

TARTU ÜLIKOOL
Matemaatika ja statistika instituut
Matemaatika eriala

Margus Lillemäe

**Numbriline meetod Caputo
tuletisega diferentsiaalvõrrandi
lahendamiseks**

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof Arvet Pedas

TARTU 2016

Numbriline meetod Caputo tuletisega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks

Bakalaureusetöö
Margus Lillemäe

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös esitatakse numbriline meetod Caputo tuletisega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks. Seega alguses tuuakse sisse mõningaid murruliste tuletistega seotud omadusi. Peale meetodi kirjeldust rakendatakse meetodit konkreetsete näidete korral. Lõpus esitatakse vastavad tabelid ja joonised vaadeldud meetodil saadud tulemuste kirjeldamiseks.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid

Märksõnad: Cauchy ülesanded, funktsioonide lähendamine, kollokatsioonimeetodid, murdtuletised, splainid.

Numerical method for solving a differential equation with the Caputo derivative

Bachelor's thesis
Margus Lillemäe

Abstract: The objective of this bachelor's thesis is to present a numerical method to solve a differential equation which has the Caputo derivative. At first are brought some attributes of the fractional derivative. After that the method is applied to concrete examples. At the end are appropriate tables and figures to help describe the method's results.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations

Key words. Cauchy problems, approximation of functions, collocation method, fractional derivatives, splines.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Gammafunktsioon	5
2 Riemann–Liouville’i integraal ja murruline tuletis	7
3 Caputo murruline tuletis	12
4 Murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandi lahendamine	16
5 Splain-kollokatsioonimeetodi kirjeldus	18
6 Cauchy ülesande lähilahendi leidmine	22
7 Näiteid Caputo tuletisega Cauchy ülesande lahendamisest	28
Kirjandus	31
Lisa	32

Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö käsitleb mõningaid murruliste tuletistega seotud omadusi ning algtingimusega diferentsiaalvõrrandi ligikaudset lahendamist juhul, kui võrrandis esinev otsitav funktsioon on Caputo α -ndat järku murruline tuletis, kus $\alpha \in (0, 1)$. Kahe konkreetse näite korral saadud numbrilised tulemused näitavad meetodi abil saadud lähislahendi küllalt suurt täpsust.

Bakalaureusetöö esimesed kolm peatükki on referatiivsed, mis põhiliselt tuginevad töödele [2], [4] ja [5]. Peatükis neli toodud ülesande lahendamisega seotud meetodi kirjeldus pärineb artiklist [6]. Peatükis 5 esitatud spline-kollokatsioonimeetodi kirjeldusel oli aluseks monograafia [1]. Töö näidete osas olen toonud samad näited, mis töös [8], et oleks võimalik võrrelda erinevate meetodite abil saadud tulemusi.

Esimeses peatükis toome sisse matemaatilise analüüsi kursustest Euleri gamma- ja beetafunktsiooni omadused.

Teises peatükis esitame Riemann-Liouville'i integraali ja Riemann-Liouville'i tuletise definitsioonid koos mõningate omadustega.

Kolmandas peatükis defineerime Caputo murrulist järku tuletise.

Neljandas peatükis esitame Caputo tuletisega diferentsiaalvõrrandi ja esitame sellise ülesande numbrilise lahendamise skeemi.

Viiendas peatükis kirjeldame töös rakendatavat spline-kollokatsioonimeetodit.

Kuuendas peatükis arvutame välja lähislahendi Caputo tuletisega diferentsiaalvõrrandile.

Viimases peatükis rakendame töös kirjeldatud meetodit konkreetsete näidete korral. Lõpuks me esitame vastavad tabelid ja joonised vaadeldud meetodil saadud tulemuste kirjeldamiseks.

1 Gammafunktsioon

Selles peatükis esitame matemaatilise analüüsi kursusest tuntud Euleri gamma- ja beetafunktsiooni omadusi. Neid läheb vaja käesoleva töö järgnevates osades. Seejuures tugineme G. Kangro õpikutele [3] ja [4].

Definitsioon 1.1. Parameetrist α sõltuvat päratut integraali

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

nimetatakse *gammafunktsiooniks*.

Näitame, et päratu integraal

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \tag{1.1}$$

koondub, kui $\alpha > 0$.

Olgu $\alpha > 0$. Kirjutame integraali (1.1) kahe integraali summana:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{1.2}$$

Võrduse (1.2) parema poole esimene liidetav on juhul $\alpha < 1$ punkti 0 ümbruses tõkestamata. Kuna

$$\frac{e^{-1}}{t^{1-\alpha}} \leq \frac{e^{-t}}{t^{1-\alpha}} < \frac{1}{t^{1-\alpha}}, \quad t \in (0, 1],$$

siis matemaatilise analüüsi kursusest tuntud integraalide võrdluslause põhjal integraal

$$\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

koondub. Uurime nüüd võrduse (1.2) parema poole teist liidetavat

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{1.3}$$

Paneme tähele, et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{\alpha+1} = 0.$$

Seega leidub parameetrist α sõltuv konstant M , et iga $t \geq 1$ korral

$$e^{-t} t^{\alpha+1} \leq M$$

ehk

$$e^{-t}t^{\alpha-1} \leq Mt^{-2}.$$

Sellest võrratusest järeldub integraalide võrdluslause põhjal, et päratu integraal (1.3) koondub. Kuna võrduse (1.2) parema poole mõlemad liidetavad koonduvad, siis koondub ka vasak pool.

Järgmisena tuletame gammafunktsiooni taandamisvalemi. Olgu $\alpha > 0$. Ositi integreerides saame, et

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty e^{-t}t^\alpha dt = -e^{-t}t^\alpha \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1} dt = \alpha \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1} dt.$$

Seega gammafunktsiooni definitsiooni põhjal

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \text{iga } \alpha > 0 \text{ korral.} \quad (1.4)$$

Taandamisvalemit korduvalt rakendades leiame, et kui $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha > n - 1$, siis

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)\Gamma(\alpha - n + 1).$$

Seega, pidades silmas võrdust

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1,$$

saame (võttes eelnevas taandamisvalemis $\alpha = n$)

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \text{iga } n \in \mathbb{N}_0 \text{ korral.} \quad (1.5)$$

Defineerime nüüd beetafunktsiooni.

Definitsioon 1.2. Parameetritest $a, b \in (0, \infty)$ sõltuvat päratut integraali

$$\mathbf{B}(a, b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

nimetatakse *beetafunktsiooniks*.

Gammafunktsiooni ja beetafunktsiooni vahel kehtib seos

$$\mathbf{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \quad a, b > 1, \quad (1.6)$$

mille tõestus on esitatud G. Kangro õpikus [4, 247–249].

2 Riemann–Liouville’i integraal ja murruline tuletis

Caputo murrulise tuletise defineerimiseks on vaja kõigepealt sisse tuua Riemann–Liouville’i integraali ja tuletise, millele lisaks toome välja mõned kasulikud omadused. Järgnev esitus tugineb töödel [2], [5] ja [7].

Olgu D operaator, mis seab lõigus $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) diferentseeruvale funktsioonile f vastavusse tema tuletise f' :

$$(Df)(t) = f'(t), \quad t \in [a, b]. \quad (2.1)$$

Olgu J_α operaator, mis teisendab lõigus $[a, b]$ integreeruva funktsiooni f funktsiooniks $(J_\alpha f)$, mis on määratud valemiga

$$(J_\alpha f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b] \quad (2.2)$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral hakkame kasutama sümboleid D^n ja J_a^n tähistamaks operaatorite D ja J_a n -kordset rakendamist:

$$\begin{aligned} D^1 &= D, & J_a^1 &= J_a, \\ D^n &= DD^{n-1}, & J_a^n &= J_a J_a^{n-1}. \end{aligned}$$

Defineerime $D_0 = I$ ja $J_a^0 = I$, kus I on ühikoperaator, s.o $I(f)(t) = f(t)$.

Teoreem 2.1 (vt nt [3, lk 367]). *Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidev funktsioon ja olgu $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kus*

$$F(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b].$$

Siis funktsioon F on diferentseeruv, kusjuures

$$F' = f.$$

Olgu funktsioon f pidev lõigus $[a, b]$. Siis teoreemi 2.1 põhjal

$$DJ_a f = f,$$

seega iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$D^n J_a^n f = D^{n-1} DJ_a J_a^{n-1} f = D^{n-1} I J_a^{n-1} f = D^{n-1} J_a^{n-1} f, \quad (2.3)$$

millest matemaatilise induktsiooni meetodi abil järeldub, et

$$D^n J_a^n f = f, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

seega operaator D^n on operaatori J_a^n vasakpoolne pöördoperaator.

Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ning olgu $n \in \mathbb{N}$. Tähistame lõigus $[a, b]$ n korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulga sümboliga $C^n[a, b]$. Me kirjutame $C^0[a, b] := C[a, b]$.

Lause 2.2. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, ja $f \in C^m[a, b]$. Siis

$$(D^n f)(t) = (D^m J_a^{m-n} f)(t), \quad t \in [a, b].$$

TÕESTUS. Valemi (2.4) põhjal iga $t \in [a, b]$ korral

$$f(t) = (D^{m-n} J_a^{m-n} f)(t),$$

seega

$$(D^n f)(t) = (D^n D^{m-n} J_a^{m-n} f)(t) = (D^m J_a^{m-n} f)(t).$$

□

Lause 2.3 (vt nt [7, lk 221-224]). Olgu f lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon. Siis iga $m \in \mathbb{N}$ korral kehtib valem

$$(J_a^m f)(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b].$$

Märkus 2.1. Eelmist valemit tuntakse *Cauchy valem* nime all.

Järgmine definitsiooni on üks viis defineerida üldistatumat integraali.

Definitsioon 2.1. Olgu $\alpha > 0$. Operaatorit ${}_R L J_a^\alpha$ hulgal $C[a, b]$, mis on defineeritud võrdusega

$$({}_R L J_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b],$$

nimetatakse *Riemann-Liouville'i α -järku integraaloperaatoriks*. Funktsiooni ${}_R L J_a^\alpha f$ nimetatakse funktsiooni f *Riemann-Liouville'i α -järku integraaliks*.

Järgnevas defineerime ${}_R L J_a^0 = I$, kus I on ühikoperaator.

Kui $\alpha \in \mathbb{N}$, siis seose (1.5) põhjal ${}_R L J_a^\alpha = J_a^\alpha$.

Edaspidises tähistame sümboliga $[\alpha]$ vähimat täisarvu, mis on suurem või võrdne arvuga $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lause 2.4 (vt nt [5, lk 37]). Olgu $\alpha, \beta \geq 0$ ja $f \in C[a, b]$. Siis

$$({}_R L J_a^\alpha ({}_R L J_a^\beta f))(t) = ({}_R L J_a^{\alpha+\beta} f)(t), \quad t \in [a, b]. \quad (2.5)$$

Definitsioon 2.2. Olgu $\alpha > 0$ ja $m := \lceil \alpha \rceil$. Olgu funktsioon $f \in C[a, b]$ selline, et ${}_{RL}J_a^{m-\alpha} f \in C^m[a, b]$. Siis operaatorit ${}_{RL}D_a^\alpha$, mis on defineeritud valemiga

$$({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) = (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} f)(t) \quad (t \in [a, b])$$

nimetatakse *Riemann-Liouville'i* α -järku diferentsiaaloperaatoriks. Funktsiooni ${}_{RL}D_a^\alpha f$ nimetatakse funktsiooni f *Riemann-Liouville'i* α -järku tuletiseks.

Järgnevas defineerime ${}_{RL}D_a^0 = I$, kus I on ühikoperaator.

Paneme tähele, et kui $\alpha \in \mathbb{N}$, siis $m = \lceil \alpha \rceil = \alpha$ ja

$$\begin{aligned} ({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} f)(t) = (D^m {}_{RL}J_a^{m-m} f)(t) \\ &= (D^m {}_{RL}J_a^0 f)(t) = (D^m I f)(t) \\ &= (D^m f)(t), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Teiste sõnadega, $\alpha = m \in \mathbb{N}$ korral operaator ${}_{RL}D_a^m$ ühtib tavalise m -järku diferentsiaaloperaatoriga D^m .

Lause 2.5. Olgu $\alpha \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$. Siis

$$({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}J_a^\alpha f))(t) = f(t), \quad t \in [a, b].$$

TÕESTUS. Olgu $\alpha \geq 0$, $m := \lceil \alpha \rceil$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$. Siis definitsiooni 2.2 põhjal

$$({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}J_a^\alpha f))(t) = (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} ({}_{RL}J_a^\alpha f))(t), \quad (t \in [a, b]).$$

Lause 2.4 ja seose (2.4) abil

$$\begin{aligned} ({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}J_a^\alpha f))(t) &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} ({}_{RL}J_a^\alpha f))(t) \\ &= (D^m {}_{RL}J_a^m f)(t) \\ &= (I f)(t) = f(t), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

□

Lause 2.6. Olgu $\alpha, \beta \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Kui $\psi \in C[a, b]$ ja $f = {}_{RL}J_a^{\alpha+\beta} \psi$, siis

$$({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}D_a^\beta f))(t) = ({}_{RL}D_a^{\alpha+\beta} f)(t), \quad t \in [a, b]. \quad (2.6)$$

TÕESTUS. Kui $\alpha = 0$ või $\beta = 0$, siis väide (2.6) kehtib. Olgu $\alpha, \beta \geq 0$ ja $m := \lceil \alpha \rceil$ ning $n := \lceil \beta \rceil$. Kui $\psi \in C[a, b]$ ja $f = {}_{RL}J_a^{\alpha+\beta} \psi$, siis definitsiooni 2.2 põhjal

$$\begin{aligned} ({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}D_a^\beta f))(t) &= ({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}D_a^\beta {}_{RL}J_a^{\alpha+\beta} \psi))(t) \\ &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} (D^n {}_{RL}J_a^{n-\beta} {}_{RL}J_a^{\alpha+\beta} \psi))(t), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Lausete 2.4 ja 2.5 ning seose (2.4) alusel

$$\begin{aligned}
(D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} (D^n {}_{RL}J_a^{n-\beta} {}_{RL}J_a^{\alpha+\beta}\psi))(t) &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} (D^n {}_{RL}J_a^{n+\alpha}\psi))(t) \\
&= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} (D^n {}_{RL}J_a^n {}_{RL}J_a^\alpha\psi))(t) \\
&= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} (D^n {}_{RL}J_a^n {}_{RL}J_a^\alpha\psi))(t) \\
&= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} {}_{RL}J_a^\alpha\psi)(t) \\
&= (D^m {}_{RL}J_a^m\psi)(t) \\
&= (D^m J_a^m\psi)(t) \\
&= \psi(t), \quad t \in [a, b].
\end{aligned}$$

Seega

$$({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}D_a^\beta f))(t) = \psi(t), \quad t \in [a, b].$$

Kuna

$$f = {}_{RL}J_a^{\alpha+\beta},$$

siis

$${}_{RL}D_a^{\alpha+\beta} f = \psi.$$

Järelikult

$$({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}D_a^\beta f))(t) = ({}_{RL}D_a^{\alpha+\beta} f)(t), \quad t \in [a, b].$$

□

Järgnevas näites näeme üht põhjust, et miks on Riemann-Liouville'i murrulisele tuletisele lisaks defineeritud Caputo murruline tuletis. Nimelt selgub, et Riemann-Liouville'i murruline tuletis konstandist ei pruugi alati olla 0.

Näide 2.1. Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ ja $m := \lceil \alpha \rceil$. Olgu $f(t) = c$, kus $t \in [a, b]$ ja $c \in \mathbb{R}$. Leiame selle α -ndat järku Riemann-Liouville'i tuletise.

Olgu algul $\alpha = m \in \mathbb{N}$. Siis Riemann-Liouville'i α -ndat järku tuletise definitsiooni järel tehtud tähelepaneku tõttu

$$({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) = (D^m f)(t) = 0, \quad t \in [a, b].$$

Olgu nüüd $\alpha \notin \mathbb{N}$. Siis definitsioonidest 2.1 ja 2.2 järeldub, et

$$\begin{aligned}
({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} f)(t) \\
&= D^m \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} c \, d\tau \right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)} D^m \left((-t+\tau)^{m-\alpha} \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} \right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)} D^m [(t-a)^{m-\alpha}], \quad t \in [a, b].
\end{aligned}$$

Kuna

$$\begin{aligned} D^m[(t-a)^{m-\alpha}] &= (m-\alpha)(m-\alpha-1)\cdots(m-\alpha-(m-1))(t-a)^{m-\alpha-m} \\ &= (m-\alpha)(m-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)(t-a)^{-\alpha}, \quad t \in [a, b], \end{aligned}$$

siis valemi (1.4) $(m-1)$ -kordse rakendamise teel saame

$$\begin{aligned} \Gamma(m-\alpha) &= (m-\alpha-1)\Gamma(m-\alpha-1) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= (m-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha) \end{aligned}$$

Seega saame, et $\alpha \notin \mathbb{N}$ korral

$$({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) = \frac{c(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad t \in [a, b],$$

mis ei ole võrdne nulliga kui $c \neq 0$.

3 Caputo murruline tuletis

Selles peatükis toome sisse Caputo murrulise tuletise. Järgnev esitus tugineb põhiliselt töödel [2] ja [5].

