влияет. Из (32) получим, что

$$u_x=4\sqrt{\gamma}(\lambda-\mu)l,\quad p_x=4\gamma(\lambda+\mu)p,\quad \varrho_x=4\varrho(2\nu+\lambda+\mu) \tag{33}$$

и

$$u_t+uu_x+\frac{px}{\varrho}=0, \quad p_t+up_x+\gamma pu_x=0, \quad \varrho_t+u\varrho_x+\varrho u_x=0. \quad (34)$$

Последняя есть система ${}^2S$. Из (33) получим, что

$$\lambda+\mu=\frac{p_x}{4\gamma p}, \quad \lambda-\mu=\frac{u_x}{4\sqrt{\gamma l}}, \quad 2\nu=\frac{\varrho_x}{4\varrho}=\frac{p_x}{4\gamma\varrho}, \quad (35)$$

откуда

$$\lambda=\frac{u_x}{8\sqrt{\gamma l}}+\frac{p_x}{8\gamma p}, \quad \mu=\frac{p_x}{8\gamma p}-\frac{u_x}{8\sqrt{\gamma l}}, \quad \nu=\frac{\varrho_x}{8\varrho}-\frac{p_x}{8\gamma p}. \quad (36)$$

Рассмотрим случай I, когда $\lambda=\mu\equiv\varkappa$. Тогда из (35) следует, что $u_x=0$, а из (32), что $du=-8\gamma\varkappa l^2 dt$. Значит, скорость движения u зависит лишь от времени t, т. е.

$$u=b(t). \quad (37)$$

Рассмотрим теперь случай III. Подставим имеющиеся тогда выражения для H и C и форм ω^1, ω^2 в первое продолжение (20) изучаемой системы (2):

$$d\lambda=[2(1-\gamma)\lambda^2-6(\gamma-1)\lambda\mu+6\nu\lambda+2\nu\mu](dx-u\,dt)-$$
$$-4\lambda(\lambda-\mu)\sqrt{\gamma l}\,dt,$$
$$d\mu=[2(1-\gamma)\mu^2-6(\gamma-1)\lambda\mu+6\nu\mu+2\nu\lambda](dx-u\,dt)-$$
$$-4\mu(\lambda-\mu)\sqrt{\gamma l}\,dt,$$
$$d\nu=4\nu(\mu-\lambda)\sqrt{\gamma l}\,dt+2(\lambda+\mu)^{-1}[6\nu^2(\lambda+\mu)-(\gamma-3)\nu(\lambda^2+\mu^2)-$$
$$-2(\gamma-1)\lambda\mu\nu](dx-u\,dt).$$

Здесь, опять $\omega=0$ и $\alpha=1$. Отсюда

$$\lambda_x=2(1-\gamma)\lambda^2-6(\gamma-1)\lambda\mu+6\nu\lambda+2\nu\mu,$$
$$\mu_x=2(1-\gamma)\mu^2-6(\gamma-1)\lambda\mu+6\nu\mu+2\nu\lambda,$$
$$\nu_x=2(\lambda+\mu)^{-1}[6\nu^2(\lambda+\mu)-(\gamma-3)\nu(\lambda^2+\mu^2)-2(\gamma-1)\lambda\mu\nu].$$

Тогда из (33) находим

$$u_{xx}=0, \quad p_{xx}=1/2(\gamma-1)u_x^2+p_x\varrho_x\varrho^{-1},$$
$$\varrho_{xx}=5/2\varrho_x^2\varrho^{-1}+(\gamma+2)\varrho_x p_x(2\gamma p)^{-1}+(\gamma-1)p_x^2\varrho(2\gamma^2p^2)^{-1}+$$
$$+u_x^2\varrho_x\varrho(2p_x)^{-1}+(\gamma-2)u_x^2\varrho^2(2\gamma p)^{-1}.$$

Остальные вторые частные производные находятся из самой системы (34), например,

$$u_{xt}=-(\gamma+1)(u_x)^2/2. \quad (38)$$

Теперь из (37) и (38) скорость u находится:

$$u=\frac{2}{(\gamma+1)(t-t_0)}x+\frac{H_1}{t-t_0}+H_0. \tag{39}$$

Здесь t_0, H_0, H_1 — произвольные постоянные интегрирования. Задача свелось к нахождению плотности ϱ, поскольку в уравнениях (34), (37) все (а также невыписанные вторые частные производные) выражается через ϱ и ее производные. Подробнее об этом будет сказано в п. 11.

Рассмотрим случай II, когда $\nu=0$. Тогда третье уравнение $\omega^5=0$ рассматриваемой системы (2) дает

$$d\ln\left(\frac{p}{\varrho^\gamma}\right)\equiv d(S)=0,$$

где S — энтропия. Значит, имеем дело со случаем постоянной энтропии или, так называемым, изэнтропическим случаем [4]. Далее,

$$u_x=4l\sqrt{\gamma}(\lambda-\mu),\qquad p_x=4\gamma p(\lambda+\mu),\qquad \varrho p_x-\gamma p\varrho_x=0.$$

Имеем

$$d\lambda=[2\lambda^2(1-\gamma)-(3\gamma-5)\lambda\mu+H](dx-u\,dt)-$$
$$-[4\lambda^2+(3\gamma-5)\lambda\mu+H]\sqrt{\gamma}l\,dt,$$
$$d\mu=[2\mu^2(1-\gamma)-(3\gamma-5)\lambda\mu+H](dx-u\,dt)+$$
$$+[4\mu^2+(3\gamma-5)\lambda\mu+H]\sqrt{\gamma}l\,dt,$$
$$dH=[(5-7\gamma)H+(3\gamma^2-10\gamma+3)\lambda\mu](\lambda+\mu)(dx-u\,dt)-$$
$$-[(\gamma-11)H+(3\gamma^2-10\gamma+3)\lambda\mu]\sqrt{\gamma}l(\mu-\lambda)\,dt.$$

Теперь

$$\begin{aligned}\lambda_x&=2\lambda^2(1-\gamma)-(3\gamma-5)\lambda\mu+H,\\ \mu_x&=2\mu^2(1-\gamma)-(3\gamma-5)\lambda\mu+H,\\ H_x&=[(5-7\gamma)H+(3\gamma^2-10\gamma+3)\lambda\mu](\lambda+\mu).\end{aligned} \tag{40}$$

Находим

$$u_{xx}=\frac{u_x}{2}\left(\frac{p_x}{\gamma p}-\frac{\varrho_x}{\varrho}\right)=0,$$

$$\varrho_{xx}=4\varrho\left\{5(3-\gamma)\frac{p_x^2}{32\gamma^2p^2}+(\gamma-3)\frac{u_x^2\varrho}{32\gamma p}+2H\right\}.$$

Отсюда

$$H=\frac{\varrho_{xx}}{8\varrho}+5(\gamma-3)\frac{p_x^2}{64\gamma^2p^2}-(\gamma-3)\frac{u_x^2\varrho}{64\gamma p}. \tag{41}$$

Тогда

$$\varrho_{xxx}=\varrho_x\frac{\varrho_{xx}}{\varrho}+4\varrho\left\{5(3-\gamma)\frac{p_xp_{xx}}{16\gamma^2p^2}+5(\gamma-3)\frac{p_x^3}{16\gamma^2p^3}+\right.$$

$$\left.+(\gamma-3)\frac{u_x^2\varrho_x}{32\gamma p}-(\gamma-3)\frac{u_x^2\varrho}{32\gamma}\frac{p_x}{p^2}+2H_x\right\}.$$

Сюда надо подставить выражения (40) и (41) для H и H_x. Значит, в этом случае задача приводит к системе обыкновенных уравнений третьего порядка.

11. Значит, во всех трех случаях I, II, III систем с шестиугольной тритканью характеристик имеем $u_{xx}=0$, т. е.

$$u=a(t)x+b(t), \tag{42}$$

где a, b — некоторые функции от времени t. В случае I функция $a(t)\equiv 0$, а в случае III удалось найти конкретный вид функций a и b. Поэтому рассмотрим задачу в общем виде при $u_{xx}=0$, т. е. когда в системе (34) функция u имеет вид (42). Тогда

$$u_x=a, \qquad u_t=a'x+b'. \tag{43}$$

Подставим соотношения (42) и (43) в данную систему (34), получим

$$\begin{aligned} &p_x=-\varrho(a'x+b'+a(ax+b)),\\ &p_t=\varrho(ax+b)(a'x+b'+a(ax+b)-\gamma pa,\\ &\varrho_t+(ax+b)\varrho_x+\varrho a=0.\end{aligned} \tag{44}$$

Теперь все выражено через ϱ, для нахождения которого имеем третье уравнение в системе (44), и условие совместности первых двух:

$$\varrho[a''x+b''+(ax+b)(2a'+a^2+\gamma a^2)+(a'x+b')(\gamma+1)a]=0.$$

Пусть $\varrho\neq 0$. Тогда, в силу независимости аргументов x и t, получим

$$\begin{aligned} &a''+(\gamma+3)aa'+(\gamma+1)a^3=0,\\ &b''+2a'b+(\gamma+1)b'a+(\gamma+1)a^2b=0.\end{aligned} \tag{45}$$

Значит, в задаче, определенной системой (34), где u имеет вид (42), функции a и b должны удовлетворять системе (45). Система (45) есть система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, решение которой определяется, в общем случае, с произволом четырех постоянных. Тогда из третьего уравнения системы (44) уже ϱ определяется с функциональным произволом.

Постараемся проинтегрировать систему (45). Сперва из первого уравнения следует определить $a(t)$, а затем из второго $b(t)$.

Система (45) в общем случае не интегрируется в элементарных функциях, а приводит к эллиптическому интегралу. Решение можно искать в следующем виде: сделаем сначала подстановку $a' = q$, а затем положим $q = Ca^2$, где C — постоянная, принадлежащая определению. Для определения C получим квадратичное уравнение $2C^2 + (3+\gamma)C + 1 - \gamma = 0$, которое имеет два решения

$$C_1 = -0{,}5(\gamma+1), \qquad C_2 = -1. \tag{46}$$

Тогда из $q = \dfrac{da}{dt} = Ca^2$ получим соответственно

$$1)\ a = \frac{2}{(\gamma+1)(t-t_0)}, \qquad 2)\ a = \frac{1}{t-t_0}. \tag{47}$$

Величина b будет иметь соответственно вид

$$1)\ b = \frac{H_1}{t-t_0} + H_2, \qquad 2)\ b = \frac{H_1}{t-t_0} + H_0(t-t_0)^{1-\gamma}. \tag{48}$$

Оба эти решения зависят лишь от трех произвольных постоянных, т. е. являются некоторыми частными решениями системы (45). Но первый из них нас вполне устраивает, поскольку оно совпадает с полученным в случае III, т. е. дает общее решение для случая III. Тем самым, частное решение системы (45) исчерпано.

В случае I система (45) вырождается в условие $b'' = 0$, т. е. тогда $b = C_1 t + C_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Для случая II можно теперь использовать второе частное решение (47), (48) системы (45), но оно не дает общего решения задачи в этом случае.

Находим теперь ϱ. Для этого надо решить третье уравнение системы (44) (или, что то же, системы (34)), куда подставлено соответствующее выражение для u. В случае III

$$\varrho = t^{-2/(\gamma+1)}\Phi\left(x^{1/2}t^{-1/(\gamma+1)}\right), \tag{49}$$

где Φ — произвольная функция своего аргумента. Из второго уравнения системы (34) находим

$$p = t^{-2\gamma/(\gamma+1)}\psi\left(x^{1/2}t^{-1/(\gamma+1)}\right),$$

где ψ — произвольная функция своего аргумента. Для этих произвольных функций Φ и ψ из первого уравнения системы (44) и уравнения для ϱ_{xx} из (37) (остальные уравнения выполнены тождественно) получим дифференциальные уравнения

$$\psi' = \frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\, x^{3/2}t^{-3/(\gamma+1)}\Phi,$$

$$-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}x^{-1/2}t^{1/(\gamma+1)}\Phi'+\Phi''=\frac{5}{2}\frac{(\Phi')^2}{\Phi}+\frac{8(\gamma-2)}{\gamma(\gamma+1)^2}\frac{\Phi^2}{\psi}t^{-2/(\gamma+1)}x+$$

$$+8\frac{(\gamma-1)^3}{\gamma^2(\gamma+1)^4}\frac{\Phi}{\psi^2}x^3t^{-6/(\gamma+1)}-$$

$$-2\frac{(\gamma-1)(\gamma+2)}{\gamma(\gamma+1)^2}\frac{\Phi'\Phi}{\psi}x^{3/2}t^{-3/(\gamma+1)},$$

откуда Φ и ψ определяются с произволом трех постоянных. Полученное таким образом решение u, p, ϱ зависит от шести произвольных постоянных, т. е. мы получим общее решение задачи.

В случае I переменные p и ϱ будут выражаться в виде произвольных функций от аргумента $x-0{,}5C_1t^2-C_2t+C_3$, которые вместе с $u=C_1t+C_2$ дают общее решение задачи в этом случае.

Обратимся теперь к случаю II. Указанное выше частное решение позволяет найти ϱ:

$$\varrho=t^{-1}\chi\left(\frac{x}{t}+\frac{1}{t}+\frac{H_2}{\gamma-1}t^{1-\gamma}\right).$$

Здесь χ — произвольная функция своего аргумента. Условие изэнтропии можно переписать в виде $p=C\varrho^\gamma$, где C — постоянная, откуда $p_x=C\gamma\varrho^{\gamma-1}\varrho_x$. В силу последнего, первое уравнение системы (44) дает

$$C\gamma\chi'=H_2(\gamma-2)\chi^{2-\gamma},$$

откуда

$$\frac{\chi^{\gamma-1}}{\gamma+1}=\frac{H_2(\gamma-2)}{C\gamma}\left(\frac{x}{t}+\frac{1}{t}+\frac{H_2}{\gamma-1}t^{1-\gamma}\right)+H,$$

где H — постоянная. В силу условия изэнтропии

$$p=Ct^{-\gamma}\left[\frac{H^2(\gamma-1)(\gamma-2)}{C^\gamma}\left(\frac{x}{t}+\frac{1}{t}+\frac{H_2}{\gamma-1}t^{1-\gamma}\right)+H\right]^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Полученное решение зависит лишь от пяти постоянных.

12. Для безвихревого движения идеальной упругой жидкости (не обязательно одномерного), если задано соотношение между p и ϱ, можно ввести некоторую функцию F такую, что $u=\operatorname{grad}F$, которую называют потенциалом (см. [4], § 7, п. 1). Для одномерного движения $F=F(x,t)$ и $u=F_x$. Если потенциал $F(x,t)$ известен, то течение полностью определено.

Обратно, произвольная функция $F(x,t)$ вместе с соотношением между p и ϱ, уравнением $F_x=u$ и уравнением Ньютона определяет распределение величин p, ϱ и u, которое, вообще говоря, не удовлетворяет уравнению неразрывности. Требование последнего приводит к основному уравнению для потенциала течения сжимаемой жидкости. Это есть нелинейное уравнение второго порядка в частных производных, для которого известно мало примеров решения его в элементарных функциях (см. [4], § 7, п. 2).

Если при неустановившемся параллельном течении с политропическим отношением между p и ϱ положить $F = 0{,}5ax^2 + bx + c$, т. е. $u = ax + b$, где a, b, c зависят только от t, то основное уравнение для потенциала приводит к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для определения функций a, b, c, из которых первые два, по которым определяются функции a, b, совпадают с нашей системой (45) (см. [4], § 7, п. 4). При этом, первое решение, т. е. наш случай III, этой системы в частном случае описывает центрированные простые волны (см. [5], § 13, п. 2).

Одномерное изэнтропическое течение идеальной жидкости всегда является потенциальным безвихревым движением (см. [4], § 12, п. 2). У нас, при этом, потенциал имеет специальный вид $F = 0{,}5ax^2 + bx + c$.

Резюмируем полученное в виде следующего утверждения:

Теорема 2. *У системы* ^2S, *эквивалентной системе* (2), *интегральные многообразия с шестиугольной триткань характеристик бывают в случаях:*

1) *при* $\lambda = \mu$ *и существуют с произволом в две функции одного аргумента;*

2) *при* $\nu = 0$ *и существуют с произволом в шесть постоянных;*

3) *при* $-C(\lambda + \mu) + 6\nu^2(\lambda + \mu) - (\gamma - 3)(\lambda^2 + \mu^2) - 2(\gamma - 1)\lambda\mu\nu = 0$ и $H = 2\nu(\lambda + \mu) - (3\gamma - 1)\lambda\mu$, *и существуют с произволом в шесть постоянных, которые все характеризуются условием* $u = a(t)x + b(t)$.

Литература

1. Бляшке В., Введение в геометрию тканей. Москва, 1959.
2. Васильев А. М., Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория). Матем. сб., 1966, **70**, № 4, 457—480.
3. Кильп Х. О., Квазилинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях, двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками (геометрическая теория). Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 63—85.
4. Мизес Р., Математическая теория течений сжимаемой жидкости. Москва, 1961.

Поступило
20 XII 1974

KAKS KUUSNURKSE KARAKTERISTIKUTE KOLMKANGAGA KVAASILINEAARSET $S^1{}_{m2(1)}$ TÜÜPI SÜSTEEMI MEHHAANIKAST (GEOMEETRILINE TEOORIA)

H. Kilp

Resümee

Töös uuritakse kaht kahe sõltumatu muutuja, kolme otsitava funktsiooni ja erinevate karakteristikutega I järku kvaasilineaarset osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi, mis esinevad hüdro- ja aerodünaamikas. Eraldatakse välja selliste süsteemide alamklassid, millel karakteristikute kolmkangas on kuusnurkne ning tõlgendatakse viimaseid füüsikaliselt.

TWO QUASILINEAR SYSTEMS OF THE TYPE $S^1{}_{32(1)}$ WITH HEXAGONAL THREE FIELDS

H. Kilp

Summary

In the paper two systems of first order partial differential equations with two independent variables, three unknown functions and different characteristics, are investigated. Such systems occur in hydro- and aerodynamics. Subclasses of systems of that kind, the three fields of the characteristics of which are hexagonal, are singled out and interpreted physically.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРЫ $C_0(X, A)$

М. Абель

Кафедра математического анализа

Э. Херингсон

Кружок СНО при кафедре математического анализа

§ 1. Введение

Пусть X — локально бикомпактное пространство[1], A — комплексная коммутативная банахова алгебра с единицей e_A и $C^*(X, A)$ — множество всех ограниченных непрерывных A-значных функций, определенных на X. Если алгебраические операции над функциями определить поточечно и норму функции $f \in C^*(X, A)$ через sup-нормы, то $C^*(X, A)$ образует банахову алгебру[2]. Говорят, что функция $f \in C^*(X, A)$ стремится к нулю на бесконечности, если для $\varepsilon > 0$ существует бикомпактное подмножество $X_\varepsilon \subset X$ такое, что

$$\|f(x)\|_A < \varepsilon \tag{1}$$

для всех $x \in X \setminus X_\varepsilon$.

Пусть $C_0(X, A)$ — множество всех A-значных функций, непрерывных на X и стремящихся к нулю на бесконечности. Тогда $C_0(X, A)$ является замкнутой подалгеброй без единицы алгебры $C^*(X, A)$. Действительно, $C_0(X, A)$ образует подалгебру в $C^*(X, A)$. Пусть теперь[3] $f \in cl(C_0(X, A))$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g \in C_0(X, A)$, что

$$\|g - f\|_{C^*(X,A)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем будем рассматривать только такие топологические пространства, которые являются хаусдорфовыми.

[2] Здесь и в дальнейшем вместо комплексной коммутативной банаховой алгебры с единицей будем коротко говорить банахова алгебра или алгебра.

[3] Через $cl(C_0(X, A))$ обозначается замыкание множества $C_0(X, A)$ относительно топологии пространства $C^*(X, A)$.

и такое бикомпактное подмножество $X_\varepsilon \subset X$, что

$$\|g(x)\|_A < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $x \overline{\in} X_\varepsilon$. Поэтому, учитывая неравенство

$$\|f(x)\|_A \leqslant \|g(x)\|_A + \|g - f\|_{C^*(X,A)},$$

убеждаемся в том, что $f \in C_0(X, A)$.

Пусть $\mathfrak{M}(A)$ — пространство всех максимальных идеалов алгебры A. Число, соответствующее элементу $a \in A$ при гомоморфном отображении алгебры A в поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, определяемом максимальным идеалом $M \in \mathfrak{M}(A)$, обозначим через $a\hat{}\,(M)$. Таким образом, для каждого $a \in A$ при изменении M в $\mathfrak{M}(A)$, получаем функцию $a\hat{}$, непрерывную на $\mathfrak{M}(A)$. Кроме того, $A\hat{} = \{a\hat{} : a \in A\}$ образует подалгебру[4] в $C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$.

В настоящей статье в § 2 доказывается, что алгебры $C_0(X, A)$ и $C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$ топологически изоморфны, если A является полупростой банаховой алгеброй с $A\hat{} = C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$. На основе этого, описываются все замкнутые, а также все максимальные регулярные идеалы алгебры $C_0(X, A)$ и показывается, что пространства $\mathfrak{M}(C_0(X, A))$ и $X \times \mathfrak{M}(A)$ гомеоморфны. В § 3 обобщается теорема Стоуна—Вейерштрасса на алгебру $C_0(X, A)$.

В § 4 рассматриваются свойства отображения $F_{\varphi,\psi}$ между алгебрами $C_0(X, A)$ и $C_0(Y, B)$, определенное отображениями $\varphi : A \to B$ и $\psi : Y \to X$. Показывается, что алгебры $C_0(X, A)$ и $C_0(Y, B)$ топологически (изометрически) изоморфны, если пространства X и Y гомеоморфны, а банаховы алгебры топологически изоморфны (соответственно изометрически изоморфны).

Аналогичные свойства относительно алгебры $C^*(X, A)$ рассмотрены в статьях [1—4].

§ 2. Отображения между алгебрами $C_0(X, A)$ и $C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$

Пусть $f \in C_0(X, A)$ и для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}(A)$

$$F_f(x, M) = f(x)\hat{}\,(M). \tag{2}$$

Так как

$$|F_f(x, M) - F_f(x_0, M_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \|f(x) - f(x_0)\|_A + |f(x_0)\hat{}\,(M) - f(x_0)\hat{}\,(M_0)|,$$

---

[4] Здесь и в дальнейшем, если X — бикомпактное пространство, то вместо $C^*(X, A)$ будем писать $C(X, A)$.

то функция F_f непрерывна на $X \times \mathfrak{M}(A)$. Кроме того,

$$|F_f(x, M)| \leqslant \|f(x)\|_A$$

для всех $x \in X$ независимо от $M \in \mathfrak{M}(A)$. Поэтому $F_f \in C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$.

Пусть $\mathbf{F} : f \to F_f$ для каждой функции $f \in C_0(X, A)$. Тогда $\mathbf{F}$ гомоморфно отображает $C_0(X, A)$ в $C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$, причем ядро

$$\ker \mathbf{F} = C_0(X, \operatorname{Rad} A),$$

где $\operatorname{Rad} A$ — радикал алгебры A. В случае, когда алгебра A полупроста, отображение $\mathbf{F}$ является изоморфизмом (ср. [1], стр. 61—62).

Если кроме полупростоты алгебры A, алгебра $A^\wedge$ замкнута в $(C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$, то существует такая постоянная K, что

$$\|a\|_A \leqslant K \|a^\wedge\|_{C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})} \tag{3}$$

для всех $a \in A$ (см. [6], стр. 103). Тогда

$$\|F_f\|_{C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})} \leqslant \|f\|_{C_0(X, A)} \leqslant K \|F_f\|_{C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})}.$$

При этом, если A является B^*-алгеброй, справедливо равенство

$$\|f\|_{C_0(X, A)} = \|F_f\|_{C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})}.$$

Поэтому, если A — полупростая алгебра, для которой $A^\wedge$ замкнута в $C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$, то $\mathbf{F}(C_0(X, A))$ является замкнутой подалгеброй в $C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$ и $\mathbf{F}$ является топологическим изоморфизмом.

Пусть теперь A — полупростая банахова алгебра с $A^\wedge = C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$ и $F \in C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$. Тогда существует $f \in C^*(X, A)$, удовлетворяющая условию (2) для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}(A)$ (см.[5] [1], стр. 63—64). Из $F \in C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует бикомпактное подмножество $S_\varepsilon \subset X \times \mathfrak{M}(A)$ такое, что

$$|F(x, M)| < \frac{\varepsilon}{K} \tag{4}$$

для всех $(x, M) \overline{\in} S_\varepsilon$, где K — постоянная, определяемая нормой алгебры A (в силу того, что $A^\wedge = C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$). Пусть $\pi : X \times \mathfrak{M}(A) \to X$ — проекция и $X_\varepsilon = \pi(S_\varepsilon)$. Так как $S_\varepsilon \subset X_\varepsilon \times \mathfrak{M}(A)$, то условие (4) является выполненным и для всех $(x, M) \overline{\in} X_\varepsilon \times \mathfrak{M}(A)$. Поэтому

---

[5] В случае, когда A является B^*-алгеброй см. [10], стр. 33.

$$\|f(x)\|_A \leqslant K \sup_{M \in \mathfrak{M}(A)} |F(x, M)| = K|F(x, M_x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in X_\varepsilon$. В силу бикомпактности множества $X_\varepsilon \subset X$, функция $f \in C_0(X, A)$. Следовательно, алгебры $C_0(X, A)$ и $C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$ топологически изоморфны.

Итак, нами доказана

Теорема 1. *Если X — локально бикомпактное пространство и A — полупростая банахова алгебра с $A^\wedge = C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$, то алгебры $C_0(X, A)$ и $C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$ топологически изоморфны. В частности, если A является B^*-алгеброй, то алгебры $C_0(X, A)$ и $C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$ изометрически изоморфны.*

Учитывая теперь результаты из книги [6] [7], стр. 483—484, получаем

Следствие 1. *Пусть X — локально бикомпактное пространство и A — полупростая банахова алгебра с $A^\wedge = C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$. Тогда*

1) *пространства* [7] $\mathfrak{M}'(C_0(X, A))$ *и* $X \times \mathfrak{M}(A)$ *гомеоморфны,*

2) *каждый замкнутый идеал алгебры $C_0(X, A)$ имеет вид*

$$I_E = \{f \in C_0(X, A) : f(x)^\wedge(M) = 0 \ \forall \ (x, M) \in E\},$$

где $E \subset X \times \mathfrak{M}(A)$ — замкнутое подмножество,

3) *каждый регулярный максимальный идеал алгебры $C_0(X, A)$ имеет вид*

$$\mathbf{M}_{x,M} = \{f \in C_0(X, A) : f(x)^\wedge(M) = 0\},$$

где $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}(A)$.

§ 3. Обобщение теоремы Стоуна—Вейерштрасса на алгебру $C_0(X, A)$

Для обобщения названной теоремы приведем следующие понятия:

Подалгебра $\mathfrak{A} \subset C(X, A)$ называется A-сопряженной, если для каждой функции $f \in \mathfrak{A}$ существует функция $f^* \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющая условию

$$f^*(x)^\wedge(M) = \overline{f(x)^\wedge(M)}$$

для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}(A)$.

---

[6] См. также [8], стр. 123, или [5], стр. 30—31.

[7] Через $\mathfrak{M}'(A)$ обозначается пространство регулярных максимальных идеалов банаховой алгебры A.

Кроме того, будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{A} \subset C(X, A)$ *разделяет точки пространства* $X \times \mathfrak{M}(A)$, если для каждой пары различных точек (x_1, M_1) и (x_2, M_2) пространства $X \times \mathfrak{M}(A)$ существует функция $f \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющая условию

$$f(x_1)\hat{}\,(M_1) \neq f(x_2)\hat{}\,(M_2).$$

В статье [2], стр. 109, доказан следующий результат:

Лемма 1. *Пусть X — бикомпактное пространство и A — полупростая банахова алгебра с $A\hat{} = C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$. Для того, чтобы A-сопряженная подалгебра $\mathfrak{A} \subset C(X, A)$ была равномерно плотна в $C(X, A)$, необходимо и достаточно, чтобы*

а) *подалгебра $\mathfrak{A}$ разделяла точки пространства $X \times \mathfrak{M}(A)$, и*

б) *в подалгебре $\mathfrak{A}$ существовала функция f, удовлетворяющая условию*

$$\inf_{(x, M) \in X \times \mathfrak{M}(A)} |f(x)\hat{}\,(M)| > 0. \qquad (5)$$

Пусть X — локально бикомпактное пространство и x_∞ — точка, не принадлежащая X. Тогда $X_\infty = X \cup \{x_\infty\}$ является бикомпактным пространством, причем открытыми множествами в X_∞ являются открытые множества пространства X и множества в виде $\{x_\infty\} \cup (X \setminus K)$, где K — бикомпактное подмножество в X.

Следующая лемма дает описание алгебры $C_0(X, A)$ относительно алгебры $C(X_\infty, A)$.

Лемма 2. *Если X — локально бикомпактное пространство и A — банахова алгебра, то*[8]

$$C_0(X, A) = \{g \mid X\colon\ g \in C(X_\infty, A),\ g(x_\infty) = \theta_A\}.$$

Доказательство. Пусть $f \in C_0(X, A)$, а $\bar{f}$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in X, \\ \theta_A, & \text{если } x = x_\infty. \end{cases}$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует бикомпактное подмножество $X_\varepsilon \subset X$ такое, что

$$\|\bar{f}(x)\|_A < \varepsilon \qquad (6)$$

для всех $x \,\overline{\in}\, X_\varepsilon$. Пусть $U_\varepsilon(x_\infty) = \{x_\infty\} \cup (X \setminus X_\varepsilon)$. Так как $U_\varepsilon(x_\infty)$ является окрестностью точки x_∞, в которой выполнено

---

[8] Через $f|X$ обозначается сужение функции $f\colon X_\infty \to A$ на X, через θ_A обозначается нулевой элемент алгебры A.

условие (6), то функция $\bar{f}$ непрерывна в точке x_∞. Значит, $\bar{f} \in C(X_\infty, A)$ и $\bar{f}(x_\infty) = \theta_A$.

Пусть теперь $g \in C(X_\infty, A)$ и $g(x_\infty) = \theta_A$. В силу непрерывности функции g в точке x_∞, для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U_\varepsilon(x_\infty)$ такая, что

$$\|g(x)\|_A < \varepsilon$$

для всех $x \in U_\varepsilon(x_\infty)$. Пусть[9] $X_\varepsilon = X_\infty \setminus U_\varepsilon(x_\infty)$. Так как $X_\varepsilon \subset X$ является бикомпактным пространством и

$$\|(g \mid X)(x)\|_A < \varepsilon$$

для всех $x \in X_\varepsilon$, то $g \mid X \in C_0(X, A)$. Лемма доказана.

Применяя теперь леммы 1 и 2, докажем следующее обобщение теоремы Стоуна—Вейерштрасса:

Теорема 2. *Пусть X — локально бикомпактное пространство и A — полупростая банахова алгебра с $A^\wedge = C(\mathfrak{M}(A), \mathbf{C})$. Если A-самосопряженная замкнутая подалгебра $\mathfrak{A} \subset C_0(X, A)$*

1) *содержит функцию af для каждого $a \in A$ и $f \in \mathfrak{A}$,*

2) *разделяет точки пространства $X \times \mathfrak{M}(A)$,*

и

3) *для каждой точки $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}(A)$ содержит функцию f, удовлетворяющую условию*

$$f(x)^\wedge(M) \neq 0,$$

то $\mathfrak{A} = C_0(X, A)$.

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{A}_0 = \{\bar{f} + g_a \colon f \in \mathfrak{A},\ g_a(x) \equiv a \text{ на } X_\infty,\ a \in A\}.$$

По предположениям теоремы, $f^* \in \mathfrak{A}$ для каждой $f \in \mathfrak{A}$ и $a^* \in A$ для каждого $a \in A$, где

$$(a^*)^\wedge(M) \equiv \overline{a^\wedge(M)}$$

на $\mathfrak{M}(A)$. Поэтому $\bar{f}^* + g_{a^*} \in \mathfrak{A}_0$ для каждой $\bar{f} + g_a \in \mathfrak{A}_0$, причем

$$(\bar{f}^* + g_{a^*})(x)^\wedge(M) = \overline{(\bar{f} + g_a)(x)^\wedge(M)}$$

для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}(A)$. Значит, $\mathfrak{A}_0$ является A-сопряженной подалгеброй в $C(X_\infty, A)$.

Так как

$$\|\bar{f} + g_a\|_{C(X_\infty, A)} = \max(\|a\|_A,\ \|f + g_a \mid X\|_{C_0(X, A)}),$$

---

[9] В случае, когда $U_\varepsilon(x_\infty) = X_\infty$, то всегда существует бикомпактное пространство $X_\varepsilon \subset X$.

то подалгебра $\mathfrak{A}_0$ замкнута в $C(X_\infty, A)$. Действительно, если $\{\bar{f}_n + g_{a_n}\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathfrak{A}_0$, то $\{f_n\}$ и $\{a_n\}$ являются фундаментальными последовательностями в $\mathfrak{A}$ и в A соответственно. Пусть $f_0 \in \mathfrak{A}$ — предел последовательности $\{f_n\}$ и $a_0 \in A$ — предел последовательности $\{a_n\}$. Тогда $\bar{f}_0 + g_{a_0} \in \mathfrak{A}_0$ является пределом последовательности $\{\bar{f}_n + g_{a_n}\}$.

Пусть (x_1, M_1) и (x_2, M_2) — две различные точки пространства $X \times \mathfrak{M}(A)$, а $f \in \mathfrak{A}$ — функция, разделяющая эти точки. Тогда и $\bar{f} + g_{\Theta_A} \in \mathfrak{A}_0$ разделяет эти точки. Аналогично, в силу предположений теоремы, в $\mathfrak{A}_0$ существует функция, разделяющая точки (x_∞, M) и (x, M), где $x \neq x_\infty$ и $M \in \mathfrak{M}(A)$, а также (x_∞, M_1) и (x, M_2), где $x \neq x_\infty$, а M_1 и M_2 — различные точки пространства $\mathfrak{M}(A)$.

Пусть теперь M_1 и M_2 — различные точки пространства $\mathfrak{M}(A)$ и $a^\wedge \in A^\wedge$ — функция, разделяющая их. Тогда функция $\bar{f} + g_a \in \mathfrak{A}_0$ разделяет и точки (x_∞, M_1) и (x_∞, M_2) независимо от $f \in \mathfrak{A}$. Следовательно, подалгебра $\mathfrak{A}_0$ разделяет точки пространства $X_\infty \times \mathfrak{M}(A)$.

Поскольку $\bar{\theta}_{C_0(X,A)} + g_{e_A} \in \mathfrak{A}_0$ удовлетворяет условию (5), то все условия леммы 1 выполнены. Следовательно, $\mathfrak{A}_0 = C(X_\infty, A)$. Теперь по лемме 2,

$$C_0(X, A) = \{\bar{f} + g_a \mid X\colon f \in \mathfrak{A},\ a = \Theta_A\}.$$

Поэтому $\mathfrak{A} = C_0(X, A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 непосредственно следует

Следствие 2. *Пусть X — локально бикомпактное пространство и A является B^*-алгеброй. Если A-сопряженная замкнутая подалгебра $\mathfrak{A} \subset C_0(X, A)$ обладает свойствами* 1), 2) *и* 3) *теоремы* 2, *то* $\mathfrak{A} = C_0(X, A)$.

§ 4. Отображения между алгебрами $C_0(X, A)$ и $C_0(Y, B)$

Пусть A и B — (не обязательно коммутативные) банаховы алгебры, $\varphi: A \to B$ — ограниченное непрерывное отображение (с $\|\varphi\| \neq 0$), X — локально бикомпактное пространство и Y — такое локально бикомпактное пространство, которое является гомеоморфным замкнутым подпространством пространства X. Этот гомеоморфизм будем обозначать через ψ. Тогда $\psi(Y)$ замкнуто в X и для каждой $f \in C_0(X, A)$ функция $\varphi \circ f \circ \psi : Y \to B$ непрерывна на Y. Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ существует бикомпактное подмножество $X_\varepsilon \subset X$ такое, что

$$\|f(x)\|_A < \varepsilon(\|\varphi\|)^{-1} \tag{7}$$

для всех $x \in X \setminus X_\varepsilon$. При этом, условие (7) остается выполненным и для $x \in \psi(Y) \setminus [\psi(Y) \cap X_\varepsilon]$. Если теперь $\psi(Y) \cap X_\varepsilon \neq \varnothing$

при данном ε, то через Y_ε обозначим множество $\psi^{-1}[\psi(Y)\cap X_\varepsilon]\subset \subset Y$, а в противном случае — любое бикомпактное подмножество в Y. Учитывая это,

$$\|(\varphi\circ f\circ\psi)(y)\|_B\leqslant\|\varphi\|\,\|f[\psi(y)]\|_A<\varepsilon$$

для всех $y\in Y_\varepsilon$. Поскольку Y_ε бикомпактно, то $\varphi\circ f\circ\psi\in C_0(Y,B)$.

Пусть $F_{\varphi,\psi}: f\mapsto\varphi\circ f\circ\psi$ для каждой $f\in C_0(X,A)$. Тогда $F_{\varphi,\psi}[C_0(X,A)]\subset C_0(Y,B)$. Если φ — непрерывный гомоморфизм, то отображение $F_{\varphi,\psi}$ является гомоморфизмом с ядром

$$\ker F_{\varphi,\psi}=\{f\in C_0(X,A):\ f(x)\in\ker\varphi\ \forall\, x\in\psi(Y)\}.$$

Кроме того, отображение $F_{\varphi,\psi}$ будет инъекцией, если φ является инъекцией и ψ — сюръекцией.

Пусть теперь $\varphi: A\to B$ — непрерывный изоморфизм, для которого образ $\varphi(A)$ замкнут в B,

$$I=\{f\in C_0(X,A):\ f(x)=\Theta_A\ \ \forall\, x\in\psi(Y)\}$$

и $\Psi: C_0(X,A)/I\to F_{\varphi,\psi}[C_0(X,A)]$ — сюръективное отображение, определяемое для всех $f\in C_0(X,A)$ равенством

$$\Psi(f+I)=F_{\varphi,\psi}(f).$$

Поскольку

$$\|F_{\varphi,\psi}(f)\|_{C_0(Y,B)}\leqslant\|\varphi\|\,\|f\|_{C_0(X,A)}, \tag{8}$$

то гомоморфизм $F_{\varphi,\psi}$ ограничен. Поэтому (см. [9], стр. 49) $\|\Psi\|=\|F_{\varphi,\psi}\|$. Учитывая это,

$$\|\Psi(f+I)\|\leqslant\|\varphi\|\,\|f+I\|_{C_0(X,A)/I} \tag{9}$$

для всех $f\in C_0(X,A)$.

Пусть теперь

$$A_1=\{a\in A:\ \|a\|_A\leqslant M(f)\}$$

и

$$A_2=\{a\in A:\ \|a\|_A\geqslant M(f)\},$$

где

$$M(f)=K\|F_{\varphi,\psi}(f)\|_{C_0(Y,B)}$$

и K — постоянная, определяемая [10] изоморфизмом φ. Тогда $A= =A_1\cup A_2$, причем A_1 и A_2 замкнуты в A. Пусть теперь

---

[10] Так как $\varphi(A)$ замкнута в B, то существует такое постоянное K, что для всех $a\in A$

$$\|a\|_A\leqslant K\|\varphi(a)\|_B.$$

$\pi : A \to A_1$ — непрерывная сюръекция, определяемая равенством

$$\pi(a) = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \in A_1, \\ \dfrac{M(f)a}{\|a\|_A}, & \text{если} \quad a \in A_2, \end{cases}$$

и $h_f = \pi \circ f$ для всех $f \in C_0(X, A)$. Так как

$$\|\pi(a)\|_A \leqslant \|a\|_A$$

для всех $a \in A$, то

$$\|h_f(x)\|_A \leqslant \|f(x)\|_A$$

для всех $x \in X$. Поэтому $h_f \in C_0(X, A)$ при всех $f \in C_0(X, A)$. В силу того, что $f(x) \in A_1$ при каждом $x \in \psi(Y)$, имеем $h_f \in f + I$ и

$$\|f + I\|_{C_0(X,A)/I} \leqslant \|h_f\|_{C_0(X,A)} \leqslant M(f). \tag{10}$$

Учитывая теперь неравенства (9) и (10), получаем

$$K^{-1}\|f + I\|_{C_0(X,A)/I} \leqslant \|F_{\varphi,\psi}(f)\|_{C_0(Y,B)} \leqslant \|\varphi\| \, \|f + I\|_{C_0(X,A)/I}.$$

Следовательно, $F_{\varphi,\psi}[C_0(X, A)]$ замкнута в $C_0(Y, B)$.

Итак, нами доказана

Теорема 3. *Пусть A и B — банаховы (не обязательно коммутативные) алгебры, $\varphi : A \to B$ — непрерывный изоморфизм, X и Y — локально бикомпактные пространства и $\psi : Y \to X$ — гомеоморфизм. Если $\varphi(A)$ замкнут в B и $\psi(Y)$ замкнут в X, то $F_{\varphi,\psi}[C_0(X, A)]$ является замкнутой подалгеброй в $C_0(Y, B)$.*

Из теоремы 3 непосредственно следует

Следствие 3. *Пусть A — банахова алгебра, X — локально бикомпактное пространство и $Y \subset X$ — замкнутое подпространство. Тогда множество $\{f|Y : f \in C_0(X, A)\}$ замкнуто в $C_0(Y, A)$.*

Следствие 4. *Пусть A и B — банаховы алгебры, $\varphi : A \to B$ — сюръективный топологический изоморфизм, X и Y — локально бикомпактные пространства и $\psi : Y \to X$ — гомеоморфизм. Если $\psi(Y)$ замкнут в X и каждая функция $f \in C_0(\psi(Y), A)$ имеет продолжение $\bar{f} \in C_0(X, A)$, то $F_{\varphi,\psi}[C_0(X, A)] = C_0(Y, B)$.*

Доказательство. По теореме 3 алгебра $F_{\varphi,\psi}[C_0(X, A)]$ замкнута в $C_0(Y, B)$. Пусть $g \in C_0(Y, B)$. Тогда $f = F_{\varphi^{-1},\psi^{-1}}(g) \in C_0(\psi(Y), A)$. В силу предположения, существует $\bar{f} \in C_0(X, A)$. Так как $F_{\varphi,\psi}(\bar{f}) = g$, то $F_{\varphi,\psi}[C_0(X, A)] = C_0(Y, B)$.

Следствие 5. *Если A и B топологически изоморфные банаховы алгебры, а X и Y — гомеоморфные локально бикомпактные пространства, то алгебры $C_0(X, A)$ и $C_0(Y, B)$ топологически изоморфны.*

Доказательство. Из предположений следует изоморфность алгебр $C_0(X, A)$ и $C_0(Y, B)$. Учитывая теперь неравенство (8) получаем требуемое.

Из следствия 5 непосредственно следует

Следствие 6. *Если A и B — изометрически изоморфное банаховы алгебры, а X и Y — гомеоморфные локально бикомпактные пространства, то алгебры $C_0(X, A)$ и $C_0(Y, B)$ изометрически изоморфны.*

Литература

1. Абель М., Об алгебре ограниченных непрерывных функций со значениями в коммутативной банаховой алгебре с единицей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 52—77.
2. Абель М., Об обобщении теоремы Шеля. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 104—114.
3. Абель М., Некоторые свойства алгебр функций со значениями в банаховой алгебре. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 145—155.
4. Абель М., Отображения между алгебрами ограниченных непрерывных A-значных функций. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1974, **366**, 37—48.
5. Бурбаки Н., Спектральная теория. Москва, 1972.
6. Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ. Москва, 1956.
7. Hewitt, E., Ross, K. A., Abstract Harmonic Analysis I. Berlin, 1963.
8. Rickart, C. E., General Theory of Banach Algebras. New York — London, 1960.
9. Semadeni, Z., Banach Spaces of continuous Functions. Warszawa, 1971.
10. Yood, B., Banach algebras of continuous functions. Amer. J. Math., 1951, 73, 30—42.

Поступило
20 I 1975

ALGEBRA $C_0(X, A)$ MÕNINGAID OMADUSI

M. Abel ja E. Heringson

Resümee

Olgu X lokaalselt bikompaktne ruum, A — kommutatiivne ühikuga Banachi algebra ja $C_0(X, A)$ — kõigi ruumil X defineeritud pidevate A-väärtustega lõpmatuses nullile lähenevate funktsioonide Banachi algebra. Vaadeldavas töös leitakse tingimused selleks, et algebra $C_0(X, A)$ oleks topoloogiliselt isomorfne algebraga $C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathfrak{C})$ ning algebraga $C_0(Y, B)$ ja üldistatakse Stone-Weierstrassi teoreem algebra $C_0(X, A)$ juhule teatud Banachi algebra A korral.

Näidatakse, et lokaalselt bikompaktsete ruumide X ja Y homeomorfsusest ning Banachi algebrate A ja B topoloogilisest isomorfsusest järeldub algebrate $C_0(X, A)$ ja $C_0(Y, B)$ topoloogiline isomorfsus.

PROPERTIES OF THE ALGEBRA $C_0(X, A)$

M. Abel and E. Heringson

Summary

Let X be a locally bicompact space, A be a commutative Banach algebra with unit and $C_0(X, A)$ be the Banach algebra of all continuous A-valued functions, defined on X which vanish at infinity. Let $\mathfrak{M}(A)$ be the space of all maximal ideals of algebra A and $A^\wedge$ be the algebra of Gelfand's representations of algebra A.

In this paper the properties of $C_0(X, A)$ are considered. It is shown in § 2 that $C_0(X, A)$ and $C_0(X \times \mathfrak{M}(A), \mathfrak{C})$ (where $\mathfrak{C}$ is the field of complex numbers) are topologically isomorphic if A is a semisimple algebra and $A^\wedge = C(\mathfrak{M}(A), \mathfrak{C})$. The description of all closed and all maximal regular ideals of algebra $C_0(X, A)$ are given. In § 3 a generalization of the theorem of Stone-Weierstrass for algebra $C_0(X, A)$ is proved.

The mappings from $C_0(X, A)$ into $C_0(Y, B)$ are considered in § 4. It is proved that the algebras $C_0(X, A)$ and $C_0(Y, B)$ are topologically isomorphic if locally bicompact spaces X and Y are homeomorphic and Banach algebras A and B are topologically isomorphic.

БЕЗУСЛОВНЫЕ ШАУДЕРОВЫ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э. Оя

Кафедра математического анализа

Введение

Пусть X — локально выпуклое пространство[1]. *Шаудеровым разложением* пространства X называется такая последовательность (P_n) непрерывных ненулевых проекторов в пространстве X, что $P_n \circ P_m = 0$, если $n \neq m$, и любой элемент $x \in X$ представим в виде $x = \Sigma P_n x$, где ряд сходится в топологии пространства X. Пусть Σ — система всех конечных множеств натуральных чисел, упорядоченная по включению. Обозначим $U_\nu = \Sigma_{n \in \nu} P_n$, где $\nu \in \Sigma$, причем $U_\varnothing = 0$ для пустого множества $\varnothing$; если $\nu = \{1, 2, \ldots, n\}$, то положим $U_\nu = U_n$ и[2] $V_n = I - U_n$. Шаудерово разложение (P_n) пространства X называется *безусловным*, если $x = \lim_{\nu \in \Sigma} U_\nu x$ при каждом $x \in X$, т. е. ряд $\Sigma P_n x$ сходится безусловно к x. Так как (безусловный) шаудеров базис представляет собой (безусловное) шаудерово разложение, где $P_n X$ — одномерные пространства, то теория (безусловных) базисов может рассматриваться как часть теории (безусловных) разложений. Теория шаудеровых разложений в банаховых пространствах стала быстро развиваться начиная с работ У. Ракла [15] и Б. Сандерса [16, 17]. (Кстати, в [16] дается краткая история понятия шаудерова разложения.) Шаудеровы разложения в локально выпуклых пространствах систематически изучаются в работе Н. Калтона [10]. Хотя понятие безусловного шаудерова разложения для пространств Фреше было определено еще в [15], оно довольно мало изучено. Зато в ряде работ [3, 6, 11, 18] с точки зрения обобщения результатов Р. Джеймса [8] изучались безусловные шаудеровы базисы в

---

[1] Рассматриваются отделимые локально выпуклые пространства над полем вещественных чисел.

[2] Всюду I — единичное отображение.

локально выпуклых пространствах. Как видно из этих работ, попытки обобщать утверждения, известные в случае банахова пространства, наталкиваются на разнообразные препятствия, но дают много нового о линейно-топологической структуре локально выпуклых пространств.

Отправным пунктом для настоящей статьи являются следующие две теоремы Джеймса — Дэя (см. [1], гл. IV, §4, теоремы 2 и 3): *ограниченная полнота безусловного базиса банахова пространства эквивалентна слабой секвенциальной полноте пространства, а также отсутствию в нем подпространств, изоморфных пространству* c_0; *натягиваемость безусловного базиса банахова пространства эквивалентна отсутствию в нем подпространств, изоморфных пространству* l_1. В распространении этих теорем на локально выпуклые пространства, по-видимому, наибольших успехов достигли Л. Вейль [18] и Ю. Б. Тумаркин [3], которые рассматривают соответственно секвенциально полные бочечные и произвольные секвенциально полные локально выпуклые пространства. В § 2 настоящей статьи область справедливости этих теорем существенно расширяется, причем вместо безусловных базисов всюду рассматриваются разложения. Вследствие теорем, доказанных в § 2, результаты Тумаркина, касающиеся теорем Джеймса — Дэя, усиливаются, а Вейля — распространяются на более общие пространства, чем бочечные, как у Вейля.

Параграф 1, хотя он и носит весьма самостоятельный характер, является подготовительным для § 2. В локально выпуклом пространстве с шаудеровым разложением определяются ε-топологии, которые естественным образом связаны с данным разложением. Вводится понятие безусловно простого разложения, основой которого служит именно то свойство безусловных базисов, благодаря которому и удается доказать вышеупомянутые теоремы Джеймса — Дэя и их распространения.

§ 1. Определение ε-топологий, и их некоторые свойства. Безусловно простые шаудеровы разложения

Пусть X — локально выпуклое пространство с (топологическим) сопряженным X' и $\mathfrak{B}(X)$ — семейство всех ограниченных множеств в пространстве X. Пусть X_t, X_σ, X_τ и X_η обозначают пространство X соответственно с топологией[3] t, слабой топологией $\sigma = \sigma(X, X')$, топологией Макки $\tau = \tau(X, X')$ и с сильнейшей локально выпуклой топологией η на X такой, что $\mathfrak{B}(X_\eta) = \mathfrak{B}(X)$ (т. е. X_η — борнологическое пространство, ассоциированное с X); а X'_σ и X'_β обозначают сопряженное X' к X в сла-

[3] Всюду рассматриваются только локально выпуклые топологии.

бой и сильной топологиях $\sigma(X', X)$ и $\beta(X', X)$ соответственно. Нам понадобятся и следующие обозначения: $\mathfrak{E}$ — семейство всех равностепенно непрерывных множеств, $\mathfrak{C}$ — семейство всех множеств со слабо компактной замкнутой абсолютно выпуклой оболочкой в сопряженном пространстве X', $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X'_\beta)$ и $\mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{B}(X'_\sigma)$. Отметим, что имеют место включения $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_\sigma$.

Для характеризации шаудеровых разложений (P_n) в X вводим следующее условие

$$\{U_\nu x\colon \nu \in \Sigma\} \in \mathfrak{B}(X) \qquad \forall x \in X. \tag{1}$$

Условие (1) выполняется, если (P_n) — безусловное шаудерово разложение (тогда множество $\{U_\nu x\colon \nu \in \Sigma\}$ вполне ограничено). С другой стороны, справедливо

Предложение 1.1. *Если шаудерово разложение бочечного пространства удовлетворяет условию* (1), *то оно безусловно.*

Предложение 1.1 вытекает из следующей леммы, так как (в силу теоремы Банаха — Штейнгауза) множество $\{U_\nu\colon \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно.

Лемма 1.2. *Если (P_n) — шаудерово разложение для X_σ, где X — локально выпуклое пространство, а множество $\{U_\nu\colon \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно в X, то (P_n) — безусловное шаудерово разложение для X.*

Доказательство. Положим[4] $Y = \operatorname{lm} \bigcup P_n X$. Тогда Y плотно в X_σ, значит, и в X. Рассмотрим некоторую точку $x \in X$. Если задана окрестность нуля U и выбрана такая уравновешенная окрестность нуля V в X, что $V + V \subset U$, то в силу равностепенной непрерывности множества $\{U_\nu\colon \nu \in \Sigma\}$ существует окрестность нуля W в X такая, что $U_\nu(W) \subset V$ для всех $\nu \in \Sigma$. Выберем точку $y = U_\mu y \in Y$ такую, что $y - x \in V \cap W$. Тогда для всех $\nu \supset \mu$ выполняется соотношение

$$x - U_\nu x = x - y + U_\nu(y - x) \in V + V \subset U,$$

т. е. $x = \lim_{\nu \in \Sigma} U_\nu x$ в исходной топологии пространства X.

Если шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X удовлетворяет условию (1), то для каждой топологии t на X, где $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$, определяемой семейством полунорм $\{p_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$, поставим в соответствие *ε-топологию* $t\varepsilon$ как топологию, определяемую семейством полунорм $\{q_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$, где

$$q_\alpha(x) = \sup\{p_\alpha(x),\ p_\alpha(U_\nu x)\colon \nu \in \Sigma\}, \qquad x \in X. \tag{2}$$

Если $f \in (X_t)'$, то $t\varepsilon$-непрерывную полунорму, соответствующую по формуле (2) полунорме $|f(\cdot)|$, будем обозначать через q_f.

---

[4] Символ $\operatorname{lm} Y$ обозначает линейную оболочку множества $Y \subset X$.

Следующие два предложения дают некоторые свойства ε-топологий.

Предложение 1.3. *Пусть X — локально выпуклое пространство с шаудеровым разложением (P_n), удовлетворяющим условию* (1), *и t — топология на X, определяемая семейством полунорм $\{p_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$, такая, что $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$. Тогда*

1° *Для каждой полунормы q_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, выполняются неравенства*

$$q_\alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i U_{\nu_i} x\Big) \leqslant 2 \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |t_i| \cdot q_\alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} U_{\nu_i} x\Big), \qquad x \in X, \tag{3}$$

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n} |t_i| \cdot \sup_{1\leqslant i\leqslant n} q_\alpha(U_{\nu_i} x) \leqslant q_\alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i U_{\nu_i} x\Big), \qquad x \in X, \tag{4}$$

где $\nu_i \cap \nu_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и (t_i) — произвольный набор чисел.

2° *Для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ справедливо неравенство $p_\alpha(x) \leqslant q_\alpha(x)$, $x \in X$, так что $t \leqslant t\varepsilon$.*

3° *Топология $t\varepsilon$ — слабейшая топология на X, для которой множество отображений $\{I, U_\nu\colon \nu \in \Sigma\}$ пространства X в X_t равностепенно непрерывно.*

4° *Топология $t\varepsilon$ — слабейшая топология на X, для которой множество проекторов $\{U_\nu\colon \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно, и которая не слабее, чем t.*

5° *Топология $\sigma\varepsilon$ — слабейшая $\mathfrak{S}$-топология*[5] *(полярная топология) на X при дуальной паре (X, X'), для которой множество проекторов $\{U_\nu\colon \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно*[6].

6° *Если топология $t\varepsilon$ согласована с двойственностью (X, X'), то (P_n) является безусловным шаудеровым разложением для $X_{t\varepsilon}$.*

7° *Если проекторы P_n непрерывны в топологии t, то каждая t-сходящаяся $t\varepsilon$-сеть Коши сходится в топологии $t\varepsilon$.*

8° *Если (P_n) — безусловное шаудерово разложение для X_t, то оно и безусловное шаудерово разложение для $X_{t\varepsilon}$.*

Доказательство. Утверждение 1° получено в доказательстве леммы статьи [2], а 2° прямо вытекает из определения ε-топологии. Утверждение 3° следует из [13], стр. 885. Если топология $T \geqslant t$ такая, что $\{U_\nu\colon \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно в X_T, то согласно 3° имеем, $T \geqslant t\varepsilon$, что доказывает 4° (равностепенная непрерывность $\{U_\nu : \nu \in \Sigma\}$ в $t\varepsilon$ видна из (2)). Из 4° вытекает 5°, а 6° следует из 1.2 и 4°. Для доказательства

---

[5] Здесь $\mathfrak{S}$ — некоторое семейство множеств из $\mathfrak{B}_{\sigma}$, покрывающее X'.

[6] Вообще говоря, $\sigma < \sigma\varepsilon$, так как, например, никакое бесконечномерное банахово пространство X не может иметь шаудерова базиса такого, что множество проекторов $\{U_n : n = 1, 2, \ldots\}$ равностепенно непрерывно в X_σ (см. [14]).

7° рассмотрим $t\varepsilon$-сеть Коши (x_λ), которая сходится к x в топологии t и зафиксируем $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ имеем $\sup_{\nu \in \Sigma} p_\alpha(U_\nu(x_\lambda - x_\mu)) < \varepsilon$ для $\lambda, \mu \geqslant \lambda(\varepsilon)$. Следовательно, $p_\alpha(U_\nu(x_\lambda - x_\mu)) < \varepsilon$ для $\lambda, \mu \geqslant \lambda(\varepsilon)$ и любого $\nu \in \Sigma$. Учитывая, что $x = \lim_\lambda x_\lambda$, получим из последнего неравенства $p_\alpha(U_\nu(x - x_\lambda)) \leqslant \varepsilon$ для $\lambda \geqslant \lambda(\varepsilon)$ и любого $\nu \in \Sigma$, а это означает, что $q_\alpha(x - x_\lambda) \to_\lambda 0$. Чтобы доказать 8°, рассмотрим сеть $(U_\nu x)_{\nu \in \Sigma}$, которая сходится к x в X_t. Она удовлетворяет условию Коши в $X_{t\varepsilon}$, так как в противном случае существовали бы полунорма q_α, число $\varepsilon > 0$ и последовательность $(\nu(k)) \subset \Sigma$ попарно не пересекающихся множеств такие, что $q_\alpha(U_{\nu(k)}x) \geqslant \varepsilon$ для всех k. Но тогда

$$q_\alpha(U_{\nu(k)}x) = \max_{\nu \subset \nu(k)} p_\alpha(U_\nu x) = p_\alpha(U_{\mu(k)}x) \geqslant \varepsilon,$$

где $\mu(k)$ — некоторое подмножество множества $\nu(k)$, что противоречит сходимости $(U_\nu x)_{\nu \in \Sigma}$ в X_t. Остается использовать 7°.

Предложение 1.4. *Если $X = X_t$ — локально выпуклое пространство с шаудеровым разложением (P_n), удовлетворяющим условию* (1), *то условия*

1° *Топология $t\varepsilon$ согласована с двойственностью (X, X'),*

2° *Для любого $E \in \mathfrak{E}$ множество*[7] $\bigcup_{\nu \in \Sigma} U_\nu'(E) \in \mathfrak{E}$

эквивалентны и, в случае безусловного шаудерова разложения (P_n), следуют из условия

3° *Шаудерово разложение (P_n') для X'_σ полно*[8].

Доказательство. Условия 1° и 2° эквивалентны, так как поляры множеств $\bigcup_{\nu \in \Sigma} U_\nu'(E) \cup E$, где $E \in \mathfrak{E}$, образуют базу окрестностей нуля в $X_{t\varepsilon}$. Покажем, что из 3° следует 1°. Рассмотрим $f \in (X_{t\varepsilon})'$ и положим[9] $f_k = P_k^* f$. Поскольку $t\varepsilon$ и t совпадают на $P_k X$, то $f_k \in P_k' X'$. Так как (P_n) является шаудеровым разложением для $X_{t\varepsilon}$ (ввиду 8° из 1.3), то $f(x) = \Sigma f_k(x)$ при всех $x \in X$. Отсюда вытекает, что последовательность $(\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} f_k)$ удовлетворяет условию Коши в X'_σ и, в силу полноты (P_n'), сходится в X'_σ. Следовательно, $f \in X'$, что и завершает доказательство.

Н. Калтон [10] называет шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X простым, если $(U_n' f) \in \mathfrak{B}$ при

---

[7] Обозначим через A' топологический сопряженный оператора A.

[8] Очевидно, что (P_n') — шаудерово разложение для X'_σ. Определение полного шаудерова разложения приводится в начале § 2.

[9] Обозначим через A^* алгебраический сопряженный оператора A.

каждом $f \in X'$. Принимая во внимание это определение, будем называть шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X *безусловно простым*, если $\{U_\nu' f\colon \nu \in \Sigma\} \in \mathfrak{B}$ при каждом $f \in X'$. Важность этого понятия определяется главным образом теоремами следующего параграфа.

Каждое безусловно простое шаудерово разложение удовлетворяет условию (1). Следующая теорема охарактеризует безусловно простые шаудеровы разложения среди таких разложений в терминах ε-топологий.

Теорема 1.5. *Шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X, удовлетворяющее условию* (1), *является безусловно простым тогда и только тогда, когда существует топология t на X, где $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$, такая, что $\mathfrak{B}(X_{t\varepsilon}) = \mathfrak{B}(X)$. Если это условие выполнено, то $\mathfrak{B}(X_{t\varepsilon}) = \mathfrak{B}(X)$ при всех t на X таких, что $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$.*

Доказательство. Пусть найдется топология t на X такая, что $\mathfrak{B}(X_{t\varepsilon}) = \mathfrak{B}(X)$. Рассмотрим некоторое $A \in \mathfrak{B}(X)$ и положим $B = \bigcup_{\nu \in \Sigma} U_\nu(A)$. Так как $A \in \mathfrak{B}(X_{t\varepsilon})$ и множество отображений $\{U_\nu : \nu \in \Sigma\}$ пространства $X_{t\varepsilon}$ в X_t (в силу 3° из 1.3) равностепенно непрерывно, то $B \in \mathfrak{B}(X_t) = \mathfrak{B}(X)$. Значит, все $f \in X'$ ограничены на B, что, ввиду произвольности A, равносильно безусловной простоте разложения (P_n).

Пусть (P_n) безусловно простое и t — некоторая топология на X, удовлетворяющая условию $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$. Поскольку $t \leqslant t\varepsilon$, то $\mathfrak{B}(X_{t\varepsilon}) \subset \mathfrak{B}(X_t) = \mathfrak{B}(X)$. Рассмотрим $A \in \mathfrak{B}(X)$ и положим $U = (\bigcup_{\nu \in \Sigma} U_\nu(A))^\circ = \bigcap_{\nu \in \Sigma} (U_\nu')^{-1}(A^\circ)$, где поляры берутся в X'. Очевидно, что U — абсолютно выпуклое, $\sigma(X', X)$-замкнутое и, так как (P_n) — безусловно простое, то и поглощающее множество. Значит, U — бочка в X'_σ и поэтому $\bigcup_{\nu \in \Sigma} U_\nu(A) \in \mathfrak{B}(X_\sigma) = \mathfrak{B}(X_t)$. Но тогда $A \in \mathfrak{B}(X_{t\varepsilon})$, следовательно, $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}(X_{t\varepsilon})$.

Следствие 1. *Шаудерово разложение, удовлетворяющее условию* (1), *является безусловно простым тогда и только тогда, когда $\eta = \eta\varepsilon$.*

Следствие 2. *Если шаудерово разложение локально выпуклого пространства X является безусловно простым, то топологии t и T на X, где $\sigma \leqslant t \leqslant T \leqslant \eta\varepsilon$, совпадают на всех t-борнологических подпространствах пространства X.*

Доказательство очевидно, так как тождественное отображение $I : X_t \to X_T$ является ограниченным.

Следствие 3. *Шаудерово разложение локально выпуклого пространства X, удовлетворяющее условию* (1), *является безусловно простым, если существует топология t на X такая, что $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$ и $t\varepsilon$ согласуется с двойственностью (X, X').*

Отметим, что безусловное шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X, хотя, вообще говоря, оно может быть и не простым (см. пример Н. Калтона [10] о не простом шаудеровом базисе, который, как легко видеть, безусловный), в силу $\{U_\nu' f : \nu \in \Sigma\} \in \mathfrak{B}_\sigma$, $f \in X'$, является безусловно простым, если $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\sigma$. Но это равенство выполняется в таких более употребляемых пространствах, как, например, секвенциально полные (в том числе полурефлексивные) и бочечные пространства. Некоторые другие условия, гарантирующие безусловную простоту безусловного шаудерова разложения, дает следствие 3 теоремы 1.5 вместе с предложением 1.4. Если же шаудерово разложение (P_n) такое, что множество $\{U_\nu : \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно (а такие разложения, по лемме 1.2, являются безусловными), то оно безусловно простое, как вытекает из последующей теоремы. Для ее доказательства (а также в дальнейшем) нам потребуется

Лемма 1.6. *Пусть (P_n) — безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X. Если проекторы P_n слабо непрерывны в X_t, где $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$, то множество проекторов $U_\nu' : (X_t)' \to (X_t)'$, $\nu \in \Sigma$, равностепенно непрерывно в топологии $\beta((X_t)', X)$.*

Доказательство. Так как безусловно простое шаудерово разложение удовлетворяет условию (1), то в X можно ввести топологию $t\varepsilon$. По 3° из 1.3 множество $U_\nu : X_{t\varepsilon} \to X_t$, $\nu \in \Sigma$, равностепенно непрерывно. Тогда множество $U_\nu' : ((X_t)', \beta((X_t)', X)) \to ((X_t)', \beta((X_t)', X_{t\varepsilon}))$, $\nu \in \Sigma$, равностепенно непрерывно. Поскольку $\mathfrak{B}(X_{t\varepsilon}) = \mathfrak{B}(X)$ в силу теоремы 1.5, то $\beta((X_t)', X_{t\varepsilon}) = \beta((X_t)', X)$, что доказывает лемму.

Теорема 1.7. *Пусть X — локально выпуклое пространство с шаудеровым разложением (P_n) и t — некоторая топология на X, удовлетворяющая условию $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$. Для равностепенной непрерывности множества проекторов $\{U_\nu : \nu \in \Sigma\}$ в X_t необходимо, а если $t \leqslant \tau$ и X_t — квазибочечное*[10] *пространство, или же $t = \eta$, то и достаточно, чтобы разложение (P_n) было безусловно простым.*

Доказательство. Необходимость. Так как множество $\{U_\nu : \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно, то (P_n) удовлетворяет условию (1) и топология $t\varepsilon$ совпадает с t согласно 4° из 1.3. Следовательно, $\mathfrak{B}(X_{t\varepsilon}) = \mathfrak{B}(X)$, что в силу теоремы 1.5 равносильно безусловной простоте разложения (P_n).

Достаточность. Пусть $t \leqslant \tau$, т. е. $(X_t)' = X'$. Тогда проекторы P_n слабо непрерывны в X_t и поэтому из 1.6 вытекает равностепенная непрерывность множества $U'_\nu : X'_\beta \to X'_\beta$, $\nu \in \Sigma$. Для произвольного равностепенно непрерывного множества E

---

[10] Употребляется и термин «инфрабочечное».

в $(X_t)'$ положим $B = \bigcup_{\nu \in \Sigma} U_\nu'(E)$. Тогда множество B ограничено в X'_β. В силу квазибочечности X_t оно равностепенно непрерывно в $(X_t)'$ и поэтому его поляра B° является окрестностью нуля в X_t. Отсюда, ввиду равенства $B^\circ = \bigcap_{\nu \in \Sigma} U_\nu^{-1}(E^\circ)$, вытекает наше первое утверждение. Утверждение относительно $t = \eta$ сразу же следует из 4° предложения 1.3, если учитывать и следствие 1 теоремы 1.5.

Следствие 1. *Если $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ в X', то безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X является безусловным разложением*[11] *для всех X_t, где $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$; кроме того, имеет место $\tau = \tau\varepsilon$.*

Доказательство. Условие $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ означает, что X_τ квазибочечно. Из теоремы 1.7 следует, что множество $\{U_\nu \colon \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно в X_τ. Отсюда, $\tau = \tau\varepsilon$ по 4° из 1.3. Поскольку (P_n) — шаудерово разложение для X_σ, то оно, в силу 1.2, безусловное шаудерово разложение для X_τ и, следовательно, безусловное разложение для X_t, где $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$.

Из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Если локально выпуклое пространство X является борнологическим в своей топологии Макки, то безусловно простое шаудерово разложение пространства X является безусловным разложением для всех X_t, где $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$.*

В заключение этого параграфа отметим, что, ввиду 8° и 4° из 1.3 и вышедоказанной теоремы, любое безусловное шаудерово разложение пространства X_t, где $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$, является безусловно простым шаудеровым разложением для $X_{t\varepsilon}$. С другой стороны, имеет место

Предложение 1.8. *Каждое безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X является безусловным шаудеровым разложением для X_σ.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $x \in X$ и $f \in X'$. Полагая $t_k = \operatorname{sgn} f(P_k x)$, получим с помощью (3), что при всех n выполняется оценка

$$\sum_{k=1}^{n} |f(P_k x)| = f\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k P_k x\Big) \leqslant q_f\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k P_k x\Big) \leqslant 2 q_f(U_n x).$$

Поскольку $(U_n x) \in \mathfrak{B}(X)$ и $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}(X_{\sigma\varepsilon})$, так как разложение (P_n) — безусловно простое (теорема 1.5), то $\Sigma |f(P_k x)| < \infty$. Кроме того, ряд $\Sigma P_k x$ сходится к x в X_σ, значит, он сходится абсолютно и поэтому безусловно к x в X_σ.

---

[11] Понятие (безусловного) разложения (P_n) отличается от понятия (безусловного) шаудерова разложения (P_n) лишь тем, что здесь не требуется непрерывности проекторов P_n.

§ 2. Ограниченно полные и натягивающие безусловно простые шаудеровы разложения

Шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X называется *ограниченно полным*, если каждая ограниченная последовательность $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} x_k)$, где $x_k \in P_k X$, сходится. Если (P_n') является шаудеровым разложением пространства X'_β, то шаудерово разложение (P_n) пространства X называется *натягивающим*[12]. Немного расширяя определение Н. Калтона [9], будем называть шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X *полным в топологии* t на X, если проекторы P_n непрерывны в X_t и каждая t-последовательность Коши $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} x_k)$, где $x_k \in P_k X$, сходится в топологии t. Если разложение (P_n) полно в исходной топологии пространства X, то оно называется *полным*.

Предложение 2.1. *Если (Y_n) — последовательность подпространств локально выпуклого пространства X с шаудеровым разложением (P_n), то последовательность (Q_n), где Q_n — сужение проектора P_n на*[13] *$Y = \operatorname{clm} \bigcup P_n Y_n$, является шаудеровым разложением для Y, причем*[14] *$Q_n Y = P_n Y = {}^c P_n Y_n \subset X$. В случае безусловного, ограниченно полного, полного или натягивающего разложения (P_n), разложение (Q_n) будет соответственно таким же.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $P_n Y \subset {}^c P_n Y_n$. Так как ${}^c P_n Y_n \subset Y$, то $P_n Y \subset Y$ и, значит, Q_n является (непрерывным) проектором в Y. Очевидно, что (Q_n) — шаудерово разложение для Y. Из замкнутости множества $P_n Y$ в X, которая легко проверяется, получается, что ${}^c P_n Y_n \subset$ $\subset P_n Y$. Следовательно, $Q_n Y = P_n Y = {}^c P_n Y_n$. Утверждения о безусловности и (ограниченной) полноте очевидны, а натягиваемость (Q_n) непосредственно вытекает из натягиваемости (P_n), если использовать теорему Хана—Банаха.

Лемма 2.2. *Пусть (P_n) — безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X и последовательность $(\Sigma_{1\leqslant i\leqslant n} x_i) \in \mathfrak{B}(X)$, где $x_i \in P_i X$, не удовлетворяет условию Коши в некоторой топологии t на X, где $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$. Тогда существует последовательность $(\nu_k) \subset \Sigma$ такая, что*

---

[12] Эти понятия мы ввели, следуя [5]. Вместо ограниченной полноты употребляется и термин «γ-полнота» [10]. Ю. Б. Тумаркин [3] определяет понятие натягивающего шаудерова базиса, следуя классическому определению Джеймса [8], и показывает, что оно эквивалентно вышеприведенному для секвенциально полных пространств.

[13] Символ $\operatorname{clm} Y$ обозначает замкнутую линейную оболочку множества $Y \subset X$.

[14] Символ ${}^c Y$ обозначает замыкание множества $Y \subset X$.

$$\max\{i: i \in \nu_k\} < \min\{i: i \in \nu_{k+1}\} \tag{5}$$

и, если положить

$$z_k = \sum\nolimits_{i \in \nu_k} x_i,$$

то для любого конечного набора чисел $(t_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *и для любой* $t\varepsilon$*-непрерывной полунормы* q *выполнено неравенство*

$$q\left(\sum_{k=1}^{n} t_k z_k\right) \leqslant c \cdot \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |t_k| \tag{6}$$

и хотя бы для одной t*-непрерывной полунормы* p *— неравенство*

$$d \cdot \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |t_k| \leqslant p\left(\sum_{k=1}^{n} t_k z_k\right), \tag{7}$$

где числа $c > 0$ *и* $d > 0$ *зависят соответственно от* q *и* p.

Доказательство. Сразу же надо отметить, что $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}(X_{t\varepsilon})$ при всех t таких, что $\sigma \leqslant t \leqslant \eta$, поскольку (P_n) — безусловно простое (теорема 1.5). По предположениям леммы существуют t-непрерывная полунорма p, последовательность $(\nu_k) \subset \Sigma$, удовлетворяющая условию (5), и число $b > 0$ такие, что

$$p\left(\sum\nolimits_{i \in \nu_k} x_i\right) \geqslant b$$

при всех k. Положим

$$y_k = \sum\nolimits_{i \in \nu_k} x_i.$$

Так как $(\Sigma_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i) \in \mathfrak{B}(X_{t\varepsilon})$ и

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = U_{\nu_1 \cup \nu_2 \cup \ldots \cup \nu_n} \sum_{i=1}^{m(n)} x_i,$$

где $m(n) = \max\{i: i \in \nu_n\}$, то $(\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} y_k) \in \mathfrak{B}(X_{t\varepsilon})$ в силу равностепенной непрерывности множества $\{U_\nu: \nu \in \Sigma\}$ в $X_{t\varepsilon}$ (см. 4° из 1.3). Далее, пусть $f \in (X_t)'$. Полагая $t_k = \operatorname{sgn} f(y_k)$, получаем с помощью (3) при всех n соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k)| = f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k y_k\right) \leqslant q_f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k y_k\right) \leqslant 2q_f\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right).$$

Следовательно, последовательность $(\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} |f(y_k)|)$ ограничена и потому сходится. Отсюда вытекает, что $f(y_k) \to 0$ при всех $f \in (X_t)'$.

Рассмотрим теперь факторпространство $X^p = X/p^{-1}(0)$ и обозначим через Ψ каноническое отображение пространства X на X^p. Полунорма p определяет норму в X^p по формуле $\|\Psi x\| = p(x)$. Поскольку $\Psi^* g \in (X_t)'$ при каждом функционале $g \in (X^p)'$, то по доказанному выше $g(\Psi y_k) = (\Psi^* g) y_k \to 0$ при всех $g \in (X^p)'$. Рассмотрим сепарабельное подпространство $Y = \operatorname{clm}\{\Psi y_k\colon k = 1, 2, \ldots\}$ нормированного пространства X^p. По теореме Банаха—Мазура оно изометрически изоморфно вкладывается в $C[0, 1]$. Так как $C[0, 1]$ имеет базис, $\|\Psi y_k\| \geqslant b$ и (Ψy_k) слабо сходится к нулю в Y (поскольку все функционалы из Y' получаются сужением функционалов $g \in (X^p)'$ на Y, а (Ψy_k) сходится слабо к нулю в X^p), то по теореме Бессаги и Пелчинского [4] из (Ψy_k) можно выделить последовательность (Ψz_k) такую, что для любого конечного набора чисел $(t_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ будет выполняться неравенство

$$\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \|t_k \Psi z_k\| \leqslant C \left\|\sum_{k=1}^{n} t_k \Psi z_k\right\|, \qquad C \geqslant 1.$$

Отсюда в силу $\|\Psi z_k\| \geqslant b$ вытекает (7) с $d = b/C$. Так как $(\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} y_k) \in \mathfrak{B}(X_{t\varepsilon})$, то и $(\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} z_k) \in \mathfrak{B}(X_{t\varepsilon})$. Поэтому (6) сразу же получается из (3). Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Ограниченно полное безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X является безусловным разложением для всех X_t, где $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$.*

Доказательство. Обозначим через T исходную топологию пространства X. При любых $x \in X$, возрастающей последовательности (n_k) номеров, T-непрерывной полунорме p_α и соответствующей ей (по формуле (2)) $T\varepsilon$-непрерывной полунорме q_α имеем

$$\sup_m p_\alpha\Big(\sum_{k=1}^{m} P_{n_k} x\Big) \leqslant \sup_m q_\alpha\Big(\sum_{k=1}^{m} P_{n_k} x\Big) \leqslant \sup_{\nu \in \Sigma} q_\alpha(U_\nu x) < \infty$$

согласно теореме 1.5. Теперь из ограниченной полноты разложения (P_n) вытекает, что ряд $\Sigma P_n x$ сходится по подпоследовательностям. С помощью теоремы Орлича—Петтиса (см., например, [12]) заключаем, что ряд $\Sigma P_n x$ сходится по подпоследовательностям и, следовательно, безусловно во всех топологиях t на X, где $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$.

