Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Georg Simmul

Supergeomeetria struktuurid

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja Viktor Abramov

Tartu 2019

Supergeomeetria struktuurid

Bakalaureusetöö

Georg Simmul

Lühikokkuvõte. Käesolev bakalaureusetöö on sissejuhatuseks mitmetesse supergeomeetria ja supermaatriksite arvutuse teemadesse nagu superalgebrad, supermaatriksite ruum ning tuletised ja integraalid Grassmanni algebral. Sealhulgas tuuakse ära olulisemad definitsioonid ja mõningad omadused koos tõestustega. Töös esitatu toetub põhiliselt kolmele raamatule: F. A. Berezini "Introduction to Supersymmetry"[1], V. Abramovi ja P. Kuuse "Supersümmeetria füüsikas ja matemaatikas"[2] ning L. A. Takhtadzhiani "Quantum mechanics for mathematicians"[3].
CERCS teaduseriala: P150 Geomeetria, algebraline topoloogia.
Märksõnad: superalgebrad, supersümmeetria, Grassmanni algebrad, Cliffordi algebrad.

Structures of supergeometry

Bachelor's thesis

Georg Simmul

Abstract. The objective of this bachelor's thesis is to provide an introduction to some topics of supergeometry and supermatrices, for example superalgebras, supermatrix space and derivatives/integrals on Grassmann algebra. This thesis also includes the most necessary definitions and some characteristics with proof. The ideas disscussed in this thesis are mainly based on three books: "Introduction to Supersymmetry"[1] by F. A. Berezin, "Quantum mechanics for mathematicians"[3] by L. A. Takhtadzhian and "Supersümmeetria füüsikas ja matemaatikas"[2] by V. Abramov and P. Kuusk.
CERCS research specialisation: P150 Geometry, algebraic topology.
Keywords: superalgebras, supersymmetry, Grassmann algebras, Clifford algebras.

Sisukord

Peatükk 1

Sissejuhatus

Matemaatika ja teoreetiline füüsika on alati liikunud käsikäes. Kord ütleb füüsika matemaatikale, missuguseid struktuure kirjeldada, teine kord näitab matemaatika füüsikutele teid uskumatute teooriateni. Kui 17. sajandist kuni 19. sajandini käis matemaatika kõrval klassikaline füüsika, siis viimased 100 aastat on seda rolli täitnud kvantmehaanika [3]. Teame, et paljud kvantfüüsika ideed on mänginud rolli nii mõneski kaasaegse matemaatika valdkonna arengus [4]. Nii oli ka siis, kui mõnikümmend aastat tagasi tõid füüsikud esimest korda oma töödes sellised mõisted nagu supersümmeetria, superruum ja supersümmeetriline väljateooria. Nimelt leiti üsna pea, et need mõisted sarnanevad suures osas matemaatikas juba tol ajal tuntud gradueeritud algebra omadele [2]. Nii tekkiski matemaatikasse uue suunana diferentsiaalgeomeetria üldistus nimega supergeomeetria, kus lisaks kommuteeruvatele koordinaatidele vaadatakse võrdväärsetena ka antikommuteeruvaid koordinaate. Sellest ajast peale on matemaatika supergeomeetria näol füüsikale ka tagasi andnud. Arendatud teooria on kasutust leidnud sellistes kaasaegse füüsika valdkondades nagu näiteks supersümmeetriline kvantvälja teooria, superkalibratsioonivälja teooria ja superstringi teooria [5]. Konkreetsemalt lubab supersümmeetria ühendada füüsikas bosonväljad (kommuteeruvad) ja fermionväljad (antikommuteeruvad) üheks superväljaks ning superstringi kvantteoorias kirjeldatakse mittevastuolulist superruumi, kus on 10 kommuteeruvat ja vähemalt 16 antikommuteeruvat koordinaati [2].