Olgu $\alpha > 0$, $m := \lceil \alpha \rceil$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^{m-1}[a, b]$. Tähistame $(m - 1)$ -järku Taylori polünoomi funktsioonist f sümboliga $T_{m-1}[f; a]$:

$$(T_{m-1}[f; a])(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k. \quad (3.1)$$

Definitsioon 3.1. Olgu $\alpha > 0$, $m := \lceil \alpha \rceil$, $a, b \in \mathbb{R}$. Olgu funktsioon $f \in C^{m-1}[a, b]$ selline, et ${}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f; a]) \in C^m[a, b]$. Siis operaatorit ${}_CD_a^\alpha$, mis on defineeritud võrdusega

$$({}_CD_a^\alpha f)(t) = ({}_{RL}D_a^\alpha (f - T_{m-1}[f; a]))(t) \quad (t \in [a, b])$$

nimetatakse *Caputo α -järku diferentsiaaloperaatoriks*. Funktsiooni ${}_CD_a^\alpha f$ nimetatakse funktsiooni f *Caputo α -järku tuletiseks*.

Järgnevas defineerime ${}_CD_a^0 = I$, kus I on ühikoperaator.

Paneme tähele, et kui $\alpha = m \in \mathbb{N}$, siis operaator ${}_CD_a^0$ ühtib tavalise m -järku diferentsiaaloperaatoriga D^m . Tõepoolest, sellisel juhul

$$\begin{aligned} ({}_CD_a^\alpha f)(t) &= ({}_{RL}D_a^\alpha (f - T_{m-1}[f; a]))(t) \\ &= ({}_{RL}D_a^\alpha (f))(t) - ({}_{RL}D_a^\alpha T_{m-1}[f; a])(t) \\ &= (D^m f)(t) - D^m (T_{m-1}[f; a])(t) \\ &= (D^m f)(t), \quad t \in [a, b], \end{aligned}$$

sest m -järku tuletis $(m - 1)$ -järku polünoomist on null.

Paneme ka tähele, et

$$({}_CD_a^\alpha {}_{RL}J_a^\alpha f)(t) = f(t) \quad (3.2)$$

Tõepoolest, definitsiooni 3.1 põhjal saame

$$\begin{aligned} ({}_CD_a^\alpha {}_{RL}J_a^\alpha f)(t) &= ({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}J_a^\alpha f - T_{m-1}[{}_{RL}J_a^\alpha f; a]))(t) \\ &= ({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}J_a^\alpha f))(t) \\ &\quad - ({}_{RL}D_a^\alpha (T_{m-1}[{}_{RL}J_a^\alpha f; a]))(t). \end{aligned}$$

Lausest 2.5 järeldub, et

$$\begin{aligned}({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{RL}J_a^\alpha f))(t) &= ({}_{RL}D_a^\alpha {}_{RL}J_a^\alpha f)(t) \\ &= (If)(t) \\ &= f(t).\end{aligned}$$

Definitsiooni 2.1 põhjal

$$\begin{aligned}({}_{RL}J_a^\alpha f)(a) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^a (a - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Seega

$$({}_{T_{m-1}[{}_{RL}J_a^\alpha f; a]})(t) = 0.$$

Näitest 2.1 järeldub, et

$$({}_{RL}D_a^\alpha ({}_{T_{m-1}[{}_{RL}J_a^\alpha f; a]})) = 0.$$

Järgmist lauset kasutatakse kirjanduses tihti definitsioonina.

Lause 3.1. Olgu $\alpha \geq 0$, $m := \lceil \alpha \rceil$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^m[a, b]$. Siis

$$({}_CD_a^\alpha f)(t) = ({}_{RL}J_a^{m-\alpha} D^m f)(t), \quad t \in [a, b].$$

TÕESTUS. Olgu algul $\alpha = m \in \mathbb{N}$. Siis eelneva arutelu alusel Caputo m -järku diferentsiaaloperaator ühtib tavalise m -järku diferentsiaaloperaatoriga. Lisaks eelmise peatüki põhjal saame, et

$$I = {}_{RL}J_a^0 = {}_{RL}J_a^{m-\alpha},$$

kus I on ühikoperaator. Seega kehtib väide erijuhul $\alpha = m \in \mathbb{N}$. Olgu nüüd $\alpha \notin \mathbb{N}$. Siis

$$\begin{aligned}({}_CD_a^\alpha f)(t) &= ({}_{RL}D_a^\alpha (f - {}_{T_{m-1}[f; a]}))(t) \\ &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha} (f - {}_{T_{m-1}[f; a]}))(t) \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{(t - \tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m - \alpha)} (f(\tau) - {}_{T_{m-1}[f; a]}(\tau)) d\tau.\end{aligned}$$

Ositi integreerides, kus

$$\begin{aligned} u &= f(\tau) - T_{m-1}[f; a](\tau), & du &= D(f(\tau) - T_{m-1}[f; a](\tau)) d\tau, \\ dv &= \frac{(t - \tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m - \alpha)} d\tau, & v &= -\frac{(t - \tau)^{m-\alpha}}{\Gamma(m - \alpha + 1)}, \end{aligned}$$

saame

$$\begin{aligned} &\int_a^t \frac{(t - \tau)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m - \alpha)} (f(\tau) - T_{m-1}[f; a](\tau)) d\tau \\ &= -\frac{(t - \tau)^{m-\alpha}}{\Gamma(m - \alpha + 1)} (f(\tau) - T_{m-1}[f; a](\tau)) \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m - \alpha + 1)} \int_a^t (D(f(\tau) - T_{m-1}[f; a](\tau)))(t - \tau)^{m-\alpha} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha + 1)} \int_a^t (D(f(\tau) - T_{m-1}[f; a](\tau)))(t - \tau)^{m-\alpha} d\tau. \end{aligned}$$

Seega

$${}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f; a]) = {}_{RL}J_a^{m-\alpha+1}D(f - T_{m-1}[f; a]).$$

Kui integreerida avaldist ${}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f; a])$ ositi m korda, siis

$$\begin{aligned} ({}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f; a]))(t) &= ({}_{RL}J_a^{2m-\alpha}D^m(f - T_{m-1}[f; a]))(t) \\ &= ({}_{RL}J_a^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha}D^m(f - T_{m-1}[f; a]))(t) \\ &= (J_a^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha}D^m f)(t), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned} ({}_{RL}D_a^\alpha(f - T_{m-1}[f; a]))(t) &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f; a]))(t) \\ &= (D^m J_a^m {}_{RL}J_a^{m-\alpha}D^m f)(t) \\ &= ({}_{RL}J_a^{m-\alpha}D^m f)(t), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

□

Järgnev näide toob välja olulise erinevuse Caputo a -ndat järku murrulise tuletise ja Riemann-Liouville'i a -järku murrulise tuletise vahel.

Näide 3.1. Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ ja $m := \lceil \alpha \rceil$. Olgu $f(t) = c$, kui $t \in [a, b]$ ja $c \in \mathbb{R}$. Definitsiooni 3.1 ja lause 3.1 põhjal saame

$$\begin{aligned}
 ({}_C D_a^\alpha f)(t) &= ({}_{RL} J_a^{m-\alpha} D^m f)(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} c^{(m)} d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} 0 d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t 0 d\tau = 0.
 \end{aligned}$$

Teisiti öeldes, Caputo a -ndat järku tuletis konstandist on null.

4 Murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Selles peatükis toodud materjal pärineb artiklist [6].

Olgu $\alpha \in (0, 1)$. Soovime leida Caputo murrulise tuletisega lineaarse Cauchy ülesande

$$\begin{cases} {}_C D_0^\alpha y(t) + p(t)y(t) = q(t), & t \in [0, b], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

lahendit $y = y(t)$ lõigul $[0, b]$. Järgnevas tähistame $z = {}_C D_0^\alpha y$. Valemist (3.2) järeldub

$$y = {}_{RL} J_0^\alpha z + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Definitsioonist 2.1 saame

$$({}_{RL} J_0^\alpha z)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds, \quad t \in [0, b].$$

Kuna $y(0) = y_0$, siis

$$\begin{aligned} y_0 &= ({}_{RL} J_0^\alpha z)(0) + c \\ &= 0 + c \\ &= c. \end{aligned}$$

Seega

$$y = {}_{RL} J_0^\alpha z + y_0. \quad (4.2)$$

Asetame avaldise (4.2) diferentsiaalvõrrandisse ${}_C D_0^\alpha y + p(t)y = q$:

$$\left({}_C D_0^\alpha ({}_{RL} J_0^\alpha z + y_0) \right)(t) + p(t) \left(({}_{RL} J_0^\alpha z)(t) + y_0 \right) = q(t).$$

Võrdusest (3.2) ja näite 3.1 tõttu järeldub siit, et

$$z(t) + \frac{p(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds = q(t) - y_0 p(t),$$

ehk

$$z(t) + \int_0^t \frac{p(t)}{\Gamma(\alpha)} (t-s)^{\alpha-1} z(s) ds = q(t) - y_0 p(t) \quad (4.3)$$

Tähistades

$$K(t, s) = \frac{p(t)}{\Gamma(\alpha)}(t - s)^{\alpha-1},$$
$$g(t) = q(t) - y_0 p(t),$$

saame võrrandi (4.3) kirjutada kujul

$$z(t) + \int_0^t K(t, s)z(s) \, ds = g(t), \quad 0 \leq t \leq b. \quad (4.4)$$

Viimane on *Volterra tüüpi integraalvõrrand*, kus otsitavaks on z . Lahendades võrrand (4.4) saame leida suuruse z võrduses (4.2). Ülesande (4.1) lahendi y leida võrduse (4.2) abil. Antud töös vaatleme ühte ligikaudset meetodit võrrandi (4.4) lahendamiseks ning seejärel ülesande (4.1) lähilahendi leidmiseks kujul (4.2).

