TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
Matemaatika ja statistika instituut

Moonika Raudvee

Ruutsplainidega kollokatsioonimeetod integraalvõrrandi lahendamiseks

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Arvet Pedas

Tartu 2018

Ruutsplainidega kollokatsioonimeetod integraalvõrrandi lahendamiseks

Bakalaureusetöö

Moonika Raudvee

Lühikokkuvõte. Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse funktsioonide interpoleerimist ruutsplainide abil ning lineaarse teist liiki Fredholmi integraalvõrrandi ligikaudset lahendamist splain-kollokatsioonimeetodiga. Töö eesmärgiks on uurida esitatud meetodi koonduvust ning koonduvuskiirust.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, differentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: splainid, integraalvõrrandid, kollokatsioonimeetod.

Quadratic spline collocation method for solving integral equation

Bachelor's thesis

Moonika Raudvee

Abstract. In the present bachelor's thesis we consider the interpolation by quadratic splines and find an approximate solution for second kind Fredholm integral equation with spline-collocation method. The purpose of this thesis is to study convergence and convergence rate of the proposed algorithm.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key words: spline, integral equation, collocation method.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse lineaarse integraalvõrrandi

$$y(t) = \int_a^b \kappa(t,s)y(s)ds + f(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

ligikaudset lahendamist kollokatsioonimeetodiga, mis tugineb võrrandi lahendi y lähendamisele ühtlasel võrgul antud ruutsplainidega. Tuuma κ ja vabaliikme f kohta eeldatakse, et nad on pidevad funktsioonid vastavalt ruudul $[a,b] \times [a,b]$ ja lõigul $[a,b]$.

Bakalaureusetöö koosneb kolmest osast. Esimeses osas on käsitletud ruutsplaini mõistet ja interpoleeriva ruutsplaini esitamist splaini esimest järku tuletise väärtuste kaudu ning B-splainide abil. Teises osas on käsitletud Fredholmi teist liiki integraalvõrrandi lahendi olemasolu, ühesust ja siledust. Seejärel on tõestatud kollokatsioonimeetodi koonduvus (Teoreem 2.8) ning hinnatud lähislahendite viga, kui tuum κ ja vabaliige f on kolm korda pidevalt diferentseeruvad vastavalt ruudul $[a,b] \times [a,b]$ ja lõigul $[a,b]$ (Teoreem 2.11). Viimases osas on töös vaadeldud meetodit rakendatud konkreetsete integraalvõrrandite ligikaudsel lahendamisel. Arvuliste tulemuste saamiseks on koostatud programm, mis on kirjutatud programmeerimiskeeles R.

1 Ruutsplainid

1.1 Ruutsplaini mõiste

Käesolevas töös tähistame tähega $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude hulka ning tähega $\mathbb{N}$ kõigi naturaalarvude hulka. Olgu $C[a,b]$ kõigi lõigul $[a,b]$ pidevate funktsioonide hulk ning $C^m[a,b]$ $(m \in \mathbb{N})$ kõigi lõigul $[a,b]$ m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk.

Olgu $n \in \mathbb{N}$. Jaotame lõigu $[a,b]$ n osaks punktidega $t_0, t_1, \ldots, t_n$:

$$\Delta_n := \{t_0, t_1, \ldots, t_n \colon \quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}. \tag{1}$$

Jaotust (1) nimetatakse lõigul $[a,b]$ antud *võrguks.*

Definitsioon 1.1. Võrgule Δ_n vastavaks *ruutsplainiks* nimetatakse funktsiooni $s_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1) funktsioon s_2 on igal osalõigul $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ esitatav kujul

$$s_2(t) = c_{0i} + c_{1i}t + c_{2i}t^2, \quad c_{0i}, c_{1i}, c_{2i} \in \mathbb{R}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}];$$

2) funktsioon s_2 on üks kord pidevalt diferentseeruv lõigul $[a,b]$, s.t.

$$s_2 \in C^1[a,b].$$

Võrgu Δ_n punkte $t_0, t_1, ..., t_n$ nimetatakse splaini s_2 *sõlmedeks* ja punkte $t_1, \ldots, t_{n-1}$ nimetatakse splaini s_2 *sisesõlmedeks.*

Olgu $S_2(\Delta_n)$ kõigi võrgule Δ_n vastavate ruutsplainide hulk. Osutub, et $S_2(\Delta_n)$ on vektorruum, mille dimensioon on $n+2$:

$$\dim S_2(\Delta_n) = n + 2.$$

Tõepoolest, kõigepealt kui $s_2^{(1)}, s_2^{(2)} \in S_2(\Delta_n)$ on kaks suvalist splaini ning α ja β suvalised reaalarvud, siis ka $s_2 = \alpha s_2^{(1)} + \beta s_2^{(2)}$ on võrgule Δ_n vastav ruutsplain ja seega $s_2 \in S_2(\Delta_n)$. Tingimuse 1) põhjal on splain s_2 igas osalõigus $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ määratud kolme parameetriga c_{0i}, c_{1i} ja c_{2i}. Osalõike on kokku n, seega on splaini s_2 konstrueerimiseks vaja $3n$ parameetrit. Tingimus 2) seab splainile s_2 igas sisesõlmes 2 lisatingimust nõudega

$$s_2, s_2' \in C[a,b].$$

Sisesõlmede arv on $n-1$, seega saame parameetrite c_{ij} valiku jaoks $2(n-1)$ kitsendust. Niisiis, võrgule Δ_n vastav ruutsplain $s_2 \in S_2(\Delta_n)$ sisaldab üldiselt

$$3n - 2(n-1) = 3n - 2n + 2 = n + 2$$

vaba parameetrit, mis ongi aluseks väitele, et $\dim S_2(\Delta_n) = n + 2$.

Lihtsuse mõttes hakkame järgnevas suvalise võrgu Δ_n asemel kasutama ühtlast võrku Δ_h:

$$\Delta_h := \{t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n\}, \tag{2}$$

kus

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.2 Interpoleeriv ruutsplain

Olgu $y \in C[a,b]$ antud funktsioon. Olgu lõigul $[a,b]$ antud ühtlane võrk (2) ning olgu s_2 võrgule Δ_h vastav ruutsplain, mis rahuldab tingimusi

$$s_2(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{3}$$

kus

$$\begin{aligned} x_0 &= t_0 = a, \\ x_i &= t_{i-1} + \frac{h}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ x_{n+1} &= t_n = b \end{aligned} \tag{4}$$

ja

$$y_i = y(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Interpolatsioonitingimusi (3) rahuldavaid ruutsplaine s_2 nimetatakse *interpoleerivateks splainideks.*

Näitame, et splain $s_2 \in S_2(\Delta_h)$ on interpolatsioonitingimustega (3) üheselt määratud.