Eelneva põhjal võib julgelt öelda, et supergeomeetria uurimine õigustab end juba ainuüksi füüsikaliste rakenduste poolest. Samuti on supergeomeetria puhta matemaatika suunana aktiivselt uuritav struktuur. Käesolev bakalaureusetöö seab eesmärgiks tutvustada põhilisi supergeomeetria ning supermaatriksi arvutuse mõisteid nagu superjälg, bereziniaan ja superintegraal ning anda ülevaade mõningatest tähtsamatest superalgebratest nagu Grassmanni algebra ja maatriksite superalgebra. Töö lugemine ei eelda eelnevaid teadmisi supergeomeetria vallas, küll aga mõningaid algteadmisi algebrast ja klassikalisest geomeetriast.

Töö kirjutamisel on olnud kesksel kohal kolm allikat. Esiteks Felix A. Berezini, kes defineeris paljud siin toodud mõisted esimesena, "Introduction to Supersymmetry" [1]. Teiseks Viktor Abramovi ja Piret Kuuse "Supersümmeetria füüsikas ja matemaatikas" [2]. Kolmandaks armeenia päritolu ameerika matemaatiku Leon A. Takhtadzhiani raamat "Quantum mechanics for mathematicians" [3]. Töö on teatud kombinatsioon neis raamatuis toodud materjalist, mis peaks toetama lugeja mõistmist mõningatest supergeomeetria põhilistest mõistetest ja tulemustest.

Alustame superalgebra defineerimisega. Selguse huvides on alguses ära toodud ka vektorruumi ja algebra mõisted, millele superalgebra definitsioon toetub. Edasi liigume ühe tuntuima ja ka tähtsaima superalgebra - Grassmanni algebra - defineerimise juurde. Sinna juurde käivad kokkulepped ja kirjaviisi mugandused on põhjalikult lahti seletatud ning põhjendatud. Uurime ka mõningaid Grassmanni algebral arvutamise omadusi. Mainime veel siinkohal, et Grassmanni algebra jääb kesksele kohale ka töö viimases peatükis. Esimese peatüki lõpus anname veel lühiülevaate teisest tuntud superalgebrast - Cliffordi algebrast - ning vaatame selle maatriksesitust kahe moodustaja korral.

Järgmises peatükis uurime veel kahte superalgebrat, mille iseloom on töö esimeses osas kirjeldatutest mõnevõrra erinev. Nimelt vaatame lineaarteisenduste ruumi ja maatriksite ruumi ning seda kuidas defineerida neil superalgebra strktuur või kuidas kandub konkreetne struktuur ühelt ruumilt teisele. Sama peatüki teises pooles toome sisse sellised supergeomeetria põhimõisted nagu superjälg ja superdeterminant, mis on vastavalt klassikalise jälje ja determinandi üldistused supergeomeetrias, ning vaatame teatud maatriksarvutusega seotud mõistet nimega Pfaffian.

Antud töö viimane peatükk käsitleb kahte analüüsi põhimõiste - tuletise ja integraali - analooge Grassmanni algebral. Alustame osatuletise konstrueerimisega ning vaatame saadud operaatori mõnd lihtsamat omadust. Edasi liigume integreerimise juurde, mille defineerime F. A. Berezini eeskujul [1], ning lõpetame kahe integraali kirjeldava tulemusega.

Kuigi antud bakalaureuse töö käsitleb vaid põhilist, peaks see olema piisav, et viia lugeja tasemeni, kust saab edasi liikuda rohkem sügavuti minevate supergeomeetria raamatute juurde ning andma piisavat paindlikkust, et lahti mõtestada erinevaid formalisme, milles superalgebraid kirjeldatakse.

Peatükk 2

Superalgebrad

2.1 Supervektorruum

Def 1. Hulka V nimetatakse *vektorruumiks* üle korpuse $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), kui on defineeritud kujutused

$$V \times V \to V,\ (a,b) \mapsto a+b,$$

$$K \times V \to V,\ (k,a) \mapsto ka,$$

nii, et

(a) $(a+b)+c = a+(b+c)$;

(b) $\exists 0 \in V\, \forall a \in V\ a+0 = a = 0+a$;

(c) $\forall a \in V\, \exists -a \in V\ a+(-a) = 0 = (-a)+a$;

(d) $a+b = b+a$;

(e) $k(a+b) = ka+kb$;

(f) $(k+l)a = ka+la$;

(g) $(kl)a = k(la)$;

(h) $1a = a$;

kus $a,b,c \in V$ ja $k,l \in \mathbb{K}$ [6].