5 Spline-kollokatsioonimeetodi kirjeldus

Siin peatükis esitatud spline-kollokatsioonimeetodi kirjeldusel on aluseks monograafia [1].

Vaatleme Volterra integraalvõrrandit kujul

$$z(x) + \int_0^x K(x, s)z(s) \, ds = g(x), \quad 0 \leq x \leq b, \quad (5.1)$$

kus K ja g on antud funktsioonid. Jaotame iga $n \in \mathbb{N}$ korral lõigu $[0, b]$ n osalõiguks sõlmpunktidega

$$0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} = b.$$

Tähistagu Δ_n sõlmpunktide hulka, s.t

$$\Delta_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)}\}.$$

Hulka Δ_n nimetatakse lõigul $[0, b]$ antud võrguks. Võru on ühtlane, kui

$$x_i^{(n)} = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b}{n}.$$

Võrk Δ_n jagab lõigu $[0, b]$ osahulkadeks

$$\sigma_0 = [x_0^{(n)}, x_1^{(n)}], \quad \sigma_j = (x_j^{(n)}, x_{j+1}^{(n)}], \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Valime m ($m \in \mathbb{N}$) kollokatsiooniparameetrit η_1, \dots, η_m selliselt, et

$$0 \leq \eta_1 < \dots < \eta_m \leq 1.$$

Seejärel defineerime kollokatsioonipunktid valemiga

$$x_{jk}^{(n)} = x_j^{(n)} + \eta_k h_j, \quad (5.2)$$

kus

$$h_j = x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 1, \dots, m.$$

Võrrandi (5.1) lähislahendit $z_n(x)$ otsime polünoomiaalsete splineide (tükiti $(m-1)$ -järku polünoomide) ruumist

$$S_{m-1}^{(-)}(\Delta_n) = \left\{ w : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}, w(x) \Big|_{x \in \sigma_j} \in \pi_{m-1}, j = 0, 1, \dots, n-1 \right\},$$

kus π_{m-1} on kõigi ülimalt $(m-1)$ -järku polünoomide hulk. Paneme tähele, et $w \in S_{m-1}^{(-1)}$ võib olla katkev punktides $x_j^{(n)}$, $j = 1, \dots, n-1$.

Lähislahendi $z_n(x)$ leidmiseks asetame ta algvõrrandisse (5.1) otsitava $z(x)$ asemele ning nõuame, et võrrand oleks rahuldatud kollokatsioonipunktides $x_{jk}^{(n)}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, m$:

$$z_n(x_{jk}^{(n)}) + \int_0^{x_{jk}^{(n)}} K(x_{jk}^{(n)}, s) z_n(s) ds = g(x_{jk}^{(n)}), \quad (5.3)$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 1, \dots, m.$$

Seosed (5.3) võime integraali aditiivsuse tõttu kirjutada kujul

$$z_n(x_{0k}^{(n)}) + \int_{x_0^{(n)}}^{x_{0k}^{(n)}} K(x_{0k}^{(n)}, s) z_n(s) ds = g(x_{0k}^{(n)}), \quad k = 1, \dots, m; \quad (5.4)$$

$$z_n(x_{jk}^{(n)}) + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} K(x_{jk}^{(n)}, s) z_n(s) ds + \int_{x_j^{(n)}}^{x_{jk}^{(n)}} K(x_{jk}^{(n)}, s) z_n(s) ds = g(x_{jk}^{(n)}),$$

$$j = 1, \dots, n-1; \quad k = 1, \dots, m. \quad (5.5)$$

Järgnevas anname võrranditele (5.4) ja (5.5) teise kuju. Selleks teeme integraalides

$$\int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} K(x_{jk}^{(n)}, s) z_n(s) ds$$

ja

$$\int_{x_j^{(n)}}^{x_{jk}^{(n)}} K(x_{jk}^{(n)}, s) z_n(s) ds$$

vastavalt muutujate vahetused $s = x_i^{(n)} + h_i \tau$ ja $s = x_j^{(n)} + h_j \tau$. Siis esimesel juhul $ds = h_i d\tau$ ja teisel juhul $ds = h_j d\tau$ ning seega

$$\int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} K(x_{jk}^{(n)}, s) z_n(s) ds = h_i \int_0^1 K(x_{jk}^{(n)}, x_i + h_i \tau) z_n(x_i^{(n)} + h_i \tau) d\tau$$

ja

$$\int_{x_j^{(n)}}^{x_{jk}^{(n)}} K(x_{jk}^{(n)}, s) z_n(s) ds = h_j \int_0^{\eta_k} K(x_{jk}^{(n)}, x_j^{(n)} + h_j \tau) z_n(x_j^{(n)} + h_j \tau) d\tau.$$

Toome nüüd sisse $(m - 1)$ -järku Lagrange'i fundamentaalpolünoomid $L_k(\tau)$, mis vastavad kollokatsiooniparameetritele $0 \leq \eta_1 < \dots < \eta_m \leq 1$:

$$L_k(\tau) = \prod_{l=1, l \neq k}^m \frac{\tau - \eta_l}{\eta_k - \eta_l}, \quad \tau \in [0, 1], \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (5.6)$$

Siis

$$z_n(x_i^{(n)} + h_i\tau) = \sum_{k=1}^m z_n(x_i^{(n)} + \eta_k h_i) L_k(\tau), \quad x_i^{(n)} + h_i\tau \in \sigma_i, \quad i = 0, \dots, n - 1. \quad (5.7)$$

Tähistame

$$Z_{jk}^{(n)} = z_n(x_{jk}^{(n)}) = z_n(x_j^{(n)} + h_j \eta_k), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1, \quad k = 1, \dots, m.$$

Siis saame seosed (5.4) ja (5.5) esitada kujul

$$\begin{aligned} Z_{0k}^{(n)} + h_0 \int_0^{\eta_k} (K(x_{0k}^{(n)}, x_0^{(n)} + h_0\tau) \sum_{l=1}^m Z_{0l}^{(n)} L_l(\tau)) d\tau &= g(x_{0k}^{(n)}), \\ Z_{jk}^{(n)} + \sum_{i=0}^{j-1} h_i \int_0^1 (K(x_{jk}^{(n)}, x_i^{(n)} + h_i\tau) \sum_{l=1}^m Z_{il}^{(n)} L_l(\tau)) d\tau \\ + h_j \int_0^{\eta_k} (K(x_{jk}^{(n)}, x_j^{(n)} + h_j\tau) \sum_{l=1}^m Z_{jl}^{(n)} L_l(\tau)) d\tau &= g(x_{jk}^{(n)}), \end{aligned}$$

kus $j = 1, \dots, n - 1$; $k = 1, \dots, m$, millest saame lõpuks suuruste $Z_{jk}^{(n)}$ ($j = 0, \dots, n - 1$, $k = 1, \dots, m$) suhtes võrrandisüsteemi

$$Z_{0k}^{(n)} + h_0 \sum_{l=1}^m \left(\int_0^{\eta_k} (K(x_{0k}^{(n)}, x_0^{(n)} + h_0\tau) L_l(\tau)) d\tau \right) Z_{0l}^{(n)} = g(x_{0k}^{(n)}), \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} Z_{jk}^{(n)} + \sum_{i=0}^{j-1} h_i \sum_{l=1}^m \left(\int_0^1 (K(x_{jk}^{(n)}, x_i^{(n)} + h_i\tau) L_l(\tau)) d\tau \right) Z_{il}^{(n)} \\ + h_j \sum_{l=1}^m \left(\int_0^{\eta_k} (K(x_{jk}^{(n)}, x_j^{(n)} + h_j\tau) L_l(\tau)) d\tau \right) Z_{jl}^{(n)} = g(x_{jk}^{(n)}), \end{aligned} \quad (5.9)$$

kus $j = 1, \dots, n - 1$; $k = 1, \dots, m$.