Tähistame

$$m_i = s_2'(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Siis võib splaini $s_2 \in S_2(\Delta_h)$ igal osalõigul $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ esitada kujul

$$s_2(t) = y_{i+1} + \left[\frac{h}{8} - \frac{(t_{i+1}-t)^2}{2h}\right] m_i + \left[\frac{(t-t_i)^2}{2h} - \frac{h}{8}\right] m_{i+1}, \quad t_i \le t \le t_{i+1}, \tag{6}$$

kus $y_i = y(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ on antud suurused ning m_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ on otsitavad.

Definitsioonist 1.1 järeldub, et ruutsplaini tuletis on igal osalõigul $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ lineaarne funktsioon. Tähistuse (5) tõttu võime seega splaini $s_2 \in S_2(\Delta_h)$ tuletise $s_2'(t)$ iga $t \in [t_i, t_{i+1}]$ korral esitada kujul

$$s_2'(t) = \frac{t_{i+1} - t}{h} m_i + \frac{t - t_i}{h} m_{i+1}. \tag{7}$$

Võrduse (7) integreerimisel saame

$$\int_{t_i}^{t} s_2'(p) dp = \int_{t_i}^{t} \left(\frac{p_{i+1} - p}{h} m_i + \frac{p - p_i}{h} m_{i+1} \right) dp$$

ehk

$$s_2(t) = s_2(t_i) - \frac{(t_{i+1} - t)^2}{2h} m_i + \frac{(t - t_i)^2}{2h} m_{i+1} + \frac{h}{2} m_i, \tag{8}$$

kus $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Võtame võrduses (8) muutuja t väärtuseks $t = x_{i+1} = t_i + \frac{h}{2}$. Siis saame

$$s_2(x_{i+1}) = s_2(t_i) - \frac{(t_{i+1} - x_{i+1})^2}{2h} m_i + \frac{(x_{i+1} - t_i)^2}{2h} m_{i+1} + \frac{h}{2} m_i$$

ehk

$$y_{i+1} = s_2(t_i) - \frac{h}{8} m_i + \frac{h}{8} m_{i+1} + \frac{h}{2} m_i,$$

millest järeldub, et

$$s_2(t_i) = y_{i+1} - \frac{3h}{8} m_i - \frac{h}{8} m_{i+1}.$$

Asendades $s_2(t_i)$ võrdusesse (8), saame

$$s_2(t) = y_{i+1} - \frac{3h}{8} m_i - \frac{h}{8} m_{i+1} - \frac{(t_{i+1} - t)^2}{2h} m_i + \frac{(t - t_i)^2}{2h} m_{i+1} + \frac{h}{2} m_i$$

ehk

$$s_2(t) = y_{i+1} + \left[-\frac{3h}{8} - \frac{(t_{i+1} - t)^2}{2h} + \frac{h}{2} \right] m_i + \left[\frac{(t - t_i)^2}{2h} - \frac{h}{8} \right] m_{i+1}$$

ehk

$$s_2(t) = y_{i+1} + \left[\frac{h}{8} - \frac{(t_{i+1} - t)^2}{2h} \right] m_i + \left[\frac{(t - t_i)^2}{2h} - \frac{h}{8} \right] m_{i+1},$$

mis ongi võrdus kujul (6).

Selleks, et splain s_2 kujul (6) oleks pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, b]$, peab iga $i = 1, 2, \ldots, n-1$ korral kehtima

$$\lim_{t \to t_i +} s_2(t) = \lim_{t \to t_i -} s_2(t) \tag{9}$$

ja

$$\lim_{t\to t_i+} s_2'(t) = \lim_{t\to t_i-} s_2'(t), \quad i = 1,2,\dots,n-1.$$

Kui viimane võrdus on esituse (6) puhul iga $i = 1,2,\dots,n-1$ korral automaatselt täidetud, siis võrduse (9) kehtivust tuleb esituselt (6) eraldi nõuda.

Kõigepealt paneme tähele, et võrdusest (6) saame

$$\lim_{t\to t_i+} s_2(t) = y_{i+1} - \frac{3h}{8}m_i - \frac{h}{8}m_{i+1}, \quad i = 1,2,\dots,n-1.$$

Seejärel kirjutame esituse (6) osalõigu $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1,2,\dots,n)$ jaoks:

$$s_2(t) = y_i + \left[\frac{h}{8} - \frac{(t_i - t)^2}{2h}\right] m_{i-1} + \left[\frac{(t - t_{i-1})^2}{2h} - \frac{h}{8}\right] m_i, \quad t_{i-1} \le t \le t_i. \tag{10}$$

Võrdusest (10) saame

$$\lim_{t\to t_i-} s_2(t) = y_i + \frac{h}{8}m_{i-1} + \frac{3h}{8}m_i, \quad i = 1,2,\dots,n-1.$$

Seega võrdus (9) kehtib, kui

$$y_i + \frac{h}{8}m_{i-1} + \frac{3h}{8}m_i = y_{i+1} - \frac{3h}{8}m_i - \frac{h}{8}m_{i+1}, \quad i = 1,2,\dots,n-1.$$

Selle tulemusena saame $n-1$ võrrandit $n+1$ tundmatu $m_0, m_1, \dots, m_n$ suhtes:

$$\frac{1}{8}m_{i-1} + \frac{3}{4}m_i + \frac{1}{8}m_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad i = 1,2,\dots,n-1. \tag{11}$$

Tingimuste $s_2(x_0) = y_0$ ja $s_2(x_{n+1}) = y_{n+1}$ tõttu saame leida võrranditele (11) kaks võrrandit lisaks.

Tõepoolest, tingimusest $s_2(x_0) = y_0$ tuleneb

$$\begin{aligned} y_0 &= y_1 + \left[\frac{h}{8} - \frac{(t_1 - x_0)^2}{2h}\right] m_0 + \left[\frac{(x_0 - t_0)^2}{2h} - \frac{h}{8}\right] m_1 \\ &= y_1 + \left[\frac{h}{8} - \frac{h}{2}\right] m_0 - \frac{h}{8}m_1 \\ &= y_1 - \frac{3h}{8}m_0 - \frac{h}{8}m_1 \end{aligned}$$

ehk

$$\frac{3}{8}m_0 + \frac{1}{8}m_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \tag{12}$$

kus $y_0 = y(x_0),\ y_1 = y(x_1)$.