Будем говорить, что локально выпуклое пространство Z и подпространство Y локально выпуклого пространства X с проекторами (P_n) в X являются *$w\omega$-полно разложимо-изоморфными*, если пространство Z изоморфно пространству Y, (8)

все подпространства ${}^cP_nY \subset X$ слабо секвенциально полны; (9)

сепарабельно-сопряженно разложимо-изоморфными, если выполняется условие (8) и

все пространства $({}^cP_nY)'$ сильно сепарабельны; (10)

конечномерно разложимо-изоморфными, если выполняется условие (8) и

все пространства P_nY конечномерны. (11)

Отметим, что (11) $\Rightarrow$ (9) и (11) $\Rightarrow$ (10), а условие (11) автоматически выполнено, если (P_n) — конечномерное разложение.

Теорема 2.4. *Пусть (P_n) — безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X. Рассмотрим следующие утверждения:*

1° *Разложение (P_n) ограниченно полно.*

2° *Если подпространства $Y_n \subset X$ такие, что все ${}^cP_nY_n \subset X$ являются слабо секвенциально полными, то пространство $Y = \operatorname{clm} \bigcup P_nY_n \subset X$ слабо секвенциально полно относительно топологии $t\varepsilon$, где t — исходная топология пространства X.*

$2^{\circ\circ}$ *При тех же условиях, что и в 2°, пространство Y слабо секвенциально полно.*

3° *Пространство X не содержит подпространств, $\mathfrak{w}\omega$-полно разложимо-изоморфных пространству c_0.*

4° *Пространство X не содержит подпространств, конечномерно разложимо-изоморфных пространству c_0.*

5° *Разложение (P_n) полно.*

Тогда имеют место импликации $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ \,\&\, 5^\circ \Leftrightarrow 4^\circ \,\&\, 5^\circ$ *и* $2^{\circ\circ} \Rightarrow 1^\circ$. *Если (дополнительно) $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ в X' или*

шаудерово разложение (P_n') для X'_σ полно, (12)

то $1^\circ \Rightarrow 2^{\circ\circ}$.

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Условимся о том, что в этой части доказательства прилагательное «слабое» и наречие «слабо» будем употреблять для обозначения свойств, относящихся к слабой топологии, ассоциированной с $t\varepsilon$. Рассмотрим слабую последовательность Коши $(x_n) \subset Y$. Тогда при всех k последовательность (P_kx_n), которая в силу 2.1 содержится в $P_kY = {}^cP_kY_k \subset Y$, удовлетворяет слабому условию Коши и, поскольку t совпадает с $t\varepsilon$ на P_kX, слабо сходится к $v_k = P_kv_k \in Y$. Отсюда получаем, что

$$U_\nu x_n - \Sigma_{k\in\nu} v_k = \Sigma_{k\in\nu} P_k(x_n - v_k) \underset{n}{\rightarrow} 0$$

слабо при всех $\nu \in \Sigma$. Поэтому для любого функционала $f \in X'$ имеем

$$\sup_{\nu\in\Sigma} \left|f\left(\sum_{k\in\nu} v_k\right)\right| = \sup_{\nu\in\Sigma} \lim_n |f(U_\nu x_n)| \leqslant \sup_n q_f(x_n) < \infty,$$

так как последовательность (x_n), будучи слабо ограниченной, $t\varepsilon$-ограничена. Отсюда следует, что последовательность $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} v_k)$ ограничена в топологии t. Вследствие ограниченной полноты разложения (P_k) и замкнутости Y существует $x \in Y$ с $P_k x = v_k$.

Положим $y_n = x_n - x$. Тогда (y_n) — слабая последовательность Коши и $P_k y_n \to_n 0$ слабо при всех k. Покажем, что (y_n) слабо стремится к нулю. Если бы это было не так, то существовали бы $g \in (X_{t\varepsilon})'$ и подпоследовательность (z_n) последовательности (y_n) такие, что $g(z_n) \geqslant 8$ для всех n. Полунорма q_g, соответствующая $|g(\cdot)|$, является $t\varepsilon$-непрерывной, поскольку $t\varepsilon = t\varepsilon\varepsilon$ по 4° из 1.3. Так как $q_g(P_k z_n) = |g(P_k z_n)| \underset{n}{\to} 0$ при всех k, то

$$q_g(U_\nu z_n) \underset{n}{\to} 0 \qquad \forall \nu \in \Sigma. \tag{13}$$

Поскольку (P_k), вследствие 2.3 и 8° из 1.3, является шаудеровым разложением для $X_{t\varepsilon}$, то при всех n

$$q_g(V_k z_n) \underset{k}{\to} 0. \tag{14}$$

Положим $n(1) = 1$. Исходя из (14) и (13) соответственно, выберем возрастающие последовательности $(m(k))$ и $(n(k))$ такие, что $q_g(V_{m(1)} z_{n(1)}) \leqslant 1$, $q_g(U_{m(1)} z_{n(2)}) \leqslant 1$, $q_g(V_{m(2)} z_{n(2)}) \leqslant 1$, $q_g(U_{m(2)} z_{n(3)}) \leqslant 1$ и т. д. Положим $w_k = (U_{m(k)} - U_{m(k-1)}) z_{n(k)}$, где $U_{m(0)} = 0$; тогда

$$q_g(z_{n(k)} - w_k) = q_g(V_{m(k)} z_{n(k)} + U_{m(k-1)} z_{n(k)}) \leqslant 2,$$

$$g(w_k) = g(z_{n(k)}) - g(z_{n(k)} - w_k) \geqslant 8 - q_g(z_{n(k)} - w_k) \geqslant 6.$$

Отсюда, по условию (3),

$$q_g\left(\sum_{k\in\nu} t_k z_{n(k)}\right) \geqslant q_g\left(\sum_{k\in\nu} t_k w_k\right) - q_g\left(\sum_{k\in\nu} t_k (z_{n(k)} - w_k)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} g\left(\sum_{k\in\nu} |t_k| w_k\right) - \sum_{k\in\nu} |t_k| q_g(z_{n(k)} - w_k) \geqslant \sum_{k\in\nu} |t_k|. \tag{15}$$

Но так как $(z_{n(k)})$, будучи слабой последовательностью Коши, $t\varepsilon$-ограничена, то для любой $t\varepsilon$-непрерывной полунормы q существует число $c > 0$ такое, что

$$q\Big(\sum_{k\in\nu} t_k z_{n(k)}\Big) \leqslant c \sum_{k\in\nu} |t_k|. \tag{16}$$

Пусть $\Phi \subset l_1$ обозначает множество всех финитных последовательностей, наделенное l_1-нормой, и (e_k) — естественный базис пространства l_1. Согласно (16) и (15), линейное отображение S: $\Phi \to X_{t\varepsilon}$, определенное формулой $S(\Sigma_{k\in\nu} t_k e_k) = \Sigma_{k\in\nu} t_k z_{n(k)}$, непрерывно и на $S\Phi \subset X_{t\varepsilon}$ имеет непрерывное обратное. Так как $(z_{n(k)})$ — слабая последовательность Коши, то $e_k = S^{-1} z_{n(k)}$ является слабой последовательностью Коши в Φ. А это невозможно, поскольку Φ' и l_1' совпадают. Таким образом, $y_n = x_n - x$ сходится слабо к нулю.

$2° \Rightarrow 3°$. Допустим, что пространство c_0 изоморфно подпространству $Z \subset X_t$ и все ${}^cP_n Z \subset X_t$ слабо секвенциально полны. Из $2°$ вытекает, что пространство $Y = \operatorname{clm} \bigcup P_n Z$ слабо секвенциально полно относительно топологии $t\varepsilon$. Ясно, что $Z \subset Y$. Поскольку Z является t-полным, то оно $t\varepsilon$-замкнуто и поэтому Z, наделенное $t\varepsilon$-топологией, слабо секвенциально полно. Так как Z, будучи изоморфным пространству c_0, борнологично в t-топологии, то в силу следствия 2 теоремы 1.5 топологии t и $t\varepsilon$ совпадают на Z. Итак, пространство c_0, которое не является слабо секвенциально полным, изоморфно слабо секвенциально полному пространству. Полученное противоречие доказывает утверждение.

$2° \Rightarrow 5°$. Рассмотрим t-последовательность Коши $y_n = \Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$, где $x_k = P_k x_k$. Полагая $t_k = \operatorname{sgn} f(x_k)$ для любого функционала $f \in (X_{t\varepsilon})'$, получаем с помощью (3)

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| = f\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\Big) \leqslant 2q_f(y_n).$$

Поскольку $(y_n) \in \mathfrak{B}(X_t)$ и $\mathfrak{B}(X_t) = \mathfrak{B}(X_{t\varepsilon\varepsilon})$, так как (P_n) — безусловно простое (теорема 1.5), то $\Sigma\|f(x_k)\| < \infty$ при всех $f \in (X_{t\varepsilon})'$. Значит, (y_n) является $\sigma(X, (X_{t\varepsilon})')$-последовательностью Коши. Поскольку, как вытекает из $2°$, $Y = \operatorname{clm}\{x_k\colon k = 1, 2, \ldots\}$ секвенциально полно в $\sigma(X, (X_{t\varepsilon})')$, то $(y_n) \subset Y$ сходится в этой топологии и, следовательно, в X_σ. Но так как последовательность (y_n) удовлетворяет условию Коши в X_t, то она сходится и в X_t.

$2°° \Rightarrow 3° \,\&\, 5°$. Доказательство аналогично установлению импликаций $2° \Rightarrow 3°$ и $2° \Rightarrow 5°$ (но проще, так как не требуется переходить к ε-топологии).

$3° \Rightarrow 4°$. Импликация очевидна (и верна для любого шаудерова разложения).

$4° \,\&\, 5° \Rightarrow 1°$. Пусть исходная топология t пространства X определяется полунормами $\{p_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и пусть $t\varepsilon$-непрерывная полунорма q_α соответствует полунорме p_α согласно формуле (2). Допустим, что существует последовательность $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} x_k) \in$

$\in \mathfrak{B}(X)$, где $x_k = P_k x_k$, которая не сходится в X_t, и потому, ввиду 5°, не удовлетворяет условию Коши в X_t. В силу 2.2 найдется последовательность

$$z_k = U_{\nu_k} z_k,$$

удовлетворяющая условиям (5), (6) и (7). Рассмотрим $(t_k) \in c_0$ и положим $y_n = \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} t_k z_k$. Из (6) вытекает, что (y_n) удовлетворяет условию Коши в $X_{t\varepsilon}$. Покажем, что (y_n) сходится в X_t. Пусть

$$w_i = \begin{cases} P_i(t_k z_k), & \text{если существует номер } k \text{ такой, что } i \in \nu_k, \\ 0, & \text{если } i \notin \bigcup \nu_k. \end{cases}$$

Зафиксируем $n \leqslant m$ и рассмотрим $\Sigma_{n \leqslant i \leqslant m} w_i$. Так как можно считать, что $w_n, w_m \neq 0$, то существуют однозначно определенные числа $k(n) \leqslant k(m)$ такие, что $n \in \nu_{k(n)}$ и $m \in \nu_{k(m)}$. Полагая $\varepsilon_i = 1$, если $n \leqslant i \leqslant m$, и $\varepsilon_i = 0$ в остальных случаях, $l(n) = \min\{i\colon\ i \in \nu_{k(n)}\}$ и $L(m) = \max\{i\colon\ i \in \nu_{k(m)}\}$, получаем для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ с помощью (3)

$$p_\alpha\Big(\sum_{i=n}^{m} w_i\Big) \leqslant q_\alpha\Big(\sum_{i=n}^{m} w_i\Big) = q_\alpha\Big(\sum_{i=l(n)}^{L(m)} \varepsilon_i w_i\Big) \leqslant$$

$$\leqslant 2q_\alpha\Big(\sum_{i=l(n)}^{L(m)} w_i\Big) = 2q_\alpha\Big(\sum_{i=k(n)}^{k(m)} t_i z_i\Big).$$

Поскольку (y_n) является $t\varepsilon$-последовательностью Коши и $k(n) \xrightarrow[n]{} \infty$, то последовательность $(\Sigma_{1 \leqslant i \leqslant n} w_i)$ удовлетворяет условию Коши в X_t и, в силу 5°, сходится. Следовательно, в X_t сходится и ее подпоследовательность (y_n).

Теперь можем определить линейное отображение $S\colon c_0 \to Z$, где Z — линейное множество всех сходящихся в X_t рядов вида $\Sigma t_k z_k$, наделенное топологией t, формулой $S(t_k) = \Sigma t_k z_k$. Из (6) вытекает непрерывность отображения S, а из (7) его инъективность и, благодаря полноте пространства c_0, сюръективность. Из (7) получается и непрерывность обратного отображения S^{-1}. Но в силу определения элементов z_k ясно, что $\dim P_k Z \leqslant 1$ при всех k, т. е. Z конечномерно разложимо-изоморфно пространству c_0, что противоречит условию 4°. Первая часть теоремы доказана.

2° $\Rightarrow$ 2°°. Пусть сначала $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ в X'. Так как в силу 1.6 множество $\{U_\nu'\colon\ \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно в X'_β, то $\bigcup_{\nu \in \Sigma} U'_\nu(E) \in \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ для любого $E \in \mathfrak{C}$. Теперь из 1.4 следует, что $(X_{t\varepsilon})' = X'$; значит, 2° $\Leftrightarrow$ 2°°. Наконец, пусть выполнено условие (12). Так как, по доказанному выше, 2° $\Leftrightarrow$ 1°, то в силу 2.3 шаудерово разложение (P_n) является безусловным. Отсюда с помощью предложения 1.4 получим, что $(X_{t\varepsilon})' = X'$, т. е. $2^\circ \Leftrightarrow 2^{\circ\circ}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть (P_n) — безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства $X = X_t$ на слабо секвенциально полные пространства $P_n X$. Рассмотрим следующие утверждения:*

1° *Разложение (P_n) ограниченно полно.*

2° *Пространство $X_{t\varepsilon}$ слабо секвенциально полно.*

$2^{\circ\circ}$ *Пространство X слабо секвенциально полно.*

3° *Разложение (P_n) полно и X не содержит подпространств, изоморфных пространству c_0.*

Тогда имеют место импликации $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$ и $2^{\circ\circ} \Rightarrow 1^\circ$. Если (дополнительно) $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ в X' или выполнено условие (12), *то* $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 2^{\circ\circ} \Leftrightarrow 3^\circ$.

Доказательство. Импликации $2^{\circ\circ} \Rightarrow 1^\circ$, $1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$, $3^\circ \Rightarrow 2^\circ$ и, при дополнительных условиях, $1^\circ \Rightarrow 2^{\circ\circ}$ непосредственно получаются из теоремы. Импликация $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ доказывается аналогично установлению импликаций $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ и $2^\circ \Rightarrow 5^\circ$ в доказательстве теоремы.

Следствие 2. *Пусть (P_n) — безусловное шаудерово разложение локально выпуклого пространства $X = X_t$ на слабо секвенциально полные пространства $P_n X$ и пусть условия 1°, 2°, $2^{\circ\circ}$, 3° те же, что и в следствии* 1. *Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\sigma$ в X', то $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$ и $2^{\circ\circ} \Rightarrow 1^\circ$. Если выполнено условие* (12), *то* $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 2^{\circ\circ} \Leftrightarrow 3^\circ$.

Для доказательства заметим, что предположения следствия 2 гарантируют безусловную простоту (P_n). Для $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\sigma$ это очевидно, а если выполнено (12), то в силу 1.4 имеем $t\varepsilon \leqslant \tau$; следовательно, $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}(X_{t\varepsilon})$, что равносильно безусловной простоте (P_n) согласно теореме 1.5.

Замечания. Из следствия 2 вытекают все известные нам распространения теоремы 2 из [1], гл. IV, § 4, на локально выпуклые пространства. Рассмотрим некоторые из них. Дубинский и Резерфорд [6] доказали эквивалентность условий 1° и $2^{\circ\circ}$ для шаудерова базиса (e_n) такого, что все сходящиеся ряды $\Sigma a_n e_n$ сходятся устойчиво[15], в локально выпуклом пространстве X таком, что пространство X'_σ секвенциально полно. Согласно следствию 2, этот результат имеет место в более слабых предположениях: базис (e_n) — безусловный и выполняется (12). Л. Вейль [18] рассматривает безусловные шаудеровы базисы в бочечных пространствах и доказывает, что $1^\circ \Leftrightarrow 2^{\circ\circ} \Leftrightarrow 3^{\circ\circ}$, где $3^{\circ\circ}$ отличается от нашего 3° тем, что вместо полноты (P_n) там фигурирует секвенциальная полнота пространства X, которая очевид-

---

[15] Ряд Σx_n называется устойчиво сходящимся, если для любой ограниченной последовательности чисел (b_n) ряд $\Sigma b_n x_n$ сходится. Из устойчивой сходимости ряда следует его безусловная сходимость.

ным образом вытекает из $2^{\circ\circ}$. Отсюда ясно, что $3^{\circ\circ} \Leftrightarrow 3^{\circ}$, если только $3^{\circ} \Leftrightarrow 2^{\circ\circ}$, и поэтому результат Вейля распространяется на более общие пространства, удовлетворяющие условию (12). Ю. Б. Тумаркин [3] доказывает, что $3^{\circ} \Rightarrow 1^{\circ}$ для безусловного шаудерова базиса в секвенциально полном локально выпуклом пространстве. Так как из секвенциальной полноты пространства X следует, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\sigma}$ в X', то в силу следствия 2 имеет место и обратное утверждение $1^{\circ} \Rightarrow 3^{\circ}$.

Переходим теперь к изучению натягивающих шаудеровых разложений. Здесь отправным пунктом является теорема Джеймса — Дэя о том, что безусловный базис в банаховом пространстве X является натягивающим тогда и только тогда, когда X не содержит подпространств, изоморфных l_1 (см. [8] и [1], стр. 129). Пожалуй наиболее интересным среди обобщений этой теоремы на локально выпуклые пространства является результат Ю. Б. Тумаркина [3], который связывает натягиваемость безусловного базиса в X с наличием подпространств, изоморфных l_1, в η-топологии подпространства, а не в исходной топологии X, как это делается обычно. Как будет видно из дальнейшего, такой переход к более сильным топологиям, чем та, в которой был задан базис, является в известном смысле неизбежным, а η-топология — экстремальной.

Приведем сначала рассуждения, которые показывают, что для исходной топологии нельзя, вообще говоря, получить критерия натягиваемости безусловного шаудерова базиса в общем локально выпуклом пространстве «на языке l_1-пространств». Заметим, что шаудеров базис локально выпуклого пространства X является натягивающим тогда и только тогда, когда он является натягивающим шаудеровым базисом для X_{σ} (ясно, что шаудеров базис для X является шаудеровым базисом для X_{σ}). Но пространство X_{σ} не может иметь подпространства, изоморфного l_1. В самом деле, допустим, что это так. Тогда существуют $(x_i) \subset X$, $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \subset X'$ и $C \geqslant 1$ такие, что для любого конечного набора чисел $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ выполнены неравенства

$$\sup_{1 \leqslant j \leqslant p} \left|\sum_{i=1}^{n} t_i f_j(x_i)\right| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |t_i|, \tag{17}$$

$$C \geqslant |f_j(x_i)| \geqslant 1, \quad i=1, 2, \ldots, j=1, 2, \ldots, p.$$

Исходя из второго условия, выделим подпоследовательность $(y_i) \subset (x_i)$ такую, чтобы имели место неравенства

$$a_j - \frac{1}{2} \leqslant |f_j(y_i)| \leqslant a_j + \frac{1}{2}, \quad i=1, 2, \ldots, j=1, 2, \ldots, p,$$

где числа a_j зависят от f_j и удовлетворяют условию $C \geqslant a_j \geqslant 1$. Из (y_i) выделим подпоследовательность (z_i) такую, что $\operatorname{sgn} f_j(z_1) = \operatorname{sgn} f_j(z_2) = \ldots$ для любого $j = 1, 2, \ldots, p$. Полагая $t_{2i-1} = 1$ и $t_{2i} = -1$, получим $\Sigma_{1 \leqslant i \leqslant 2p} |t_i| = 2p$ и

$$|\Sigma_{1 \leqslant i \leqslant 2p} t_i f_j(z_i)| = |\Sigma_{1 \leqslant i \leqslant 2p} t_i \,|f_j(z_i)|| \leqslant p\left(a_j + \frac{1}{2} - a_j + \frac{1}{2}\right) = p,$$

что противоречит неравенству (17).

Пусть (P_n) — шаудерово разложение локально выпуклого пространства X. В исследованиях по натягиваемости шаудеровых разложений (базисов) (см., например, [6, 10]) используется пространство

$$H = \{f \in X' : f = \lim U'_n f \text{ в } X'_\beta\},$$

наделенное топологией $\beta(X', X)$. Очевидно, что (P_n') является шаудеровым разложением для H. Следующее предложение, которое потребуется нам в дальнейшем, описывает это разложение в случае безусловно простого (P_n).

Предложение 2.5. *Если (P_n) — безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X, то (P_n') — безусловно простое шаудерово разложение для H, причем множество проекторов $\{U_\nu' : \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно в X'_β.*

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 1.6 и теоремы 1.7.

Лемма 2.6. *Пусть (P_n) — безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X. Если (P_n) не является натягивающим, то существует последовательность*

$$x_k = U_{\nu_k} x_k,$$

где множества ν_k удовлетворяют условию (5), такая, что для любого конечного набора чисел $(t_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ и для любой η-непрерывной[16] *полунормы p выполнено неравенство*

$$p\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant c \sum_{k=1}^{n} |t_k| \tag{18}$$

и хотя бы для одной $\sigma\varepsilon$-непрерывной полунормы q — неравенство

$$d \sum_{k=1}^{n} |t_k| \leqslant q\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right), \tag{19}$$

где числа $c > 0$ и $d > 0$ зависят от p и q соответственно.

---

[16] Напомним (см. следствие 1 теоремы 1.5), что так как (P_n) — безусловно простое, то $\eta = \eta\varepsilon$.

Доказательство. По предположению найдется функционал $f \in X'$ такой, что $(U_n' f)$ не сходится в X'_β. Последовательность $(U_n' f)$ не удовлетворяет условию Коши в X'_β. Действительно, в противном случае она сходилась бы к элементу[17] $g \in X^*$ равномерно на каждом множестве из $\mathfrak{B}(X)$. Но поскольку $U_n' f \to f$ в X'_σ, то $g = f$, и следовательно, $(U_n' f)$ сходится в X'_β, что противоречит нашему предположению. Кроме того, $(U_n' f) \in \mathfrak{B}$, так что в силу 2.5 и 2.2 существует последовательность $(\nu_k) \subset \Sigma$, удовлетворяющая условию (5), такая, что для любого конечного набора чисел $(t_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ и хотя бы для одного множества $B \in \mathfrak{B}(X)$ выполнено неравенство

$$b \cdot \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |t_k| \leqslant \sup_{x \in B} \Big(\sum_{k=1}^{n} t_k f_k(x)\Big), \qquad \text{где} \qquad f_k = U_{\nu'_k} f$$

и $b > 0$ зависит от B. Исходя из этого неравенства, выберем последовательность $(x_k) \in \mathfrak{B}(X)$ такую, что $f_k(x_k) \geqslant b$. Так как $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}(X_{\eta\varepsilon})$ (в силу теоремы 1.5) и

$$f_k = U_{\nu'_k} f_k,$$

то можно считать, что

$$x_k = U_{\nu_k} x_k.$$

Тогда $f_k(x_l) = 0$ при $k \neq l$, поскольку множества ν_k попарно не пересекаются. Так как $(x_k) \in \mathfrak{B}(X_\eta)$, то выполняется (18). Чтобы доказать (19), рассмотрим произвольный набор чисел $(t_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. Полагая $\varepsilon_k = \operatorname{sgn} t_k$, получим с помощью (3), что

$$b \sum_{k=1}^{n} |t_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k t_k f_k(x_k) = \Big(\sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l f_l\Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\Big) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{\nu \in \Sigma} \Big| \Big(\sum_{l=1}^{n} f_l\Big) \Big(U_\nu \sum_{k=1}^{n} t_k x_k\Big) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{\nu \in \Sigma} \Big| f\Big(U_\nu \sum_{k=1}^{n} t_k x_k\Big) \Big| = 2 q_f \Big(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\Big).$$

Итак, найдется $\sigma\varepsilon$-непрерывная полунорма q_f такая, что выполняется (19).

Теорема 2.7. *Пусть (P_n) — натягивающее шаудерово разложение локально выпуклого пространства X. Тогда X, а если выполнено условие* (12) *(соответственно $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ в X') и (P_n) — безусловно простое, то и $X_{\sigma\varepsilon}$ (соответственно X_t, где $\sigma \leqslant t \leqslant \tau\varepsilon$), не содержат подпространств, сепарабельно-сопряженно разложимо-изоморфных пространству l_1.*

---

[17] Обозначим алгебраическое сопряженное пространства X через X^*.

Пусть (P_n) — безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X и пусть существует топология T на X, где $\sigma \leqslant T \leqslant \eta$, в которой (P_n) является полным. Если (P_n) не является натягивающим, то X_t, где t — любая топология на X такая, что $\sigma\varepsilon \leqslant t \leqslant \eta = \eta\varepsilon$, содержит подпространство, конечномерно разложимо-изоморфное пространству l_1.

Доказательство. Пусть шаудерово разложение (P_n) — натягивающее. Допустим, что l_1 изоморфно подпространству $Z \subset X$ и все $({}^cP_nZ)'_\beta$ сепарабельны. В силу 2.1 сужения Q_n проекторов P_n на $Y = \mathrm{clm} \bigcup P_nZ \subset X$ образуют натягивающее шаудерово разложение пространства Y, причем $(Q_nY)' = ({}^cP_nZ)'$. Но так как $Q_n'(Y'_\beta)$ (подпространство в Y'_β) и $(Q_nY)'_\beta$ естественно изоморфны (функционал $Q_n'f$ отождествляется с сужением $f \in Y'$ на Q_nY) и $Y'_\beta = \mathrm{clm} \bigcup Q_n'(Y'_\beta)$, то пространство Y'_β сепарабельно. Поскольку $Z \subset Y$, то Y'_β непрерывно отображается на Z'_β, что невозможно в силу несепарабельности пространства Z'_β.

Предположим, что (P_n) — натягивающее и безусловно простое и выполнено (12). В силу вышедоказанного нужно показать, что (P_n) является натягивающим шаудеровым разложением для $X_{\sigma\varepsilon}$. Будучи безусловно простым, (P_n) является в силу 1.8 безусловным шаудеровым разложением для X_σ и потому, вследствие 8° из 1.3, шаудеровым разложением для $X_{\sigma\varepsilon}$. Рассматривая (P_n) в X_σ, получим из (12) с помощью предложения 1.4, что $(X_{\sigma\varepsilon})' = X'$. Так как (P_n) — натягивающее и $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}(X_{\sigma\varepsilon})$, то отсюда вытекает натягиваемость шаудерова разложения (P_n) для $X_{\sigma\varepsilon}$. Относительно случая $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ отметим следующее. По следствию 1 теоремы 1.7, $\tau = \tau\varepsilon$ и (P_n) — (безусловное) разложение для X_τ, причем шаудерово, так как проекторы P_n непрерывны в топологии τ, и, очевидно, натягивающее. Если X_t, где $\sigma \leqslant t \leqslant \tau\varepsilon$, содержит подпространство Z, изоморфное l_1, то Z борнологично в топологии t и поэтому (см. следствие 2 теоремы 1.5) t совпадает с $\tau\varepsilon$ на Z. Значит, Z, рассматриваемое как подпространство в $X_{\tau\varepsilon}$, изоморфно l_1. Остается заметить, что (10) зависит только от двойственности (X, X') и использовать утверждение, доказанное первым. Первая часть теоремы доказана.

Допустим, что в предположениях второй части теоремы, разложение (P_n) не является натягивающим. Согласно лемме 2.6, существует последовательность

$$x_k = U_{\nu_k} x_k,$$

удовлетворяющая условиям (5), (18) и (19). Рассмотрим $(t_k) \in l_1$ и положим $y_n = \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} t_k x_k$. Так как $\sigma\varepsilon \leqslant T\varepsilon \leqslant \eta\varepsilon = \eta$, то из (18) вытекает, что (y_n) удовлетворяет условию Коши в $X_{T\varepsilon}$. Повторяя рассуждения, содержащиеся в доказательстве импликации $4^\circ \& 5^\circ \Rightarrow 1^\circ$ теоремы 2.4, получим сходимость (y_n) в X_T. Тогда (в силу 7° из 1.3) (y_n) сходится и в $X_{T\varepsilon}$. Теперь можем определить линейное отображение $S: l_1 \to Z$, где Z — линейное множество всех сходящихся в $X_{T\varepsilon}$ рядов вида $\Sigma t_k x_k$, наделенное топологией $T\varepsilon$, формулой $S(t_k) = \Sigma t_k x_k$. Из (18) и (19), благодаря полноте пространства l_1, легко заключить, что S — изоморфизм пространства l_1 на Z, причем $\dim P_n Z \leqslant 1$ в силу определения элементов x_k. Остается показать, что все топологии t на X, где $\sigma\varepsilon \leqslant t \leqslant \eta$ индуцируют на Z одну и ту же топологию. Рассмотрим сначала в Z топологию, индуцированную топологией $\sigma\varepsilon$ и обозначим Z, наделенное топологией $T\varepsilon$, через $Z_{T\varepsilon}$. Из (18) и (19) вытекает, что $\sigma\varepsilon$ сильнее, чем $T\varepsilon$ на плотном в $Z_{T\varepsilon}$ множестве всех конечных сумм вида $\Sigma_{k \in \nu} t_k x_k$, $\nu \in \Sigma$, и, в силу $\sigma\varepsilon \leqslant T\varepsilon$, совпадает там с $T\varepsilon$. Так как $\sigma\varepsilon \leqslant T\varepsilon$, то отсюда вытекает совпадение $\sigma\varepsilon$ и $T\varepsilon$ на Z. А поскольку Z в топологии $\sigma\varepsilon$, будучи изоморфным пространству l_1, борнологично, то в силу следствия 2 теоремы 1.5 на Z совпадают все топологии t, где $\sigma\varepsilon \leqslant t \leqslant \eta$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть (P_n) — безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства X такое, что все $(P_n X)'$ сильно сепарабельны, и существует топология T на X, где $\sigma \leqslant T \leqslant \eta$, в которой (P_n) является полным. Рассмотрим следующие утверждения:*

1° *Разложение (P_n) — натягивающее.*

2° *Существует топология t на X, где $\sigma\varepsilon \leqslant t \leqslant \eta\varepsilon = \eta$, такая, что X_t не содержит подпространств, изоморфных пространству l_1.*

3° *Пространство $X_{\sigma\varepsilon}$ не содержит подпространств, изоморфных пространству l_1.*

4° *Пространство X_τ не содержит подпространств, изоморфных пространству l_1.*

Тогда имеют место импликации $2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$ и $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Если (дополнительно) выполнено условие (12), то $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$, а если $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ в X', то $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ \Leftrightarrow 4^\circ$.

Для доказательства нужно лишь заметить, что в силу сепарабельности $(P_n X)'_\beta$ условие (10) автоматически выполнено для подпространств в $X_{\sigma\varepsilon}$ и в X_τ. Поэтому из теоремы 2.7 вытекают все требуемые импликации, кроме $3^\circ \Rightarrow 2^\circ$ и $4^\circ \Rightarrow 2^\circ$ (заметим, что $\tau = \tau\varepsilon$, согласно следствию 1 теоремы 1.7), которые очевидны, и $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$, которая получается из следствия 2 теоремы 1.5.

Следствие 2. *Пусть (P_n) — безусловное шаудерово разложение локально выпуклого пространства $X = X_T$, такое, что все $(P_n X)'$ сильно сепарабельны, и существует топология T_1 на X, где $\sigma \leqslant T_1 \leqslant \eta$, в которой (P_n) является полным. Рассмотрим условия 1°, 2°, 3°, 4° из следствия 1 и следующее условие*

5° *Пространство $X_{T\varepsilon}$ не содержит подпространств, изоморфных пространству l_1.*

Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\sigma$ в X', то имеют место импликации $2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$, $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ *и* $4^\circ \Rightarrow 5^\circ$. *Если выполнено условие* (12), *то* $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ \Leftrightarrow 5^\circ$. *Если $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_\sigma$ в X', то* $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ \Leftrightarrow 4^\circ \Leftrightarrow 5^\circ$.

Доказательство. Рассуждения, проведенные в доказательстве следствия 2 теоремы 2.4, показывают, что сделанные предположения гарантируют безусловную простоту (P_n). Используя следствие 1, получим все нужные импликации, кроме $5^\circ \Rightarrow 2^\circ$, которая очевидна, $4^\circ \Rightarrow 5^\circ$, которая вытекает из следствия 2 теоремы 1.5, и $1^\circ \Rightarrow 5^\circ$ (при выполнении условия (12)). Для доказательства последней импликации, в силу теоремы 2.7 и совпадения топологии T и $T\varepsilon$ на P_nX, достаточно показать, что (P_n) является натягивающим шаудеровым разложением для $X_{T\varepsilon}$. Согласно 8° из 1.3, (P_n) — шаудерово разложение для $X_{T\varepsilon}$. Из (12) с помощью предложения 1.4 вытекает, что $(X_{T\varepsilon})' = X'$. Так как (P_n) — натягивающее и $\mathfrak{B}(X_{T\varepsilon}) = \mathfrak{B}(X)$, то отсюда следует натягиваемость шаудерова разложения (P_n) для $X_{T\varepsilon}$. Доказательство закончено.

Замечания. Из следствия 2 вытекают все известные нам распространения теоремы Джеймса — Дэя (см. [1], гл. IV, теорема 3) на локально выпуклые пространства. Например, Л. Вейль [18] доказывает, что натягиваемость безусловного шаудерова базиса в секвенциально полном [18] бочечном пространстве X_t равносильна отсутствию в X_t подпространств, изоморфных пространству l_1. Поскольку $t = t\varepsilon$, в силу бочечности X_t, то следствие 2 позволяет ослабить требование (секвенциальной) полноты X_t, которое можно заменить, например, требованием полноты (P_n) в топологии η. А если предполагать, что множество проекторов $\{U_\nu\colon \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно в рассматриваемом пространстве $X = X_T$, т. е. $T = T\varepsilon$, то результат Вейля распространяется с бочечных пространств на более общие пространства, удовлетворяющие условию (12). Кроме того, он дополняется равносильными условиями 2° и 3°. Ю. Б. Тумаркин [3] показывает: если безусловный шаудеров базис секвенциально полного локально выпуклого пространства X не натягивающий, то X содержит подпространство Y такое, что Y_η изоморфно l_1. Очевидно, что если X_η содержит пространство Y, изоморфное l_1, то Y изоморфно Y_η и, значит, Y_η изоморфно l_1 (обратное, вообще говоря, не верно). Таким образом, результат Тумаркина, в котором, по-видимому, впервые вопрос о натягиваемости связывается с более сильной топологией, чем исходная топология пространства, усиливается следствием 2: из ненатяги-

---

[18] В действительности существование шаудерова базиса в секвенциально полном бочечном пространстве влечет за собой полноту этого пространства [9].

ваемости следует, что X_t при любой топологии t на X такой, что $\sigma\varepsilon \leqslant t \leqslant \eta$, содержит подпространство, изоморфное l_1 (причем требование секвенциальной полноты ослабляется). Топология η является экстремальной среди топологий t, $\sigma < t \leqslant \eta$, в следующем смысле: если X_t содержит подпространство, изоморфное l_1, то и X_η содержит подпространство, изоморфное l_1 (это вытекает из следствия 2 теоремы 1.5). В заключение отметим один случай, когда этот более сильный аналог условия Тумаркина является также достаточным.

Предложение 2.8. *Пусть локально выпуклое пространство X является борнологическим в своей топологии Макки и $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\sigma$ в X'. Если X_η содержит подпространство, изоморфное l_1, то ни одно безусловное шаудерово разложение (P_n) пространства X такое, что все $(P_nX)'$ сильно сепарабельны, не является натягивающим.*

Доказательство. Условие $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\sigma$ гарантирует безусловную простоту (P_n) и поэтому из следствия 2 теоремы 1.7 вытекает, что (P_n) является безусловным разложением для X_η, причем шаудеровым, так как $\eta = \eta\varepsilon$ (см. следствие 1 теоремы 1.5 и 4° из 1.3). Поскольку $(X_\eta)' = X'$, то наше утверждение следует из теоремы 2.7.

Благодаря результату Т. Кука [5]: *для полурефлексивности локально выпуклого пространства X с шаудеровым разложением (P_n) таким, что все P_nX полурефлексивны, необходимо и достаточно, чтобы (P_n) было одновременно ограниченно полным и натягивающим*, мы можем с помощью вышеполученных результатов обобщить теорему Р. Джеймса [8] о рефлексивности банахова пространства с безусловным базисом.

Теорема 2.9. *Пусть X — секвенциально полное локально выпуклое пространство с безусловно простым шаудеровым разложением (P_n) таким, что все P_nX слабо секвенциально полны и сильные сопряженные к ним сепарабельны*[19]. *Если X не содержит подпространств, изоморфных пространству c_0, и существует топология t на X, где $\sigma\varepsilon \leqslant t \leqslant \eta$, такая, что X_t не содержит подпространств, изоморфных пространству l_1, то X полурефлексивно.*

Теорема 2.9 дает лишь один вариант из тех достаточных условий полурефлексивности, которые можно получить, комбинируя условия следствия 1 теоремы 2.4 с условиями следствия 1 теоремы 2.7, и которые являются также необходимыми, если дополнительно предполагать, что выполнено условие (12), или же $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ в X'. А для получения нижеследующего критерия полурефлексивности придется использовать и другие рассуждения.

---

[19] Если сильное сопряженное локально выпуклого пространства сепарабельно, то слабая секвенциальная полнота пространства равносильна его полурефлексивности [7].

Теорема 2.10. *Пусть X — локально выпуклое пространство с безусловно простым шаудеровым разложением (P_n) таким, что все P_nX полурефлексивны. Если выполнено условие* (12), *или же $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ в X', то следующие утверждения эквивалентны*:

1° *Пространство X полурефлексивно.*

2° *Пространство X слабо секвенциально полно и X_τ не содержит подпространств, изоморфных пространству l_1.*

3° *Разложение (P_n) полно, X не содержит подпространств, изоморфных пространству c_0, и X_τ не содержит подпространств, изоморфных пространству l_1.*

Доказательство. $1° \Rightarrow 2°$. Во-первых, полурефлексивное пространство даже слабо квазиполно, тем более слабо секвенциально полно. Во-вторых, X_τ также полурефлексивно и полурефлексивность наследуется замкнутыми подпространствами. $2° \Rightarrow 3°$. Импликация очевидна. $3° \Rightarrow 1°$. Ввиду теоремы 2.4 разложение (P_n) ограниченно полно и потому (в силу 2.3 и непрерывности проекторов P_n в X_τ) представляет собой безусловное шаудерово разложение для X_τ. Теперь из (12) с помощью предложения 1.4 получаем, что $\tau = \tau\varepsilon$. То же равенство выполняется, если $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ (см. следствие 1 теоремы 1.7). Поэтому, в силу теоремы 2.7, разложение (P_n) также натягивающее. Остается использовать вышеприведенную теорему Кука.

Замечание. В случае бочечного пространства с безусловным шаудеровым базисом теорема 2.10 показывает, что известный критерий рефлексивности секвенциально полного бочечного пространства (см. [13], стр. 888) имеет место и без априорного требования секвенциальной полноты. Согласно теореме 2.10, аналогичный критерий рефлексивности (полурефлексивности) получается и для квазибочечных пространств (для пространств Макки, если выполнено условие (12)) с безусловно простым шаудеровым базисом.

Литература

1. Дэй М., Нормированные линейные пространства. Москва, 1961.
2. Оя Э., Безусловные шаудеровские разложения и рефлексивность бочечных пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 122—134.
3. Тумаркин Ю. Б., О локально выпуклых пространствах с базисом. Докл. АН СССР, 1970, **195**, № 6, 1278—1281.
4. Bessaga, Cz., Pelczynski, A., On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. Studia math., 1958, **17**, № 2, 151—164.
5. Cook, T. A., Schauder decompositions and semi-reflexive spaces. Math. Ann., 1969, **182**, № 3, 232—235.
6. Dubinsky, E., Retherford, J. R., Schauder bases and Köthe sequence spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 1968, **130**, № 2, 265—280.

7. Fleming, R. J., Characterizations of semi-reflexivity and quasi-reflexivity. Duke Math. J., 1969, **36**, № 1, 73—80.
8. James, R. C., Bases and reflexivity of Banach spaces. Ann. Math., 1950, **52**, № 3, 518—527.
9. Kalton, N. J., Schauder decompositions and completeness. Bull. London Math. Soc., 1970, **2**, № 1, 34—36.
10. Kalton, N. J., Schauder decompositions in locally convex spaces. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1970, **68**, № 2, 377—392.
11. Kalton, N. J., Unconditional and normalised bases. Studia math. (PRL), 1970, **38**, № 1—5, 243—253.
12. McArthur, C. W., On a theorem of Orlicz and Pettis. Pacific J. Math., 1967, **22**, № 2, 297—302.
13. McArthur, C. W., Developments in Schauder basis theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, **78**, № 6, 877—908.
14. McArthur, C. W., Retherford, J. R., Uniform and equicontinuous Schauder bases of subspaces. Canad. J. Math., 1965, **17**, № 2, 207—212.
15. Ruckle, W. H., The infinite sum of closed subspaces of an F-space. Duke Math. J., 1964, **31**, № 3, 543—554.
16. Sanders, B. L., Decompositions and reflexivity in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 2, 204—208.
17. Sanders, B. L., On the existence of [Schauder] decompositions in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1965, **16**, № 5, 987—990.
18. Weill, L. J., Unconditional and shrinking bases in locally convex spaces. Pacific J. Math., 1969, **29**, № 2, 467—483.

Поступило
12 II 1975

TINGIMATUD SCHAUDERI LAHUTUSED LOKAALSELT KUMERATES RUUMIDES

E. Oja

Resümee

Paragrahvis 2 üldistatakse James'i ja Day teoreemid (vt. [1], IV, § 4, teoreemid 2 ja 3) ning nendest tulenev Banachi ruumi refleksiivsuse kriteerium lokaalselt kumera ruumi juhule, kusjuures tingimatute baaside asemel vaadeldakse tingimatult lihtsaid Schauderi lahutusi. Tõestused tuginevad ε-topoloogiate omadustele; ε-topoloogiad tuuakse sisse ja neid uuritakse paragrahvis 1.

UNCONDITIONAL SCHAUDER DECOMPOSITIONS IN LOCALLY CONVEX SPACES

E. Oja

Summary

Let X be a locally convex (Hausdorff) space with topological dual X' and let η be the strongest locally convex topology for X which defines the same bounded sets as the initial topology. Let X_t denote the space X carrying a locally convex topology t, let X_τ and X_σ denote X with the Mackey topology

$\tau = \tau(X, X')$ and the weak topology $\sigma = \sigma(X, X')$, respectively. Let X'_β and X'_σ denote X' with the strong topology $\beta(X', X)$ and the weak topology $\sigma(X', X)$, respectively. A *Schauder decomposition* of X is a sequence of continuous projections (P_n) which satisfies the properties: $P_n \circ P_m = 0$ when $n \neq m$ and for each $x \in X$ the series $\Sigma P_n x$ converges to x. The Schauder decomposition (P_n) is called *unconditional* iff for each $x \in X$ the series $\Sigma P_n x$ converges unconditionally to x, i. e., converges to x for all rearrangements of the sequence (P_n). A Schauder decomposition (P_n) for X is called *boundedly complete* iff for each bounded sequence $(\Sigma_{1 \leq k \leq n} x_k)$, $x_k \in P_k X$, the series Σx_k converges. Also, (P_n) is called *shrinking* iff (P_n') is a Schauder decomposition for X'_β. We say that a Schauder decomposition (P_n) for X is *complete in a topology t* on X iff each P_n is t-continuous and for each t-Cauchy sequence $(\Sigma_{1 \leq k \leq n} x_k)$, $x_k \in P_k X$, the series Σx_k is t-convergent. If (P_n) is complete in the initial topology then it is called *complete*. For each member ν of the collection Σ of finite subsets of the natural numbers we write $U_\nu = \Sigma_{n \in \nu} P_n$. We shall call a Schauder decomposition (P_n) for X *unconditionally simple* iff $\{U_\nu' f : \nu \in \Sigma\}$ is $\beta(X', X)$-bounded for each $f \in X'$. Let a topology t on X, where $\sigma \leq t \leq \eta$, be generated by a family of seminorms $\{p\}$ and suppose $\{U_\nu x : \nu \in \Sigma\}$ is bounded for each $x \in X$. We shall denote by $t\varepsilon$ the topology for X generated by the family of seminorms $\{q\}$ where $q(x) = \sup\{p(x), p(U_\nu x) : \nu \in \Sigma\}$ for each p. The following improvements of two theorems of James and Day [1; IV, § 4, Theorems 2, 3] are established.

Corollary 1 to Theorem 2.4. *Let $X = X_t$ be a locally convex space with an unconditionally simple Schauder decomposition (P_n) such that each $P_n X$ is weakly sequentially complete. Consider the following conditions:*

1° *(P_n) is boundedly complete.*

2° *$X_{t\varepsilon}$ is weakly sequentially complete.*

$2^{\circ\circ}$ *X is weakly sequentially complete.*

3° *(P_n) is complete and X contains no subspace isomorphic to c_0.*

Then we have the implications $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$ *and* $2^{\circ\circ} \Rightarrow 1^\circ$. *Moreover, if*

X_τ is quasibarrelled or (P_n') is a complete Schauder decomposition

for X'_σ, (a)

then $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 2^{\circ\circ} \Leftrightarrow 3^\circ$.

Corollary 1 to Theorem 2.7. *Let X be a locally convex space with an unconditionally simple Schauder decomposition (P_n) such that each $(P_n X)'_\beta$ is separable and suppose (P_n) is complete in a locally convex topology T on X where $\sigma \leq T \leq \eta$. Consider the following conditions:*

1° *(P_n) is shrinking.*

2° *There is a locally convex topology t on X, where $\sigma\varepsilon \leq t \leq \eta$, such that X_t contains no subspace isomorphic to l_1.*

3° *$X_{\sigma\varepsilon}$ contains no subspace isomorphic to l_1.*

4° *X_τ contains no subspace isomorphic to l_1.*

Then we have the implications $2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$ *and* $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. *Moreover, if (P'_n) is a complete Schauder decomposition for X'_σ, then* $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$, *and if X_τ is quasibarrelled, then* $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ \Leftrightarrow 4^\circ$.

Similar results (Corollary 2 to Theorem 2.4 and Corollary 2 to Theorem 2.7) are obtained by replacing the hypothesis of an unconditionally simple Schauder decomposition with that of an unconditional Schauder decomposition.

The results above yield the following

Theorem 2.10. *Let X be a locally convex space with an unconditionally simple Schauder decomposition (P_n) such that each P_nX is semireflexive. If the condition* (a) *is satisfied, then the following are equivalent:*

1° *X is semireflexive.*

2° *X is weakly sequentially complete and X_τ contains no subspace isomorphic to l_1.*

3° *(P_n) is complete, X contains no subspace isomorphic to c_0 and X_τ contains no subspace isomorphic to l_1.*

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ОГРАНИЧЕННО ПОЛНЫХ И НАТЯГИВАЮЩИХ ШАУДЕРОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э. Оя

Кафедра математического анализа

1. Пусть X — локально выпуклое пространство [1] с (топологическим) сопряженным X' и $\mathfrak{B}(X)$ — семейство всех ограниченных множеств в пространстве X. Пусть X_τ обозначает пространство X с топологией Макки $\tau(X, X')$, а X'_σ и X'_β обозначают сопряженное X' к X в слабой и сильной топологиях $\sigma(X', X)$ и $\beta(X', X)$ соответственно. *Шаудеровым разложением* пространства X называется такая последовательность (P_n) непрерывных ненулевых проекторов в пространстве X, что $P_n \circ P_m = 0$, если $n \neq m$, и любой элемент $x \in X$ представим в виде

$$x = \Sigma P_n x,$$

где ряд сходится в топологии пространства X. Пусть Σ — система всех конечных множеств натуральных чисел, упорядоченная по включению. Обозначим $U_\nu = \Sigma_{n \in \nu} P_n$, где $\nu \in \Sigma$, причем $U_\varnothing = 0$ для пустого множества $\varnothing$; если $\nu = \{1, 2, \ldots, n\}$, то положим $U_\nu = U_n$. Шаудерово разложение (P_n) пространства X называется *безусловным*, если $x = \lim_{\nu \in \Sigma} U_\nu x$ при каждом $x \in X$, т. е. ряд $\Sigma P_n x$ сходится безусловно к x. Шаудерово разложение (P_n) пространства X называется *простым* [8], если [2] $(U_n' f) \in \mathfrak{B}(X'_\beta)$ при каждом $f \in X'$, и *безусловно простым* [2], если $\{U_\nu' f\colon \nu \in \Sigma\} \in \mathfrak{B}(X'_\beta)$ при всех $f \in X'$.

Шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X называется *ограниченно полным,* если каждая ограниченная последовательность $(\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k)$, где $x_k \in P_k X$, сходится. Если (P_n') является шаудеровым разложением пространства

---

[1] Рассматриваются отделимые локально выпуклые пространства над полем вещественных чисел.

[2] Обозначим через A' (топологический) сопряженный оператора A.

X'_β, то шаудерово разложение (P_n) пространства X называется *натягивающим* [3].

Шаудеров базис $(e_n) \subset X$ представляет собой шаудерово разложение, где $P_n X$ — одномерные пространства (проекторы P_n определяются равенством $P_n(\Sigma a_k e_k) = a_n e_n$).

Пусть (P_n) — шаудерово разложение локально выпуклого пространства X. В исследованиях по натягиваемости и ограниченной полноте шаудеровых разложений (базисов) (см., например, [4, 8]) используется пространство

$$H = \{f \in X' : f = \lim U_n' f \text{ в } X'_\beta\},$$

наделенное топологией $\beta(X', X)$. Очевидно, что (P_n') является шаудеровым разложением для H. Рассмотрим следующие утверждения:

(D1) Если (P_n) ограниченно полно, то шаудерово разложение (P_n') для H является натягивающим.

(D2) Если (P_n') — натягивающее шаудерово разложение для H, то (P_n) ограниченно полно.

(D3) Если (P_n) является натягивающим, то шаудерово разложение (P_n') (для X'_β) ограниченно полно.

(D4) Если (P_n') — ограниченно полное шаудерово разложение для H, то (P_n) является натягивающим.

Импликации (D1)—(D4) справедливы для любого (шаудерова) базиса в банаховом пространстве [4] [5, 10], т. е. в этом случае имеет место полная двойственность ограниченной полноты и натягиваемости. В общем случае эта двойственность нарушается: в статье [4] приведены примеры простых шаудеровых базисов в локально выпуклых пространствах, для которых импликации (D1)—(D3) уже не справедливы. Для шаудерова разложения (P_n) банахова пространства X доказаны (D1)—(D4) в предположении рефлексивности пространств [5] $P_n X$. Но это требование весьма ограничивающее, так как оно «приблизит разложение к базису». А в теории шаудеровых разложений особый интерес представляют именно те свойства, которые зависят от характера разложения пространства на подпространства, а не от

---

[3] Эти понятия мы ввели, следуя [3]. Вместо ограниченной полноты употребляется и термин «γ-полнота» [8].

[4] Аналогичные двойственные утверждения рассматриваются и в случае других обобщений шаудерова базиса. Например, аналоги импликаций (D1) (в банаховом пространстве) и (D3) (в квазибочечном пространстве) для базиса Маркушевича (M-базиса) доказаны в [6]; аналоги тех же импликаций для минимальной последовательности (x_n) с сопряженной, тотальной на замкнутой линейной оболочке последовательности (x_n), в банаховом пространстве доказаны в [1], стр. 146.

[5] Например, в [11] это утверждение доказывается с помощью теории пространств с двумя нормами.

свойств этих подпространств. Н. Калтону [8], которому принадлежат наиболее общие результаты об областях справедливости вышеприведенных импликаций, удалось доказать (D3) и (D4) без предположения полурефлексивности пространств P_nX. Однако, в доказательствах утверждений (D1) и (D2) от этого предположения ему не удается избавиться.

Цель настоящей статьи — доказать (D1) и (D2) без каких-либо ограничений на подпространства P_nX. Коротко остановимся также и на остальных импликациях (D3) и (D4).

2. Чтобы доказать (D1), мы воспользуемся следующими результатами.

Предложение 1. *Пусть* (P_n) *— простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства* X. *Если* $A \in \mathfrak{B}(X)$, *то и* $\bigcup U_n(A) \in \mathfrak{B}(X)$.

Предложение 1 непосредственно вытекает из предложений 4.8 и 4.5 статьи [8].

Предложение 2. *Пусть* (P_n) *— шаудерово разложение локально выпуклого пространства* X. *Если последовательность* $(\nu(n)) \subset \Sigma$ *такая, что*

$$\max\{k: k \in \nu(n)\} < \min\{k: k \in \nu(n+1)\}, \tag{1}$$

то $(U_{\nu(n)})$ *является шаудеровым разложением для*[6] $Y = \operatorname{clm} \bigcup U_{\nu(n)}X$, *притом ограниченно полным, если* (P_n) *— ограниченно полное простое шаудерово разложение. Если* (Y_n) *— последовательность подпространств пространства* X, *то последовательность* (Q_n), *где* Q_n *— сужение проектора* P_n *на* $Z = \operatorname{clm} \bigcup P_nY_n$, *является шаудеровым разложением для* Z, *притом ограниченно полным, если разложение* (P_n) *ограниченно полно.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $y = \Sigma U_{\nu(n)}y$ при всех $y \in Y$. Из (1) вытекает, что $U_{\nu(n)} \circ U_{\nu(m)} = 0$, если $n \neq m$. Значит, $(U_{\nu(n)})$ — шаудерово разложение для Y. Пусть (P_n) — ограниченно полное простое шаудерово разложение. Рассмотрим ограниченную последовательность $s = (\Sigma_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k)$, где $x_k = U_{\nu(k)}x_k$. Пусть

$$z_i = \begin{cases} P_i(x_k), & \text{если существует номер } k \text{ такой, что } i \in \nu(k), \\ 0, & \text{если } i \notin \bigcup \nu(k). \end{cases}$$

Так как $(\Sigma_{1 \leqslant i \leqslant n} z_i) \subset \bigcup U_n(s)$ и последнее множество ограничено (предложение 1), то из ограниченной полноты (P_n) следует сходимость последовательности $(\Sigma_{1 \leqslant i \leqslant n} z_i)$. Поэтому сходится

---

[6] Символ $\operatorname{clm} Y$ обозначает замкнутую линейную оболочку множества $Y \subset X$.

и ее подпоследовательность s, т. е. $(U_{\nu(n)})$ ограниченно полно. Остальная часть предложения содержится в 2.1 из [2].

Следствие 1. *Если* (P_n) — *ограниченно полное простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства* X, *то последовательность* (x_n) *вида* $x_n = U_{\nu(n)}x_n$, *где множества* $\nu(n)$ *удовлетворяют условию* (1), *является ограниченно полным шаудеровым базисом для* $Y = \operatorname{clm}\{x_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$.

Биортогональная система (x_n, f_n) (т. е. такая система, что $(x_n) \subset X$, $(f_n) \subset X'$ и $f_n(x_m) = \delta_{nm}$, где δ_{nm} — символ Кронекера) называется *ограниченно полной*, если для любой ограниченной последовательности $(y_n) \subset Y = \operatorname{clm}\{x_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ из сходимости $f_k(y_n) \to_n a_k$ при всех k следует существование элемента $y \in Y$ такого, что $f_k(y_n) \to_n f_k(y)$ при всех[7] k.

Следствие 2. *Если* (P_n) — *ограниченно полное простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства* X, *то биортогональная система* (x_n, f_n), *где* $x_n = U_{\nu(n)}x_n$, *причем множества* $\nu(n)$ *удовлетворяют условию* (1), *является ограниченно полной.*

Доказательство. Положим $Y = \operatorname{clm}\{x_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$. Пусть последовательность $(y_n) \subset Y$ ограничена и $f_k(y_n) \to_n a_k$ при всех k. Согласно следствию 1, $y_n = \Sigma_k a_{kn} x_k$. Поэтому $a_{kn} = f_k(y_n) \to_n a_k$ и, следовательно, $z_{mn} = \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant m} a_{kn} x_k \to_n$ $\to_n \Sigma_{1 \leqslant k \leqslant m} a_k x_k = z_m$ при всех m. Так как $\{z_{mn}\colon m, n = 1, 2, \ldots\} \subset$ $\subset \{U_m y_n\colon m, n = 1, 2, \ldots\}$ и последнее множество ограничено (предложение 1), то и последовательность (z_m) ограничена. Из ограниченной полноты базиса (x_n) (следствие 1) вытекает, что (z_m) сходится, т. е. сходится ряд $\Sigma a_k x_k = y \in Y$. Очевидно, что $f_k(y_n) \to_n f_k(y)$ при всех k.

3. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* (P_n) — *безусловно простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства* X. *Если пространство* X_τ *квазибочечно*[8], *то имеет место утверждение* (D1).

Для доказательства теоремы можно считать пространство X квазибочечным. Действительно, так как X_τ квазибочечно, то из следствия 1 теоремы 1.7 и из теоремы 1.5 (см. [2]) вытекает, что (P_n) — безусловно простое шаудерово разложение для X_τ. Тогда, очевидно, из ограниченной полноты (P_n) для X вытекает ограниченная полнота разложения (P_n) для X_τ. С другой стороны, $X'_\beta = (X_\tau)'_\beta$.

---

[7] Это определение равносильно определению из [1], стр. 145, и отличается от определения II. 2 из [6] лишь тем, что там вместо последовательности (y_n) фигурирует ограниченная сеть.

[8] Если X_τ квазибочечно, то (P_n) является безусловным шаудеровым разложением для X_τ, причем множество проекторов $\{U_\nu : \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно в X_τ (см. [2], следствие 1 теоремы 1.7).

Итак, пусть X — квазибочечное пространство. Рассуждая от противного, допустим, что (P_n') не является натягивающим. Тогда, поскольку (P_n') для H безусловно простое (см. [2], предложение 2.5), то в силу леммы 2.6 из [2] существует последовательность $f_k = U_{\nu(k)}'f_k \in H$, где множества $\nu(k)$ удовлетворяют условию (1), такая, что для любого конечного набора чисел $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ и для любого множества $A \in \mathfrak{B}(X)$ выполнено неравенство

$$\sup_{x \in A} \left| \sum_{k=1}^{n} t_k f_k(x) \right| \leqslant a \sum_{k=1}^{n} |t_k|, \tag{2}$$

где число $a > 0$ зависит от A, и хотя бы для одного множества $B \in \mathfrak{B}(X)$ — неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |t_k| \leqslant \sup_{x \in B} \left| \sum_{k=1}^{n} t_k f_k(x) \right|. \tag{3}$$

Исходя из (3), выберем последовательность $(x_k) \in \mathfrak{B}(X)$ такую, что $f_k(x_k) = 1$. Так как множество проекторов $\{U_\nu: \nu \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно (поскольку X квазибочечно (см. [2], теорема 1.7)) и $f_k = U_{\nu(k)}'f_k$, то можно считать, что $x_k = U_{\nu(k)}x_k$. Тогда $f_k(x_l) = 0$ при $k \neq l$, так как множества $\nu(k)$ попарно не пересекаются. Значит, (x_k, f_k) — биортогональная система, которая удовлетворяет предположениям следствия 2, и поэтому является ограниченно полной.

Введем следующие обозначения [9]:

$$Y = \operatorname{clm}\{x_k: k = 1, 2, \ldots\} \subset X, \quad I: Y \to X,$$
$$F = \operatorname{lm}\{f_k: k = 1, 2, \ldots\} \subset X'_\beta, \quad i: F \to X'_\beta,$$
$$\varphi_k = f_k | Y \text{ (сужение на } Y),$$
$$\Phi = \operatorname{lm}\{\varphi_k: k = 1, 2, \ldots\} \subset Y'_\beta, \quad j: \Phi \to Y'_\beta,$$

где I, i и j — тождественные отображения. Согласно формулам (2) и (3), пространства F и Φ изоморфны (в случае Φ придется использовать и включение $(x_k) \in \mathfrak{B}(Y)$) множеству всех финитных последовательностей, наделенному l_1-нормой, причем функционалам f_k и φ_k соответствует e_k — элемент естественного базиса пространства l_1. Следовательно, пространства F'_β, Φ'_β и m изоморфны, причем изоморфизм двух первых пространств осуществляется отображением S: $F'_\beta \to \Phi'_\beta$, которое элементу $f' \in F'$ поставит в соответствие $\varphi' \in \Phi'$ такой, что $f'(f_k) = \varphi'(\varphi_k)$ при всех k. Пусть [10] Q_Y: $Y \to Y''$ и Q_X: $X \to X''$ — канонические вложения. Положим $U = j' \circ Q_Y$ и $V = S \circ i' \circ Q_X \circ I$. Покажем, что

[9] Символ $\operatorname{lm} Y$ обозначает линейную оболочку множества $Y \subset X$.

[10] Через X'' обозначается сильное второе сопряженное $(X'_\beta)'_\beta$ к X.

U — непрерывное отображение пространства Y на Φ'_β. Тогда, поскольку Y является сепарабельным, а Φ'_β — нет, то получим противоречие, которое доказывает теорему.

Так как отображение V, будучи суперпозицией непрерывных отображений (непрерывность Q_X следует из квазибочечности пространства X), непрерывно, то для непрерывности U придется показать, что $U = V$, т. е., что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{Q_Y} & Y'' & \xrightarrow{j'} & \Phi'_\beta \\ I\downarrow & & & & S\uparrow \\ X & \xrightarrow{Q_X} & X'' & \xrightarrow{i'} & F'_\beta \end{array}$$

коммутирует. Пусть $Uy = \varphi'_1$ и $Vy = \varphi'_2$, тогда $\varphi'_1(\varphi_k) = (Q_Y y)(\varphi_k) = \varphi_k(y)$ и $\varphi'_2(\varphi_k) = f'(f_k) = (Q_X y)(f_k) = f_k(y)$, где $f' = (i' \circ Q_X \circ I)y$, при всех k. Поскольку $\varphi_k = f_k|Y$, то $\varphi'_1 = \varphi'_2$, значит, $U = V$.

Остается доказать сюрьективность U. Рассмотрим $\varphi' \in \Phi'$. Из теоремы Хана — Банаха следует существование элемента $y'' \in Y''$ такого, что $j'y'' = \varphi'$, т. е. $y''(\varphi_k) = \varphi'(\varphi_k)$ при всех k. Так как топология в Y'', определяемая полунормами[11] $|(\cdot, \varphi_k)|$, $k = 1, 2, \ldots$, полуметризуема, то для y'' найдется последовательность $(y_n) \in \mathfrak{B}(Y)$ такая, что $\varphi_k(y_n) \to_n y''(\varphi_k) = \varphi'(\varphi_k)$ при всех k. Но тогда $f_k(y_n) \to_n \varphi'(\varphi_k)$, и из ограниченной полноты биортогональной системы (x_k, f_k) вытекает существование элемента $y \in Y$ такого, что $f_k(y_n) \to_n f_k(y) = \varphi_k(y) = (Q_Y y)(\varphi_k)$ при всех k. Следовательно, $(Q_Y y)(\varphi_k) = \varphi'(\varphi_k)$ при всех k, так что $\varphi' = (j' \circ Q_Y) y = Uy$.

Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть* (P_n) *— безусловное шаудерово разложение локально выпуклого пространства* X. *Если пространство* X_τ *бочечно, то имеет место утверждение* (D1).

Для доказательства заметим, что в данном случае безусловное шаудерово разложение (P_n) является безусловно простым, так как $\{U_\nu' f\colon \nu \in \Sigma\} \in \mathfrak{B}(X'_\sigma)$ при всех $f \in X'$ и $\mathfrak{B}(X'_\sigma) = \mathfrak{B}(X'_\beta)$.

Замечание 1. В ходе доказательства утверждения (D1) обычно (см., например, [4, 8]) устанавливается алгебраический изоморфизм пространств X и H'. А для этого изоморфизма необходима полурефлексивность $P_n X$. Таким образом, требование полурефлексивности пространств $P_n X$ (которое в случае базиса автоматически выполнено) обусловливается методом доказательства. Методом доказательства обусловливается и традиционное требование бочечности X. Теорема 1, в случае *безусловно простого* (P_n), усиливает следующий результат Н. Калтона (см.

---

[11] Здесь $(y'', y') = y''(y')$, где $y' \in Y'$ и $y'' \in Y''$.

[8], следствие 3 из теоремы 5.2 и предложения 5.3): *если* (P_n) — *шаудерово разложение бочечного пространства*[12] X *такое, что все пространства* P_nX *рефлексивны, то имеет место утверждение* (D1).

4. Шаудерово разложение (P_n) локально выпуклого пространства X называется *полным* [7], если каждая последовательность Коши $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} x_k)$, где $x_k \in P_kX$, сходится.

Теорема 2. *Если* (P_n) — *полное простое шаудерово разложение локально выпуклого пространства* X, *то имеет место утверждение* (D2).

Доказательство. Отметим, что X вкладывается как векторное подпространство в H'. Это включение осуществляется алгебраическим изоморфизмом Q пространства X в H', определяемым равенством $(Qx)(f)=f(x)$, $x\in X$, $f\in H$. Рассмотрим $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} x_k) \in \mathfrak{B}(X)$, где $x_k = P_k x_k$. Множество $A = \{\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} Qx_k\colon n=1,2,\ldots\} \subset H'$ является равностепенно непрерывным на H, так как $A^\circ = \{\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} x_k\colon n=1,2,\ldots\}^\circ \cap H$, где первая поляра берется в H, вторая — в X', является окрестностью нуля в H (поскольку вторая поляра — окрестность нуля в X'_β). По теореме Алаоглу—Бурбаки, последовательность $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} Qx_k)$ относительно компактна в топологии $\sigma(H', H)$. Покажем, что она является $\sigma(H', H)$-последовательностью Коши. Рассмотрим $f\in H$. Так как $\{\Sigma_{n\leqslant k\leqslant n+m} x_k\colon n, m=1, 2, \ldots\} \in \mathfrak{B}(X)$, поскольку $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} x_k) \in \mathfrak{B}(X)$, то для заданного $\varepsilon>0$ имеем

$$\Big|\Big(\sum_{k=N}^{\infty} P_k' f\Big)\Big(\sum_{k=n}^{n+m} x_k\Big)\Big| < \varepsilon \qquad \forall n, m$$

при $N \geqslant N_\varepsilon$. Следовательно,

$$\Big|\Big(\sum_{k=n}^{n+m} Qx_k\Big)(f)\Big| = \Big|f\Big(\sum_{k=n}^{n+m} x_k\Big)\Big| < \varepsilon \qquad \forall m$$

для $n \geqslant N_\varepsilon$. Таким образом, $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} Qx_k)$ является относительно компактной последовательностью Коши в топологии $\sigma(H', H)$ и потому сходится в $\sigma(H', H)$, т. е. существует $\chi \in H'$ такой, что $P_k''\chi = Qx_k$. Поскольку разложение (P_n') для H, по предположению, является натягивающим, то $\chi = \Sigma\, Qx_k$, где ряд сходится в $\beta(H', H)$. Так как (P_n) — простое, то в силу предложения 5.3 из [8] топология $\beta(H', H)$ индуцирует на X топологию t равномерной сходимости на всех множествах из $\mathfrak{B}(X'_\beta)$. Значит, $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} x_k)$ является t-последовательностью Коши и, поскольку

[12] Всякое шаудерово разложение бочечного пространства является простым.

t не слабее исходной топологии пространства X, а (P_n) — полное разложение, то $(\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} x_k)$ сходится в X. Теорема доказана.

Следствие 4. *Если* (P_n) — *шаудерово разложение секвенциально полного локально выпуклого пространства* X, *то имеет место утверждение* (D2).

Для доказательства заметим, что секвенциальная полнота пространства X влечет за собой полноту (P_n) и, поскольку (в силу секвенциальной полноты пространства X) $\mathfrak{B}(X'_\sigma) = \mathfrak{B}(X'_\beta)$, то и простоту (P_n).

Замечание 2. Все известные нам результаты о справедливости (D2) усиливаются теоремой 2 (и даже следствием 4). Например, результат Н. Калтопа (см. [8], следствие 2 из теоремы 5.2 и предложения 5.3) гласит: если (P_n) — (простое) шаудерово разложение секвенциально полного локально выпуклого пространства X такое, что все пространства P_nX полурефлексивны, то имеет место утверждение (D2).

5. Утверждение о справедливости импликации (D3), по-видимому, в наиболее общем виде, выглядит так (см. [8], предложение 5.4): *если* (P_n) — *шаудерово разложение локально выпуклого пространства* X *такого, что*

любая ограниченная последовательность в X'_β *равностепенно непрерывна,* (4)

то имеет место утверждение[13] (D3). Как показывается в [9], пространство X, удовлетворяющее условию (4), существенно не отличается от квазибочечного пространства. Из следующей теоремы будет видно, что для многих шаудеровых разложений импликация (D3) справедлива и без ограничения (4) на X.

Теорема 3. *Если* (P_n) — *шаудерово разложение локально выпуклого пространства* X *такое, что*

$$\{U_\nu x\colon\ \nu \in \Sigma\} \in \mathfrak{B}(X) \qquad \forall\, x \in X, \tag{5}$$

шаудерово разложение (P_n') *для* X'_σ *полно,* (6)

то имеет место утверждение (D3).

Доказательство. Рассмотрим последовательность $s = (\Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} f_k) \in \mathfrak{B}(X'_\beta)$, $f_k = P_k' f_k$. Полагая $\varepsilon_k = \operatorname{sgn} f_k(x)$ для произвольного $x \in X$, получим

$$\sup_n \sum_{k=1}^n |f_k(x)| = \sup_n \sum_{k=1}^n \varepsilon_k f_k(x) \leqslant 2 \sup_n \sup_{\nu\in\Sigma} |(U_\nu' \sum_{k=1}^n f_k)(x)| =$$
$$= 2 \sup_n \sup_{\nu\in\Sigma} |(\sum_{k=1}^n f_k)(U_\nu x)| < \infty,$$

---

[13] В случае шаудерова базиса эта теорема доказана в [4].

так как имеет место (5). Значит, s является $\sigma(X', X)$-последовательностью Коши и, ввиду (6), сходится в X'_σ к некоторому $f \in X'$. Тогда $f_k = P_k' f$ и, поскольку (P_n) — натягивающее, то s сходится в X'_β.

Замечание 3. Условие (5) выполнено, если (P_n) — безусловное или безусловно простое шаудерово разложение. Предположение (5) о разложении (P_n) позволяет заменить требование (4) с (6). Если, вдобавок, слабо ограниченные множества в X' являются сильно ограниченными (например, если X секвенциально полно), то (6) слабее, чем (4). Действительно, если выполнено (4), то любая $\sigma(X', X)$-последовательность Коши равностепенно непрерывна, следовательно (теорема Алаоглу — Бурбаки), относительно компактна в X'_σ и потому сходится в X'_σ.

Что касается утверждения (D4), то вопрос о его справедливости решен Н. Калтоном (см. [8], предложения 2.4 и 5.5):

Теорема 4. *Пусть* (P_n) *— шаудерово разложение локально выпуклого пространства* X. *Если* (P_n) *— простое, то имеет место утверждение* (D4). *Обратно, если* (P_n') *— ограниченно полное шаудерово разложение для* H *и имеет место* (D4), *то разложение* (P_n) *— простое*[14].

В заключение отметим, что (как вытекает из теорем 1—4) для безусловного шаудерова разложения в секвенциально полном бочечном пространстве имеет место полная двойственность ограниченной полноты и натягиваемости, т. е. справедливы все утверждения (D1) — (D4).

Примечание при корректуре. В статье [4] ошибочно полагают, что для приведенного там примера импликация (D2) не справедлива. В действительности (D2) для этого примера все же справедлива. Этому вопросу автор посвящает отдельную заметку, где, в частности, будет приведен пример безусловно простого базиса, для которого импликация (D2) не справедлива.

Литература

1. Мильман В. Д., Геометрическая теория пространств Банаха, ч. I. Теория базисных и минимальных систем. Успехи матем. наук, 1970, 25, № 3, 113—173.
2. Оя Э., Безусловные шаудеровы разложения в локально выпуклых пространствах. Настоящий сборник, стр. 90—116.
3. Cook, T. A., Schauder decompositions and semi-reflexive spaces. Math. Ann., 1969, 182, № 3, 232—235.

[14] Отметим, что доказательство теоремы 4 является непосредственным и очень простым.

4. D u b i n s k y, E., R e t h e r f o r d, J. R., Schauder bases and Köthe sequence spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, **130**, № 2, 265—280.
5. J a m e s, R. C., Bases and reflexivity of Banach spaces. Ann. Math., 1950, **52**, № 3, 518—527.
6. J o h n s o n, W. B., Markuschevich bases and duality theory. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **149**, № 1, 171—177.
7. K a l t o n, N. J., Schauder decompositions and completeness. Bull. London Math., Soc., 1970, **2**, № 1, 34—36.
8. K a l t o n, N. J., Schauder decompositions in locally convex spaces. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1970, **68**, № 2, 377—392.
9. K a l t o n, N. J., Schauder bases and reflexivity. Studia math., 1970, **38**, № 1—5, 255—266.
10. S i n g e r, I., Basic sequences and reflexivity of Banach spaces. Studia math. (PRL), 1962, **21**, № 3, 351—369.
11. S u b r a m a n i a n, P. K., Two-norm spaces and decompositions of Banach spaces. I. Studia math. (PRL), 1972, **43**, № 3, 179—194.

Поступило
12 III 1975

TÕKESTATULT TÄIELIKE JA PINGUL SCHAUDERI LAHUTUSTE DUAALSUSEST LOKAALSELT KUMERATES RUUMIDES

E. Oja

R e s ü m e e

Näidatakse, et duaalsusväited (D1) ja (D2) ruumi X Schauderi lahutuse (P_n) kohta on tõestatavad ilma traditsioonilise eelduseta (vt. näiteks [8] ja [11]) ruumide P_nX poolrefleksiivsusest. Osutub, et tingimatult lihtsa lahutuse (P_n) korral saab ka väite (D3) kehtivuseks ruumi X kohta tehtud eeldusi [4, 8] oluliselt nõrgendada.

ON THE DUALITY OF BOUNDEDLY COMPLETE AND SHRINKING SCHAUDER DECOMPOSITIONS IN LOCALLY CONVEX SPACES

E. Oja

S u m m a r y

Let X be a locally convex (Hausdorff) space with the topological dual X'. Let X_τ denote X with the Mackey topology $\tau(X, X')$ and let X'_β denote X' with the strong topology $\beta(X', X)$. A *Schauder decomposition* of X is a sequence of continuous projections (P_n) which satisfies the properties: $P_n \circ P_m = 0$ when $n \neq m$ and for each $x \in X$ the series $\Sigma P_n x$ converges to x. For each member ν of the collection Σ of finite subsets of the natural numbers we write $U_\nu = \Sigma_{n \in \nu} P_n$. A Schauder decomposition (P_n) for X is called *unconditionally simple* iff $\{U_\nu' f : \nu \in \Sigma\}$ is $\beta(X', X)$-bounded for each $f \in X'$. Also, (P_n) is called *boundedly complete* iff for each bounded sequence $(\Sigma_{1 \leq k \leq n} x_k)$, $x_k \in P_k X$, the series Σx_k converges, and *shrinking* iff (P_n') is a Schauder decomposition for X'_β.

Let (P_n) be a Schauder decomposition for X. Then (P_n') is a Schauder decomposition for $H = \{f \in X' : f = \Sigma P_n' f$ where the series converges in $X'_\beta\}$ where H is equipped with the topology induced by $\beta(X', X)$. We are mainly considering the following statements:

(D1) If (P_n) is boundedly complete then (P_n') is shrinking for H.