Võrrandisüsteemi (5.9) võime lahendada järgmiselt. Võttes $j = 0$, saame lineaarvõrrandite süsteemi $Z_{0k}^{(n)}$ ($k = 1, \dots, m$) suhtes:

$$Z_{0k}^{(n)} + h_0 \sum_{l=1}^m \left(\int_0^{\eta_k} (K(x_{0k}^{(n)}, x_0^{(n)} + h_0\tau) L_l(\tau)) d\tau \right) Z_{0l}^{(n)} = g(x_{0k}^{(n)}), \quad k = 1, \dots, m.$$

Lahendades selle süsteemi leiame suurused $Z_{01}^{(n)}, \dots, Z_{0m}^{(n)}$. Kasutades saadud suurusi kirjutame lineaarvõrrandite süsteemi (5.9) välja $j = 1$ korral:

$$\begin{aligned} Z_{1k}^{(n)} + h_1 \sum_{l=1}^m \left(\int_0^{\eta_k} (K(x_{1k}^{(n)}, x_1^{(n)} + h_1\tau)L_l(\tau)) d\tau \right) Z_{1l}^{(n)} \\ = g(x_{1k}^{(n)}) - h_0 \sum_{l=1}^m \left(\int_0^1 (K(x_{1k}^{(n)}, x_0^{(n)} + h_0\tau)L_l(\tau)) d\tau \right) Z_{0l}^{(n)}, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Lahendades selle süsteemi, leiame suurused $Z_{11}^{(n)}, \dots, Z_{1m}^{(n)}$. Jätkates analoogiliselt leiame $Z_{21}^{(n)}, \dots, Z_{2m}^{(n)}, \dots, Z_{n-1,1}^{(n)}, \dots, Z_{n-1,m}^{(n)}$. Olles leidnud kõik suurused $Z_{jk}^{(n)}$ ($j = 0, \dots, n-1, k = 1, \dots, m$) saame võrrandi (5.1) lähilahendi $z_n(x)$ väärtused kohal $x = x_i^{(n)} + h_i\tau$, kus $\tau \in [0, 1]$, leida valemi (5.7) abil.

6 Cauchy ülesande lähislahendi leidmine

Oletame, et oleme leidnud võrrandi

$$z(t) + \int_0^t K(t, s)z(s) \, ds = g(t), \quad 0 \leq t \leq b.$$

lähislahendi $z_n(t)$ eelmises peatükis kirjeldatud spline-kollokatsioonimeetodi kaudu $m = 2$ korral, s.t kasutades kahte kollokatsiooniparameetrit η_1 ja η_2 , $0 \leq \eta_1 < \eta_2 \leq 1$. See tähendab, et meil on leitud suurused $Z_{jk}^{(n)} = z_n(x_{jk})$, $j = 0, \dots, n-1$, $k = 1, 2$. Leiame ülesande (4.1) lahendile

$$y(t) = ({}_{RL}J_0^\alpha z)(t) + y_0$$

lähislahendi kujul

$$y_n(t) = ({}_{RL}J_0^\alpha z_n)(t) + y_0, \quad t \in [0, b], \quad 0 < \alpha < 1.$$

Riemann-Liouville'i α -ndat järku integraali definitsiooni alusel (vt (5.7))

$$y_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} z_n(\tau) \, d\tau + y_0. \quad (6.1)$$

Oletame, et $t \in \sigma_i$ ($i = 1, \dots, n-1$). Siis

$$\begin{aligned} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} z_n(\tau) \, d\tau &= \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=1}^2 Z_{jk}^{(n)} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} L_k \left(\frac{\tau - x_j}{h_j} \right) \, d\tau \\ &+ \sum_{k=1}^2 Z_{ik}^{(n)} \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} L_k \left(\frac{\tau - x_i}{h_i} \right) \, d\tau. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Kui $t \in \sigma_0$, siis

$$\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} z_n(\tau) \, d\tau = \sum_{k=1}^2 Z_{0k}^{(n)} \int_{x_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} L_k \left(\frac{\tau - x_0}{h_0} \right) \, d\tau. \quad (6.3)$$

Osutub, et valemite (6.2) ja (6.3) paremal pool olevate integraalide summa saame täpselt välja arvutada. Tõepoolest, esiteks leiame, et

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} L_1 \left(\frac{\tau - x_j}{h_j} \right) d\tau &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} \frac{\frac{\tau - x_j}{h_j} - \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} d\tau \\
&= \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \left(\frac{1}{h_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau \right. \\
&\quad - \frac{x_j}{h_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&\quad \left. - \eta_2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right) \\
&= \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \left(\frac{1}{h_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x_j}{h_j} + \eta_2 \right) \cdot \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Integraali

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau$$

leiame ositi integreerimise abil. Olgu

$$\begin{aligned}
u &= \tau, & du &= d\tau, \\
dv &= (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, & v &= -\frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha},
\end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau &= -\frac{\tau(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(-\frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \right) d\tau \\
&= -\frac{x_{j+1}(t - x_{j+1})^\alpha}{\alpha} + \frac{x_j(t - x_j)^\alpha}{\alpha} - \frac{(t - \tau)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha + 1)} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \\
&= \frac{x_j(t - x_j)^\alpha - x_{j+1}(t - x_{j+1})^\alpha}{\alpha} + \frac{(t - x_j)^{\alpha+1} - (t - x_{j+1})^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha + 1)}.
\end{aligned}$$

Integraali $\int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau$ puhul

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau &= -\frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \\
&= \frac{(t - x_j)^\alpha - (t - x_{j+1})^\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} L_1 \left(\frac{\tau - x_j}{h_j} \right) d\tau &= \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \left(\frac{1}{h_j} \left(\frac{x_j(t - x_j)^\alpha - x_{j+1}(t - x_{j+1})^\alpha}{\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(t - x_j)^{\alpha+1} - (t - x_{j+1})^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{x_j}{h_j} + \eta_2 \right) \cdot \frac{(t - x_j)^\alpha - (t - x_{j+1})^\alpha}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Teiseks saame, et

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} L_2 \left(\frac{\tau - x_j}{h_j} \right) d\tau &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} \frac{\frac{\tau - x_j}{h_j} - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} d\tau \\ &= \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\frac{1}{h_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_j}{h_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau - \eta_1 \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\frac{1}{h_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{x_j}{h_j} + \eta_1 \right) \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Analoogiliselt leiame

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (t - \tau)^{\alpha-1} L_2 \left(\frac{\tau - x_j}{h_j} \right) d\tau &= \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\frac{1}{h_j} \left(\frac{x_j(t - x_j)^\alpha - x_{j+1}(t - x_{j+1})^\alpha}{\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(t - x_j)^{\alpha+1} - (t - x_{j+1})^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha + 1)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{x_j}{h_j} + \eta_1 \right) \cdot \frac{(t - x_j)^\alpha - (t - x_{j+1})^\alpha}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Kolmandaks saame, et

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} L_1 \left(\frac{\tau - x_i}{h_i} \right) d\tau &= \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \frac{\frac{\tau - x_i}{h_i} - \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} d\tau \\
&= \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \left(\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau \right. \\
&\quad \left. - \frac{x_i}{h_i} \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau - \eta_2 \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right) \\
&= \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \left(\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x_i}{h_i} + \eta_2 \right) \cdot \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Integraali

$$\int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau$$

leiame ositi integreerimise abil võttes

$$\begin{aligned}
u &= \tau, & du &= d\tau, \\
dv &= (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, & v &= -\frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau &= -\frac{\tau(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_{x_i}^t - \int_{x_i}^t \left(-\frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \right) d\tau \\
&= \frac{x_i(t - x_i)^\alpha}{\alpha} - \frac{(t - \tau)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha + 1)} \Big|_{x_i}^t \\
&= \frac{x_i(t - x_i)^\alpha}{\alpha} + \frac{(t - x_i)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha + 1)}.
\end{aligned}$$

Integraali $\int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau$ korral kehtib

$$\int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau = -\frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_{x_i}^t = \frac{(t - x_i)^\alpha}{\alpha}.$$

Seega

$$\int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} L_1 \left(\frac{\tau - x_i}{h_i} \right) d\tau = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \left(\frac{1}{h_i} \left(\frac{x_i(t - x_i)^\alpha}{\alpha} + \frac{(t - x_i)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha + 1)} \right) - \left(\frac{x_i}{h_i} + \eta_2 \right) \cdot \frac{(t - x_i)^\alpha}{\alpha} \right) \quad (6.9)$$