Tingimusest $s_2(x_{n+1}) = y_{n+1}$ tuleneb

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \left[\frac{h}{8} - \frac{(t_n - x_{n+1})^2}{2h}\right] m_{n-1} + \left[\frac{(x_{n+1} - t_{n-1})^2}{2h} - \frac{h}{8}\right] m_n \\ &= y_n + \frac{h}{8} m_{n-1} + \left[\frac{h}{2} - \frac{h}{8}\right] m_n \\ &= y_n + \frac{h}{8} m_{n-1} + \frac{3h}{8} m_n \end{aligned}$$

ehk

$$\frac{1}{8} m_{n-1} + \frac{3}{8} m_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}, \tag{13}$$

kus $y_n = y(x_n)$ ja $y_{n+1} = y(x_{n+1})$.

Võrrandisüsteemi (11), (12), (13) võime kirja panna maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ \dots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1 - y_0}{h} \\ \frac{y_2 - y_1}{h} \\ \frac{y_3 - y_2}{h} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \end{pmatrix} \tag{14}$$

ehk

$$\mathbf{A}\vec{m} = \vec{g},$$

kus

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_n \end{pmatrix}, \ \vec{g} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}, \ g_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \ i = 0, 1, \dots, n$$

.

ja

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Võrrandisüsteemi (14) maatriksi $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=0}^{n}$ elemendid rahuldavad tingimust

$$q := \min_{i=0,\ldots,n} \left(|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}} |a_{ij}| \right) = \frac{1}{4} > 0.$$

Seega $\mathbf{A}$ on domineeriva peadiagonaaliga maatriks, võrrandisüsteem (14) on üheselt lahenduv ja tema lahendi $m_0, m_1, \ldots, m_n$ jaoks kehtib hinnang (vt. [5], lk 333)

$$\max_{0\leq i\leq n} |m_i| \leq \frac{1}{q} \max_{0\leq i\leq n} |g_i|$$

ehk

$$\max_{0\leq i\leq n} |m_i| \leq \frac{4}{h} \max_{0\leq i\leq n} |y_{i+1} - y_i| \,. \tag{15}$$

Kuna võrrandisüsteemi (14) lahend $m_0, m_1, \ldots, m_n$ on üheselt määratud, siis on üheselt määratud ka suuruseid $m_0, m_1, \ldots, m_n$ sisaldav splain $s_2 \in S_2(\Delta_h)$ kujul (6).

Kontrollime, et saadud splaini s_2 korral tõepoolest kehtivad interpolatsioonitingimused (3).

Kõigepealt näeme, et esituse (6) korral $s_2(x_{i+1}) = y_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned}
s_2(x_{i+1}) &= y_{i+1} + \left[\frac{h}{8} - \frac{(t_{i+1} - x_{i+1})^2}{2h}\right] m_i + \left[\frac{(x_{i+1} - t_i)^2}{2h} - \frac{h}{8}\right] m_{i+1} \\
&= y_{i+1} + \left[\frac{h}{8} - \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2h}\right] m_i + \left[\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2h} - \frac{h}{8}\right] m_{i+1} \\
&= y_{i+1} + \left[\frac{h}{8} - \frac{h}{8}\right] m_i + \left[\frac{h}{8} - \frac{h}{8}\right] m_{i+1} \\
&= y_{i+1}.
\end{aligned}$$

Veel näeme, et $s_2(x_0) = y_0 = a$. Tõepoolest, võttes esituses (6) $t = x_0 = t_0 = a$, saame

$$\begin{aligned}
s_2(x_0) &= y_1 + \left[\frac{h}{8} - \frac{(t_1 - x_0)^2}{2h}\right] m_0 + \left[\frac{(x_0 - t_0)^2)}{2h} - \frac{h}{8}\right] m_1 \\
&= y_1 - \frac{3h}{8} m_0 - \frac{h}{8} m_1
\end{aligned}$$

Asendades saadud seosesse suuruse y_1 võrduse (12) abil, leiame

$$s_2(x_0) = \frac{3h}{8} m_0 + \frac{h}{8} + y_0 - \frac{3h}{8} m_0 - \frac{h}{8} m_1 = y_0.$$

Analoogiliselt saame, et $s_2(x_{n+1}) = y_{n+1}$. Võttes esituses (10) $t = x_{n+1} = t_n = b$, leiame

$$\begin{aligned} s_2(x_{n+1}) &= y_n + \left[\frac{h}{8} - \frac{(t_n - x_{n+1})^2}{2h}\right] m_{n-1} + \left[\frac{(t_n - t_{n-1})^2)}{2h} - \frac{h}{8}\right] m_n \\ &= y_n + \frac{h}{8} m_{n-1} + \frac{3h}{8} m_n \end{aligned}$$

Asendades siin suuruse y_n võrduse (13) abil, saame

$$s_2(x_{n+1}) = -\frac{h}{8} m_{n-1} - \frac{3h}{8} m_n + y_{n+1} + \frac{h}{8} m_{n-1} + \frac{3h}{8} m_n = y_{n+1}.$$

Järgnevas punktis kasutame ruutsplaini $s_2 \in S_2(\Delta_h)$ esitamiseks baassplaine.

1.3 Ruutsplainide esitus baassplainide kaudu

Valides ruumis $S_2(\Delta_h)$ baasi, s.t. mingid $n+2$ splaini $B_{2,0}, B_{2,1}, \ldots, B_{2,n+1} \in S_2(\Delta_h)$, mis on lineaarselt sõltumatud lõigul $[a, b]$, saame iga $S_2(\Delta_h)$ elemendi s_2 esitada baassplainide lineaarse kombinatsioonina:

$$s_2(t) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i B_{2,i}(t), \quad t \in [a, b],$$

kus c_i $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ on konstandid. Rakendustes kasutatakse ruumi $S_2(\Delta_h)$ baassplainidena sageli nn B-splaine $B_{2,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$, mis on defineeritud (vt. näiteks [2],[5]) järgmiselt:

$$B_{2,i}(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_{i-2})^2}{(t_i-t_{i-2})(t_{i-1}-t_{i-2})}, & t \in [t_{i-2}, t_{i-1}); \\ \frac{(t-t_{i-2})(t_i-t)}{(t_i-t_{i-2})(t_i-t_{i-1})} + \frac{(t_{i+1}-t)(t-t_{i-1})}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_i-t_{i-1})}, & t \in [t_{i-1}, t_i); \\ \frac{(t_{i+1}-t)^2}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)}, & t \in [t_i, t_{i+1}); \\ 0, & \text{mujal,} \end{cases} \tag{16}$$

kus $t_{-2} = t_{-1} = t_0$, $t_{n+2} = t_{n+1} = t_n$; kui $i = n+1$, siis

$$B_{2,n+1}(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_{n-1})^2}{(t_n-t_{n-1})^2}, & t \in [t_{n-1}, t_n]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases} \tag{17}$$