(D2) If (P_n') is shrinking for H then (P_n) is boundedly complete.

In general, neither of them is true [4]. N. Kalton [8] proved (D1) for the barrelled space X and (D2) for the sequentially complete space X with the additional assumption that the spaces $P_n X$ were semireflexive. In this paper (D1) and (D2) are proved without this additional assumption:

Theorem 1. *Let (P_n) be an unconditionally simple Schauder decomposition for a locally convex space X. If X_τ is quasibarrelled then the implication* (D1) *is true.*

Corollary 4. *If (P_n) is a Schauder decomposition for a sequentially complete locally convex space X then the implication* (D2) *is true.*

ТЕОРЕМА БАКА В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э. Кольк

Кафедра математического анализа

Пусть (E, τ) (коротко E) — секвенциально полное отделимое локально выпуклое топологическое векторное пространство над полем K, где $K = \mathbf{R}$ или $K = \mathbf{C}$. Наряду с исходной топологией τ в пространстве E рассматривается еще слабая топология $\sigma(E, E')$ (коротко σ), где E' — топологическое сопряженное пространство к E. Пусть $s(E)$ — множество всех последовательностей

$$X = (x_i)_1^\infty \qquad (1)$$

из элементов пространства E,

$$m(E) = \{X \in s(E) : X \text{ ограничена}\},$$

$$c(E) = \{X \in s(E) : \exists \tau\text{-}\lim X \in E\}, \qquad (2)$$

$$w(E) = \{X \in s(E) : \exists \sigma\text{-}\lim X \in E\}, \qquad (3)$$

где τ-$\lim X$ (соответственно σ-$\lim X$) обозначает предел при $i \to \infty$ последовательности X в топологии τ (соответственно σ) и, разумеется,

$$c(E) \subset w(E) \subset m(E) \subset s(E). \qquad (4)$$

Пусть, далее,

$$A = (a_{nk}) \qquad (n, k = 1, 2, \ldots) \qquad (5)$$

— скалярная матрица и [1]

$$\eta_n(X) = \sum_k a_{nk} x_k \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (6)$$

Последовательность $X \in s(E)$ называется *A-суммируемой* к значению $x \in E$ (коротко A-$\lim X = x$), если все ряды в (6) сходятся и существует предел

$$\tau\text{-}\lim \eta_n(X) = x. \qquad (7)$$

Множество

$$c(E, A) = \{X \in s(E) : \exists\ A\text{-}\lim X \in E\}$$

называется *полем A-суммируемости* в $s(E)$.

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют все целочисленные значения от 1 до $+\infty$.

Введем класс $\mathfrak{T}$ всех т. н. *Т-матриц* A, определяемых условиями (см. [4], стр. 79)

$$\lim_n a_{nk}=0, \tag{8}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk}=1, \tag{9}$$

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}|=M<\infty. \tag{10}$$

Пусть $X\in s(E)$ и $\mathfrak{N}(X)$ — множество всех подпоследовательностей последовательности X. Будем говорить, что последовательность X имеет *свойство* (A^0), если для каждой $Y\in\mathfrak{N}(X)$, существует A-$\lim Y$ в E.

В работах [7, 13, 14] доказана

Теорема 1 (Бак). *Для $A\in\mathfrak{T}$ свойство* (A^0) *последовательности $X\in s(K)$ равносильно соотношению $X\in c(K)$.*

Ниже исследуется вопрос о справедливости теоремы 1 и аналогичной ей теоремы 4 в случае абстрактного пространства E. Находятся общие необходимые и достаточные условия (теорема 8) для справедливости названных теорем в пространстве E. Приведенное в теореме 5 не зависящее от класса $\mathfrak{T}$ достаточное условие Шура оказывается и необходимым для выполнения условий теорем 1 и 4 в специальных пространствах E (теоремы 14 и 16). Показано, что теорема 1 не имеет места в L^p при $p>1$, а теорема 4 в пространстве c.

1. Свойство (A^0) и слабая сходимость

Метод суммирования A называется *регулярным* в $s(E)$, если $c(E)\subset c(E,A)$ и из τ-$\lim X=x$ следует A-$\lim X=x$ при $X\in c(E)$. По известной теореме Сильвермана — Теплица (см. [1], стр. 14; [4], стр. 79), матричный метод суммирования (5) является регулярным в $s(K)$ тогда и только тогда, когда $A\in\mathfrak{T}$. Из [20] и [19] вытекает, что условие $A\in\mathfrak{T}$ необходимо и достаточно для регулярности метода A в $s(E)$, также если E — пространство Банаха или Фреше (т. е. полное метризуемое локально выпуклое пространство). Доказательство последнего (из книги [17], теорема 3 на стр. 43) для банахова пространства обобщается на случай локально выпуклого пространства E следующим образом.

Теорема 2. *Пусть (E,τ) — секвенциально полное отделимое локально выпуклое пространство. Матричный метод суммирования* (5) *является регулярным в $s(E)$ тогда и только тогда, когда $A\in\mathfrak{T}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть (b_i) — произвольная сходящаяся к точке b последовательность скаляров, а элементы $x\in E$, $x'\in E'$ такие, что $\langle x,x'\rangle=1$. Ввиду регулярности метода A имеем

$$\tau\text{-}\lim_n \sum_k a_{nk} b_k x = bx.$$

Но тогда

$$\lim_n \sum_k a_{nk} b_k = \lim_n \langle \sum_k a_{nk} b_k x, x' \rangle = \langle bx, x' \rangle = b$$

и доказательство необходимости завершается применением вышеупомянутой теоремы Сильвермана — Теплица.

Достаточность. Пусть $A \in \mathfrak{T}$ и $x \in c(E)$, где $\tau\text{-}\lim X = x$. Метод суммирования A, очевидно, линейный и для постоянной последовательности $X = (x)$ в силу (9) имеем $A\text{-}\lim X = x$. Поэтому достаточно убедится в A-суммируемости к нулю последовательности

$$Y = (y_i), \qquad y_i = x_i - x.$$

Пусть

$$p_\alpha \in Q,$$

где Q обозначает систему полунорм, определяющих топологию τ. Для каждого $\varepsilon > 0$ в силу $\tau\text{-}\lim Y = \theta$ найдется такой номер m, что

$$p_\alpha(y_k) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

при $k \geqslant m$. Далее, по условию (8) определяем индекс r так, что

$$\sum_{k<m} |a_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2 \sup\limits_i p_\alpha(y_i)}$$

при $n \geqslant r$. Таким образом, учитывая еще условие (10), получаем для всех $n \geqslant r$

$$p_\alpha(\sum_k a_{nk} y_k) \leqslant \sup_k p_\alpha(y_k) \cdot \sum_{k<m} |a_{nk}| + \sum_{k \geqslant m} |a_{nk}|\, p_\alpha(y_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, имеем

$$\tau\text{-}\lim \sum_k a_{nk} y_k = \Theta,$$

т. е. $A\text{-}\lim Y = \theta$. Теорема доказана.

Замечание. В. Д. Жаворонков сообщил нам о получении такого-же результата другим методом.

Приступая к исследованию свойства (A^0) абстрактных последовательностей $X \in s(E)$, отметим, что оно в общем случае не вызывает сходимости последовательности X. В качестве примера рассмотрим в пространстве m всех ограниченных числовых последовательностей

$$x = (\xi_k) \tag{11}$$

с нормой

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k| \tag{12}$$

последовательность $X = (e_i)$ точек $e_i = (\delta_{ik})$, где δ_{ik} — символ

Кронекера. Нетрудно проверить, что для всех $Y \in \mathfrak{R}(X)$ имеем $A\text{-}\lim Y = \theta$, где $A \in \mathfrak{T}$ с

$$\lim_n \sup_k \|a_{nk}\| = 0, \tag{13}$$

в то же время, когда X расходится в пространстве m.

Пусть A — скалярная матрица. Введем следующие определения. Будем говорить, что последовательность $X \in s(E)$ является *A^0-сходящейся* к точке $x \in E$ (коротко $A^0\text{-}\lim X = x$), если $A\text{-}\lim Y = x$ для каждой $Y \in \mathfrak{R}(X)$. Мы говорим, что последовательность $X \in s(E)$ является *A^1-сходящейся* к значению $x \in E$ (коротко $A^1\text{-}\lim X = x$), если для каждой $Y \in \mathfrak{R}(X)$ существует $Z \in \mathfrak{R}(Y)$ с $A\text{-}\lim Z = x$. Из определений непосредственно следует, что оба обобщенных предела однозначно определены и обладают свойством наследственности, а A^1-сходимость является т. н. $\mathfrak{L}^*$-сходимостью Куратовского (см. [5], стр. 197). *Поля A^0-A^1-сходимости* определяются равенствами

$$c(E, A^0) = \{X \in s(E) \colon \exists A^0\text{-}\lim X \in E\},$$
$$c(E, A^1) = \{X \in s(E) \colon \exists A^1\text{-}\lim X \in E\}.$$

При этом, разумеется,

$$c(E, A^0) \subset c(E, A^1). \tag{14}$$

Ясно также, что каждая A^0-сходящаяся последовательность $X \in s(E)$ обладает свойством (A^0). Обратно, имеет место

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathfrak{T}$. Из свойства* (A^0) *последовательности $X \in s(E)$ следует ее A^0-сходимость*

Доказательство. Допустим, что последовательность $X \in s(E)$ обладает свойством (A^0). Тогда, в силу секвенциальной полноты пространства E для каждой $Y \in \mathfrak{R}(X)$ найдется $x(Y) \in E$ с $A\text{-}\lim Y = x(Y)$. Если $x(Y') \neq x(Y'')$ для некоторых $Y', Y'' \in \mathfrak{R}(X)$, то существует $x' \in E'$ такой, что $\langle x(Y'), x' \rangle \neq \neq \langle x(Y''), x' \rangle$. С другой стороны, по теореме 1 последовательность скаляров $\langle X, x' \rangle = (\langle x_i, x' \rangle)$ сходится, вследствие чего из-за $A \in \mathfrak{T}$ получаем $A\text{-}\lim \langle Y', x' \rangle = A\text{-}\lim \langle Y'', x' \rangle$ или $\langle x(Y'), x' \rangle = = \langle x(Y''), x' \rangle$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, все $x(Y)$ равны между собой и лемма доказана.

Для доказательства основной теоремы этого пункта нуждаемся еще в усиленном варианте одного результата Бака [14].

Лемма 2. *Пусть $A \in \mathfrak{T}$. Неограниченная последовательность $X \in s(K)$ содержит подпоследовательность Y со свойством $Z \notin c(E, A)$ для каждой $Z \in \mathfrak{R}(Y)$.*

Доказательство леммы распадается на две части.

1) Матрица A имеет бесконечно много рядов конечной длиной. В силу $A \in \mathfrak{T}$ эти длины не равномерно ограничены. Обозначим $a(n, k) = a_{nk}$, $y(k) = y_k$ и пусть (n_j), (k_j) — такие строго возрастающие последовательности индексов, что $a(n_j, k_j)$ — последний отличный от нуля член в ряде с номером n_j. Подпоследовательность Y определим теперь следующим об-

разом. Элементы $y(1), \ldots, y(k_1)$ подберем такими, что

$$\left|\sum_{i\leqslant k_1} a(n_1, i)\ y(i)\right|\geqslant 1.$$

В общем случае, если элементы $y(1), \ldots, y(i-1)$ $(k_{l-1} < i < k_l, l \geqslant 2)$, уже определены, то $y(i)$ найдем так, что

$$\min_{\nu\in C(i-1,\, k_m-1)} \left|\sum_{r\in\nu} a(n_m, r)y(r)+a(n_m, i)y(i)\right|\geqslant m \tag{15}$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1),$$

где $C(p, q)$ обозначает множество всех сочетаний из p чисел $1, \ldots, p$ по $q \leqslant p$. Элементы $y(k_l)$ $(l \geqslant 2)$ прибавим такие, что, кроме условий (15) с $i = k_l$, было выполнено еще неравенство

$$\left|\sum_{i\leqslant k_l} a(n_l, i)y(i)\right|\geqslant l.$$

По конструкции ясно, что последовательность Y обладает требуемыми свойствами, ибо при любой $Z \in \mathfrak{N}(Y)$ имеем

$$|\eta_{n_j}(Z)|\geqslant j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

2) Матрица А имеет только конечное число рядов конечной длины. Тогда существует такой индекс r, что при $n > r$ выполняется $a(n, k) \neq 0$ для бесконечного множества значений индекса k. Элемент $y(i)$ строемой последовательности $Y \in \mathfrak{N}(X)$ в данном случае подберем для каждого $i = 1, 2, \ldots$ так, что

$$|a(m, p)|^2|y(i)|\geqslant|a(m, p)| \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ i;\ p=1,\ 2,\ \ldots,\ i).$$

Но тогда для любой $Z \in \mathfrak{N}(Y)$ при $n > r$

$$\overline{\lim_k}\, |a(n, k)z_k|\geqslant 1$$

и, значит,

$$\sum_k a(n, k)z_k$$

расходится. Следовательно, $Z \notin c(E, A)$ ни для одной $Z \in \mathfrak{N}(Y)$. Лемма полностью доказана.

Теорема 3. *Пусть $A \in \mathfrak{T}$ и $X \in c(E, A^1)$. Тогда $X \in w(E)$.*

Доказательство. Прежде всего ясно, что из равенства $A^1\text{-}\lim X = x$ следует $A^1\text{-}\lim \langle X, x'\rangle = \langle x, x'\rangle$, где $x' \in E'$. В силу леммы 2 последовательность $\langle X, x'\rangle$ ограничена. Поэтому, если допустить, что $\lim\langle X, x'\rangle \neq \langle x, x'\rangle$, то можно найти подпоследовательность $Y \in \mathfrak{N}(X)$ со свойством $\lim\langle Y, x'\rangle = b \neq \langle x, x'\rangle$. Но последнее, ввиду $A \in \mathfrak{T}$, противоречит вытекающему из A^1-сходимости последовательности $\langle X, x'\rangle$ равенству $A^1\text{-}\lim\langle Y, x'\rangle = \langle x, x'\rangle$. Следовательно, $\lim\langle X, x'\rangle = \langle x, x'\rangle$ для каждого $x' \in E$, т. е. $\sigma\text{-}\lim X = x$. Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 позволяют при $A \in \mathfrak{T}$ соединить соотношения (4) и (14) в одно:

$$c(E)\subset c(E, A^0)\subset c(E, A^1)\subset w(E)\subset m(E)\subset s(E). \tag{16}$$

Отсюда при $E = K$ в силу равенства $c(K) = w(K)$ непосредственно вытекает следующая модификация теоремы Бака.

Теорема 4. *Пусть* $A \in \mathfrak{T}$ *и* $E = K$. *Равенство* $A^1\text{-}\lim X = x$ *равносильно соотношению* $\lim X = x$.

Известно, что кроме **R** и **C** существует целый ряд пространств со свойством

$$c(E) = w(E). \tag{17}$$

Такими являются, например, пространство последовательностей l, пространства Фреше — Монтеля (см. [2], стр. 240), некоторые поля суммируемости (см. [11], теорема 7).

Так как равенство (17) впервые установлено Шуром [21] для l, то условимся называть пространство E со свойством (17) *пространством Шура.* Для нас пространства Шура представляют особый интерес ввиду вытекающего из (16) и леммы 1 следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть* $A \in \mathfrak{T}$ *и* (E, τ) — *пространство Шура. Тогда* τ*-сходимость, свойство* (A^0), A^0*-сходимость и* A^1*-сходимость последовательности* $X \in s(E)$ *совпадают.*

В конце этого пункта сформулируем одно легко проверяемое предложение относительно метризуемых пространств.

Лемма 3. *Рефлексивное пространство Фреше E является пространством Шура тогда и только тогда, когда оно пространство Монтеля.*

2. Пространство Бака и $\mathfrak{T}^1$-пространство

Рассмотренный после теоремы 2 пример оправдывает введение названных в заглавии понятий. Пространство E назовем *пространством Бака* (соответственно $\mathfrak{T}^1$*-пространством*), если τ-сходимость последовательности $X \in s(E)$ для каждого $A \in \mathfrak{T}$ совпадает с A^0-сходимостью (соответственно с A^1-сходимостью). Очевидно, что каждое $\mathfrak{T}^1$-пространство есть пространство Бака.

Замечание. В определении пространства Бака требование A^0-сходимости можно по лемме 1 заменить свойством (A_0).

Теорема 5 показывает, что все пространства Шура являются $\mathfrak{T}^1$-пространствами (и, тем самым, пространствами Бака). Для получения полной характеристики пространства Бака и $\mathfrak{T}^1$-пространства нам нужна одна общая лемма Микусинского [18]. Пусть F — *сходимость* на множестве E, т. е., каждой последовательности $X \in s(E)$ приведено в соответствие множество $F(X)$ пределов последовательности X, причем в случае $F(X) = \varnothing$ последовательность X называется *расходящейся.* Говорят, что сходимость F обладает *свойством наследственности*, если из $Y \in \mathfrak{N}(X)$ следует $F(X) \subset F(Y)$. Сходимость F называется *сходимостью Урысона*, если при $x \notin F(X)$ существует такая $Y \in \mathfrak{N}(X)$, что $x \notin F(Z)$ для всех $Z \in \mathfrak{N}(Y)$. Говорят, что *сходимость G более общая, чем сходимость F*, если $F(X) \subset G(X)$ для всех $X \in s(E)$.

Лемма 4 (Микусинский). *Пусть F — сходимость Урысона и G — сходимость со свойством наследственности. Тогда, если G такая более общая сходимость, чем F, что для любого $X \in s(E)$ существует $Y \in \mathfrak{N}(X)$ со свойством $F(Y) \supset G(Y)$, то F и G совпадают.*

Теорема 6. *Пусть $A \in \mathfrak{T}$. Равенство $c(E) = c(E, A^0)$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждой $X \in w(E) \setminus c(E)$ существует такая $Y \in \mathfrak{N}(X)$, что $Y \notin c(E, A^0)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Так как τ-сходимость — сходимость Урысона и A^0-сходимость обладает свойством наследственности, то по лемме 4 имеем $c(E) = c(E, A^0)$, если для каждой $X \in s(E)$ найдется такая $Y \in \mathfrak{N}(X)$, что

$$\{\tau\text{-}\lim Y\} \supset \{(A^0\text{-}\lim Y\}, \tag{18}$$

где $\{\tau\text{-}\lim Y\} = \varnothing$ (соответственно $\{A^0\text{-}\lim Y\} = \varnothing$) при $Y \notin c(E)$ (соответственно $Y \notin c(E, A^0)$). Убедимся в справедливости (18) для всех $X \in s(E) \setminus [w(E) \setminus c(E)] = [s(E) \setminus w(E)] \cup c(E)$. В случае $X \in s(E) \setminus w(E)$ имеем $\{\tau\text{-}\lim X\} = \{A^0\text{-}\lim X\} = \varnothing$, ибо X будет A^0-расходящимся из-за включения (14) и теоремы 3. Следовательно, соотношение (18) выполнено, если взять в нем $Y = X$. При $X \in c(E)$ справедливость (18) вытекает из равенства $\tau\text{-}\lim X = A^0\text{-}\lim X$. Этим доказательство достаточности завершено, ибо в случае $Y \notin c(E, A^0)$ включение (18) гарантировано ввиду равенства $\{A^0\text{-}\lim X\} = \varnothing$.

Замечание. В силу леммы 1 соотношение $X \notin c(E, A^0)$ равносильно существованию $Y \in \mathfrak{N}(X)$ с условием $Y \notin c(E, A)$. Поэтому в теореме 6 требование $Y \notin c(E, A^0)$ можно заменить условием $Y \notin c(E, A)$.

Аналогично теореме 6 доказывается

Теорема 7. *Пусть $A \in \mathfrak{T}$. Равенство $c(E) = c(E, A^1)$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой $X \in w(E) \setminus c(E)$ найдется такая $Y \in \mathfrak{N}(X)$, что $Y \notin c(E, A^1)$.*

Теоремы 6 и 7 позволяют нам сформулировать полные характеристики пространства Бака и $\mathfrak{T}^1$-пространства.

Теорема 8. *Пространство E является пространством Бака (соответственно $\mathfrak{T}^1$-пространством) тогда и только тогда, когда для каждой $A \in \mathfrak{T}$ и каждой $X \in w(E) \setminus c(E)$ существует такая $Y \in \mathfrak{N}(X)$, что $Y \notin c(E, A)$ (соответственно $Y \notin c(E, A^1)$).*

Замечание. В случае пространства Шура E условия теоремы 8 выполнены, ибо тогда $w(E) \setminus c(E) = \varnothing$.

Вопрос о существовании пространства Бака (или $\mathfrak{T}^1$-пространства) с $w(E) \setminus c(E) \neq \varnothing$ остается пока открытым. Полностью решается вопрос об отношении пространств Бака (соответственно $\mathfrak{T}^1$-пространств) и Шура для классов специальных пространств в следующем пункте.

В конце этого пункта укажем на возможность получения новых пространств Бака (и $\mathfrak{T}^1$-пространств) в виде топологического произведения или поля суммируемости.

Пусть (E_α) — произвольное семейство секвенциально полных отделимых локально выпуклых пространств. Тогда таковым же является и их топологическое произведение

$$E = \Pi E_\alpha \tag{19}$$

(ср. [2], стр. 344). Обозначим через π_α проекцию E на E_α. Имеет место

Теорема 9. *Топологическое произведение* (19) *является пространством Бака тогда и только тогда, когда все сомножители E_α — пространства Бака.*

Доказательство исчерпывается замечанием, что сходимость $A^0\text{-}\lim X = x$, в силу непрерывности и линейности π_α, равносильно выполнению $A^0\text{-}\lim \pi_\alpha(X) = \pi_\alpha(x)$ для каждого α, а сходимость $\lim X = x$ в E равносильно соотношениям $\lim \pi_\alpha(X) = \pi_\alpha(x)$ в E_α для всех α.

Следствие. *Пространство последовательностей $s = s(\mathbf{C})$ с топологией произведения $\prod\limits_i \mathbf{C}$ есть пространство Бака.*

Множество $E \subset s$ называется *FK-пространством*, если оно является таким полным метризуемым локально выпуклым пространством, что из $\lim X = x$ в E следует $\lim \xi_{ik} = \xi_k$ для каждого k, где $x_i = (\xi_{ik})$, $x = (\xi_k)$. Пусть E — пространство Бака. По теореме 9 и следствию к ней ясно, что $s \times E$ — также пространство Бака. С другой стороны, Беннетт [11] показал, что в случае FK-пространства E поле суммируемости

$$E(A) = \{x \in s\colon\ \exists y = (\eta_n(x)),\ y \in E\}$$

является FK-пространством, изоморфным к замкнутому подпространству произведения $s \times E$, если A — конечнострочная матрица. Следовательно, справедлива

Теорема 10. *Пусть A — конечнострочная матрица. Если E является FK-пространством Бака, то таким же будет и $E(A)$.*

Относительно $\mathfrak{T}^1$-пространств не трудно получить следующие аналогичные результаты.

Теорема 11. *Топологическое произведение E конечного числа $\mathfrak{T}^1$-пространств $E_1, \ldots, E_n$ снова $\mathfrak{T}^1$-пространство.*

Теорема 12. *Пусть A —конечнострочная матрица. Если E одновременно FK- и $\mathfrak{T}^1$-пространство, то таковым же будет и $E(A)$.*

3. Об $BS(A^0)$-пространствах и $BS(A)$-пространствах

Здесь рассмотрим специальные классы пространств, в которых свойство Шура (17) является также необходимым для справедливости теоремы Бака (соответственно теоремы 4).

Непосредственно из определений ясно, что E — пространство Бака (соответственно $\mathfrak{T}^1$-пространство) тогда и только тогда, когда $c(E) = c(E, \mathfrak{T}^0)$ (соответственно $c(E) = c(E, \mathfrak{T}^1)$), где

$$c(E, \mathfrak{T}^0) = \bigcup_{A \in \mathfrak{T}} c(E, A^0), \qquad c(E, \mathfrak{T}^1) = \bigcup_{A \in \mathfrak{T}} c(E, A^1).$$

Отсюда следует

Теорема 13. *Пространство Бака (соответственно $\mathfrak{T}^1$-пространство) является пространством Шура тогда и только тогда, когда $c(E, \mathfrak{T}^0) = \varpi(E)$ (соответственно $c(E, \mathfrak{T}^1) = \varpi(E)$).*

Пусть $A \in \mathfrak{T}$. Будем говорить, что E является *пространством типа* $BS(A^0)$ (или $BS(A^0)$-*пространством*), если для каждой $X \in \varpi(E)$ существует $Y \in \mathfrak{N}(X)$ с $Y \in c(E, A^0)$.

Теорема 14. *Пространство E типа $BS(A^0)$ является пространством Бака тогда и только тогда, когда E — пространство Шура.*

Доказательство. Ввиду теоремы 5 остается доказать только необходимость. Пусть (E, τ) — пространство Бака. Предположим, что E не является пространством Шура. Тогда существует такая $X \notin c(E)$, что $\sigma\text{-}\lim X = x$, где $x \in E$. Так как τ-сходимость есть сходимость Урысона, то из $\tau\text{-}\lim X \neq x$ вытекает существование такой $Y \in \mathfrak{N}(X)$, что $\tau\text{-}\lim Z \neq x$ для всех $Z \in \mathfrak{N}(Y)$. С другой стороны, найдется $Z' \in \mathfrak{N}(Y)$ с $A^0\text{-}\lim Z' = x$. Итак, последовательность $Z' \in \varpi(E) \setminus c(E)$ не содержит ни одной A-расходящейся подпоследовательности. А это, по теореме 8, противоречит предположению нашей теоремы. Следовательно, E — пространство Шура и теорема доказана.

Следствие 1. *Рефлексивное $BS(A^0)$-пространство Фреше E является пространством Бака тогда и только тогда, когда E — пространство Монтеля.*

Доказательство следует из леммы 3.

На основе конечномерности банахова пространства Монтеля (см. [2], стр. 240) справедливо

Следствие 2. *Рефлексивное $BS(A^0)$-пространство Банаха является пространством Бака тогда и только тогда, когда оно конечномерно.*

Вещественное банахово пространство E называется (r, ε)-*выпуклым*, если для любой системы элементов $x_1, \ldots, x_r$; $\|x_i\| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ существует такая комбинация знаков $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, что $\|\sigma_1 x_1 + \ldots + \sigma_r x_r\| \leqslant r(1 - \varepsilon)$ (ср. [10]). По теореме 1 из [3] ясно, что $BS(A^0)$-пространство Фреше E рефлексивно тогда и только тогда, когда для каждой $X \in m(E)$ найдется $Y \in \mathfrak{N}(X)$ с $Y \in c(E, A^0)$. Поэтому из теоремы 2 статьи [12] заключаем, что $(2, \varepsilon)$-выпуклое пространство является рефлексивным $BS[(C, 1)^0]$-пространством, где $(C, 1)$ — метод суммирования арифметических средних (см. [1], стр. 67).

Следствие 3. *Среди всех $(2, \varepsilon)$-выпуклых пространств пространствами Бака являются только конечномерные.*

Следствие 4. *Ни одно из пространств L^p при $p > 1$ не является пространством Бака.*

Доказательство этого утверждения опирается на следствие 2, если иметь в виду, что по теореме 4 из [6] все пространства L^p являются $BS(A^0)$-пространствами для любой $A \in \mathfrak{T}$ со свойством (13).

В некоторой мере аналогичные результаты получаются и относительно $\mathfrak{T}^1$-пространств.

Пусть $A \in \mathfrak{T}$. Пространство E называется *пространством типа* $BS(A)$ (или $BS(A)$-*пространством*), если для любой $X \in \in w(E)$ существует $Y \in \mathfrak{N}(X)$ с $Y \in c(E, A)$. Пространства типа $BS(A)$ при $A = (C, 1)$ исследовали многие авторы: Банах и Сакс [9] установили, что пространства $L^p(0, 1)$ и l^p при $p > 1$ суть $BS[(C, 1)]$-пространства, Какутани [16] доказал, что каждое равномерно выпуклое пространство является $BS[(C, 1)]$-пространством, в [8] приведено пример рефлексивного банахова пространства, которое не является $BS[(C, 1)]$-пространством, и т. д. Пространства типа $BS(A)$ характеризует

Теорема 15. *Пространство E является $BS(A)$-пространством тогда и только тогда, когда $c(E, A^1) = w(E)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть E — пространство типа $BS(A)$. В силу теоремы 3 доказательства требует только включение $c(E, A^1) \supset w(E)$. Если $\sigma\text{-}\lim X = x$, то для любой $Y \in \mathfrak{N}(X)$ существует такая $Z \in \mathfrak{N}(Y)$, что $Z \in \in c(E, A)$. При этом имеем $A\text{-}\lim Z = x$, либо $\sigma\text{-}\lim Z = x$ и $A \in \mathfrak{T}$. Следовательно, $X \in c(E, A^1)$.

Достаточность очевидна.

В силу включения $c(E, A^1) \subset c(E, \mathfrak{T}^1)$ сразу получаем

Следствие. *Пространство типа $BS(A)$ обладает свойством $c(E, \mathfrak{T}^1) = w(E)$.*

Отсюда по теореме 13 заключаем, что справедлива

Теорема 16. *Пространство Фреше E типа $BS(A)$ является $\mathfrak{T}^1$-пространством тогда и только тогда, когда оно пространство Шура.*

Следствие 1. *Пространство c всех сходящихся числовых последовательностей* (11) *с нормой* (12) *не является $\mathfrak{T}^1$-пространством.*

Доказательство. По теореме Фарнума [15] пространство c является $BS[(C, 1)]$-пространством. Так как c не является пространством Шура, то доказательство завершается применением теоремы 16.

Из теоремы 1 статьи [3] выводим, что $BS(A)$-пространство Фреше E рефлексивно тогда и только тогда, когда для каждой $X \in m(E)$ можно найти $Y \in \mathfrak{N}(X)$ с $Y \in c(E, A)$. Относительно рефлексивных $BS(A)$-пространств Фреше с помощью леммы 3 получаем

Следствие 2. *Рефлексивное $BS(A)$-пространство Фреше будет $\mathfrak{T}^1$-пространством тогда и только тогда, когда оно пространство Монтеля.*

Следствие 3. *Рефлексивное $BS(A)$-пространство Банаха является $\mathfrak{T}^1$-пространством тогда и только тогда, когда оно конечномерно.*

Отсюда в силу [16] вытекает

Следствие 4. *Среди всех равномерно выпуклых пространств $\mathfrak{T}^1$-пространствами являются только конечномерные.*

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
3. Кольк Э., О рефлексивности и суммируемости в пространствах Фреше. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 127—130.
4. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
5. Куратовский К., Топология, т. 1. Москва, 1966.
6. Чаттерджи С. Д., Принцип подпоследовательностей в теории вероятностей. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1973, **17** : 6, 53—60.
7. Agnew, R. P., Summability of subsequences. Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, 596—598.
8. Baerstein II, A., On reflexivity and summability. Studia math., 1972, **42**, 91—94.
9. Banach, S., Saks, S., Sur la convergence forte dans les champs L^p. Studia math., 1930, **2**, 51—57.
10. Beck, A., A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, 329—334.
11. Bennett, G., A representation theorem for summability domains. Proc. London Math. Soc., 1972, **24**, 193—203.
12. Brunel, A., Sucheston, L., On B-convex Banach spaces. Math. Syst. Theor., 1974, **7**, 294—299.
13. Buck, R. C., A note on subsequences. Bull. Amer. Math. Soc., 1943, **49**, 898—899.
14. Buck, R. C., An addendum to "A note on subsequences". Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, 1074—1075.
15. Farnum, N. R., The Banach-Saks theorem in $C(S)$. Canad. J. Math., 1974, **26**, 91—97.
16. Kakutani, S., Weak convergence in uniformly convex spaces. Tôhoku Math. J., 1938, **45**, 188—193.
17. Marti, J. T., Introduction to the theory of bases. Berlin—Heidelberg—New York, 1969.
18. Mikusinski, J., A lemma on convergence. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1974, **22**, 903—907.
19. Ramanujan, M. S., Generalized Kojima-Toeplitz matrices in certain linear topological spaces. Math. Ann., 1965, **159**, 365—373.
20. Robinson, A., On functional transformations and summability. Proc. London Math. Soc., (2), 1950, **52**, 132—160.
21. Schur, J., Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. reine und angew. Math., 1920, **151**, 79—111.

Поступило
7 V 1975

BUCKI TEOREEM LOKAALSELT KUMERATES RUUMIDES

E. Kolk

Resümee

Olgu E — jadaliselt täielik eralduv lokaalselt kumer topoloogiline vektorruum üle reaal- või kompleksarvude korpuse K, τ — lähtetopoloogia ning $\sigma=\sigma(E,E')$ — nõrk topoloogia ruumis E. Märgime $s(E)$ ruumi E elementidest moodustatud kõikvõimalike jadade (1) hulga ning $c(E)$, $w(E)$ tema alamhulgad, mis on määratud vastavalt võrdustega (2) ja (3).

Olgu $A=(a_{nk})$ skalaarne maatriks ning $\mathfrak{N}(X)$ — jada X kõikide osajadade hulk. Me ütleme, et

1) A-$\lim X=x$, kui kõik read võrduses (6) koonduvad ja on rahuldatud (7);
2) jada X on omadusega (A°), kui kõik $Y\in\mathfrak{N}(X)$ on A-koonduvad;
3) A°-$\lim X=x$, kui A-$\lim Y=x$ iga $Y\in\mathfrak{N}(X)$ korral;
4) A^1-$\lim X=x$, kui iga $Y\in\mathfrak{N}(X)$ korral leidub $Z\in\mathfrak{N}(Y)$, nii et A-$\lim Z=x$.

Ruumi E nimetatakse *Schuri ruumiks*, kui $c(E)=w(E)$ ning *Bucki ruumiks* (*$\mathfrak{T}^1$-ruumiks*), kui seos $X\in c(E)$ on samaväärne omadusega (A°) (vastavalt A^1-koonduvusega) iga $A\in\mathfrak{T}$ korral, kus $\mathfrak{T}$ on kõikide Toeplitzi maatriksite hulk.

Tuntud Bucki teoreemi järgi on K Bucki ruum harilikus normitopoloogias. Käesolevas artiklis uuritakse Bucki teoreemi kehtivust üldisemates ruumides. Tõestatakse, et iga Schuri ruum on $\mathfrak{T}^1$-ruum (seega ka Bucki ruum) ning antakse Bucki ja $\mathfrak{T}^1$ruumide järgmine üldine iseloomustus.

Teoreem 8. *Ruum E on Bucki ruum ($\mathfrak{T}^1$-ruum) parajasti siis, kui iga $A\in\mathfrak{T}$ ja iga $X\in w(E)\setminus c(E)$ korral leidub A-hajuv (vastavalt A^1-hajuv) $Y\in\mathfrak{N}(X)$.*

Me nimetame ruumi E *$BS(A)$-ruumiks* (*$BS(A^\circ)$-ruumiks*), kui iga $Y\in w(E)$ sisaldab A-koonduva (vastavalt A°-koonduva) $Y\in\mathfrak{N}(X)$.

Küsimus selliste Bucki ja $\mathfrak{T}^1$-ruumide olemasolust, mis ei ole Schuri ruumid, jääb esialgu lahtiseks. Küll aga osutub, et $BS(A^\circ)$-ruum ($BS(A)$-ruum) E on samaaegselt Bucki (vastavalt $\mathfrak{T}^1$) ruum parajasti siis, kui ta on Schuri ruum. Viimasest tuleneb muuhulgas, et jadaruum c ei ole $\mathfrak{T}^1$-ruum ning ükski ruumidest L_p, kui $p>1$, ei ole Bucki ruum.

DER SATZ VON BUCK IN LOKALKONVEXEN RÄUMEN

E. Kolk

Zusammenfassung

Es sei E ein folgenvollständiger separierter lokalkonvexer topologischer linearer Raum über dem Körper K der reellen oder komplexen Zahlen, τ die Ausgangstopologie und $\sigma=\sigma(E,E')$ die schwache Topologie auf E. Bezeichnen wir mit $s(E)$ die Menge aller Folgen (1) von Elementen des Raumes E und mit $c(E)$, $w(E)$ ihre Teilmengen, die durch die Gleichungen (2) und (3) bestimmt sind.

Es sei noch $A=(a_{nk})$ eine Matrix mit Elementen aus K und $\mathfrak{N}(X)$ die Menge aller Teilfolgen von X. Wir sagen:

1) A-$\lim X=x$, wenn alle Reihen in (6) konvergieren und die Gleichung (7) gilt;
2) die Folge X hat die *Eigenschaft* (A°), wenn alle $Y\in\mathfrak{N}(X)$ A-konvergieren;
3) A°-$\lim X=x$, wenn es A-$\lim Y=x$ für alle $Y\in\mathfrak{N}(X)$ gibt;
4) A^1-$\lim X=x$, wenn es für alle $Y\in\mathfrak{N}(X)$ ein $Z\in\mathfrak{N}(Y)$ mit A-$\lim Z=x$ gibt.

Den Raum X nennen wir den *Schur-Raum*, wenn $c(E)=w(E)$ gilt, und den *Buck-Raum* (bzw. $\mathfrak{T}^1$*-Raum*), wenn $X\in c(E)$ mit der Eigenschaft (A°) (bzw. mit A^1-Konvergenz) gleichbedeutend ist für jedes $A\in\mathfrak{T}$, wo $\mathfrak{T}$ die Menge aller Toeplitz-Matrizen ist.

Nach dem bekannten Satz von Buck ist K ein Buck-Raum in gewöhnlicher Normtopologie. In diesem Aufsatz wird die Gültigkeit des Buck-Satzes in allgemeineren Räumen untersucht. Es wird bewiesen, daß jeder Schur-Raum ein $\mathfrak{T}^1$-Raum (damit auch ein Buck-Raum) ist und das folgende allgemeine Kriterium für die Buck- und $\mathfrak{T}^1$-Räume gegeben.

Theorem 8. *Der Raum E ist genau dann ein Buck-Raum* (bzw. $\mathfrak{T}^1$*-Raum*), *wenn es für jedes $A\in\mathfrak{T}$ und für jedes $X\in\omega(E)$ $c(E)$ eine A-divergente* (bzw. *A^1-divergente*) *Folge $Y\in\mathfrak{N}(X)$ gibt.*

Ein Raum E heißt ein *$BS(A)$-Raum* (bzw. *$BS(A^\circ)$-Raum*), wenn es *für jedes $X\in\omega(E)$ eine A-konvergente* (*A°-konvergente*) *Folge $Y\in\mathfrak{N}(X)$ gibt.*

Die Frage nach der Existenz solcher Buck- und $\mathfrak{T}^1$-Räume, die keine Schur-Räume sind, bleibt zuerst offen. Wohl aber erweist sich, daß $BS(A^\circ)$-Raum (bzw. $BS(A)$-Raum) E genau dann ein Buck-Raum (bzw. $\mathfrak{T}^1$-Raum) ist, wenn er ein Schur-Raum ist. Aus dem Letztgesagten ergibt sich unter anderem, daß Folgenraum c kein $\mathfrak{T}^1$-Raum und L^p mit $p>1$ kein Buck-Raum ist.

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА BK-ПРОСТРАНСТВ

Т. Тяхт

Кафедра математического анализа

В настоящей статье исследуются BK-пространства, в частности, пространства с базисом суммирования. В § 1 приведены символика и некоторые определения, § 2 посвящен исследованию свойств мультипликатора BK-пространств, в основном, связанных со свойствами пространств относительно некоторой матрицы суммирования. Основной результат § 3 — нерефлексивность мультипликатора как некоторого пространства линейных операторов. Следствием этого получается нерефлексивность поля суммируемости регулярной матрицы, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям. В § 4 пространства с базисом суммирования и их мультипликаторы характеризуются в терминах дополнительных пространств. В случае обычного базиса эти результаты хорошо известны, для обобщения их на базисы суммирования нам пришлось наложить ограничения на матрицу. Эти ограничения такого же типа, как и в § 3.

§ 1. Некоторые обозначения

Пусть s — пространство всех числовых последовательностей с покоординатными операциями и топологией покоординатной сходимости. Запись $\xi \in s$ означает, что $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\} = \{\xi_k\}_1^\infty = \{\xi_k\}$.

Рассмотрим в банаховом пространстве E минимальную систему[1] $\{x_n\}$ с сопряженной $\{x_n^*\}$. Обозначим через $\hat{E}$ множество всех таких последовательностей $\xi \in s$, что при некотором $x \in E$ имеет место $\xi_n \equiv (x, x_n^*)$. Если определить на $\hat{E}$ норму через

[1] Если не указаны дополнительные ограничения, то свободный индекс принимает все значения 1, 2, 3, ... Аналогично

$$\sum_n = \sum_{n=1}^{\infty}.$$

$$\|\xi\| = \inf_{x \in E,\ \xi_n \equiv (x, x_n^*)} \|x\|,$$

то $\hat{}E$ станет BK-пространством [2]. Обозначая для $\xi \in \hat{}E$ через $\varphi(\xi)$ множество таких $x \in E$, то $\xi_n \equiv (x, x_n^*)$, получаем изометрический изоморфизм

$$\varphi\colon \hat{}E \to E/[x_n^*]^{\perp},$$

где

$$[x_n^*]^{\perp} = \{x \in E\colon\ (x, x_n^*) \equiv 0\}.$$

В частности, если $\{x_n^*\}$ тотальна, то E изометрически изоморфно BK-пространству $\hat{}E$. Если система $\{x_n\}$ еще и полна в E, то сопряженное пространство E^* изометрически изоморфно BK-пространству $\hat{}(E^*) = \hat{}E^*$.

Пусть, например, $\{x_n\}$ — базис *A-суммируемости* (короче *A-базис*) в пространстве E, т. е. для каждой $x \in E$ найдется единственный $\xi \in s$ такой, что ряд $\Sigma \xi_n x_n$ является A-суммируемым к x, где A — регулярная матрица. Тогда $\{x_n\}$ — полная минимальная система с тотальной сопряженной.

Из предыдущего ясно, что при исследовании банаховых пространств, имеющих минимальную систему с тотальной сопряженной, можно ограничиться BK-пространствами. Поэтому в дальнейшем E — всегда BK-пространство. При этом предположим еще, что $E \ni e_n$ при любом n, где $e_n = \{\delta_{nk}\}$. Сопряженную к $\{e_n\}$ систему обозначим через $\{f_n\}$. Запись $x \in E$ означает теперь, что последовательность $\{(x, f_n)\} = x$. Линейная оболочка системы $\{e_n\}$ обозначается через $L(e_n)$.

Элементы матрицы A преобразования ряда в последовательность обозначим через α_{ij}, в дальнейшем всегда

$$\lim_i \alpha_{ij} = 1.$$

Пусть m — пространство всех ограниченных последовательностей, c — пространство всех сходящихся последовательностей, γ_A — множество A-суммируемых рядов, μ_A — множество A-ограниченных рядов. Если A обратима, т. е. если уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение при любом $y \in c$, то γ_A есть BK-пространство относительно нормы

$$\|\xi\| = \sup_n \Big|\sum_k \alpha_{nk}\xi_k\Big|,$$

где $\xi \in \gamma_A$. Если A регулярна, то $L(e_n) \subset \gamma_A$. Матрица A называется *совершенной*, если в топологии γ_A замыкание $[L(e_n)] = \gamma_A$.

---

[2] Пространство $E \subset S$ называется BK-пространством, если E банахово и вложение $E \subset S$ непрерывно.

Пусть E есть FK-пространство[3], $\xi, \mu \in s$. Обозначим

$$A_{nm}\xi = \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\xi_k e_k,$$

$$A_{nm}^*\mu = \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\mu_k f_k.$$

Если в слабой топологии $\sigma(E, E^*)$ существует предел

$$\lim_m A_{nm}\xi,$$

то обозначим его через $A_n\xi$. Аналогично

$$A_n^*\mu = \lim_m A_{nm}^*\mu$$

в топологии $\sigma(E^*, E)$.

Определим еще векторные пространства

$$E^c(A) = \{x \in E : A_{nm}x \to A_n x \to x\}.$$

и

$$E^O(A) = \{\xi \in S : \exists A_n\xi = O(1)\}.$$

Тогда $E^c(A) \subset E$, но не всегда $E \subset E^O(A)$. Система $\{e_n\}$ является A-базисом в пространстве E тогда и только тогда, когда $E = E^c(A)$.

Обозначим еще $e = \{\delta_{kk}\}$. Для $\mu, \varepsilon \in s$ пишем $\mu\varepsilon = \{\mu_k\varepsilon_k\}$.

Если X, Y — множества, A — оператор из X в Y и $K \subset X$, то $AK = \{y \in Y : y = Ax,\ x \in K\}$.

§ 2. Мультипликаторы BK-пространств

В дальнейшем часто будут использованы следующие три леммы (ср. [6], предложение 12.2).

Лемма 1. *Если BK-пространство $E = E^c(A)$, то*

$$\|f\| \leqslant \sup_n \|A_n^* f\| \leqslant K\|f\|$$

для любого $f \in E^*$, где $K = \sup \|A_n\|$.

Доказательство. Возьмем $f \in E^*$ и найдем такой x, что $\|x\| = 1$ и $|(x, f)| \geqslant \|f\| - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда из неравенств

$$\|f\| \leqslant |(x, f)| + \varepsilon = |\lim_n (A_n x, f)| + \varepsilon =$$

$$= \lim_n |(x, A_n^* f)| + \varepsilon \leqslant \sup_n |(x, A_n^* f)| + \varepsilon$$

выводим, что

$$\|f\| \leqslant \sup_n \|A_n^* f\|.$$

[3] Пространство $E \subset S$ называется FK-пространством, если E — пространство Фреше и вложение $E \subset S$ непрерывно.

Далее,

$$\sup_n \|A_n^* f\| \leqslant \sup_n \|A_n^*\| \, \|f\| = K \|f\|,$$

так как $\|A_n^*\| = \|A_n\|$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если E есть FK-пространство, матрица A регулярна, а для последовательности μ при каждом n существует $A_n^*\mu = O(1)$, то найдется $f \in E^*$ такой, что $(e_n, f) = \mu_n$ при каждом n.*

Доказательство. Определим на $L(e_n)$ линейный функционал f_0 равенствами $(e_n, f_0) = \mu_n$. Этот функционал непрерывен на $L(e_n)$, ибо $A_n^*\mu = O(1)$ и из-за регулярности A имеет место

$$\sup_n |(x, A_n^*\mu)| \geqslant |(x, f_0)|$$

при каждом $x \in L(e_n)$. Утверждение леммы следует теперь из теоремы Хана — Банаха.

Лемма 3. *Пусть BK-пространство $E = E^c(A)$. Тогда $E^o(A)$ является BK-пространством с нормой*

$$\|\xi\| = \sup_n \|A_n \xi\|. \tag{1}$$

При этом $E^c(A)$ является замкнутым подпространством в $E^o(A)$.

Доказательство. Полнота $E^o(A)$ следует из определения нормы (1), замкнутость $E^c(A) = E$ в $E^o(A)$ из того, что норма (1) для $\xi = \{x, f_k)\}$ эквивалентна исходной норме $\|x\|$, где $x \in E$.

Пусть E_1, $E_2 \subset s$. *Мультипликатором* $M(E_1, E_2)$ называется множество последовательностей μ таких, что при каждом $x \in E_1$ элемент $\mu x \in E_2$, где $(\mu x, f_k) = \mu_k (x, f_k)$.

Если E_1 и E_2 суть BK-пространства, то элементы мультипликатора $M(E_1, E_2)$ являются непрерывными операторами из E_1 в E_2. Для доказательства нижеследующей леммы 5 приведем этот результат для более общего случая:

Предложение 4. *Мультипликатор $M(E_1, E_2)$ является замкнутым подпространством пространства*[4] *$L(E_1, E_2)$, где E_1 и E_2 суть FK-пространства.*

Доказательство. Вложение $M(E_1, E_2) \subset L(E_1, E_2)$ легко доказать при помощи теоремы о замкнутом графике. Пусть μ^n образуют последовательность Коши в $M(E_1, E_2)$ (относительно операторной нормы). Тогда $\mu^n \to \mu$, где $\mu \in L(E_1, E_2)$. Но

$$(\mu x, f_k) = \lim_n (\mu^n x, f_k) = \lim_n \mu^n{}_k (x, f_k).$$

Таким образом, $\mu \in M(E_1, E_2)$. Предложение доказано.

---

[4] Через $L(E_1, E_2)$ обозначено пространство всех линейных непрерывных операторов из E_1 в E_2.

Лемма 5 (ср. [3], теорема 2). *Пусть A — обратимая регулярная, B — регулярная матрица. Тогда*

$$\hat{}(\gamma_A{}^*)\supset M(\gamma_A,\gamma_B), \qquad \hat{}(\gamma_A{}^*)\supset M(\gamma_A,\mu_B), \qquad \hat{}(\mu_A{}^*)\supset M(\mu_A,\mu_B).$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда соответственно

$$\gamma_A=\gamma_A{}^c(B), \qquad \gamma_A\subset\gamma_A{}^O(B), \qquad \mu_A\subset\gamma_A{}^O(B).$$

Доказательство следует из определения, леммы 2 и предложения 4, если иметь в виду, что полунормы

$$\sup_n\Big|\sum_k\beta_{nk}\xi_k\Big|, \qquad \sup_m\Big|\sum_{k=1}^m\beta_{nk}\xi_k\Big|, \qquad \sup_k|\xi_k|$$

на μ_B определяют FK-топологию, в которой γ_B замкнуто.

Для BK-пространства E обозначим через $(E)_0=E_0$ замкнутую линейную оболочку системы $\{e_n\}$ в E. В случае $M(E_1,E_2)$ пишем $(M(E_1,E_2))_0=M_0$.

Предложение 4 дополняет следующее

Предложение 6. *Пусть $E_i\subset E_i{}^O(A)$ при $i=1$ или $i=2$, где E_1 и E_2 суть BK-пространства. Тогда*

$$M(E_1,E_2)\subset(M(E_1,E_2))^O(A).$$

Если еще $E_1=(E_1)_0$, то

$$M(E_1,E_2)=(M(E_1,E_2))^O(A).$$

Доказательство. Возьмем $\mu\in M(E_1,E_2)$. Так как $E_i\subset E_i{}^O(A)$, то $\|A_n\|=O(1)$ в $L(E_i,E_i)$. Поэтому, учитывая предложение 4, имеем при $i=1$

$$\|A_n\mu\|=\|\mu\circ A_n\|\leqslant K_1\|\mu\|,$$

а если $i=2$, то

$$\|A_n\mu\|=\|A_n\circ\mu\|\leqslant K^2\|\mu\|,$$

где $K_i=\sup\|A_n\|$ в $L(E_i,E_i)$.

Если $E_1=(E_1)_0$ и $\mu\in(M(E_1,E_2))^O(A)$, то по теореме Банаха — Штейнгауза $A_n\mu x\to\mu x$ в E_2 и $\mu\in M(E_1,E_2)$. Предложение доказано.

В дальнейшем E_1 и E_2 всегда BK-пространства.

Лемма 7. *Если $E_i\subset E_i{}^O(A)$, где $i=1$ или $i=2$, то $M_0=M_0{}^c(A)$.*

Доказательство. По предложению 6 имеем $\|A_n\|=O(1)$ в $L(M(E_1,E_2),M(E_1,E_2))$ и поэтому по теореме Банаха — Штейнгауза $A_n\mu\to\mu$ тогда и только тогда, когда $\mu\in M_0$. При этом $A_n\mu\in M_0$ для каждой $\mu\in M_0$, так как $A_ne_k\in M_0$ и A_n непрерывен. Наконец,

$$\|A_{nm}\|_{L(M_0,M_0)}\leqslant\|A_{nm}\|_{L(E_i,E_i)}\leqslant C_n$$

и $A_{nm}e_k\to A_ne_k$ в M_0 и, следовательно, $A_{nm}\mu\to A_n\mu$, если $\mu\in M_0$. Лемма доказана.

Оказывается, что элементы M_0 — вполне непрерывные операторы. Обозначим через $L_C(E_1, E_2)$ пространство всех линейных вполне непрерывных операторов из E_1 в E_2. Обозначим

$$M_C = L_C(E_1, E_2) \cap M(E_1, E_2),$$

Теорема 8. *Пусть $E_i \subset E_i{}^O(A)$, где $i = 1$ или $i = 2$. Тогда*

1° $M_0 = \{\mu \in s : \lim\limits_n \sup\limits_{x \in E_1, \|x\| \leqslant 1} \|A_n \mu x - \mu x\| = 0\}$;

2° $M_0 \subset M_C$;

3° *Если $E_i = E_i{}^c(A)$, то $M_0 = M_C$.*

Доказательство. Утверждение 1° непосредственно следует из леммы 7. Для доказательства 2° заметим, что по лемме 7 при $\mu \in M_0$ имеем $\mu = \lim_n \lim_m A_{nm}\mu$, т. е. оператор μ является пределом по норме конечномерных операторов. Пусть теперь $E_i = E_i{}^c(A)$, а $\mu \in M_C$. Если S — единичный шар в E_1, то μS является компактным множеством в E_2. В предположениях 3° имеет место $A_n \mu x \to \mu x$ в E_2, значит, $y = \lim A_n y$ для любого $y \in \mu S$. Применяя теорему Хаусдорфа о конечной ε-сети для μS, убеждаемся в том, что

$$\sup_{y \in \mu S} \|A_n y - y\| \to 0,$$

но тогда и

$$\lim_n \|A_n \mu - \mu\| = \lim_n \sup_{x \in S} \|A_n \mu x - \mu x\| = 0.$$

Теперь по 1° заключаем, что $\mu \in M_0$ и $M_0 = M_C$. Теорема доказана.

Для доказательства нижеследующей теоремы 10 нам нужна следующая лемма, имеющая и самостоятельное значение.

Лемма 9. *Если $E = E_0$, то $M(E, E) = M(E^*, E^*)$.*

Доказательство. Если E есть BK-пространство и $\mu \in M(E, E)$, то $f \circ \mu \in E^*$ при каждом $f \in E^*$, и поэтому $\mu \in M(\hat{}\,(E^*), \hat{}\,(E^*))$. Таким образом,

$$M(E, E) \subset M(E^*, E^*) \subset M(\hat{}\,(E^{**}), \hat{}\,(E^{**})).$$

Обозначая

$$[f_n]^\perp = \{X \in E^{**} \mid (f_n, X) \equiv 0\},$$

имеем

$$\hat{}\,(E^{**}) \simeq E^{**}/[f_n]^\perp.$$

Значит, $\hat{}\,(E^{**})$ есть BK-пространство и $M(\hat{}\,(E^{**}), \hat{}\,(E^{**})) \subset L(\hat{}\,(E^{**}), \hat{}\,(E^{**}))$. Возьмем $\mu \in M(\hat{}\,(E^{**}), \hat{}\,(E^{**}))$. Учитывая непрерывность μ, из $\mu L(e_n) \subset L(e_n)$ выводим, что $\mu(\hat{}\,(E^{**}))_0 \subset (\hat{}\,(E^{**}))_0$. Но $(\hat{}\,(E^{**}))_0 = E$ в $\hat{}\,(E^{**})$, и, таким образом, $\mu \in M(E, E)$. Лемма доказана.

Теорема 10. *Если* $E=E^c(A)$, *то* $M(E,E)=M(E^o(A),\ E^o(A))$.

Доказательство. Ввиду $E\subset E^o(A)$ ясно, что $M(E,E^o(A))\subset M(E,E)$. Если $\mu\in M(E,E^o(A))$, то для каждой $f\in E^*$

$$(A_n\mu\xi,f)=(A_n\xi,\mu f)=O(1),$$

где $\mu f=\{\mu_k(e_k,f)\}$. По леммам 2 и 9 мультипликатор $\mu\in\in M(E,E)$, и, следовательно, $M(E,E^o(A))=M(E,E)$. Теперь мы вправе писать: $M(E,E)\supset M(E^o(A),\ E^o(A))$. Возьмем $\mu\in M(E,E)$, $\xi\in E^o(A)$. Тогда по лемме 9 при любом $f\in E^*$ существует

$$(A_n\mu x,f)=(x,A_n{}^*\mu f)=O(1),$$

т. е. $\mu\xi\in E^o(A)$ и $\mu\in M(E^o(A),\ E^o(A))$. Теорема доказана.

В § 4 при доказательстве теоремы 26 будет использовано следующее

Следствие 11. *Если* $E_1=E_1{}^c(A)$, *то* $M(M_0,M_0)=M(E_1,E_2)$.

Доказательство непосредственно следует из предложения 6, леммы 7 и теоремы 10.

§ 3. Нерефлексивность мультипликаторов и полей суммируемости

Если A треугольна, то $A_nM(E_1,E_2)\subset M_0$. В общем случае имеет место следующее

Предложение 12. *Пусть* $E_i=E_i{}^c(A)$ *при* $i=1$ *или* $i=2$. *Тогда для включения* $A_nM(E_1,E_2)\subset M_0$ *достаточно выполнение одного из следующих условий:*

1° $A_n\in L_C(E_1,E_2)$;

2° $\lim\limits_m\|A_{nm}-A_n\|=0$ *в* $L(E_1,E_2)$.

Если еще $M(E_1,E_2)\ni e$, *то условия* 1° *и* 2° *являются также необходимыми для включения* $A_nM(E_1,E_2)\subset M_0$.

Доказательство в основном следует из теоремы 8.

Замечание. В предположениях предложения 12 имеет место 2°$\Rightarrow$1°, а если $M(E_1,E_2)\ni e$, то условия 1° и 2° эквивалентны.

Найдем некоторые достаточные условия для матрицы A, чтобы $A_n\in L_C(E_1,E_i)$.

Теорема 13. *Пусть* $E_i=E_i{}^c(A)$, *где* $i=1$ *или* $i=2$, *а* A — *обратимая регулярная матрица с* $\gamma_A=\gamma_A{}^c(A)$. *Если* $A_n\in\in L_C(\gamma_A,\gamma_A)$, *то* $A_n\in L_C(E_1,E_i)$.

Доказательство. По предположению $A_nx\to x$ при любом $x\in E_i$, значит $\|x\|\leqslant\sup\|A_nx\|$. Тогда

$$\|A_{nm}-A_n\|_{L(E_1,E_l)} \leqslant \sup_{x\in E_1,\ \|x\|\leqslant 1} \sup_k \|A_k(A_{nm}-A_n)x\| =$$

$$= \sup_{\|x\|=\|f\|=1,\ x\in E_1,\ f\in E_1^*} \sup_k |(A_k(A_{nm}-A_n)x, f)| \leqslant$$

$$\leqslant K \sup_{\xi\in\gamma_A,\ \|\xi\|=1} \sup_k \Big|\sum_{i=m+1}^{\infty} a_{ki}a_{ni}\xi_i\Big| =$$

$$= K\,\|A_{nm}-A_n\|_{L(\gamma_A,\gamma_A)},$$

где

$$K=\sup_k \|A_k\| = \sup_{\|x\|=\|f\|=1,\ x\in E_1,\ f\in E_1^*} \sup_k |(A_k x, f)| =$$

$$= \sup_{\|x\|=\|f\|=1,\ x\in E_1,\ f\in E_1^*} \|\{(x,f_i)(e_i,f)\}\|_{\gamma_A}$$

По предложению 12

$$\lim_n \|A_{nm}-A_n\|_{L(\gamma_A,\gamma_A)}=0,$$

что завершает доказательство.

Замечание. В предположениях теоремы 13 можно отказаться от предположения $\gamma_A=\gamma_A{}^c(A)$, если вместо $A_n\in L_C(\gamma_A,\gamma_A)$ требовать $\|A_{nm}-A_n\|\to 0$ в $L(\gamma_A,\gamma_A)$.

Теорема 14. *Пусть A — регулярная обратимая матрица с $\gamma_A=\gamma_A{}^c(A)$. Для того, чтобы $A_n\in L_C(\gamma_A,\gamma_A)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\lim_m \Big(\sum_k \Big|\delta_{nk}-\sum_{i=1}^{m} a_{ni}a^{-1}{}_{ik}\Big|\Big)=0, \tag{2}$$

где $a^{-1}{}_{ik}$ — элементы матрицы преобразования, обратного к A.

Доказательство. По лемме 5 имеем $M(\gamma_A,\gamma_A)=\gamma_A{}^*$. Рассмотрим A_n и A_{nm} как элементы $\gamma_A{}^*$. Тогда, обозначив

$$A^*\xi=\{\sum_j a_{ji}\xi_j\}$$

для $\xi\in l_1$, имеем

$$A_{nm}=A^*\xi^{nm}+\alpha^{nm}e,$$

$$A_n=A^*\xi^n+\alpha^n e,$$

где α^n и α^{nm} — числа, ξ^n и ξ^{nm} — элементы из l_1.

Оказывается, что $\alpha^n=\alpha^{nm}=0$, $\xi^n=\{\delta_{nk}\}$, $\xi^{nm}=\{\sum_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ni}a^{-1}{}_{ik}\}$. Для доказательства последнего равенства заметим, что

$$\sum_k a_{kj}\sum_{i=1}^{m} a_{ni}a^{-1}{}_{ik}=\sum_{i=1}^{m} a_{ni}\sum_k a_{kj}a^{-1}{}_{ik},$$

так как из регулярности и обратимости A следует, что $|a_{kj}|\leqslant c_j$ и $\Sigma_k|a^{-1}{}_{ik}|<\infty$. Кроме того, условие $\gamma_A=\gamma_A{}^c(A)$ гарантирует совершенность матрицы A, что, в свою очередь, влечет

$\Sigma_k a_{kj} a^{-1}{}_{ik} = \delta_{ij}$ (см., например, [4], теорема 2). Теперь для выполнения условия 2° предложения 12 ввиду совершенности A необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_m \|\xi^{nm} - \xi^n\| = 0$$

в l_1, а это эквивалентно условию (2).

Лемма 15. *Пусть* $\mu \in M(E, E)$ *и* $\|e - \mu\| < 1$. *Тогда*

1° $\mu_k \neq 0$ *при любом* k;

2° *если существует* $\lim \mu_k = \alpha$, *то* $\alpha \neq 0$

Замечание. Если в регулярной матрице A при некотором n строка $\{a_{nk}\}$ удовлетворяет условиям 1° и 2° леммы 15, то A суммирует только сходящиеся ряды.

Лемма 15 в частности показывает, что, кроме тривиального случая матрицы со строкой, удовлетворяющей 1° и 2°, не существует такого базиса суммирования в банаховом пространстве, что $\|A_n - I\| \to 0$ в операторной топологии. Используем это обстоятельство для доказательства следующей теоремы.

Теорема 16. *Пусть* $E_i \subset E_i{}^O(A)$ *при* $i = 1$ *или* $i = 2$, *где строки* A *не удовлетворяют одному из условий* 1° *и* 2° *леммы* 15 *и,* $A_n M(E_1, E_2) \subset M_0$, *начиная с некоторого* n_0. *Если* $M(E_1, E_2) \ni e$, *то* $M(E_1, E_2)$ *нерефлексивен.*

Доказательство. Если $M(E_1, E_2)$ рефлексивен и $\mu \in M(E_1, E_2)$, то ограниченная последовательность $A_n \mu$ имеет слабо сходящуюся подпоследовательность $A_{n(k)} \mu$. Более того, $A_{n(k)} \mu \to \mu$ слабо, ибо $a_{nk} \to 1$ при $k = 1, 2, \ldots$. Но так как слабое замыкание выпуклого множества M_0 совпадает с сильным и $A_{n(k)} \mu \in M_0$ при достаточно больших k, то $\mu \in M_0$ и, следовательно, $M(E_1, E_2) = M_0$. Отсюда в частности, $e \in M_0$ и по лемме 7 получаем $\|A_n - I\| \to 0$, но, это, как мы только-что видели, противоречит лемме 15. Теорема доказана.

Следствие 17. *Если для регулярной матрицы* A *имеет место* $A_n \in L_C(\gamma_A, \gamma_A)$, *начиная с некоторого* n_0, *причем* $\gamma_A \subset \gamma_A{}^O(A)$ *и строки* A *не удовлетворяют одному из условий* 1° *и* 2° *леммы* 15, *то* γ_A *нерефлексивно.*

Доказательство. Применяя теорему 16, получаем нерефлексивность мультипликатора $M(\gamma_A, \gamma_A)$, но $M(\gamma_A, \gamma_A) \subset (\gamma_A{}^*)$ по лемме 5, что влечет нерефлексивность $\gamma_A{}^*$. Тогда и γ_A нерефлексивно.

§ 4. Базисы суммирования и дополнительные пространства

Пусть E есть BK-пространство. Определим нормированные пространства

$$E^{\gamma(A)} = \{\mu \in s : \exists A_n{}^* \mu = O(1)\},$$

$$E^{\beta(A)} = \{\mu \in s : \exists \lim_n (x, A_n{}^* \mu) \;\; \forall x \in E\}$$

с покоординатными операциями и нормой

$$\|\mu\| = \sup_{x\in E,\ \|x\|\leqslant 1} \sup_n |(x, A_n{}^*\mu)|. \tag{3}$$

Пространства $E^{\gamma(A)}$ и $E^{\beta(A)}$ называются соответственно $\gamma(A)$- и $\beta(A)$-дополнительными к E. Всегда $E\subset E^{\gamma(A)\gamma(A)}$ и $E\subset E^{\beta(A)\beta(A)}$. В случае, когда $\subset$ заменяется на $=$, будем говорить, что пространство E соответственно $\gamma(A)$- или $\beta(A)$-рефлексивно.

Лемма 18. (Ср. [5], теорема 4.2). *Пусть E есть ВК-пространство, а матрица A регулярна. Тогда $E^{\beta(A)}$ является замкнутым подпространством ВК-пространства $E^{\gamma(A)}$.*

Доказательство. Пусть μ^n — последовательность Коши в $E^{\gamma(A)}$. Тогда

$$|\mu^n{}_i - \mu^m{}_i| \leqslant \|e_i\|^{-1} \sup_k |(e_i,\ A_k{}^*(\mu^n - \mu^m))| \leqslant \|\mu^n - \mu^m\|.$$

и $\mu^n{}_i \to \mu_i$. Теперь из (3) заключаем, что $\|\mu^n - \mu\|\to 0$ и $\mu = \{\mu_i\}\in E^{\gamma(A)}$.

Если $\mu^n\in E^{\beta(A)}$ и $\mu^n\to\mu\in E^{\gamma(A)}$, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется N, так что

$$|(x, A_k{}^*\mu) - (x, A_k{}^*\mu^n)| < \varepsilon$$

для всех k, $n > N$ и $x\in E$. Поэтому $\mu\in E^{\beta(A)}$ и $E^{\beta(A)}$ замкнуто.

При доказательстве теорем 24 и 26 будет использовано следующее

Предложение 19. *Если $E\subset E^0(A)$, то $E_0 = E^c(A)$.*

Доказательство следует из теоремы Банаха — Штейнгауза.

Лемма 20. *Пусть E, F суть ВК-пространства и $E\subset F$. Тогда $\hat{}\,(E^*)\supset\hat{}\,(F^*)$. Если E замкнуто в F, то $\hat{}\,(E^*) = \hat{}\,(F^*)$.*

Доказательство по теореме Хана — Банаха очевидно.

Лемма 21. *Для регулярной обратимой на m матрицы*[5] *A*

$$M(\gamma_A, \mu_A) = M(\mu_A, \mu_A).$$

Доказательство (ср. [2], доказательство теоремы 5). Ясно, что $M(\gamma_A,\mu_A)\supset M(\mu_A,\mu_A)$. Возьмем $\varepsilon\in M(\gamma_A,\mu_A)$. Это значит, что $\mu_B\supset\gamma_A$, где элементы матрицы B определены равенствами $\beta_{nk} = \varepsilon_k\alpha_{nk}$. Пусть $\xi\in\mu_A$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k}\beta_{ni}\xi_i = \sum_j g^n{}_{kj}\sum_m \alpha_{jm}\xi_m,$$

где $\alpha^{-1}{}_{ij}$ — элементы матрицы преобразования, обратного к A, а

$$g^n{}_{kj} = \sum_{i=1}^{k}\beta_{ni}\alpha^{-1}{}_{ij}.$$

Матрицу с элементами $g^n{}_{kj}$ обозначим через G^n. Из $\mu_B\supset\gamma_A$ следует, что G^n сохраняет сходимость и матрица $G = (g^n{}_j)$ с

[5] Т. е. уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение x при любом $y\in m$.

$g^n{}_j = \lim_k g^n{}_{kj}$ суммирует все сходящиеся (значит, и все ограниченные) последовательности в ограниченные (см. [1], теорема 2.2). Покажем, что G^n суммирует все ограниченные последовательности в сходящиеся и, следовательно, $\mu_B \supset \mu_A$ и $\varepsilon \in \in M(\mu_A, \mu_A)$. Для этого в данном случае необходимо и достаточно (см. [1], теорема 2.1), чтобы

$$\lim_k \sum_j |g^n{}_j - \sum_{i=1}^{k} \beta_{ni} a^{-1}{}_{ij}| = 0. \tag{4}$$

Заметим, что из обратимости A на m следует условие (2). Действительно, $\mu_A \supset \mu_A$ и поэтому (2) следует из (4) при $\varepsilon = e$. Теперь, подставляя $\beta_{ni} = \varepsilon_i a_{ni}$ и применяя преобразование Абеля, находим

$$\sum_j |\sum_{i=k}^{k+p} \varepsilon_i a_{ni} a^{-1}{}_{ij}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j |\sum_{i=k}^{k+p-1} \Delta\varepsilon_i \sum_{r=k}^{k+i} a_{nr} a^{-1}{}_{rj}| + \sum_j |\varepsilon_{k+p} \sum_{r=k}^{k+p} a_{nr} a^{-1}{}_{rj}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=k}^{k+p} |\Delta\varepsilon_i| \sum_j |\sum_{r=k}^{k+i} a_{nr} a^{-1}{}_{rj}| + |\varepsilon_{k+p}| \sum_j |\sum_{r=k}^{k+p} a_{nr} a^{-1}{}_{rj}|. \tag{5}$$

Регулярность A влечет $\gamma_A \supset \gamma_A$, значит, по лемме 20

$$\hat{}(\gamma_A{}^*) \subset \hat{}(\gamma^*) = \{\xi \in s \mid \sum |\Delta\xi_k| < \infty\}.$$

Учитывая лемму 5, видим, что $\Sigma|\Delta \varepsilon_k| < \infty$. Условие (4) следует теперь из (2) и (5). Таким образом, $M(\gamma_A, \mu_A) = M(\mu_A, \mu_A)$, и лемма доказана.

Замечание. При доказательстве леммы 21 мы видели, что для регулярной обратимой матрицы A выполнение условия (2) при всех n эквивалентно обратимости A на m.

Следствие 22. *Если в предположениях леммы 21 имеет место $\gamma_A = \gamma_A{}^c(A)$, то $M(\gamma_A, \gamma_A) = M(\gamma_A, \mu_A) = M(\mu_A, \mu_A)$.*

Доказательство следует из леммы 5.

Предложение 23. *Для регулярной обратимой на m матрицы A условия $\gamma_A \subset \gamma_A{}^O(A)$ и $\mu_A \subset \gamma_A{}^O(A)$ эквивалентны.*

Доказательство следует из лемм 21 и 5.

Следующая теорема характеризует пространства с A-базисом в терминах $\gamma(A)$-дополнительных пространств.

Теорема 24 (ср. [6], теорема 12.6). *Пусть E является ВК-пространством, A — регулярная обратимая на m матрица и $\gamma_A \subset \gamma_A{}^O(A)$. Тогда для $E = E^c(A)$ необходимо и достаточно существование такого $\gamma(A)$-рефлексивного ВК-пространства M, что $E = M_0$. При этом M определяется однозначно, равенством $M = E^{\gamma(A)\gamma(A)}$.*

Доказательство. Необходимость (ср. [5], теорема 4.4). Возьмем $M = E^O(A)$. Оказывается, что $M^{\gamma(A)} = \hat{}E^*$.

Действительно, если $\xi \in M$, а $f \in E^*$, то $(A_n\xi, f) = O(1)$, т. е. $\hat{}E^* \subset M^{\gamma(A)}$. Если же $\mu \in M^{\gamma(A)}$, то на основании леммы 2 имеем $\mu \in \hat{}E^*$. Пусть теперь $\xi \in M^{\gamma(A)\gamma(A)} = (\hat{}E^*)^{\gamma(A)}$. Тогда при любом $f \in E^*$ имеет место $(A_n\xi, f) = O(1)$, т. е. $\xi \in E^O(A) = M$, ввиду чего M теперь $\gamma(A)$-рефлексивно. Наконец, из того, что $E = E^c(A)$, при помощи лемм 1 и 2 выводим, что $\hat{}E^* = E^{\gamma(A)}$ т. е. $M = E^{\gamma(A)\gamma(A)}$.

Достаточность. По лемме 19 норма в $\gamma(A)$-рефлексивном M может быть задана следующим образом:

$$\|\mu\| = \sup_{\varepsilon \in M^{\gamma(A)},\ \|\varepsilon\| \leqslant 1} \sup_n \Big|\sum_k a_{nk}\varepsilon_k\mu_k\Big|. \tag{6}$$

Так как $\sum \varepsilon_k\mu_k \in \mu_A$ при любом $\mu \in M$ и $\varepsilon \in M^{\gamma(A)}$, а $\mu_A \subset \subset \gamma_A{}^O(A)$ по предложению 23, то $\|A_n\mu\| = O(1)$ для каждого $\mu \in M$. Это значит, что $E \subset E^O(A)$ и поэтому $E = E^c(A)$. Из доказательства необходимости видим, что BK-пространство $N = E^O(A)$ является $\gamma(A)$-рефлексивным, $E = N_0$ и $N = E^{\gamma(A)\gamma(A)}$. Так как $E \subset M$, то $N \subset M^{\gamma(A)\gamma(A)} = M$. Но мы видели, что $\|A_n\mu\| = O(1)$ при каждом $\mu \in M$, т. е. $M \subset E^O(A)$. Значит, $M = N$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве необходимости мы пользовались только регулярностью A.

Следствие 25 (ср. [5], теорема 3.2). *В предположениях теоремы 24 для $E = E^c(A)$ необходимо и достаточно существование $\beta(A)$-рефлективного BK-пространства M с $E = M_0$. При этом $E^* = E^{\beta(A)} = E^{\gamma(A)}$ и $E^{\beta(A)\beta(A)} = E^{\gamma(A)\beta(A)} = E^{\gamma(A)\beta(A)} = E^{\beta(A)\gamma(A)}$.*

Доказательство состоит из таких же рассуждений для $\beta(A)$-дополнительных пространств, как в доказательстве теоремы 24 для $\gamma(A)$-дополнительных пространств.

Данное BK-пространство M называется *BK-алгеброй*, если M — банахова алгебра относительно покоординатного умножения. Например, мультипликатор BK-пространства E есть BK-алгебра.

Будем говорить, что M является *мультипликатором A-базиса*, если найдется BK-пространство $E = E^c(A)$ такое, что $M = M(E, E)$.

Теорема 26 (ср. [6], теорема 12.8). *Пусть A — регулярная обратимая на m матрица и $\gamma_A \subset \gamma_A{}^O(A)$. Данная BK-алгебра M является мультипликатором A-базиса тогда и только тогда, когда она $\gamma(A)$-рефлексивна и $M \ni e$.*

Доказательство. Необходимость. По леммам 6 и 7 имеем $M = M_0{}^O(A)$ и $M_0 = M_0{}^c(A)$. Теперь из теоремы 24 следует $\gamma(A)$-рефлексивность M. По следствию 11 M — мультипликатор A-базиса.

Достаточность. Точно так же, как и в доказательстве достаточности теоремы 24 из $\gamma(A)$-рефлексивности M и из свойств матрицы A следует, что $M_0 = M_0^c(A)$, а также, что $M \subset M_1$, где $M_1 = (M_0)^O(A)$. Теперь из доказательства необходимости теоремы 24 видим, что M_1 является $\gamma(A)$-рефлексивным и $M_1^{\gamma(A)} = (M_0)^*$. Поэтому $M^{\gamma(A)} \supset (M_0)^*$. Но если $\mu \in M^{\gamma(A)}$, то лемма 2 дает нам, что $\mu \in (M_0)^*$ и, таким образом, $M = M_1$. Теперь из теоремы 10 выводим, что $M(M_0, M_0) = M(M, M)$. Но $M(M, M) = M$, потому что M есть BK-алгебра и $M \ni e$. Следовательно, M — мультипликатор A-базиса. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве необходимости мы использовали только регулярность матрицы A.

Аналогично следствию 25 имеет место

Следствие 27. *В предположениях теоремы 26 данная BK-алгебра M является мультипликатором A-базиса тогда и только тогда, когда M является $\beta(A)$-рефлексивным и $M \ni e$.*

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
3. Тяхт Т., Мультипликаторы базисов суммирования и множители суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **355**, 157—164.
4. Fleming, D. I., Jessup, P. G., Perfect matrix methods. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **29**, № 2, 319—324.
5. Meyers, G., On Toeplitz sections in *FK*-spaces. Studia math., 1974, **51**, № 1, 23—33.
6. Singer, I., Bases in Banach spaces I. New York, 1970.