Def 2. Vektorruumi V üle korpuse $\mathbb{K}$ nimetatakse *supervektorruumiks*, kui on antud tema lahutus otsesummaks

$$V = V_0 \oplus V_1,$$

kus V_0 ja V_1 on mingid ruumi V alamruumid [2]. Ruumi V_0 elemente nimetame seejuures *paariselementideks* ja ruumi V_1 elemente *paarituteks elementideks*. Vektorit $a \in V$ nimetame *homogeenseks*, kui $a \in V_0$ või $a \in V_1$.

Olgu V supervektorruum ja $a \in V$ homogeenne. Defineerime siis kujutuse

$$|\cdot|: V_0 \cup V_1 \to \mathbb{Z}_2, \quad |a| = \begin{cases} 0, & \text{kui } a \text{ on paaris;} \\ 1, & \text{kui } a \text{ on paaritu.} \end{cases}$$

2.2 Superalgebra

Def 3. *Algebraks* nimetatakse vektorruumi A koos temal defineeritud algebralise tehtega, mis seab paarile $(a, b) \in A \times A$ vastavusse vektori $a \circ b \in A$ ning rahuldab tingimusi

(a) $(\alpha a + \beta b) \circ c = \alpha(a \circ c) + \beta(b \circ c)$;

(b) $a \circ (\beta b + \gamma c) = \beta(a \circ b) + \gamma(a \circ c)$;

kus $a, b, c \in A$ ja $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ [6]. Öeldakse veel, et algebra A on *assotsiatiivne*, kui

(c) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, \quad a, b, c \in A.$

Algebrat A nimetatakse ühikuga algebraks kui leidub element $\mathbb{1} \in A$ nii, et

(d) $\forall a \in A \, \mathbb{1}a = a\mathbb{1} = a.$

Sellist elementi $\mathbb{1}$ nimetatakse algebra A ühikelemendiks.

Kui tähendus on kontekstist selge, jätame edaspidi tähise $\circ$ ära ja kirjutame $a \circ b = ab$, kus $a, b \in A$. Järgnevas vaatame ainult assotsiatiivseid ühikuga algebraid.

Def 4. Supervektorruumi A nimetatakse *superalgebraks*, kui supervektorruumil on antud assotsiatiivne ühikuga algebraline tehe, mis rahuldab tingimust

$$|a \circ b| = |a| + |b| \pmod 2, \tag{2.1}$$

kus $a, b \in A$ on superalgebra suvalised homogeensed elemendid [2]. Superalgebrat nimetatakse kommutatiivseks, kui

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba$$

kus $a, b \in A$ on superalgebra suvalised homogeensed elemendid.

2.3 Grassmanni algebra

Olgu $\mathcal{A}$ algebra ja $S = \{\theta_i \in \mathcal{A}\colon 1 \leq i \leq n,\, n \in \mathbb{N}\}$ mingi algebra $\mathcal{A}$ alamhulk. Olgu $\mathcal{A}_S$ süsteemi

$$\{\mathbb{1},\, \theta_1,\, \theta_2, \ldots,\, \theta_n,\, \theta_1\theta_2,\, \theta_1\theta_3, \ldots,\, \theta_{n-1}\theta_n, \ldots,\, \theta_1 \ldots \theta_n\} \tag{2.2}$$

kuuluvate vektorite lineaarkombinatsioonid. Kehtib, et $\mathcal{A}_S$ on algebra $\mathcal{A}$ alamalgebra [6]. Hulga (2.2) elemente nimetame monoomideks.

Def 5. Olgu $\mathcal{A}$ algebra ja $S \subset \mathcal{A}$. Kui $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}$, siis vektorite süsteemi S nimetame algebra $\mathcal{A}$ *moodustajate süsteemiks* [6].

Kuigi üldiselt pole moodustajate süsteemil kindlat järjestust, on edaspidises moodustajate süsteemi järjestus siiski oluline. Seepärast vaatame siin vaikimisi järjestatud moodustajate süsteeme, kus konkreetne järjestus on antud moodustajate süsteemi elementide nummerdusega.