2 Kollokatsioonimeetod

2.1 Fredholmi teist liiki integraalvõrrandi lahendi olemasolu, ühesus ja siledus

Vaatleme integraalvõrrandit

$$y(t) = f(t) + \int_a^b \kappa(t,s)y(s)ds, \quad t \in [a,b], \tag{18}$$

kus f ja κ on antud funktsioonid ja y on otsitav. Seda võrrandit nimetatakse *Fredholmi teist liiki integraalvõrrandiks.* Funktsiooni κ nimetatakse integraalvõrrandi (18) *tuumaks* ning funktsiooni f *vabaliikmeks.* Võrrandi (18) lahendi olemasolu ja ühesus on kirjeldatav järgmise teoreemiga (mis järeldub punktis 2.4 tõestatavast Teoreemist 2.8).

Teoreem 2.1. *Olgu tuum κ pidev ruudul $[a,b] \times [a,b]$ ja vabaliige f pidev lõigul $[a,b]$. Olgu võrrandile* (18) *vastaval homogeensel võrrandil*

$$y(t) = \int_a^b \kappa(t,s)y(s)ds \quad (t \in [a,b]) \tag{19}$$

olemas ainult triviaalne lahend $y = 0$.

Siis võrrand (18) *on üheselt lahenduv ja tema lahend y on pidev funktsioon lõigul $[a,b]$: $y \in C[a,b]$.*

Võrrandi (18) lahendi diferentseeruvuse kohta kehtib järgmine tulemus (mis on saadav võrrandi (19) vasaku ja parema poole järjestiku duferentseerimise teel).

Teoreem 2.2. *Eeldame, et $\kappa \in C^m([a,b] \times [a,b])$ ja $f \in C^m[a,b]$, kus $m \in \mathbb{N}$. Olgu võrrandile* (18) *vastaval homogeensel võrrandil* (19) *olemas vaid triviaalne lahend.*

Siis võrrandi (18) *lahend y on m korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a,b]$: $y \in C^m[a,b]$.*

2.2 Kollokatsioonimeetod

Vaatleme integraalvõrrandit (18), s.t. integraalvõrrandit kujul

$$y(t) = \int_a^b \kappa(t,s)y(s)ds + f(t), \quad a \le t \le b$$

kus tuum κ on pidev ruudul $[a,b] \times [a,b]$ ja vabaliige f pidev lõigul $[a,b]$.

Olgu lõigul $[a, b]$ antud ühtlane võrk Δ_h ja olgu sellele võrgule vastavad baasssplainid esitatud kujul $\{(16), (17)\}$. Integraalvõrrandi (18) lähislahendit $y_n \in S_2(\Delta_h)$ otsime kujul

$$y_n(t) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j B_{2,j}(t), \quad t \in [a, b], \tag{20}$$

kus c_j $(j = 0, 1, \ldots, n + 1)$ on konstandid, mis tuleb määrata. Konstantide määramiseks nõuame, et integraalvõrrand (18) on rahuldatud interpolatsioonipunktides x_i $(i = 0, 1, \ldots, n + 1)$:

$$y_n(x_i) = \int_a^b \kappa(x_i, s) y_n(s) ds + f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n + 1, \tag{21}$$

kus $x_0 = t_0 = a,\ x_i = t_{i-1} + \frac{h}{2}\ (i = 1, 2, \ldots, n),\ x_{n+1} = t_n = b.$

Esituse (20) tõttu võtavad tingimused (21) kuju

$$\sum_{j=0}^{n+1} c_j B_{2,j}(x_i) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j \left[\int_a^b \kappa(x_i, s) B_{2,j}(s) ds \right] + f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n + 1$$

ehk

$$\sum_{j=0}^{n+1} \left[B_{2,j}(x_i) - \int_{t_{j-2}}^{t_{j+1}} \kappa(x_i, s) B_{2,j}(s) ds \right] c_j = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n + 1, \tag{22}$$

kus $t_{-2} = t_{-1} = t_0,\ t_{n+2} = t_{n+1} = t_n,\ t_i \in \Delta_h,\ i = 0, \ldots, n.$

Võrdused (22) kujutavad lineaarset algebralist võrrandisüsteemi suuruste $c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}$ suhtes.

2.3 Galjorkini meetodi koonduvusteoreem

Olgu E Banachi ruum. Olgu $f \in E$ ja $K \colon E \to E$ pidev lineaarne operaator. Vaatleme operaatorvõrrandeid kujul

$$y = Ky + f \tag{23}$$

ja

$$y_n = P_n K y_n + P_n f \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{24}$$

kus $P_n \colon E \to E$ on projektorid s.t. pidevad lineaarsed operaatorid omadusega $P_n^2 = P_n$.

Teoreem 2.3. *Olgu K lineaarne täielikult pidev operaator Banachi ruumis E. Homogeensel võrrandil $v = Kv$ olgu vaid null-lahend $v = 0$. Projektorid P_n $(n \in \mathbb{N})$ koondugu $n \to \infty$ korral punktiviisi ühikoperaatoriks:*

$$P_n y \to y, \qquad n \to \infty,$$

s.t. iga $y \in E$ korral $\|P_n y - y\| \to 0$, kui $n \to \infty$. Siis võrrand (23) on iga $f \in E$ korral üheselt lahenduv ja leidub selline n_0, et $n \geq n_0$ korral on ka võrrandid (24) üheselt lahenduvad. Võrrandite (24) lahendid y_n koonduvad $n \to \infty$ korral võrrandi (23) lahendiks y ning kehtib veahinnang

$$\|y_n - y\|_E \leq c\|y - P_n y\|_E\,, \quad n \geq n_0, \tag{25}$$

kus konstant c ei sõltu arvust n ega vabaliikmest f.