Поступило
23 IV 1975

BAASIGA *BK*-RUUMIDE MULTIPLIKAATORID JA TÄIENDRUUMID

T. Täht

Resümee

Olgu E, E_1, E_2 sellised BK-ruumid, milles jadad $e_n = \{\delta_{nk}\}$ moodustavad A-baasjada, kus A on regulaarne maatriks, mis rahuldab teatavaid lisatingimusi. Artiklis on uuritud multiplikaatori $M(E_1, E_2)$ omadusi. Näiteks tõestatakse, et $M(E_1, E_2)$ on mitterefleksiivne. Sellest järeldub maatriksi A summeerimisvälja mitterefleksiivsus. Kasutades $\gamma(A)$-täiendruume (vt. § 4), on iseloomustatud A-baasiga BK-ruumi E ja multiplikaatorit $M(E, E)$. Viimased tulemused on tavalise baasi korral hästi teada (vt. [6]).

MULTIPLIERS AND DUAL SPACES OF THE *BK*-SPACES

T. Täht

Summary

Let E, E_1, E_2 be the BK-spaces, in which the sequence $e^n = \{\delta_{nk}\}$ form a A-basic sequence, where A is a regular matrix, satisfying some additional conditions. Properties of the multiplier $M(E_1, E_2)$ is studied. For example, nonreflexivity of $M(E_1, E_2)$ is established. Nonreflexivity of the summability domain of the matrix A is got as a corollary of this fact. The BK-space E with A-basis $\{e_k\}$ and its multiplier $M(E, E)$ is characterized by the use of their $\gamma(A)$-duals (see § 4). Last results are well-known in the case of ordinary bases (see [6]).

О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ОБОБЩЕННЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ РЯДОВ

Ю. Ламп

Таллинский политехнический институт

1. Введение

Пусть A — некоторое бесконечное множество, (X, Σ, μ) — пространство с конечной мерой[1], $\{\varphi_\alpha\}_A$ — ортонормированное семейство функционалов пространства $L^2 = L^2(X, \Sigma, \mu)$, т. е.

$$(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \int_X \varphi_\alpha(x)\varphi_\beta(x)\mu(dx) = \delta_{\alpha\beta},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

В настоящей заметке мы исследуем сходимость почти всюду обобщенного ортонормированного ряда

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha\varphi_\alpha(x), \tag{1}$$

где c_α — действительные числа. Прежде чем дать определение сходимости почти всюду ряда (1), приведем некоторые факты, относящиеся к числовым рядам

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha. \tag{2}$$

Как известно (см. [4], гл. VII, § 8), сумму ряда (2) определяют как предел обобщенной последовательности

$$\{S_K\}_{K\in F(A)}, \tag{3}$$

где $F(A)$ — направленное множество, состоящее из всех конечных подмножеств K множества A, упорядоченное по включению, а

$$S_K = \sum_{\alpha\in K} c_\alpha.$$

При этом (см. [4], гл. VII, § 9) сходимость и сумма ряда (2) не зависят от переупорядочения его членов, т. е. мы говорим здесь о безусловной сходимости ряда (2). Также известно (см. [4], гл. VII, § 8), что безусловная сходимость числового ряда (2) равносильна абсолютной сходимости этого ряда.

---

[1] Мы понимаем интеграл в смысле [2].

В дальнейшем предполагаем, что направленное множество $F(A)$ таково, что для каждого конфинального[2] подмножества $\Gamma \subset F(A)$ существует заканчивающееся[3] отображение $u: \mathbf{N} \to \Gamma$.

Оказывается, что тогда для сходимости обобщенной последовательности (3) к пределу S необходимо и достаточно сходимость каждой ее счетной подпоследовательности[4] к тому же пределу S.

Действительно, необходимость условия очевидна, так как каждая подпоследовательность сходящейся обобщенной последовательности сходится к тому же пределу (см. [9], § 9.4., Теорема 1). Наоборот, пусть каждая счетная подпоследовательность обобщенной последовательности (3) сходится к S, а обобщенная последовательность (3) не сходится. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и конфинальное подмножество $\Gamma \subset F(A)$, такие, что для любого $R \in \Gamma$

$$|S_R - S| > \varepsilon.$$

Тем самым это условие выполнено для обобщенной последовательности $\{S_R\}_\Gamma$ и, следовательно, также для некоторой ее счетной подпоследовательности, что противоречит предположению.

Назовем теперь ряд (1) *строго безусловно почти всюду сходящимся*[5], если почти всюду на X сходится обобщенная последовательность

$$\{S_K(x)\}_{K \in F(A)}, \tag{4}$$

где

$$S_K(x) = \sum_{\alpha \in K} c_\alpha \varphi_\alpha(x), \tag{5}$$

и *безусловно почти всюду сходящимся*, если каждая счетная подпоследовательность

$$\{S_{K_n}(x)\}_{n \in \mathbf{N}} \tag{6}$$

обобщенной последовательности (4) сходится почти всюду на X.

---

[2] Подмножество $\Gamma \subset F(A)$ называется конфинальным в $F(A)$, если для любого $K \in F(A)$ существует $R \in \Gamma$, такое что $R > K$.

[3] Если A и B — направленные множества, то отображение $u: B \to A$ называется заканчивающимся, если для любого $\alpha \in A$ существует $\beta_0 \in B$, такое, что для любого $\beta > \beta_0$ имеем $u(\beta) > \alpha$.

У нас $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел. Заметим, что не для всякого множества A существует заканчивающееся отображение $u: \mathbf{N} \to A$ (см. [9], § 9.4).

[4] Подпоследовательностью обобщенной последовательности (3) называют обобщенную последовательность

$$\{S_{u(\beta)}\}_{\beta \in B},$$

где отображение $u: B \to F(A)$ является заканчивающимся.

[5] Если в (5) имеем

$$S_K(x) = \sum_{\alpha \in K} |c_\alpha \varphi_\alpha(x)|,$$

то ряд (1) сходится абсолютно почти всюду, что очевидно равносильно строго безусловной сходимости почти всюду ряда (1).

Из определения безусловной сходимости почти всюду ряда (1) видно, что для каждой счетной подпоследовательности (6) могут множества $E \subset X$, где $\mu(E)=0$ и (6) сходится для любого $x \notin E$, быть различным. В то же время при строго безусловной сходимости почти всюду ряда (1) множество $E \subset X$, для которого $\mu(E)=0$ и (4) сходится для любого $x \notin E$, одно и то же для всех последовательностей (6).

Пусть $A = \mathbf{N}$. Тогда понятие безусловной сходимости почти всюду ряда (1) совпадает с обычным понятием безусловной сходимости почти всюду[6] ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{7}$$

если понимать под каждой последовательностью $\{K_n\}$ некоторое переупорядочение последовательности натуральных чисел. Безусловная сходимость почти всюду на $X=[a,b]$ ряда (7) хорошо изучена в работах В. Орлича [6], К. Тандори [7, 8], Л. Лейндлера [5] и др. В. Орлич доказал следующее предложение.

Теорема А. *Пусть $\{\lambda(k)\}$ — положительная монотонно возрастающая числовая последовательность, которая имеет подпоследовательность $\{\lambda(\nu_n)\}$ со свойствами*

$$\log \nu_{n+1} = O(\log \nu_n) \tag{8}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\nu_k)} < \infty. \tag{9}$$

Тогда из условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda(k) \log^2 k < \infty \tag{10}$$

следует безусловная сходимость почти всюду на $[a,b]$ ортонормированного ряда (7).

К. Тондори [7] усилил это предложение, доказав, что имеет место

Теорема В. *При выполнении условия*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2 \log^2 k\Big]^{1/2} < \infty, \tag{11}$$

где $\nu_n = 2^{2^n}$, ортонормированный ряд (7) *безусловно почти всюду сходится на $[a,b]$.*

К. Тандори показал также, что условие (11) является необходимым для того, чтобы ортонормированный ряд (7), где $\{|c_n|\}$ монотонно убывает, безусловно почти всюду сходился на $[a,b]$.

[6] Т. е. со сходимостью ряда (7) почти всюду при любой перестановке ее членов.

В случае $A=\mathbf{N}^2$, $X=Q$, где $Q=[a,b;\ a,b]$, безусловную сходимость почти всюду двойных ортонормированных рядов в виде

$$\sum_{k,l=2}^{\infty} c_{kl}\varphi_k(x)\varphi_l(y), \tag{12}$$

где $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная система в пространстве $L^2(a,b)$ с весом μ, изучал Ш. Панджакидзе [3]. Он получил следующий результат

Теорема С. *Пусть $\{\lambda(k)\}$ — положительная монотонно возрастающая числовая последовательность, имеющая подпоследовательность $\{\lambda(\nu_n)\}$ со свойствами* (8) *и* (9). *Тогда из условия*

$$\sum_{k,l=2}^{\infty} c^2_{kl}\lambda(k)\lambda(l)\log^2 k\log^2 l<\infty$$

следует безусловная сходимость почти всюду ортонормированного ряда (12) *на* Q.

Ортонормированные ряды в виде (1) позволяют с единой точки зрения исследовать безусловную сходимость почти всюду как обычных, так и кратных ортонормированных рядов, а также безусловную сходимость почти всюду ряда (1) в случае несчетной ортонормированной системы, если X несепарабельно.

2. Основная теорема

Обратим внимание, что доказательство леммы (см. [1], стр. 85), лежащей в основе доказательств теорем Орлича и Тандори, позволяет представить ее в следующем, более удобном для нашей цели виде.

Лемма 1. *Для любой ортонормированной системы $\{\varphi_\alpha\}_A$ и конечного подмножества $K\in F(A)$ существует функция $\delta_K\in L^2$ со свойствами*[7]

1° $\max\limits_{K'\subset K}\left|\sum\limits_{\alpha\in K'} c_\alpha\varphi_\alpha(x)\right|\leqslant\delta_K(x)$,

2° $\int\limits_X \delta^2_K(x)\mu(dx)\leqslant O(\log^2|K|)\sum\limits_{\alpha\in K} c^2_\alpha$.

Докажем сейчас обобщение теорем А, В и С.

Теорема 1. *Для каждого заканчивающегося отображения $u:\mathbf{N}\to F(A)$, где $u(n)=K_n$ монотонно возрастает, из условия*[8]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\log^2|\Delta K_n|\sum_{\alpha\in\Delta K_n} c^2_\alpha\Big]^{1/2}<\infty$$

следует безусловная сходимость почти всюду на X ряда (1).

[7] Через $|K|$ обозначаем число элементов множества K.
[8] Здесь $|\Delta K_n|=|K_{n+1}\setminus K_n|$.

Доказательство. Пусть

$$\{S_{R_i}(x)\}_{i\in\mathbf{N}} \tag{13}$$

— некоторая подпоследовательность обобщенной последовательности (4), заданного соотношением (5). Без ограничения общности можем предполагать, что множества R_i монотонно возрастают, так как в противном случае можем выбрать $R_i = R_1 \cup \ldots \cup R_i$. Тогда

$$|S_{R_{i+p}}(x) - S_{R_i}(x)| = |S_{R_{i+p}\setminus R_i}(x)| = |S_R(x)|,$$

где $R = R_{i+p} \setminus R_i$. Пусть множество K_N таково, что $R \cap K_N = \varnothing$. Тогда найдется K_m с $m > N$, такое, что $K_m \supset R \cup K_N$ и

$$|S_R(x)| \leqslant \sum_{n=N}^{m-1} \Big| \sum_{\alpha\in K'_n} c_\alpha \varphi_\alpha(x) \Big| \leqslant \sum_{n=N}^{m-1} \delta_{\Delta K_n}(x),$$

где $K'_n \subset \Delta K_n$ и $\bigcup\limits_{n=N}^{m-1} K'_n = R$.

Учитывая лемму 1, находим

$$\int_X \delta^2_{\Delta K_n}(x)\,\mu(dx) \leqslant O(\log^2 |\Delta K_n|) \sum_{\alpha\in\Delta K_n} c^2_\alpha.$$

Применяя неравенство Шварца, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \delta_{\Delta K_n}(x)\,\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(X)]^{1/2} \Big[\int_X \delta^2_{\Delta K_n}(x)\,\mu(dx)\Big]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant [\mu(X)]^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[O(\log^2|\Delta K_n|) \sum_{\alpha\in\Delta K_n} c^2_\alpha\Big]^{1/2} =$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\log^2 |\Delta K_n| \sum_{\alpha\in\Delta K_n} c^2_\alpha\Big]^{1/2} < \infty,$$

откуда по теореме Леви следует сходимость почти всюду на X ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\Delta K_n}(x).$$

Следовательно, выбирая индекс i таким большим, что при каждом p имеем $R \cap K_N = \varnothing$, где N — любое достаточно большое число, мы получаем, что почти всюду на X для любого $p = 1, 2, \ldots$ имеет место

$$|S_{R_{i+p}\setminus R_i}(x)| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \delta_{\Delta K_n}(x) = o_x(1),$$

откуда следует сходимость почти всюду на X последовательности (13). Это дает и доказательство теоремы 1, учитывая определение безусловной сходимости почти всюду ряда (1), так как счетная подпоследовательность (13) обобщенной последовательности (4) была выбрана произвольно.

Пусть теперь $A=\mathbf{N}$ и $K_n=\{i\in\mathbf{N}\colon\ i\leqslant\nu_n\}$, где $\{\nu_n\}$ — возрастающая последовательность индексов, для которой выполнено (8). Тогда, учитывая что

$$\log^2|\Delta K_n|=\log^2(\nu_{n+1}-\nu_n)\leqslant O(\log^2\nu_n),$$

$$\log^2|\Delta K_n|\sum_{k\in\Delta K_n}c^2{}_k=O(1)\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}c^2{}_k\log^2 k,$$

мы из теоремы 1 получим следующее утверждение (аналог теоремы B).

Теорема 2. *Пусть* $\{\nu_n\}$ — *возрастающая последовательность индексов со свойством* (8). *Тогда из условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}c^2{}_k\log^2 k\Big]^{1/2}<\infty \tag{14}$$

следует безусловная сходимость почти всюду на X *одтонормированного ряда* (7).

Теорема A является теперь следствием теоремы 2 в случае $X=[a,b]$, так как, используя неравенство Коши, мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}c^2{}_k\log^2 k\Big]^{1/2}\leqslant\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(\nu_n)}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\nu_n)\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}c^2{}_k\log^2 k\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(\nu_n)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}c^2{}_k\lambda(k)\log^2 k\right]^{1/2},$$

откуда, учитывая условия (9) и (10), следует выполнение условия (14) теоремы 2.

Если у нас $A=\mathbf{N}^2$, $X=Q$, где $Q=[a,b;\ a,b]$ и $\{\varphi_{kl}\}$ — ортонормированное семейство функций из $L^2(Q,\Sigma,\mu)$, то безусловная сходимость почти всюду ряда (1) равносильна обычной безусловной сходимости двойного ортонормированного ряда [9]

$$\sum_{k,l=2}^{\infty}c_{kl}\varphi_{kl}(x,y). \tag{15}$$

Пусть $K_n=\{(k,l)\in\mathbf{N}^2\colon\ 2\leqslant k,l\leqslant\nu_n\}$, где опять $\{\nu_n\}$ удовлетворяет условию (5). Мы имеем

$$\log^2|\Delta K_n|=\log^2(\nu^2{}_{n+1}-\nu^2{}_n)<\log^2\nu^2{}_{n+1}=$$
$$=4\log^2\nu_{n+1}=O(\log^2\nu_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\log^2|\Delta K_n|\sum_{(k,l)\in\Delta K_n}c^2{}_{kl}\Big]^{1/2}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[O(\log^2\nu_n)\sum_{(k,l)\in\Delta K_n}c^2{}_{kl}\Big]^{1/2}=$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{(k,l)\in\Delta K_n}c^2{}_{kl}\log^2 kl\Big]^{1/2}.$$

Тогда из теоремы 1 получим следующее предложение.

[9] Нам удобнее случай, когда индексы k и l изменяются с 2-х до ∞.

Теорема 3. *Пусть* $\{\nu_n\}$ — *возрастающая последовательность индексов со свойством* (8). *Тогда из условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{(k,l)\in\Delta K_n} c^2_{kl}\log^2 kl\Big]^{1/2}<\infty,$$

где

$$\Delta K_n= =\{(k,l):\ \nu_n<k\leqslant\nu_{n+1},\ 2\leqslant l\leqslant\nu_{n+1}\bigvee \nu_n<l\leqslant\nu_{n+1},\ 2\leqslant k\leqslant\nu_n\},$$

следует безусловная сходимость почти всюду на Q *ортонормированного ряда* (15).

Из этой теоремы легко следует теорема C в несколько усиленной форме.

Следствие. *Пусть* $\{\lambda(k)\}$ — *положительная возрастающая числовая последовательность, имеющая подпоследовательность* $\{\lambda(\nu_n)\}$ *со свойствами* (8) *и* (9). *Тогда из условия*

$$\sum_{k,l=2}^{\infty} c^2_{kl}\lambda(kl)\log^2 kl<\infty$$

следует безусловная сходимость ортонормированного ряда (15) *почти всюду на* Q.

Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
3. Панджакидзе Ш., О безусловной сходимости двойных ортогональных рядов. Сообщ. АН ГрузССР, 1965, **38**, № 3, 521—526.
4. Choquet, G., Cours d'analyse. T. II, Topologie. Paris, 1964.
5. Leindler, L., Über unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen. Publs. math., 1964, **11**, № 1—4, 139—148.
6. Orlicz, W., Zur Theorie der Orthogonalreihen. Bull. Internat. Acad. Sci. Polonaise Cracovie, 1927, 81—115.
7. Tandori, K., Über die Orthogonalen Funktionen (Unbedingte Konvergenz). Acta scient. math., 1962, **23**, 185—221.
8. Tandori, K., Über die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen. Acta scient. math., 1971, **32**, 11—40.
9. Wilansky, A., Functional analysis. New York—Toronto—London, 1964.

Поступило
7 VI 1975

ÜLDISTATUD ORTENORMEERITUD RIDADE TINGIMUSTETA KOONDUVUSEST PEAAEGU KÕIKJAL

J. Lamp

Resümee

Olgu A mingi lõpmatu hulk, (X, Σ, μ) lõpliku mõõduga ruum, $\{\varphi_\alpha\}_A$ ruumi $L^2(X, \Sigma, \mu)$ funktsionaalide ortonormeeritud pere ja $F(A)$ hulga A sisalduvuse järgi järjestatud kõigi lõplike alamhulkade K hulk. Üldistatud ortonormeeritud rida (1) nimetatakse tingimusteta peaaegu kõikjal koonduvaks, kui üldistatud jada (4) iga loenduv osajada (6) koondub peaaegu kõikjal hulgal X.

Artiklis leitakse piisav tingimus rea (1) tingimusteta koonduvuseks peaaegu kõikjal (Teoreem 1), mis üldistab W. Orliczi (Teoreem A), K. Tandori (Teoreem B) ja Š. Pandžakidze (Teoreem C) poolt saadud tulemused mitteloenduva ortonormeeritud pere juhule (kui X on mitteseparaabel) ja annab erijuhuna ka piisava tingimuse kohekordse ortonormeeritud rea tingimusteta koonduvuseks peaaegu kõikjal mittefaktoriseeruva ortonormeeritud süsteemi korral (Teoreem 3).

ÜBER DIE UNBEDINGTE KONVERGENZ DER VERALLGEMEINERTEN ORTHOGONALREIHEN

J. Lamp

Zusammenfassung

Es sei A eine unendliche Menge, (X, Σ, μ) ein Raum mit endlichem Mass, $\{\varphi_\alpha\}_A$ ein orthonormiertes System von Funktionalen des Raums $L^2(X, \Sigma, \mu)$ und $F(A)$ eine durch das Enthaltensein geordnete Menge aller endlichen Untermengen K der Menge A. Man sagt, daß die verallgemeinerte Orthogonalreihe (1) unbedingt fast überall konvergiert, wenn jede abzählbare Unterfolge (6) der verallgemeinerten Folge (4) fast überall in X konvergiert.

Im vorliegenden Artikel wird als Verallgemeinerung der Resultate von W. Orlicz (Theorem A), K. Tandori (Theorem B) und Š. Pandžakidze (Theorem C) eine hinreichende Bedingung dafür gegeben, dass die Reihe (1) (im Sonderfall auch die Doppelreihe (15)) fast überall unbedingt konvergiert.

О НЕКОТОРЫХ T^{λ}-КОНСТРУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ КЛАССА $(X_{T\lambda}, X_{U\mu})$

Я. Сикк

Кафедра математического анализа

Пусть $\lambda = \{\lambda_k\}$ — монотонно возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел, которую, для краткости, назовем *скоростью*. Если λ и μ являются скоростями, то через $\lambda\mu$ обозначаем скорость $\{\lambda_k\mu_k\}$.

Пусть X — банахово пространство. Последовательность $\{\xi_k\} \subset X$ называется *λ-ограниченной*, если (см. [4], стр. 136)

$$\lambda_k \|\xi_k - \xi\|_X = O(1).$$

Пусть A — некоторый метод суммирования последовательностей, переводящий x в последовательность Ax. Если Ax является λ-ограниченной, то x называется *A^{λ}-ограниченной*. Ряд[1] Σu_k называется *A^{λ}-ограниченным*, если последовательность частичных сумм этого ряда A^{λ}-ограничена.

Говорят, что метод A сохраняет *λ-ограниченность*, если $A(m^{\lambda}) \subset m^{\lambda}$. Метод арифметических средних C^1 сохраняет λ-ограниченность тогда и только тогда, когда (см. [4], стр. 148)

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{-1} = O(n). \tag{1}$$

Числа ε_n называются *множителями суммируемости* класса $(A^{\lambda}_0, B_0^{\mu})$ (соответственно (A^{λ}_0, B_0), или (A^{λ}_0, B)), если при каждом A^{λ}-ограниченном ряде Σu_k ряд $\Sigma \varepsilon_k u_k$ является B^{μ}-ограниченным (соответственно B-ограниченным или B-суммируемым) (ср. [4], стр. 136, [2], стр. 147). Аналогично определяются множители суммируемости $\varepsilon_k \in (A_0, B^{\mu}_0)$ и (A, B^{μ}_0).

Пусть Y — одно из пространств[2] $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$, M, dV, L_{Ψ} или L_{Φ}. Обозначим ряд Фурье функций $f \in Y$ через

$$f^{\circ} = \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = (a_k, b_k).$$

---

[1] Если у знака суммирования пределы индексов опущены, то суммирование происходит по всем их целочисленным значениям от 0 до ∞.

[2] Определения пространств M, C, dV, L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ L_{Φ} и L_{Ψ} даны в работе [6]. В настоящей статье для краткости формулировки результатов целесообразно определить $L^{\infty} = C$.

Пусть $T=(\tau_{nk})$ — метод суммирования и пусть

$$\sigma_n f=\sum_k \tau_{nk}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{2}$$

Обозначим через Y_{TO} пространство тех $f\in Y$, для которых $\|\sigma_n f\|_Y=O(1)$, а через Y_T — пространство тех $f\in Y$, для которых $\lim\|\sigma_n f-f\|_Y=0$.

Пусть $Y_{T\lambda}$ — некоторое T^λ-конструктивное пространство, т. е. пространство всех $f\in Y$, для которых

$$\lambda_n\|\sigma_n f-f\|_Y=O(1)$$

(ср. [6], определение 2).

Обозначим через Y_λ пространство тех $f\in Y$ для которых найдется такая последовательность тригонометрических полиномов $\{P_n\}$, что

$$\lambda_n\|P_n-f\|_Y=O(1)$$

(см. [6], определение 1).

Обозначим через $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$, где $1\leqslant p\leqslant\infty$ и $0<\alpha\leqslant 1$, множество всех $f\in L^p$, для которых

$$\|f(x+h)-f(x)\|_{L^p}=O(|h|^\alpha).$$

Обозначим через W^iX пространство всех f, для которых $f^{(i)}\in X$.

Последовательность $\varepsilon=\{\varepsilon_k\}$ называется *мультипликатором класса* (X,X_1) (обозначаем $\varepsilon\in(X,X_1)$), если при каждом ряде[3] $(a_k,b_k)\in X$, ряд $(\varepsilon_k a_k,\ \varepsilon_k b_k)\in X_1$.

Целью настоящей статьи является дальнейшее изучение T^λ-конструктивных пространств, определенных в [6]. В статье рассматривается также применение этих пространств к решению проблем мультипликаторов для некоторых классов функций. Как видно из определения T^λ-конструктивного пространства, свойства его зависят от скорости λ и от метода суммирования. В настоящей статье, в основном, рассматриваются такие скорости, которые указывают на дифференциальные свойства исследуемых пространств.

Приведем некоторые известные результаты, наиболее интересные с точки зрения данной темы. Кралик [13] в 1969 г. для метода Зигмунда $T=Z^i$ порядка $i=1,2,\ldots$ (см. [2], стр. 105) доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Для того, чтобы* $f^{(i-1)}\in\mathrm{Lip}(1,p)$ *для* $1\leqslant p\leqslant\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*[4]

а) $\|\sigma_n f-f\|_{L^p}=O(n^{-i})$ *при четных* i,

б) $\|{}^c\sigma_n f-{}^cf\|_{L^p}=O(n^{-i})$ *при нечетных* i.

---

[3] Выражение $f^\circ\in Y$ означает, что f° является рядом Фурье функции $f\in Y$.

[4] Через ${}^cf$ обозначаем сопряженную к $f\in X$ функцию, причем множество $\{{}^cf\}$ при $f\in X$ обозначаем через ${}^cX$.

Из одного результата Буцера и Шерера (ср. [12], теорема 2.3) вытекает следующая

Теорема 2. *Для того, чтобы* $f^{(i-1)} \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ *при* $0 < \alpha < 1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|\sigma_n f - f\|_{L^p} = O(n^{1-i-\alpha})$$

при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $T = Z^i$.

В 1970 г. Кралик [14] получил результат, аналогичный теореме 2. Он вместо скорости $\lambda = \{n^{i+\alpha-1}\}$ рассматривает скорость $\lambda = \{n^{i-1}\mu_n\}$, где $n^\beta \leqslant \mu_n \leqslant n^\varkappa$ при $0 < \beta \leqslant \varkappa < 1$

Из этих примеров видно, что существуют классы скоростей, связанные с дифференциальными свойствами конструктивных пространств $L^p{}_{Z^i\lambda}$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

При изучении T^λ-конструктивных пространств возникают следующие проблемы, которые будут исследованы в § 2.

а) Каковы ограничения для скорости λ, при конкретном методе суммирования T, чтобы $L^p{}_{T\lambda} = L^p{}_\lambda$? (См. предложения 1 и 3).

б) Каковы естественные ограничения для скорости, чтобы имели место результаты типа теоремы 1 и 2? (См. следствие 3.1 и предложение 5).

в) Является ли зависимость между дифференциальными свойствами и скоростью естественным свойством для пространства $L^p{}_{T\lambda}$ при $p \in [1, \infty]$ или же она может быть распространена и на другие пространства? (См. предложения 5 и 6.)

В § 3 изучается проблема мультипликаторов для T^λ-конструктивных пространств. Обнаруживается интересный факт: множители λ-суммируемости, изученные Г. Кангро [4, 5], позволяют найти эфективные достаточные условия для того, чтобы ε являлась мультипликатором класса $(X_{T\lambda}, X_{U\mu})$. Значит, применением свойств T^λ-конструктивных пространств, которые исследуются в § 2, дан метод нахождения мультипликаторов для некоотрых классов функций.

§ 1. Вспомогательные результаты

Пусть $A = (\alpha_{nk})$ — нормальный и $B = (\beta_{nk})$ — произвольный треугольные методы суммирования, определенные в виде преобразования ряда в последовательность. Пусть

$$c_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \beta_{k\nu}\varepsilon_\nu \alpha'_{\nu k},$$

где $\varepsilon = \{\varepsilon_\nu\}$ — некоторая последовательность и (α'_{nk}) — матрица, обратная к матрице (α_{nk}).

Лемма 1. *Если метод* A *удовлетворяет условию* $\alpha_{n0} = 1$, *а метод* B — *условию* $Be \in m^\mu$, *то*

а) $\varepsilon_n \in (A^\lambda{}_0, B^\mu{}_0)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\exists \lim_n c_{nk} = c_k, \tag{3}$$

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |c_k| = O(1), \tag{4}$$

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{-1} |c_{nk} - c_k| = O(1), \tag{5}$$

б) $\varepsilon_n \in (A^{\lambda}{}_0, B_0)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_k \lambda_k^{-1} |c_{nk}| = O(1); \tag{6}$$

в) $\varepsilon_n \in (A^{\lambda}{}_0, B)$ *тогда и только тогда, когда выполнено* (3) *и*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}{}' \lambda_k^{-1} |c_k| = O(1), \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n}{}' \lambda_k^{-1} |c_{nk} - c_k| = O(1); \tag{8}$$

г) $\varepsilon_n \in (A_0, B^{\mu}{}_0)$ *или* $\varepsilon_n \in (A, B^{\mu}{}_0)$ *тогда и только тогда, когда при* $\lambda = \{1\}$ *выполнены* (3), (4) и (5).

Доказательство. Утверждения а) и в) и принадлежность $\varepsilon_n \in (A_0, B^{\mu}{}_0)$ из г) вытекают непосредственно из одной леммы Г. Кангро (см. [4], стр. 143, лемма 4). Утверждение б) и принадлежность $\varepsilon_n \in (A, B^{\mu}{}_0)$ из г) можно доказать аналогично (см. также [5], стр. 141—142).

Лемма 2. *Пусть* $A = C^1$ *и* $B_i = Z^i = (\beta_{nk})$. *Пусть* μ — *скорость, удовлетворяющая условию*

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty}{}' \mu_k^{-1} k^{-i} = O(n^{1-i}), \tag{9}$$

а λ — *такая скорость, для которой* $\lambda_n = n^{i-1}$ *при* $n = 1, 2, \ldots,$ *а* $\lambda_0 = 1$. *Тогда*

а) $\lambda_n^{-1} \in (A^{\mu}{}_0, B_i{}^{\lambda\mu}{}_0)$, (10)

б) $\lambda_n^{-1} \in (A_0, B_{i-1}{}^{\lambda}{}_0)$. (11)

Доказательство. Для метода C^1 имеет место $\alpha_{n0} = 1$, а для Z^i последовательность $B_i e = 1 \in m^{\lambda}$ для каждой λ (см. [2], стр. 104, формула (17.1)), и можно применить лемму 1.

Для доказательства части а) леммы 2 проверим условия (3)—(5). В случае $A = C^1$ величины c_{nk} вычисляются по формулы (см. [4], стр. 145)

$$c_{nk} = (k+1) \Delta^2{}_k (\beta_{nk} \varepsilon_k).$$

Значит, $c_k = (k+1)\Delta^2 \varepsilon_k$ и условие (3) выполнено. В данном случае $\varepsilon_n = n^{1-i}$ при $n = 1, 2, \ldots,$ а $\varepsilon_0 = 1$. Следовательно, $c_0 = O(1)$, а $c_k = O(k^{-i})$ при $k > 0$. Так как скорость μ удовлетворяет условию (9), то из последних неравенств следует, что выполнено условие (4). Условие (5) вытекает из соотношения

$$|c_{nn} - c_n| = O((n+2)^{-i+1}).$$

Действительно, в данном случае условие (5) имеет вид $\lambda_n^{-1} |c_{nn} - c_n| = O(1)$, так как при $k < n$ имеет место $c_{nk} = c_k$.

Часть б) доказывается аналогично случаю а), при помощи части г) леммы 1.

Лемма 3. *Пусть $A^i = Z^i$ и $B = C^1$. Пусть μ — скорость, удовлетворяющая условию*

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} (\mu_k k)^{-1} = O(1), \tag{12}$$

а λ — такая скорость, для которой $\lambda_n = n^{i-1}$ при $n = 1, 2, \ldots$, а $\lambda_0 = 1$. Тогда

а) $\lambda_k \in (A_i{}^{\lambda\mu}{}_0, B^{\mu}{}_0)$, (13)

б) $\lambda_k \in (A_{i-1}{}^{\lambda}{}_0, B_0)$. (14)

Доказательство опирается на лемму 1. Для доказательства части а) леммы 3 проверяем условия (3)—(5). В случае, когда $A = Z^i$ и $B = C^1 = (a_{nk})$ величины c_{nk} вычисляются по формуле (см. [4], стр. 145)

$$c_{nk} = (k+1)^i \Delta_k \frac{\Delta_k(a_{nk}\varepsilon_k)}{(k+1)^i - k^i}.$$

Следовательно,

$$c_k = (k+1)^i \Delta_k \frac{(k+1)^i - k^i}{\Delta_k \varepsilon_k},$$

и условие (3) выполнено. В настоящем случае $\varepsilon_n = n^{i-1}$, при $n = 1, 2, \ldots$, а $\varepsilon_0 = 1$, значит $c_0 = O(1)$, а $c_k = O(k^{i-2})$ при $k > 0$. При таких c_k выполнено условие (4), так как скорость μ удовлетворяет условию (12). Остается проверить условие (5). Величины c_{nk} при $0 < k < n+1$ вычисляются следующим образом:

$$c_{nk} = (k+1)^i \Delta_k \frac{\Delta_k(1 - k(n+1)^{-1})k^{i-1}}{(k+1)^i - k^i} = (k+1)^i \Delta_k \frac{\Delta_k k^{i-1}}{(k+1)^i - k^i}.$$

Следовательно, при $0 < k < n+1$ имеет место $c_{nk} - c_k = 0$. Такое равенство имеет место и при $k = 0$ или $k = n+1$, а при $n = k$ имеет место $|c_{nk} - c_k| = O(n^{i-1})$. Следовательно, (5) выполнено, так как $\lambda_n = n^{i-1}$. Часть а) леммы 3 доказывается аналогично, применением части б) леммы 1.

Примечание 1. Леммы 2 и 3 ввиду (11) и (14) дают аналог результата Кралика (см. [13], предложение 1), а ввиду (10) и (13) обобщают идею Кралика на более широкий класс скоростей.

Пример. Если $\mu_n = n^{\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1)$, то выполнены условия (9) и (12) и, следовательно, из лемм 2 и 3 получается, что $n^{-i+1} \in (C^{1\mu}{}_0, Z^{i\lambda\mu}{}_0)$ и $n^{i-1} \in (Z^{i\lambda\mu}{}_0, C^{1\mu}{}_0)$ при $\lambda\mu = \{n^{i-1+\alpha}\}$.

Лемма 4. *Пусть $T = C^1$;*

а) *если X — одно из пространств L_Ψ, M или $L^p (1 < p < \infty)$, то $X = X_{TO}$,*

б) *если X — одно из пространств $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ или L_Φ, то $X = X_T$,*

в) $dV = L_{TO}$.

Доказательство см. [1], стр. 165—167, теоремы 1, 2 и 3, [9], стр. 67—69, теоремы 1 и 2.

§ 2. Свойства конкретных пространств $X_{T\lambda}$

Пусть E — метод сходимости. Имеет место

Предложение 1. *Пусть B — метод, сохраняющий λ-ограниченность. Тогда $L^p{}_\lambda = L^p{}_{E\lambda} = L^p{}_{B\lambda}$ при $1 < p < \infty$.*

Доказательство. Включения $L^p{}_{E\lambda} \subset L^p{}_\lambda$ и $L^p{}_{B\lambda} \subset L^p{}_\lambda$ следуют непосредственно из определений пространств X_λ и $X_{T\lambda}$ (см. [6,] определения 1 и 2). Докажем, что имеют место и обратные включения. Действительно, если $f \in L^p{}_\lambda$, то и $f \in L^p$, откуда следует, что имеет место неравенство

$$\|f - s_n f\|_p = O(E_n(f)) \tag{15}$$

(см. [8], стр. 339), где $S_n f$ — частичная сумма порядка n ряда f, а $\{E_n(f)\}$ — последовательность наилучших приближений для $f \in L^p$. Поскольку для всех $f \in L^p{}_\lambda$ имеет место неравенство $E_n(f) = O(\lambda_n{}^{-1})$, то из (15) вытекает, что $\lambda_n \|f - S_n f\|_p = O(1)$ и, следовательно, $L^p{}_\lambda \subset L^p{}_{E\lambda}$. Включение $L^p{}_{E\lambda} \subset L^p{}_{B\lambda}$ следует непосредственно из того, что B сохраняет λ-ограниченность. Предложение доказано.

Следствие 1.1. *Если скорость λ удовлетворяет требованию* (1), *то при* $1 < p < \infty$

$$L^p{}_\lambda = L^p{}_{C^1\lambda} \tag{16}$$

и

$$^cL^p{}_\lambda \subset L^p{}_\lambda. \tag{17}$$

Доказательство. При условии (1) метод C^1 сохраняет λ-ограниченность. Поэтому по предложению 1 имеет место равенство (16). Включение (17) следует из известной теоремы Рисса о сопряженных функциях в пространстве L^p при $1 < p < \infty$ (см. [8], стр. 404, теорема 2.6.).

Предложение 2. *Пусть для скорости λ выполнено условие* (12). Тогда $^cL^p{}_\lambda \subset L^p{}_\lambda$ при $p = 1$ или $p = \infty$.

Доказательство непосредственно следует из одной теоремы С. Б. Стечкина ([7], стр. 200, теорема 1).

Пусть λ — некоторая скорость. Обозначаем через $\lambda^{-1}(x)$ некоторую непрерывную монотонно убывающую функцию, определенную в $[\lambda_0{}^{-1}, \infty)$, такую, что $\lambda^{-1}(n) = 1/\lambda_n$.

Предложение 3. *Пусть скорость λ удовлетворяет условию* (1). *Тогда класс $L^p{}_\lambda (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ совпадает с классом всех функций из $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$, для которых*

$$\|f(x+h) - f(x)\|_{L^p} = O(\lambda^{-1}(|h|^{-1})), \tag{18}$$

причем $L^p{}_\lambda = L^p{}_{C^1\lambda}$.

Доказательство. Пусть выполнено (18); тогда

$$\|f(x+n^{-1}) - f(x)\|_{L^p} = \omega_1(f, (n+1)^{-1}) = O(\lambda^{-1}(n)).$$

Применив неравенство Джексона (см. [8], стр. 274), получаем, что $E_n(f) = O(\lambda_n{}^{-1})$. Предположим теперь обратное, что

$E_n(f) = O(\lambda_n^{-1})$. Воспользуемся следующим известным неравенством

$$\omega_1(f, (n+1)^{-1}) = Cn^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(f)$$

(ср. [8], стр. 344). Применяя это и условие (1), получаем, что

$$\omega_1(f, (n+1)^{-1}) = O(1) n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} = O(\lambda_n^{-1}) = O(\lambda^{-1}(n)).$$

Включение $L^p{}_{C^1\lambda} \subset L^p{}_\lambda$ вытекает из определений пространств X_λ и $X_{T\lambda}$. Обратное включение $L^p{}_{C^1\lambda} \supset L^p{}_\lambda$ в случае $1 < p < \infty$ следует из предложения 1. Для доказательства последнего включения при $p = 1$ и $p = \infty$ воспользуемся неравенством

$$|\sigma_n(f(x) - f(x)| \leqslant 2(n+1)\pi^{-1} \int_0^{1/n} \omega_1(f(x), t)\, dt +$$

$$+ 2C \int_{1/n}^{\pi} \omega_1(f(x), t)\,(n+1)^{-1} t^2\, dt$$

(см. [3], стр. 151). Как известно (см. [8], стр. 416, предложение 7.11), при выполнении (1)

$$(n+1)^{-1} \int_{1/n}^{\pi} t^{-2} \omega_1(f, t)\, dt = O(\omega_1(f, t)).$$

Но, так как $\omega_1(f, n+1)^{-1}) = O(\lambda^{-1}(n))$, то из последнего неравенства следует, что $X_{C^1\lambda} \subset X_\lambda$ при $X = L$ и $X = L^\infty$. Предположение доказано.

Следствие 3.1. *Пусть скорость λ удовлетворяет условиям* (1) *и* (12) *и пусть $T = C^1$. Тогда при $1 \leqslant p \leqslant \infty$*

$$^cL^p{}_{T\lambda} \subset L^p{}_{T\lambda}$$

и

$$\|f\|_{T\lambda} = \|f\|_p + \sup_n \lambda_n \|\sigma_n f - f\|_p.$$

Доказательство следует из предложений 2 и 3 и из общего вида нормы элемента конструктивного пространства (см. [6], предложение 1).

Свойства пространства $L^p{}_{C^1\lambda}$ приведенные в предложении 3 и в следствии 3.1, показывают, что пространство $L^p{}_{C^1\lambda}$ является расширением пространства $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$. Имея это в виду, обозначаем пространство $L^p{}_{C^1\lambda}$, в случае, когда λ удовлетворяет (1) и (12), через $\mathrm{Lip}(\{\lambda_k\}, p)$; или короче $\mathrm{Lip}(\lambda, p)$.

Основная лемма. *Пусть $f^\circ = (a_k, b_k) \in Y$, $(\varepsilon f)^\circ = (k_i a_k, k_i b_k)$ и $\lambda = \{n^i\}$ при $n = 1, 2, \ldots$, а $\lambda_0 = 1$.*

а) *Если скорость μ удовлетворяет условиям* (9) *и* (12), *то $f^\circ \in Y_{Z^{i+1}\lambda\mu}$ тогда и только тогда, когда $(\varepsilon f)^\circ \in Y_{C^1\mu}$,*

б) *$f^\circ \in Y_{Z^i\lambda}$ тогда и только тогда, когда $(\varepsilon f)^\circ \in Y_{C^1O}$.*

Доказательство основной леммы опирается на леммы 2 и 3. В самом деле, эти леммы сохраняют силу и в случае, когда члены преобразуемого ряда принадлежат любому банахову пространству (см. примечание 1 в работе [4] Г. Кангро). Следовательно, леммы 2 и 3 верны и для пространства Y.

Предложение 4. *Пусть* $\lambda_n = n^i$ *при* $n = 1, 2, \ldots$, *а* $\lambda_0 = 1$. *Для включения* $f^{(i)} \in L_\Psi$ *(соответственно* $f^{(i)} \in dV$*) необходимо и достаточно, чтобы*

а) $f \in L_{\Psi Z^i \lambda}$ *(соответственно* $f \in L_{Z^i \lambda}$*) при четных* i,

б) $^c f \in L_{\Psi Z^i \lambda}$ *(соответственно* $^c f \in L_{Z^i \lambda}$*) при нечетных* i.

Доказательство части а). Если i — четное число, то $(f^\circ)^{(i)} = \pm (a_k k^i, b_k k^i) = \pm (\varepsilon f)^\circ$; следовательно, $^c(\varepsilon f)$ и $f^{(i)}$ одновременно принадлежат к пространству L_Ψ. Но, для того, чтобы имело место $(\varepsilon f)^\circ \in L_\Psi$, необходимо и достаточно, чтобы $(\varepsilon f)^\circ \in L_{\Psi C^i O}$ (см. часть а) леммы 4). Теперь, используя часть б) основной леммы, получаем, что $\varepsilon f \in L_{\Psi Z^i \lambda}$. Если $f \in L_{\Psi Z^i \lambda}$, то из основной леммы получим, что $\varepsilon f \in L_{\Psi C^i O}$ и, следовательно, $(\varepsilon f) \in L_\Psi$ (см. часть а) леммы 4). Часть а) предложения 4 в случае пространства L_Ψ доказана. Случай пространства dV доказывается аналогично (см. часть б) леммы 4).

Доказательство части б). Если i — нечетное число, то $^c(\varepsilon f)^\circ = \pm (f^\circ)^{(i)}$ и, следовательно, $f^{(i)}$ и $^c(\varepsilon f)$ одновременно принадлежат пространству L_Ψ. Остальная часть доказательства аналогична доказательству случая а). Предложение доказано.

Примечание 2. Пространства M и L^p при $1 < p < \infty$ являются пространствами типа L_Ψ. Поэтому предложение 4 применимо и к пространствам M и L^p.

Следствие 4.1. *Для того, чтобы* $f^{(i)} \in L^p$ *при* $1 < p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f \in L^p{}_{Z^i \lambda}$ *при* $\lambda = \{n^i\}$.

Доказательство следует из следствия 4 и примечания 2.

Предложение 5. *Пусть* X *— одно из пространств* L_Φ *или* L^p *при* $1 < p < \infty$. *Пусть* μ *— скорость, удовлетворяющая условиям* (9) *и* (12), *а* $\lambda = \{n^i\}$.

1) *Включение* $f^{(i)} \in X_{C^i \mu}$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

а) $f^\circ \in X_{Z^{i+1} \lambda \mu}$ *при четных* i,

б) $^c f^\circ \in X_{Z^{i+1} \lambda \mu}$ *при нечетных* i,

2) *Включение* $f^{(i)} \in X = X_{C^i}$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

а) $f^\circ \in X_{Z^{i+1} \lambda}$ *при четных* i,

б) $^c f^\circ \in X_{Z^{i+1} \lambda}$ *при нечетных* i.

Доказательство аналогично доказательству предложения 4, только здесь мы используем часть а) основной леммы и часть б) леммы 4.

Следствие 5.1. *Пусть* μ *— скорость, удовлетворяющая условию* (1) *и* $\lambda(l)$ *— скорость* $\{n^l\}$, *пусть* i *— некоторое четное число и* j *— некоторое нечетное число. Имеют место следующие равенства*:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ\ L^p{}_{Z^k\lambda(k)} = W^k L^p \quad && \text{при} \quad 1<p<\infty,\\
&2^\circ\ L_{\Psi Z^i\lambda(i)} = W^i L_\Psi, &&\\
&3^\circ\ L_{\Psi Z^j\lambda(j)} = {}^cW^j L_\Psi, &&\\
&4^\circ\ L_{Z^i\lambda(i)} = W^i dV, &&\\
&5^\circ\ L_{Z^j\lambda(j)} = {}^cW^j dV, &&\\
&6^\circ\ M_{Z^i\lambda(i)} = W^i M, &&\\
&7^\circ\ M_{Z^j\lambda(j)} = {}^cW^j M, &&\\
&8^\circ\ L_{\Phi Z^{i+1}\lambda(i)} = W^i L_\Phi, &&\\
&9^\circ\ L_{\Phi Z^{j+1}\lambda(j)} = {}^cW^j L_\Phi, &&\\
&10^\circ\ L^p{}_{Z^{i+1}\lambda(i)} = W^i L^p && \text{при} \quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\\
&11^\circ\ L^p{}_{Z^{j+1}\lambda(j)} = {}^cW^j L^p && \text{при} \quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\\
&12^\circ\ L_{\Phi Z^{i+1}\mu\lambda(i)} = W^i (L_{\Phi C^1\mu}), &&\\
&13^\circ\ L_{\Phi Z^{j+1}\mu\lambda(j)} = {}^cW^j (L_{\Phi C^1\mu}), &&\\
&14^\circ\ L^p{}_{Z^{i+1}\mu\lambda(i)} = W^i (L^p{}_{C^1\mu}) && \text{при} \quad 1\leqslant p\leqslant\infty,\\
&15^\circ\ L^p{}_{Z^{j+1}\mu\lambda(j)} = {}^cW^j (L^p{}_{C^1\mu}) && \text{при} \quad 1\leqslant p\leqslant\infty.
\end{aligned}
$$

Кроме того, пространства 1°—11° *являются нормированными пространствами с нормами типа*

$$\|f\|_{X_Z{}^k\lambda(l)} = \|f\|_X + \sup_n \lambda_n \|\sigma_n f - f\|_X,$$

а пространства 12°—15° *являются нормированными пространствами с нормами типа*

$$\|f\|_{X_Z{}^{k+1}\mu\lambda(k)} = \|f\|_X + \sup_n \lambda_n\mu_n \|\sigma_n f - f\|_X. \tag{19}$$

Доказательство следует из предложений 4 и 5 и из общего вида нормы в T^λ-конструктивном пространстве (см. [6], предложение 1).

Предложение 6. *Пусть скорость* μ *удовлетворяет условиям* (1), (9) *и* (12). *Тогда при* $1\leqslant p\leqslant\infty$

$$L^p{}_{Z^{k+1}\mu\lambda(k)} = W^k \operatorname{Lip}(\mu, p).$$

Доказательство следует из предложения 3 и следствий (3.1) и (5.1).

§ 3. Мультипликаторы

Многие авторы пользовались теорией суммируемости при получении мультипликаторов определенного класса. Например, Гёс [11] и М. Тыннов [10] исследовали связи между классами множителей суммируемости и мультипликаторов. Гёс получил следующий результат:

Если $\varepsilon_k \in (C^{\alpha}, C^{\beta})$ *при* $\alpha > 0$ *и* $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, *то* $\{\varepsilon_k\}$ *является мультипликатором следующих классов:* (dV, dV), (L^p, L^p) *при* $1 \leqslant p < \infty$, (M, M), (L_{Φ}, L_{Φ}) *и* (L_{Ψ}, L_{Ψ}).

М. Тыннов обобщил этот результат на метод суммирования T, удовлетворяющий условию

$$\sup_n \int_0^{\pi} \left| \tau_{n0}/2 + \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk} \cos ku \right| du < \infty.$$

Целью настоящего параграфа является обобщение этих результатов на случай наличия скорости. Оказывается, что ценность такого обобщения состоит не только в достигнутых результатах, а также в методе, при помощи которого эти результаты получаются. В самом деле, применив этот метод можно получить эфективные достаточные условия для мультипликаторов любого класса $(X_{T\lambda}, X_{U\mu})$. Но как показано в следствии 5.1., многие $X_{T\lambda}$ пространства являются уже раннее известными пространствами.

В настоящей работе приводятся только некоторые результаты, выбирая самые известные $X_{T\lambda}$ пространства. Способ получения других результатов такого типа аналогичен.

Лемма 1А. *Если метод* A *удовлетворяет условию* $a_{n0} = 1$, *а метод* B — *условию* $Be \in m^{\mu}$, *то*

а) $\varepsilon \in (Y_{A\lambda}, Y_{B\mu})$ *при выполнении условий* (3)—(5);

б) $\varepsilon \in (Y_{A\lambda}, Y_{BO})$ *при выполнении условия* (6);

в) $\varepsilon \in (Y_{A\lambda}, Y_{B})$ *при выполнении условий* (7) *и* (8);

г) $\varepsilon \in (Y_{A}, Y_{B\mu})$ *и* $\varepsilon \in (Y_{AO}, Y_{B\mu})$, *когда при* $\lambda = \{1\}$ *выполнены условия* (3)—(5).

Доказательство опирается на лемму 1. Действительно, эта лемма сохраняет силу и в случае пространства Y (см. примечание 1 в работе [4]). Значит, множители суммируемости являются и мультипликаторами, ввиду чего лемма 1 превращается в лемму 1А.

Предложение 7. *Пусть* X — *одно из пространств* L_{Ψ}, dV *или* M. *Выполнение условий*

$$n^j \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{(k+1)^i - k^i} \right| = O(1), \tag{20}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \Delta \frac{\Delta k^j \varepsilon_k}{(k+1)^i - k^i} \right| = O(1), \tag{21}$$

$$\varepsilon_{n+1} \Delta n^j (\Delta n^i)^{-1} = O(1) \tag{22}$$

достаточно для того, чтобы имело место

а) *соотношение* $\varepsilon \in (W^i L^p, W^j L^p)$ *при* $p \in (1, \infty)$;

б) *соотношение* $\varepsilon \in (W^i X, W^j X)$ *при четных* $i + j$;

в) *соотношение* $\varepsilon \in (W^i X, {}^c W^j X)$ *при нечетных* $i + j$.

Доказательство. Из равенств 2°—7° следствия 5.1 следует, что множества W^iL^p при $p \in (1, \infty)$, W^iX при четных i и ${}^cW^jX$ при нечетных j являются T^λ-конструктивными пространствами типа $X_{Z^i\{n^i\}}$. Следовательно, можно применить лемму 1А, так как для метода $A = Z^i$ всегда $a_{n0} = 1$ и последовательность $Ae = \{1\} \in m^\lambda$ для каждой скорости λ (см. [2], стр. 104, формула (17.1)).

При $A = Z^i$ и $B = Z^j = (\beta_{nk})$ величины c_{nk} вычисляются по формуле

$$c_{nk} = (k+1)^i \Delta_k \frac{\Delta_k \beta_{nk} \varepsilon_k}{(k+1)^i - k^i},$$

откуда

$$c_k = \lim_n c_{nk} = (k+1)^i \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{(k+1)^i - k^i}$$

(ср. [4], стр. 145). Следовательно, условие (3) леммы 1А удовлетворено. Кроме того, условие (4) совпадает с условием (20). Остается проверить выполнимость условия (5). При $k < n$ величина

$$c_{nk} - c_k = (n+1)^{-j} (k+1)^i \Delta \frac{\Delta k^j \varepsilon_k}{(k+1)^i - k^i},$$

а

$$c_{nn} - c_n = (n+1)^{i-j} \left(\Delta \frac{\Delta n^j \varepsilon_n}{(n+1)^i - n^i} - \varepsilon_{n+2} \frac{\Delta (n+1)^j}{\Delta (n+1)^i} \right).$$

Следовательно, условие (5) следует из условий (21) и (22). Теперь из 1° следует часть а) предложения 7. В силу 2°—7° в случае четных i и j получаем мультипликаторы $\varepsilon \in (W^iX, W^jX)$, а в случае нечетных i и j мультипликаторы $\varepsilon \in ({}^cW^iX, {}^cW^jX)$. Но из последнего включения вытекает, что $\varepsilon \in (W^iX, W^jX)$. Когда $i + j$ — нечетное число, то рассуждение аналогично. Предложение доказано.

Следствие 7.1. *Выполнение условий* (20), (21) *и* (22) *достаточно для того, чтобы в случае* $p \in [1, \infty]$

а) *при четных* $i + j$ *имело место соотношение*

$$\varepsilon \in (W^{i-1} \operatorname{Lip}(1, p), W^{j-1} \operatorname{Lip}(1, p));$$

б) *при нечетных* $i + j$ *имело место соотношение*

$$\varepsilon \in (W^{i-1} \operatorname{Lip}(1, p), {}^cW^{j-1} \operatorname{Lip}(1, p)).$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 7 с тем различием, что вместо равенств 1°—7° применяем теорему 1.

Предложение 8. *Пусть* X — *одно из пространств* L_Ψ, dY *или* M. *Выполнение условия*[5]

[5] Через e^n обозначаем последовательность

$$\{e_k^n\} = \{\underbrace{1, 1, \ldots 1}_{(n+1)}, 0, 0, \ldots\}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\frac{\Delta_k((1-k(n+1)^{-1})\varepsilon_k e_k{}^n)}{(k+1)^i-k^i}\right|=O(1) \tag{23}$$

достаточно для того, чтобы имело место

а) *соотношение* $\varepsilon\in(W^iL^p, L^p)$ *при* $p\in(1,\infty)$;

б) *при четных* i *соотношение* $\varepsilon\in(W^iX, X)$;

в) *при нечетных* i *соотношение* $\varepsilon\in({}^cW^iX, X)$.

Доказательство. Из леммы 4 а) следует, что $X=X_{C'O}$, а из сосотношений 1°—7° следствия 5.1 вытекает, что $W^iL^p = L^p{}_{Zi\{n^i\}}$, при $p\in(1,\infty)$ и что либо $W^iX=X_{Zi\{n^i\}}$ либо ${}^cW^iX=X_{Zi\{n^i\}}$. Используя части б) леммы 1А получаем требуемое.

Следствие 8.1. *Выполнение условия* (23) *достаточно для того, чтобы в случае* $p\in(1,\infty)$

а) *при четных* i *имело место соотношение*

$$\varepsilon\in(W^{i-1}\operatorname{Lip}(1,p), L^p);$$

б) *при нечетных* i *имело место соотношение*

$$\varepsilon\in({}^cW^{i-1}\operatorname{Lip}(1,p), L^p).$$

Доказательство следует из теоремы 1 и предложения 8.

Предложение 9. *Пусть* X — *одно из пространств* L_Ψ, dV или M. *Выполнение условий*

$$n^i\sum_{k=n+1}^{\infty}|(k+1)\Delta^2\varepsilon_k|=O(1), \tag{24}$$

$$\sum_{k=0}^{n}|(k+1)\Delta^2k^i\varepsilon_k|=O(1), \tag{25}$$

$$\varepsilon_{n+1}\Delta n^i=O(1) \tag{26}$$

достаточно для того, чтобы имели место

а) $\varepsilon\in(L^p, W^iL^p)$ *при* $p\in(1,\infty)$;

б) $\varepsilon\in(X, W^iX)$ *при четных* i;

в) $\varepsilon\in(X, {}^cW^iX)$ *при нечетных* i.

Доказательство аналогично доказательству предложения 8, только здесь применяем часть г) леммы 1 А.

Следствие 9.1. *Выполнение условий* (24), (25) и (26) *достаточно для того, чтобы в случае* $p\in[1,\infty]$

а) *при четных* i *имело место соотношение*

$$\varepsilon\in(L^p, W^{i-1}\operatorname{Lip}(1,p);$$

б) *при нечетных* i *имело место соотношение*

$$\varepsilon\in(L^p, {}^cW^{i-1}\operatorname{Lip}(1,p)).$$

Доказательство следует из теоремы 1 и предложения 9.

Следствие 9.2 *Выполнение условий* (24), (25) *и* (26) *достаточно для того, чтобы имело место*

а) *соотношение* $\varepsilon \in (dV, W^iL)$ *при четных* i,

б) *соотношение* $\varepsilon \in (dV, {}^cW^iL)$ *при нечетных* i.

Предложение 10. *Пусть* X — *одно из пространств* L_Φ *или* $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$. *Выполнение условий* (22),

$$n^j \sum_{k=n+1}^{\infty} k \left| \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{(k+1)^{i+1} - k^{i+1}} \right| = O(1), \tag{27}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (k+1) \Delta \frac{\Delta k^{j+1} \varepsilon_k}{(k+1)^{i+1} - k^{i+1}} \right| = O(n+1) \tag{28}$$

достаточно для того, чтобы имело место

а) *соотношение* $\varepsilon \in (W^iX, W^jX)$ *при четных* $i+j$;

б) *соотношение* $\varepsilon \in (W^iX, {}^cW^jX)$ *при нечетных* $i+j$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 7 с тем различием, что вместе условий 1°—7° применяем условий 8°—11°.

Предложение 11. *Пусть* X *одно из пространств* L_Φ *или* $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$. *Выполнение условий*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) \left| \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{(k+1)^{i+1} - k^{i+1}} \right| = O(1), \tag{29}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) \left| \Delta \frac{\Delta k \varepsilon_k}{(k+1)^{i+1} - k^{i+1}} \right| = O(n+1), \tag{30}$$

$$\varepsilon^{n+1} (\Delta n^{i+1})^{-1} = O(1) \tag{31}$$

достаточно для того, чтобы имело место

а) *соотношение* $\varepsilon \in (W^iX, X)$ *при четных* i;

б) *соотношение* $\varepsilon \in ({}^cW^iX, X)$ *при нечетных* i.

Доказательство аналогично доказательству предложения 10.

Предложение 12. *Пусть* X — *одно из пространств* L_Φ *или* $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$. *Выполнение условий*

$$n^i \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 \varepsilon_k| = O(1), \tag{32}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1) |\Delta^2 k^{j+1} \varepsilon_k| = O(n+1), \tag{33}$$

$$\varepsilon_{n+1} \Delta n^{j+1} = O(1) \tag{34}$$

достаточно для того, чтобы имело место

а) *соотношение* $\varepsilon \in (X, W^iX)$ *при четных* j;

б) *соотношение* $\varepsilon \in (X, {}^cW^iX)$ *при нечетных* j.

Доказательство аналогично доказательству предложения 10.

Предложение 13. *Выполнение условий*

$$n^{j+\beta}\sum_{k=n+1}^{\infty}(1+k)^{1-\alpha}\left|\Delta\frac{\Delta\varepsilon_k}{(k+1)^{i+1}-k^{i+1}}\right|=O(1), \qquad (35)$$

$$n^{\beta-1}\sum(k+1)^{1-\alpha}\left|\Delta\frac{\Delta k^{j+1}\varepsilon_k}{(k+1)^{i+1}-k^{i+1}}\right|=O(1), \qquad (36)$$

$$n^{\beta-\alpha}\varepsilon_{n+1}(\Delta n^{j+1})(\Delta n^{i+1})^{-1}=O(1) \qquad (37)$$

достаточно для того, чтобы при $\alpha, \beta\in(0,1)$ *и при* $p\in[1,\infty]$ *имело место соотношение*

$$\varepsilon\in(W^i\operatorname{Lip}(\alpha,p),\ W^j\operatorname{Lip}(\beta,p).$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 7 с тем различием, что вместо условий 1°—7° применяем теорему 1.

Следствие 13.1. *Выполнение условий*

$$n^{\beta}\sum_{k=n+1}^{\infty}(1+k)^{1-\alpha}|\Delta^2\varepsilon_k|=O(1), \qquad (38)$$

$$n^{\beta-1}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{1-\alpha}|\Delta^2k\varepsilon_k|=O(1), \qquad (39)$$

$$n^{\beta-\alpha}\varepsilon_{n+1}=O(1) \qquad (40)$$

достаточно для того, чтобы при $\alpha,\beta\in(0,1)$ *и при* $p\in[1,\infty]$ *имело место соотношение*

$$\varepsilon\in(\operatorname{Lip}(\alpha,p),\ \operatorname{Lip}(\beta,p)).$$

Следствие 13.2. а) *При* $j=0$ *выполнение условий* (35), (36) *и* (37) *достаточно для того, чтобы при* $\alpha,\beta\in(0,1)$

$$\varepsilon\in(W^i\operatorname{Lip}(\alpha,p),\ \operatorname{Lip}(\beta,p)).$$

б) *При* $i=0$ *выполнение условий* (35), (36) *и* (37) *достаточно для того, чтобы при* $\alpha,\beta\in(0,1)$ *и* $p\in[1,\infty]$

$$\varepsilon\in(\operatorname{Lip}(\alpha,p),\ W^j\operatorname{Lip}(\beta,p)).$$

Предложение 14. *Пусть скорость* μ *удовлетворяет условиям* (9) *и* (12). *Пусть* X — *одно из пространств* $L_{\Phi C'\mu}$ *или* $L^p{}_{C'\mu}$ *при* $p\in[1,\infty]$, *и пусть* X_1, *в зависимости от* X, — *пространство* L_Φ *или* L^p *при* $p\in[1,\infty]$. *Выполнение условий*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)\mu_k^{-1}\left|\Delta\frac{\Delta\varepsilon_k}{(k+1)^{i+1}-k^{i+1}}\right|=O(1), \qquad (41)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\mu_k^{-1}\left|\Delta\frac{\Delta k\varepsilon_k}{(k+1)^{i+1}-k^{i+1}}\right|=O(n+1), \qquad (42)$$

$$\mu_n^{-1}\varepsilon_{n+2}(\Delta(n+1)^{i+1})^{-1}=O(1) \qquad (43)$$

достаточно для того, чтобы имело место

а) *соотношение* $\varepsilon\in(W^iX, X_1)$ *при четных* i,

б) *соотношение* $\varepsilon\in({}^cW^iX, X_1)$ *при нечетных* i.

Доказательство аналогично доказательству предложения 7.

Следствие 14.1. *Выполнение условий*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^{1-\alpha}\left|\Delta\frac{\Delta\varepsilon_k}{(k+1)^{i+1}-k^{i+1}}\right|=O(1),$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{1-\alpha}\left|\Delta\frac{\Delta k\varepsilon_k}{(k+1)^{i+1}-k^{i+1}}\right|=O(n+1),$$

$$n^{-\alpha}\varepsilon_{n+2}(\Delta(n+1)^{i+1})^{-1}=O(1)$$

достаточно для того, чтобы имело место соотношение $\varepsilon\in(W^i\,\mathrm{Lip}(\alpha,p),L^p)$ *при* $\alpha\in(0,1)$ *и* $p\in[1,\infty]$.

Доказательство следует из предложения 14 и 6.

Следствие 14.2. *Выполнение условий*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^{1-\alpha}|\Delta^2\varepsilon_k|=O(1),$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{1-\alpha}|\Delta^2 k\varepsilon_k|=O(n+1),$$

$$n^{1-\alpha}\varepsilon_{n+1}=O(1)$$

достаточно для того, чтобы имело место соотношение $\varepsilon\in(\mathrm{Lip}(\alpha,p),L^p)$ *при* $\alpha\in(0,1)$ *и* $p\in[1,\infty]$.

Предложение 15. *Пусть скорость* μ *удовлетворяет условиям* (9) *и* (12). *Пусть* X — *одно из пространств* $L_{\Phi}{}_{C^{1}\mu}$ *или* $L^p{}_{C^1\mu}$ *при* $p\in[1,\infty]$, *и пусть* X_1, *в зависимости от* X, — *пространство* L_Φ *или* L^p *при* $p\in[1,\infty]$.

Выполнение условий

$$n^j\mu_n\sum_{k=n+1}^{\infty}|(k+1)\Delta^2\varepsilon_k|=O(1), \tag{44}$$

$$\mu_n\sum_{k=0}^{n}|(k+1)\Delta^2k^{j+1}\varepsilon_k|=O(n+1), \tag{45}$$

$$\mu_n\varepsilon_{n+2}\Delta(n+1)^{i+1}=O(1) \tag{46}$$

достаточно для того, чтобы имело место

а) *соотношение* $\varepsilon\in(X_1,W^iX)$ *при четных* i,

б) *соотношение* $\varepsilon\in(X_1,{}^cW^iX)$ *при нечетных* i.

Доказательство аналогично доказательству предложения 7.

Следствие 15.1. *При* $\mu_n=n^\alpha$, $\alpha\in(0,1)$ *выполнение условий* (44), (45) *и* (46) *достаточно для того, чтобы имели место соотношения*

а) $\varepsilon\in(L^p,W^i\,\mathrm{Lip}(\alpha,p))$ *при* $p\in[1,\infty]$;

б) $\varepsilon\in(dV,W^i\,\mathrm{Lip}(\alpha,1))$.

Доказательство следует из предложении 15 и 6, и из леммы 1А. г).

Литература

1. Бари Н. К., Тригонометрические ряды, Москва, 1961.
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
3. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1. Москва, 1965.
4. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов λ-ограниченных методами Риса и Чесаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 130—154.
5. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора—Харди для заданной скорости, I. Изв. АН ЭстССР. Физ., Матем., 1969, 18, № 2, 137—146.
6. Сикк Я., О T^λ-дополнительных пространствах рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **355**, 222—235.
7. Стечкин С. Б., О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, **20**, 197—206.
8. Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.
9. Тыннов М., T-дополнительные пространства коэффициентов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 65—81.
10. Тыннов М., Множители суммируемости, коэффициенты Фурье и мультипликаторы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 82—97.
11. Goes G., Charakterisierung von Fourierkoeffizienten mit einem Summierbarkeitsfaktorentheoreme und Multiplikatoren. Studia math., 1960, **19**, 133—148.
12. Butzer P. L., Scherer K., On the fundamental approximation theorems of D. Jackson and S. N. Bernstein and the theorems of M. Zamansky and S. B. Stečkin. Aequatines math. 1969, **3**, 170—185.
13. Kralik D., Über die Approximationstheoretiche charakterisierung gewisser Funktionenklassen mit Hilfe der Rieszschen Mittel von Fourierreihen. Acta math. sci. hung. 1969, **20**, 361—373.
14. Kralik D., Über die Charakterisierung gewisser Funktionenklassen durch Approximation mit Rieszschen Mitteln von Fourierreihen. Studia sci. math. hung. 1970, **5**, 327—337.

Поступило
15 I 1975

MÕNINGATEST T^λ-KONSTRUKTIIVSETEST RUUMIDEST JA $(X_{T_\lambda}, X_{U_\mu})$ KLASSI MULTIPLIKAATORITEST

J. Sikk

Resümee

Töös vaadeldakse konkreetsete T^λ-konstruktiivsete ruumide omadusi (vt. [6], definitsioon 2). Toetudes nendele omadustele ja kasutades summeruvustegureid kiiruse juhul [4, 5], leitakse piisavad tingimused $(X_{T_\lambda}, X_{U_\mu})$ klassi multiplikaatorite jaoks.

Töös on tõestatud järgmine tulemus.

Olgu täidetud tingimused (38)—(40); α, $\beta \in (0, 1)$ *ning* $p \in [1, \infty]$. Sellisel juhul $\varepsilon \in (\mathrm{Lip}(\alpha, p), \mathrm{Lip}(\beta, p))$.

Analoogilised tulemused on artiklis saadud multiplikaatorite klasside $(W^i \mathrm{Lip}(\alpha, p),\ W^j \mathrm{Lip}(\beta, p))$; $(W^iL^p,\ W^jL^p)$; $(W^iL^p,\ L^p)$; $(\mathrm{Lip}(\alpha, p),\ W^j \mathrm{Lip}(\beta, p))$ jne. kohta.

ABOUT SOME T^{λ}-CONSTRUCTIVE SPACES AND MULTIPLIERS OF CLASS $(X_{T_{\lambda}}, X_{U_{\mu}})$

J. Sikk

Summary

In this paper we examine some properties of T^{λ}-constructive spaces (see [6], summary). We see that some of these properties are similar to the properties of some classes of Lipschitz functions or its subclasses. It is shown in the article that some classes of Lipschitz functions and its subclasses are also T^{λ}-constructive spaces (for example $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ and $W^{i}\mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ for $\alpha\in(0,1)$ and $p\in(1,\infty)$.

We also find some effective sufficient conditions for multipliers of class $(X_{T_{\lambda}}, X_{U_{\mu}})$. The major tools used to find these conditions are the summability factors of class $(T^{\lambda_0}, U^{\mu_0})$, investigated by Prof. G. Kangro [4, 5].

For instance, the following result or multipliers is proved (see corollary 13.1).

The conditions (38)—(40) *are sufficient for multipliers of class* $(\mathrm{Lip}\,(\alpha,p), \mathrm{Lip}\,(\beta, p))$ for $\alpha, \beta\in(0, 1)$ and $p\in[1, \infty]$.

Analogous results are proved for the following classes of multipliers — $(W^{i}\,\mathrm{Lip}\,(\alpha, p),\ W^{j}\,\mathrm{Lip}\,(\beta, p))$; $(W^{i}L^{p}, W^{j}L^{p})$; $(W^{i}L^{p}, L^{p})$; $(\mathrm{Lip}\,(\alpha, p), W^{j}\,\mathrm{Lip}\,(\beta, p))$; etc..

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ, T^λ-ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Я. Сикк

Кафедра математического анализа

Гёс [5] и Тыннов [4] показали, что в случае некоторых[1] X и Y классы[2] мультипликаторов (X, Y) описываются при помощи коэффициентов Фурье функций классов (X, T). В первой части настоящей статьи показываются, что аналогичная характеристика имеет место для мультипликаторов классов $(X_{T\lambda}, Y_{U\mu})$. А именно, выясняется, что для некоторых X и Y орудием нахождения мультипликаторов класса $(X_{T\lambda}, Y_{U\mu})$ являются коэффициенты Фурье функций T^λ-дополнительного пространства. Из этого вытекает надобность изучения коэффициентов Фурье функций класса (X, T^λ), чему и посвящена вторая часть настоящей статьи.

1. Обозначая

$$K^\circ = \sum \varepsilon_k \cos kt,$$

имеет место следующий результат.

Предложение 1. *Пусть X является инвариантным относительно сдвига BK-пространством и P плотным в X; тогда для того, чтобы ε являлась мультипликатором класса $(X, C_{T\lambda})$, необходимо и достаточно, чтобы $K^\circ \in (X, T^\lambda)$.*

Доказательство. Необходимость. Если $\varepsilon \in (X, C_{T\lambda})$, то при каждом $f^\circ = (a_k, b_k) \in X$ ряд

$$(\varepsilon f)^\circ = \sum_k \varepsilon_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \in C_{T\lambda}.$$

Следовательно, $\Sigma \varepsilon_k a_k$ является T^λ-ограниченным при каждом $f^\circ \in X$ и по определению T^λ-дополнительного пространства $K^\circ \in (X, T^\lambda)$.

---

[1] В настоящей статье сохраняются обозначения и определения статьи [1], кроме понятия пространства L^∞. В интересах краткости формулировки результатов, целесообразно определить $L^\infty = C$.

[2] Последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$ называется *мультипликатором класса* (X, Y) (обозначаем $\varepsilon \in (X, Y)$), если $(\varepsilon_k a_k, \varepsilon_k b_k) \in Y$ при каждом $(a_k, b_k) \in X$.

Достаточность. Если $K^\circ \in (X, T^\lambda)$ и P является плотным в X, то в силу теоремы Банаха — Штейнгауза предельный оператор

$$\lim_n \langle f^\circ, \sigma_n(K^\circ(x-t))\rangle = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk} a_k \varepsilon_k \cos kt$$

является линейным и непрерывным. Следовательно,

$$\lambda_n \| \langle f^\circ, \sigma_n K^\circ(x-t) - \lim_n \langle f^\circ, \sigma_n K^\circ(x-t)\rangle \|_C \leqslant$$

$$\leqslant \|f^\circ\|_X \; \| \; \|K^\circ(x-t)\|_{(X,T^\lambda)} \|_C.$$

Но так как X является инвариантным относительно сдвига BK-пространством, то и (X, T^λ) является инвариантным относительно сдвига BK-пространством (см. [1], предложение 12). Следовательно,

$$\|f^\circ\|_X \; \| \; \|K^\circ(x-t)\|_{(X,T^\lambda)} \|_C = \|f^\circ\|_X \; \|K^\circ\|_{(X,T^\lambda)} = O(1),$$

откуда вытекает, что $\varepsilon f \in C_{T\lambda}$. Предложение доказано.

Следствие 1.1. *Пусть T удовлетворяет условию*

$$\sup_n \int_0^\pi |\tau_{n0}/2 + \sum_{k=1}^{n} \tau_{nk} \cos ku| \, du < \infty. \tag{1}$$

Последовательность ε тогда и только тогда является мультипликатором класса

1) $(L_\Phi, C_{T\lambda})$, *если* $K^\circ \in L_{\Psi T\lambda}$;
2) $(L^p, C_{T\lambda})$, *если* $K^\circ \in L^q{}_{T\lambda}$ *при* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $1/q + 1/p = 1$.

Доказательство следует из вышеприведенного предложения 1 и из предложения 7 статьи [2].

Следствие 1.2. *Пусть T удовлетворяет условию* (1). *Последовательность ε тогда и только тогда является мультипликатором класса*

1) $(L_{\Phi T\lambda}, C_{U\mu})$, *если* $K^\circ \in (L_{\Phi T\lambda}, U^\mu)$;
2) $(L^p{}_{T\lambda}, C_{U\mu})$, *если* $K^\circ \in (L^p{}_{T\lambda}, U^\mu)$ *при* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Доказательство. Проверим, что условия предложения 1 выполнены. Действительно, в пространствах типа $X_{T\lambda}$ множество P всегда является плотным. Когда T удовлетворяет условию (1), тогда инвариантность относительно сдвига пространства $X_{T\lambda}$ при $X = L^p$ с $1 \leqslant p \leqslant \infty$ или L_Φ следует из предложений 7 и 12 статьи [1]. Теперь верность следствия 1.2 вытекает из предложения 1.

Следствие 1.3. *Пусть T и U удовлетворяют условию* (1). *Последовательность тогда и только тогда является мультипликатором класса*

1) $(L_{\Phi T\lambda}, C)$, *если* $K^\circ \in (L_{\Phi T\lambda}, U)$;
2) $(L^p{}_{T\lambda}, C)$, *если* $K^\circ \in (L^p{}_{T\lambda}, U)$ *при* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Следствие 1.4. *Пусть* $\alpha, \beta \in (0,1)$ *и* $\lambda(\alpha+i) = \{n^{i+\alpha}\}$ *при* $i = 1, 2, \ldots$. *Пусть, кроме того,* $U(i) = Z^{i+1}$ — *метод Зигмунда порядка* $i+1$. *Последовательность* ε *тогда и только тогда является мультипликатором*[3] *класса*[4]

1) (W^iL^p, W^jC), *если* $K^\circ \in (W^iL^p, U(j)^{\lambda(j)})$;

2) $(L^p, W^i \operatorname{Lip}(\alpha, \infty))$, *если* $K^\circ \in W^i \operatorname{Lip}(\alpha, q)$ *при* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $1/q + 1/p = 1$;

3) $(W^iL^p, W^j \operatorname{Lip}(\alpha, \infty))$, *если* $K^\circ \in (W^iL^p, U(j)^{\lambda(j+\alpha)})$;

4) $(W^i \operatorname{Lip}(\alpha, p), W^j \operatorname{Lip}(\beta, \infty))$, *если* $K^\circ \in (W^i \operatorname{Lip}(\alpha, p), U(j)^{\lambda(j+\beta)})$.