Neljandaks leiame, et

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} L_2 \left(\frac{\tau - x_i}{h_i} \right) d\tau &= \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \frac{\frac{\tau - x_i}{h_i} - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} d\tau \\ &= \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau - \frac{x_i}{h_i} \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau - \eta_1 \int_i^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau d\tau - \left(\frac{x_i}{h_i} + \eta_1 \right) \int_i^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Analoogiliselt integraali (6.8) arvutuskäigule saame

$$\int_{x_i}^t (t - \tau)^{\alpha-1} L_2 \left(\frac{\tau - x_i}{h_i} \right) d\tau = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\frac{1}{h_i} \left(\frac{x_i(t - x_i)^\alpha}{\alpha} + \frac{(t - x_i)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha + 1)} \right) - \left(\frac{x_i}{h_i} + \eta_1 \right) \cdot \frac{(t - x_i)^\alpha}{\alpha} \right). \quad (6.11)$$

Seoste (6.1)–(6.2), (6.4)–(6.11) põhjal jõuame lõpuks valemi

$$\begin{aligned}
y_n(t) = & \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)\Gamma(\alpha + 1)} \left[\sum_{j=0}^{i-1} \left(Z_{j1}^{(n)} \left[\frac{x_j(t - x_j)^\alpha - x_{j+1}(t - x_{j+1})^\alpha}{h_j} \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{(t - x_j)^{\alpha+1} - (t - x_{j+1})^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)h_j} - \left(\frac{x_j}{h_j} + \eta_2 \right) \cdot ((t - x_j)^\alpha - (t - x_{j+1})^\alpha) \right] \right. \\
& - \left. Z_{j2}^{(n)} \left[\frac{x_j(t - x_j)^\alpha - x_{j+1}(t - x_{j+1})^\alpha}{h_j} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{(t - x_j)^{\alpha+1} - (t - x_{j+1})^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)h_j} - \left(\frac{x_j}{h_j} + \eta_1 \right) \cdot ((t - x_j)^\alpha - (t - x_{j+1})^\alpha) \right] \right) \\
& + Z_{i1}^{(n)} \left[\frac{x_i(t - x_i)^\alpha}{h_j} + \frac{(t - x_i)^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)h_j} - \left(\frac{x_j}{h_j} + \eta_2 \right) \cdot (t - x_i)^\alpha \right] \\
& - \left. Z_{i2}^{(n)} \left[\frac{x_i(t - x_i)^\alpha}{h_j} + \frac{(t - x_i)^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)h_j} - \left(\frac{x_j}{h_j} + \eta_1 \right) \cdot (t - x_i)^\alpha \right] \right] \\
& + y_0,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

mille abil saame arvutada ülesande (4.1) lähilahendi $y_n(t)$ väärtuseid $t \in [0, b]$ korral, kus $t \in \sigma_i$, $i = 1, \dots, n - 1$. Kui $i = 0$, s.t kui $t \in \sigma_0$, siis seoste (6.1), (6.3), (6.8)–(6.11) alusel jõuame lõpuks valemini

$$\begin{aligned}
y_n(t) = & \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)\Gamma(\alpha + 1)} \left[Z_{01}^{(n)} \left[\frac{x_0(t - x_0)^\alpha}{h_0} + \frac{(t - x_0)^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)h_0} - \left(\frac{x_0}{h_0} + \eta_2 \right) \cdot (t - x_0)^\alpha \right] \right. \\
& - \left. Z_{02}^{(n)} \left[\frac{x_0(t - x_0)^\alpha}{h_0} + \frac{(t - x_0)^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)h_0} - \left(\frac{x_0}{h_0} + \eta_1 \right) \cdot (t - x_0)^\alpha \right] \right] \\
& + y_0.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

7 Näiteid Caputo tuletisega Cauchy ülesande lahendamisest

Selles peatükis lahendame kaks konkreetset Cauchy ülesannet peatükkides 4-6 kirjeldatud meetodil. Täpsemalt on näidetes arvatud vaadeldava ülesande lähislahendi y_n mitmesuguste n väärtuste korral, y_n erinevust täpsest lahendist y (viga $y_n - y$) ning vigade suhteid (mis iseloomustavad vaadeldava meetodi koonduvuskii- rust). Lisaks vastavates tabelites toodud tulemustele on tulemusi iseloomustatud ka arvuti poolt joonestatud graafikute abil. Ülesannete lahendamisel on kasutatud autori poolt Scilabi keskkonnas kirjutatud programme, mis on antud lisas.

Näide 7.1. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} {}_C D_0^{0.5} y(t) + y(t) = t^2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} t^{\frac{3}{2}}, & t \in [0, 10], \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

mille täpne lahend on (vt [5])

$$y(t) = t^2, \quad t \in [0, 10].$$

Olgu aluseks ühtlane võrk $\Delta_n = \{x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$, kus

$$x_i^{(n)} = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{10}{n}.$$

Rakendame meetodit kui sõlmpunktide arv on $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$, ja fiksee- rime kollokatsiooniparameetrid η_1 ja η_2 järgmiselt:

$$\eta_1 = \frac{1}{3}, \quad \eta_2 = \frac{2}{3}.$$

Võrgupunktide $x_i^{(n)}$ ($i = 0, \dots, n$) kaudu defineerime punktid $X_{ij}^{(n)}$, $i = 0, \dots, n-1$; $j = 0, \dots, 10$, järgmiselt:

$$X_{ij}^{(n)} = x_i^{(n)} + \frac{j \cdot (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)})}{10}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad j = 0, \dots, 10.$$

Vea $\max_{t \in [0, 10]} |y_n(t) - y(t)|$ lähendit ϵ_n arvutame järgmiselt:

$$\epsilon_n = \max_{i=0, \dots, n-1} \max_{j=0, \dots, 10} |y(X_{ij}^{(n)}) - y_n(X_{ij}^{(n)})|, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

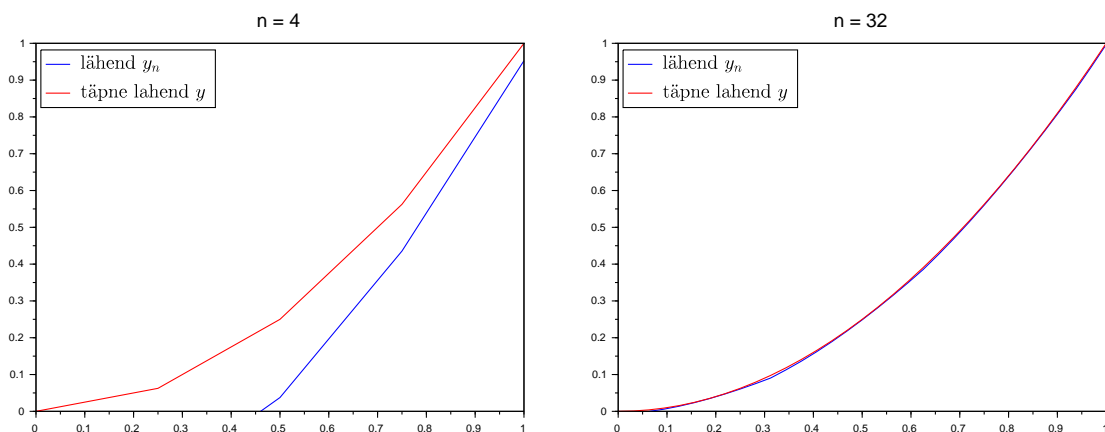
Vea suhted arvutame järgmise valemi abil:

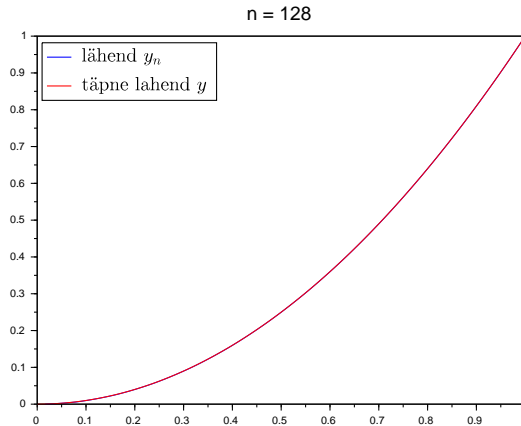
$$S_n = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{2n}}.$$

Järgmine tabel iseloomustab viga erinevate n korral.

n	ϵ_n	S_n
2	1.9763234	4,152
4	0.4759944	4,111
8	0.1157813	4,064
16	0.0284894	4,022
32	0.0070826	3,993
64	0.0017736	3,978
128	0.0004459	

Tabelil näeme, et meetod on suhteliselt kiire koondumisega antud näite korral. Järgmisena toodud graafikud $n = 4, 32, 128$ korral lõigus $[0, 1]$ kinnitavad meetodi koonduvust.