Teoreemi 2.3 tõestuse võib leida raamatust [4], lk 59.

2.4 Kollokatsioonimeetodi koonduvus

Olgu antud ühtlane võrk Δ_h. Olgu P_n operaator ruumist $C[a,b]$ ruumi $C[a,b]$, mis igale pidevale funktsioonile $y \in C[a,b]$ seab vastavusse funktsiooni $P_n y \in S_2(\Delta_h) \subset C[a,b]$ ja rahuldab tingimusi

$$(P_n y)(x_i) = y(x_i) \quad i = 0, 1, \ldots, n+1. \tag{26}$$

Punktis 1.2 nägime, et $s_2 = P_n y \in S_2(\Delta_h)$ on tingimustega (26) üheselt määratud.

Olgu E ja F Banachi ruumid, siis $\mathcal{L}(E,F)$ all mõistame kõigi pidevate lineaarsete operaatorite $A\colon E \to F$ ruumi normiga $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\{\|A_e\|_F : e \in E, \|e\|_E = 1\}$.

Järgnev lemma kirjeldab operaatori P_n põhiomadusi.

Lemma 2.4. *Operaator $P_n : C[a,b] \to C[a,b]$, mis igale funktsioonile $y \in C[a,b]$ seab vastavusse funktsiooni $P_n y \in S_2(\Delta_h)$ ja rahuldab tingimusi (26), on lineaarne ja tõkestatud operaator omadustega $P_n^2 = P_n$ ning*

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b],C[a,b])} \leq 11. \tag{27}$$

Tõestus. Interpolatsioonitingimuste (26) lineaarsuse tõttu on operaator P_n lineaarne. Kuna funktsioon $s_2 = P_n y \in S_2(\Delta_h) \subset C[a,b]$ on iga $y \in C[a,b]$ korral tingimustega (26) üheselt määratud, siis $P_n^2 = P_n$.

Kasutades esitust (6) ja võrratust (15), saame iga $t \in [t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ korral funktsiooni $(P_n y)(t)$ hinnata järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
\big|(P_n y)(t)\big| &\le |y_{i+1}| + \left|\frac{h}{8} - \frac{(t_{i+1}-t)^2}{2h}\right| \cdot |m_i| + \left|\frac{(t-t_i)^2}{2h} - \frac{h}{8}\right| \cdot |m_{i+1}| \\
&\le \|y\|_{C[a,b]} + \left[\frac{h}{8} + \frac{(t_{i+1}-t)^2}{2h} + \frac{(t-t_i)^2}{2h} + \frac{h}{8}\right] \cdot \max_{0\le i\le n} |m_i| \\
&\le \|y\|_{C[a,b]} + \left[\frac{h}{8} + \frac{h}{2} + \frac{h}{2} + \frac{h}{8}\right] \cdot \max_{0\le i\le n} |m_i| \\
&\le \|y\|_{C[a,b]} + \frac{5}{4} h \cdot \max_{0\le i\le n} |m_i| \\
&\le \|y\|_{C[a,b]} + \frac{5}{4} h \cdot 4 \max_{0\le i\le n} \left|\frac{y_{i+1}-y_i}{h}\right| \\
&= \|y\|_{C[a,b]} + 5h \cdot \max_{0\le i\le n} \left|\frac{y_{i+1}-y_i}{h}\right|.
\end{aligned}
$$

Kuna

$$
\max_{0\le i\le n} \left|\frac{y_{i+1}-y_i}{h}\right| \le \frac{2\|y\|_{C[a,b]}}{h},
$$

siis iga $t \in [t_i, t_{i+1}]$ korral

$$
\big|(P_n y)(t)\big| \le \|y\|_{C[a,b]} + 10\|y\|_{C[a,b]} = 11\|y\|_{C[a,b]}\,.
$$

Seega

$$
\|P_n y\|_{C[a,b]} \le 11\|y\|_{C[a,b]}\,,
$$

millest järeldub hinnang (27). □

Formuleerime nüüd kaks tulemust (vt. vastavalt [3], lk 135 ja [3], lk 223) funktsionaalanalüüsi kursusest, mida läheb vaja järgnevates tõestustes.

Teoreem 2.5 (**Banach-Steinhausi teoreem**). *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning E põhihulk ruumis X. Jada $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ koondub punktiviisi operaatoriks $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:*

1) $\exists M \in \mathbb{R},\ \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le M\ \forall n \in \mathbb{N}$,

2) $A_n x \to Ax,\ \forall X \in E$.

Teoreem 2.6. *Olgu X Banachi ruum ja olgu $T \in \mathcal{L}(X,X)$ kompaktne operaator. Võrrand $x = Tx + f$ on iga $f \in X$ korral lahenduv parajasti siis, kui homogeensel võrrandil $x = Tx$ on ainult triviaalne lahend. Sel juhul on võrrand $x = Tx + f$ iga $f \in X$ korral üheselt lahenduv.*

Lemma 2.7. *Rahuldagu operaator* P_n $(n \in \mathbb{N})$ *Lemma 2.4 tingimusi. Siis iga* $y \in C[a,b]$ *korral*

$$\|y - P_n y\|_{C[a,b]} \to 0, \text{ kui } n \to \infty. \tag{28}$$

Tõestus. Lemma 2.4 kohaselt $\|P_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b],C[a,b])} \leq 11$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Koondumine (28) järeldub vahetult Banach-Steinhausi teoreemist 2.5. □

Teoreem 2.8. *Eeldame, et võrrandi* (18) *tuum* $\kappa \in C([a,b] \times [a,b])$ *ja vabaliige* $f \in C[a,b]$. *Olgu võrrandile* (18) *vastaval homogeensel võrrandil*

$$y(t) = \int_a^b \kappa(t,s)y(s)ds \quad (t \in [a,b])$$

olemas ainult triviaalne lahend $y = 0$. *Olgu kasutusel ühtlane võrk* (2) *ja interpolatsioonipunktid* (4).