Доказательство следует из вышеприведенных следствий 1.1.—1.4. и предложения 6 статьи [2].

Предложение 2. *Пусть* X — *одно из пространств* $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *или* L_Φ, *тогда*

$$(M, (X, T^\lambda)) = (C, (X, T^\lambda)). \tag{2}$$

Доказательство. Включение $(M, (X, T^\lambda)) \subset (C, (X, T^\lambda))$ следует из того, что $C \subset M$. Остается показать, что $(C, (X, T^\lambda)) \subset \subset (M, (X, T^\lambda))$. Пусть $f^\circ \in C$. По предложению 11 статьи [1] следует, что $(\varepsilon f)^\circ \in (X, T^\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_n \|T_n(f)\|_{X^*_{T\lambda}} = \|\sigma_n(\varepsilon f)\|_{X^*_{T\lambda}} = O(1).$$

Но по принципу равномерной ограниченности получаем, что

$$\sup_n \|T_n(f)\|_{X^*_{T\lambda}} = O(1) \, \|f^\circ\|_C \tag{3}$$

для каждого $f^\circ \in M$. Следовательно, $(C, (X, T^\lambda)) \subset (M, (X, T^\lambda))$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть* X — *одно из пространств* L^p *с* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *или* C. *Тогда*

$$(dV, (X, T^\lambda)) = (L, (X, T^\lambda)), \tag{4}$$

и условие $K^\circ \in (X, T^\lambda)$ *является необходимым для того, чтобы* $\varepsilon \in (dV, (X, T^\lambda))$.

Доказательство. Равенство (4) получается аналогично равенству (2). Условие $K^\circ \in (X, T^\lambda)$ является необходимым для $\varepsilon \in (dV, (X, T^\lambda))$, потому что $\Sigma \cos kx \in dV$.

Предложение 4. *Пусть* T *и* U — *методы суммирования. Если*[5] $\varepsilon_h \in (T, U^\lambda)$, *то* ε *является мультипликатором классов* $((X, T), (X, U^\lambda))$ *и* $(X, ((X, T), U^\lambda)$.

---

[3] Через W^iX обозначаем пространство всех f, для которых $f^{(i)} \in X$.

[4] Через $\operatorname{Lip}(\alpha, p)$ при $p \in [1, \infty]$ и $\alpha \in (0, 1)$ обозначаем множество всех $f \in L^p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, для которых

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p = O(|h|^\alpha).$$

[5] Понятия множителей суммируемости классов $(T^{\lambda_0}, U^{\mu_0})$, (T^{λ_0}, U_0), (T^{λ_0}, U) и (T, U^{λ_0}) даны в работе [2].

Доказательство. Проверим, что в предположении предложения 4 имеем $\varepsilon \in ((X, T),\ (X, U^{\lambda}))$. Если $f^{\circ} \in (X, T)$, то

$$\langle \sigma_n f, g\rangle = \sum_k \tau_{nk}(a_k c_k + b_k d_k)$$

сходится при каждом $g^{\circ} \in X$. Так как $\varepsilon_k \in (T, U^{\lambda})$, то при каждом $f^{\circ} \in (X, T)$ последовательность

$$\langle \sigma_n(\varepsilon f), g\rangle = \sum_k u_{nk}\varepsilon_k(a_k c_k + b_k d_k)$$

является λ-ограниченным. Следовательно, $\varepsilon \in ((X, T),\ (X, U^{\lambda}))$. Отношение $\varepsilon \in (X, ((X, T), U^{\lambda}))$ доказывается аналогично.

2. Из предложений 1 и 3 и следствий 1.1—1.4 вытекает, что мультипликаторы класса $(X_{T\lambda},\ Y_{U\mu})$ связаны коэффициентами Фурье классов функций $X_{T\lambda}$ и $(X_{T\lambda}, U^{\mu})$. Из этого следует надобность изучения условий для того, чтобы $f^{\circ} \in X_{T\lambda}$ или $f^{\circ} \in (X_{T\lambda}, U^{\mu})$, чему посвящена последняя часть работы.

Лемма 1. *Если X состоит из всех функций f, для которых $f^{\circ} = (c_k, 0) = \Sigma c_k \cos kx$ и Σc_k является T-суммируемым (T-ограниченным или T^{λ}-ограниченным), то U^{μ}-дополнительное пространство (X, U^{μ}) состоит из всех функций g с рядом Фурье $g^{\circ} = (a_k, 0)$, для которых a_k являются множителями суммируемости класса $(T, U^{\mu}{}_0)$ (соответственно $(T_0, U^{\mu}{}_0)$ или $(T^{\lambda}{}_0, U^{\mu}{}_0)$).*

Лемма 2. *Если $X \subset Y$ и все T^{λ}-ограниченные ряды U^{μ}-ограничены, то $(Y, T^{\lambda}) \subset (X, U^{\mu})$.*

Доказательства лемм 1 и 2 непосредственно следуют из определения пространства (Y, T^{λ}) (см. [1], определение 4).

Лемма 3. *Пусть метод суммирования T удовлетворяет условию (1). Тогда и только тогда $f^{\circ} \in M$, когда имеет место $\|\sigma_n f^{\circ}\|_C = O(1)$.*

Доказательство см. следствие 2 статьи [4].

Предложение 5. *Пусть T удовлетворяет условию (1) и $\varepsilon_k \in (T_0, U^{\lambda}{}_0)$. Тогда $K^{\circ} \in (M, U^{\lambda})$.*

Доказательство следует из лемм 1, 2 и 3.

Следствие 5.1. *Пусть T удовлетворяет условию (1) и $U = Z^{i+1}$ — метод Зигмунда порядка $i+1$. Пусть, кроме того, $\lambda = \{n^{i+\alpha}\}$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\alpha \in (0, 1)$.*

а) *Если $\varepsilon_k \in (T_0, U^{\lambda}{}_0)$, то $K^{\circ} \in W^i \operatorname{Lip}(\alpha, 1)$,*

б) *Если $k\varepsilon_k \in (T_0, U^{\lambda}{}_0)$, то $\Sigma\, \varepsilon_k \sin ux \in W^i \operatorname{Lip}(\alpha, \infty)$.*

Доказательство. а) Пусть T удовлетворяет условию (1) и $\varepsilon_k \in (T_0, U^{\lambda}{}_0)$. Тогда из предложения 5 вытекает, что $K^{\circ} \in L_{U\lambda}$. В силу предложения 6 статьи [2] при случае, когда $U = Z^{i+1}$ и $\lambda = \{n^{i+\alpha}\}$ имеет место равенство $L_{U\lambda} = W^i \operatorname{Lip}(\alpha, 1)$. Следовательно, $K^{\circ} \in W^i \operatorname{Lip}(\alpha, 1)$.

Утверждение б) доказывается аналогично.

Предложение 6. *Пусть T удовлетворяет условию (1) и $\varepsilon_k \in (T^{\lambda}{}_0, U^{\mu}{}_0)$. Тогда $K^{\circ} \in (C_{T\lambda}, U^{\mu}{}_0)$.*

Доказательство следует из лемм 1 и 2 и определения пространства (X, T^λ).

Следствие 6.1. *Пусть $T = Z^{i+1}$ — метод Зигмунда порядка $i+1$. Пусть, кроме того, $\lambda = \{n^{i+\alpha}\}$ при $i = 1, 2, \ldots$ и $\alpha \in (0, 1)$. Если $\varepsilon_k \in (T^\lambda{}_0, U^\mu{}_0)$, то $K^\circ \in (W^i \operatorname{Lip}(\alpha, \infty), U^\mu{}_0)$.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 5.1 с тем различием, что вместо предложения 5 применяется предложение 6.

Предложение 7. *Пусть метод T сохраняет*[6] *λ-ограниченность. Для того, чтобы $K^\circ \in L^p{}_{T\lambda}$ при $1 < p \leqslant 2$ необходимо, а при $2 \leqslant p < \infty$ достаточно, выполнение условия*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^p k^{p-2} = O(\lambda_n{}^{-1}).$$

Доказательство. Из предложения 1 статьи [2] следует, что в случае, когда T сохраняет λ-ограниченность, $L^p{}_\lambda = L^p{}_{T\lambda}$ при $1 < p < \infty$. Теперь из теоремы А. А. Конюшкова (см. [3], теорема 6) следует требуемое.

Литература

1. Сикк Я., О дополнительных пространствах коэффициентов Фурье со скоростью. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **355**, 222—235.
2. Сикк Я., О некоторых T^λ-конструктивных пространствах и мультипликаторах класса $(X_{T_\lambda}, X_{U_\mu})$. Настоящий сборник, стр. 163—179.
3. Конюшков А. А., Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. Матем. сб., 1958, **44**, 53—84.
4. Тыннов М., Множители суммируемости, коэффициенты Фурье и мультипликаторы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 82—97.
5. Goes G., Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multiplikatoren. Math. Ann., 1959, **137**, 371—384.

Поступило
11 VI 1975

MULTIPLIKAATORID, T^λ-TÄIENDRUUMID JA FOURIER' KORDAJAD

J. Sikk

Resümee

Goes [5] ja M. Tõnnov [4] vaatlesid multiplikaatorite, täiendruumide ja Fourier' kordajate vahelisi seoseid. Käesolevas artiklis vaadeldakse analoogilisi seoseid kiiruse juhul, kasutades autori töid [1, 2].

---

[6] Метод T сохраняет λ-ограниченность, если $T(m^\lambda) \subset m^\lambda$.

ON THE MULTIPLIERS, COMPLEMENTARY SPACES WITH RAPIDITY AND FOURIER' COEFFICIENTS

J. Sikk

Summary

Goes [5] and Tynnov [4] investigated relations between multipliers, complementary spaces and Fourier' coefficients. The purpose of this article is to examine analogous problems for $X_{T\lambda}$ spaces, introduced and investigated by the author [1, 2]. For instance, the following results are proved.

I. *Suppose that T and U satisfy* (1), *then*

a) $\varepsilon \in (L_\Phi, C_{T\lambda})$ *iff* $K^\circ = \sum \varepsilon_k \cos kx \in L_{\psi T\lambda}$;

b) $\varepsilon \in (L_{\Phi T\lambda}, C_{U\mu})$ *iff* $K^\circ \in (L_{\Phi T\lambda}, U^\mu)$;

c) $\varepsilon \in (L_{\Phi T\lambda}, C)$ *iff* $K^\circ \in (L_{\Phi T\lambda}, U)$;

d) $\varepsilon \in (L^p, C_{T\lambda})$ *iff* $K^\circ \in L^q{}_{T\lambda}$ *for* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *and* $1/p + 1/q = 1$;

e) $\varepsilon \in (L^p{}_{T\lambda}, C_{U\mu})$ *iff* $K^\circ \in (L^p{}_{T\lambda}, U^\mu)$;

f) $\varepsilon \in (L^p{}_{T\lambda}, C)$ *iff* $K^\circ \in (L^p{}_{T\lambda}, U)$.

II. *Let* $X = L^p$ *or* C, *then*

a) $(M, (X, T^\lambda)) = (C, (X, T^\lambda))$;

b) $(dV, (X, T^\lambda)) = (L, (X, T^\lambda))$.

III. *Let T satisfy* (1). *Suppose* $U = Z^{i+1}$ *where* $i = 1, 2, \ldots$ *and* $\in (0, 1)$, *then*

a) $K^\circ \in W^i \operatorname{Lip}(\alpha, 1)$ *if* $\varepsilon_k \in (T_0, U^{\lambda}{}_0)$;

b) $K^\circ \in (C_{T\lambda}, U^{\mu}{}_0)$ *if* $\varepsilon_k \in (T^{\lambda}{}_0, U^{\mu}{}_0)$.

О РАВНОСИЛЬНОСТИ МЕТОДОВ ЧЕЗАРО И АБЕЛЯ СУММИРОВАНИЯ СО СКОРОСТЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Ю. Липпус

Кружок СНО при кафедре математического анализа

В настоящей работе рассмотрим при какой скорости суммирования эти методы равносильны почти всюду, если ряд, составленный из квадратов коэффициентов, сходится с некоторой скоростью. В своей трактовке мы опираемся на статью [4], в которой рассматривается равносильность регулярных методов Чезаро при суммировании со скоростью ортогональных рядов.

В пункте 1 мы определим некоторые понятия, необходимые в дальнейшем. В пункте 2 рассмотрим соотношения между методами Чезаро и Абеля при суммировании со скоростью числовых рядов. В пункте 3 докажем основную теорему.

1. Обозначения и определения

Положительную неубывающую числовую последовательность[1] $\lambda = \{\lambda_n\}$ мы назовем *скоростью*. Если λ некоторая скорость, то определим $\lambda^\alpha = \{\lambda^\alpha{}_n\}$.

Последовательность $\{\xi_k\}$ мы назовем *сходящейся* к пределу ξ *со скоростью* λ, если $\lambda_k(\xi_k - \xi) = o(1)$.

Для произвольного числового ряда

$$\sum u_k \tag{1}$$

обозначим через $\sigma^\alpha{}_n$ его чезаровские средние порядка α.

Будем говорить, что ряд (1) *суммируем методом Чезаро* (C, α) *со скоростью* λ к числу s, или (C^λ, α)-суммируем, и писать $\Sigma u_k = s(C^\lambda, \alpha)$, если

$$\lambda_n(\sigma^\alpha{}_n - s) = o(1). \tag{2}$$

В дальнейшем будем обозначать $\sigma^1{}_n = \sigma_n$.

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают значения $0, 1, 2, \ldots$.

Будем говорить, что ряд (1) *суммируем методом Абеля со скоростью* λ к числу s, или A^{λ}-суммируем, если

$$(\sum u_k x^k - s) = o(1), \tag{3}$$

$$\lambda_n \left[\sum_k u_k \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k - s \right] = o(1). \tag{4}$$

В дальнейшем будем рассматривать ортогональные ряды

$$\sum_k c_k \varphi_k(x) \tag{5}$$

на произвольном отрезке $[a, b]$. Понятие ортогональности определяем с помощью интеграла Стилтьеса—Лебега: система

$$\{\varphi_n\} \subset L^2{}_\mu = \{f\colon \int_a^b f^2(x)\, d\mu(x) < \infty\}$$

называется *ортогональной*, если

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x)\, d\mu(x) = \delta_{kl},$$

где μ — определенная на отрезке $[a, b]$ положительная, ограниченная, монотонно возрастающая функция, производная которой обращается в нуль только на множестве, мера Лебега которого равняется нулю. Поэтому мера Лебега каждого μ-нуль множества тоже нуль. В дальнейшем под выражением «*почти всюду*» (сокращенно *п. в.*) будем понимать «всюду на отрезке $[a, b]$, за исключением нуль-множества в смысле Лебега».

В настоящей работе в основном будем рассматривать скорости λ из класса Λ_C, где

$$\Lambda_C = \left\{ \lambda\colon \frac{\lambda_n (k+1)^\tau}{\lambda_k (n+1)^\tau} = O(1) \right\}$$

при некотором $\tau \in (0, 1/2)$; $n, k = 0, 1, 2, \ \ldots\ , k \leqslant n$.

2. Вспомогательные результаты

Следующие леммы относятся к суммируемости числовых рядов.

Лемма 1. *Пусть* $\lambda^{1/2} \in \Lambda_C$. *Тогда из* $(C^\lambda, 1)$*-суммируемости ряда* (1) *следует его* A^λ*-суммируемость.*

Доказательство. Можем считать, что $\Sigma u_k = 0(C^\lambda, 1)$ (см. [1], стр. 84). Ряд $\Sigma_k u_k [1 - (n+1)^{-1}]^k$ можем записать в виде

$$\frac{1}{(n+1)^2} \sum_k A^1{}_k \sigma_k \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k$$

(см. [1], стр. 77). Учитывая, что $A^1{}_k = k + 1$, нам остается показать, что матрица (α_{nk}), где

$$a_{nk}=\frac{\lambda_n(k+1)}{\lambda_k(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k,$$

переводит все нуль-последовательности в нуль-последовательности. Для этого (см. [3], стр. 14) необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $\lim\limits_{n} a_{nk}=0$,

2) $\sum\limits_{k} a_{nk}=O(1)$.

Выполнение условия 1) вытекает из того, что $\lambda^{1/2}\in\Lambda_C$, т. е. $\lambda_n=O((n+1)^{2\tau})$, где $\tau\in(0, 1/2)$.

Проверим выполнение условия 2). Имеем

$$\sum_k \frac{\lambda_n(k+1)}{\lambda_k(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_n(k+1)}{\lambda_k(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda_n(k+1)}{\lambda_k(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k=$$

$$=O\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)^{1-2\tau}}{(n+1)^{2-2\tau}}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k+1}{(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)^2}\right)=O(1),$$

ибо $1-2\tau>0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если ряд* (1) *является A^λ-суммируемым при некоторой $\lambda\in\Lambda_C$, то из условия $\Sigma k u^2{}_k\lambda^2{}_k<\infty$ вытекает сходимость ряда* (1) *со скоростью λ.*

Доказательство. Сходимость ряда (1) со скоростью λ означает, что $\lambda_n(s_n-s)=o(1)$. Обозначим

$$\varepsilon_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}ku^2{}_k\lambda^2{}_k.$$

Выберем натуральные числа ν_n так, что $\nu_n\geqslant n$ и найдется константа $\delta>0$ такая, что выполняется условие

$$\delta\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n+1}\leqslant\frac{1}{\nu_n+1}\leqslant\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n+1}.$$

Тогда получаем оценки:

$$\lambda_n(s_n-s)=\lambda_n\left[s_n-\sum_k u_k\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^k\right]+$$

$$+\frac{\lambda_n}{\lambda_{\nu_n}}\lambda_{\nu_n}\left[\sum_k u_k\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^k-s\right]=$$

$$=\lambda_n\left[s_n-\sum_k u_k\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^k\right]+o(1),$$

так как $\lambda_n\leqslant\lambda_{\nu_n}$ и ряд (1) является A^λ-суммируемым.

Первый член оценим следующим образом:

$$\lambda_n\left|s_n-\sum_k u_k\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^k\right|\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_n\sum_{k=0}^{n}|u_k|\left(1-\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^k\right)+\lambda_n\sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k|\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^k\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_n\sum_{k=0}^{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)\right]|u_k|\left(1+\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^{k-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\sqrt{k}\,\lambda_k|u_k|\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^k\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\varepsilon_n}\frac{\lambda_n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\lambda_k}\sqrt{k}\,\lambda_k|u_k|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\sqrt{k}\,\lambda_k|u_k|\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^k.$$

Используя неравенство Коши, получаем:

$$\lambda^2_n\left(s_n-\sum_k u_k\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^k\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon_n\frac{\lambda^2_n}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\lambda^2_k}\sum_{k=0}^{n}ku^2_k\lambda^2_k+$$

$$+\frac{2}{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}k\lambda^2_k u^2_k\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^k\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon_n \frac{\lambda^2{}_n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda^2{}_k} \sum_{k=0}^{n} k u^2{}_k \lambda^2{}_k + \frac{2\varepsilon_n}{n+1} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)^{n+1}}{1-\left(1-\frac{1}{\nu_n+1}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_n \cdot O(1) + \frac{2\varepsilon_n}{n+1} \cdot \frac{1}{\delta \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n+1}} = \varepsilon_n \cdot O(1) + \frac{2}{\delta} \sqrt{\varepsilon_n} = o(1),$$

так как условие $\lambda \in \Lambda_C$ равносильно условию

$$\frac{\lambda^2{}_n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda^2{}_k} = O(1) \tag{6}$$

(см. [2]). Лемма доказана.

При использовании леммы 2 оказывается полезным нижеприведенный результат.

Лемма 3. *Если ряд* (1) *является* A^λ*-суммируемым, то ряд* $\Sigma(\sigma_k - \sigma_{k-1})$ *также* A^λ*-суммируем*[2].

Доказательство. Рассмотрим вместе со скоростью λ непрерывную монотонно возрастающую функцию $\lambda(x)$, определенную на интервале $[0, 1)$ и удовлетворяющую условию.

$$\lambda\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \lambda_n.$$

Пусть ряд (1) является A^λ-суммируемым к s. Тогда (см. [1] стр. 83)

$$\sum_k (k+1)\sigma_k x^k - \frac{s}{(1-x)^2} = o\left(\frac{1}{\lambda(x)(1-x)^2}\right).$$

Справедлива оценка:

$$(1-r)\sum_k \sigma_k r^k - s = \frac{1-r}{r} \int_0^r \left[\sum_k (k+1)\sigma_k x^k - \frac{s}{(1-x)^2}\right] dx =$$

$$= o\left(\frac{1-r}{r} \int_0^r \frac{dx}{\lambda(x)(1-x)^2}\right),$$

где $r \to 1-$.

---

[2] Условимся считать $\sigma_{-1} = 0$.

Используем следующий результат, доказанный в работе [2]. Пусть дана функция $\varphi(t)$ такая, что выполняются условия:

1) $\varphi(t)$ непрерывна на интервале $(0,\pi]$;
2) $\varphi(t)$ монотонно возрастает;
3) $\varphi(t)\neq 0$ при каждом $t\in(0,\pi]$;
4) $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=0$.

Тогда из оценки

$$\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{1}{k}\right)=O\left(n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{7}$$

следует оценка

$$\int_{\delta}^{\pi}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt=O\left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\right),\qquad (\delta>0).$$

Функция $1/\lambda(1-t)$ удовлетворяет приведенным требованиям на интервале $(0,1]$. Так как $\lambda\in\Lambda_C$, то из формулы (6) следует, что выполняется условие (7). Тогда справедлива оценка

$$\int_{0}^{r}\frac{dx}{\lambda(x)(1-x)^2}=\int_{1-r}^{1}\frac{dt}{\lambda(1-t)t^2}=O\left(\frac{1}{\lambda(r)(1-r)}\right).$$

Мы получаем, что

$$(1-r)\sum_{k}\sigma_k r^k-s=o\left(\frac{1}{\lambda(r)}\right),$$

или, полагая $r=1-\dfrac{1}{n+1}$,

$$\lambda_n\left(\sum_{k}(\sigma_k-\sigma_{k-1})\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k-s\right)=o(1).$$

Лемма доказана.

3. Основная теорема

Теорема. *Если $\lambda\in\Lambda_C$ и ряд $\sum\lambda^2{}_k c^2{}_k$ сходится, то A^{λ}-суммируемость п. в. ряда* (5) *равносильна его* (C^{λ},α)*-суммируемости п. в. при любом* $\alpha>0$.

Доказательство. В статье [4] доказана теорема о том, что при сделанных предположениях из (C^{λ},β)-суммируемости п. в. ряда (5) при некотором $\beta>0$ следует его (C^{λ},α)-суммируемость п. в. при любом $\alpha>0$. По лемме 1 из $(C^{\lambda},1)$-суммируемости п. в. ряда (5) следует его A^{λ}-суммируемость п. в.

Для доказательства обратного утверждения заметим сначала, что, так как $\lambda \in \Lambda_C$, найдется константа $M > 0$ такая, что $\lambda_{n+1} \leqslant M\lambda_n$ и справедлива оценка

$$\sum_n \frac{\lambda^2{}_n}{(n+1)^3} \sum_{k=0}^{n} k^2 c^2{}_k < \infty$$

(см. [4], стр. 234). Из равенства

$$\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k c_k \varphi_k(x)$$

(см. [1], стр. 118), вышеприведенных оценок и сходимости ряда $\sum \lambda^2{}_k c^2{}_k$ получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b n\lambda^2{}_n [\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)]^2 d\mu(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2{}_n}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 c^2{}_k = \sum_n \frac{\lambda^2{}_{n+1}}{(n+1)^3} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 c^2{}_k \leqslant$$

$$\leqslant M^2 \sum_n \frac{\lambda^2}{(n+1)^3} \sum_{k=0}^{n} k^2 c^2{}_k + \sum_n \frac{1}{n+1} \lambda^2{}_{n+1} c^2{}_{n+1} < \infty.$$

Следовательно, по теореме Леви, п. в. сходится ряд

$$\sum_k k^2 \lambda^2{}_k [\sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)]^2.$$

Тогда по леммам 2 и 3 из A^λ-суммируемости п. в. ряда (5) следует, что п. в. справедлива оценка

$$\lambda_n \Big(\sum_{k=0}^{n} (\sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)) - s(x) \Big) = o_x(1),$$

или иначе

$$\lambda_n (\sigma_n(x) - s(x)) = o_x(1).$$

Следовательно, ряд (5) является $(C^\lambda, 1)$-суммируемым п. в. Теорема доказана.

Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Бари Н. К., Стечкин С. В., Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, 5, 483—522.
3. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
4. Мартин Э., О суммируемости со скоростью ортогональных рядов методами Эйлера—Кноппа и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 222—237.

Поступило
27 V 1975

CESÄRO JA ABELI MENETLUSTE SAMAVÄÄRSUSEST ORTOGONAALRIDADE KIIRUSEGA SUMMEERUVUSE SUHTES PEAAEGU KÕIKJAL

J. Lippus

Resümee

Rida (1) nimetatakse $(C\lambda, \alpha)$-summeeruvaks arvuks s, kui on täidetud tingimus (2), kus σ^{α}_n tähistab antud rea (C, α)-keskmist ja $\lambda = \{\lambda_n\}$ on positiivne mittekahanev arvjada. Rida (1) nimetatakse $A\lambda$-summeeruvaks arvuks s, kui kehtib tingimus (4). Käesolevas artiklis näidatakse, et kui $\alpha > 0$, rida $\Sigma \lambda^2_k c^2_k$ koondub ja $\lambda \in \Lambda_C$, siis menetlused $A\lambda$ ja $(C\lambda, \alpha)$ on ortogonaalridade (5) summeerimisel peaaegu kõikjal samaväärsed.

ON THE EQUIVALENCE OF THE CESÀRO AND ABEL METHODS IN THE SUMMABILITY WITH SPEED OF ORTHOGONAL SERIES

J. Lippus

Summary

The series (1) is said to be $(C\lambda, \alpha)$-summable to s, if the condition (2) is fulfilled, where σ^{α}_n denotes the (C, α)-means of the series (1) and $\lambda = \{\lambda_n\}$ is a positive increasing sequence. The series (1) is said to be $A\lambda$-summable to s, if the condition (4) is fulfilled. In the present note it is shown that if $\alpha > 0$, the series $\Sigma \lambda^2_k c^2_k$ is convergent and $\lambda \in \Lambda_C$, then the methods A and $(C\lambda, \alpha)$ are equivalent in the summability of orthgonal series (5) almost everywhere.

О СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

П. Оя

Кафедра вычислительной математики

В ряде работ изучена сходимость [1, 3, 9, 10] и устойчивость [2, 4, 8, 11] метода Галеркина в задаче Коши для абстрактных параболических уравнений $u'(t)+A(t)u(t)=f(t)$, $u(0)=\xi$ в гильбертовом пространстве. Достаточно общие условия для существования и единственности решения таких задач установлены Ж.-Л. Лионсом [7]. Однако, при самосопряженном, положительно определенном, дифференцируемом по t операторе $A(t)$ многие результаты из цитированных работ можно усилить.

В настоящей статье мы укажем при некоторых ограничениях на производную $A(t)$, в каких нормах оператор $d/dt+A(t)$ является изоморфизмом между пространствами решений и входных данных f и ξ. Для метода Галеркина устанавливается сходимость приближенных решений в норме, в которой оценивается решение начальной задачи через входные данные. Погрешность галеркинского приближения двусторонне оценивается через наилучшие приближения к решению начальной задачи в подпространствах приближенных решений.

Для исследования устойчивости возмущение галеркинского приближения оценивается сверху через все и снизу через отдельные возмущения, неизбежные при численной реализаций приближенной задачи в виде системы дифференциальных уравнений. Оценки опираются на то, что приближенные задачи задают равномерные изоморфизмы между пространствами приближенных решений и проекций входных данных. Устанавливается необходимое и достаточное условие для устойчивости метода Галеркина.

§ 1. Параболические уравнения с дифференцируемыми операторами

Пусть $A(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ — самосопряженный, положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$, не зависящей от t. Тогда оператор $A(t)A^{-1}(s)$ ограничен в пространстве H при любых $s,t\in[0,T]$.

Если $A(t)$ — сильно непрерывен по t, то оператор $A(t)A^{-1}(0)$ также сильно непрерывен и, по принципу равномерной ограниченности, равномерно по t ограничен в пространстве H.

Предложение 1. *Если $A(t)$ — сильно дифференцируем по t, то оператор $A(0)A^{-1}(t)$ равномерно по t ограничен в пространстве H.*

Доказательство. Так как оператор $A(t)A^{-1}(0)$ равномерно по t ограничен в H, то оператор $A(t)$ ограничен (равномерно по t) как оператор из пространства $H_{A^2(0)}$ в пространство H, в этом смысле понимаем и его норму. Покажем, что $A(t)$ непрерывен по норме.

Выберем $t_0 \in [0, T]$. Из сходимости

$$(\Delta t)^{-1}(A(t_0+\Delta t)-A(t_0))x \to A'(t_0)x, \quad x \in H_{A^2(0)}$$

при $\Delta t \to 0$ следует, что

$$\|(\Delta t)^{-1}(A(t_0+\Delta t)-A(t_0))x\| \leqslant \|A'(t_0)x\|+\varepsilon(x),$$

если $|\Delta t| < \delta$, где δ — некоторое положительное число. По принципу равномерной ограниченности

$$\|(\Delta t)^{-1}(A(t_0+\Delta t)-A(t_0))\| \leqslant \mathrm{const},$$

значит, $A(t)$ непрерывен по норме в точке t_0, а также на отрезке $[0, T]$.

Покажем, что $A^{-1}(t)$ сильно непрерывен. Выберем $t_0 \in [0, T]$. Поскольку $A(0)A^{-1}(t)$ ограничен в H, то $A^{-1}(t_0)$ ограничен как оператор из H в $H_{A^2(0)}$. Так как оператор $A(t)$ непрерывен по норме, то

$$\|A^{-1}(t_0)(A(t_0)-A(t_0+\Delta t))\|_{A^2(0)\to H_{A^2(0)}} = q < 1,$$

если Δt достаточно мало, причем $q \to 0$, если $\Delta t \to 0$. Из тождества

$$A(t_0+\Delta t) = A(t_0)(I - A^{-1}(t_0)(A(t_0)-A(t_0+\Delta t)))$$

получим разложение

$$A^{-1}(t_0+\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty}(A^{-1}(t_0)(A(t_0)-A(t_0+\Delta t)))^k A^{-1}(t_0),$$

следовательно,

$$\|A^{-1}(t_0+\Delta t)-A^{-1}(t_0)\| \leqslant \frac{q}{1-q}\|A^{-1}(t_0)\| \to 0,$$

если $\Delta t \to 0$. Таким образом, оператор $A^{-1}(t)$, действующий из H в $H_{A^2(0)}$, является непрерывным по норме, а также сильно непрерывным. Тем самым, оператор $A(0)A^{-1}(t)$ сильно непрерывен в пространстве H и, следовательно, равномерно ограничен.

Предложение доказано.

Из равномерной ограниченности операторов $A(t)A^{-1}(0)$ и $A(0)A^{-1}(t)$ в H следует равномерная ограниченность операторов $A^{1/2}(t)A^{-1/2}(0)$ и $A^{1/2}(0)A^{-1/2}(t)$ в H (см. [6], стр. 178, 228).

Отождествляем H с его двойственным пространством и обозначим через $H_{A(0)}'$ пространство, двойственное к $H_{A(0)}$ по скалярному произведению пространства H. Тогда

$$H_{A^2(0)} \subset H_{A(0)} \subset H \subset H_{A(0)}',$$

где каждое пространство непрерывно вложено в последующее и плотно в нем. Пусть в дальнейшем $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ обозначают норму и скалярное произведение в пространстве H.

Оператор $A(t)$ равномерно ограничен как оператор из $H_{A(0)}$ в $H_{A(0)}'$ с областью определения $D(A)$, его расширение по непрерывности на $H_{A(0)}$ обозначим также через $A(t)$. Существуют положительные постоянные γ и α такие, что

$$(A(t)u, v) \leqslant \gamma \|u\|_{H_{A(0)}} \|v\|_{H_{A(0)}} \quad \forall u, v \in H_{A(0)}, \tag{1.1}$$

$$(A(t)v, v) \geqslant \alpha \|v\|^2_{H_{A(0)}} \quad \forall v \in H_{A(0)}. \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует также, что существует $\varkappa > 0$ такое, что

$$(A(t)v, v) \geqslant \varkappa \|v\|^2 \quad \forall v \in H_{A(0)}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим задачу

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = \xi, \tag{1.4}$$

где f и ξ заданы, $u' = du/dt$ обозначает производную в смысле распределений. Известно (см. [7], стр. 268—269), что задача (1.4) имеет единственное решение $u \in L^2(0, T; H_{A(0)})$, $u' \in L^2(0, T; H_{A(0)}')$ при любых $f \in L^2(0, T; H_{A(0)}')$ и $\xi \in H$.

Покажем, что решение задачи (1.4) содержится в более узком пространстве, если наложить некоторые ограничения на $A'(t)$ и выбрать f и ξ в подпространствах.

Предложение 2. *Предположим, что существует число* $\beta \geqslant 0$ *такое, что*

$$(A'(t)v, v) \leqslant \beta \|v\|^2_{H_{A(0)}} \quad \forall v \in H_{A^2(0)}; \tag{1.5}$$

пусть $f \in L^2(0, T; H)$, $\xi \in H_{A(0)}$. *Тогда для решения* u *задачи* (1.4) *имеют место включения* $u \in L^2(0, T; H_{A^2(0)})$, $u' \in L^2(0, T; H)$ *и неравенство*

$$\left(\frac{1}{2}\int_0^T \|f(t)\|^2 dt + \|A^{1/2}(0)\xi\|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^T (\|u'(t)\|^2 + \|A(t)u(t)\|^2) dt\right)^{1/2} +$$

$$+ \max_{t \in [0,T]} \|A^{1/2}(t)u(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2} \exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\} \left(\int_0^T \|f(t)\|^2 dt + \|A^{1/2}(0)\xi\|^2\right)^{1/2}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Доказательство включений для решения задачи (1.4) приведем в следующем параграфе. Докажем оценку (1.6) в предположении, что $u \in L^2(0, T; H_{A^2(0)})$, $u' \in L^2(0, T; H)$.

Так как

$$(e^{-kt}A(t)u(t), u(t))' =$$
$$= e^{-kt}((A'(t) - kA(t))u(t), u(t)) + 2e^{-kt}(u'(t), A(t)u(t)),$$

то при помощи (1.4) получим

$$\int_0^\tau e^{-kt}\|f(t)\|^2 dt =$$

$$= \int_0^\tau e^{-kt}(\|u'(t)\|^2 + 2(u'(t), A(t)u(t)) + \|A(t)u(t)\|^2) dt =$$

$$= \int_0^\tau e^{-kt}(\|u'(t)\|^2 + \|A(t)u(t)\|^2 + ((kA(t) - A'(t))u(t), u(t)) dt +$$

$$+ (e^{-kt}A(t)u(t), u(t)) \Big|_0^\tau.$$

При $k = \beta/\alpha$ имеем $((kA(t) - A'(t))u(t), u(t)) \geqslant 0$ и

$$\int_0^\tau e^{-kt}(\|u'(t)\|^2 + \|A(t)u(t)\|^2) dt + e^{-k\tau}(A(\tau)u(\tau), u(\tau)) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\tau e^{-kt}\|f(t)\|^2 dt + (A(0)u(0), u(0)),$$

откуда

$$\int_0^T (\|u'(t)\|^2 + \|A(t)u(t)\|^2) dt + \max_{t \in [0,T]} \|A^{1/2}(t)u(t)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\exp\left\{\frac{\beta T}{\alpha}\right\}\left(\int_0^T \|f(t)\|^2 dt + \|A^{1/2}(0)\xi\|^2\right).$$

Оценка (1.6) снизу тривиальна.

Замечание 1. Если $A(t)$ — сильно непрерывно дифференцируем по t на $D(A)$, то условие (1.5) выполнено. Действительно, оператор $A^{1/2}(t)$ является также сильно непрерывно дифференцируемым по t на $D(A^{1/2})$ (см. [6], стр. 231). Тогда операторы $(A^{1/2}(t))'$ и $A^{1/2}(t)$ равномерно по t ограничены из пространства $H_{A(0)}$ в H. Имеем

$$(A'(t)v, v) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(A(t+\Delta t)v - A(t)v, v)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{(A^{1/2}(t+\Delta t)v, A^{1/2}(t+\Delta t)v - A^{1/2}(t)v)}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t\to 0} \frac{(A^{1/2}(t+\Delta t)v - A^{1/2}(t)v, A^{1/2}(t)v)}{\Delta t} =$$

$$= 2((A^{1/2}(t))'v, A^{1/2}(t)v) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \, \|v\|^2_{H_{A(0)}} \qquad \forall v \in H_{A^2(0)}.$$

§ 2. Сходимость и быстрота сходимости метода Галеркина

В этом параграфе исследуем сходимость и быстроту сходимости метода Галеркина для задачи (1.4).

Выберем в пространстве $H_{A^2(0)}$ полную линейно независимую систему $\{w_k\}_1^\infty$, она полна также в пространствах $H_{A(0)}$ и H. Пусть P_n и Q_n — ортопроекторы в H и $H_{A(0)}$ соответственно, проектирующие на линейную оболочку элементов $w_1, \ldots, w_n$. Те же линейные оболочки как пространства с нормами из H и $H_{A(0)}$ мы обозначим через H^n и V^n.

Галеркинское приближение u_n определим из задачи

$$u_n'(t) + P_n A(t) u_n(t) = P_n f(t), \qquad u_n(0) = Q_n \xi. \tag{2.1}$$

Задача (2.1) однозначно разрешима при каждом n.

Теорема 1. *Пусть $A(t)$ — самосопряженный положительно определенный в H оператор с постоянной областью определения и пусть существует сильная производная $A'(t)$, причем*

$$(A'(t)v, v) \leqslant \beta (A(0)v, v) \qquad \forall v \in H_{A^2(0)}, \qquad (\beta \geqslant 0).$$

Пусть заданы $f \in L^2(0, T; H)$, $\xi \in H_{A(0)}$.

Тогда для решений u и u_n задач (1.4) и (2.1) имеют место сходимости

$$\int_0^T \|P_n A(t) u_n(t) - A(t) u(t)\|^2 dt \to 0, \tag{2.2}$$

$$\int_0^T \|u_n'(t) - u'(t)\|^2 dt \to 0, \tag{2.3}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}(t)(u_n(t) - u(t))\| \to 0. \tag{2.4}$$

Справедлива двусторонняя оценка сходимости

$$\max \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^T \|P_n f(t) - f(t)\|^2 dt + \|A^{1/2}(0)(Q_n\xi - \xi)\|^2\right)^{1/2}, e_n(u) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^T (\|u_n'(t) - u'(t)\|^2 + \|P_n A(t) u_n(t) - A(t) u(t)\|^2) dt\right)^{1/2} +$$

$$+ \max_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}(t)(u_n(t) - u(t))\| \leqslant$$

$$\leqslant 4\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\}\left(\int_0^T \|P_nf(t)-f(t)\|^2dt+\|A^{1/2}(0)(Q_n\xi-\xi)\|^2\right)^{1/2}+$$

$$+\sqrt{2}\left(4\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\}+1\right)e_n(u), \qquad (2.5)$$

где

$$e_n(u)=$$

$$=\inf_{v_n\in E_n}\left(\left(\int_0^T(\|v_n'(t)-u'(t)\|^2+\|P_nA(t)v_n(t)-A(t)u(t)\|^2)dt\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\max_{t\in[0,T]}\|A^{1/2}(v_n(t)-u(t))\|\right),$$

$$E_n=\{v_n\mid v_n, v_n'\in L^2(0,T;H^n)\}.$$

Доказательство. Пусть $v_n\in E_n$. Такими же вычислениями, как в доказательстве оценки (1.6) сверху, получаем, что

$$\int_0^\tau e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}(\|v_n'(t)\|^2+\|P_nA(t)v_n(t)\|^2)dt+e^{-\frac{\beta}{\alpha}\tau}(A(\tau)v_n(\tau),v_n(\tau))\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^\tau e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}\|v_n'(t)+P_nA(t)v_n(t)\|^2dt+$$

$$+(A(0)v_n(0),v_n(0)),\qquad \tau\in[0,T],$$

откуда

$$\int_0^T(\|v_n'(t)\|^2+\|P_nA(t)v_n(t)\|^2)dt+\max_{t\in[0,T]}\|A^{1/2}(t)v_n(t)\|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2e^{\frac{\beta T}{\alpha}}\left(\int_0^T\|v_n'(t)+P_nA(t)v_n(t)\|^2dt+\|A^{1/2}(0)v_n(0)\|^2\right). \qquad (2.6)$$

Можно показать, что значение $e_n(u)$ достигается на некотором (даже единственном) элементе u_{0n} из пространства E_n. Имеем

$$\left(\int_0^T(\|u_n'(t)-u'(t)\|^2+\|P_nA(t)u_n(t)-A(t)u(t)\|^2)dt\right)^{1/2}+$$

$$+\max_{t\in[0,T]}\|A^{1/2}(t)(u_n(t)-u(t))\|\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int_0^T(\|u_n'(t)-u_{0n}'(t)\|^2+\|P_nA(t)(u_n(t)-u_{0n}(t))\|^2)dt+\right.$$

$$\left.+\max_{t\in[0,T]}\|A^{1/2}(t)(u_n(t)-u_{0n}(t))\|^2\right)^{1/2}+$$

$$+\sqrt{2}\left(\int_0^T(\|u_{0n}'(t)-u'(t)\|^2+\|P_nA(t)u_{0n}(t)-A(t)u(t)\|^2)dt\right)^{1/2}+$$

$$+\max_{t\in[0,T]}\|A^{1/2}(t)(u_{0n}(t)-u(t))\|.$$

Отсюда, положив $v_n = u_n - u_{0n}$ в (2.6), получим

$$\left(\int_0^T (\|u_n'(t) - u'(t)\|^2 + \|P_n A(t) u_n(t) - A(t) u(t)\|^2)\,dt\right)^{1/2} +$$

$$+ \max_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}(t)(u_n(t) - u(t))\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\}\left(\int_0^T \|u_n'(t) - u_{0n}'(t) + P_n A(t)(u_n(t) - u_{0n}(t))\|^2 dt +\right.$$

$$\left. + \|A^{1/2}(0)(u_n(0) - u_{0n}(0))\|^2\right)^{1/2} +$$

$$+ \sqrt{2}\left(\int_0^T (\|u_{0n}'(t) - u'(t)\|^2 + \|P_n A(t) u_{0n}(t) - A(t) u(t)\|^2)\,dt\right)^{1/2} +$$

$$+ \max_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}(t)(u_{0n}(t) - u(t))\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\}\times$$

$$\times\left(\int_0^T \|P_n f(t) - f(t) + u'(t) - u_{0n}'(t) + A(t) u(t) - P_n A(t) u_{0n}(t)\|^2 dt +\right.$$

$$\left. + \|A^{1/2}(0)(Q_n\xi - \xi + u(0) - u_{0n}(0))\|^2\right)^{1/2} +$$

$$+ \sqrt{2}\left(\int_0^T (\|u_{0n}'(t) - u'(t)\|^2 + \|P_n A(t) u_{0n}(t) - A(t) u(t)\|^2)\,dt\right)^{1/2} +$$

$$+ \max_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}(t)(u_{0n}(t) - u(t))\| \leqslant$$

$$\leqslant 4\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\}\left(\int_0^T \|P_n f(t) - f(t)\|^2 dt + \|A^{1/2}(0)(Q_n\xi - \xi)\|^2\right)^{1/2} +$$

$$+ \sqrt{2}\left(4\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\} + 1\right) e_n(u),$$

этим оценка (2.5) сверху доказана.

Оценка (2.5) снизу проверяется непосредственно.

Остается доказать, что $e_n(u) \to 0$ для решения u задачи (1.4). Покажем, что $e_n(v) \to 0$ для каждого $v \in L^2(0, T; H_{A^2(0)})$, $v' \in L^2(0, T; H)$. Мы воспользуемся неравенством (см. [7], стр. 33)

$$\max_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}(t) x(t)\| \leqslant K\left(\int_0^T (\|x'(t)\|^2 + \|A(t) x(t)\|^2)\,dt\right)^{1/2},$$

в котором постоянная K не зависит от $x \in L^2(0, T; H_{A^2(0)})$, $x' \in L^2(0, T; H)$. Имеем

$$e_n(v) \leqslant \inf_{v_n \in E_n} \{ (\int_0^T (\|v_n'(t) - v'(t)\|^2 + (\|P_n A(t)(v_n(t) - v(t))\| +$$
$$+ \|P_n A(t) v(t) - A(t) v(t)\|)^2) dt)^{1/2} +$$
$$+ \max_{t \in [0,T]} \|A^{1/2}(t)(v_n(t) - v(t))\| \} \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{v_n \in E_n} \{ \sqrt{2} (\int_0^T (\|v_n'(t) - v'(t)\|^2 + \|A(t)(v_n(t) - v(t))\|^2) dt)^{1/2} +$$
$$+ \max_{t \in [0,T]} \|A^{1/2}(t)(v_n(t) - v(t))\| \} +$$
$$+ \sqrt{2} (\int_0^T \|P_n A(t) v(t) - A(t) v(t)\|^2 dt)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}(1+K)\|p_n v - v\|_E + \sqrt{2} (\int_0^T \|P_n A(t) v(t) - A(t) v(t)\|^2 dt)^{1/2},$$

где p_n — ортопроектор и пространстве

$$E = \{ v \mid v \in L^2(0, T; H_{A^2(0)}),\ v' \in L^2(0, T; H) \},$$

проектирующий на E_n, причем в E используется норма

$$\|v\|_E = (\int_0^T (v'(t)\|^2 + \|A(t) v(t)\|^2) dt)^{1/2}.$$

Пусть q_n — ортопроектор в $H_{A^2(0)}$, проектирующий на H^n. Так как множество $\{ w \mid w \in L^2(0, T; H_{A^2(0)}),\ w' \in L^2(0, T; H_{A^2(0)}) \}$ плотно в E (см. [7], стр. 24) и для каждого его элемента w

$$\|p_n w - w\|_E \leqslant \|q_n w - w\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const} (\int_0^T (\|q_n w'(t) - w'(t)\|^2_{H_{A^2(0)}} +$$
$$+ \|q_n w(t) - w(t)\|^2_{H_{A^2(0)}}) dt)^{1/2} \to 0,$$

то $\|p_n v - v\|_E \to 0$ при всех $v \in E$, значит, $e_n(v) \to 0$ при всех $v \in E$.

Теорема доказана.

Завершение доказательства предложения 2. Задача (2.1) как система линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями имеет при каждом n единственное решение $u_n \in E_n$. Так как ${}_0\!\int^T \|P_n f(t) - f(t)\|^2 dt \to 0$ и $\|A^{1/2}(0)(Q_n \xi - \xi)\| \to 0$, то, в силу неравенства (2.6), последовательность решений u_n является последовательностью Коши, например, в пространстве

$$F = \{ v \mid v \in L^2(0, T; H_{A(0)}),\ v' \in L^2(0, T; H) \}$$

с нормой

$$\|v\|_F = (\int_0^T (\|v'(t)\|^2 + \|A^{1/2}(0) v(t)\|^2) dt)^{1/2}.$$

Пусть $u_\infty \in F$ — ее предельная точка. Задача (2.1) записывается в виде

$$(u_n'(t)+A(t)u_n(t), w_i) = (f(t), w_i),$$
$$(A(0)u_n(0), w_i) = (A(0)\xi, w_i), \quad i=1, \ldots, n,$$

или

$$(u_n'(t), w_i) + (u_n(t), A(t)w_i) = (f(t), w_i),$$
$$(u_n(0), A(0)w_i) = (\xi, A(0)w_i), \quad i=1, \ldots, n.$$

Предельным переходом получаем, что

$$(u_\infty'(t), w_i) + (u_\infty(t), A(t)w_i) = (f(t), w_i),$$
$$(u_\infty(0), A(0)w_i) = (\xi, A(0)w_i), \quad i=1, 2, \ldots,$$

значит, в силу полноты системы $\{w_k\}$,

$$u_\infty'(t)+A(t)u_\infty(t) = f(t), \qquad u_\infty(0) = \xi,$$

т. е. u_∞ является решением задачи (1.4). Поскольку $u_\infty' \in L^2(0, T; H)$, то $Au_\infty \in L^2(0, T; H)$ и, следовательно, $u_\infty \in L^2(0, T; H_{A^2(0)})$. Предложение 2 полностью доказана.

Замечание 2. Предложение 2 показывает, что при наложенных на $A(t)$ ограничениях задача (1.4) осуществляет изоморфизм между пространствами решений и начальный данных, описываемый неравенством (1.6). Задача (2.1) также задает равномерные по n изоморфизмы между пространствами приближенных решений E_n и проекций начальных данных $L^2(0, T; H^n) \times V^n$, описываемые неравенством

$$\frac{1}{2}\int_0^T \|P_n f(t)\|^2 dt + \|A^{1/2}(0) Q_n \xi\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T (\|u_n'(t)\|^2 + \|P_n A(t) u_n(t)\|^2) dt + \max_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}(t) u_n(t)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\exp\left\{\frac{\beta T}{\alpha}\right\}\left(\int_0^T \|P_n f(t)\|^2 dt + \|A^{1/2}(0) Q_n \xi\|^2\right). \tag{2.7}$$

§ 3. Устойчивость метода Галеркина

Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_{nk}(t) w_k,$$

где коэффициенты $c_{nk}(t)$, $k=1, \ldots, n$, определяется из равносильной к (2.1) системы дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^n (w_k, w_i) c_{nk}'(t) + \sum_{k=1}^n (A(t) w_k, w_i) c_{nk}(t) = (f(t), w_i), \\ \sum_{k=1}^n (A(0) w_k, w_i) c_{nk}(0) = (A(0)\xi, w_i), \quad i=1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{3.1}$$

При численной реализации системы (3.1) скалярные произведения, как правило, вычисляются с некоторыми погрешностями, следовательно, вместо (3.1) решается система

$$\sum_{k=1}^{n}((w_k, w_i)+\gamma_{ik})\tilde{c}_{nk}'(t)+\sum_{k=1}^{n}((A(t)w_k, w_i)+\alpha_{ik}(t))\tilde{c}_{nk}(t)=$$
$$=(f(t), w_i)+g_i^{(n)}(t), \tag{3.2}$$
$$\sum_{k=1}^{n}((A(0)w_k, w_i)+\alpha_{ik}(0))\tilde{c}_{nk}(0)=(A(0)\xi, w_i)+\delta_i^{(n)},\ i=1,\ \ldots,\ n.$$

Система (3.2) определяет возмущенное решение

$$\tilde{u}_n=\sum_{k=1}^{n}\tilde{c}_{nk}(t)w_k.$$

Нас интересует зависимость возмущения $\tilde{u}_n-u_n$ галеркинского приближения u_n от возмущений в системе (3.2).

Для возмущений будем использовать следующие обозначения:

$$\Gamma_n=\{\gamma_{ik}\}^n{}_{i,k=1}, \qquad \Delta_n(t)=\{\alpha_{ik}(t)\}^n{}_{i,k=1},$$
$$g_n(t)=\{g_i^{(n)}(t)\}^n{}_{i=1}, \qquad \delta_n=\{\delta_i^{(n)}\}^n{}_{i=1},$$

причем $\Delta_n(t)$ и $g_n(t)$ предполагается измеримыми по t. Матрицы и векторы рассмотрим как операторы и элементы евклидова пространства R^n; соответствующий смысл придается их нормам.

Пусть λ_n, ν_n — наименьшие собственные числа матриц Грама

$$\Lambda_n=\{(w_i, w_k)\}^n{}_{i,k=1}, \qquad N_n=\{(A(0)w_i, w_k)\}^n{}_{i,k=1}$$

соответственно.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1.

1° *Если* $\|\Gamma_n\|\leqslant\dfrac{p\lambda_n}{2\exp\left\{\dfrac{\beta T}{2\alpha}\right\}}$ $(p<1)$

и

$$\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_n(t)\|\leqslant\frac{q\varkappa\lambda_n}{2\exp\left\{\dfrac{\beta T}{2\alpha}\right\}} \qquad (q<1),$$

то система (3.2) *однозначно разрешима и*

$$|||\tilde{u}_n-u_n|||\equiv$$
$$\equiv\int_0^T(\|\tilde{u}_n'(t)-u_n'(t)\|^2+\|P_nA(t)(\tilde{u}_n(t)-u_n(t))\|^2)dt)^{1/2}+$$
$$+\max_{t\in[0,T]}\|A^{1/2}(t)(\tilde{u}_n(t)-u_n(t))\|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\}}{1-\max\{p, q\}} \cdot \left(\frac{\|u_n'\|_{L^2(0,T;H)}}{\lambda_n} \|\Gamma_n\| + \right.$$

$$+ \frac{\|u_n\|_{L^2(0,T;H)}}{\lambda_n} \max_{t\in[0,T]} \|\Delta_n(t)\| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)} +$$

$$\left. + \frac{\|u_n(0)\|_{H_{A(0)}}}{\nu_n} \|\Delta_n(0)\| + \frac{1}{\sqrt{\nu_n}} \|\delta_n\| \right). \tag{3.3}$$

2° *Существуют не зависящие от n положительные постоянные $c_1, \ldots, c_5$ такие, что:*

1) *при $\Delta_n(t) = 0$, $g_n(t) = 0$, $\delta_n = 0$ и некоторых $\Gamma_n \neq 0$ (со сколь угодно малой нормой) и $u_n \neq 0$ имеет место неравенство*

$$|||\tilde{u}_n - u_n||| \geqslant \frac{c_1 |||u_n|||}{\lambda_n} \|\Gamma_n\|; \tag{3.4}$$

2) *при $\Gamma_n = 0$, $g_n(t) = 0$, $\delta_n = 0$ и некоторых $\Delta_n(t) \neq 0$ (со сколь угодно малой нормой) и $u_n \neq 0$ имеет место неравенство*

$$|||\tilde{u}_n - u_n||| \geqslant \frac{c_2 \|u_n\|_{L^2(0,T;H)}}{\lambda_n} \max_{t\in[0,T]} \|\Delta_n(t)\|; \tag{3.5}$$

3) *при $\Gamma_n = 0$, $g_n(t) = 0$, $\delta_n = 0$ и некоторых $\Delta_n(t) \neq 0$ (со сколь угодно малой нормой) и $u_n \neq 0$ имеет место неравенство*

$$|||\tilde{u}_n - u_n||| \geqslant \frac{c_3 \|u_n(0)\|_{H_{A(0)}}}{\nu_n} \|\Delta_n(0)\|; \tag{3.6}$$

4) *при $\Gamma_n = 0$, $\Delta_n(t) = 0$, $\delta_n = 0$ и некотором $g_n(t) \neq 0$ имеет место неравенство*

$$|||\tilde{u}_n - u_n||| \geqslant \frac{c_4}{\sqrt{\lambda_n}} \|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)}; \tag{3.7}$$

5) *при $\Gamma_n = 0$, $\Delta_n(t) = 0$, $g_n(t) = 0$ и некотором $\delta_n \neq 0$ имеет место неравенство*

$$|||\tilde{u}_n - u_n||| \geqslant \frac{c_5}{\sqrt{\nu_n}} \|\delta_n\|. \tag{3.8}$$

3° *В оценке (3.4) можно $|||u_n|||$ заменить величиной $\left({}_0\int^T \|f(t)\|^2 dt + \|A^{1/2}(0)\xi\|^2\right)^{1/2}$, а $\|A^{1/2}(0)u_n(0)\|$ в (3.6) величиной $\|A^{1/2}(0)\xi\|$, где f и ξ — некоторые начальные данные в (1.4′) (зависящие от n), которым соответствует u_n в (2.1).*

Доказательство. Мы будем пользоваться обозначениями

$$\Psi_n x = ((x, w_1), \ldots, (x, w_n)),$$

$$\Phi_n x = ((A(0)x, w_1), \ldots, (A(0)x, w_n)),$$

$$(x \in H^n), \qquad T_n = \Lambda_n^{-1}\Psi_n.$$

Так как $T_n x = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ для $x = \Sigma_{1\leqslant k\leqslant n} c_k w_k$, то T_n является оператором отделения координат. Система (3.2) записывается в виде

$$\tilde{u}_n' + \Psi_n^{-1}\Gamma_n T_n \tilde{u}_n' + P_n A \tilde{u}_n + \Psi_n^{-1}\Delta_n T_n \tilde{u}_n = P_n f + \Psi_n^{-1} g_n \qquad (3.9)$$

$$\tilde{u}_n(0) + \Phi_n^{-1}\Delta_n(0) T_n \tilde{u}_n(0) = Q_n \xi + \Phi_n^{-1}\delta_n.$$

Из (2.1) и (3.9) получаем для определения возмущения $h_n = \tilde{u}_n - u_n$ уравнение

$$(I_n + \Psi_n^{-1}\Gamma_n T_n) h_n' + (P_n A + \Psi_n^{-1}\Delta_n T_n) h_n =$$
$$= \Psi_n^{-1} g_n - \Psi_n^{-1}\Gamma_n T_n u_n' - \Psi_n^{-1}\Delta_n T_n u_n \qquad (3.10)$$

при начальном условии

$$(I_n + \Phi_n^{-1}\Delta_n(0) T_n) h_n(0) = \Phi_n^{-1}\delta_n - \Phi_n^{-1}\Delta_n(0) T_n u_n(0). \quad (3.11)$$

Будем оценивать нормы операторов T_n, Ψ_n^{-1}, Φ_n^{-1} в соответствующих пространствах. В [5], стр. 242, показано, что

$$\|\Psi_n^{-1}\|_{H^n\to\mathbf{R}^n} = \|T_n\|_{\mathbf{R}^n\to H^n} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Оператор Φ_n действует из пространства V^n в $\mathbf{R}^n$ точно так же, как Ψ_n из H^n в $\mathbf{R}^n$, значит,

$$\|\Phi_n^{-1}\|_{\mathbf{R}^n\to V^n} = \|T_n\|_{V^n\to\mathbf{R}^n} = \frac{1}{\sqrt{\nu_n}}.$$

Так как при наложенных на Γ_n и $\Delta_n(t)$ ограничениях

$$\|\Psi_n^{-1}\Gamma_n T_n\|_{H^n\to H^n} < 1 \qquad \text{и} \qquad \|\Phi_n^{-1}\Delta_n(0) T_n\|_{V^n\to V^n} < 1$$

(ниже будет показано, что $\varkappa\lambda_n \leqslant \nu_n$), то операторы $I_n + \Psi_n^{-1}\Gamma_n T_n$ и $I_n + \Phi_n^{-1}\Delta_n(0) T_n$ обратимы в пространствах $L^2(0, T; H^n)$ и V^n соответственно, следовательно, задача (3.9), а также система (3.2) однозначно разрешимы.

Положим в оценке (2.6) $v_n = h_n$. Тогда

$$|||h_n||| \leqslant \sqrt{2}\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\} \Big(\int_0^T \|\Psi_n^{-1} g_n(t) - \Psi_n^{-1}\Gamma_n T_n u_n'(t) -$$
$$- \Psi_n^{-1}\Delta_n(t) T_n u_n(t) - \Psi_n^{-1}\Gamma_n T_n h_n'(t) - \Psi_n^{-1}\Delta_n(t) T_n h_n(t)\|^2 dt +$$
$$+ \|A^{1/2}(0)(\Phi_n^{-1}\delta_n - \Phi_n^{-1}\Delta_n(0) T_n u_n(0) -$$
$$- \Phi_n^{-1}\Delta_n(0) T_n h_n(0))\|^2\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\}\cdot\left(\frac{\|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)}}{\sqrt{\lambda_n}}+\frac{\|u_n'\|_{L^2(0,T;H)}}{\lambda_n}\|\Gamma_n\|+\right.$$

$$+\frac{\|u_n\|_{L^2(0,T;H)}}{\lambda_n}\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_n(t)\|+\frac{\|\Gamma_n\|}{\lambda_n}\|h_n'\|_{L^2(0,T;H)}+$$

$$+\frac{\|h_n\|_{L^2(0,T;H)}}{\lambda_n}\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_n(t)\|+\frac{\|\delta_n\|}{\sqrt{\nu_n}}+$$

$$\left.+\frac{\|A^{1/2}(0)u_n(0)\|}{\nu_n}\|\Delta_n(0)\|+\frac{\|\Delta_n(0)\|}{\nu_n}\|A^{1/2}(0)h_n(0)\|\right).$$

При наложенных на Γ_n и $\Delta_n(t)$ ограничениях

$$\sqrt{2}\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{\|\Gamma_n\|}{\lambda_n}\|h_n'\|_{L^2(0,T;H)}+\frac{\|h_n\|_{L^2(0,T;H)}}{\lambda_n}\max_{t\in[0,T]}\|\Delta_n(t)\|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\|h_n'\|_{L^2(0,T;H)}}{\sqrt{2}}p+\frac{\|h_n\|_{L^2(0,T;H)}}{\sqrt{2}}q\varkappa\leqslant$$

$$\leqslant\max\{p,q\}\left(\int_0^T(\|h_n'(t)\|^2+\|P_nA(t)h_n(t)\|^2)\,dt\right)^{1/2}.$$

Учитывая (1.3), получаем

$$\nu_n=\inf_{x_1^2+\ldots+x_n^2=1}\left\|\sum_{k=1}^n x_kw_k\right\|_{H_{A(0)}}\geqslant$$

$$=\varkappa\inf_{x_1^2+\ldots+x_n^2=1}\left\|\sum_{k=1}^n x_kw_k\right\|^2=\varkappa\lambda_n,$$

значит,

$$\sqrt{2}\exp\left\{\frac{\beta T}{2\alpha}\right\}\frac{\|\Delta_n(0)\|}{\nu_n}\|A^{1/2}(0)h_n(0)\|\leqslant q\,\|A^{1/2}(0)h_n(0)\|.$$

При помощи полученных оценок теперь нетрудно вывести оценку (3.3).

Переходим к доказательству части 2°. Непосредственно получаем оценку

$$|||h_n|||\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^T\|h_n'(t)+P_nA(t)h_n(t)\|^2\,dt\right)^{1/2}+\|A^{1/2}(0)h_n(0)\|. \qquad (3.12)$$

Чтобы доказать утверждение 1), выберем элемент $x_n \in H^n$ такой, что $\|x_n\| = 1$, $\|T_n x_n\|_{\mathbf{R}^n} = \|T_n\|_{H^n \to \mathbf{R}^n}$. Выберем также вектор $y_n \in \mathbf{R}^n$ такой, что $\|y_n\|_{\mathbf{R}^n} = 1$, $\|\Psi_n^{-1} y_n\|_{H^n} = \|\Psi_n^{-1}\|_{\mathbf{R}^n \to H^n}$. Далее, существует симметричная матрица Γ_n, которая переводит вектор $T_n x_n$ в вектор y_n и имеет норму $\|y_n\|_{\mathbf{R}^n} / \|T_n x_n\|_{\mathbf{R}^n}$. Пусть $u_n(t) = c_n(t) x_n$, где $c_n(t)$ — некоторая скалярная функция, которую мы описываем ниже. Равенство (3.10) в данном случае дает

$$h_n' + P_n A h_n = -\Psi_n^{-1} \Gamma_n T_n u_n' - \Psi_n^{-1} \Gamma_n T_n h_n'.$$

Матрицу Γ_n можем умножить на сколь угодно малое положительное число и если, например, $\|\Psi_n^{-1} \Gamma_n T_n\|_{H^n \to H^n} \leqslant 1$, то

$$|||h_n||| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\|u_n'\|_{L^2(0,T;H)}}{\lambda_n} \|\Gamma_n\|.$$

На функцию $c_n(t)$ наложим условия

$$\max_{t \in [0,T]} |c_n(t)| \Big(\Big(\int_0^T \|P_n A(t) x_n\|^2 dt \Big)^{1/2} + \max_{t \in [0,T]} \|A^{1/2}(t) x_n\| \Big) \leqslant 1,$$

$$\int_0^T |c_n'(t)|^2 dt = 1,$$

вполне ясно, что такая функция существует. Но тогда

$$2\|u_n'\|_{L^2(0,T;H)} \leqslant |||u_n|||,$$

и тем самым утверждение 1) доказано.

В доказательстве 2) выберем матрицу Δ_n (не зависящую от t) так же, как Γ_n в 1). После умножения ее на достаточно малое положительное число при помощи (3.10) и (3.12) легко выводится оценка (3.5). Аналогично получается (3.6) из (3.11) и (3.12). Оценки (3.7) и (3.8) очевидны.

Для доказательства утверждения 3° отметим, что в неравенстве (3.12) можно вместо h_n поставить u_n. Остается выбрать $f \in L^2(0, T; H)$ и $\xi \in H_{A(0)}$ такие, что

$$P_n f = u_n' + P_n A u_n, \qquad \|P_n f\|_{L^2(0,T;H)} = \|f\|_{L^2(0,T;H)}$$

и

$$Q_n \xi = u_n(0), \qquad \|Q_n \xi\|_{H_{A(0)}} = \|\xi\|_{H_{A(0)}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 показывает влияние каждого возмущения на точность галеркинского приближения, т. е. характеризует устойчивость метода.

Определение. *Метод Галеркина* (2.1) *для решения задачи* (1.4) *будем называть устойчивым в норме* $|||\cdot|||$, *если существуют положительные* c, r_1, r_2, *не зависящие от* n *и входных данных* f *и* ξ, *такие, что при* $\|\Gamma_n\| \leqslant r_1$ *и* $\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\Delta_n(t)\| \leqslant r_2$ *система* (3.2) *однозначно разрешима и*

$$|||\tilde{u}_n - u_n||| \leqslant c\left(\left(\|\Gamma_n\| + \max_{t\in[0,T]} \|\Delta_n(t)\| \right) \left(\|f\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|\xi\|^2_{H_{A(0)}} \right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)} + \|\delta_n\| \right), \tag{3.13}$$

где u_n *и* $\tilde{u}_n$ — *решения задач* (2.1) *и* (3.9) *соответственно.*

Из теоремы 2 следует, что необходимым и достаточным условием для устойчивости метода Галеркина (2.1) в норме $|||\cdot|||$ является сильная минимальность системы $\{w_k\}$ в H. Действительно, из сильной минимальности системы $\{w_k\}$ в H следует ее сильная минимальность в $H_{A(0)}$, а тогда при помощи неравенства (2.7) из (3.3) вытекает достаточность; необходимость следует, например, из (3.4).

Замечание 3. Пусть $A(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ — самосопряженный положительно определенный в H оператор с постоянной областью определения $D(A)$, сильно дифференцируемый на $D(A)$. Пусть выполнено (1.2) при $t\in[0,\infty)$ и $f\in L^2(0,\infty;H)$. Тогда утверждения предложения 2 и теорем 1 и 2 справедливы также для бесконечного промежутка времени в предположении неположительности производной $\dot{A}(t)$ (т. е. $\beta=0$); достаточна даже неположительность производной начиная с некоторого момента времени.

Библиографические замечания. Из работы [3] следует сходимость

$$\int_0^T \left(\|u_n'(t) - u'(t)\|^2 + \|A^{1/2}(t)(u_n(t) - u(t))\|^2 \right) dt \to 0$$

метода Галеркина (2.1) для задачи (1.4). Теорема 1 утверждает сходимость в более сильных нормах. В [11] установлена достаточность сильной минимальности системы $\{w_k\}$ в H для устойчивости метода Галеркина н норме пространства $C([0,T];H)$ в предположении неположительности производной $\dot{A}(t)$. Теорема 2 влечет за собой необходимость и достаточность сильной минимальности системы $\{w_k\}$ в H в более сильных нормах, а именно в тех же нормах, в которых доказывается сходимость, в предположении лишь некоторой ограниченности производной $\dot{A}(t)$. В [2, 11] рассмотрен[1] также случай бесконечного промежутка времени ($T=\infty$). Ввиду замечания 3 результаты работ [2, 11] в настоящей статье усиливаются. Полученные в [4] результаты об устойчивости координат в предположении почти ортонормированности координатной системы в случае постоянного оператора справедливы также для переменного оператора, удовлетворяющего предположениям теоремы 1.

[1] В [2] сделаны противоречивые предположения. Именно, из неположительности производной $\dot{A}(t)$ следует, что функция $r(t)>0$ ограничена сверху положительной постоянной. В то же время требуется, что $\int_0^\infty r^{-1}(t)\,dt<\infty$. Отметим, что результаты в [2] (без приведенного ограничительного требования) верны, они следуют из теоремы 2, если дополнительно предположить, что условие (1.3) выполнено при $t\in[0,\infty)$.

Литература

1. Вайникко Г. М., Оя П. Э., О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений. Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 7, 1269—1277.
2. Велиев М. А., Об устойчивости метода Бубнова — Галеркина для уравнений первого порядка с переменными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Дифференц. уравнения, 1969, **5**, № 3, 479—487.
3. Вишик М. И., Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения. Матем. сб., 1956, **39**, № 1, 51—148.
4. Ицик Б. Г., Соболевский П. Е., Об устойчивости метода Бубнова — Галеркина для дифференциальных уравнений первого порядка с неограниченными операторами в гильбертовом пространстве. «Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та», 1970, № 2, 39—42.
5. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений. Москва, 1969.
6. Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва, 1967.
7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва, 1971.
8. Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов. Москва, 1966.
9. Оя П., О решении эволюционных уравнений методом Галеркина. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 237—248.
10. Соболевский П. Е., О методе Бубнова — Галеркина для параболических уравнений в гильбертовом пространстве. Докл. АН СССР, 1968, **178**, № 3, 548—551.
11. Тополянский Д. Б., Запрудский Я. М., Исследование устойчивости метода Бубнова — Галеркина для нестационарных операторных уравнений с переменными коэффициентами. Укр. мат. ж., 1974, **26**, № 5, 621—633.

Поступило
18 II 1975

GALJORKINI MEETODI KOONDUVUSEST JA STABIILSUSEST DIFERENTSEERUVA OPERAATORIGA PARABOOLSET TÜÜPI VÕRRANDITE JAOKS

P. Oja

Resümee

Uuritakse Galjorkini meetodi koonduvust ja stabiilsust paraboolset tüüpi võrrandi $u' + A(t)u = f(t)$ Cauchy ülesande jaoks eeldusel, et operaator $A(t)$ on positiivselt määratud, enesekaasne, tugevalt diferentseeruv ning tema tuletis rahuldab tõkestatuse nõuet (1.5). Tõestatakse Galjorkini meetodi koonduvus ja tuletatakse lähislahendi häirituse kahepoolsed hinnangud vigade kaudu, mis tekivad lähisvõrrandi praktilisel lahendamisel. Näidatakse, et meetodi stabiilsuseks on tarvilik ja piisav koordinaatsüsteemi tugev minimaalsus.

ON CONVERGENCE AND STABILITY OF THE GALERKIN METHOD FOR THE PARABOLIC EQUATIONS WITH A DIFFERENTIABLE OPERATOR

P. Oja

Summary

Let $A(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, be a family of positive-definite, self-adjoint operators in a real separable Hilbert space. The object of the present paper is to prove some theorems concerning convergence and stability of the Galerkin method for the initial value problem for the evolution equation $du/dt + A(t)u = f(t)$, $u(0) = \xi$. The results are obtained in the case in which the domain $D(A(t)) = D$ of $A(t)$ is independent of t, $A(t)$ is strongly differentiable and the derivative of $A(t)$ is such that $((A'(t)v, v) \leqslant \text{const}\ (A(0)v, v)$ for each $v \in D$.

It is shown that for $f \in L^2(0, T; H)$, $\xi \in H_{A(0)}$ the solution u of the equation satisfies $u \in L^2(0, T; H_{A^2(0)})$, $u' \in L^2(0, T; H)$. Theorem 1 gives the convergence

$$\int_0^T (\|u_n'(t) - u'(t)\|^2 + \|P_n A(t) u_n(t) - A(t) u(t)\|^2) dt)^{1/2} +$$

$$+ \max_{t \in [0,T]} \|A^{1/2}(t)(u_n(t) - u(t))\| \to 0$$

for the Galerkin approximate equation $u'_n + P_n A(t) u_n = P_n f(t)$, $u_n(0) = Q_n \xi$ where P_n and Q_n are orthogonal projections in the spaces H and $H_{A(0)}$, respectively. The influence of the perturbations, appearing in practical realization of the Galerkin equations, on the approximate solutions is characterized by Theorem 2. It follows from Theorem 2 that the strong minimality of the coordinate system in H is necessary and sufficient to the stability of the Galerkin method in the same norms in which the convergence is proved.

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА В НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОБЛЕМАХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О. Карма

Кафедра вычислительной математики

Доказывается сходимость разностного метода при решении проблемы собственных значений для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений порядка m, причем подлежащий определению параметр может войти в задачу нелинейно. Используются равномерная сетка и произвольные сходящиеся аппроксимации производных, лишь от аппроксимации старшей производной требуется некоторого рода «согласованность» [1]. Статью можно рассматривать, как пример применения развитой в [5] общей теории; вместе с общей теорией статья является примером некоторой методики доказательства теорем сходимости для разностного метода (см. [3, 6, 8], ср. [1, 2, 7]).

§ 1. Введение

1.1. Пусть Λ — область (открытое связное множество) комплексной плоскости **C**. Рассмотрим следующую проблему собственных значений:

дана краевая задача:

$$L(\lambda)u(t)\equiv\sum_{k=0}^{m}a_k(t,\lambda)u^{(k)}(t)=0,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$l_i(\lambda)u\equiv\sum_{k=0}^{m-1}[\alpha_{i,k}(\lambda)u^{(k)}(0)+\beta_{i,k}(\lambda)u^{(k)}(1)]=0,\quad i=1,2,\ldots,m, \tag{1}$$

где $a_k(t,\lambda)$, $\alpha_{i,k}(\lambda)$, $\beta_{i,k}(\lambda)\in\mathbf{C}$, при $i=1, 2, \ldots, m$, $k=0, 1, \ldots, m-1$, и $a_m(t,\lambda)=1$;

требуется найти те значения λ из Λ, при которых задача (1) имеет ненулевые решения, т. е. собственные значения задачи (1).

[1] См. условие (с) п. 2.2, а также § 4.

Для приближенного решения этой проблемы можно применить метод конечных разностей: заменой производных в точках $t = jh$, ($h = 1/n$, $j = 0, 1, \ldots, n$), (в узлах сетки) некоторыми их разностными аналогами задачу (1) заменяют системой линейных алгебраических уравнений — дискретным аналогом (1_n) задачи (1), и решается проблема собственных значений для него. Мы покажем, что в определенных условиях такой подход обоснован, — рассматривая семейство $\{(1_n): n \in \mathbf{N}\}$ дискретных аналогов задачи (1), докажем теорему сходимости: собственные значения задач (1_n) сходятся при $n \to \infty$ в Λ к собственным значениям задачи (1) и только к ним. Устанавливаем также асимптотическую оценку скорости этой сходимости и докажем некоторые утверждения о поведении собственных векторов задач (1_n). Из оценок следует, что, чем выше минимальный порядок точности применяемых разностных аналогов производных, тем большей будет гарантированная асимптотическая скорость сходимости (при условии, что коэффициенты a_k в задаче (1) достаточно гладкие функции от t для всех λ из Λ).

1.2. Для доказательства теоремы сходимости мы рассмотрим задачи (1) и (1_n) как операторные уравнения в банаховых пространствах, причем для операторов имеет место собственная сходимость (называемая у разных авторов также регулярной аппроксимацией или y_0-аппроксимацией). Установление собственной сходимости дает нам возможность применить соответствующую общую теорию для операторов [5, 8], и наши результаты получаются из общих утверждений несложными переформулировками. Единственная трудность при таком подходе — установление собственности сходимости; для этого нам понадобится некоторое добавочное условие (условие (c) в п. 2.2).

Замечание 1. Доказательство собственной сходимости операторов не использует голоморфности в задаче (1). Таким образом, приведенные рассуждения позволяют, пользуясь результатами [4], получить еще одно доказательство сходимости метода конечных разностей для краевой задачи обыкновенных линейных дифференциальных уравнений порядка m (ср. [1, 2]).

Замечание 2. Мы ограничимся двухточечной краевой задачей и скалярными функциями u. Но все рассуждения и результаты без затруднений переносятся также на многоточечную краевую задачу и случай вектор-функций u (в записи (1) тогда a_k, $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ надо рассматривать как матрицы-функции).