Def 6. *Grassmanni algebra*, tähistame $\mathcal{G}^n$, on assotsiatiivne ühikuga algebra üle korpuse $\mathbb{K}$, mille moodustajate hulga $\{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n\}, n \in \mathbb{N}$, elemendid rahuldavad kommutatsiooni seost [2]

$$\theta^i\theta^j = -\theta^j\theta^i, i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Grassmanni algebra definitsioonist on näha, et moodustaja ruut on alati null.

Grassmanni algebra vektorruumi baas on

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{\mathbb{1}}_{1}, \underbrace{\theta^1, \ldots, \theta^n}_{n}, \underbrace{\theta^1\theta^2, \ldots, \theta^i\theta^j, \ldots, \theta^{n-1}\theta^n}_{C_n^2}, \underbrace{\theta^i\theta^j\theta^k}_{C_n^3}, \ldots, \underbrace{\theta^1 \ldots \theta^n}_{C_n^n=1}\}, \tag{2.3}$$

kus $1 \leq i < j < k \leq n$ ja $\mathbb{1}$ on Grassmanni algebra ühikelement. Näeme, et $|\mathcal{B}| = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$.

Näitame, et monoomid (2.3) moodustavad Grassmanni algebra baasi. Tõesti, antikommutatiivsuse tingimusest saame, et kõik mingite moodustajate süsteemi elementide korrutamisel saadud nullist erinevad elemendid on lineaarselt sõltuvad ühega hulga $\mathcal{B}$ elementidest. Seega, moodustajate süsteemi definitsioonist tuleneb, et Grassmanni algebra $\mathcal{G}^n$ suvaline element avaldub monoomide (2.3) lineaarkombinatsioonina.

Näide 1. Vaatame algebrat $\mathcal{G}^3$, kus moodustajate süsteem on $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$. Siis vektorruumi baas (2.3) on

$$\mathcal{B} = \{\mathbb{1}, \theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^1\theta^2, \theta^1\theta^3, \theta^2\theta^3, \theta^1\theta^2\theta^3\}.$$

Paneme ka tähele, et $|\mathcal{B}| = 8 = 2^3$.

Kuna Grassmanni algebra vektorruumi baas on ka väiksemate moodustajate süsteemide korral üpriski suur, oleks algebra elementide välja kirjutamiseks vaja lühemat ja lihtsamini loetavat viisi. Formaalselt vaatame Grassmanni algebra elementi kujutisena $f : S \to \mathcal{G}^n$, kus S on Grassmanni algebra moodustajate süsteem, kujul

$$f(\theta^1, \ldots, \theta^n) = f_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{n} f_i \theta^i + \sum_{\substack{1 \le i < n, \\ i < j \le n}} f_{ij} \theta^i \theta^j + \ldots + f_{1\ldots n} \theta^1 \ldots \theta^n. \tag{2.4}$$

Olgu siin ära märgitud, et Grassmanni algebra elementi $f(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ kirjutame edaspidi ka kujul $f(\theta)$ ja f, kui tähendus on üheselt mõistetav. Vaatame indeksite kombinatsioone

$$1, 2, \ldots, n, (1, 2), (1, 3), \ldots, (n-1, n), \ldots, (1, 2, \ldots, n). \tag{2.5}$$

Paneme tähele, et iga monoom kujul $\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_n}$ ja arv $f_{i_1 \ldots i_n}$ summas (2.4), välja arvatud $\mathbb{1}$ ja f_0, on määratud täpselt ühega neist kombinatsioonidest. Edasipidi tähistame $\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_n} = \theta^{i_1 \ldots i_n}$, kui kirjaviisi sisu on kontekstist arusaadav. Olgu