Siis võrrand (18) *on üheselt lahenduv ja tema lahend* $y \in C[a,b]$. *Leidub selline* n_0, *et* $n \geq n_0$ *korral kollokatsioonitingimused* (21) *määravad üheselt lahendi* y *lähislahendi* y_n *kujul* (20) *ning leiab aset koondumine*

$$\|y_n - y\|_{C[a,b]} \to 0, \text{ kui } n \to \infty. \tag{29}$$

Tõestus. Olgu $E = C[a,b]$ lõigul $[a,b]$ määratud pidevate funktsioonide z ruum normiga $\|z\| = \max_{a \leq t \leq b} |z(t)|$. Kirjutame võrrandi (18) operaatorkujul

$$y = Ky + f, \tag{30}$$

kus $f \in C[a,b]$ ja $K\colon C[a,b] \to C[a,b]$ on integraaloperaator, mis on defineeritud võrdusega

$$(Ky)(t) = \int_a^b \kappa(t,s)y(s)ds.$$

Operaator $K \in \mathcal{L}(C[a,b], C[a,b])$ on kompaktne (vt. [3], lk 125). Kuna võrrandil $y = Ky$ on olemas ainult triviaalne lahend $y = 0$, siis Teoreemi 2.6 põhjal on võrrand (30) üheselt lahenduv ja tema lahend $y \in C[a,b]$.

Paneme tähele, et $P_n y(t) = 0$ iga $t \in [a,b]$ korral parajasti siis, kui $y(x_i) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$, seega kollokatsioonitingimused (21) on kirjutatavad kujul

$$y_n = P_n K y_n + P_n f, \tag{31}$$

kus $P_n\colon C[a,b] \to C[a,b]$ on punktis 2.4 defineeritud interpolatsiooniprojektor. Koondumine (28) ütleb, et projektorid P_n $(n \in \mathbb{N})$ koonduvad $n \to \infty$ korral punktiviisi ühikoperaatoriks.

Teoreemi 2.3 kohaselt leidub selline n_0, et $n \geq n_0$ korral on võrrand (31) üheselt lahenduv ja kehtib veahinnang (25):

$$\|y_n - y\|_{C[a,b]} \leq c\|y - P_n y\|_{C[a,b]}\,, \quad n \geq n_0,$$

kus $y \in C[a,b]$ on integraalvõrrandi (18) lahend. Rakendades Lemmat 2.7 saame koonduvuse (29). □

2.5 Veahinnang

Kollokatsioonimeetodil (21) saadud integraalvõrrandi (18) lähislahendi y_n vea hindamiseks esitame kõigepealt järgmise tulemuse, vt. [1], [2].

Lemma 2.9. *Olgu $Q_n\colon C[a,b] \to C[a,b]$ operaator, mis igale funktsioonile $y \in C[a,b]$ seab vastavusse funktsiooni $Q_n y$, mis on defineeritud valemiga*

$$Q_n y = \sum_{i=0}^{n+1} \left[-\frac{1}{2} y(t_{i-1}) + 2y\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right) - \frac{1}{2} y(t_i) \right] B_{2,i},$$

kus $t_{-1} = t_0,\ t_{n+1} = t_n,\ t_i \in \Delta_h\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ ja baassplainid $B_{2,i}$ on defineeritud valemitega $\{(16), (17)\}$. Siis iga osalõigu $[t_i, t_{i+1}],\ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ korral

$$\|y - Q_n y\|_{C[t_i, t_{i+1}]} \leq 4 dist_{[t_{i-1}, t_{i+2}]}(y, \pi_2), \tag{32}$$

kus

$$dist_{[u,v]}(y, \pi_2) = \inf_{p \in \pi_2} \|y - p\|_{C[u,v]}$$

ja π_2 on ruutpolünoomide hulk.

Lemmade 2.4 ja 2.9 abil saab tõestada järgmise teoreemi.

Teoreem 2.10. *Olgu $P_n\colon C[a,b] \to S_2(\Delta_h)$ $(n \in \mathbb{N})$ interpolatsioonioperaator, mis rahuldab tingimusi (26). Siis iga $y \in C^3[a,b]$ korral*

$$\|y - P_n y\|_{C[a,b]} \leq 64 \left\|y'''\right\|_{C[a,b]} \cdot h^3, \tag{33}$$

kus $h = \frac{b-a}{n}$.

Tõestus. Olgu $y \in C^3[a,b]$ antud. Siis Lemmade 2.4 ja 2.9 põhjal

$$\begin{aligned}
\|y - P_n y\|_{C[a,b]} &= \|y - Q_n y + Q_n y - P_n y\|_{C[a,b]} \\
&\leq \|y - Q_n y\|_{C[a,b]} + \|Q_n y - P_n y\|_{C[a,b]} \\
&= \|y - Q_n y\|_{C[a,b]} + \left\|P_n(y - Q_n y)\right\|_{C[a,b]} \\
&= \|y - Q_n y\|_{C[a,b]} + \|P_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b],C[a,b])} \cdot \|y - Q_n y\|_{C[a,b]} \\
&\leq \|y - Q_n y\|_{C[a,b]} \left(1 + \|P_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b],C[a,b])}\right) \\
&\leq 12\|y - Q_n y\|_{C[a,b]} .
\end{aligned} \tag{34}$$

Järgnevas hindame normi $\|y - Q_n y\|$.

Olgu $t \in [t_{i-1}, t_{i+2}]$, kus $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ja $t_{-1} = t_0,\ t_{n+1} = t_n$. Vaatleme Taylori valemit funktsiooni y jaoks punktis $w_i = \frac{t_{i-1}+t_{i+2}}{2}$ jääkliikmega Lagrange'i kujul:

$$y(t) = T_{2,i}(t) + \frac{y'''(\xi)}{6}(t - w_i)^3,$$

kus $\xi \in [w_i, t]$ ja

$$T_{2,i}(t) = y(w_i) + y'(w_i)(t - w_i) + \frac{y''(w_i)}{2}(t - w_i)^2.$$

Kuna $T_{2,i}$ on ruutpolünoom, siis saame

$$dist_{[t_{i-1},t_{i+2}]}(y, \pi_2) \leq \left\|y - T_{2,i}\right\|_{C[t_{i-1},t_{i+2}]} .$$

Hinnangu (32) tõttu

$$\|y - Q_n y\|_{C[t_i,t_{i+1}]} \leq 4\left\|y - T_{2,i}\right\|_{C[t_{i-1},t_{i+2}]} , \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{35}$$

Järgnevalt hindame viga $\left\|y - T_{2,i}\right\|_{C[t_{i-1},t_{i+2}]}$.