Järgmine näide, millele me rakendame meetodit, pärineb K. Väljako bakalaureusetööst [8].

Näide 7.2. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} {}_C D_0^{2/3} y(t) + t^{1/4} y(t) = t + 5t^{1/4} + \frac{\Gamma(7/4)}{\Gamma(13/12)} t^{1/12}, & t \in [0, 10], \\ y(0) = 5, \end{cases}$$

mille täpne lahend on (vt [8])

$$y(t) = t^{3/4} + 5, \quad t \in [0, 10].$$

Olgu, nagu eelmises näites, ühtlane võrk Δ_n . Rakendame meetodit kui sõlmpunktide arv on $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$, ja fikseerime kollokatsioonipunktid η_1 ja η_2 järgmiselt:

$$\eta_1 = \frac{1}{3}, \quad \eta_2 = \frac{2}{3}.$$

Võrgupunktide $x_i^{(n)}$ ($i = 0, \dots, n$) kaudu defineerime punktid $X_{ij}^{(n)}$, $i = 0, \dots, n-1$; $j = 0, \dots, 10$, analoogiliselt eelmisele näitele, järgmiselt:

$$X_{ij}^{(n)} = x_i^{(n)} + \frac{j \cdot (x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)})}{10}, \quad i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, 10.$$

Samuti analoogiliselt eelmisele näitele arvutame $\max_{t \in [0,10]} |y_n(t) - y(t)|$ lähendit ϵ_n järgmiselt:

$$\epsilon_n = \max_{i=0, \dots, n-1} \max_{j=0, \dots, 10} |y(X_{ij}^{(n)}) - y_n(X_{ij}^{(n)})|, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

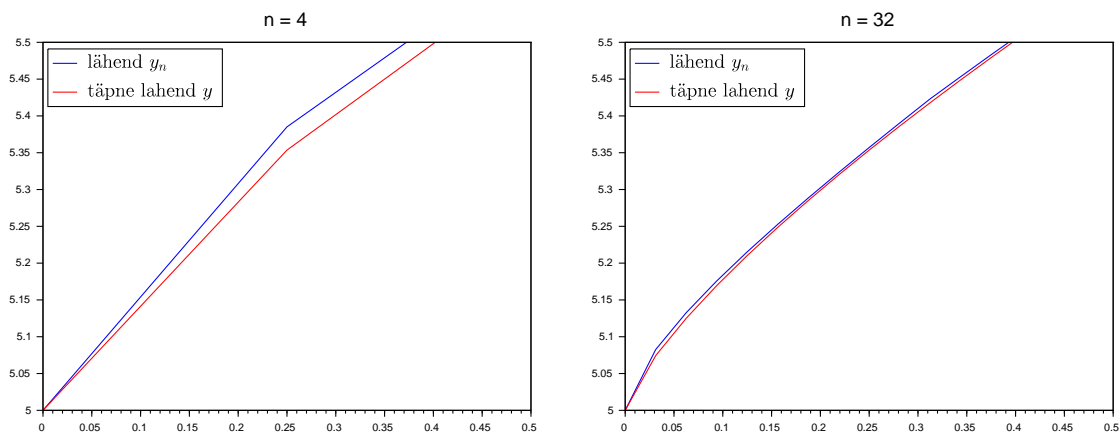
Vea suhted arvutame järgmise valemi abil:

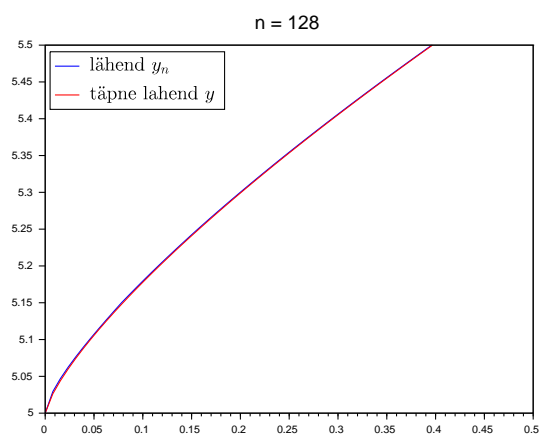
$$S_n = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{2n}}.$$

Järgmine tabel iseloomustab viga erinevate n korral.

n	ϵ_n	S_n
2	0.0473157	1,499
4	0.0315556	1,520
8	0.0207599	1,565
16	0.0132678	1,609
32	0.0082480	1,640
64	0.0050299	1,659
128	0.0030324	

Eelmise näitega võrreldes näeme, et meetod on antud näites aeglasema koonduvusega. Järgmisena esitame arvuti joonestatud graafikud $n = 4, 32, 128$ korral lõigus $[0, 0.5]$.





Graafikud kinnitavad meetodi koonduvust.

Peatükis vaadatud näidete alusel saame järeldada, et töös kirjeldatud meetod koondub.

Kirjandus

- [1] H. Brunner, P. J. van der Houwen, *The Numerical Solution of Volterra Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [2] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Springer, London, 2010.
- [3] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs I. Teine, parandatud ja täiendatud trükk*, Valgus, Tallinn, 1982.
- [4] G. Kangro, *Matemaatiline Analüüs II osa*, Valgus, Tallinn, 1968.
- [5] A. M. Laanemaa, *Laplace'i teisenduse kasutamine diferentsiaalvõrrandite lahendamisel*, Tartu, 2015.
- [6] A. Pedas, E. Tamme, *Spline collocation methods for linear multi-term fractional differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 236, no. 2, pp. 167–176, 2011.
- [7] A. Pedas, G. Vainikko, *Harilikud diferentsiaalvõrrandid: teooria, näiteid, ülesandeid*, Tartu Ülikool, Tartu, 2011.
- [8] K. Väljako, *Murrulised tuletised ja Caputo tuletisega lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine*, Tartu Ülikool, Tartu, ilmumas 2016.

Lisa

Peatükis 7 näidete lahendamisel kasutatud Scilabi programm:

```
clc //kustutab konsoolis oleva
clear //kustutab eelmised andmed
format(10); //mitu komakohta

//-----
//Parameetrid
//-----

//Lõik [0,b]
b=10; //[0,b]
// Alfa-ndat järku Caputo tuletis
a=0.5; //alfa

//sõlmede arv
n=16;

//Kollokatsiooniparameetrid muutmiseks
Eta=zeros(1,2);
Eta(1)=1/3;
Eta(2)=2/3;

//-----
//Näited
//-----

//näide 1
//
//algtingimused y(x0)=y0
x0=0;
y0=0;

a=1/2; //mis järku Caputo tuletis

function f=vaba(x)
    f=x^2+( 2.*( x.^(3/2) ) )/gamma(5/2);
endfunction
```

```

function p=kordaja(x)
    p=1;
endfunction

//lahend
function y=lahend(x)
    y=x.^2;
endfunction

//näide 2

/////algtingimused y(x0)=y0
//x0=0;
//y0=5;
//a=2/3; //mis järku Caputo tuletis
//
//function f=vaba(x)
//    f=x ...
//    +5*(x^(1/4))+(gamma((7/4))*(x^(1/12)))/gamma((13/12));
//endfunction
//
//function p=kordaja(x)
//    p=x^(1/4);
//endfunction
//
/////lahend
//function y=lahend(x)
//    y=x^(3/4)+5;
//endfunction

//-----
//Edasi tuleb splain-kollokatsioonimeetod
//-----

//teoreetiliste arutluste käigus saadud
function g=vabauld(x,a)
    g=vaba(x)-kordaja(x)*y0;
endfunction

```

```

function K=tuum(x,s,a)
    K=(kordaja(x)*(x-s)^(a-1))/(gamma(a));
endfunction

//defineerime võrgu
//Võrgu punktide maatriks
vX=zeros(1,n+1);
r=1 //r>=1, r=1 annab ühtlase võrgu
//Annan ette võrgu
for i=0:n
    vX(i+1)=b*((i/n)^r);
end

//lõikude pikkused:
pikkused=zeros(1,n);
for i=0:1:(n-1)
    pikkused(i+1)=vX(i+2)-vX(i+1);
end

//kollokatsiooniparameetrite kasutamine
X=zeros(2,n); //punktide x_ij maatriks

//määran ära võrgu x_ij
for i=1:2
    for j=1:n
        X(i,j)=vX(j)+Eta(i)*pikkused(j);
    end
end

function f=Lagrange1(x)
    f=(x-Eta(2))/(Eta(1)-Eta(2))
endfunction

function f=Lagrange2(x)
    f=(x-Eta(1))/(Eta(2)-Eta(1))
endfunction

//arvutame natuke teistmoodi varasemast (nagu töös)
A=zeros(2,2);