$$N = \{1, 2, \ldots, n\},$$

siis kõik võimalikud indeksite kombinatsioonid (2.5) on hulga N alamhulgad. Täpsemini, nad moodustavad hulga N kõik järjestatud alamhulgad. Olgu $\mathcal{N}$ kogum kõigist hulga N järjestatud alamhulkadest ja tühihulgast. Siis saame igale hulga $\mathcal{N}$ järjestatud alamhulgale $\mathcal{I}$ vastavusse seada ühe monoomi $\theta^{\mathcal{I}}$, võttes $\theta^{\emptyset} = \mathbb{1}$, ning arvu $f_{\mathcal{I}} \in \mathbb{K}$, võttes $f_{\emptyset} = f_0$. Olgu näiteks $\mathcal{I} = \{1, 2, 3\} \subset \mathcal{N}$. Siis tähistame

$$\theta^{\mathcal{I}} = \theta^1 \theta^2 \theta^3 \text{ ja } f_{\mathcal{I}} = f_{123}.$$

Nüüd saame summa (2.4) kirjutada kujul

$$f(\theta) = \sum_{\mathcal{I} \subset \mathcal{N}} f_{\mathcal{I}} \theta^{\mathcal{I}}.$$

Saadud kuju on kompaktsem kui (2.4).

Näide 2. Vaatame veel kord näites (1) toodud algebrat $\mathcal{G}^3$. Siis tema elemendid avalduvad kujul

$$f(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = f_0 \mathbb{1} + f_1 \theta^1 + f_2 \theta^2 + f_3 \theta^3 + f_{12} \theta^1 \theta^2 + f_{13} \theta^1 \theta^3 + f_{23} \theta^2 \theta^3 + f_{123} \theta^1 \theta^2 \theta^3,$$

kus $f_0, \ldots, f_{123} \in \mathbb{K}$.

Def 7. Olgu X mingi hulk ja $A \subset X$ tema alamhulk. *Indikaatorfunktsiooniks* nimetame kujutust $\mathbf{1}_A : X \to \{0,1\}$

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, \; x \in A; \\ 0, \; x \notin A. \end{cases}$$

Vaatame mõnda omadust, mis saadud lühemal kirjutusviisil arvutades esinevad

1) $\theta^{\mathcal{I}} \cdot \theta^{\mathcal{J}} = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{I} \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$

2) $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \emptyset \Rightarrow \theta^{\mathcal{I}} \cdot \theta^{\mathcal{J}} = (-1)^x \theta^{\mathcal{I} \cup \mathcal{J}}$, kus $x = \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{1}_{[1,i]}(j)$,
$\mathbf{1}_{[1,i]} : [1, \max\{\mathcal{I} \cup \mathcal{J}\}] \to \{0,1\}$ on indikaatorfunktsioon ja $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ on järjestatud.

3) $\theta^{\mathcal{I}} \cdot \theta^{\mathcal{J}} = (-1)^{|\mathcal{I}||\mathcal{J}|} \theta^{\mathcal{J}} \cdot \theta^{\mathcal{I}}$

Näitame, et need kehtivad. Olgu $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathcal{N}$.

1) Kehtib, et kõik moodustajate süsteemi elemendid on nullist erinevad ja nende korrutised on paari kaupa nullist erinevad. Seega, $\theta^{\mathcal{I}} \cdot \theta^{\mathcal{J}} = 0$ on samaväärne tingimusega

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} : \; i \in \mathcal{I} \wedge i \in \mathcal{J}.$$

See on omakorda samaväärne sellega, et $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$.

2) Olgu $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ sellised, et $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \emptyset$. Siis, et saada korrutis $\theta^{\mathcal{I}} \cdot \theta^{\mathcal{J}}$, peame liigutama kõik hulga $\mathcal{J}$ elemendid nii palju vasakule poole, et hulk $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ oleks järjestatud. Antikommutatiivsuse tõttu on $\theta^{\mathcal{I}} \cdot \theta^{\mathcal{J}} = (-1)^x \theta^{\mathcal{I} \cup \mathcal{J}}$, kus x on kahe indeksi äravahetamise kordade arv. Arvu x saame esitada kujul

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{1}_{[1,i]}(j),$$

kus $\mathbf{1}_{[1,i]} : [1, \max\{\mathcal{I} \cup \mathcal{J}\}] \to \{0,1\}$ on indikaatorfunktsioon.