Olgu $t \in [t_{i-1}, w_i],\ i = 0, 1, \ldots, n-1$. Kuna $y \in C^3[a,b]$, siis

$$\begin{aligned}
\left|y(t) - T_{2,i}(t)\right| &= \left|\frac{y'''(\xi)}{6}(t - w_i)^3\right| \\
&\leq \frac{1}{6}\left|(t - w_i)^3\right| \left\|y'''\right\|_{C[a,b]} \\
&\leq \frac{(2h)^3}{6}\left\|y'''\right\|_{C[a,b]} \\
&= \frac{4}{3}h^3\left\|y'''\right\|_{C[a,b]} .
\end{aligned}$$

Analoogiliselt saame $t \in [w_i, t_{i+2}],\ i = 0, 1, \ldots, n-1$ korral hinnata

$$\left\|y - T_{2,i}\right\|_{C[t_{i-1},t_{i+2}]} \leq \frac{4}{3}h^3\left\|y'''\right\|_{C[a,b]}$$

ja hinnangu (35) kohaselt saame $i = 0, 1, \ldots, n-1$ korral

$$\|y - Q_n y\|_{C[t_i, t_{i+1}]} \leq \frac{16}{3} h^3 \|y'''\|_{C[a,b]},$$

millest järeldub, et

$$\|y - Q_n y\|_{C[a,b]} \leq \frac{16}{3} h^3 \|y'''\|_{C[a,b]}. \tag{36}$$

Nüüd, kasutades hinnanguid (34) ja (36), saame hinnangu (33):

$$\begin{aligned} \|y - P_n y\|_{C[a,b]} &\leq 12 \|y - Q_n y\|_{C[a,b]} \\ &\leq 12 \cdot \frac{16}{3} h^3 \|y'''\|_{C[a,b]} \\ &= 64 h^3 \|y'''\|_{C[a,b]}. \end{aligned}$$

□

Järgnevalt hindame kollokatsioonimeetodi (21) abil saadud võrrandi (18) lähislahendi y_n viga.

Teoreem 2.11. *Olgu $\kappa \in C^3([a,b] \times [a,b])$ ja $f \in C^3[a,b]$. Olgu võrrandile* (18) *vastaval homogeensel võrrandil* (19) *olemas vaid triviaalne lahend. Siis leidub $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $n \geq n_0$ korral kehtib hinnang*

$$\|y_n - y\|_{C[a,b]} \leq c \cdot h^3, \tag{37}$$

kus $h = \frac{b-a}{n}$, y on võrrandi (18) *lahend ja y_n on lahendi y lähislahend, mis on saadud kollokatsioonimeetodil* (21) *ning c on positiivne konstant, mis ei sõltu parameetrist n.*

Tõestus. Teoreemi 2.2 kohaselt kuulub võrrandi (18) lahend y ruumi $C^3[a,b]$. Kui n on küllalt suur ($n \geq n_0$), siis Teoreemi 2.8 kohaselt on kollokatsioonitingimustest (21) tulenev operaatorvõrrand (31) üheselt lahenduv ja kehtib hinnang (25), kus y on integraalvõrrandi (18) lahend ja y_n on võrrandi (31) lahend. Rakendades Teoreemi 2.10 saame hinnangu (37). □

3 Arvulised näited

3.1 Näide 1

Vaatleme integraalvõrrandit

$$y(t) = e^t - \cos(t)\frac{e^\pi + 1}{2} + \int_0^\pi \cos(t)\sin(s)y(s)ds, \quad t \in [0, \pi]. \tag{38}$$

See võrrand on kujul (18), kus $[a, b] = [0, \pi]$, $\kappa(t, s) = \cos(t)\sin(s)$ ning $f(t) = e^t - \cos(t)\frac{e^\pi+1}{2}$. Võrrandi (38) lahendiks on

$$y(t) = e^t, \quad t \in [0, \pi]. \tag{39}$$

Lahendi (39) lähendi $y_n(t)$ $(n \in \mathbb{N})$ leidmiseks kasutame punktis 2.2 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit (20)-(22), võttes aluseks ühtlase võrgu Δ_h punktidega $t_i = ih$, kus $i = 0, 1, \ldots, n$ ja $h = \frac{\pi}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Suuruse $\|y_n - y\|_{C[0,\pi]}$ lähendi arvutame järgmiselt:

$$\varepsilon_n = \max_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ 0 \le j \le 10}} \left| y(\tau_{ij}) - y_n(\tau_{ij}) \right|, \tag{40}$$

kus

$$\tau_{ij} = t_i + j\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{10}\right) \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ ja } j = 0, 1, \ldots, 10.$$

Vigade ε_n arvutamiseks on koostatud lisas toodud programm programmeerimiskeeles R. Osa saadud arvulistest tulemustest on esitatud tabelis 1.

n	ε_n	$\varepsilon_n/\varepsilon_{2n}$
2	$6.514 \cdot 10^{-1}$	7.560200
4	$8.616 \cdot 10^{-2}$	7.844721
8	$1.098 \cdot 10^{-2}$	7.917289
16	$1.387 \cdot 10^{-3}$	7.958742
32	$1.743 \cdot 10^{-4}$	7.979732
64	$2.184 \cdot 10^{-5}$	7.99007
128	$2.734 \cdot 10^{-6}$	

Tabel 1: Võrrandi (38) lähislahendite koondumine

Tabelist näeme, et arvulised tulemused vastavad Teoreemi 2.11 hinnangule (37).

3.2 Näide 2

Vaatleme integraalvõrrandit

$$y(t) = t + t^{\frac{1}{2}} - \frac{7}{6}t^2 + \int_0^1 t^2 \cdot y(s)ds, \quad t \in [0,1], \tag{41}$$

kus $[a,b] = [0,1]$, $\kappa(t,s) = t^2$ ning $f(t) = t + t^{\frac{1}{2}} - \frac{7}{6}t^2$. Võrrandi (41) lahendiks on

$$y(t) = t + t^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0,1]. \tag{42}$$

Lahendi (42) lähendi $y_n(t)$ $(n \in \mathbb{N})$ leidmiseks kasutame punktis 2.2 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit (20)-(22), võttes aluseks ühtlase võrgu Δ_h punktidega $t_i = ih$, kus $i = 0, 1, \ldots, n$ ja $h = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Suuruse $\|y_n - y\|_{C[0,1]}$ lähendi arvutame valemiga (40). Osa saadud arvulistest tulemustest on esitatud tabelis 2.

n	ε_n	$\varepsilon_n/\varepsilon_{2n}$
2	$1.031 \cdot 10^{-1}$	1.413335
4	$7.298 \cdot 10^{-2}$	1.414239
8	$5.160 \cdot 10^{-2}$	1.414217
16	$3.649 \cdot 10^{-2}$	1.414214
32	$2.580 \cdot 10^{-2}$	1.414214
64	$1.824 \cdot 10^{-2}$	1.414214
128	$1.290 \cdot 10^{-2}$	

Tabel 2: Võrrandi (41) lähislahendite koondumine

Kuna võrrandi (41) korral ei ole Teoreemi 2.11 eeldused täidetud, siis hinnang (37) ei pruugi kehtida. Tabelis 2 saadud arvulised tulemused on selle väite kinnituseks.