```

```

B=zeros(2,1);
c=zeros(2*n,1);

//maatriks A
A(1,1)=pikkused(1)*integrate('tuum( X(1,1),...
vX(1)+pikkused(1)*s)*Lagrange1(s)', 's', 0, Eta(1) );
A(1,2)=pikkused(1)*integrate('tuum( X(1,1),...
vX(1)+pikkused(1)*s)*Lagrange2(s)', 's', 0, Eta(1) );
A(2,1)=pikkused(1)*integrate('tuum( X(2,1),...
vX(1)+pikkused(1)*s)*Lagrange1(s)', 's', 0, Eta(2) );
A(2,2)=pikkused(1)*integrate('tuum( X(2,1),...
vX(1)+pikkused(1)*s)*Lagrange2(s)', 's', 0, Eta(2) );
A=A+eye(2,2);
//maatriks B
B(1)=vabauld( X(1,1) );
B(2)=vabauld( X(2,1) );
//maatriks C
C=linsolve(A,-B);
//täidame c
c(1)=C(1);
c(2)=C(2);
//algul lähme ridapidi, siis veerupidi
for r=2:n; //veeru nr on 2v-1
    A=zeros(2,2);
    B=zeros(2,1);
    for v=1:n //rea nr on 2r-1
        if v<r then
            B(1)=B(1)-...
            pikkused(v)*integrate('tuum( X(1,r),...
            vX(v)+pikkused(v)*s)*Lagrange1(s)', 's', ...
            0, 1 )*c(2*v-1);
            B(1)=B(1)-...
            pikkused(v)*integrate('tuum( X(1,r),...
            vX(v)+pikkused(v)*s)*Lagrange2(s)', 's', ...
            0, 1 )*c(2*v);
            B(2)=B(2)-...
            pikkused(v)*integrate('tuum( X(2,r),...
            vX(v)+pikkused(v)*s)*Lagrange1(s)', 's', ...
            0, 1 )*c(2*v-1);
            B(2)=B(2)-...

```

```

        pikkused(v)*integrate('tuum( X(2,r) ,...
        vX(v)+...
        pikkused(v)*s)*Lagrange2(s)', 's', ...
        0 , 1 )*c(2*v);
elseif v==r
    A(1,1)=pikkused(v)*...
    integrate('tuum( X(1,r) ,...
    vX(v)+...
    pikkused(v)*s)*Lagrange1(s)', 's', 0 , Eta(1) );
A(1,2)=pikkused(v)*...
    integrate('tuum( X(1,r) ,...
    vX(v)+...
    pikkused(v)*s)*Lagrange2(s)', 's', 0 , Eta(1) );
A(2,1)=pikkused(v)*...
    integrate('tuum( X(2,r) ,...
    vX(v)+...
    pikkused(v)*s)*Lagrange1(s)', 's', 0 , Eta(2) );
A(2,2)=pikkused(v)*...
    integrate('tuum( X(2,r) ,...
    vX(v)+...
    pikkused(v)*s)*Lagrange2(s)', 's', 0 , Eta(2) );
else ;
end
end
A=A+eye(2,2);
B(1)=B(1)+vabauld( X(1,r) );
B(2)=B(2)+vabauld( X(2,r) );
C=linsolve(A,-B);
c(2*r-1)=C(1);
c(2*r)=C(2);
end

//lähislahend y_n
function y=lahendyn(t)
    y=0;
    //i=0 + 1
    //algul on meil lõigus [x0,x1], seejärel (xi,xi+1]
    if ( vX(1) <= t & t <= vX(2) ) then
        y=0;
        y=y + c(1).*( vX(1).*...

```

```

( ( t-vX(1) ).^ a )./ pikkused(1) +...
( ( ( t-vX(1) ).^(a+1) ) ./...
( (a+1).*pikkused(1) ) ) -...
( vX(1)/pikkused(1) + Eta(2) ).*...
( ( t-vX(1) )^a ) );
y=y - c(2).*( vX(1).*...
( ( t-vX(1) ).^ a )./ pikkused(1) +...
( ( ( t-vX(1) ).^(a+1) ) ./...
( (a+1).*pikkused(1) ) ) - ...
( vX(1)/pikkused(1) +...
Eta(1) ).*( ( t-vX(1) )^a ) );
y=y./( gamma(a+1).*( Eta(1)-Eta(2) ) )...
+ y0;
end
for i=2:n //i=1 + 1 ,... , n-1 + 1, i on juba +1
//kontrollin , mis osahulka (vX(i), vX(i+1)] t kuulub
if ( vX(i) < t & t <=vX(i+1) ) then
y=0; //igaks ju
for j=1:(i-1) //õige
y=y + c(2*j-1).*( vX(j).* ...
( ( t-vX(j) ).^ a )./ pikkused(j) -...
vX(j+1).*( ( t-vX(j+1) ).^ a )./ ...
pikkused(j) + ...
( ( ( t-vX(j) ).^(a+1) -...
(t-vX(j+1)).^(a+1) ) ./ ( (a+1).* ...
pikkused(j) ) ) - ( vX(j)/...
pikkused(j) )...
+ Eta(2) ).*( ( t-vX(j) ).^ a -...
( t-vX(j+1) ).^ a ) );
y=y - c(2*j).*( vX(j).*( (t-vX(j))...
.^ a )....
/pikkused(j) - vX(j+1).*...
( (t-vX(j+1)).^ a )./ ...
pikkused(j) + ( (t-vX(j)).^(a+1) - ...
(t-vX(j+1)).^(a+1) )...
./ ( (a+1).*pikkused(j) )...
- ( vX(j)/pikkused(j) + Eta(1) ).*...
( (t-vX(j)).^ a - (t-vX(j+1)).^ a ) );
end
y=y + c(2*i-1).*( vX(i).*( ( t-vX(i) ) )...

```

```

.^a )./...
pikkused(i) + ( ( ( t-vX(i) ).^(a+1) ) ./ ...
( (a+1).*pikkused(i) ) ) - ( vX(i)/...
pikkused(i) ...
+ Eta(2) ).*( ( t-vX(i) )^a ) );
y=y - c(2*i).*( vX(i).*( ( t-vX(i) ).^a )./...
pikkused(i) + ( ( ( t-vX(i) ).^(a+1) ) ./...
( (a+1).*pikkused(i) ) ) -...
( vX(i)/pikkused(i) + Eta(1) ).*(...
( t-vX(i) ...
)^a ) );
y=y./( gamma(a+1).*( Eta(1)-Eta(2) ) )...
+ y0;
end
end
//kui on väljaspool me lõiku, siis y=0
if t < vX(1) | t > vX(n+1) then
y=0;
end
endfunction

//-----
//Viga ja joonestamine
//-----

Xid=zeros(11,n);
for i=1:n
for j=0:10
Xid(j+1,i)=vX(i)+(j/10)*(vX(i+1)-vX(i));
end
end

//ilusti ühes veerus
for j=1:11
JoonistavadXid(j)=Xid(j,1);
end
for i=2:n
for j=2:11
JoonistavadXid(11+(i-2)*10+(j-1))=Xid(j,i);
end
end

```



```

end

for i=1:length(JoonistavadXid)
    gr(i)=lahendyn( JoonistavadXid(i) );
end

clf;
plot(JoonistavadXid, gr, 'blue');
plot(JoonistavadXid, lahend(JoonistavadXid), 'red');
F=4;
legends(['$\text{lähend} \ y_n$';...
'$\text{täpne lähend} \ y$'],...
[2,5],opt=2,font_size=F); // Graafiku legend
title('n = ' + string(n), 'fontsize',F);

JoonistatavadVead=zeros( length(JoonistavadXid), 1 );
for i=1:length(JoonistavadXid)
    JoonistatavadVead( i, 1 )=lahendyn(...
        JoonistavadXid(i) )...
        - lahend( JoonistavadXid(i) );
end

JoonistatavViga=max( abs(JoonistatavadVead) )

//Vead kollokatsioonipunktides ja sõlmedes
for i=1:n
    //vead kollokatsioonipunktides
    kolvea(2*i-1)=lahendyn(X(1,i))-lahend(X(1,i));
    kolvea(2*i)=lahendyn(X(2,i))-lahend(X(2,i));
    //vead sõlmedes
    solvea(i)=lahendyn(vX(i))-lahend(vX(i));
end
solvea(n)=lahendyn(vX(n))-lahend(vX(n));

kolviga=max( abs(kolvea) ) //viga kollok.
solviga=max( abs(solvea) ) //viga sõlmpunktides

//viga üle kõigi arvutatud veade
viga=max( JoonistatavViga, kolviga, solviga )

```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Margus Lillemäe,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Numbriline meetod Caputo tulelisega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks“, mille juhendaja on Arvet Pedas,
 - 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **12.05.2016**