§ 2. Построение разностной задачи. Теорема сходимости

2.1. Опишем построение семейства дискретных аналогов $\{(1_n): n \in \mathbf{N}\}$ задачи (1):

1) исходя из некоторого конечного набора (H) сходящихся

формул численного дифференцирования[2], т. е. из соотношений вида

$$u^{(k)}(t)=h^{-k}\sum_{p=-r}^{s}a_p u(t+ph)+\varrho_h(u,t),$$

где

$$\lim_{h\to 0}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varrho_h(u,t)|=0$$

для всех k раз непрерывно дифференцируемых действительных (а тогда и для комплексных) функций[3], получим конечный набор (H′) разностных выражений (разностных аналогов) производных вида

$$[d_h{}^k u^h]_j=h^{-k}\sum_{p=-r}^{s}a_p[u^h]_{j+p},$$

где u^h — некоторый вектор; коэффициенты a_p, а также величины $s, r, \varrho_h(u,t)$ могут при этом зависеть от порядка k производной и от индекса ν формулы в наборе, но, ввиду конечности набора, выполнено следующее условие:

$$\lim_{h\to 0}\max_{\nu}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varrho_h(u,t;\nu,k)|=0 \qquad \text{(н)}$$

для всех k раз непрерывно дифференцируемых функций u, где $k=0, \ldots, m$;

2) фиксируем целые числа $\sigma\geqslant 0$ и $\tau\geqslant 0$ такие, что $\sigma+\tau=m$ (здесь σ, τ — числа узлов сетки, остающихся, соответственно, «левее» и «правее» отрезка $[0,1]$);

3) для любого фиксированного числа n из **N** дискретный аналог (1_n) задачи (1) построим следующим образом:

а) положим $h=1/n$,

б) выпишем уравнение $L(\lambda)u(t)=0$ в точках $t=jh$, $j=0, \ldots, n$,

в) в краевых условиях $l_i(\lambda)u=0$, $i=1, \ldots, m$, и в получающихся уравнениях $L(\lambda)u(jh)=0$ производные $u^{(k)}$ формально заменим их некоторыми разностными аналогами из набора (H′); при этом применяемая формула может зависить от места, где происходит замена, но мы будем требовать, чтобы использовались только значения $u(t)$ в точках сетки $t=qh$, $q=-\sigma, -\sigma+1, \ldots, n+\tau$;

г) величины $u(qh)$ заменим на неизвестные $u^h{}_q$.

В результате приведенного построения при любом фиксированном n из **N** получится система $m+n+1$ линейных алгебраических уравнений для $m+n+1$ неизвестных $u^h{}_{-\sigma}, \ldots, u^h{}_{n+\tau}$,

---

[2] Набор (H) должен при этом быть достаточно богат, чтобы можно было удовлетворять требование 3в) данного построения.

[3] Для этого достаточно, чтобы $\varrho_h(u,t)\to 0$ при $h\to 0$ для всех t из отрезка $[0,1]$ и всех бесконечнодифференцируемых функций.

которая в векторно-координатной записи может быть представлена в виде:

$$
\begin{aligned}
&[L_h(\lambda)u^h]_j \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k(\lambda, jh)\,[D_h^{(k)}u^h]_j = 0, \qquad j=0, \ldots, n, \\
&l_{i,h}(\lambda)u^h \equiv \sum_{k=0}^{m-1} (\alpha_{i,k}(\lambda)\,[D_h^{(k)}u^h]_0 + \beta_{i,k}(\lambda)\,[D_h^{(k)}u^h]_n) = 0, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=1, \ldots, m,
\end{aligned} \tag{1_n}
$$

где

$$u^h = (u^h{}_{-\sigma}, \ \ldots, \ u^h{}_{n+\tau}) \in \mathrm{R}^{m+n+1}, \qquad [u^h]_q = u^h{}_q,$$

а $D_h^{(k)}$ — разностные аналоги производных (которые могут зависеть от номера координаты j и индекса i уравнения).

В векторной записи задача (1_n) имеет вид:

$$L_h(\lambda)u^h = 0, \qquad l_{i,h}(\lambda)u^h = 0, \qquad i=1, \ldots, m.$$

2.2. Обозначим через $\partial_h{}^k u^h$ результат k-кратного применения к вектору u^h простейшего дискретного аналога первой производной, т. е.

$$[\partial_h{}^0 u^h]_q = u^h{}_q, \qquad [\partial_h{}^k u^h]_q = ([\partial_h{}^{k-1}u^h]_{q+1} - [\partial_h{}^{k-1}u^h]_q)/h,$$
$$q = -\sigma, \ \ldots, \ n+\tau-k; \quad k=1, \ \ldots, \ m.$$

Для доказательства теоремы сходимости (п. 2.3) мы на построение дискретизации $D_h^{(m)}$ старшей производной $u^{(m)}$ наложим еще следующее добавочное условие «согласованности»:

(с): *для любой последовательности векторов*[4] u^h *выполнена импликация*

$$\lim_{h\to 0} \max_{j=0,\ldots,n} |[D_h^{(m)}u^h]_j| = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \max_{q=-\sigma,\ldots,n-\sigma} |[\partial_h{}^m u^h]_q| = 0, \tag{c_1}$$

Ясно, что импликация (c_1) равносильна импликации[5]:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \max_{j=0,\ldots,n} |[D_h^{(m)}(u^h - g^h)]| = 0 \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow \lim_{h\to 0} \max_{q=-\sigma,\ldots,n-\sigma} |[\partial_h{}^m (u^h - g^h)]_q| = 0,
\end{aligned} \tag{c_2}
$$

при $g^h = (g(-\sigma h), \ \ldots, \ g((n+\tau)h)), \qquad g \in C^{(m)}{}_{\mathrm{R}}[-\sigma, 1+\tau]$.
Действительно, ввиду произвольности вектора u^h в (c_1) можно принимать $u^{h1} = u^h - g^h$ и мы получим (c_2); если же в (c_2) принимать $g(t) \equiv 0$, то получится (c_1).

[4] У нас R^n и C^n — множества всех n-мерных векторов с действительными и комплексными координатами, соответственно.

[5] У нас $C^{(k)}{}_{\mathrm{R}}[a, b]$ и $C^{(k)}[a, b]$ — банаховы пространства всех определенных на отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$ функций действительного переменного, непрерывных вместе со своими производными до порядка k (включительно) и со значениями, соответственно, в $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$; в частности, $C_{\mathrm{R}}[a, b] = C^{(0)}{}_{\mathrm{R}}[a, b]$ и $C[a, b] = C^{(0)}[a, b]$.

Далее, операторы $D_h^{(m)}$ и ∂_h^m линейны, операторы $D_h^{(m)}$ составлены используя набор (H′) формул численного дифференцирования, удовлетворяющий условию (н), и

$$\lim_{h\to 0}\max_{q=-\sigma,\dots,n-\sigma}|[\partial_h^m g^h]_q - g^{(m)}(qh)|=0$$

для g^h и g из (c_2). Поэтому импликация (c_2) равносильна импликации (c_3):

$$\lim_{h\to 0}\max_{j=0,1,\dots,n}|[D_h^{(m)}u^h]_j - g^{(m)}(jh)|=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\max_{q=-\sigma,\dots,n-\sigma}|[\partial_h^m u^h]_q - g^{(m)}(qh)|=0 \qquad (c_3)$$

при $g\in C^{(m)}_{\mathrm{R}}[-\sigma,\ 1+\tau]$.

Но импликация (c_3), очевидно, равносильна импликации:

$$\lim_{h\to 0}\max_{j=0,\dots,n}|[D_h^{(m)}u^h]_j - f(jh)|=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\max_{q=-\sigma,\dots,n-\sigma}|[\partial_h^m u^h]_q - f(qh)|=0, \qquad (c_4)$$

при $f\in C_{\mathrm{R}}[-\sigma,\ 1+\tau]$.

Ясно также, что если некоторая из импликаций (c_1), (c_2), (c_3), (c_4) выполнена, то аналогичная импликация выполнена также для векторов с комплексными координатами и функций $g\in C^{(m)}[-\sigma,\ 1+\tau]$, $f\in C[-\sigma,\ 1+\tau]$. При доказательстве теоремы сходимости мы пользуемся импликацией (c_4) в комплексной форме.

Некоторый анализ условия (c) будет проведен в § 4, именно, будут указаны некоторые равносильные сформулировки условия (c). В частности, доказывается его равносильность примененной в [2] условию (K), а также равносильность некоторому условию (s), носящий алгебраический характер и не связанный с порядком m уравнения (1).

2.3. Введем обозначение

$$\|u^h\|_m=\max_{k=0,\dots,m}\ \max_{q=-\sigma,\dots,n+\tau-k}|[\partial_h^k u^h]_q|. \qquad (2)$$

Теорема сходимости. *Пусть для краевой задачи* (1) *выполнены условия*:

1° *коэффициенты* a_k — *непрерывные функции от* t *на отрезке* [0, 1] *при каждом* λ *из* Λ,

2° *граничные условия* $l_i(\lambda)u=0$ *линейно независимы при всех* λ *из* Λ,

3° *коэффициенты* a_k, $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ — *голоморфные функции от* λ *на* Λ,

4° $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\max\limits_{\lambda\in\Lambda_0}|a_k(t,\lambda)|\leqslant c(\Lambda_0)=\mathrm{const}$

для любого компакта (ограниченного замкнутого множества) Λ_0 из Λ;

5° *не все λ из Λ — собственные числа задачи*[6] (1).

Пусть, далее, дискретные аналоги (1_n) *задачи* (1) *построены по правилам* 1)—3) *п.* 2.1, *и пусть дискретизация старшей производной $u^{(m)}$ удовлетворяет условию* (с) *п.* 2.2. *Тогда*

а) *для того, чтобы точка λ_0 из Λ была собственным значением задачи* (1), *необходимо и достаточно, чтобы она была пределом собственных значений λ_n задач* (1_n) *при $n \to \infty$,*

б) *если $\{u^{h,0} : h = 1/n,\ n \in N' \subset \mathbf{N}\}$ — некоторая подпоследовательность собственных векторов задач* (1_n), *соответствующая собственным значениям λ_n с $\lambda_n \to \lambda_0 \in \Lambda$ при $n \to \infty$, и $\|u^{h,0}\|_m = 1$, то можно выделить такую подпоследовательность индексов $N'' \subset N'$, что для некоторой функции u имеет место сходимость*

$$\lim_{n\to\infty,\ n \in N''} \|u^{h,0} - (u(-\sigma h),\ \ldots,\ u((n+\tau)h))\|_m = 0;$$

при этом u — собственная функция задачи (1), *соответствующая собственному значению λ_0.*

Если, кроме того, коэффициенты a_k — по крайней мере $\mu \geqslant 1$ раз непрерывно дифференцируемые функции от t на отрезке [0, 1] *при каждом λ из Λ, и все применяемые при построении дискретной задачи* (1_n) *формулы численного дифференцирования удовлетворяют условию*

$$\max_{\nu} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\varrho_h(u, t; \nu, k)| = O(h^{\mu})$$

для всех $k + \mu$ раз непрерывно дифференцируемых функций u, то справедливы оценки

$$|\lambda_n - \lambda_0| = O(h^{\mu/\varkappa}), \tag{3}$$

$$\max_{u^{h,0}} \min_{u^0} \|u^{h,0} - (u^0(-\sigma h),\ \ldots,\ u^0((n+\tau)h))\|_m = O(h^{\mu} + |\lambda_n - \lambda_0|), \tag{4}$$

где

$\lambda_0 \in \Lambda$ и $\lambda_n \in \Lambda$ — собственные значения задач (1) *и* (1_n), *соответственно, такие что $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$,*

$\varkappa$ — порядок полюса оператор-функции $A^{-1}(\lambda)$ в точке λ_0,

min *берется по всем собственным функциям u^0 задачи* (1), *соответствующим собственному значению λ_0,*

max *берется по всем собственным векторам $u^{h,0}$ с $\|u^{h,0}\|_m = 1$ задачи* (1_n), *соответствующим собственным значениям λ_n.*

---

[6] Тогда множество собственных чисел задачи (1) в любом компакте Λ_0 из Λ конечна.

2.4. Замечание 3. В условиях теоремы сходимости имеют место также следующие утверждения (см. [7], теоремы 4.3.1, 4.4.1 и предложение 4.4.2):

1) для любого замкнутого контура Γ из Λ такого, что все охватываемые им точки принадлежат Λ и на Γ не находится собственных значений задачи (1), для почти всех n имеет место равенство

$$\nu((1), \Gamma) = \nu((1_n), \Gamma),$$

где $\nu((1), \Gamma)$ и $(\nu(1_n), \Gamma)$ — суммы (алгебраических, полных) кратностей всех собственных значений соответственно задач (1) и (1_n) внутри контура Γ;

2) пусть $\{(u^{h,0}, u^{h,1}, \ldots, u^{h,\omega}) : n \in N' \subset \mathbf{N}\}$ — подпоследовательность жордановых цепочек соответственно для задач (1_n) в точках $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda_0 \in \Lambda$, $n \in N' \subset \mathbf{N}$, и нормированных так, что

$$\sup_{n \in N',\ j=0,\ldots,\omega} \|u^{h,j}\|_m < \infty;$$

тогда можно выделить такую подпоследовательность индексов $N'' \subset N'$, что найдутся функции $u^0, \ldots, u^\omega$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty,\ n \in N''} \|u^{h,j} - (u^j(-\sigma h), \ \ldots, \ u^j((n+\tau)h))\|_m = 0 \quad j = 0, \ldots, \omega;$$

при этом, если u^σ — первая отличная от нулевой на $[0, 1]$ функция среди функций $u^0, \ldots, u^\omega$, то $u^\sigma, u^{\sigma+1}, \ldots, u^\omega$ — жорданова цепочка для задачи (1) в точке λ_0;

3) для любого замкнутого контура Γ из Λ такого, что все охватываемые им точки принадлежат Λ и на Γ не находится собственных значений задачи (1), имеет место сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \max_{u} \min_{u^h} \|u^h - (u(-\sigma h), \ \ldots, \ u((n+\tau)h))\|_m = 0,$$

где min берется по всем векторам u^h из[7] $J((1_n), \Gamma)$ и max по всем функциям и из $J((1), \Gamma)$, для которых норма в $C^{(m)}[0, 1]$ не больше единицы.

§ 3. Доказательство теоремы сходимости

3.1. Для доказательства введем подходящие банаховы пространства и рассмотрим задачи (1) и (1_n) как операторные уравнения $A(\lambda)x = 0$ и $A_n(\lambda)x_n = 0$, соотвественно (п. 3.2). Мы покажем (п. 3.3), что операторы $A(\lambda)$ и $A_n(\lambda)$ линейны, равномерно ограничены по норме и фредгольмовы (с индексом 0), и установим голоморфность операторов $A(\lambda)$ и $A_n(\lambda)$ как функ-

[7] Через $J((1), \Gamma)$ и $J((1_n), \Gamma)$ обозначены, соответственно для задач (1) и (1_n), линейные оболочки корневых подпространств, соответствующих собственным значениям внутри Γ.

ций от параметра λ (п. 3.4). Затем введем необходимые понятия сходимости и собственной сходимости операторов (п. 3.5), определим нужные для абстрактной схемы связывающие операторы (п. 3.6) и установим сходимость операторов $A_n(\lambda)$ к оператору $A(\lambda)$ (п. 3.7). После доказательства двух вспомогательных результатов (п. 3.8), с помощью условия (с) установим также собственную сходимость операторов $A_n(\lambda)$ к оператору $A(\lambda)$ (п. 3.9).

Этим мы докажем, что можно применить приведенные в [5], пп. 3.5, 3.6, 4.3, 5.2 теоремы — у них всех одни и те же предположения, выполненность которых в нашем случае мы проверим — и теорема сходимости получится как простая переформулировка этих теорем. В п. 3.10 отмечается лишь, как из оценок статьи [5] вытекают приведенные в теореме сходимости оценки (3) и (4).

Всюду в дальнейшем будем считать, что

$$n \in \mathrm{N};\quad h=1/n;\quad i=1,\ \ldots,\ m;\quad j=0,\ \ldots,\ n;$$

и, если специально не оговаривается другое, то $k=0,\ \ldots,\ m$.

Через N', N'', ... *будем обозначать подпоследовательности из* **N**.

Запись $x_n \to x (n \in N')$ *означает, что последовательность* $\{x_n\}$ *стремится к* x, *когда* n, *пробегая* N', *стремится к* ∞.

Через c *будем обозначать положительную постоянную, вообще говоря, различную в разных местах.*

До приступления к доказательству напомним еще (см., например, [9], теорема 1.1), что для сходимости формулы численного дифференцирования

$$u^{(k)}(t)=h^{-k}\sum_{p=-r}^{s} a_p u(t+ph)+\varrho_h(u,t)=$$

$$=h^{-k}\sum_{p=-r}^{s} a_p I_h{}^p u(t)+\varrho_h(u,t),$$

где $I_h{}^p u(t)=u(t+ph)$, необходимо (и достаточно), чтобы его характеристический многочлен

$$\chi_k(z)=\sum_{p=-r}^{s} a_p z^p$$

был представим в виде

$$\chi_k(z)=(z-1)^k\sum_{p=-r}^{s-k} b_p z^p=\sum_{p=-r}^{s-k} b_p(z-1)^k z^p,\qquad \sum_{p=-r}^{s-k} b_p=1.$$

Отсюда выводим, что для разностных аналогов из набора (H′) имеет место равенство[8]

$$[d_h{}^k u^h]_j=\sum_{p=-r}^{s-k} b_p[\partial_h{}^k u^h]_{j+p}. \tag{5}$$

[8] Определение оператора $\partial_h{}^k$ дано в равенстве (2).

3.2. Перепишем задачи (1) и (1_n) в равносильном операторном виде. Определим

$$E=\{x \mid x=u\in C^{(m)}[0,1],\ \ \|x\|_E=\|u\|_{C^{(m)}[0,1]}\};$$
$$F=\{y \mid y=(v;\ v_1,\ \dots,\ v_m)\in C[0,1]\times \mathrm{C}^m,$$
$$\|y\|_F=\max\{\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|v(t)|,\ \ \max_{i=1,\dots,m}|v_i|\}\};$$
$$A(\lambda)x=A(\lambda)u=(L(\lambda)u;\ l_1(\lambda)u,\ \dots,l_m(\lambda)u)\in F,\quad \forall x\in E;$$
$$E_n=\{x_n \mid x_n=u^h=(u^h_{-\sigma},\ \dots,\ u^h_{n+\tau})\in \mathrm{C}^{m+n+1},\quad \|x_n\|_{E_n}=\|u^h\|_m\};$$
$$F_n=\{y_n \mid y_n=(v^h_0,\ \dots,\ v^h_n;\ v_1,\ \dots,\ v_m)\in \mathrm{C}^{m+n+1}$$
$$\|y_n\|_{F_n}=\max\{\max_{j=0,\dots,n}|v^h_j|,\ \ \max_{i=1,\dots,m}|v_i|\}\};$$
$$A_n(\lambda)x_n=A_n(\lambda)u^h=(L_h(\lambda)u^h;\ l_{1,h}(\lambda)u^h,\ \dots,\ l_{m,h}(\lambda)u^h)\in F_n,\quad \forall x_n\in E_n.$$

При таких определениях E, F, E_n, F_n — банаховы пространства, а задачи (1) и (1_n) равносильны, соответственно, операторным уравнениям

$$A(\lambda)x=0,\qquad x\in E,\qquad A(\lambda):E\to F, \tag{1'}$$
$$A_n(\lambda)x_n=0,\qquad x_n\in E_n,\qquad A_n(\lambda):E_n\to F_n. \tag{$1_n'$}$$

3.3. Покажем, что операторы $A(\lambda)$ и $A_n(\lambda)$ при каждом фиксированном λ из Λ линейны, ограничены и фредгольмовы, и что операторы $A_n(\lambda)$ ограничены по норме равномерно по n и λ на каждом компакте Λ_0 из Λ, т. е. что[9]

$$\|A_n(\lambda)\|\leqslant c(\Lambda_0)=\mathrm{const}. \tag{6}$$

Действительно, линейность и ограниченность оператора $A(\lambda)$ ясны из определений. Его фредгольмовость можно установить, например, сведением вопроса к изучению матриц порядка $m\times m$, так как

1) любое решение задачи $L(\lambda)u=0$ можно искать методом неопределенных коэффициентов в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений,

2) уравнение $L(\lambda)u=v$ имеет в наших условиях (непрерывность коэффициентов) решение при всех v из $C[0,1]$ (при этом можно задавать любые начальные условия).

Ясна также линейность операторов $A_n(\lambda)$. Для установления их ограниченности и оценки (6) из представления (5), ввиду

---

[9] Пусть X и Y — банаховы пространства. Через $\mathfrak{L}(X,Y)$ будем обозначать (банахово) пространство всех линейных непрерывных операторов B из X в Y, с обычной нормой. Оператор B из $\mathfrak{L}(X,Y)$ называется *фредгольмовым* (с индексом 0) или Φ_0 — оператором, если область его значений BX замкнута в F, а размерности ядра $\ker B$ и факторпространства Y/BX конечны и равны. В частности, в случае $\dim X=\dim Y<\infty$ все операторы B из $\mathfrak{L}(X,Y)$ фредгольмовы.

конечного числа формул в наборе (H′), выводим оценку (10.16) из [2]:

$$\max_{j=0,\ldots,n} |[D_h^{(k)}u^h]_j| \leqslant c\cdot \max_{q=-\sigma,\ldots,n+\tau-k} |[\partial_h{}^k u^h]_q| \leqslant c\|u^h\|_m. \qquad (7)$$

Оценка (6), а тем более ограниченность каждого оператора $A_n(\lambda)$, вытекает из (7) и ограниченности коэффициентов в определении $A_n(\lambda)$ (см. предположения 3° и 4° теоремы сходимости).

Фредгольмовость операторов $A_n(\lambda)$ из $\mathfrak{L}(E_n, F_n)$ следует из равенства $\dim E_n = \dim F_n = m + n + 1$.

3.4. Оператор-функции $A(\lambda)$ и $A_n(\lambda)$ голоморфны на Λ, т. е. при всех x из E и x_n из E_n функции $A(\lambda)x$ и $A_n(\lambda)x_n$ в некоторой окрестности любой точки λ_0 из Λ можно разлагать в сходящиеся по норме степенные ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^k y^k/k! \quad (y^k \in F), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^k y_n{}^k/k! \quad (y_n{}^k \in F_n). \quad (8)$$

Действительно, рассмотрим функцию $A(\lambda)x$. Разложим коэффициенты $a_k(t,\lambda)$, $\alpha_{ik}(\lambda)$, $\beta_{ik}(\lambda)$ в выражении для $A(\lambda)$ в степенные ряды в точке λ_0, определим операторы $A^{(k)}(\lambda_0)$ с помощью выражений при $(\lambda-\lambda_0)^k/k!$, положим $y^{(k)} = A^{(k)}(\lambda_0)x$ и составим формально первый из степенных рядов (8). Сходимость этого ряда (в F к $A(\lambda)x$) вытекает из равномерной сходимости рядов для коэффициентов $a_k(t,\lambda)$, которая, в свою очередь, является следствием равномерной ограниченности коэффициентов $a_k(t,\lambda)$ при $t \in [0,1]$, $\lambda \in \{\lambda \mid |\lambda-\lambda_0| \leqslant \delta\} \subset \Lambda$ (см. предположение 4° в теореме сходимости).

Голоморфность функций $A_n(\lambda)x_n$ устанавливается аналогично.

3.5. Приведем некоторые определения, нужные для применения общих результатов из [5].

Пусть заданы линейные ограниченные операторы («связывающие» отображения) P_n и Q_n из E в E_n и из F в F_n соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\|P_n x\|_{E_n} \to \|x\|_E,\ \forall\, x \in E, \qquad \|Q_n y\|_{F_n} \to \|y\|_F,\ \forall\, y \in F. \qquad (9)$$

Говорят, что последовательность $\{x_n : n \in N'\}$ с $x_n \in E_n$ *P-сходится*[10] *к элементу x из E*, и мы будем писать $P\text{-}\lim x_n = x$ $(n \in N')$, если

$$\|x_n - P_n x\|_{E_n} \to 0 \qquad (n \in N').$$

Последовательность $\{x_n : n \in N'\}$ с $x_n \in E_n$ называется *P-компактной в E*, если из каждой ее бесконечной подпоследовательности можно выделить подпоследовательность, P-сходящуюся к некоторому элементу x из E. Аналогично определяются

[10] Вместо P-сходимости говорят также о *дискретной сходимости* или просто о *сходимости*.

понятия Q-сходимости и Q-компактности в F для последовательности $\{y_n : n \in N'\}$ с $y_n \in F_n$.

Говорят, что последовательность $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ операторов $A_n \in \mathfrak{L}(E_n, F_n)$ *собственно*[11] *PQ-сходится к оператору* $A \in \mathfrak{L}(E, F)$, если

а) $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ *сходится* к A, т. е.

$$\|A_n\| \leqslant \text{const}, \quad \|A_n P_n x - Q_n A x\|_{F_n} \to 0 \ (n \to N), \quad \forall x \in E,$$

б) если $\|x_n\|_{E_n} \leqslant 1$ и $\{A_n x_n : n \in \mathbf{N}\}$ является Q-компактной в F, то $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ является P-компактной в E.

3.6. В нашем случае определим «связывающие» операторы соотношениями

$$P_n x = P_n u(t) = (Tu(-\sigma h), \ldots, Tu((n+\tau)h)),$$

$$Q_n y = Q_n(v(t);\ v_1, \ldots, v_m) = (v(0),\ v(h), \ldots, v(nh);\ v_1, \ldots, v_m),$$

где $T(u)$ — следующее гладкое продолжение на отрезок $[-\sigma, 1+\tau]$ функции u, заданной на отрезке $[0, 1]$:

$$Tu(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m+\mu} u^{(k)}(0)\, t^k/k! & \text{при} \quad t<0, \\ u(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \sum\limits_{k=0}^{m+\mu} u^{(k)}(1)\,(t-1)^k/k! & \text{при} \quad t>1, \end{cases} \tag{10}$$

для $(m+\mu)$ раз непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$ функции u. При таком определении $P_n \in \mathfrak{L}(E, E_n)$ и $Q_n \in \mathfrak{L}(F, F_n)$. Нетрудно также убедиться, что выполнены соотношения (9).

Для применения теорем из [5] остается теперь показать, что при каждом фиксированном λ из Λ последовательность операторов $\{A_n(\lambda) : n \in \mathbf{N}\}$ собственно сходится к оператору $A(\lambda)$.

3.7. Убедимся, что при каждом фиксированном λ из Λ последовательность операторов $\{A_n(\lambda) : n \in \mathbf{N}\}$ сходится к оператору $A(\lambda)$; параметр λ будем при этом опускать.

Из оценки (6) получим немедленно, что $\|A_n\| \leqslant c$. Далее, из выполненности условия (н) следует, что

$$\max_{j=0, \ldots, n} |[D_h^{(k)} P_n u(t) - Q_n u^{(k)}(t)]_j| \to 0$$

для любой функции u из $C^{(m)}[0, 1]$. Но это, ввиду ограниченности коэффициентов $a_k(t)$, $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ в выражении A и A_n, влечет за собой сходимость

$$\|[A_n P_n x - Q_n A x]\|_{F_n} \to 0, \quad \forall x \in E,$$

что и требовалось показать.

[11] В этом случае говорят также о *собственной сходимости* операторов, о *регулярной аппроксимации* операторов, о *y_0-аппроксимации* операторов.

3.8. Для установления собственности сходимости последовательности операторов $\{A_n(\lambda) : n \in \mathbf{N}\}$ к оператору $A(\lambda)$, нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты (леммы 1 и 2 ниже).

С любым вектором

$$z^h = (z^h{}_{-\sigma}, \ldots, z^h{}_{n+\tau-k})$$

из $C^{n+m+1-k}$ свяжем ломаную z_h из $C[-\sigma, 1+\tau]$ с возможными переломами только в точках $t = qh$, $q = -\sigma, \ldots$, $\ldots n+\tau-k$, и такую, что $z_h(qh) = z^h{}_q$ при $q = -\sigma, \ldots$, $\ldots, n+\tau-k$, а $z_h(-\sigma) = z^h{}_{-\sigma}$, $z_h(1+\tau) = z^h{}_{n+\tau-k}$.

Лемма 1. *Пусть при некотором* $k = 0, 1, \ldots, m$ *задана последовательность* $\{z^h : n \in \mathbf{N}\}$ *векторов такая, что*

$$\max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k} |z^h{}_q| \leqslant c, \qquad \max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k-1} |[\partial_h z^h]_q| \leqslant c.$$

Тогда соответствующая последовательность ломаных $\{z_h : n \in \mathbf{N}\}$ *компактна в* $C[-\sigma, 1+\tau]$. *При этом, если* $z_h \to z\,(n \in N' \subset \mathbf{N})$ *в* $C[-\sigma, 1+\tau]$, *то*

$$\max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k} |z^h{}_q - z(qh)| \to 0 \quad (n \in N').$$

Доказательство. Компактность последовательности ломаных следует из теоремы Арцела—Асколи, так как в наших условиях все ломаные z_h удовлетворяют условию Липшица с общей константой. Второе утверждение леммы 1 — непосредственное следствие из определений.

Лемма 2. *Пусть при некотором* $k = 0, 1, \ldots, m$ *для последовательностей векторов* z^h *и*

$$w^h = (w^h{}_{-\sigma}, \ldots, w^h{}_{n+\tau-k-1}) = ([\partial_h z^h]_{-\sigma}, \ldots, [\partial_h z^h]_{n+\tau-k-1})$$

и функций z, w *из* $C[-\sigma, 1+\tau]$ *имеют место сходимости*

$$\max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k} |z^h{}_q - z(qh)| \to 0 \quad (n \in N' \subset \mathbf{N}),$$

$$\max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k-1} |w^h{}_q - w(qh)| \to 0 \quad (n \in N' \subset \mathbf{N}).$$

Тогда

1) $$\max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k} |z^h{}_q - f(qh)| \to 0 \qquad (n \in N'),$$

2) $$\max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k-1} |[\partial_h z^h]_q - f'(qh)| \to 0 \qquad (n \in N'),$$

для $f \in C^1[-\sigma, 1+\tau]$, *где* $f(t) = z(0) + \int\limits_0^t w(t)\,dt$.

Доказательство. Пусть $\{z_h : n \in \mathbf{N}\}$ и $\{w_h : n \in \mathbf{N}\}$ — соответствующие последовательностям $\{z^h : n \in \mathbf{N}\}$ и

$\{w^h : n \in \mathbf{N}\}$ последовательности ломаных. Применяя неравенства

$$|z_h(t) - z(t)| \leqslant |z_h(t) - z_h(qh)| + |z^h{}_q - z(qh)| + |z(qh) - z(t)|,$$
$$|z_h(t) - z_h(qh)| \leqslant |z^h{}_q - z^h{}_{(q+1)h}|, \qquad t \in [qh, (q+1)h],$$

и учитывая, что z_h постоянна при $t \leqslant -\sigma h$ и при $t \geqslant (n + \tau - k)h$, убедимся, что $\{z_h : n \in N'\}$ сходится в $C[-\sigma, 1 + \tau]$ к функции z_0:

$$z_0(t) = \begin{cases} z(0) & \text{при} \quad t < 0, \\ z(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ z(1) & \text{при} \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

Аналогично $w_h \to w_0 (n \in N')$ в $C[-\sigma, 1 + \tau]$,

$$w_0(t) = \begin{cases} w(0) & \text{при} \quad t < 0, \\ w(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ w(1) & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим, далее, последовательность функций f_h с

$$f_h(t) = z^h{}_0 + \int_0^t w_h(t)\,dt, \qquad t \in [-\sigma, 1 + \tau].$$

Ввиду равномерной сходимости w_h к w_0 при $n \in N'$, имеет место равномерная сходимость

$$f_h(t) \to f_0(t) = z(0) + \int_0^t w_0(t)\,dt \qquad (n \in N',\ t \in [-\sigma, 1+\tau]).$$

С другой стороны, так как w_h — ломаные, для $q = 0, 1, \ldots, \ldots, n + m - k - 1$ можно писать

$$\int_0^{qh} w_h(t)\,dt = \sum_{p=0}^{q-1} (w^h{}_p + w^h{}_{p+1}) h/2 =$$
$$= -w^h{}_0 h/2 + (w^h{}_0 + w^h{}_1 + \ldots + w^h{}_{q-1}) h + w^h{}_q h/2 =$$
$$= -hw^h{}_0/2 + (-z^h{}_0 + z^h{}_q) + hw^h{}_q/2,$$
$$f_h(qh) = z^h{}_q + h(w^h{}_q - w^h{}_0)/2.$$

Применяя неравенства

$$|f_0(t) - z(t)| \leqslant |f_0(t) - z^h{}_q| + |z^h{}_q - z(qh)| + |z(qh) - z(t)|,$$
$$|f_0(t) - z^h{}_q| \leqslant |f_0(t) - f_0(qh)| + |f_0(qh) - f_h(qh)| + |f_h(qh) - z^h{}_q|,$$
$$|f_h(qh) - z^h{}_q| \leqslant h(|w^h{}_q| + |w^h{}_0|)/2 \leqslant c \cdot h, \quad q = 0, 1, \ldots, n + m - k - 1,$$

выводим, что $z(t) = f_0(t)$ для всех t из отрезка $[0, 1]$, т. е. имеет место утверждение 1).

Утверждение 2) — непосредственное следствие из определений, ибо $z(t) - f(t) = 0$ на отрезке $[0, 1]$, и поэтому

$$\max_{q = -\sigma, \ldots, n+\tau-k} |z(qh) - f(qh)| \to 0 \qquad (n \in N').$$

3.9. Докажем, что при каждом фиксированном λ из Λ последовательность операторов $\{A_n(\lambda) : n \in \mathbf{N}\}$ собственно сходится к оператору $A(\lambda)$; параметр λ будем при этом опускать.

Учтя п. 3.7., остается еще проверить условие б) определения собственной сходимости. Итак, пусть $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ с x_n из E_n — такая последовательность, что $\|x_n\| \leqslant 1$ и $\{A_n x_n : n \in \mathbf{N}\}$ является Q-компактной в F. Пусть $\{x_n : n \in N' \subset \mathbf{N}\}$ — некоторая ее подпоследовательность. Покажем, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть $x_n = u^h$, $n \in \mathbf{N}$. Применение леммы 1 при $k = m-1, m-2, \ldots, 0$ показывает, что существует подпоследовательность $N'' \subset N'$ индексов таких, что выполнены условия леммы 2 при $k = m-2, m-3, \ldots, 0$. В результате последовательного применения леммы 2 получим, что существует функция φ из $C^{(m-1)}[-\sigma, 1+\tau]$, для которой

$$\max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k} |[\partial^h{}_k u^h]_q - \varphi^{(k)}(qh)| \to 0 \quad (n \in N''), \; k=0, 1, \ldots, m-1.$$

При этом при $n \in N''$ для $k = 0, 1, \ldots, m-1$ также

$$\max_{j=0, \ldots, n} |[D_h{}^{(k)} u^h]_j - \varphi^{(k)}(jh)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{j=0, \ldots, n} |[D_h{}^{(k)}(u^h - \varphi^h)]_j + ([D_h{}^{(k)}\varphi^h]_j - \varphi^{(k)}(jh))| \to 0, \qquad (11)$$

где $\varphi^h = (\varphi(-\sigma h), \ldots, \varphi((n+\tau)h))$. Действительно, из неравенства (7) и сходимости разностных выражений $\partial^k{}_h$ к производным следует, что для $k = 0, 1, \ldots, m-1$ при $n \in N''$ справедливо

$$\max_{j=0, \ldots, n} |[D_h{}^{(k)}(u^h - \varphi^h)]_j| \leqslant c \cdot \max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k} |[\partial_h{}^k(u^h - \varphi^h)]_q| \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k} (|[\partial_h{}^k u^h]_q - \varphi^{(k)}(qh)| + |\varphi^{(k)}(qh) - [\partial_h{}^k \varphi^h]_q|) \to 0,$$

а из сходимости разностных операторов $D^{(k)}{}_h$ к производным, вытекающей из выполнимости условия (н), получим сходимость к нулю второго слагаемого в (11).

Ввиду компактности последовательности $\{A_n x_n : n \in \mathbf{N}\}$ в F выделим из N'' такую подпоследовательность индексов $N''' \subset N''$, что

$$Q\text{-}\lim A_n x_n = Q\text{-}\lim A_n u^h = y = (v(t);\, v_1, \ldots, v_m) \in F \qquad (n \in N''').$$

Тогда

$$\max_{j=0, \ldots, n} |[L_h u^h]_j - v(jh)| \to 0 \qquad (n \in N'''),$$

и, ввиду (11) и ограниченности коэффициентов $a_k(t)$, также

$$\max_{j=0, 1, \ldots, n} |[D_h{}^{(m)} u^h]_j - f(jh)| \to 0 \qquad (n \in N'''), \qquad (12)$$

где функция $f \in C[-\sigma, 1+\tau]$ определена равенствами

$$f(t)=v(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k(t)\varphi^{(k)}(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$f(t)\equiv f(0) \text{ при } t<0, \qquad f(t)\equiv f(1) \text{ при } t>1.$$

Теперь, впервые, прибегаем к условию (c) из п. 2.2 — из импликации (C_4) в комплексном виде и сходимости (12) вытекает, что

$$\max_{q=-\sigma,\ \ldots,\ n+\tau-h}\left|[\partial_h{}^m u^h]_q-f(qh)\right|\to 0 \qquad (n\in N''').$$

Последовательным применением леммы 2 при $k=m-1$, $m-2$, ..., 0 установим, далее, существование функции ψ из $C^{(m)}[-\sigma, 1+\tau]$ такой, что для $k=0, 1, \ldots, m$ имеет место сходимость

$$\max_{q=-\sigma,\ \ldots,\ n+\tau-h}\left|[\partial_h{}^k u^h]_q-\psi^{(k)}(qh)\right|\to 0 \qquad (n\in N'''). \tag{13}$$

Учтя (13) и сходимость разностных выражений $\partial^k{}_h$ к производным, получим

$$P\text{-}\lim x_n=u(t)=x\in E \qquad (n\in N'''\subset N''\subset N'),$$

где $u=T\psi_0$, а ψ_0 — сужение функции ψ на отрезок $[0, 1]$ и оператор T определен равенством (10).

3.10. В [5, 7] оценки скорости сходимости выражены через

$$\varepsilon_n=\max_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}\ \max_{e\in J(A,\lambda_0),\ \|e\|=1}\|[Q_nA(\lambda)-A_n(\lambda)P_n]e\|_{Fn},$$

где λ_0 — собственное значение задачи (1′), δ — некоторое достаточно малое положительное число, а $J(A,\lambda_0)$ — корневое подпространство оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0. Чтобы получить из этих оценок оценки теоремы п. 2. 3, достаточно знать, что $J(A, \lambda_0)$ конечномерно и функции e из $J(A,\lambda_0)$ принадлежат классу $C^{(m+\mu)}[0, 1]$ при $\mu\geqslant 0$, если только все коэффициенты $\alpha_k(t,\lambda)$ по крайней мере μ раз непрерывно дифференцируемы по $t\in[0, 1]$.

§ 4. Анализ условия (c)

Пусть выполнены все условия п. 2.1.

Рассмотрим дискретизации $D_h{}^{(m)}$ и $\partial_h{}^m$ старшей производной $u^{(m)}$ в задаче (1) как линейные операторы из нормированного пространства

$$U^h=\{u^h\mid u^h=(u^h{}_{-\sigma}, \ldots, u^h{}_{n+\tau})\in \mathrm{R}^{m+n+1}, \quad \|u^h\|_{U^h}=\|u^h\|_m\}$$

в нормированные пространства [12]

[12] Напомним, что, по определению, $\sigma+\tau=m$; значит $n+\tau-m=n-\sigma$.

$$V^h = \{v^h \mid v^h = (v^h{}_0, \ldots, v^h{}_n)' \in \mathrm{R}^{n+1}, \quad \|v^h\|_{V^h} = \max_{j=0,\ldots,n} |v^h{}_j|\}$$

и

$$W^h = \{w^h \mid w^h = (w^h{}_{-\sigma}, \ldots, w^h{}_{n-\sigma}) \in \mathrm{R}^{n+1}, \quad \|w^h\|_{W^h} = \max_{q=-\sigma,\ldots,n-\sigma} |w^h{}_q|\},$$

соответственно. Учитывая (5), можно писать, что

$$D_h^{(m)} = B_h \partial_h{}^m, \tag{14}$$

где B_h — матрица порядка $(n+1) \times (n+1)$, в которой в j-ой строке на $(j+p+\sigma)$ — том месте стоит коэффициент b_p, соответствующий применяемой в точке $t = jh$ формуле из набора (H′), а остальные элементы — нули. Поэтому

$$\|B_h\| = \|(b_{j,k})^n{}_{j,k=0}\| = \max_{j=0,\ldots,n} \sum_{k=0}^{n} |b_{jk}| \leqslant \max \sum_{p=-r}^{s} |b_p| \leqslant c, \tag{15}$$

здесь второй максимум берется по всем дискретным аналогам производной порядка m в наборе (H′) и он конечен ввиду конечности набора.

Предложение 1. *Условие* (c) *равносильно условию*:

(s): *матрицы B_h при всех достаточно больших n обратимы, и*

$$\|B_h{}^{-1}\| \leqslant c_1 = \text{const}. \tag{16}$$

Доказательство. Импликация (s) ⇒ (c) очевидна. Пусть условие (s) не выполнено: существует подпоследовательность $\{w^h : n \in N' \subset \mathbf{N}\}$ с $w^h \in W^h$ и $\|w^h\|_{W^h} = 1$ такая, что $\|B_h w^h\|_{V^h} \to 0 \,(n \in N')$. Рассматривая последовательность $\{u^h : n \in N'\}$, где $\partial_h{}^m u^h = w^h$, заключаем, что тогда не выполнено также условие (c). (Уравнение $\partial_h{}^m u^h = w^h$ всегда разрешимо: можно последовательно определить $\partial_h{}^k u^h$, $k = m-1$, $m-2, \ldots, 0$, приняв, например, $u^h{}_q = 0$ при $q = -\sigma, \ldots, \ldots, m-\sigma-1$).

Условие (s) формально уже не связано с порядком дифференциального уравнения (1) — те же матрицы B_h могут получиться при разных m. Алгебраический анализ условия (s) проведен в [2], п. 10.7 (в предположении, что во всех узлах сетки, кроме конечного числа крайних, пользуются одной и той же формулой из набора (H′)).

Предложение 2. *Условие* (c) *равносильно условию*

$$c^{-1} \|D_h{}^{(m)} u^h\|_{V^h} \leqslant \|\partial_h{}^m u^h\|_{W^h} \leqslant c_1 \|D_h{}^{(m)} u^h\|_{V^h}, \qquad \forall u^h \in U^h. \tag{17}$$

Доказательство. Неравенства (17) следуют непосредственно из оценок (15) и (16). Из неравенств (17) и представления (14), в свою очередь, следуют оценки (15) и (16).

---

[13] Условие (K) то же самое, что в [2], стр. 145.

Предложение 3. *Условие* (c) *равносильно условию*[13]:

(K): *разностная задача Коши*

$$D_h^{(m)} u^h = v^h,$$

$$u^h_{-\sigma} = \ldots = u^h_{m-\sigma-1} = 0,$$

имеет для почти всех n при всех v^h единственное решение u^h, для которого

$$\|u^h\|_{U^h} \leqslant c \, \|v^h\|_{V^h}.$$

Доказательство. Определим

$$U^h_0 = \{u^h \mid u^h \in U^h, \; u^h_{-\sigma} = \ldots = u^h_{m-\sigma-1} = 0\},$$

и заметим, что для векторов u^h из U^h_0 имеет место оценка

$$\max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-k} |[\partial_h^k u^h]_q| \leqslant \max_{q=-\sigma, \ldots, n+\tau-m} |[\partial_h^m u^h]_q| =$$

$$= \| ([\partial_h^m u^h]_{-\sigma}, \; \ldots, \; [\partial_h^m u^h]_{n-\sigma}) \|_{W^h}. \qquad (18)$$

(В этом нетрудно убедиться последовательно для $k = m - 1$, $m - 2$, ..., 0). Заметим также, что формула (14) остается в силе, если рассматривать $D_h^{(m)}$ и ∂_h^m как операторы из U^h_0 в V^h и из U^h_0 в W^h соответственно.

Учитывая предложение 1, покажем, что условие (K) равносильно условию (s). Импликация (s) $\Rightarrow$ (K) следует из определении и оценки (18). Если же условие (s) не выполнено, то (см. доказательство предложения 1) существует подпоследовательность $\{u^h : n \in N' \subset \mathbf{N}\}$ с u^h из U^h_0 и такая, что

$$\|\partial_h^m u^h\|_{W^h} = 1, \qquad \|D_h^{(m)} u^h\|_{V^h} \to 0 \qquad (n \in N'),$$

т. е. не может быть выполнено условие (K).

В ходе доказательства предложения 3 мы указали, что в условии (s) не важно, рассматриваются ли векторы u^h из U^h или U^h_0. Из доказательств предложений 1 и 2 видно, что тогда это не важно также в условии (c) и в неравенствах (17) соответственно. Следовательно, имеет место

Предложение 4. *Если в условии* (c) *или в неравенствах* (17) *рассматривать только векторы u^h с $u^h_{-\sigma} = \ldots = u^h_{m-\sigma-1} = 0$, то получим условия, равносильные условию* (c).

Литература

1. Вайникко Г. М., О разностном методе для обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, **9**, № 5, 1057—1074.
2. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту, 1970.
3. Вайникко Г. М., О сходимости разностного метода в задаче о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, **15**, № 1, 87—100.
4. Вайникко Г. М., Карма О. О., О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, **14**, № 4, 828—837.

5. Вайникко Г. М., Карма О. О., О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, **14**, № 6, 1393—1408.
6. Вайникко Г. М., Тамме Э. Э., Сходимость разностного метода в задаче о периодических решениях уравнений эллиптического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, **16** (в печати).
7. Карма О. О., О сходимости дискретизационных методов отыскания собственных значений интегральных и дифференциальных операторов, голоморфно зависящих от параметра. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1971, № 24, 144—159.
8. Карма О. О., Об аппроксимации оператор-функций и сходимости приближенных собственных значений. Дисс. канд. физ.-мат. н., Тарту, Тартуск. ун-т, 1971.
9. Крейн С. Г., Шаблицкая Л. Н., Об устойчивости разностных схем для задачи Коши. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 4, 648—664.

Поступило
18 II 1975

DIFERENTSMEETODI KOONDUVUSEST MITTELINEAARSETES OMAVÄÄRTUSÜLESANNETES LINEAARSETE DIFERENTSIAALVÕRRANDITE KORRAL

O. Karma

Resümee

Rakendusena operaatorite regulaarse koonduvuse üldisele teooriale [4, 5, 8] näidatakse diferentsmeetodi koonduvus harilike lineaarsete diferentsiaalvõrrandite omaväärtusülesannetes (kusjuures parameeter võib esineda nii võrrandi kordajates kui rajatingimustes mittelineaarselt). On tuletatud ka koonduvuskiiruse asümptootline hinnang ning puudutatud omavektorite koonduvust.

ABOUT CONVERGENCE OF DIFFERENCE METHOD IN NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS OR LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

O. Karma

Summary

The article can be conceived as an example of using the general theory of regular approximation of operators [4, 5, 8]; together with the general theory it is an example of some methodic to prove theorems of convergence for difference methods (see [3, 6, 8], cf. [1, 2, 7])

Here we prove a theorem (see section 2.3) about the convergence of the difference method in eigenvalue problems for ordinary linear differential equations (the parameter can occur in coefficients and in boundary conditions in a nonlinear way); asympthotic estimation of the velocity of the convergence is also derived, and convergence of eigenvectors is touched on.

We use arbitrary converging discrete approximations of derivations, the additional condition of some consistency — condition (c) in section 2.2 (also see § 4) — is required only for the approximation of the highest derivation. The only difficulty of the proof is to show (in sections 3.8, 3.9) that the approximation of operators is regular (for definition see section 3.5) — it is the condition (c) is used for. All proofs can be carried through in more general cases, also (see, e. g., remark 2 in section 1.4).

ОБ ОДНОМ СЕМАНТИЧЕСКОМ АЛГОРИТМЕ

М. Койт

Кафедра математической статистики и программирования

§ 1. Введение

В статье [1] применяется некоторый метод моделирования семантики. Для этой цели вводятся понятия семантики, утилитарной семантики и элементарно-утилитарного языка как пары, состоящей из утилитарной семантики и элементарного алгоритма. В виде элементарно-утилитарного языка можно представить, например, определенное подмножество индексов универсальной десятичной классификации (УДК).

В данной статье приводится некоторый, т. н. сохраняющий алгоритм $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$, и определяется утилитарный язык как пара, состоящая из утилитарной семантики и сохраняющего алгоритма. Строится модель УДК в виде утилитарного языка.

Пусть заданы алфавиты

$$\mathfrak{D} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n; R_1, R_2, \ldots, R_m\}$$

и

$$\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\},$$

причем $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{A} = \varnothing$.

Определение 1. *Алгоритм* $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$ *называется семантическим, если*

1° *алгоритм применим к любому непустому кортежу алфавита* $\mathfrak{D}$ *и превращает его в некоторый кортеж алфавита* $\mathfrak{A}$;

2° *кортеж* $Z(M) \neq \Lambda$ *тогда и только тогда, когда* $M \in \mathfrak{M}^*$, *где* $\mathfrak{M}^*$ — *утилитарная семантика* ([1], стр. 264).

Семантический алгоритм одновременно является и лингвистическим алгоритмом из алфавита $\mathfrak{D}$ в алфавит $\mathfrak{A}$ (см. [2], стр. 105).

Если $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$ — семантический алгоритм и $M \in \mathfrak{M}^*$, то $Z(M)$ будем называть *представлением* понятия M в алфавите $\mathfrak{A}$.

Определение 2. *Семантический алгоритм* $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$ *называется сохраняющим, если*

$$Z(M) = \lambda_1 \mu_{11} \lambda_2 \mu_2 \lambda_3 \mu_{12} \lambda_4 \qquad (1)$$

для любого понятия $M \in \mathfrak{M}^* \setminus \mathfrak{S}^*$, *где* $\mu_{11}\mu_{12} = Z(M^1)$ *и* $\mu_2 = Z(M^2)$, *а* λ_1, λ_2, λ_3 *и* λ_4 *— некоторые (в частности, пустые) кортежи алфавита* $\mathfrak{A}$.

Отметим, что элементарный алгоритм ([1], стр. 265) является сохраняющим алгоритмом.

Определение 3. *Пара* ($\mathfrak{M}^*$, $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$), *где* $\mathfrak{M}^*$ *— утилитарная семантика и* $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$ *— сохраняющий алгоритм, называется утилитарным языком.*

В частности, элементарно-утилитарный язык является утилитарным языком.

§ 2. Сохраняющий алгоритм $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$

Для построения алгоритма $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$ пусть заданы:

1) представления σ_j всех простых понятий $A_j \in \mathfrak{S}^*$, т. е. кортежи алфавита $\mathfrak{A}$, в которые алгоритм $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$ превращает соответствующие простые понятия;

2) представления

$$Z(R_iA_jA_k) = \lambda_1{}^i\sigma_{j1}{}^i\lambda_2{}^i\sigma_k\lambda_3{}^i\sigma_{j2}{}^i\lambda_4{}^i \tag{2}$$

понятий $R_iA_jA_k \in \mathfrak{G}^*$, где $\sigma_{j1}{}^i\sigma_{j2}{}^i = \sigma_j = Z(A_j)$ и $\sigma_k = Z(A_k)$, причем выделено некоторое начало кортежа (2):

$$\lambda_1{}^i\sigma_{j1}{}^i\lambda_2{}^i\sigma_k\lambda_3{}^i \tag{3}$$

или

$$\lambda_1{}^i\sigma_{j1}{}^i. \tag{4}$$

Тем самым множество $\mathfrak{G}^*$ распадается на два непересекающихся подмножеств $\mathfrak{G}^{*1}$ и $\mathfrak{G}^{*2}$. Если для $M \in \mathfrak{G}^*$ выделено начало (3) соответствующего представления $Z(M)$, то $M \in \mathfrak{G}^{*1}$, а если выделено начало (4), то $M \in \mathfrak{G}^{*2}$.

Предлагаемый алгоритм $Z[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$ для образования представления в алфавите $\mathfrak{A}$ некоторого (произвольного) понятия исходит из представления определенного простого понятия и постепенно заменяет представления σ_j простых понятий A_j представлениями определенных понятий $R_iA_jA_k \in \mathfrak{G}^*$. Подкортеж $\sigma_{j1}{}^i$ представления σ_j при этом заменяется выделенным началом и подкортеж $\sigma_{j2}{}^i$ — оставшимся концом заданного кортежа (2).

Например, пусть для некоторого понятия $M = M_1A_jM_2$ имеем $Z(M) = \varrho_1\sigma_{j1}{}^i\varrho_2\sigma_{j2}{}^i\varrho_3$ и пусть $R_iA_jA_k \in \mathfrak{G}^{*1}$. Применяя предлагаемый алгоритм к понятию $N = M_1R_iA_jA_kM_2$, получаем:

$$Z(N) = \varrho_1\lambda_1{}^i\sigma_{j1}{}^i\lambda_2{}^i\sigma_k\lambda_3{}^i\varrho_2\sigma_{j2}{}^i\lambda_4{}^i\varrho_3.$$

Если, однако, $R_iA_jA_k \in \mathfrak{G}^{*2}$, то получаем:

$$Z(N) = \varrho_1\lambda_1{}^i\sigma_{j1}{}^i\varrho_2\lambda_2{}^i\sigma_k\lambda_3{}^i\sigma_{j2}{}^i\lambda_4{}^i\varrho_3.$$

Для алгоритма $Z[\mathfrak{O}, \mathfrak{A}]$ мы имеем следующие алфавиты:
входной алфавит $\mathfrak{O}$;
выходной алфавит $\mathfrak{A}$;
вспомогательный алфавит

$$\mathfrak{B} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{60}\} \cup \mathfrak{O}' \cup \mathfrak{O}'' \cup \mathfrak{A}' \cup \mathfrak{A}'',$$

где $\mathfrak{O}^r = \{A_1{}^r, A_2{}^r, \ldots, A_n{}^r; R_1{}^r, R_2{}^r, \ldots, R_m{}^r\}$ и $\mathfrak{A}^r = \{a_1{}^r, a_2{}^r, \ldots, a_p{}^r\}$ при $r = {}'$ или $r = {}''$, а $\mathfrak{O}'' \cup \{\omega_{56}, \omega_{57}, \ldots, \omega_{60}\}$ — вспомогательный алфавит алгоритма $Z_1[\mathfrak{O}, \mathfrak{O}' \cup \{\omega_1 \omega_2\}]$.

Первые формулы подстановки алгоритма $Z[\mathfrak{O}, \mathfrak{A}]$ совпадут с формулами подстановки алгоритма $Z_1[\mathfrak{O}, \mathfrak{O}' \cup \{\omega_1, \omega_2\}]$, который применим к любому непустому кортежу алфавита $\mathfrak{O}$ и превращает любое понятие $M \in \mathfrak{M}^*$ в его разложение в алфавите $\mathfrak{O}' \cup \{\omega_1, \omega_2\}$, а все остальные (непустые) кортежи алфавита $\mathfrak{O}$ — в пустой кортеж ([1], стр. 278—283). Отметим, что тем самым алгоритм $Z_1[\mathfrak{O}, \mathfrak{O}' \cup \{\omega_1, \omega_2\}]$ оказывается семантическим алгоритмом.

В формулы подстановки из множества (5) войдут некоторые подкортежи алфавитов $\{\omega_{46}\}$ или $\{\omega_{49}\}$ (см. стр. 232). Длина соответствующего подкортежа совпадает с длиной кортежа $\sigma_{j1}{}^i$, если рассматриваемый подкортеж находится слева от буквы ω_{55}, и с длиной кортежа $\sigma_{j2}{}^i$ в противном случае.

Схема алгоритма $Z[\mathfrak{O}, \mathfrak{A}]$:

$Z_1[\mathfrak{O}, \mathfrak{O}' \cup \{\omega_1, \omega_2\}]$

$\{ > A_i' A_j' \omega_1 A_k' \to A_i' A_j' \omega_3 \omega_1 A_k'$ $\qquad (A_i, A_j, A_k \in \mathfrak{S})$

$> \omega_4 \omega_3 \omega_1 \to \omega_5 \omega_3 \omega_1 \omega_4 > \omega_4 \omega_5 \to \omega_5 \omega_4$

$\{ > \omega_4 R_i' \to R_i' \omega_4 > \omega_4 A_j' \to A_j' \omega_4$ $\qquad (R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S})$

$> \omega_4 \omega_1 \to \omega_1 \omega_4 > \omega_4 \omega_2 \to \omega_2 \omega_4 > \omega_3 \omega_1 \to \omega_5 \omega_1 \omega_4$

$> \omega_4 \to \Lambda$

$\{ > R_i' \omega_9 \to \omega_9 R_i' > A_j' \omega_9 \to \omega_9 A_j' > A_j' \omega_8 \to \omega_8 A_j'$

$> R_i' \omega_8 \to \omega_8 \omega_9 R_i'$ $\qquad (R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S})$

$> \omega_8 \omega_9 \to \omega_9 \omega_{14}$

$\{ > R_i' \omega_k \to \omega_k R_i' > A_j' \omega_k \to \omega_k A_j'$

$> \omega_7 \omega_{15} R_i' \to \omega_8 \omega_9 R_i'$

$(R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S}; k = 15, 16)$

$> \omega_{16} \omega_{15} \to \Lambda$

$\{ > R_i' \omega_7 \to \omega_7 \omega_{16} R_i' > A_j' \omega_7 \to \omega_7 \omega_{15} A_j'$

$(R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S})$

$\{ > \omega_i \omega_9 \to \omega_9 \omega_i$ $\qquad (i = 1, 2, 5, 14, 18, 22)$

$> \omega_9 \to \omega_{10}$

$\{ > \omega_{10} R_i' \to R_i' \omega_{10} > \omega_{10} A_j' \to A_j' \omega_{10}$ $\qquad (R_i \in \mathfrak{R}, A_j \in \mathfrak{S})$

$$\{ > \omega_{10}\omega_i \to \omega_i\omega_{10} \qquad (i=1,\ 18,\ 22)$$

$$> \omega_{10}\omega_{11} \to \omega_{10}\omega_{10} > \omega_{10}\omega_2 \to \omega_2\omega_{11}$$

$$> \omega_2\omega_{11}\omega_{11} \to \omega_2\omega_{10} > \omega_2\omega_{11} \to \omega_{12}\omega_2$$

$$\{ > R_i'\omega_1\omega_{12}A_j'A_k' \to R_i'\omega_1A_j'A_k'\omega_{13} \qquad (R_i \in \mathfrak{R};\ A_j,\ A_k \in \mathfrak{S})$$

$$> \omega_{14}\omega_6\omega_5 \to \omega_{17}\omega_{22}\omega_{14}\omega_6$$

$$\{ > \omega_{14}R_i' \to R_i'\omega_{14} > \omega_{14}A_j' \to A_j'\omega_{14} \qquad (R_i \in \mathfrak{R},\ A_j \in \mathfrak{S})$$

$$> \omega_{14}\omega_6 \to \Lambda$$

$$\{ > R_i'\omega_{17} \to \omega_{17}R_i' > A_j'\omega_{17} \to \omega_{17}A_j' \qquad (R_i \in \mathfrak{R},\ A_j \in \mathfrak{S})$$

$$\{ > \omega_i\omega_{17} \to \omega_{17}\omega_i \qquad (i=1,\ 2,\ 18,\ 22)$$

$$> \omega_{13}\omega_{17} \to \omega_{22}\omega_{13} > \omega_{13} \to \Lambda$$

$$\{ > A_i'\omega_5 \to A_i'\omega_7\omega_{15}\omega_6\omega_5 \qquad (A_i \in \mathfrak{S})$$

$$\left\{\begin{aligned}
&> R_i'\omega_{28}\omega_1A_j'A_k' \to \omega_{50}\omega_{39}\lambda_{i1}'\omega_{35}\omega_{41}\omega_{44}\omega_{46}\omega_{46}\ldots\\
&\ldots\omega_{46}\omega_{36}\omega_{47}\lambda_{i2}'\omega_{37}\sigma_k'\omega_{38}\lambda_{i3}'\omega_{48}\omega_{35}\omega_{41}\omega_{45}\omega_{46}\omega_{46}\ldots\omega_{46}\omega_{36}\lambda_{i4}'\omega_{30}\omega_{39}\\
&> R_i'\omega_{28}A_j'\omega_1A_k' \to \omega_{50}\omega_{39}\lambda_{i1}'\omega_{35}\omega_{44}\omega_{49}\omega_{49}\ldots\\
&\ldots\omega_{49}\omega_{36}\omega_{47}\lambda_{i2}'\omega_{37}\omega_{41}\sigma_k'\omega_{38}\lambda_{i3}'\omega_{48}\omega_{35}\omega_{45}\omega_{49}\omega_{49}\ldots\omega_{49}\omega_{36}\lambda_{i4}'\omega_{30}\omega_{39}\\
&> R_i'\omega_{28}A_j'A_k' \to \omega_{50}\omega_{26}\lambda_{i1}'\omega_{35}\omega_{44}\omega_{49}\omega_{49}\ldots\\
&\ldots\omega_{49}\omega_{36}\omega_{47}\lambda_{i2}'\omega_{37}\sigma_k'\omega_{38}\lambda_{i3}'\omega_{48}\omega_{35}\omega_{45}\omega_{49}\omega_{49}\ldots\omega_{49}\omega_{36}\lambda_{i4}'\omega_{30}\omega_{39}\omega_{26}\\
&\qquad\qquad (R_iA_jA_k \in \mathfrak{G}^*;\\
&\qquad\qquad \omega_{47}=\Lambda \quad \text{и} \quad \omega_{48}=\omega_{55}, \quad \text{если} \quad R_iA_jA_k \in \mathfrak{G}^{*1};\\
&\qquad\qquad \omega_{47}=\omega_{55} \quad \text{и} \quad \omega_{48}=\Lambda, \quad \text{если} \quad R_iA_jA_k \in \mathfrak{G}^{*2})
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&> R_i'\omega_{50} \to \omega_{50}R_i' > A_j'\omega_{50} \to \omega_{50}A_j' > \alpha_k\omega_{50} \to \omega_{50}\alpha_k\\
&\qquad\qquad (R_i \in \mathfrak{R},\ A_j \in \mathfrak{S},\ \alpha_k \in \mathfrak{A})
\end{aligned}\right.$$

$$\{ > \omega_i\omega_{50} \to \omega_{50}\omega_i \qquad (i=19,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 40)$$

$$> \omega_{50} \to \omega_{51}$$

$$\{ > \omega_{27}\omega_1A_i' \to \omega_{40}\sigma_i\omega_{29} \qquad (A_i \in \mathfrak{S})$$

$$> \omega_{27} \to \omega_{29}$$

$$\{ > \omega_{29}R_i' \to R_i'\omega_{29} > \omega_{29}A_j' \to A_j'\omega_{29} \qquad (R_i \in \mathfrak{R},\ A_j \in \mathfrak{S})$$

$$> \omega_{29}\omega_2 \to \omega_{29} > \omega_{29} \to \omega_{28}$$

$$\{ > A_j'\omega_{28} \to \omega_{28}A_j' \qquad (A_j \in \mathfrak{S})$$

$$> \omega_{39}\omega_{18} \to \omega_{21}\omega_{39}$$

$$> \alpha_k'\omega_{21} \to \omega_{21}\alpha_k' \qquad (\alpha_k \in \mathfrak{A})$$

$$\{ > \omega_i\omega_{21} \to \omega_{21}\omega_i \qquad (i=30,\ 35,\ 36,\ 38,\ 40,\ 41,\ 45,\ 46,\ 55)$$

$$> \omega_{37}\omega_{21} \to \omega_{37}\omega_{25} > \omega_{25}\omega_{21} \to \omega_{25}\omega_{25}$$

$$\left\{\begin{array}{l} > R_i'\omega_{39} \to \omega_{39} > A_j'\omega_{39} \to \omega_{39} > \omega_{39}A_j' \to \omega_{39} \\ > \omega_{39} \to \Lambda > R_i'\omega_{26} \to \omega_{26} > A_j'\omega_{26} \to \omega_{26} \\ > \omega_{26}A_j' \to \omega_{26} \end{array}\right. \qquad (R_i \in \mathfrak{R},\ A_j \in \mathfrak{S})$$

$$\left\{\begin{array}{l} > \omega_{51}\alpha_k \to \alpha_k\omega_{51} > \omega_{51}\omega_i \to \omega_i\omega_{51} \end{array}\right. \qquad (\alpha_k \in \mathfrak{A};\ i=19,\ 31,\ \ldots,\ 34,\ 41)$$

$$> \omega_{51}\omega_{40} \to \omega_{42}$$

$$\left\{\begin{array}{l} > \alpha_k\alpha_j' \to \alpha_j'\alpha_k > \omega_i\alpha_j' \to \alpha_j'\omega_i > \alpha_k\omega_h \to \omega_h\alpha_k \\ > \omega_i\omega_h \to \omega_h\omega_i \end{array}\right. \qquad (\alpha_j, \alpha_k \in \mathfrak{A};\ i=19,\ 26,\ 31,\ \ldots,\ 34,\ 40;\ h=35, 41)$$

$$\{ > \omega_{42}\alpha_k' \to \alpha_k\omega_{42} \qquad (\alpha_k \in \mathfrak{A})$$

$$> \omega_{42}\omega_{35} \to \omega_{31}\omega_{42} > \omega_{42}\omega_{41} \to \omega_{41}\omega_{42}$$

$$> \omega_{42}\omega_{25} \to \omega_{19}\omega_{42}$$

$$\left\{\begin{array}{l} > \omega_{42}\omega_{46}\omega_i \to \omega_{32}\omega_i\omega_{51}\omega_{52} > \omega_{42}\omega_{49}\omega_i \to \omega_{32}\omega_i\omega_{51}\omega_{53} \end{array}\right. \qquad (i=32,\ 34)$$

$$\{ > \omega_{42}\omega_i\alpha_k \to \alpha_k\omega_{42} \qquad (\alpha_k \in \mathfrak{A};\ i=46,\ 49)$$

$$\left\{\begin{array}{l} > \alpha_k\omega_j \to \omega_j\alpha_k > \omega_i\omega_j \to \omega_j\omega_i \end{array}\right. \qquad (\alpha_k \in \mathfrak{A};\ i=19,\ 26,\ 31,\ \ldots,\ 34,\ 40;\ j=36,\ 46,\ 49)$$

$$> \omega_{42}\omega_{36} \to \omega_{32}\omega_{42}$$

$$\left\{\begin{array}{l} > \alpha_k\omega_i \to \omega_i\alpha_k > \omega_j\omega_i \to \omega_i\omega_j \end{array}\right. \qquad (\alpha_k \in \mathfrak{A};\ i=25,\ 37,\ 38;\ j=19,\ 26,\ 31,\ \ldots,\ 34,\ 40)$$

$$\{ > \omega_{42}\omega_i \to \omega_{i-4}\omega_{42} \qquad (i=37,\ 38)$$

$$\{ > \omega_{42}\omega_j \to \omega_j\omega_{51} \qquad (j=32,\ 34)$$

$$\left\{\begin{array}{l} > \omega_i\alpha_k \to \alpha_k\omega_i > \omega_i\omega_j \to \omega_j\omega_i \end{array}\right. \qquad (\alpha_k \in \mathfrak{A};\ i=52,\ 53;\ j=19,\ 31,\ \ldots\ 34)$$

$$> \omega_{52}\omega_{40} \to \omega_{31}\omega_{41}\omega_{40}\omega_{46} > \omega_{53}\omega_{40} \to \omega_{31}\omega_{40}\omega_{49}$$

$$> \omega_{54}\omega_{46} \to \omega_{46}\omega_{54} > \omega_{54}\omega_{49} \to \omega_{49}\omega_{54}$$

$$> \omega_{54}\omega_{36} \to \omega_{36} > \omega_{44} \to \omega_{54} > \omega_{55} \to \Lambda$$

$$> \omega_{45} \to \omega_{54} > \omega_{42} \to \Lambda > \omega_{51} \to \Lambda > \omega_{41} \to \omega_{40}$$

$$> \omega_{31}\omega_{40}\omega_{32} \to \Lambda > \omega_{31}\omega_{32} \to \Lambda > \omega_{33}\omega_{34} \to \Lambda$$

$$\{ > \omega_{19}\omega_i \to \omega_i\omega_{19} \qquad (i=20,\ 24)$$

$$\{ > \alpha_k\omega_{23} \to \omega_{23}\alpha_k > \omega_i\omega_{23} \to \omega_{23}\omega_i \qquad (\alpha_k \in \mathfrak{A};\ i=26,\ 30,\ \ldots,\ 34)$$

$$> \omega_{19}\omega_{23} \to \omega_{24}\omega_{20}$$

$$\{ > \omega_{24}\omega_{20}\alpha_k' \to \alpha_k'\omega_{43} \qquad (\alpha_k \in \mathfrak{A})$$

$$> \omega_{43}\omega_{43} \to \omega_{43}$$

$$\{ > \alpha_k'\omega_{43} \to \omega_{43}\alpha_k' \qquad (\alpha_k \in \mathfrak{A})$$

$$> \omega_{20}\omega_{19} \to \omega_{19}\omega_{19} > \omega_{20}\omega_{24} \to \omega_{24}\omega_{20} > \omega_{33}\omega_{24} \to \omega_{23}\omega_{33}$$

$\{ > \omega_{24}\omega_i \to \omega_{23}\omega_i \qquad (i=23, 33)$

$> \omega_{26}\omega_{22} \to \omega_{23}\omega_{26} > \omega_{26}\omega_1 \to \omega_{26} > \omega_{26} \to \Lambda > \omega_{43} \to \omega_{40}$

$\{ > R_i'\omega_{30} \to \omega_{30}R_i' > A_j'\omega_{30} \to \omega_{30}A_j' \qquad (R_i \in \mathfrak{R},\ A_j \in \mathfrak{S})$

$\{ > \omega_k\omega_{30} \to \omega_{30}\omega_k \qquad (k=1, 2, 18, 22)$

$> \omega_{30} \to \omega_{27}$

$\{ > A_j' \to \omega_{30}A_j' \qquad (A_j \in \mathfrak{S}^*)$

$\{ > \omega_i \to \Lambda \qquad (i=28, 31, \ldots, 34, 40)$

Алгоритм $Z[\mathfrak{L}, \mathfrak{A}]$ является сохраняющим. Доказательство этого факта принципиальных трудностей не содержит, но, поскольку оно довольно длинное, мы его опускаем.

§ 3. Пример

В качестве приложения рассматриваем один пример утилитарного языка. Предлагаемый язык $(\mathfrak{M}^{1*}, Z^1[\mathfrak{L}^1, \mathfrak{A}^1])$ является упрощенным вариантом УДК.

Пусть заданы алфавиты

$$\mathfrak{L}^1 = \{A_1{}^a, A_2{}^a, \ldots, A_{10}{}^a; A_1{}^b, A_2{}^b, \ldots, A_{100}{}^b; A_1{}^c, A_2{}^c, \ldots, A_9{}^c; A_1{}^{11}; R_1, R_2, \ldots, R_{13}\},$$

где $a = 1, 2, 3, 4$; $b = 5, 6$; $c = 7, 8, 9, 10$, и

$$\mathfrak{A}^1 = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{0}, \mathbf{=}\ \mathbf{(}, \mathbf{)}, \text{«}, \text{»}, ., —, +, :\}.$$

Обозначим $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}^1 \cup \{\mathrm{x}\}$.

Начинаем с построения утилитарной семантики $\mathfrak{M}^{*1}$. Для этого задаем множества $\mathfrak{S}^1$, $\mathfrak{S}^{1*}$ и $\mathfrak{G}^{1*}$. Одновременно приводим и представления понятий множеств $\mathfrak{S}^{1*}$ и $\mathfrak{G}^{1*}$, чтобы затем построить сохраняющие алгоритмы $Z[\mathfrak{L}^1, \mathfrak{A}^2]$ и $Z^1[\mathfrak{L}^1, \mathfrak{A}^1]$.

Пусть множество $\mathfrak{S}^1$ состоит из множества парапонятий

$$\mathfrak{S}^{11} = \{A_1{}^1, A_2{}^1, \ldots, A_{10}{}^1\}$$

и множества простых понятий $\mathfrak{S}^{1*}$. Множество $\mathfrak{S}^{1*}$ пусть, в свою очередь, состоит из следующих подмножеств [3]:

$\mathfrak{S}^{12} = \{A_1{}^2, A_2{}^2, \ldots, A_{10}{}^2\}$ — основные индексы УДК, представлениями которых в алфавите $\mathfrak{A}^2$ являются:

$Z(A_1{}^2) = \mathbf{1}\mathrm{xx}$, $Z(A_2{}^2) = \mathbf{2}\mathrm{xx}$, $\ldots$, $Z(A_9{}^2) = \mathbf{9}\mathrm{xx}$, $Z(A_{10}{}^2) = \mathbf{0}\mathrm{xx}$;

$\mathfrak{S}^{13} = \{A_1{}^3, A_2{}^3, \ldots, A_{10}{}^3\}$ — общие определители времени; представления:

$Z(A_1{}^3) = «\mathbf{1}»$, $Z(A_2{}^3) = «\mathbf{2}»$, $\ldots$, $Z(A_9{}^3) = «\mathbf{9}»$, $Z(A_{10}{}^3) = «\mathbf{0}»$;

$\mathfrak{S}^{12} = \{A_1{}^4, A_2{}^4, \ldots, A_{10}{}^4\}$ — специальные определители со знаком —; представления:

$Z(A_1{}^4) = \mathbf{-1}\mathrm{x}$, $Z(A_2{}^4) = \mathbf{-2}\mathrm{x}$, $\ldots$, $Z(A_9{}^4) = \mathbf{-9}\mathrm{x}$, $Z(A_{10}{}^4) = \mathbf{-0}\mathrm{x}$; $Z(A_{10}{}^4) = \mathbf{-0}\mathrm{x}$;

$\mathfrak{S}^{15} = \{A_1{}^5, A_2{}^5, \ldots, A_{100}{}^5\}$ — общие определители языка;

представления:
$Z(A_1^5) = \equiv\mathbf{01}\text{x}$, $Z(A_2^5) = \equiv\mathbf{02}\text{x}$, ..., $Z(A_{99}^5) = \equiv\mathbf{99}\text{x}$, $Z(A_{100}^5) = \equiv\mathbf{00}\text{x}$;

$\mathfrak{S}^{16} = \{A_1^6, A_2^6, \ldots, A_{100}^6\}$ — общие определители народов; представления:

$$Z(A_1^6) = (\equiv\mathbf{01}),\ Z(A_2^6) = (\equiv\mathbf{02}),\ \ldots,\ Z(A_{99}^6) = (\equiv\mathbf{99}),$$
$$Z(A_{100}^6) = (\equiv\mathbf{00});$$

$\mathfrak{S}^{17} = \{A_1^7, A_2^7, \ldots, A_9^7\}$ — общие определители формы; представления:

$$Z(A_1^7) = (\mathbf{01}),\ Z(A_2^7) = (\mathbf{02}),\ \ldots,\ Z(A_9^7) = (\mathbf{09}),$$

$\mathfrak{S}^{18} = \{A_1^8, A_2^8, \ldots, A_9^8\}$ — общие определители места; представления:

$$Z(A_1^8) = (\mathbf{1}),\ Z(A_2^8) = (\mathbf{2}),\ \ldots,\ Z(A_9^8) = (\mathbf{9});$$

$\mathfrak{S}^{19} = \{A_1^9, A_2^9, \ldots, A_9^9\}$ — общие определители точки зрения; представления:

$$Z(A_1^9) = \mathbf{.001}\text{x},\ Z(A_2^9) = \mathbf{.002}\text{x},\ \ldots,\ Z(A_9^9) = \mathbf{.009}\text{x};$$

$\mathfrak{S}^{110} = \{A_1^{10}, A_2^{10}, \ldots, A_9^{10}\}$ — специальные определители со знаком **.0**; представления:

$$Z(A_1^{10}) = \mathbf{.01}\text{x},\ Z(A_2^{10}) = \mathbf{.02}\text{x},\ \ldots,\ Z(A_9^{10}) = \mathbf{.09}\text{x};$$

$\mathfrak{S}^{111} = \{A_1^{11}\}$ — общий определитель с дефисом; представление:

$$Z(A_1^{11}) = \mathbf{—05}\text{x}.$$

Итак, множество $\mathfrak{S}^1$ состоит из 10 парапонятий и 267 простых понятий.