Viited

[1] **De Boor, C.** *„On Uniform Approximation by Splines"*, Journal of Approximation theory **1**, 219-235, 1968.

[2] **Kangro, R., Pedas, A., Pallav, R.** *„Quadratic spline collocation method for weakly singular integral equations"*, Estonian Academy of Sciences, Physics Mathematics, 47-60, 2002.

[3] **Oja, E., Oja, P.** *„Funktsionaalanalüüs"*, Tartu Ülikool, 1991.

[4] **Vainikko, G.** *„Kiirguslevi. Matemaatilise füüsika täiendavad peatükid"*, Tartu Ülikool, 1990.

[5] **Завьялов, Ю.С., Квасов, Б.И., Мирошниченко, В.Л.** *„Методы сплайн-функций "*, Nauka, Moskva, 1980.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Moonika Raudvee (sünnikuupäev: 01.09.1996),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   „Ruutsplainidega kollokatsioonimeetod integraalvõrrandi lahendamiseks”,

   mille juhendaja on Arvet Pedas,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile,

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **08.05.2018**

Lisa

Programm on kirjutatud programmeerimiskeeles R.

```
a = 0
b = pi
max_n = 7

max_vead = 1:max_n
for (indeks in 1:max_n) {
  n = 2**indeks

  h = (b - a) / n
  t = seq(a, b, length.out = n + 1)
  x = seq(a, b, length.out = n + 2)
  x[1] = a
  x[n + 2] = b
  for (i in 2:(n + 1)) {
    x[i] = t[i - 1] + h / 2
  }

  K = function(t, s) {
    return(cos(t)*sin(s))
  }

  Fa = function(t) {
    return(exp(t)-cos(t)*((exp(pi)+1)/2))
  }

  Y = function(t) {
    return(exp(t))
  }
  B = function(i, s) {
    if (i == 1) {
```

```
  if ((t[1] <= s) && (s < t[2])) {
    return(((t[2] - s) ** 2) / h**2)
  }
  else{
    return(0)
  }
}
if (i == 2) {
  if ((t[1] <= s) && (s < t[2])) {
    return(((s - t[1]) * (t[2] - s)) / h**2
           + ((t[3] - s) * (s - t[1]))/(2*h**2))
  }
  if ((t[2] <= s) && (s < t[3])) {
    return(((t[3] - s) ** 2) / (2*h**2))
  }
  else{
    return(0)
  }
}
if (i == (n + 1)) {
  if ((t[n - 1] <= s) && (s < t[n])) {
    return(((s - t[n - 1]) ** 2) / (2*h**2))
  }
  if ((t[n] <= s) && (s < t[n + 1])) {
    return(((s - t[n-1]) * (t[n+1] - s))/(2*h**2)
           + ((t[n+1] - s) * (s - t[n]))/(h**2))
  }
  else{
    return(0)
  }
}
if (i == (n + 2)) {
```

```
    if ((t[n] <= s) && (s <= t[n + 1])) {
      return(((s - t[n]) ** 2) / h**2)
    }
    else
      (return(0))
  }
  else{
    if ((t[i - 2] <= s) && (s < t[i - 1])) {
      return(((s - t[i - 2]) ** 2) / (2*h**2))
    }
    if ((t[i - 1] <= s) && (s < t[i])) {
      return(((s - t[i-2]) * (t[i] - s))/(2*h**2)
            + ((t[i+1]-s) * (s-t[i-1]))/(2*h**2))
    }
    if ((t[i] <= s) && (s < t[i + 1])) {
      return(((t[i + 1] - s) ** 2) / (2*h**2))
    }
    return(0)
  }
}
A = matrix(rep(0,(n+2)*(n+2)),nrow=n+2,ncol=n+2)
for (i in 1:(n + 2)) {
  I = integrate(function(s) B(1, s) * K(x[i], s),
                t[1], t[2])$value
  A[i, 1] <- (B(1, x[i]) - I)
  J = integrate(function(s) B(2, s) * K(x[i], s),
                t[1], t[2])$value
  O = integrate(function(s) B(2, s) * K(x[i], s),
                t[2], t[3])$value
  A[i, 2] <- (B(2, x[i]) - (J + O))
  if (n > 2) {
    for (j in 3:(n)) {
```

```
      I = integrate(function(s) B(j, s) * K(x[i], s),
                    t[j - 2], t[j - 1])$value
      J = integrate(function(s) B(j, s) * K(x[i], s),
                    t[j - 1], t[j])$value
      O = integrate(function(s) B(j, s) * K(x[i], s),
                    t[j], t[j + 1])$value
      A[i, j] <- (B(j, x[i]) - (I + J + O))
    }
  }
  I = integrate(function(s) B(n + 1, s) * K(x[i], s),
                t[n - 1], t[n])$value
  O = integrate(function(s) B(n + 1, s) * K(x[i], s),
                t[n], t[n + 1])$value
  A[i, n + 1] <- (B(n + 1, x[i]) - (I + O))
  J = integrate(function(s) B(n + 2, s) * K(x[i], s),
                t[n], t[n + 1])$value
  A[i, n + 2] <- (B(n + 2, x[i]) - J)
}
F_mat = Fa(x)
C = solve(A, F_mat)
YN = function(x) {
  sum = 0
  for (i in 1:(n + 2)) {
    sum = sum + C[i] * B(i, x)
  }
  return(sum)
}
max_err = 0
max_place = 0
for (i in 1:n) {
  for (j in 0:10) {
    xij = t[i] + j * (h / 10)
```

```
        dif = abs(Y(xij) - YN(xij))
        if (dif > max_err) {
          max_err = dif
          max_place = xij
        }
      }
    }
  max_vead[indeks] = max_err
}
suhted = 1:max_n
for (i in 1:max_n) {
  if (i == 1) suhted[i] = 0
  else suhted[i] = max_vead[i-1]/(max_vead[i])
}
suhted
```