Приводим теперь множество $\mathfrak{G}^{1*}$, вместе с представлениями его элементов (понятий) в алфавите $\mathfrak{A}^2$. Прибавлением буквы ω_{55} вспомогательного алфавита $\mathfrak{B}$ отметим выделенные начала соответствующих представлений, а за $\mathrm{pr}(\varrho)$ обозначаем проекцию кортежа ϱ алфавита $\mathfrak{A}^2 \cup \{\omega_{55}\}$ на алфавит $\mathfrak{A}^2$. Кроме того, введем обозначение:

$$\xi^k = \begin{cases} \text{xx, если } k=2; \\ \text{x, если } k=4,\ 5,\ 9,\ 10,\ 11; \\ \text{), если } k=6,\ 7,\ 8; \\ \text{», если } k=3. \end{cases}$$

Пусть множество $\mathfrak{G}^{1*}$ состоит из следующих понятий:

$R_1 A_i^k A_j^1$, где $k = 2, 3, \ldots, 11$; $A_i^k \in \mathfrak{S}^{1k}$ и $A_j \in \mathfrak{S}^{11}$, причем

$Z(R_1 A_i^k A_1^1) = \mathrm{pr}(\eta_i^k \omega_{55} \mathbf{1} \xi^k)$,
$Z(R_1 A_i^k A_2^1) = \mathrm{pr}(\eta_i^k \omega_{55} \mathbf{2} \xi^k)$, ...,
$Z(R_1 A_i^k A_9^1) = \mathrm{pr}(\eta_i^k \omega_{55} \mathbf{9} \xi^k)$,
$Z(R_1 A_i^k A_{10}^1) = \mathrm{pr}(\eta_i^k \omega_{55} \mathbf{0} \xi^k)$ и $\eta_i^k \xi^k = Z(A_i^k)$;

$R_2 A_i^2 A_i^7$, где $A_i^2 \in \mathfrak{S}^{12}$ и $A_j^7 \in \mathfrak{S}^{17}$, причем
$Z(R_2 A_i^2 A_j^7) = \mathrm{pr}(\omega_{55} Z(A_j^7) Z(A_i^2))$;

$R_h A_i^2 A_j^h$, где $A_i^2 \in \mathfrak{S}^{12}$ и $A_j^h \in \mathfrak{S}^{1h}$, а $h = 3, 4, \ldots, 11$, причем

$Z(R_h A_i^2 A_j^h) = \mathrm{pr}(\eta_i^2 \mathrm{x} \omega_{55} Z(A_j^h) \mathrm{x})$ и $\eta_i^2 \mathrm{xx} = Z(A_i^2)$;

$R_{12} A_i^2 A_j^2$ и $R_{13} A_i^2 A_j^2$, где $A_i^2, A_j^2 \in \mathfrak{S}^{12}$, причем

$Z(R_{12} A_i^2 A_j^2) = \mathrm{pr}(Z(A_i^2) + Z(A_j^2)\omega_{55})$ и

$Z(R_{13} A_i^2 A_j^2) = \mathrm{pr}(Z(A_i^2) : Z(A_j^2)\ \omega_{55})$.

Множество $\mathfrak{M}^{1*}$, построенное при помощи заданных множеств $\mathfrak{S}^{1*}$ и $\mathfrak{G}^{1*}$ по определению 2 из [1], стр. 264, — утилитарная семантика.

Схему сохраняющего алгоритма $Z[\mathfrak{D}^1, \mathfrak{A}^2]$ мы получаем из схемы, приведенной в § 2, подставляя вместо кортежей алфавитов $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{A}$ соответствующие кортежи алфавитов $\mathfrak{D}^1$ и $\mathfrak{A}^2$. Отметим, что понятия $R_1 A_i^k A_j^1$, $R_{12} A_i^2 A_j^2$ и $R_{13} A_i^2 A_j^2$ множества $\mathfrak{G}^{1*}$, где $k = 2, 3, \ldots, 11$; простые понятия $A_i^k \in \mathfrak{S}^{1k}$; $A_j^1 \in \mathfrak{S}^{11}$ и $A_i^2, A_j^2 \in \mathfrak{S}^{12}$, принадлежат к подмножеству $\mathfrak{G}^{1*1}$, а все остальные понятия множества $\mathfrak{G}^{1*}$ — к подмножеству $\mathfrak{G}^{1*2}$.

Алгоритм

$$Z^1[\mathfrak{D}^1, \mathfrak{A}^1] = Z[\mathfrak{D}^1, \mathfrak{A}^2] > \mathrm{x} \to \Lambda,$$

схема которого получена из схемы алгоритма $Z[\mathfrak{D}^1, \mathfrak{A}^2]$ добавлением одной формулы подстановки $> \mathrm{x} \to \Lambda$ в качестве последней, тоже является сохраняющим алгоритмом. Следовательно, пара $(\mathfrak{M}^{1*}, Z^1[\mathfrak{D}^1, \mathfrak{A}^1])$ — утилитарный язык.

Тем самым построена модель УДК в виде утилитарного языка.

Применяя к некоторым кортежам алфавита $\mathfrak{D}^1$ сохраняющий алгоритм $Z^1[\mathfrak{D}^1, \mathfrak{A}^1]$, мы получаем следующие результаты — индексы УДК (см. [3]):

$Z^1(R_1 R_1 A_5^2 A_1^1 A_3^1) =$ **531** (общая механика, механика твердых тел),

$Z^1(R_1 R_1 A_5^2 A_3^1 A_1^1) =$ **513** (геометрия),

$Z^1(R_1 R_1 R_1 A_5^2 A_3^1 A_3^1 A_1^1) =$ **5133** (стереометрия),

$Z^1(R_1 R_1 R_1 R_1 A_5^2 A_4^1 A_3^1 A_3^1 A_1^1) =$ **51334** (многогранники),

$Z^1(R_{13} R_1 R_1 A_{10}^2 A_6^1 A_1^1 R_1 A_{10}^2 A_3^1) =$ **016 : 03** (библиография энциклопедий),

$Z^1(R_3 R_1 A_5^2 A_4^1 A_5^7) =$ **54(05)** (журналы по химии),

$Z^1(R_7 R_5 R_5 R_5 R_1 R_1 R_1 R_1 R_1 A_6^2 A_3^1 A_1^1 A_1^1 A_9^1 A_2^1 A_{40}^5 A_{30}^5 A_{100}^5 R_1 A_3^7 A_8^1) =$ **=629113(038)=00=30=40** (немецко-французский автомобильный словарь),

$Z^1(R_4 R_1 A_6^2 A_2^1 R_1 A_5^4 A_2^1) =$ **62—52** (автоматические управляющие устройства),

$Z^1(R_{12} R_1 R_1 A_5^2 A_7^1 A_3^1 R_1 R_1 A_5^2 A_8^1 A_3^1) =$ **537 + 538** (электричество и магнетизм).

Литература

1. Койт М., Некоторые свойства элементарно-утилитарного языка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342,** 263—294.
2. Пальм Р., Математическая лингвистика I. Тр. Вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1968, **12,** 3—140.
3. Универсальная десятичная классификация. Среднее издание. Москва, 1969.

Поступило
25 VI 1975

ÜHEST SEMANTILISEST ALGORITMIST

M. Koit

Resümee

Artiklis defineeritakse semantiline algoritm, selle erijuht säilitav algoritm ja utilitaarne keel kui utilitaarsest semantikast ja säilitavast algoritmist koosnev paar. Tuuakse säilitava algoritmi $Z[\mathfrak{O}, \mathfrak{A}]$ skeem. Vaadeldakse UDK indeksite hulga esitust ultilitaarse keelena ja näiteid säilitava algoritmi rakendamise kohta.

ÜBER EINEN SEMANTISCHEN ALGORITHMUS

M. Koit

Zusammenfassung

In dem Artikel werden der semantische Algorithmus, der erhaltende Algorithmus als sein Sonderfall und die utilitare Sprache definiert. Es wird das Schema des erhaltenden Algorithmus $Z[\mathfrak{O}, \mathfrak{A}]$ gegeben. Demnach wird die Menge der UDK-Indexe in der Form einer utilitaren Sprache dargestellt, und es werden einige Beispiele für die Anwendung des erhaltenden Algorithmus betrachtet.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Л. Роотс

Кафедра теоретической механики

Рассматриваем прямоугольную пластинку со сторонами a и b (рис. 1), весь контур которой свободно оперт. На пластинку действует на одной паре параллельных сторон сжимающая нагрузка интенсивностями соответственно p и Θp $(0 \leqslant \Theta \leqslant 1)$, на другой паре параллельных сторон тангенциальная нагрузка

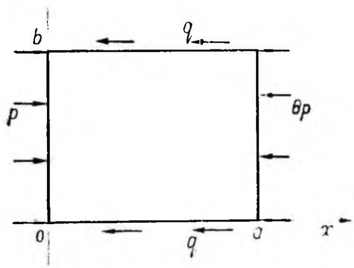


Рис. 1.

интенсивности q. Из условия равновесия пластинки следует

$$q = \frac{b}{2a}(1-\Theta)p.$$

Под действием нагрузки в пластинке возникает неоднородное напряженное состояние

$$X_x = -\frac{p}{ah}[a-(1-\Theta)x],$$

$$Y_y = 0,$$

$$X_y = \frac{p}{2ah}(1-\Theta)(b-2y),$$

где h — толщина пластинки.

Дифференциальное уравнение устойчивости для рассматриваемой пластинки имеет вид

$$\nabla^4 w = -\frac{p}{aD}[a-(1-\Theta)x]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+\frac{p}{aD}(1-\Theta)(b-2y)\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}, \qquad (1)$$

где D — цилиндрическая жесткость; к этому уравнению принадлежат граничные условия

$$w=0, \qquad \nabla^2 w = 0 \qquad (2)$$

на всем контуре пластинки.

Решая уравнение (1) приближенным методом Галеркина, задаем прогиб w в виде ряда

$$w = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad (3)$$

каждый член которого удовлетворяет условиям (2). Для коэффициентов a_{mn} получим, согласно используемому методу, систему линейных однородных уравнений

$$\int_0^a\int_0^b \sum_{m,n=1}^{\infty} \left\{a_{mn}\left[\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 +\right.\right.$$

$$\left.+\frac{p}{D}\left(\frac{(1-\Theta)x}{a}-1\right)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right]\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} -$$

$$\left.-\frac{p(1-\Theta)}{aD}(b-2y)\frac{mn\pi^2}{ab}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right\}\times$$

$$\times\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\,dx\,dy = 0 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots)$$

или

$$a_{ij}A_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{mj}B_{mj}J_{1mi} + \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}C_{mn}J_{2m}{}^{i}J^{2}{}_{n}{}^{j} + a_{mn}C_{mn}J_{2mi}J^{2}{}_{nj} +$$

$$+\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}D_{mn}J_{2mi}J_{3nj} = 0 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots), \qquad (4)$$

где

$$A_{ij} = \frac{ab}{4(1-\Theta)}\left[\frac{\pi^2 D}{pa^2}\left(i^2+\frac{a^2}{b^2}j^2\right)-i^2\right],$$

$$B_{mj} = \frac{bm^2}{2a},$$

$$C_{mn} = -mn,$$

$$D_{mn} = \frac{2mn}{b},$$

а

$$J_{1mi}=\begin{cases}\dfrac{a^2}{4}, & \text{если} \quad i=m,\\ \dfrac{2a^2im}{\pi^2(i^2-m^2)^2}[(-1)^{i+m}-1], & \text{если} \quad i\neq m,\end{cases}$$

$$J_{2mi}=\begin{cases}0, & \text{если} \quad i=m,\\ \dfrac{ai}{\pi^2(m^2-i^2)}[(-1)^{i+m}-1], & \text{если} \quad i\neq m,\end{cases}$$

$$J_{2nj}=\begin{cases}0, & \text{если} \quad j=n,\\ \dfrac{bj}{\pi^2(n^2-j^2)}[(-1)^{j+n}-1], & \text{если} \quad j\neq n,\end{cases}$$

$$J_{3nj}=\begin{cases}-\dfrac{b^2}{4j\pi}, & \text{если} \quad j=n,\\ \dfrac{b^2j}{\pi(n^2-j^2)}(-1)^{j+n}, & \text{если} \quad j\neq n.\end{cases}$$

Уравнение для критической нагрузки получим, приравнивая нулю определитель системы (4).

Таблица 1

	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0,0
$\dfrac{a^2p_{\text{кр}}}{\pi^2D}$	4,00	4,41	4,88	5,30	5,74	6,09

Вычисления проводились в случае квадратной пластинки ($b=a$). В таком случае

$$A_{ij}=\frac{a^2}{4(1-\Theta)}\left[\frac{\pi^2D}{pa^2}(i^2+j^2)^2-i^2\right],$$

$$B_{mj}=\frac{1}{2}m^2,$$

$$C_{mn}=-mn,$$

$$D_{mn}=\frac{2mn}{a}.$$

Найденные результаты представлены в табл. 1. При получении их из ряда (3) было взято 3 члена ($m,n=1,2$).

Поступило
7 I 1975

RISTKÜLIKULISE PLAADI STABIILSUSEST

L Roots

Resümee

Artiklis vaadeldakse vabalt toetatud ristkülikulise plaadi kriitilise koormuse leidmise ülesannet juhul, kui plaadile mõjub kontuuril nii normaalisihiline kui ka tangentsiaalne koormus (vt. joon. 1). Galerkini meetodil leitakse võrrand kriitilise koormuse jaoks; arvuliste tulemusteni on lahendus viidud ruudukujulise plaadi puhul.

ON THE BUCKLING OF RECTANGULAR PLATES

L Roots

Summary

In this paper the buckling of a simply supported rectangular plate under a combined loading (see fig. 1) is considered. In the case of a quadratic plate the approximate solution by using the Galerkin method is found.

К ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

Э. Сакков

Кафедра теоретической механики

Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1], где были выведены уравнения послекритического выпучивания цилиндрической двухслойной оболочки постоянной толщины h, радиуса R и длины $2L$. К оболочке была приложена сжимающая сила T_1, из-за которой осуществляется осесимметричный прогиб цилиндра. Для решения поставленной задачи был предложен метод последовательного нагружения. Согласно этому методу, на каждом этапе нагружения производится сравнение интенсивности деформаций с ее значением на предыдущем этапе, что позволяет определить те значения напряжений и деформаций, при которых в рассматриваемой точке оболочки начинается разгрузка. Для реализации предложенного метода все уравнения в [1] были представлены в дифференциальном виде, причем дифференцирование производилось по некоторому неубывающему параметру. Интегрирование системы уравнений равновесия цилиндрической оболочки осуществлялось методом Бубнова—Галеркина. Обычно, как мы знаем, задачи теории пластичности ведут к нелинейным алгебраическим системам уравнений, решать которые довольно сложно из-за вычислительных трудностей. Система уравнений (2.13) из [1] является линейной относительно приращений параметров прогиба, что позволяет повысить точность интегрирования уравнений равновесия.

В данной работе представлены некоторые численные результаты, характеризующие деформацию свободно опертых и жестко защемленных цилиндрических оболочек. Предполагается, что оболочка имеет какой-то начальный прогиб W_0. Присутствие начального прогиба является существенным для реализации метода последовательного нагружения. Кроме того, известно, что все реальные оболочки имеют более или менее заметные начальные несовершенства.

1. Определение верхней критической нагрузки

Для составления уравнения устойчивости нужно варьировать известные уравнения Генки—Ильюшина и найти соответствующие вариации усилий и моментов. Отличие по сравнению с упругой задачей состоит здесь в том, что варьированию подлежит и величина σ_i/e_i.

Варьирование у нас по существу уже проведено, так как система уравнений (2.6) работы [1] связывает между собой приращения (вариации) усилий и моментов с приращениями (вариациями) деформаций и кривизны. Предполагается, что потеря устойчивости происходит при чисто пластических деформациях, т. е. разргузки в момент потери устойчивости нет. В таком случае можно уравнения (2.6) переписать в виде (во всей работе сохранена символика работы [1]):

$$\begin{aligned}
&\frac{3R}{4ERd}\,\delta T_1 = A\delta\varepsilon_1 + B\delta\varepsilon_2 + c\delta\varkappa_1,\\
&\frac{3R}{4Ehd}\,\delta T_2 = B\delta\varepsilon_1 + D\delta\varepsilon_2 + F\delta\varkappa_1,\\
&\frac{3R}{2Eh^2d}\,\delta M_1 = c\delta\varepsilon_1 + F\delta\varepsilon_2 + A\delta\varkappa_1,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\begin{aligned}
&A = A(+) + A(-),\ C = A(+) - A(-),\ B = B(+) + B(-),\\
&F = B(+) - B(-),\ D = C(+) + C(-),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
&A(\pm) = 1 - \omega(\pm) - \frac{4}{3}\,\frac{(\lambda - \omega(\pm))^3}{\lambda^2 e_s^2}\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 \pm \varkappa_1\right)^2,\\
&B(\pm) = \frac{1}{2}(1 - \omega(\pm)) - \frac{4}{3}\,\frac{(\lambda - \omega(\pm))^3}{\lambda^2 e_s^2}\times\\
&\qquad\times\left(\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 \pm \varkappa_1\right)\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 \pm \frac{1}{2}\,\varkappa_1\right),\\
&C(\pm) = 1 - \omega(\pm) - \frac{4}{3}\,\frac{(\lambda - \omega(\pm))^3}{\lambda^2 e_s^2}\left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 \pm \frac{1}{2}\,\varkappa_1\right)^2.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Формулы (1.3) упрощаются, если учесть, что в докритической стадии $\varkappa_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = -W = 0$. Докритическое состояние оболочки будем считать безмоментным, распределение напряжений по толщине оболочки однородным, следовательно, $\omega(+) = \omega(-) = \omega_k$. После простых преобразований получим:

$$
\begin{aligned}
&A=2(1-\omega_k)-\frac{8}{3}\frac{(\lambda-\omega_k)^3}{4\alpha^4\lambda^2 e_s^2(1-\omega_k)^2}P_k^2,\\
&B=\frac{1}{2}A,\\
&C=F=0,\\
&D=2(1-\omega_k)-\frac{2}{3}\frac{(\lambda-\omega_k)^3}{4\alpha^4\lambda^2 e_s^2(1-\omega_k)^2}P_k^2.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

В этих формулах символом P_k обозначено критическое значение параметра нагрузки, символом ω_k — значение параметра пластичности в момент потери устойчивости.

Так как в нашем случае $\delta T_1=0$, то из первого уравнения системы (1.1) находим, что

$$
\delta\varepsilon_1=-\frac{B}{A}\delta\varepsilon_2=-\frac{1}{2}\delta\varepsilon_2=\frac{1}{2}\delta W. \tag{1.5}
$$

Выражения для δT_2 и δM_1 имеют в конечном счете вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{3R}{4Ehd}\delta T_2=-\frac{3}{2}(1-\omega_k)\delta W,\\
&\frac{3R}{2Eh^2d}\delta M_1=-\frac{1}{2\alpha^2}A\delta W''.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Для решения задачи об устойчивости нам остается написать дифференциальное уравнение равновесия:

$$
\frac{d^2\delta M_1}{dx^2}+T_1\frac{d^2\delta W}{dx^2}+\frac{\delta T_2}{R}=0. \tag{1.7}
$$

Внося в это уравнение значение (1.6), получим:

$$
\frac{1}{2}A\delta W^{\mathrm{IV}}+2P_k\delta W''+3\alpha^4(1-\omega_k)\delta W=0. \tag{1.8}
$$

Уравнение (1.8) является уравнением устойчивости рассматриваемой проблемы, интегрирование которого при определенных граничных условиях дает нам значение искомой верхней критической нагрузки.

Отметим еще, что в случае линейного упрочнения имеют место следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&1-\omega_k=\frac{2P_k(1-\lambda)}{2P_k-3\lambda\alpha^2 e_s},\\
&\lambda-\omega_k=\frac{3\lambda(1-\lambda)\alpha^2 e_s}{2P_k-3\lambda\alpha^2 e_s}.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Следовательно;

$$
\frac{1}{2}A=\frac{2P_k(1-\lambda)}{2P_k-3\lambda\alpha^2 e_s}-\frac{1}{12}\frac{27\lambda(1-\lambda)\alpha^2 e_s}{2P_k-3\lambda\alpha^2 e_s}. \tag{1.10}
$$

2. Свободно опертая оболочка

Наш алгоритм работает в предположении, что нам известно какое-то начальное состояние деформации. Пусть этим состоянием будет решение упругой задачи, так как естественно считать, что в начале нагружения оболочка деформируется упруго. Уравнение равновесия оболочки имеет в случае упругих деформаций следующий вид:

$$W^{IV}+2PW''+3\alpha^4 W=W_0^{IV}+3\alpha^4 W_0-\alpha^2 P. \tag{2.1}$$

Это уравнение нужно интергировать при следующих условиях:

$$\begin{aligned} &W(0)=W''(0)=0,\\ &W'(1)=W^{III}(1)=0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) является неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и его решение выражается через гиперболические функции. Для упрощения сравнения с пластической задачей, интегрируем и уравнение (2.1) методом Бубнова—Галеркина, принимая

$$W=A_1\sin\frac{\pi}{2}\xi+A_2\sin\frac{3\pi}{2}\xi+A_3\sin\frac{5\pi}{2}\xi. \tag{2.3}$$

Сделав это, получим

$$\begin{aligned} &A_1=\frac{(\pi^4+48\alpha^4)A_{10}-\dfrac{64}{\pi}\alpha^2 P}{\pi^4+48\alpha^4-8\pi^2 P},\\ &A_2=\frac{64\alpha^2 P}{9\pi(27\pi^4+16\alpha^4-24\pi^2 P)},\\ &A_3=-\frac{64\alpha^2 P}{5\pi(625\pi^4+48\alpha^4-200\pi^2 P)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Отметим, что соотношения (2.4) имеют место только тогда, когда начальный прогиб задается в виде

$$W_0=A_{10}\sin\frac{\pi}{2}\xi. \tag{2.5}$$

Деформации и кривизна срединной поверхности определяются по формулам:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1=\frac{1}{2}(W-W_0)-\frac{1}{2\alpha^2}P,\\ &\varepsilon_2=-(W-W_0),\\ &\varkappa_1=-\frac{1}{2\alpha^2}(W''-W_0''). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Алгоритм решения задачи следующий. Задаем какое-то малое значение нагрузки P и по формулам (2.4) вычисляем параметры A_1, A_2, A_3. Таким образом, нам известно значение прогиба W в определенных точках оболочки, по формулам же (2.6) вычисляем значение величин ε_1, ε_2 и $\varkappa_1$ в этих же самых точках. В дальнейшем находим интенсивность деформаций $e_i(\pm)$ и проверяем неравенство $e_i(\pm) \leqslant e_s^*$. Если неравенство имеет место во всех точках оболочки, то это значит, что оболочка деформируется упруго и все нужные величины сохраняются в памяти машины. Теперь задаем нагрузке P малое приращение и решаем заново упругую задачу. Это делаем до тех пор, пока впервые будет нарушено неравенство $e_i(\pm) \leqslant e_s^*$. В этом случае предыдущее состояние считаем за начальное и приступаем к решению упруго-пластической задачи.

Упруго-пластическая задача решается по алгоритму, приведенному в [1]. Если при решении упругой задачи мы задавали значение нагрузки P, то здесь мы будем задавать приращение параметра A_1. При решении данной задачи мы имеем дело со следующими параметрами.

$\alpha^2 = \dfrac{Z^2}{Rh}$ — параметр, характеризующий геометрию оболочки,

λ — параметр упрочнения,

A_{10} — параметр, характеризующий начальный прогиб оболочки,

$P = -\dfrac{3L^2}{4Eh^2d}$ — параметр нагрузки,

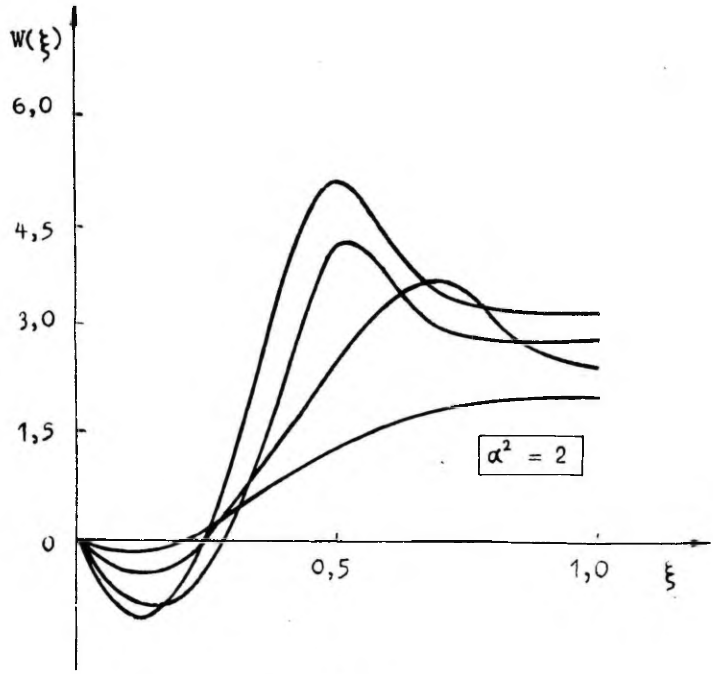
$e_s = \dfrac{R}{h} e_s^*$ — параметр материала оболочки.

Для получения численных данных была составлена программа для ЭЦВМ «Урал-4». Половина оболочки была разделена по направлению ξ на 20 равных частей ($\Delta\xi = 0{,}05$). Для параметров λ и e_s были взяты значения $\lambda = 0{,}95$ и $e_s = 0{,}05$. Значения параметров α^2 и A_{10} варьировались. Так, например, для стрелы начального прогиба A_{10} были выбраны значения 0,5; 0,3; 0,1 и 0,05. Координатные функции, как и в случае упругих деформаций, были заданы в виде тригонометрических функций:

$$W_1 = \sin\frac{\pi}{2}\xi; \quad W_2 = \sin\frac{3\pi}{2}\xi; \quad W_3 = \sin\frac{5\pi}{2}\xi. \tag{2.7}$$

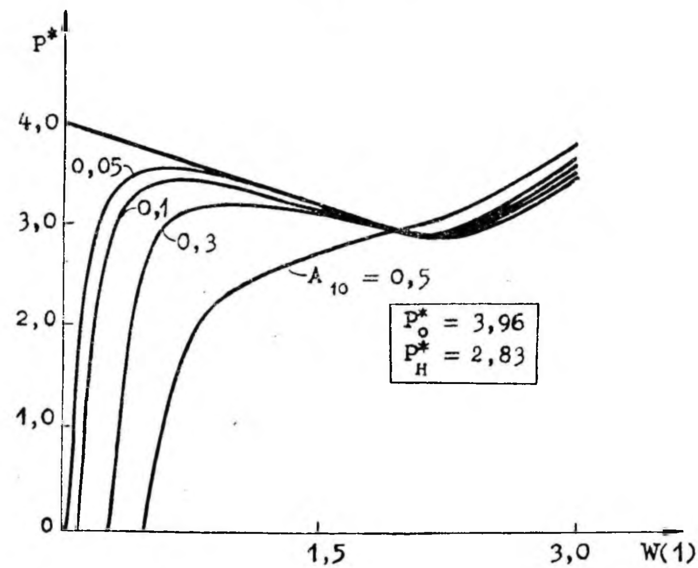
Наряду с оболочкой, имеющей начальные деформации, рассматривалась и идеальная оболочка. При этом верхняя критическая сила P_k определялась из уравнения (1.8).

Некоторые результаты проведенных вычислений приведены на фиг. 1—3. Шаг изменения параметра A_1 был следующим $\Delta A_1 = 0{,}01$. Были проведены и вычисления с шагом $\Delta A_1 = 0{,}005$.



W(ξ)
6,0
4,5
3,0
1,5
0
0,5
1,0
ξ
α² = 2

Фиг. 1.



P*
4,0
3,0
2,0
1,0
0
0,05
0,1
0,3
A 10 = 0,5
P*o = 3,96
P*н = 2,83
1,5
3,0
W(1)

Фиг. 2.

В рамках желаемой точности оба решения не отличались друг от друга, что свидетельствует о том, что шаг изменения параметра A_1 является достаточно мелким. На фиг. 1 представлена картина распространения волн выпучивания по длине оболочки по мере возрастания нагрузки. Характерным является то обстоятельство, что самые большие прогибы появились не в середине оболочки, а где-то вблизи сечения $\xi = 0{,}5$. У края $\xi = 0$ оболочка прощелкивалась во внутрь.

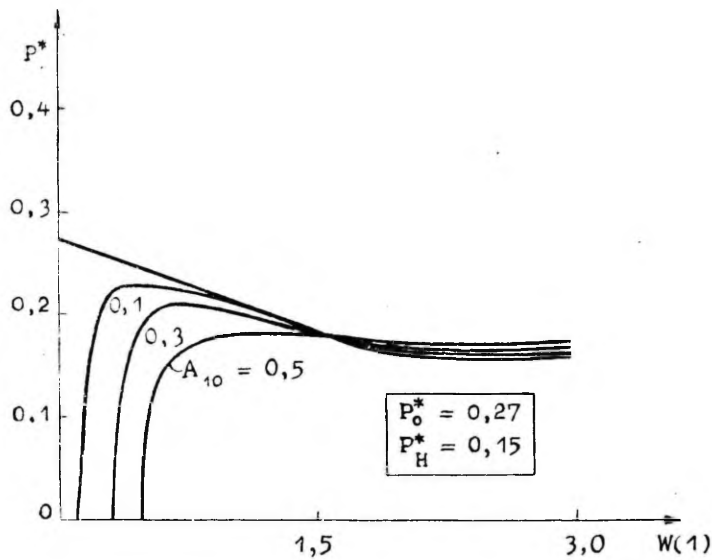
На фиг. 2 и 3 изображена зависимость «нагрузка-прогиб» при значениях параметра $\alpha^2 = 10$ и $\alpha^2 = 2$. По этим графикам можно найти приближенное значение нижней критической силы $P_н$, которое в случае $\alpha^2 = 10$ оказалось равным $P_н = 2{,}83$, а в случае $\alpha^2 = 2$ оказалось равным $P_н = 0{,}15$.

3. Жестко защемленный цилиндр

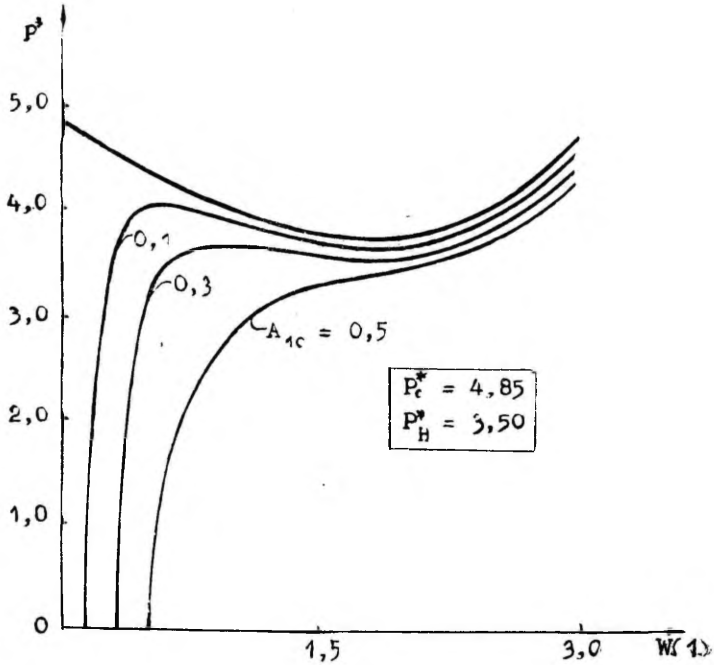
В качестве другого примера рассмотрим жестко защемленный двухслойный цилиндр. Граничные условия выберем в виде:

$$\begin{gathered} W(0) = W'(0) = 0, \\ W'(1) = W'''(1) = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

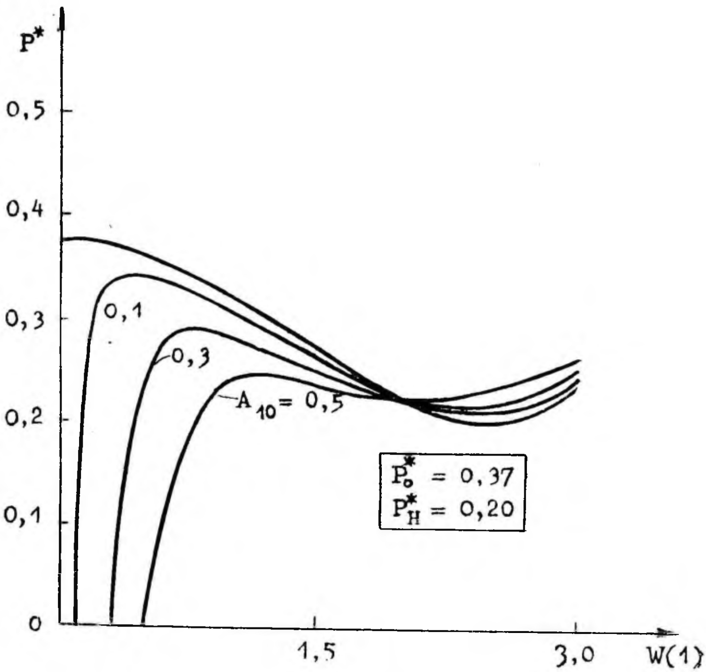
Методика решения задачи остается такой же, как в случае свободного опирания, отличие лишь в выборе координатных функций, которые в данном случае задаем в виде следующих полиномов:



Фиг. 3.


P*
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0
0,1
0,3
A10 = 0,5
P*c = 4,85
P*H = 3,50
1,5
3,0
W(1)

Фиг. 4.


P*
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,3
A10 = 0,5
P*o = 0,37
P*H = 0,20
1,5
3,0
W(1)

Фиг. 5.

$$W_1 = \xi^4 - 4\xi^3 + 4\xi^2,$$
$$W_2 = \xi^5 - \frac{7}{2}\xi^4 + 4\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2, \qquad (3.2)$$
$$W_3 = \xi^6 - 8\xi^4 + 12\xi^3 - 5\xi^2.$$

Начальный прогиб задаем в виде:

$$W_0 = A_{10} W_1.$$

Некоторые полученные численные результаты представлены на фиг. 4 и 5. Значения параметров λ, e_s и A_{10} были выбраны такими же, как и в случае свободного опирания. Значения нижних критических сил $P_н$ получились следующие: $P^н = 3{,}50$ при $\alpha^2 = 10$ и $P_н = 0{,}20$ при $\alpha^2 = 2$.

Литература

1. Сакков Э., Исследование послекритической стадии сжатых цилиндрических оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 217—225.

Поступило
20 V 1975

IDEAALSE KAHEKIHILISE SILINDRILISE KOORIKU TELGSÜMMEETRILISEST DEFORMATSIOONIST

E. Sakkov

Resümee

Töös [1] saadud tulemusi on arendatud edasi. On esitatud numbrilised resultaadid vabalt toetatud ja jäigalt kinnitatud koorikute kohta.

ON AXISYMMETRIC DEFORMATION OF A CYLINDRICAL SANDWICH SHELL

E. Sakkov

Summary

Results of the paper [1] are developed further. Some calculations are carried out and numerical data for simply supported and clamped shells are presented.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ТИПА КАРМАНА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Э. Сакков

Кафедра теоретической механики

Рассмотрим тонкую панель, равномерно сжатую вдоль криволинейных кромок. Обозначим через a и b длину и ширину панели (см. фиг. 1). Рассмотрим случай шарнирного опирания панели по всем кромкам.

Предполагаем, что материал оболочки несжимаем и гипотезы Кирхгофа применимы. Кроме того, пренебрегаем влиянием зон упругой разгрузки и вторичных пластических деформаций, т. е. считаем материал панели нелинейно упругим. Основания для такого предположения дают вычисления для пластинок, где влияние зон разгрузки и вторичных пластических деформаций в случае свободного опирания оказалось не существенным [3].

Физические соотношения для плоского напряженного состояния следующие:

$$X_x - \frac{1}{2} Y_y = \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xx},$$
$$Y_y - \frac{1}{2} X_x = \frac{\sigma_i}{e_i} e_{yy}, \tag{1}$$
$$3X_y = \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xy},$$

где X_x, Y_y, X_y, e_{xx}, e_{xy}, e_{yy} — напряжения и деформации, σ_i, e_i — интенсивности напряжений и деформаций. Интенсивности напряжений и деформаций σ_i и e_i связаны между собой некоторой функциональной зависимостью:

$$\sigma_i = \Phi(e_i), \tag{2}$$

где функция Φ определяется из опытов. Пусть

$$z^* = \frac{2}{h} z, \quad \varkappa_1^* = \frac{h}{2} \varkappa_1, \quad \varkappa_2^* = \frac{h}{2} \varkappa_2, \quad \varkappa_3^* = \frac{h}{2} \varkappa_3, \tag{3}$$

где символами $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ обозначены кривизны срединной поверхности панели.

Для усилий и моментов получаем после применения гипотез Кирхгофа и интегрирования по Z^* следующие соотношения:

$$T_1 - \frac{1}{2} T_2 = \frac{h}{2}(I_1\varepsilon_1 + I_2\varkappa_1^*),$$
$$T_2 - \frac{1}{2} T_1 = \frac{h}{2}(I_1\varepsilon_2 + I_2\varkappa_2^*), \tag{4}$$
$$\frac{3}{2} S = \frac{h}{2}(I_1\varepsilon_3 + I_2\varkappa_3^*);$$

$$M_1 - \frac{1}{2} M_2 = \frac{h^2}{4}(I_2\varepsilon_1 + I_3\varkappa_1^*),$$
$$M_2 - \frac{1}{2} M_1 = \frac{h^2}{4}(I_2\varepsilon_2 + I_3\varkappa_2^*), \tag{5}$$
$$\frac{3}{2} H = \frac{h^2}{4}(I_2\varepsilon_3 + I_3\varkappa_3^*).$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\sigma_i}{e_i} dz^*, \quad I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{\sigma_i}{e_i} z^* dz^*, \quad I_3 = \int_{-1}^{1} \frac{\sigma_i}{e_i} z^{*2} dz^*, \tag{6}$$

и ε_1, ε_2, ε_3 — деформации срединной поверхности. Интегралы I_1, I_2, I_3 вычисляются во всех точках оболочки численно.

Интенсивность деформаций e_i определяется по формуле

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{z^2 P(\varkappa, \varkappa) + 2zP(\varepsilon, \varkappa) + P(\varepsilon, \varepsilon)}, \tag{7}$$

где $P(\varkappa, \varkappa)$, $P(\varepsilon, \varkappa)$, $P(\varepsilon, \varepsilon)$ — введенные А. А. Ильюшиным [1] квадратичные формы:

$$P(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2,$$
$$P(\varkappa, \varkappa) = \varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2, \tag{8}$$
$$P(\varepsilon, \varkappa) = \varepsilon_1\varkappa_1 + \varepsilon_2\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\varkappa_1 + \varepsilon_3\varkappa_3.$$

После преобразований можно систему (4)—(5) привести к следующему виду:

$$\varepsilon_1 = \frac{2J_4}{h}\left(T_1 - \frac{1}{2} T_2\right) - I_5\varkappa_1^*,$$
$$\varepsilon_2 = \frac{2J_4}{h}\left(T_2 - \frac{1}{2} T_1\right) - J_5\varkappa_2^*, \tag{9}$$
$$\varepsilon_3 = \frac{3J_4}{h} S - J_5\varkappa_3^*;$$

$$M_1=\frac{h}{2}J_5T_1+\frac{h^2}{3}J_6\left(\varkappa_1^*+\frac{1}{2}\varkappa_2^*\right),$$

$$M_2=\frac{h}{2}J_5T_2+\frac{h^2}{3}J_6\left(\varkappa_2^*+\frac{1}{2}\varkappa_1^*\right), \tag{10}$$

$$H=\frac{h}{2}J_5S+\frac{h^6}{6}J_6\varkappa_3^*;$$

где

$$J_4=J_1^{-1}, \qquad J_5=J_2J_4, \qquad J_6=J_3-J_2J_5. \tag{11}$$

Предполагаем, что панель имеет начальный прогиб w. Тогда безразмерные искривления срединной поверхности оболочки связаны с прогибом оболочки следующими формулами:

$$\varkappa_1^*=-\frac{h}{2}\cdot\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2},$$

$$\varkappa_2^*=-\frac{h}{2}\cdot\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2}, \tag{12}$$

$$\varkappa_3^*=-\frac{h}{2}\cdot\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x\,\partial y}.$$

В выражениях (12) символом w обозначен полный прогиб оболочки.

При изгибе оболочек средней толщины должны быть удовлетворены следующие уравнения:

1) уравнения равновесия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}=0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}+T_1\left(k_x+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+$$

$$+T_2\left(K_y+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+q=0; \tag{14}$$

2) уравнение совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial x\,\partial y}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)^2-$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w_0}{\partial y}-k_x\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2}-k_y\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2}. \tag{15}$$

В уравнениях (13)—(15) через k_x и k_y обозначены начальные кривизны срединной поверхности и через q — поперечная нагрузка. Уравнению (13) удовлетворим, вводя функцию напряжений F формулами:

$$T_1 = h^3 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad T_2 = h^3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad S = -h^3 \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}. \tag{16}$$

Перейдя к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{a}, \qquad \eta = \frac{y}{b}, \qquad l = \frac{a}{b}, \qquad W = \frac{w}{h},$$

$$k_1 = \frac{a^2}{h} k_x, \qquad k_2 = \frac{b^2}{h} k_y, \qquad W_0 = \frac{w_0}{h},$$

(9) и (10) можно, учитывая (11), записать в виде:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = 2h^2 J_4 \left(\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \right) + \frac{h^2}{2a^2} J_5 \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \xi^2}, \\
\varepsilon_2 = 2h^2 J_4 \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2b^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right) + \frac{h^2}{2b^2} J_5 \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \eta^2}, \\
\varepsilon_3 = -3h^2 J_4 \frac{1}{ab} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{h^2}{2ab} J_5 \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \xi \, \partial \eta};
\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}
M_1 = \frac{h^4}{2b^2} J_5 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{h^4}{6} J_6 \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2b^2} \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \eta^2} \right], \\
M_2 = \frac{h^4}{2a^2} J_5 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{h^4}{6} J_6 \left[\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2a^2} \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \xi^2} \right], \\
H = -\frac{h^4}{2ab} J_5 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \, \partial \eta} - \frac{h^4}{12ab} J_6 \frac{\partial^2 (W - W_0)}{\partial \xi \, \partial \eta}.
\end{gathered} \tag{19}$$

Для простоты предположим, что $q = 0$. Уравнения (14) и (15) можно на основании формул (18)—(19) привести к виду:

$$\begin{gathered}
2J_4 \nabla^4 F + 4 \left[\frac{J_4}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial \xi \, \partial \eta^2} \right) + \frac{\partial J_4}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial \xi^2 \, \partial \eta} + \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} \right) \right] + \\
+ 2 \left[\frac{\partial^2 J_4}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 J_4}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{\partial^2 J_4}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right] - \\
- L(J_4, F) + \frac{1}{2} L(J_5, W - W_0) = \\
= -\frac{1}{2} [L(W, W) - L(W_0, W_0)] - \nabla_k^2 (W - W_0),
\end{gathered} \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
J_6\nabla^4(W-W_0) &+2\left\{\frac{\partial J_k}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^3(W-W_0)}{\partial\xi^3}+\frac{\partial^3(W-W_0)}{\partial\xi\,\partial\eta^2}\right]+\right.\\
&+\left.\frac{\partial J_6}{\partial\eta}\left[\frac{\partial^3(W-W_0)}{\partial\xi^2\,\partial\eta}+\frac{\partial^3(W-W_0)}{\partial\eta^3}\right]\right\}+\\
&+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 J_6}{\partial\xi^2}\left[2\frac{\partial^2(W-W_0)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2(W-W_0)}{\partial\eta^2}+\right.\right.\\
&\left.+2\frac{d^2 J_6}{\partial\xi\,\partial\eta}\,\frac{\partial^2(W-W_0)}{\partial\xi\,\partial\eta}\right]+\\
&+\left.\frac{\partial^2 J_6}{\partial\eta^2}\left[\frac{\partial^2(W-W_0)}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2(W-W_0)}{\partial\eta^2}\right]\right\}-\\
&+6L(F,W)-6\nabla_k^2F-3L(J_5,F)=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

В формулах (20) и (21) символами $\nabla_k{}^2\alpha$, $\nabla^4\alpha$, $L(\alpha,\alpha)$ и $L(\alpha,\beta)$ обозначены следующие операторы:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_k{}^2\alpha=k_2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi^2}+k_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial\eta^2},\\
&\nabla^4\alpha=\frac{\partial^4\alpha}{\partial\xi^4}+2\frac{\partial^4\alpha}{\partial\xi^2\,\partial\eta^2}+\frac{\partial^4\alpha}{\partial\eta^4},\\
&L(\alpha,\alpha)=2\left[\frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2\right],\\
&L(\alpha,\beta)=\diamond^4(\alpha,\beta)=\frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi\,\partial\eta}\,\frac{\partial^2\beta}{\partial\xi\,\partial\eta}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Если ограничиться упругими деформациями панели (тогда $J_i=\text{const}$), то можно систему уравнений (20)—(21) привести к следующему виду:

$$
2J_4\nabla^4F=-\frac{1}{2}[L(W,W)-L(W_0,W_0)]-\nabla_k{}^2(W-W_0), \tag{23}
$$

$$
J_6\nabla^4(W-W_0)-6L(F,W)-6\nabla_kF=0. \tag{24}
$$

Они полностью совпадают с формулами (5.44) и (5.49) монографии [2], если учесть, что там через W обозначен дополнительный прогиб, и функции напряжений работы [2] и настоящей работы связаны между собой зависимостью

$$
\Phi=h^2F, \tag{25}
$$

где Φ — функция напряжений, введенная в монографии [2].

Таким образом, уравнения (20) и (21) являются весьма общими для изучения поведения нелинейно-упругих панелей. К этим уравнениям нужно прибавить еще граничные условия. Рассмотрим частный случай, когда кромки равномерно сжатой панели опираются на жесткие ребра, которые остаются в ходе деформирования прямолинейными. Кроме того, предположим, что края панели могут свободно двигаться по ребрам (т. е. тангенциальные усилия по краям отсутствуют). Описанное опирание можно математически охарактеризовать следующими условиями:

если $\xi = 0$ и $\xi = 1$, то

$$W=0, \quad M_1=0, \quad T_1=0, \quad S=0, \tag{26}$$

если $\eta = 0$ и $\eta = 1$, то

$$W=0, \quad M_2=0, \quad T_2=0, \quad S=0.$$

Систему уравнений (20)—(21) при граничных условиях (26) можно интегрировать методом конечных разностей, комбинируя последний с методом последовательных приближений.

Литература

1. Ильюшин А. А., Пластичность. Москва, 1948.
2. Вольмир А. С., Устойчивость упругих систем. Москва, 1963.
3. Сакков Э., Исследование послекритической стадии упругопластических пластин при цилиндрической форме потери устойчивости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 160—173.

Поступило
20 V 1975

KÄRMANI-TÜÜPI VÕRRANDITE TULETAMINE ELASTSETE-PLASTSETE SILINDRILISTE PANEELIDE PÄRASTKRIITILISE STAADIUMI UURIMISEKS

E. Sakkov

Resümee

Uuritakse õhukese silindrilise paneeli pärastkriitilist staadiumi juhul, kus paneel on ühtlaselt surutud piki kõverjoonseid servi. On tuletatud probleemi põhivõrrandid eeldusel, et koormuse languse ja sekundaarsete plastsete deformatsioonide piirkondade mõju ei pruugi arvestada.

DERIVATION OF THE KÁRMÁN'S EQUATIONS FOR ANALYSIS OF THE POST-CRITICAL STAGE OF ELASTIC-PLASTIC CYLINDRICAL PANELS

E. Sakkov

Summary

The post-critical stage of the cylindrical panels in the case, where the panel is compressed along the curvilinear edges is analysed. Basic equations of the problem are derived. The effects of unloading and secondary plastic deflections are neglected.

К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

И. Вайникко

Кафедра теоретической механики

В настоящей статье решается задача проектирования жестко-пластической круглой пластины при условии текучести Мизеса принципом максимума Л. С. Понтрягина. Аналогичная задача для кольцевых пластин решалась Э. Пунгар [1]. Постановка задачи в настоящей работе близка к работе В. Фрайберга и В. Тэкиналпа [2].

Рассмотрим круглую пластину радиуса R, нагруженную равномерной поперечной нагрузкой q. Найдем толщину пластины $h(r)$, где r — текущий радиус пластины, так, чтобы величина

$$\int_0^R M_s^2 r\,dr \tag{1}$$

имела минимальное значение. Здесь M_s — предельный момент, при котором вся пластина находится в предельном состоянии, т. е.

$$M_s = \frac{\sigma_0 h^2}{4},$$

где σ_0 — предел текучести материала пластины.

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} &\varrho = \frac{r}{R}, \qquad \delta = \frac{h}{h_0}, \qquad m_1 = \frac{M_r}{M^*}, \\ &m_2 = \frac{M_\varphi}{M^*}, \qquad Q = \frac{qR^2}{M^*}, \qquad M^* = \frac{\sigma_0 h_0^2}{4}, \end{aligned} \tag{2}$$

где M_r и M_φ — соответственно радиальный и тангенциальный изгибающие моменты, h_0 — толщина пластины в центре.

Изгибающие моменты должны удовлетворять уравнению равновесия, которое, учитывая (2), имеет вид:

$$\frac{dm_1}{d\varrho} + \frac{m_1 - m_2}{\varrho} = -\frac{Q\varrho}{2}. \tag{3}$$

Если считать материал жестко-пластическим, подчиняющимся условию текучести Мизеса

$$m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 = \delta^4, \tag{4}$$

то (1) заменятся выражением

$$\int_0^1 (m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2)\varrho\, d\varrho. \tag{5}$$

Надо найти решение уравнения (3) так, чтобы интеграл (5) имел минимальное значение при одном из следующих граничных условий:

1) для свободно опертой на крае пластины

$$m_1 = 0 \quad \text{при} \quad \varrho = 1; \tag{6}$$

2) для защемленной на крае пластины

$$m_1 = 2m_2 \quad \text{при} \quad \varrho = 1. \tag{7}$$

В центре пластины (т. е. при $\varrho = 0$) должно выполняться условие $m_1 = m_2 = 1$. Это условие будет использовано для нахождения критического Q^*, с помощью которого, в свою очередь, можно найти

$$h_0 = \sqrt{\frac{4qR^2}{Q^*\sigma_0}}.$$

Условие (4) будет затем использовано для нахождения δ, при желании можно затем найти $h = h_0\delta$.

Решаем эту задачу, применяя принцип Понтрягина. Фазовой координатой выбираем $x = m_1$, управлением $u = m_2$ и параметром $t = \varrho^2/2$.

На основе вышеуказанного получим следующую задачу. *Найти управление u так, чтобы интеграл*

$$\int_0^1 (x^2 - ux + x^2)\, dt$$

принимал минимальное значение, причем u и x удовлетворяли дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t}u - \frac{Q}{2}. \tag{8}$$

Условия (6) и (7) принимают следующую форму:

1) $x = 0$ при $t = 0{,}5$; (9)

2) $x = 2u$ при $t = 0{,}5$. (10)

По принципу Понтрягина для решения этой задачи надо искать максимальное значение гамильтониана

$$H = \left(-\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t}u - \frac{Q}{2}\right)\psi - (x^2 - xu + u^2), \tag{11}$$

где вспомогательная переменная ψ должна при условии $\psi(0) = 0$ удовлетворять уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{2t}\psi + 2x - u. \tag{12}$$

Гамильтониан (11) имеет максимальное значение, когда

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}<0.$$

Следовательно, при

$$u=\frac{1}{4t}\psi+\frac{1}{2}x. \tag{13}$$

Принимая управление в виде (13), получаем вместо уравнений (8) и (12) линейную систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\frac{1}{4t}x+\frac{1}{8t^2}\psi-\frac{Q}{2};\\ \frac{d\psi}{dt}&=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4t}\psi.\end{aligned} \tag{14}$$

Решение системы (14), удовлетворяющее условию трансверсальности $\psi=0$ при $t=0$, имеет вид

$$\begin{aligned}x&=-\frac{7}{16}Qt+\frac{1}{2}C_1,\\ \psi&=-\frac{3}{8}Qt^2+C_1t.\end{aligned} \tag{15}$$

Постоянную интегрирования C_1 определяем зависимо от граничных условий (9) или (10).

Найдем безразмерную скорость прогиба $w=w(\varrho)$, соответствующую найденному напряженному состоянию. Из ассоциированного закона течения при условии Мизеса получим

$$\varrho(2m_2-m_1)\frac{d^2w}{d\varrho^2}-(2m_1-m_2)\frac{dw}{d\varrho}=0. \tag{16}$$

Зная изгибающие моменты, можем интегрировать уравнение (16) при граничных условиях:

1) для свободно опертой пластины при граничном условии (6)

$$w=0 \quad \text{при} \quad \varrho=1 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{d\varrho}=0 \quad \text{при} \quad \varrho=0; \tag{17}$$

2) для защемленной пластины при граничном условии (7)

$$w=0 \quad \text{и} \quad \frac{dw}{d\varrho}=0 \quad \text{при} \quad \varrho=1. \tag{18}$$

Приведем соответствующие результаты.

1. Свободно опертая пластина. Изгибающие моменты имеют вид

$$m_1=\frac{7}{32}Q(1-\varrho^2), \qquad m_2=\frac{1}{32}Q(7-5\varrho^2).$$

Требование, что радиальный и тангенсиальный изгибающие моменты равны в центре пластины ($m_1 = m_2 = 1$ при $\varrho = 0$), дает для нагрузки Q следующее предельное значение:

$$Q^* = \frac{32}{7}, \tag{19}$$

и изгибающие моменты

$$m_1 = 1 - \varrho^2, \qquad m_2 = 1 - \frac{5}{7}\varrho^2. \tag{20}$$

Дифференцирование уравнения (16) при условии (17) дает скорость прогиба

$$w = w_0\left(\frac{3}{11}\varrho^4 - \frac{14}{11}\varrho^2 + 1\right), \tag{21}$$

где w_0 — скорость прогиба в центре пластины, которая остается неопределенной при данной модели материала.

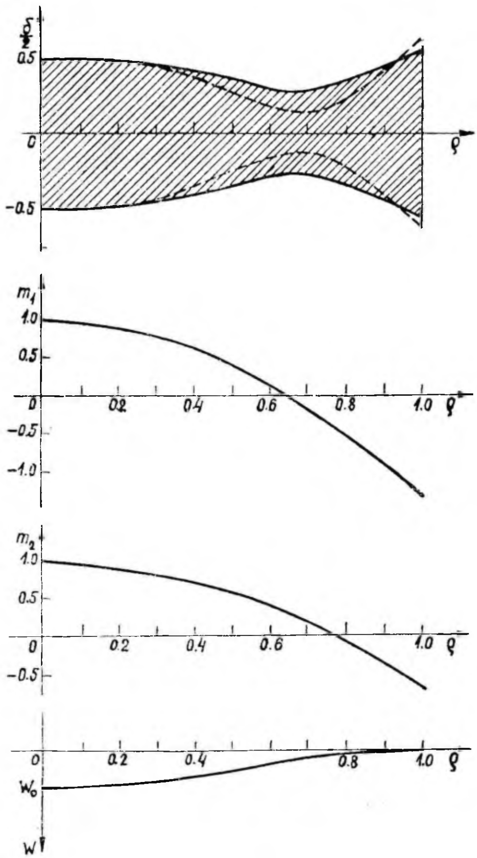


Рис. 1.

Подставляя полученное значение моментов в формулу (4), можем найти безразмерную толщину пластины

$$\delta=\sqrt[4]{\frac{39}{49}\varrho^4-\frac{12}{7}\varrho^2+1}\,. \tag{22}$$

Для наглядности полученные формулы (20), (21), (22) иллюстрированы на рисунке 2.

2. Жестко защемлённая пластина. Изгибающие моменты имеют вид:

$$m_1=\frac{Q}{32}(3-7\varrho^2), \qquad m_2=\frac{Q}{32}(3-5\varrho^2).$$

Если требовать, что в центре пластины моменты равны

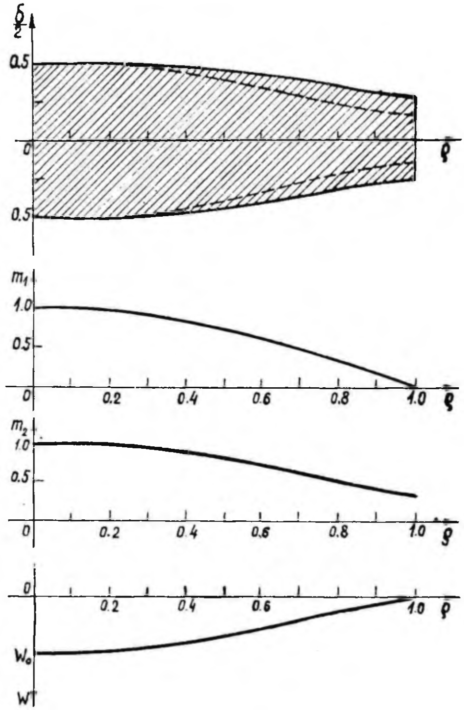


Рис. 2.

($m_1 = m_2$ при $\varrho = 0$), то предельное значение нагрузки

$$Q=\frac{32}{3}, \tag{23}$$

изгибающие моменты

$$m_1=1-\frac{7}{3}\varrho^2, \qquad m_2=1-\frac{5}{3}\varrho^2, \tag{24}$$

и прогиб

$$w = w_0(1-\varrho^2)^2. \tag{25}$$

Толщина пластины выражается зависимостью

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{13}{3}\varrho^4 - 4\varrho^2 + 1}\,. \tag{26}$$

Результаты (24), (25), (26) иллюстрированы на рисунке 1.

Интересно заметить, что, если брать в качестве предельного момента M_s величину $\sigma_0 h/2$, т. е. считать пластину трехслойной (пластина состоит из двух несущих слоев переменной толщины $h/2$ и одного слоя легкого заполнителя постоянной толщины), то полученное выше решение дает безразмерную толщину несущих слоев, только в формулах (22) и (26) надо брать вместо корня четвертой степени корень квадратный. Полученные результаты нанесены на рисунках 1 и 2 пунктиром.

Литература

1. Пунгар Э., К оптимальному проектированию кольцевой пластины на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина. Прикл. механ., 1973, 8, № 11, 77—81.
2. Freiberger, W., Tekinalp B., Minimum weight design of circular plates. J. mech. and phys. solids, 1956, 4, № 4, 294—299.

Поступило
23 I 1975

JÄIKPLASTSETE ÜMMARGUSTE PLAATIDE OPTIMAALSEST PROJEKTEERIMISEST

I. Vainikko

Resümee

Töös lahendatakse jäikplastse ümmarguse plaadi projekteerimisülesanne lähtudes Misese voolavustingimusest, minimiseerides seost(1) Pontrjagini maksimumprintsiibil. On leitud nii serval vabalt toetatud kui ka jäigalt kinnitatud ühtlaselt koormatud plaadi paksus, vastav pingeseisund ja läbipaine.

OPTIMAL DESIGN OF RIGID-PLASTIC CIRCULAR PLATES

I. Vainikko

Summary

The present paper deals with optimal design problems of rigid-plastic circular plates. The Pontryagin maximum principle has been used. Material of the plates under consideration obeys to Mises yield condition. Distribution of thickness, stress and deflection of simply supported and clamped plates have been found.

О ЛОКАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Я. Леллеп

Кафедра теоретической механики

Определению остаточных прогибов жестко-пластических пологих сферических оболочек посвящена работа Ю. Лепика [1]. В указанной статье рассмотрен случай локальной динамической нагрузки. Представлен метод для определения границ (размеров) пластически деформированных областей. В работе Н. Джонса и Р. М. Вальтерса [5] изучено поведение пластических сферических оболочек под действием импульсивной нагрузки, т. е. распределенной нагрузки, интенсивность которой бесконечно большая, но время действия ее бесконечно мало. Остаточные прогибы найдены теоретически (приближенными методами) и экспериментально.

В настоящей статье вычисляется остаточный прогиб заделанной сферической оболочки методами С. Калижского [6] и В. Моралеса [7]. Вырабатывается методика для определения верхней оценки остаточного прогиба. Предполагается, что нагрузка локальная, а материал оболочки — жестко-пластический, имеющий различные пределы текучести при растяжении и сжатии.

§ 1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим сферический колпачок радиуса R и толщины h, жестко заделанный по внешнему контуру с центральным углом β (рис. 1). Пусть оболочка нагружена равномерно распределенной внутренней нагрузкой, действующей вблизи полюса на площадке с центральным углом α. Рассмотрим случай, когда интенсивность давления p изменяется по закону (t — время):

$$p=\begin{cases} p_0=\text{const}, & 0\leqslant t\leqslant t_0, \\ 0, & t>t_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для простоты допустим, что пластические деформации охватывают целую оболочку. Если это предположение приводит к слишком грубым оценкам остаточного прогиба в случае динамического нагружения, то за β можно взять не действительный угол внешнего контура, а внешний угол края пластической зоны. Для его определения может быть применен метод, выработанный в [1].

Предположим, что оболочка изготовлена из жестко-пластического материала, подчиняющегося условию текучести В. Прагера [4]. Шестиугольник Прагера изображен на рис. 2. Его угловые точки имеют на плоскости главных напряжений следующие координаты:

$$A(\gamma\sigma_c,\ (\gamma-1)\sigma_c);\quad B(\gamma\sigma_c,\ \gamma\sigma_c);\quad C((\gamma-1)\sigma_c,\ \gamma\sigma_c);$$
$$D(-\sigma_c,\ 0);\quad E(-\sigma_c,\ -\sigma_c);\quad F(0,\ -\sigma_c).$$

Здесь $\gamma=\sigma_t/\sigma_c$, где σ_t — предел текучести при растяжении, σ_c — предел текучести при сжатии. Для конкретности ограничимся случаем $0<\gamma\leqslant 1$.

Компоненты скоростей деформаций связаны со скоростями перемещений по формулам

$$\dot\varepsilon_\varphi=\frac{1}{R}(\dot v'-\dot w);\qquad \dot\varkappa_\varphi=-\frac{1}{R^2}(\dot v+\dot w')';$$
$$\dot\varepsilon_\theta=\frac{1}{R}(\dot v\cot\varphi-\dot w);\qquad \dot\varkappa_\theta=-\frac{\cot\varphi}{R^2}(\dot v+\dot w'), \tag{1.2}$$

где штрихом отмечено дифференцирование по φ. Поле скоростей перемещений задаем в виде

$$\dot v=0;\qquad \dot w=-\dot w_0(t)\frac{\cos\varphi-\cos\beta}{1-\cos\beta}, \tag{1.3}$$

где $\dot w_0(t)$ — скорость прогиба на полюсе оболочки. При этом соотношения (1.2) приобретают вид

$$\dot\varepsilon_\varphi=\dot\varepsilon_\theta=\frac{\dot w_0}{R}\cdot\frac{\cos\varphi-\cos\beta}{1-\cos\beta};\qquad \dot\varkappa_\varphi=\dot\varkappa_\theta=\frac{-\dot w_0}{R^2}\frac{\cos\varphi}{1-\cos\beta}. \tag{1.4}$$

Усилия и моменты выражаются через главные напряжения по формулам

$$N_{\varphi,\theta}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\varphi,\theta}\,dz;\qquad M_{\varphi,\theta}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\varphi,\theta}z\,dz. \tag{1.5}$$

Здесь z — координата по толщине оболочки.

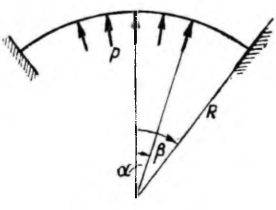


Рис. 1.

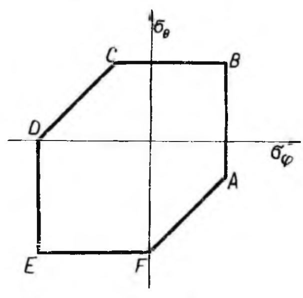


Рис. 2.

Скорость диссипации внутренней энергии на единицу площади срединной поверхности выражается в виде

$$D = N_\varphi \dot{\varepsilon}_\varphi + N_\theta \dot{\varepsilon}_\theta + M_\varphi \dot{\varkappa}_\varphi + M_\theta \dot{\varkappa}_\theta. \tag{1.6}$$

§ 2. Предельная нагрузка для локально нагруженной сферической оболочки

Допустим, что нагрузка, действующая на оболочке, имеет квазистатический характер. Вычислим предельную нагрузку кинематическим методом. Предположим, что напряженное состояние центральной части оболочки $0 \leqslant \varphi < \varphi_0$ соответствует точке B на рис. 2. Вблизи внешнего контура $\varphi_0 < \varphi \leqslant \beta$ напряженное состояние следующее: при $-h/2 \leqslant z < z_1$ распределение напряжений соответствует пластическому режиму B, а при $z_1 < z \leqslant h/2$ — режиму E. Величина z_1 определяет нейтральную поверхность, причем

$$z_1 = R\,\frac{\cos\varphi - \cos\beta}{\cos\varphi}. \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что

$$\cos\varphi_0 = \frac{\cos\beta}{1-k}, \tag{2.2}$$

где $k = h/(2R)$. Переходя с помощью соотношений (1.5) и (2.1) к усилиям и моментам, получим:

$$N_\varphi = N_\theta = \gamma\sigma_c h; \qquad M_\varphi = M_\theta = 0 \tag{2.3}$$

в центральной области $0 \leqslant \varphi < \varphi_0$, и

$$\begin{gathered} N_\varphi = N_\theta = \frac{\sigma_c h}{2}\left[\gamma - 1 + \frac{(1+\gamma)(\cos\varphi - \cos\beta)}{k\cos\varphi}\right]; \\ M_\varphi = M_\theta = -\frac{\sigma_c h^2}{8}(1+\gamma)\left[1 - \left(\frac{\cos\varphi - \cos\beta}{k\cos\varphi}\right)^2\right] \end{gathered} \tag{2.4}$$

вблизи края $\varphi_0 < \varphi \leqslant \beta$.

Скорость рассеяния механической энергии вычислим по формуле

$$D_{\mathrm{int}} = 2\pi R^2 \int_0^{\varphi_0} D_1 \sin\varphi\, d\varphi + 2\pi R^2 \int_{\varphi_0}^{\beta} D_2 \sin\varphi\, d\varphi + 2\pi R \sin\beta D_3. \tag{2.5}$$

Здесь через D_1 и D_2 обозначены скорости диссипаций, соответствующие единичной площади срединной поверхности соответственно во внутренней и во внешней областях. Величина

$$D_3 = \frac{\dot{w}_0\sigma_c(1+\gamma)k^2 R\sin\beta}{2(1-\cos\beta)} \tag{2.6}$$

представляет собой скорость рассеяния энергии на единицу длины шарнирной окружности при $\varphi=\beta$. Скоростям перемещений (1.3) соответствует мощность внешних нагрузок

$$D_{\text{ext}}=\pi R^2 \dot{w}_0 q \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha-2\cos\beta)}{1-\cos\beta}. \tag{2.7}$$

Вычисляя интегралы в формуле (2.5) с помощью (1.4), (1.6), (2.2)—(2.4) и приравнивая правые части формул (2.5) и (2.7), получим верхнюю оценку для предельной нагрузки

$$q=\sigma_c \frac{4\gamma k(1-\cos\beta)^2+(1+\gamma)\{k^2-2\cos^2\beta[\ln(1-k)+k(1+k)]\}}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha-2\cos\beta)}. \tag{2.8}$$

Если в (2.8) принимать $\alpha=\beta$, то приходим к результату, полученному Ю. П. Листровой и др. [2]. При $\alpha=\beta$ и $\gamma=1$ получим из (2.8) оценку для предельного давления в случае материала с одинаковыми пределами текучести, которая совпадает с оценкой, представленной в работе Е. Оната и В. Прагера [3]. Зависимость между q и β представлена на рис. 3 при некоторых значениях угла α. При этом $\gamma=0{,}8$; $k=0{,}05$.

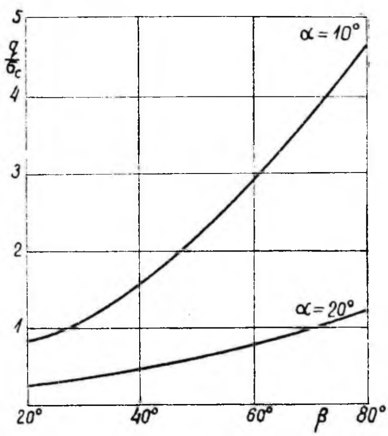


Рис. 3.

Рассмотрим далее случай, когда оболочка подвергнута действию сосредоточенной силы, приложенной в сечении $\varphi=0$. Обозначая критическое значение этой силы через Q, имеем

$$D_{\text{ext}}=Q\dot{w}_0, \tag{2.9}$$

откуда с помощью (2.7) получим верхнюю оценку

$$Q=\pi R^2 q \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha-2\cos\beta)}{1-\cos\beta}. \tag{2.10}$$

§ 3. Метод Калижского

Пусть $W_c{}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ — некоторое заданное на поверхности S не зависящее от времени кинематически допустимое поле скоростей перемещений. Допустим, что действительные скорости представляются в виде

$$\dot{u}_i=\dot{w}_0(t)\,W_c{}^i, \tag{3.1}$$

где $\dot{w}_0(t)$ — функция, зависящая только от времени. Пусть на поверхности S_T действуют внешние силы

$$T_i=p(t)\cdot T_i{}^0, \tag{3.2}$$

причем $p(t)$ зависит только от времени, а $T_i{}^0$ — только от координат. С. Калижский [6] предложил при сделанных допущениях для приближенного вычисления остаточного прогиба следующее уравнение

$$\ddot{w}_0(t)=K[p(t)-q]. \tag{3.3}$$

Здесь две точки обозначают вторую производную по времени, а

$$K=\frac{\int\limits_{(S_T)} T^0 W_c\,dS}{\int\limits_{(V)} \varrho W_c W_c\,dV}; \qquad q=\frac{D'_{\text{int}}}{\int\limits_{(S_T)} W_c\,dS}; \tag{3.4}$$

причем V — объем, ϱ — плотность материала. В целях упрощения записи в формулах (3.4) и в дальнейшем величины $W_c{}^i$, $T_i{}^0$, а также $\dot{u}_i$ и T_i записываются без индексов. Величина q в (3.4) представляет собой верхнюю оценку предельной нагрузки и D'_{int} — скорость рассеяния энергии, соответствующую выбранному полю скоростей перемещений W_c.

Уравнение (3.3) принимает в случае прямоугольного импульса вид

$$\ddot{w}_0=K(p_0-q), \tag{3.5}$$

если $0 \leqslant t < t_0$, и

$$\ddot{w}_0=-Kq, \tag{3.6}$$

если $t_0 < t \leqslant t_*$, где t_* обозначает конечный момент деформации. Так как величины K и q в (3.5) и (3.6) согласно (3.4) не зависят от времени, то уравнения (3.5) и (3.6) можно интегрировать дважды по времени. Сделав это и удовлетворяя начальным условиям $w_0(0) = 0$ и $\dot{w}_0(0) = 0$, а также условиям непрерывности величин w_0 и $\dot{w}_0$ в момент времени t_0, приходим к формулам

$$w_*=\frac{p_0 t_0{}^2}{2q}(p_0-q)K, \tag{3.7}$$

$$t_*=\frac{p_0 t_0}{q}, \tag{3.8}$$

где введено обозначение $w_* = w_0(t_*)$. Величина t_* определено условием $\dot{w}_0(t_*) = 0$.

В случае сферической оболочки, согласно (1.3) и (3.4)

$$K=\frac{3}{2\mu}\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha-2\cos\beta)}{(1-\cos\beta)^2}, \tag{3.9}$$

где μ-масса, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности. Величина q определяется формулой (2.8). С помощью (3.9) и (3.7) получим для остаточного прогиба выражение

$$w_*=\frac{3p_0t_0^2(p_0-q)}{4\mu q}\cdot\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha-2\cos\beta)}{(1-\cos\beta)^2}.$$

§ 4. Метод Моралеса

В работе Моралеса [7] показано, что для остаточного прогиба получается нижняя оценка, которая при отсутствии начальных скоростей можно записать в виде

$$w_*\geqslant\frac{t^*}{\int\limits_{(V)}\varrho W_c\,dV}\left[\int\limits_{(S_T)}dS\int\limits_0^{t^*}T\cdot\dot{u}^*\,dt-\int\limits_{(V)}dV\int\limits_0^{t^*}D^*\,dt\right]. \tag{4.1}$$

Здесь допущено, что поле скоростей перемещений задано в виде

$$\dot{u}^*=W_c\left(1-\frac{t}{t^*}\right), \tag{4.2}$$

а t^* — нижняя оценка времени деформации, определяемая соотношением

$$t^*=\frac{1}{q}\int\limits_0^{t_f}p(t)\,dt, \tag{4.3}$$

где t_f — действительный момент времени окончания движения.

Соотношение (4.1) можно немного упростить. Имея в виду закон нагружения (1.1), из (4.3) получим

$$t^*=\frac{p_0t_0}{q}. \tag{4.4}$$

Так как величина D^* в (4.1) соответствует скоростям $\dot{u}^*$, то с учетом (4.2) получим

$$\int\limits_{(V)}dV\int\limits_0^{t^*}D^*\,dt=q\int\limits_{(S_T)}T^0W_c\int\limits_0^{t^*}\left(1-\frac{t}{t^*}\right)dt\,dS. \tag{4.5}$$

Упрощая интегралы в (4.1) и (4.5) с помощью (1.1), (4.2) и (4.4), приходим в конечном счете к соотношению

$$w_*\geqslant\frac{p_0t_0^2(p_0-q)}{2q}\cdot\frac{\int\limits_{(S_T)}T^0W_c\,dS}{\int\limits_{(S)}\mu W_c\,dS}. \tag{4.6}$$

Из неравенства (4.6) следует, что при любых конструкциях типа оболочек, пластин и стержней, равномерно нагруженных по всей поверхности, в случае прямоугольного импульса остаточный прогиб

$$w_*\geqslant\frac{p_0t_0^2}{2\mu q}(p_0-q). \tag{4.7}$$

Переходим к локально нагруженной сферической оболочке. Выбирая согласно (1.3)

$$W_c=\frac{\cos\varphi-\cos\beta}{1-\cos\beta}$$

и вычисляя интегралы в (4.6), получим

$$w_*\geqslant\frac{p_0t_0^2(p_0-q)}{2\mu q}\,\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha-2\cos\beta)}{(1-\cos\beta)^2}.$$

§ 5. Верхняя граница остаточного прогиба

Д. Н. Робинсон [8] вывел неравенство

$$\int\limits_{(S_T)} dS\int\limits_0^t T\ddot{w}\,dt\geqslant\int\limits_{(S)} Q_*w\,dS, \tag{5.1}$$

откуда получается верхняя оценка для остаточного прогиба. Здесь Q_* — критическое значение квазистатической сосредоточенной силы, приложенной в точке, в которой оцениваются остаточные перемещения.

В случае прямоугольного импульса интеграл в левой стороне неравенства (5.1) имеет неизменное значение при $t>t_0$. Предположим, что

$$w(t_0)=\frac{t_0^2}{2}\ddot{w}(0). \tag{5.2}$$

Применение формулы (5.2) оправдывается тем, что она справедлива во многих случаях, когда точное решение задачи известно. При сделанных допущениях соотношение (5.1) можно записать в виде

$$w_*\leqslant\frac{p_0t_0^2}{2Q_*}\int\limits_{(S_T)}\ddot{w}(0)\,dS. \tag{5.3}$$

В работе [8] формула (5.3) были применена в некоторых случаях, когда распределение ускорений в начальный момент деформации известно заранее. Чтобы использовать ее в поставленной задаче, придется оценить начальное ускорение.

Согласно принципу виртуальных скоростей

$$p_0 \int\limits_{(S_T)} \dot{w}\, dS - \mu \int\limits_{(S)} \ddot{w}\dot{w}\, dS \geqslant q^- \int\limits_{(S_T)} \dot{w}\, dS, \tag{5.4}$$

где q^- — нижняя граница несущей способности. Обозначим

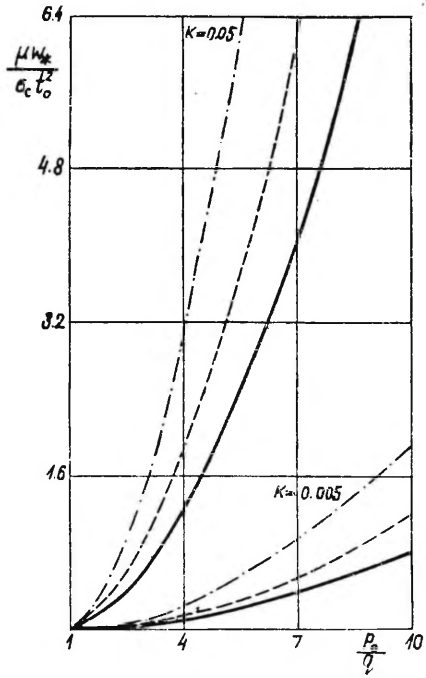


Рис. 4.

часть срединной поверхности оболочки, на которой внешняя нагрузка не действует, через S_u. Тогда из (5.4) получим

$$\int\limits_{(S_T)} [p_0 - q^- - \mu\ddot{w}]\dot{w}\, dS - \mu \int\limits_{(S_u)} \ddot{w}\dot{w}\, dS \geqslant 0. \tag{5.5}$$

Так как второй интеграл в (5.5) неотрицателен в стадии нагружения и

$$\int\limits_{(S_T)} [p_0 - q^- - \mu\ddot{w}]\dot{w}\, dS = \dot{w}(\xi) \int\limits_{(S_T)} [p_0 - q^- - \mu\ddot{w}] dS, \tag{5.6}$$

где ξ — некоторая точка на поверхности S_T, то из (5.5) и (5.6) следует, что при $t \leqslant t_0$

$$\dot{w}(\xi) \int\limits_{(S_T)} [p_0 - q^- - \mu\ddot{w}] dS \geqslant 0. \tag{5.7}$$

Допустим, что скорость прогиба не меняет свой знак на нагруженной части поверхности оболочки. Тогда из (5.7) получим

$$\int\limits_{(S_T)} \ddot{w}\, dS \leqslant \frac{p_0 - q^-}{\mu} \cdot S_T. \qquad (5.8)$$

С помощью (5.8) можно (5.3) записать в виде

$$w_* \leqslant \frac{p_0 t_0^2 (p_0 - q^-)}{2\mu Q_*} \cdot S_T \leqslant \frac{p_0 t_0^2 (p_0 - q^-)}{2\mu Q_*^-} \cdot S_T, \qquad (5.9)$$

где Q_*^- — нижняя граница критического значения сосредоточенной силы.

Несущая способность (также нижняя граница ее), как при сосредоточенной силе, так и при распределенной нагрузке, в случае поставленной задачи неизвестна. Чтобы получить какую-то оценку остаточного прогиба с помощью (5.9), заменяем в нем q^- и Q_* величинами q и Q, вычисленными выше кинематическим методом. Нельзя однако утверждать, что получившийся при этом результат

$$w_* \approx \frac{p_0 t_0^2 (p_0 - q)}{\mu q} \cdot \frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\alpha - 2\cos\beta} \qquad (5.10)$$

дает верхний предел остаточного прогиба.

Зависимость между остаточным прогибом и интенсивностью внешней нагрузки показана при некоторых значениях параметра k на рис. 4, где $\gamma = 0{,}8$; $\alpha = 20°$; $\beta = 40°$. Сплошные линии на рис. 4 соответствуют методу Моралеса, штриховые — методу Калижского, штрихпунктирные — соотношению (5.10). Результаты показывают, что, несмотря на свою простоту, метод Калижского дает весьма удовлетворительные оценки остаточного прогиба.

Литература

1. Лепик Ю., Приближенный метод решения задач динамики жестко-пластических конструкций под действием нагрузок локального типа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 303—310.
2. Листрова Ю. П., Потапов В. Н., Рудис М. А., Предельное равновесие некоторых оболочек вращения, выполненных из материала с различными пределами текучести при растяжении и сжатии. Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1969, № 1, 141—145.
3. Онат Е., Прагер В., Предельное равновесие оболочек вращения. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1955, № 5, 107—119.
4. Прагер В., О пластическом анализе слоистых конструкций. В сб. «Пробл. механики сплошн. среды.» М., Изд-во АН СССР, 1961, 302—309.
5. Jones, N., Walters, R. M., A comparison of theory and experiments on the dynamic plastic behavior of shells. Arch. Mech. Stosow., 1972, **24**, № 5—6, 701—714.

6. Kaliszky, S., Approximate solutions for impulsively loaded inelastic structures and continua. Int. J. Non-Linear Mech., 1970, **5**, № 1, 143—158.
7. Morales, W. J., Displacement bounds for blast loaded structures. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1972, **98**, № EM 4, 965—974.
8. Robinson, D. N., A displacement bound principle for elastic-plastic structures subjected to blast loading. J. Mech. and Phys. Solids, 1970, **18**, № 1, 65—80.

Поступило
19 II 1975

JÄIK-PLASTSETE SFÄÄRILISTE KOORIKUTE LOKAALNE KOORMAMINE

J. Lellep

Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse jäigalt kinnitatud sfäärilist koorikut, millele mõjub ühtlaselt jaotatud telgsümmeetriline koormus pooluse lähedases piirkonnas. Eeldatakse, et koorik on valmistatud materjalist, millel on erinevad voolavuspiirid tõmbel ja survel. Kinemaatilisel meetodil leitakse kandevõime ülempiir jaotatud koormuse ning kontsentreeritud koormuse jaoks. Analüüsitakse juhtu, kui koorikule mõjub ristkülikukujuline impulss. Jääkläbipaindeid hinnatakse Kaliszky ja Morales'i meetoditega. Töötatakse välja meetod jääkläbipainde jaoks ülemise tõkke leidmiseks.

ON THE PLASTIC BEHAVIOR OF SPHERICAL SHELLS SUBJECTED TO LOCAL LOADS

J. Lellep

Summary

An approximate theoretical study about the plastic behaviour of a fully clamped spherical shell has been undertaken. The loading is internal and a uniformly distributed one, it acts near the pole of the shell. The material of the shell is rigid-plastic and has different yield stresses in tension and compression. The critical values for the loads in the cases of distributed and concentrated loads have been found by the kinematic method. The dynamic loading in the case of rectangular impulse is examined. The maximum permanent transverse deflection has been estimated by the methods of S. Kaliszky and W. J. Morales. An upper bound displacement method is derived.

О ВЛИЯНИИ ОБРАЗОВАНИЯ КРАТЕРА НА ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИН

Ю. Лепик

Кафедра теоретической механики

Действие на пластину динамической нагрузки взрывного типа обычно сопровождается кратерообразованием. За счет выброшенного материала толщина пластины в области действия наргузки уменьшается, жесткость на изгиб падает и, следовательно, остаточный прогиб увеличивается. В данной статье сделана попытка учесть этот эффект.

1. Радиус внедрения в пластину

Пусть головная часть снаряда определяется уравнением

$$\zeta = F(r), \qquad 0 \leqslant r \leqslant a, \tag{1.1}$$

где a — радиус снаряда. Для простоты будем считать, что кратер имеет ту же форму и те же параметры, что и снаряд (т. е. снаряд считается абсолютно жестким). Обозначим для данного момента времени наибольшее внедрение снаряда в пластину символом S. Закон внедрения $S(t)$ будем считать известным хотя-бы из экспериментальных данных.

Ограничивающие поверхности пластины обозначим $z = -h_1$ и $z = h/2$. В зоне внедрения имеем $h_1 < h/2$, в остальной части пластины $h_1 = h/2$. На основании фиг. 1 имеем

$$h_1(r, t) = \frac{h}{2} - S(t) + F(r). \tag{1.2}$$

Формула (1.2) действительна при $r < r^*$ (т. е. в случае, когда головная часть снаряда еще не полностью внедрилась в пластину). Нетрудно видеть, что эта формула остается в силе и для полного внедрения головной части снаряда (тогда следует взять $r^* = a$).

Переходим к следующим безразмерным величинам

$$s(t) = \frac{2}{h} S(t), \qquad f(r) = \frac{2}{h} F(r), \qquad \xi = 1 - \frac{2h_1}{h}. \tag{1.3}$$

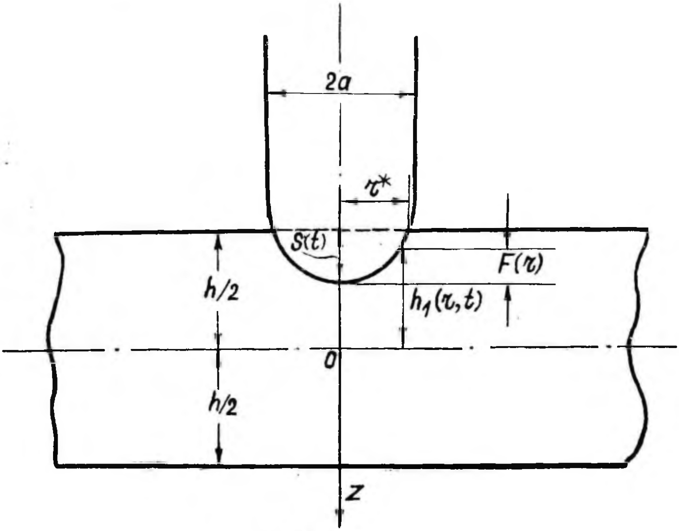
Формулу (1.2) можно теперь переписать в виде

$$\xi(r, t)=\begin{cases} s(t)-f(r) & \text{при} \quad r<r^*, \\ 0 & \text{при} \quad r>r^*. \end{cases} \tag{1.4}$$

Радиус внедрения определим из требования $\xi(r^*, t) = 0$, что дает

$$f(r^*)=s(t). \tag{1.5}$$

Разумеется, что формула (1.5) имеет место лишь при $r^* \leqslant a$. Если это неравенство не выполняется, то в качестве радиуса внедрения возьмем в формулах (1.4) половину калибра снаряда, т. е. $r^* = a$.



Фиг. 1.

Если функции $s(t)$ и $f(r)$ известны, то нетрудно найти величину r^*. В качестве примера рассмотрим случай $\zeta = Ar^2$ (т. е. случай, когда головная часть снаряда имеет форму параболоида вращения). Теперь $f(r) = 2Ar^2/h$ и из (1.5) находим

$$r^*(t)=\sqrt{\frac{hs(t)}{2A}}.$$

2. Определение остаточного прогиба пластины

Материал пластины будем считать идеально-жестко-пластическим. Под действием снаряда в части пластины $0 < r < R(t)$ происходит пластическое деформирование, а остальная часть остается жесткой (будем считать, что пластина настолько большая, что ее контурные точки не принадлежат области деформирования $0 < r < R$). Предположим еще, что давление снаряда на пластину определяется формулой

$$p(r,t)=\begin{cases} p(t) & \text{при} \quad 0\leqslant r\leqslant r^* \\ 0 & \text{при} \quad r>r^* \end{cases} \tag{2.1}$$

где $p(t)$ — известная функция времени.

Под действием внешней нагрузки начинается изгибание пластины, причем вследствие кратерообразования толщина средней части $0 < r < R(t)$ постепенно уменьшается. Движение пластины останавливается в некоторый момент времени t_f; для этого момента времени надо определить величину остаточного прогиба. Предполагается, что нагрузка $p(t)$ настолько маленькая, что не происходит пробивания пластины.

Поставленную задачу решаем приближенным методом, предложенным в статье [1]. Согласно этому методу радиус деформированной области R считается независимым от времени, и скорости перемещений задают в форме

$$\dot{u}=\dot{w}_0(t)\,\dot{u}_c, \qquad \dot{w}=\dot{w}_0(t)\,\dot{w}_c. \tag{2.2}$$

Здесь $\dot{u}_c$, $\dot{w}_c$ — некоторое кинематически допустимое, не зависящее от премени, поле скоростей. Обозначим через

T_r, T_Θ, M_r, M_Θ — усилия и моменты;

$\dot{\varepsilon}_r{}^c$, $\dot{\varepsilon}_\Theta{}^c$, $\dot{\varkappa}_r{}^c$, $\dot{\varkappa}_\Theta{}^c$ — кинематически допустимые скорости удлинений и искривлений срединной поверхности.

$\mu(r)$ — масса пластины на единицу площади срединной поверхности.

Как показано в работе [2], величину $w_0(t)$ можно определить из дифференциального уравнения

$$\ddot{w}_0(t)=Kp(t)-L, \tag{2.3}$$

где

$$K=\frac{\int_0^{r^*} \dot{w}_c r\,dr}{\int_0^R \mu(r)\,(\dot{u}_c^2+\dot{w}_c^2)\,r\,dr},$$

$$L=\frac{\int_0^R (T_r\dot{\varepsilon}_r{}^c+T_\Theta\dot{\varepsilon}_\Theta{}^c+M_r\dot{\varkappa}_r{}^c+M_\Theta\dot{\varkappa}_\Theta{}^c)\,r\,dr}{\int_0^R \mu(r)\,(\dot{u}_c^2+\dot{w}_c^2)\,r\,dr}. \tag{2.4}$$

Если пластина имела бы постоянную толщину, то приходилось бы учесть лишь скорость прогиба $\dot{w}_c$. В рассматриваемом случае вследствие кратерообразования в средней части должна появиться и радиальная составляющая скорости перемещения

$\dot{u}_c$. Учитывая, что эта величина отлична от нуля лишь в небольшой области (при $r > r^*$ имеем $\dot{u}_c \equiv 0$) и что нам нужно найти лишь кинематически допустимое поле скоростей, допустим, в дальнейшем, что во всей пластине $\dot{u}_c \equiv 0$.

Учитывая еще зависимости (1.4), можем интегралы, стоящие в знаменателях формул (2.4), представить в форме (ϱ — плотность материала пластины):

$$\varrho h \int_0^R \dot{w}_c^2 (2-\xi) r\, dr. \tag{2.5}$$

Задаем кинематически допустимую скорость прогиба $\dot{w}_c$ в форме

$$\dot{w}_c = \begin{cases} 1 - \dfrac{r}{R} & \text{при} \quad r \leqslant R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R. \end{cases} \tag{2.6}$$

В случае условия текучести Треска скоростям (2.6) соответствуют напряжения

1) $\sigma_\Theta = -\sigma_s, \quad -\sigma_s < \sigma_r < 0 \quad$ при $\; -h_1 \leqslant z < 0, \quad r < R$,
2) $\sigma_\Theta = \sigma_s, \quad 0 < \sigma_r < \sigma_s \quad$ при $\; 0 < z \leqslant h/2, \quad r < R$,
3) $\sigma_\Theta = 0, \quad \sigma_r = \sigma_s \quad$ при $\; -h_1 \leqslant z < 0, \quad r = R$,
4) $\sigma_\Theta = 0, \quad \sigma_r = -\sigma_s \quad$ при $\; 0 < z \leqslant h/2, \quad r = R$.

Учитывая, что

$$\begin{gathered} \dot{\varepsilon}_r^c = \dot{\varepsilon}_\Theta^c \equiv 0, \\ \dot{\varkappa}_r^c = -\frac{d^2 \dot{w}_c}{dr^2}, \qquad \dot{\varkappa}_\Theta^c = -\frac{1}{r}\frac{d\dot{w}_c}{dr}, \\ M_r = \int_{-h_1}^{h/2} \sigma_r z\, dz, \qquad M_\Theta = \int_{-h_1}^{h/2} \sigma_\Theta z\, dz, \end{gathered} \tag{2.7}$$

можем вычислить интеграл в числителе функции L в формулах (2.4):

$$\int_0^R (M_r \dot{\varkappa}_r^c + M_\Theta \dot{\varkappa}_\Theta^c) r\, dr = \frac{M_s}{R} \int_0^R \left((1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} \right) dr -$$

$$- \lim \int_{R-\varepsilon}^{R} M_r \frac{d^2 w_c}{dr^2} r\, dr =$$

$$= 2M_s - \frac{M_s}{R} \int_0^a \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) dr. \tag{2.8}$$

Здесь обозначено $M_s = 0{,}25 \;\sigma_s h^2$.

Учитывая эти результаты, можем уравнение (2.3) представить в форме

$$\varrho h\ddot{w}_0=\frac{2p(t)x^2(3-2x)+\dfrac{6M_s x^2}{a^2}[s(2-s)\varrho+2(s-1)A-B-4]}{1+6C-s\varrho^2(3-4\varrho+1{,}5\varrho^2)}. \tag{2.9}$$

Здесь для краткости записи введены обозначения

$$x=\frac{a}{R},\quad \varrho(t)=\frac{r^*}{R},\quad A(t)=\frac{1}{R}\int_0^{r^*} f(r)\,dr,$$
$$B(t)=\frac{1}{R}\int_0^{r^*} f^2(r)\,dr,\qquad C(t)=\frac{1}{R^2}\int_0^{r^*} f(r)\left(1-\frac{r}{R}\right)^2 r\,dr. \tag{2.10}$$

Формулы (2.9)—(2.10) применимы для $r^* < a$, в противном случае следует взять $r^* = a$.

Если постоянная x задана и функции $s(t)$, $f(r)$ известны, то на основании (1.5) и (2.9) можем вычислить функции $\varrho(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и интегрировать уравнение (2.9) численно. Для начальных данных возьмем $w_0(0) = \dot{w}_0(0) = 0$. Момент остановки движения t_f определим из условия $\dot{w}_0(t_f) = 0$.

Интегрирование уравнения (2.9) значительно упрощается, если головная часть снаряда отсутствует; тогда $f \equiv 0$, $\varrho = x$, $A = B = C \equiv 0$.

3. Нахождение радиуса деформированной области

Радиус деформированной области R или эквивалентную ему величину $x = a/R$ определим методом, указанным в работе [1]. Для упрощения вычисления при этом пренебрегаем внедрением снаряда. В таком случае уравнение (2.9) получает вид

$$\varrho h\ddot{w}_0=2x^2\left[p(t)(3-2x)-12\frac{M_s}{a^2}\right]. \tag{3.1}$$

Если $\ddot{w}_0 \equiv 0$, то получаем статическую предельную нагрузку

$$p_s=p(t_s)=\frac{12M_s}{(3-2x)a^2}. \tag{3.2}$$

Интегрируем уравнение (3.1) два раза по t; так как при $t < t_s$ пластического деформирования не происходит, то начальными условиями являются $w_0(t_s) = \dot{w}_0(t_s) = 0$. В результате интегрирования получим

$$\varrho h w_0(t) = 2x^2(3-2x)\varphi(t) - 12\frac{M_s x^2}{a^2}(t-t_s)^2, \tag{3.3}$$

где

$$\varphi(t) = \int_{t_s}^{t} dt \int_{t_s}^{t} p(t)\,dt.$$

Из всех решений, соответствующих разным значениям x, самым опасным будем считать то, для которого величина $w_0(t_f)$ является наибольшей. Это требование ведет к уравнениям (ср. (1.7) в [1]):

$$\varrho h \frac{\partial w_0(t_f)}{\partial x} = 12x(1-x)\varphi(t_f) - \frac{24M_s}{a^2}x(t_f-t_s)^2 = 0,$$

$$\varrho h \frac{\partial w_0(t_f)}{\partial t_f} = 2x^2(3-2x)\varphi'(t_f) - \frac{24M_s}{a^2}x^2(t_f-t_s) = 0. \tag{3.4}$$

Элиминируя из этой системы x, получим для определения t_f трансцендентное уравнение

$$\frac{4M_s}{a^2}(t_f-t_s)\left[\frac{3}{\varphi'(t_f)} - \frac{t_f-t_s}{\varphi(t_f)}\right] - 1 = 0. \tag{3.5}$$

Если t_f уже определена, то величину x найдем из формулы

$$x = \frac{3}{2} - \frac{6M_s}{a^2}\,\frac{t_f-t_s}{\varphi'(t_f)}. \tag{3.6}$$

Проведенные вычисления (ср. [1]) показали, что для практики важных случаев величина x изменяется в пределах 0,5—0,7; другими словами диаметр зоны пластического деформирования есть 1,5—2 калибра снаряда, что согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

Литература

1. Лепик Ю., Приближенный метод решения задач динамики жестко-пластических конструкций под действием нагрузок локального типа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 303—310.
2. Kaliszky S., Approximate solutions for impulsively loaded inelastic structures and continua. Int. J. Non-Linear Mech., 1970, 5, 143—158.

Поступило
25 I 1975

KRAATRI TEKKIMISE MÕJUST PLAATIDE DÜNAAMILISELE PAINDELE

Ü. Lepik

Resümee

Kui jäik-plastsesse plaati tungib mürsk, siis kraatri tekkimise tõttu plaadi paksus ja jäikus mürsu all olevas osas vähenevad ning jääkläbipaine suureneb. Selle nähtuse kirjeldamiseks on esitatud ligikaudne lahendusviis, mis baseerub autori poolt töös [1] esitatud meetodil. Jääkläbipainde määramine taandub diferentsiaalvõrrandi (2.9) integreerimisele. Valemid (3.5)—(3.6) võimaldavad määrata deformeerunud plaadi osa raadiust.

ON THE INFLUENCE OF CRATER-FORMATION UPON THE DYNAMIC BENDING OF PLATES

Ü. Lepik

Summary

If a plate is loaded by a dynamic blast-type load, this process usually is accompanied by crater-formation. On account of the material, which is thrown out, thickness and bending rigidity of the plate decrease and residual deflections increase. For describing this phenomenon an approximate method of the paper [1] is suggested. The residual deflections can be calculated by integrating the equation (2.9). The formulae (3.5—(3.6) allow us to find the radius of the deformed part of the plate.

О ДИНАМИКЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ, НАГРУЖЕННЫХ ВЫСОКИМ ДАВЛЕНИЕМ

Ю. Лепик, К. Соонетс и Э. Сакс

Кафедра теоретической механики

Изучается поведение осесимметричного тела под действием динамической нагрузки высокой интенсивности. Используется гидродинамическая модель материала. Задача решается методом конечных элементов [4]. Подробнее исследуются способы, избегающие сильное искажение координатной сетки, также разные варианты искусственной вязкости с целью улучшения устойчивости расчетной схемы в лагранжевых переменных. Приводятся результаты численных расчетов.

1. Исходные соотношения. Рассмотрим осесимметричное тело, например, оболочку, на боковую поверхность которой действует динамическая нагрузка интенсивности $P_1 = P_1(R, T)$ (рис. 1), где T означает время.

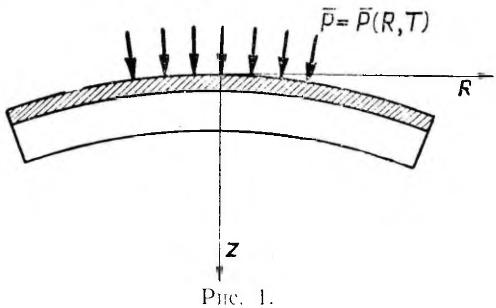


Рис. 1.

Дифференциальные уравнения движения точек оболочки в цилиндрических координатах (R, φ, Z) имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{\partial \tau_{RZ}}{\partial Z} + \frac{\sigma_R - \sigma_\varphi}{R} = \varrho \frac{\partial^2 R}{\partial T^2}, \\ &\frac{\partial \tau_{RZ}}{\partial R} + \frac{\partial \sigma_Z}{\partial Z} - \frac{\tau_{RZ}}{R} = \varrho \frac{\partial^2 Z}{\partial T^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varrho = \varrho(R, Z, T)$ — плотность материала. Граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_R - \tau_{RZ} \tan \alpha &= -P_1, \\ \tau_{RZ} - \sigma_Z \tan \alpha &= P_1 \tan \alpha, \end{aligned} \tag{2}$$

где α — угол между осью R и внешней нормалью тела. Пусть интенсивность давления P_1 значительно превышает предел текучести материала σ_s, т. е. $P_1 \gg \sigma_s$. В таком случае можно пренебречь сдвиговыми воздействиями, т. е. девиатор напряжений $s_{ij} = 0$. Остается только гидростатическое давление

$$\sigma_R = \sigma_\varphi = \sigma_Z \equiv \sigma_1. \tag{3}$$

Введем безразмерные величины следующим образом:

$$\sigma_1 = \sigma E, \quad P_1 = Ep, \quad R = Lr, \quad Z = Lz, \quad T = L\sqrt{\frac{\varrho^0}{E}}\, t, \tag{4}$$

где E — модуль упругости материала, L — характерный размер тела, ϱ^0 — плотность материала в ненапряженном состоянии. Дифференцирование по безразмерному времени t обозначим в дальнейшем точкой.

Уравнения (1) представляются при сделанных допущениях в безразмерных величинах в виде

$$\ddot{r} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial \sigma}{\partial r}, \quad \ddot{z} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial \sigma}{\partial z}. \tag{5}$$

Символ η означает относительное изменение плотности

$$\eta = \frac{\varrho}{\varrho^0} = \frac{V^0}{V}, \tag{6}$$

где $V(r, z, t)$ — объем элемента среды, имеющего в момент $t = 0$ объем V^0.

Поведение материала опишем уравнением состояния Гюгонио, которое строится на основе экспериментальных данных для одномерной задачи. Уравнение адиабаты Гюгонию можно аппроксимировать зависимостью

$$P(\eta) = a(\eta - 1) + b(\eta - 1)^2 + c(\eta - 1)^3, \tag{7}$$

где давление P и характерные постоянные для заданного материала a, b, c представлены в безразмерном виде. Использование зависимостей (3) и (7) означает принятие гидродинамической модели среды.

2. Метод искусственной вязкости. Определяя напряженно-деформационное состояние в оболочке методом конечных элементов, возникают трудности при удовлетворении условий скачка на ударных фронтах. Для преодоления этой трудности используем метод искусственной вязкости. С помощью искусственной вязкости скачки давления на ударных фронтах «размазываются» — скачки заменяются быстрыми непрерывными изменениями. Многими авторами предложены разные варианты искусственной вязкости. Перечислим из них некоторые варианты (в базразмерных величинах настоящей статьи):

а) квадратичная вязкость

$$q=\begin{cases} C_0 A\eta\left(\dfrac{\dot\eta}{\eta}\right)^2 & \text{при} \quad \dot\eta>0, \\ 0 & \text{при} \quad \dot\eta\leqslant 0; \end{cases} \tag{8а}$$

б) линейная вязкость

$$q=\begin{cases} C_L\sqrt{A}\,\eta\sqrt{\dfrac{dP}{d\eta}}\left|\dfrac{\dot\eta}{\eta}\right| & \text{при} \quad \dot\eta>0, \\ 0 & \text{при} \quad \dot\eta\leqslant 0; \end{cases} \tag{8б}$$

в) тензорная вязкость

$$q_{ij}=2C_A\sqrt{A}\,\eta\sqrt{\frac{dP}{d\eta}}\left(\dot e_{ij}-\frac{1}{3}\frac{\dot\eta}{\eta}\delta_{ij}\right). \tag{8в}$$

В этих формулах $C^2{}_0$, C_L, C_A — постоянные, A — площадь ячейки, $(dP/d\eta)^{1/2}$ — скорость распространения звука в изучаемой среде, $\dot e_{ij}$ — скорость тензора деформаций.

Метод искусственной вязкости, положительные и отрицательные стороны отдельных вариантов вязкости q обсуждаются, например, в статьях [1, 2, 4]. В [5] описывается опыт использования видоизмененных вариантов вязкости q, который представляет несомненный интерес. К настоящему времени не существует общих рекомендаций о выборе типа искусственной вязкости в зависимости от решаемой задачи.

Авторами настоящей статьи были на примерах испробованы разные варианты вязкости. В теоретических рассуждениях оставим тип вязкости q открытым. Расчет напряжений производится в дальнейшем по формуле

$$\sigma=-Q, \qquad Q=P+q \tag{9}$$

и уравнения (5) приобретают вид

$$-\ddot r=\frac{1}{\eta}\frac{\partial Q}{\partial r}, \qquad -\ddot z=\frac{1}{\eta}\frac{\partial Q}{\partial z}. \tag{10}$$

3. Метод конечных элементов. Покрываем осевое сечение недеформированной оболочки координатными линиями так, что одно семейство линий «параллельно» контуру сечения, нагруженному внешним давлением и второе семейство состоит из прямых отрезков. Сечение разбивается только на четырехугольные ячейки (одна ячейка видна на рис. 4). Образование однотипных ячеек удобно для построения единого алгоритма вычислений. Поворотом сечения вокруг оси симметрии $r=0$ на единицу угла образуются объемные элементы, массы которых в процессе деформирования считаем постоянными. Вместе со средой деформируются и плоские ячейки (например, на

рис. 4 ячейка 1234). Координаты r и z вершин четырехугольника (узлов) снабжаем порядковыми номерами узлов.

В дальнейшем верхний индекс n указывает, что значение величины найдено в момент времени t^n. Последующие расчетные моменты времени обязаны следующим образом:

$$t^{n+1}-t^n=\Delta t^n,$$
$$t^{n+0,5}-t^{n-0,5}=\Delta \tilde{t}^n.$$

При методе конечных элементов производные функции F по координатам в центрах масс четырехугольников и времени аппроксимируются [3] следующими формулами (схема на рис. 4):

$$\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{1}{2A}\sum_{\alpha=1}^{4}(F_{\alpha+1}+F_\alpha)(z_{\alpha+1}-z_\alpha),\\ \frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{1}{2A}\sum_{\alpha=1}^{4}(F_{\alpha+1}+F_\alpha)(r_{\alpha+1}-r_\alpha);\end{gathered}\tag{11}$$

$$\dot{F}^{n+0,5}=\frac{1}{\Delta t^n}(F^{n+1}-F^n)\quad \dot{F}^n=\frac{1}{\Delta \tilde{t}^n}(F^{n+0,5}-F^{n-0,5}).\tag{12}$$

Площадь A ячейки 1234 находится как сумма площадей треугольников I и II, т. е. $A=A_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{II}}$, а площади треугольников вычисляются по координатам вершин.

4. Построение расчетных формул. Отметим, что в узлах сетки определяются их координаты x, скорости $\dot{x}$ и ускорения $\ddot{x}$ (здесь $x=r, z$), а в центрах масс ячеек величины η, A, P, q, Q. При этом координаты центров масс ячеек (на рис. 2 точки 10—13) вычисляются как средние арифметические координат узлов.

Пусть координаты узлов в момент $t=t^n$ известны. Построим формулы для определения необходимых величин. Относительное изменение плотности η ячейки находим из условия постоянства массы ячейки. По теореме Паппа — Гульдина $\varrho^0 A^0 r^0{}_c=\varrho^n A^n r^n{}_c$, где r_C — расстояние центра масс C ячейки от оси симметрии (рис. 4). Получим усредненное значение «плотности» в ячейке

$$\eta^n=\frac{[A_{\mathrm{I}}(r_1+r_2+r_3)+A_{\mathrm{II}}(r_3+r_4+r_1)]^0}{[A_{\mathrm{I}}(r_1+r_2+r_3)+A_{\mathrm{II}}(r_3+r_4+r_1)]^n}.\tag{13}$$

Искусственную вязкость q вычислим по формулам (8) во внутренних ячейках в момент t^n по следующей формуле, вытекающей, например, в случае квадратичной вязкости из (8а):

$$q^n=C_0^2\frac{A^n}{\eta^n}\left(\frac{\eta^n-\eta^{n-1}}{\Delta t^{n-1}}\right)^2.\tag{14}$$

Гидростатическое давление P определим по адиабате Гюгонио, и окончательно

$$Q^n=P^n+q^n.\tag{15}$$

Ради краткости записи обозначим узел (j, k) цифрой 1, соседние ему узлы цифрами 2—9, и центры масс ячеек, примыкающих к узлу 1, числами 10—13 (рис. 2). Теперь находим правые части уравнений (10), используя для нахождения производных по координатам формулы (11). Во внутренних узлах получим в момент $t = t^n$ (верхний индекс n опущен) для первого уравнения

$$\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial Q}{\partial r}\right)_1 =$$

$$= \frac{1}{2(A\eta)_1}\left[(Q_{10} - Q_{12})(z_{11} - z_{13}) + (Q_{11} - Q_{13})(z_{12} - Z_{10})\right]. \qquad (16)$$

Произведение $A\eta$ находим по формуле

$$(A\eta)_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=10}^{13}(A\eta)_i, \qquad (17)$$

где площади A_{10}—A_{13}, в свою очередь, вычислим путем суммирования площадей треугольников (например, $A_{10} = A_{123} + A_{341}$). Аналогичный результат получим для второго уравнения заменой переменной z на $-r$.

Дальше рассмотрим граничные точки (в том числе и ось симметрии). Пусть координатная линия k на рис. 2 является свободной границей оболочки с порядковыми номерами $k = 0$, либо $k = N$. Формально можно воспользоваться формулами (16) и (17), допуская, что координатная линия $k = N + 1$ стремится к линии $k = N$. Это приводит к дополнительным условиям

$$x_2 = x_1, \qquad x_8 = x_9, \qquad x_4 = x_3, \qquad (\eta A)_{10} = (\eta A)_{13} = 0.$$

Также поступаем и в том случае, если свободной границей является линия $k = 0$. Аналогичное рассуждение проводим и для свободной границы в направлении второго семейства координатных линий. При стремлении координатной линии $k = N + 1$ к линии $k = N$ центры масс 10 и 13 попадают на линию $k = N$. Определение вязкости q в этих точках затруднительно. Поэтому примем за значение вязкости на границе оболочки значение в центре ячейки, примыкающей к границе, т. е. $q_{10} = q_{11}$, $q_{13} = q_{12}$. Гидростатическое давление P в граничных точках равняется интенсивности внешнего давления p.

Ось симметрии оболочки считается также лагранжевой координатной линией. Воображаемые ячейки за осью получаются путем зеркального отображения ячеек, примыкающих к оси симметрии. Опять применимы формулы (16) и (17), причем для осевых точек $\ddot{r} = 0$.

С учетом формулы (16) определяются компоненты ускорения (10). На основании формул (12) получим явную схему для решения основных уравнений (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_{jk}^{n+0,5} &= \dot{x}_{jk}^{n-0,5} + \ddot{x}_{jk}^{n}\Delta t_1^{n}; \\ x_{jk}^{n+1} &= x_{jk}^{n} + \dot{x}_{jk}^{n+0,5}\cdot\Delta t^{n}. \end{aligned} \qquad (18)$$

5. Формирование новой координатной сетки. Опыт многих авторов, также решение ряда контрольных примеров авторами настоящей статьи показывают, что при очень высоких интенсивностях динамической нагрузки происходит с течением времени сильное перекашивание лагранжевой координатной сетки. За счет этого схема вычислений становится неустойчивой даже при очень малом шаге времени Δt^n. Была сделана попытка избежать это явление путем переформирования координатной сетки в определенные моменты времени.

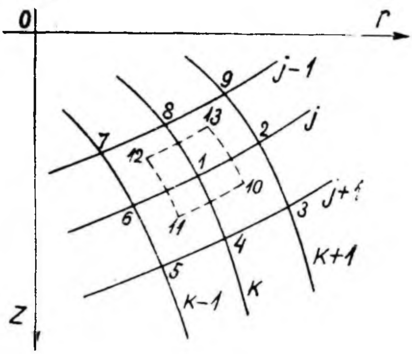


Рис. 2.

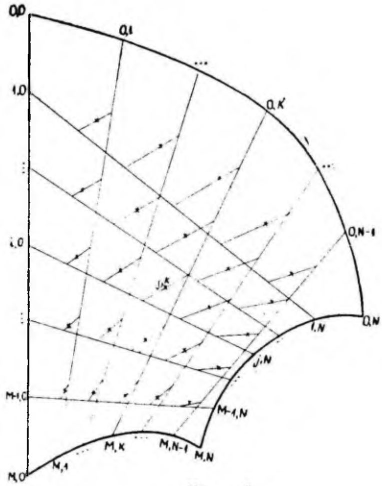


Рис. 3.

Пусть ось вращения тела и боковая граница разделены на M и N частей соответственно и узлам координатной сетки приписаны индексы j, k, где $0 \leqslant j \leqslant M$, $0 \leqslant k \leqslant N$, так что на частях границы тела один из индексов имеет крайнее фиксированное значение (рис. 3). Опишем два способа переформирования координатной сетки. При первом способе оставим узлы на граничных линиях (кроме оси симметрии) без изменений и построим новую координатную сетку следующим образом. Ось симметрии разделим на равные части. Затем построим два семейства прямых, соединяющих узлы противоположных границ сечения тела. Первое семейство прямых (k) проходит узлы с координатами $x_{0,k}$ и $x_{M,j}$ с $1 \leqslant k \leqslant N-1$ (где символ x следует заменить координатами z и r), второе семейство (j) соединяет узлы $x_{j,0}$ и $x_{j,N}$ с $1 \leqslant j \leqslant M-1$. Теперь разделим прямые обоих семейств на равные части. Координаты точек деления находятся по следующим формулам:

$$x^j{}_{j,k} = \mu_1 x_{0,k} + \mu x_{M,k}; \qquad x^i{}_{i,k} = \nu_1 x_{j,0} + \nu x_{j,N}; \tag{19}$$

и коэффициенты μ, ν вычисляются по формулам

$$\mu = \frac{j}{M}, \quad \mu_1 = 1 - \mu; \quad \nu = \frac{k}{N}, \quad \nu_1 = 1 - \nu.$$

В случае кривой боковой границы $i = 0$ (или $j = M$) точки деления прямой из семейства, соединяющей узлы $x_{1,0}$ и $x_{1,N}$ (соответственно $x_{M-1,0}$ и $x_{M-1,N}$) могут либо находиться слишком далеко от ближайшей границы внутри тела, либо даже выйти за пределы тела. Зато точки деления $x_{1,k}$ (или $x_{M-1,k}$) прямых через узлы $x_{0,k}$ и $x_{M,k}$ (семейство k) хорошо «копируют» линию $j = 0$ (или $j = M$). Аналогичное положение имеет место около границы $k = N$, если роль семейств прямых взаимно заменить. Вблизи прямых или мало искривленных границ таких затруднений не возникает. С целью определения регулярного распределения новых внутренних узлов введем весовые функции g^j, g^k следующим образом:

$$g^k = 0{,}5 + 2(\nu\nu_1 - \mu\mu_1), \qquad g^j = 1 - g^k, \tag{20}$$

и находим координаты внутренних узлов переформированной сетки по формулам

$$x_{j,k} = g^k x^k{}_{j,k} + g^j x^j{}_{j,k}. \tag{21}$$

Узлы новой сетки отмечены на рис. 3 крестиками. Около границ $j = 0$ коэффициент g^j близок к нулю и g^k близок к единице. При нахождении координат $x^k{}_{j,k}$ и $x^j{}_{j,k}$ получаемые узлы $x_{j,k}$ ближе к точкам деления на прямых семейства k, хорошо «копирующим» линию $j = 0$. Аналогично можно рассуждать и для узлов, близких другим границам. В срединной части сечения $\mu \approx \nu \approx 0{,}5$, а также $g^j \approx g^k \approx 0{,}5$ и новые узлы приблизительно равноудалены от соответствующих точек деления обоих семейств прямых.

При втором способе переформирования сетки сформируются новые узлы и на граничных линиях. Формирование внутренних узлов происходит по первому способу. Переформирование сетки можно проводить или на каждом шаге времени или в определенные моменты времени по некоторому критерию, оценивающим степень испорченности регулярности лагранжевой координатной сетки.

6. Интерполяция величин в новой сетке. Переходя к новой координатной сетке необходимо определить значения ряда величин в узлах новой сетки по значениям в узлах старой сетки. Также необходимо знать относительное изменение плотности η в ячейках новой сетки и характеристики физических элементов среды.

Значение функции $\tilde{F}$ в новом узле $\tilde{1}$ с координатами $(\tilde{r}, \tilde{z})$ (рис. 5) находим путем линейной интерполяции по значениям функции F в трех узлах 1, 2, 3 старой сетки. За узлы 2 и 3 берутся вершины треугольника, содержащего новый узел $\tilde{1}$. Эти узлы выбираются по знаку величины α_i, вычисленной для соседних к узлу $\tilde{1}$ узлов, по формуле

$$\alpha_i = (r_i - r_1)(r_i - \tilde{r}_1) + (z_i - z_1)(z_i - \tilde{z}_1) \qquad (i = 2, 3, 4, 5). \tag{22}$$

Узел $\tilde{1}$ принадлежит тому треугольнику 123, для которого $\alpha_2 \leqslant \leqslant 0$, $\alpha_3 \leqslant 0$. При соблюдении точного равенства узлы 1 и $\tilde{1}$ совпадают и нет надобности в интерполяции. После определения необходимых узлов вычислим значение функции в новом узле

$$\bar{F}_1 = \frac{D_F}{D_\Delta}, \tag{23}$$

где

$$D_F = \begin{vmatrix} r_1 - \tilde{r} & r_2 - \tilde{r} & r_3 - \tilde{r}_3 \\ z_1 - \tilde{z}_1 & z_2 - \tilde{z}_2 & z_3 - \tilde{z}_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}; \qquad D_\Delta = \begin{vmatrix} r_2 - r_1 & r_3 - r_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Для определения величины $\eta = \varrho/\varrho^0$ в ячейках новой сетки предложим два способа. Пусть в ячейках старой сетки (в центрах масс ячеек) известны значения η_i и площади ячеек A_i, где $i = 1, 2, 3, 4$, (рис. 6).

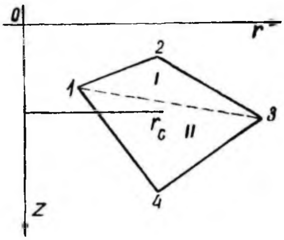


Рис. 4.

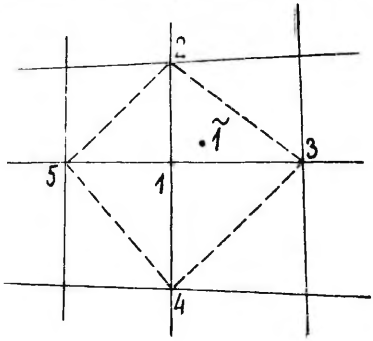


Рис. 5.

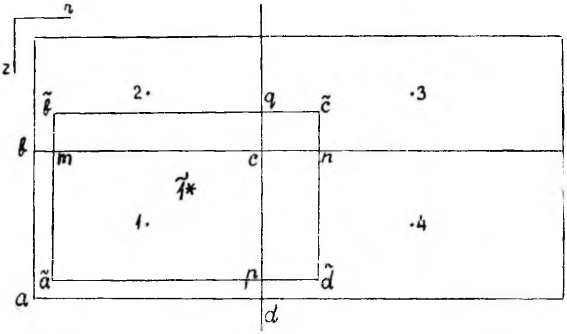


Рис. 6.

I способ. Пусть старой ячейке $abcd$ соответствует новая ячейка $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}$ с центром $\tilde{1}$, которая покрывает частично старые ячейки. Найдем отношения частей площади ячейки $\tilde{1}$ к площадям старых ячеек w_i ($i = 1, 2, 3, 4$), например,

$$w_1 = A_{\tilde{a}mcp} / A_1,$$

и суммируем эти отношения

$$w = \sum_{i=1}^{4} w_i.$$

Значение величины η_1 определим как взвешенную среднюю по значениям η_i по формуле

$$\tilde{\eta}_1 = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{4} w_i \eta_i.$$

Описанный способ громоздкий для реализации на ЭВМ.

II способ. На каждом шаге переформирования сетки определим центры масс старых и новых ячеек. Величину $\tilde{\eta}_1$ находим путем линейной интерполяции по трем ближайшим центрам масс старых ячеек. Выбор ближайших центров и само вычисление производится по методу, описанному в начале настоящего раздела. Численные расчеты по обоим способам показали, что различие в результатах колебалось от 0,8 до 1,5%.

Определенные в начальный момент координаты узлов недеформированной сетки совпадают до первого переформирования сетки с физическими элементами среды, и характеристики, вычисленные в узлах сетки, являются характеристиками физических элементов. После переформирования сетки новые узлы отличаются от фиксированных физических элементов. Покажем, как найти координаты физических элементов по координатам новой сетки.

Пусть к моменту переформирования сетки физический элемент имеет координаты (r, z) и окажется после переформирования в ячейке с вершинами $\tilde{r}_i, \tilde{z}_i)$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Из равенств

$$r = a_1 \sum_{i=1}^{4} \tilde{r}_i; \qquad z = b_1 \sum_{i=1}^{4} \tilde{z}_i,$$

определим множители a_1 и b_1. До следующего переформирования сетки в момент t^n вычислим координаты (r, z) по тем же формулам:

$$r^n = a_1 \sum_{i=1}^{4} \tilde{r}_i^n; \qquad z^n = b_1 \sum_{i=1}^{4} \tilde{z}_i^n. \tag{24}$$

При l-ом переформировании нужно найти новые значения для констант a_l, b_l. Для этого вычислим координаты физического элемента по узлам старой и новой сеток и из равенств

$$a_{l-1} \sum_{i=1}^{4} r_i^n = a_l \sum_{i=1}^{4} \tilde{r}_i^n; \qquad b_{l-1} \sum_{i=1}^{4} z_i^n = b_l \sum_{i=1}^{4} \tilde{z}_i^n \tag{25}$$

находим множители a_l, b_l.

Кинематические и динамические характеристики для физических элементов вычислим путем линейной интерполяции.

7. А л г о р и т м р е ш е н и я з а д а ч и. Ниже приводится последовательность действий при изучении поведения тела в момент t^{n+1}, если координаты узлов координатной сетки известны в момент t^n. В памяти ЭВМ сохраняются координаты узлов недеформированной сетки; также указаны условия, при каких проводится переформирование координатной сетки.

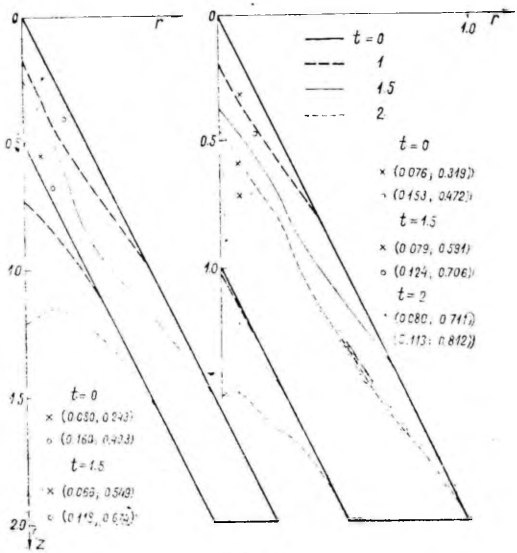


Рис. 7.

1. Вычислим площади треугольников I и II, составляющих ячейки и самих ячеек (рис. 4).

2. По формуле (13) вычислим величину η^n по всем ячейкам.

3. Из формул (7), (14) и (15) определим поочередно гидростатическое давление P, искусственную вязкость q и наконец величину Q по всем ячейкам.

4. С учетом формул (17) и (16) для внутренних узлов и дополнительных условий для граничных узлов найдем по уравнениям (10) ускорения узлов сетки в момент t^n.

5. Выберем шаг во времени Δt^n, который должен удовлетворять определенным ограничениям для обеспечения устойчивости расчетной схемы. В настоящей статье было использовано условие из [1], которое принимает в наших обозначениях вид:

$$\Delta t^n \leqslant \frac{\Delta l_{min}}{\sqrt{\mathrm{d}P/\mathrm{d}\eta}},$$

где $\Delta l_{\min}$ — наименьшая сторона ячейки по всей области. Затем получим и $\Delta \tilde{t}^n = (\Delta t^n + \Delta t^{n-1})/2$.

6. По формулам (18) вычислим координаты узлов сетки в новый момент t^{n+1}.

7. Повторением этапов 1—4 настоящего алгоритма получим все интересующие нас характеристики среды.

При переходе к последующему моменту времени t^{n+1} производится в случае необходимости переформирование координатной сетки по правилам раздела 5 и интерполяция величин, которая описана в разделе 6.

8. Пример. Коническое тело с выемкой нагружается давлением интенсивности P_1, распространяющим в вертикальном направлении начиная от вершины с заданной скоростью V_1. Нижний край тела жестко соединен с неподвижной опорой. Форма недеформированного тела видна на рис. 7. Отношение высоты конуса H к радиусу основания L равняется двум. Вычисления проводились при выемке с высотой 1 и радиусом 0,5

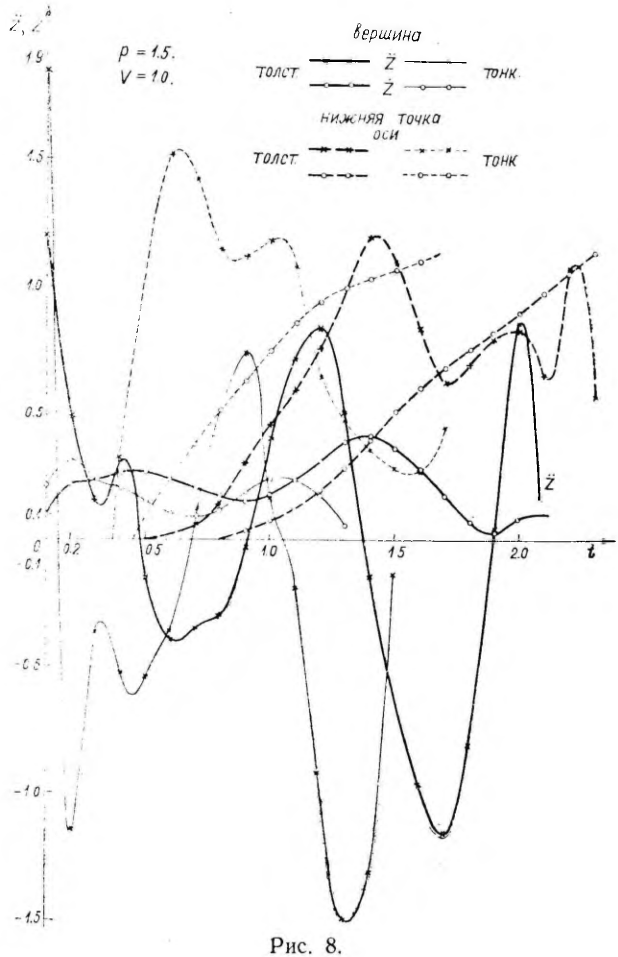


Рис. 8.

(толстый конус) и при выемке с высотой 1,5 и радиусом 0,75 (тонкий конус). Безразмерная скорость передвижения переднего фронта давления $V = (\varrho^0/E)^{1/2} V_1 = 1$. Была использована квадратичная вязкость (8а), в выражении которой отношение $\eta^{\cdot}/\eta$ заменено выражением

$$\frac{\dot{r}}{r}+\frac{\partial \dot{r}}{\partial r}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial z},$$

которое получится из условия неразрывности среды [5].

На рис. 7 показаны конфигурации тонкого и толстого конусов в разные моменты времени при давлении $p = 1,5$. Там же показаны положения двух внутренних точек тела в начальный и конечный моменты времени. Точка тонкого конуса A_1 (0,080; 0,243) (на рис. 7 крестик) переместилась к моменту $t = 1,5$ в положение с координатами (0,066; 0,549) и точка A_2 (0,160; 0,403) в положение (0,118; 0,674). В толстом конусе перешла точка A_3 (0,076; 0,319) (крестик) к моменту $t = 2$ в положение (0,080; 0,711) и A_4 (0,153; 0,472) — в положение (0,113; 0,812).

На рис. 8 приведены ускорение и скорость вершины и нижней осевой точки, на рис. 9 компоненты ускорения и давление для внутренних точек конусов.

9. Заключение. Было испробовано влияние разных вариантов искусственной вязкости на устойчивость вычислительной схемы (линейная, тензорная вязкости, разные комбинации вязкостей по аналогии с [5]). Для тел, рассмотренных нами, наилучшим оказался вариант, использованный в описанном примере.

Была сделана и попытка оценить влияние сдвиговых напряжений на результаты расчета. За основу была принята схема,

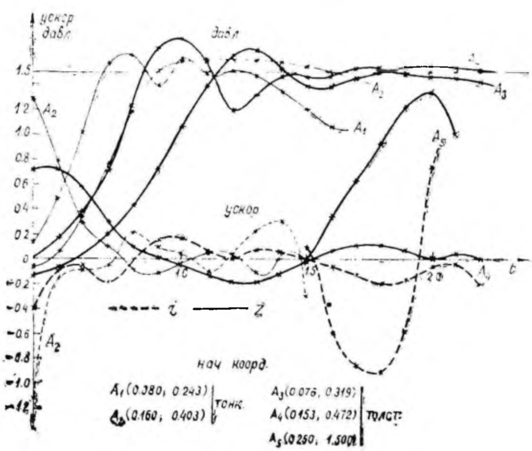


Рис. 9.

предложенная М. Л. Уилкинсом [4]. Расчеты показали, что если при давлении $p = 0.1$ результаты вычислений по гидродинамической модели и по схеме Уилкинса различались около 10—20%, то уже при давлении 0,5 эта разница уменьшилась до 1—7%. Нам кажется, что в случае высоких давлений принятие гидродинамической модели среды вполне оправдано.

Литература

1. Майнчен Дж., Сак С., Метод расчета «Тензор». В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М., 1967, 185—211.
2. Нейман Дж., Рихтмайер Р., Метод численного расчета гидродинамических скачков. Сб. «Механика», 1951, № 1.
3. Нох В. Ф., СЭЛ — совместный Эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М. 1967, 128—184.
4. Уилкинс М. Л., Расчет упруго-пластических течений. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М. 1967, 212—263.
5. White, J. W., A new form of artifical viscosity. J. Comp. Phys., 1973, **11**, 573—590.

Поступило
27 I 1975

KÕRGE DÜNAAMILISE RÕHUGA KOORMATUD TELGSÜMMEETRILISTE KEHADE DÜNAAMIKAST

Ü. Lepik, K. Soonets ja E. Saks

Resümee

Töös vaadeldakse telgsümmeetrilise keha käitumist suure intensiivsusega dünaamilise koormuse all. Kasutatakse materjali hüdrodünaamilist mudelit. Ülesanne lahendatakse lõplike elementide meetodil Lagrange'i koordinaatides. Esitatakse meetod koordinaatjoonte võrgu ümberformeerimiseks ja suuruste interpoleerimiseks uue võrgu korral vana võrgu jaoks leitud suuruste väärtuste kaudu. Esitatud meetod võimaldab parandada ilmutatud arvutusskeemi stabiilsust. Analüüsitakse kunstliku viskoossuse erinevaid variante. Esitatud lahendusalgoritmi illustreeritakse näidetega.

ON DYNAMICS OF AXISYMMETRIC BODIES UNDER A HIGH PRESSURE

Ü. Lepik, K. Soonets and E. Saks

Summary

The behaviour of axisymmetric bodies under a dynamic pressure of high intensity, with the employment of an hydrodynamic model of the body, is discussed. The problem is solved, using the finite element method in the variables of Lagrange. A suggested method of the reconstruction of the network enables one to improve the stability of the numerical scheme. Different variants for the artifical viscosity are analysed. Numerical examples, illustrating the application of the proposed methods, are given.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

Э. Вирма

Эстонская сельскохозяйственная академия

В настоящей статье рассматривается динамический изгиб круглых жестко-пластических пластин под действием локальной осесимметрической нагрузки в виде прямоугольного импульса. Используется приближенный метод, который основан на вариационном принципе, предложенным в работе В. П. Тамужа [1].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим круглую пластину радиуса R. Пусть в центре пластины по площади круга радиуса a действует равномерно распределенная динамическая поперечная нагрузка интенсивностью $p(t)$. Материал пластины считаем жестко-пластическим. Определим остаточные прогибы для свободно опертой и жестко защемленной пластин.

Будем решать поставленную задачу при помощи принципа, предложенного в работе [1]. Согласно этому принципу, действительные ускорения в каждый момент времени минимизируют выражение, которое для рассматриваемой задачи может быть переписан в виде

$$J = m\pi \int_0^R v^{\cdot 2} r\,dr - 2p(t)\pi \int_0^a v^{\cdot} r\,dr + D(v^{\cdot}) + D_l(v^{\cdot}). \tag{1.1}$$

Здесь m — масса единицы площади срединной поверхности пластины, $v^{\cdot}$ — кинематически возможное ускорение прогиба, $D(v^{\cdot})$ — ускорение рассеивания внутренней энергии, $D_l(v^{\cdot})$ — ускорение рассеивания внутренней энергии при переходе через шарнирную линию.

Ограничимся случаем нагрузки в виде прямоугольного импульса, т. е.

$$p(t) = \begin{cases} p & \text{при } 0 < t < t_1, \\ 0 & \text{при } \quad t > t_1. \end{cases}$$

§ 2. Свободно опертая пластина

Будем предполагать, что распределение скоростей в каждый момент времени имеет форму усеченного конуса (ϱ_0 — радиус центральной части)

$$v(r,t)=\begin{cases} V_0(t) & \text{при} \quad 0\leqslant r\leqslant \varrho_0, \\ V_0(t)\,\dfrac{R-r}{R-\varrho_0} & \text{при} \quad \varrho_0\leqslant r\leqslant R. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $V_0(t)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая начальному условию

$$V_0(0)=0.$$

1. Движение пластины при $0<t<t_1$. В первой фазе $0<t<t_1$ нагрузка постоянна во времени и ϱ_0 не зависит от t. Подставляя (2.1) в формулу (1.1), получим

$$J=\frac{m\pi}{12}\dot V_0^2(R^2+2R\varrho_0+3\varrho_0^2)+\frac{2\pi M_0\dot V_0 R}{R-\varrho_0}-$$
$$-\frac{\pi p\dot V_0}{3(R-\varrho_0)}(3Ra^2-2a^3-\varrho_0^3). \tag{2.2}$$

Приравнивая к нулю производные от J по $\dot V_0$ и ϱ_0, получим систему

$$\begin{gathered} m\dot V_0(R^2+2R\varrho_0+3\varrho_0^2)+\frac{2M_0R}{R-\varrho_0}- \\ -\frac{p}{3(R-\varrho_0)}(3Ra^2-2a^3-\varrho_0^3)=0, \\ m\dot V_0(R^2+2R\varrho_0-3\varrho_0^2)+\frac{2M_0R}{R-\varrho_0}- \\ -\frac{p}{3(R-\varrho_0)}(3Ra^2-2a^3-3R\varrho_0^2+2\varrho_0^3)=0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Отсюда

$$\varrho_0^2(m\dot V_0-p)=0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим случай $\varrho_0\neq 0$. В силу (2.4) имеем

$$m\dot V_0=p. \tag{2.5}$$

Введем следующие обозначения:

$$p_s=\frac{6M_0R}{k}, \qquad k=(3R-2a)a^2,$$

где p_s — предельная нагрузка статической задачи. Подстановка (2,5) в (2,3) дает

$$\frac{p}{2p_s}=\frac{k}{(R-\varrho_0)^2(R+\varrho_0)-2(R^3-k)}. \tag{2.6}$$

Для величины средних давлений ($\varrho_0 = 0$) получим ограничение

$$\frac{p}{2p_s} = \frac{k}{2k - R^3}. \tag{2.7}$$

Выражение на правой стороне (2.7) должно быть положительным, следовательно, все дальнейшие результаты справедливы только для случая $a > 0{,}5R$.

а) Средние давления. Здесь $\varrho_0 = 0$ и в силу (2,3) после интегрирования получим

$$V_0 = \frac{2k}{mR^3}(p - p_s)t.$$

Распределение прогиба в конце первой фазы

$$w(r, t_1) = \frac{k(p - p_s)t_1^2}{mR^3} \frac{R - r}{R}.$$

б) Высокие давления. Здесь $\varrho_0 \neq 0$, $mV^{\cdot}_0 = p$. После интегрирования получим

$$w(r, t) = \begin{cases} pt_1^2/m & \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant \varrho_0, \\ pt_1^2/m \dfrac{R - r}{R - \varrho_0} & \text{при} \quad \varrho_0 \leqslant r \leqslant R. \end{cases}$$

2. Движение пластины при $t > t_1$. а) Средние давления. При $t = t_1$ нагрузка снимается и происходит затухание движения при $\varrho = 0$ вплоть до остановки. Согласно (2,3) имеем

$$V^{\cdot}_1 = -\frac{12M_0}{mR^2}. \tag{2.8}$$

Интегрируя (2,8) и используя условие непрерывности при $t = t_1$, получим

$$v(r, t) = \frac{2k}{mR^3}(pt_1 - p_s t)\frac{R - r}{r}.$$

Время деформирования определяется из условия $v(r, t_k) = 0$. Следовательно,

$$t_k = pt_1/p_s.$$

Распределение остаточного прогиба после остановки пластины имеет вид

$$w(r, t_k) = \frac{kpt_1^2}{mR^3}\left(\frac{p}{p_s} - 1\right)\frac{R - r}{R}.$$

б) Высокие давления. Движение при $t > t_1$ разбивается на две фазы. В фазе $t_1 < t < t_2$ происходит затухание движения с уменьшением ϱ от величины $\varrho(t_1) = \varrho_0$ до $\varrho(t_2) = 0$. В последней фазе $t_2 < t < t_k$ движение совершается при $\varrho = 0$ вплоть до остановки.

1. Фаза $t_1 < t < t_2$. Зададимся скоростями в виде (2.1) в предположении, что радиус центральной части ϱ зависит от времени. Дифференцируя выражения для скоростей, получим ускорения в виде

$$v^{\cdot} = \begin{cases} V^{\cdot}_1(t) & \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant \varrho, \\ \dfrac{V^{\cdot}_1(R-\varrho)+V_1\varrho^{\cdot}}{(R-\varrho)^2}(R-r) & \text{при} \quad \varrho \leqslant r \leqslant R. \end{cases}$$

Вычисляя выражение (1.1) и приравнивая к нулю производные от J по $V^{\cdot}_1$ и $\varrho^{\cdot}$, получим

$$\begin{gathered} m[V^{\cdot}_1(3\varrho^2+2\varrho R+R^2)+V_1\varrho^{\cdot}(3\varrho+R)]+\frac{12M_0R}{R-\varrho}=0, \\ m[V^{\cdot}_1(R^2+2\varrho R-3\varrho^2)+V_1\varrho^{\cdot}(3\varrho+R)]+\frac{12M_0R}{R-\varrho}=0, \end{gathered} \tag{2.9}$$

Из условия непрерывности $v(r, t)$ при $t = t_1$ следует, что

$$mV_1 = pt_1.$$

Согласно (2,9) получим для определения ϱ дифференциальное уравнение

$$\varrho^{\cdot}(R^2+2\varrho R-3\varrho^2) = -2p_sk/pt_1. \tag{2.10}$$

После интегрирования (2,10) при начальном условии (2,6) найдем

$$\frac{\varrho^3}{R^3}-\frac{\varrho^2}{R^2}-\frac{\varrho}{R}-1=\frac{2k}{R^3}\left(\frac{p_st}{pt_1}-1\right). \tag{2.11}$$

Конец второй фазы определяется условием $\varrho(t) = 0$ при $t = t_2$, тогда

$$t_2 = \frac{pt_1}{p_s}-\frac{pt_1R^3}{2p_sk}.$$

В зоне $\varrho_0 \leqslant r \leqslant R$ имеем

$$v(r, t) = \frac{pt_1}{m}\,\frac{R-r}{R-\varrho}. \tag{2.12}$$

Интегрируя (2.12) с учетом (2,11) и используя начальное условие (2,6), получим $w(r, t)$.

Скорости прогибов в зоне $r < \varrho_0$ определяются выражениями

$$mv(r, t) = \begin{cases} pt_1 & \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant \varrho, \\ pt_1\dfrac{R-r}{R-\varrho} & \text{при} \quad \varrho \leqslant r \leqslant R. \end{cases} \tag{2.13}$$

Интегрируя (2,13) с учетом (2,11) и используя условие непрерывности w при $t = t_1$, находим $w(r, t)$. Выражение прогиба в конце фазы в центре пластины имеет вид

$$w(0, t_2) = \frac{p^2t_1^2R^3}{2mp_sk}\left(\frac{2k}{R^3}-1\right)-\frac{pt_1^2}{2m}.$$

2. Фаза $t_2 \leqslant t \leqslant t_k$. В последней фазе $t_2 \leqslant t \leqslant t_k$ рассуждения остаются теми же, что и для второй фазы средних давлений. Прогибы в конце третьей фазы определяются соотношениями

$$w(r, t_k) = \frac{p^2 t_1^2 R^3}{4mp_s k}\left(\frac{4k}{R^3} - \frac{r^3}{R^3} - \frac{r^2}{R^2} - \frac{r}{R} - 1\right) - \frac{pt_1^2}{2m}$$

при $0 \leqslant r \leqslant \varrho_0$,

$$w(r, t_k) = \frac{p^2 t_1^2 (R-r)}{2mp_s k}\left(\varrho_0^2 + \varrho_0 R + R^2 + \frac{k - R^3}{R - \varrho_0}\right)$$

при $\varrho_0 < r < R$.

Результаты совпадают с точным решением найденным в работе [2], но рассматриваемый метод проще метода, предложенного в [2].

§ 3. Жестко защемленная пластина

1) Случай $a > 0{,}5R$. Зададимся скоростями в виде (2.1) в предположении, что $\varrho_0 < a$. Анализ решения в основном аналогичен случаю свободно опертой пластины. При этом в выражении (2,2) прибавляется добавочный член, характеризующий диссипацию вдоль защемленной границы. Если принять

$$p_0 = \frac{12 M_0 R}{k}, \qquad k = (3R - 2a)\, a^2,$$

то все результаты для свободно опертой и жестко защемленной пластины выражаются одними и теми же формулами.

Приведем окончательные результаты для случаев $a = 0{,}656R$ и $a = R$.

а) Случай $a = R$. Максимальный остаточный прогиб в конце движения для средних давлений выражается формулой

$$w(0, t_k) = \frac{pt_1^2}{m}\left(\frac{p}{p_0} - 1\right).$$

В случае высоких давлений получим соответственно

$$w(0, t_k) = \frac{pt_1^2}{4m}\left(\frac{3p}{p_0} - 2\right).$$

б) Случай $a = 0{,}656R$. При средних давлениях

$$w(0, t_k) = \frac{0{,}726 pt_1^2}{m}\left(\frac{p}{p_0} - 1\right).$$

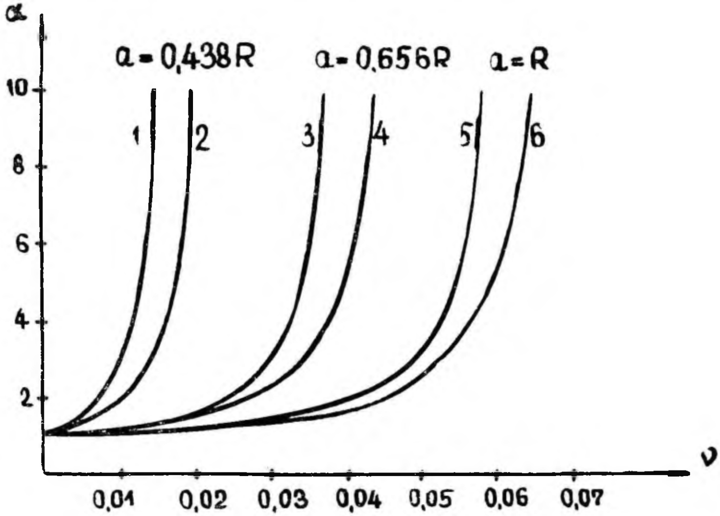
При высоких давлениях

$$w(0, t_k) = \frac{pt_1^2}{m}\left(\frac{0{,}656p}{p_0} - \frac{1}{2}\right).$$

Для сравнения с точным решением Флоренса введены безразмерные величины

$$\alpha = \frac{p}{p_0}, \qquad \nu = \frac{mM_0 w}{p^2 t_1^2 R^2}.$$

Результаты для остаточного прогиба в центре пластины представлены на фиг. 1 (кривые 3 и 5). Кривые 4 и 6 соответствуют точному решению Флоренса [3, 4].



Фиг. 1.

2) Случай $a < 0{,}5R$. Зададимся скоростями в виде

$$v(r,t) = \begin{cases} V_0(t) & \text{при} \quad 0 < r < \varrho_0, \\ V_0(t)\,\dfrac{\varrho_1 - r}{\varrho_1 - \varrho_0} & \text{при} \quad \varrho_0 < r < \varrho_1, \\ 0 & \text{при} \quad \varrho_1 < r < R. \end{cases}$$

1. Движение пластины при $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Анализ движения пластины при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ в основном аналогичен предыдущему случаю. Для определения первоначальной величины радиуса ϱ_0 получим формулу

$$\frac{p}{2p_1} = \frac{k}{(\lambda R - \varrho_0)^2(\lambda R + \varrho_0) - 2(\lambda^3 R^3 - k)},$$

где

$$\varrho_1 = \lambda R, \qquad p_1 = \frac{12 M_0 \lambda R}{k}, \qquad k = (3R\lambda - 2a)\,a^2.$$

Для величины средних давлений ($\varrho_0 = 0$) получим ограничение

$$\frac{p}{2p_1} \leqslant \frac{k}{2k - \lambda^3 R^3}.$$

Выражение на правой стороне должно быть положительным, следовательно, для определения $\lambda = \lambda(a)$ получим неравенство

$$2(3R\lambda - 2a)a^2 - \lambda^3 R^3 > 0.$$

Распределение прогиба при средних давлениях в момент времени $t = t_1$ имеет вид

$$w(r, t_1) = \frac{k(p - p_1)t_1^2}{m\lambda^3 R^3} \frac{\lambda R - r}{\lambda R}.$$

При высоких давлениях получим

$$w(r, t_1) = \begin{cases} \dfrac{pt_1^2}{2m} & \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant \varrho_0, \\ \dfrac{pt_1^2}{2m} \dfrac{\lambda R - r}{\lambda R - \varrho_0} & \text{при} \quad \varrho_0 \leqslant r \leqslant \lambda R. \end{cases}$$

2. Движение пластины при $t > t_1$. При $t > t_1$ движение при средних давлениях разбивается на две фазы. В фазе $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ происходит затухание движения с увеличением ϱ_1 от величины $\varrho_1(t_1) = \lambda R$ до $\varrho_1(t_2) = R$. В последней фазе $t_2 \leqslant t \leqslant t_k$ движение совершается при $\varrho_1 = R$ вплоть до остановки.

При высоких давлениях после снятия нагрузки движение разбивается на три фазы. В фазе $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ происходит уменьшение ϱ от величины $\varrho(t_1) = \varrho_0$ до $\varrho(t_2) = 0$. В фазе $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$ происходит затухание движения при $\varrho = 0$ с увеличением ϱ_1 от $\varrho_1(t_2) = \lambda R$ до $\varrho_1(t_3) = R$. В последней фазе $t_3 \leqslant t \leqslant t_k$ движение совершается при $\varrho = 0$, $\varrho_1 = R$ вплоть до остановки.

Рассмотрим анализ движения при $\varrho = 0$, $\lambda R \leqslant \varrho_1 \leqslant R$. Зададимся скоростями в виде

$$v(r, t) = \begin{cases} V(t) \dfrac{\varrho_1 - r}{\varrho_1} & \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant \varrho_1, \\ 0 & \text{при} \quad r > \varrho_1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Для ускорений получим выражения

$$v^{\cdot}(r, t) = \frac{V^{\cdot}\varrho_1(\varrho_1 - r) + V\varrho^{\cdot}_1 r}{\varrho_1^2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant \varrho_1.$$

Вычисляя выражение (1.1) и приравнивая к нулю производные от J по $V^{\cdot}$ и $\varrho^{\cdot}_1$, получим

$$m(V^{\cdot}\varrho_1^2 + V\varrho^{\cdot}_1\varrho_1) + 24M_0 = 0,$$

$$m(V^{\cdot}\varrho_1^2 + 3V\varrho^{\cdot}_1\varrho_1) - 24M_0 = 0.$$

Отсюда

$$V\varrho_1^2 = \text{const}, \tag{3.2}$$

$$V\varrho_1 = \frac{24M_0}{m\varrho^{\cdot}_1}. \tag{3.3}$$

а) Средние давления. Здесь начальные условия следующие:

$$\varrho_1(t_1)=\lambda R, \qquad V(t_1)=V_0(t_1)=\frac{2k}{m\lambda R^3}(p-p_1)t_1. \tag{3.4}$$

Подстановка (3,3) в (3,2) с учетом (3,4) дает

$$\ln\varrho_1-\ln\lambda R=\frac{p_1}{p-p_1}\left(\frac{t}{t_1}-1\right). \tag{3.5}$$

Из выражения (3,1) с учетом (3,2), (3,3) и (3,4) получим распределение прогиба в зоне $0\leqslant r\leqslant\varrho_1$. При $\varrho_1=R$ в центре пластины получим

$$w_0=\frac{kt_1^2(p-p_1)}{m\lambda R^3}\left[\frac{p}{p_1}\left(\frac{1}{\lambda^2}-1\right)+1\right].$$

Конец второй фазы определяется условием $\varrho_1(t_2)=R$, тогда выражение (3,5) дает

$$t_2=t_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}-1\right)\ln\lambda\right].$$

б) Высокие давления. При $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ вычисления аналогичны к случаю свободно опертой пластины (§ 2, п. 2б). При $t=t_2$ в конце фазы в центре пластины получено

$$w_0=\frac{p^2t_1^2\lambda^3R^3}{2mp_1k}\left(\frac{2k}{\lambda^3R^3}-1\right)-\frac{pt_1^2}{2m}.$$

Конец второй фазы определяется выражением

$$t_2=\frac{pt_1}{p_1}-\frac{pt_1\lambda^3R^3}{2p_1k}.$$

Фаза $t_2\leqslant t\leqslant t_3$. Здесь $\varrho(t_2)=0$, $\varrho_1(t_3)=R$, $\varrho_1(t_2)=\lambda R$,

$$V(t_2)=\frac{pt_1}{m}. \tag{3.6}$$

Подстановка (3.3)в (3,2) с учетом (3,6) дает

$$\ln\varrho_1-\ln\lambda R=\frac{2k}{\lambda^3R^3}\left[\frac{p_1t}{pt_1}-1\right]+1.$$

Из выражения (3,1), с учетом (3,2), (3,3) и (3,6), получим распределение прогиба в зоне $0\leqslant r\leqslant\varrho_1$. При $\varrho_1=R$ в центре пластины получено

$$w_0=\frac{p^2t_1^2\lambda^3R^3}{4kmp_1}\left[\frac{4k}{\lambda^3R^3}-(1+\lambda^2)\right]-\frac{pt_1^2}{2m}.$$

В последней фазе при средних и высоких давлениях рассуждения аналогичны к случаю свободно опертой пластины (§ 2, п. 2, б). Приведем только окончательные результаты. Максимальный остаточный прогиб в конце движения при средних давлениях

$$w_0 = \frac{kpt_1^2}{m\lambda^3 R^3}\left(\frac{p}{p_1} - 1\right).$$

При высоких давлениях получим соответственно

$$w_0 = \frac{p^2 t_1^2 \lambda^3 R^3}{4mp_1 k}\left(\frac{4k}{\lambda^3 R^3} - 1\right) - \frac{pt_1^2}{2m}.$$

График максимального прогиба для случая $a=0{,}438R$ ($\lambda=0{,}87$) приведен на фиг. 1 (кривая 1). Кривая 2 соответствует точному решению [4].

Литература

1. Тамуж В. П., Об одном минимальном принципе в динамике жестко-пластического тела. Прикл. матем. и механ., 1962, **26**, № 4, 715—721.
2. Форсман Н. А., Некоторые задачи динамического изгиба круглых жестко-пластических пластинок. Материалы летней школы по проблеме «Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластинок и оболочек» II. Тарту, 1966, 121—129.
3. Florence, A. L., Clamped circular rigid plastic plates under blast loading. Trans. ASME, 1966, **E 33**, № 2, 256—260.
4. Florence, A. L., Clamped circular rigid-plastic plates under central blast loading. Internat. J. Solids and Struct., 1966, **2**, № 2., 319—335.

Поступило
3 IV 1975

JÄIK-PLASTSETE ÜMMARGUSTE PLAATIDE DÜNAAMIKAST

E. Virma

Resümee

Käesoleva töös vaadeldakse ümmargusi jäikplastsest materjalist plaate. Plaadi keskmisele ringikujulisele osale mõjub teatud ajavahemiku jooksul ühtlaselt jaotatud ristsuunaline dünaamiline koormus. Eeldatakse, et materjal allub Tresca plastsustingimusele. Kasutades Tamuszi [1] printsiipi, on leitud ligikaudne lahend vabalt toetatud ja jäigalt kinnitatud plaadi korral.

THE DYNAMIC PLASTIC BEHAVIOUR OF CIRCULAR RIGID-PLASTIC PLATES

E. Virma

Summary

In this paper circular plates subjected to dynamic loading uniformly distributed over a central circular area are considered. The plate is supposed to be made of rigid-plastic material obeying the Tresca yield condition. Using the variational principle of Tamusz [1], an approximate solution for simply-supported and clamped plates is given.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета
Выпуск 374
ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
XVII
На русском языке
Резюме на эстонском, английском и немецком языках
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18
Ответственный редактор С. Барон
Корректоры Г. Ноппель, Л. Арива, К. Усталу
Сдано в набор 19/III 1975. Подписано к печати 1/X 1975. Бумага типографская № 1, 60×90.1/16. Печатных листов 19,0 + 1 вклейка. Учетно-издат. листов 18,83. Тираж 450. МВ 05467. Заказ № 2570. Типография им. Ханса Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19. II
Цена 1 руб. 88 коп.
2—2

Цена 1 руб. 88 коп.