3) Olgu $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ sellised, et $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ on järjestatud. Siis ilmselt, et järjestada hulk $\mathcal{J} \cup \mathcal{I}$, on vaja m indeksit nihutada paremale n korda. Seega kehtib

$$\theta^{\mathcal{I}} \cdot \theta^{\mathcal{J}} = (-1)^{nm} \theta^{\mathcal{J}} \cdot \theta^{\mathcal{I}} = (-1)^{|\mathcal{I}||\mathcal{J}|} \theta^{\mathcal{J}} \cdot \theta^{\mathcal{I}}. \tag{2.6}$$

Kui $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ on suvalised, siis viime nad kõigepealt järjestatud kujule, nagu tehtud punktis 2). Seejärel vahetame $\mathcal{I}$ ja $\mathcal{J}$ järjekorrad nagu juba näidatud (2.6). Et saada veel algne järjestus tagurpidi, peame liigutama hulga $\mathcal{J}$ indekseid sama palju vasakule kui enne ehk

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{1}_{[1,i]}(j)$$

korda. Seega, tähistades $x = \sum_{j\in\mathcal{J}}\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{1}_{[1,i]}(j)$, saame, et kehtib

$$\begin{aligned}
\theta^{\mathcal{I}} \cdot \theta^{\mathcal{J}} &= (-1)^x(-1)^x(-1)^{|\mathcal{I}||\mathcal{J}|}\theta^{\mathcal{J}} \cdot \theta^{\mathcal{I}} \\
&= (-1)^{2x}(-1)^{|\mathcal{I}||\mathcal{J}|}\theta^{\mathcal{J}} \cdot \theta^{\mathcal{I}} \\
&= (-1)^{|\mathcal{I}||\mathcal{J}|}\theta^{\mathcal{J}} \cdot \theta^{\mathcal{I}}.
\end{aligned}$$

Tahame näidata, et Grassmanni algebra $\mathcal{G}^n$ on superalgebra. Selleks on vaja kõigepealt näidata, et ta on supervektorruum ehk tuua tema sobiv lahutus otsesummaks. Anname Grassmanni algebra $\mathcal{G}^n$ lahutuse otsesummaks nii, et ta oleks supervektorruum. Olgu

$$\mathcal{G}_0^n = \{f \in \mathcal{G}^n : f(\theta) = \sum_{\substack{\mathcal{I}\subset\mathcal{N}, \\ |\mathcal{I}|=2k}} f_{\mathcal{I}}\theta^{\mathcal{I}},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

ja

$$\mathcal{G}_1^n = \{f \in \mathcal{G}^n : f(\theta) = \sum_{\substack{\mathcal{I}\subset\mathcal{N}, \\ |\mathcal{I}|=2k+1}} f_{\mathcal{I}}\theta^{\mathcal{I}},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

On lihtne näha, et $\mathcal{G}^n = \mathcal{G}_0^n \oplus \mathcal{G}_1^n$.

Näitamaks, et $\mathcal{G}^n$ on superalgebra, piisab näidata, et korrutustehe

$$f(\theta) \cdot g(\theta)$$

rahuldab nõutud tingimust (2.1). Kuna kõik Grassmanni algebra elemendid on baasielementide lineaarses kattes, siis piisab siin vaadata, kas antud tingimus kehtib monoomide korral. Kui korrutada oma vahel kaks paaris monoomi, siis saadud monoom on alati paaris. Seega võrdus (2.1) kehtib. Kui korrutada paaritu monoom paarituga, siis saame paaris monoomi, kuna saadud monoom pikkus on kahe paaritu arvu summa. Seega jällegi võrdus (2.1) kehtib. Kui korrutada paaris ja paaritu monoom, siis on tulemuseks paaritu monoom. Sellega oleme tõestanud, et Grassmanni algebra on superalgebra.

Näide 3. Vaatame veel kord algebrat $\mathcal{G}^3$ moodustajate süsteemiga $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$. Vaatame, kuidas toimub konkreetse superalgebra elementide korrutamine. Olgu näiteks

$$f(\theta) = 3\mathbb{1} - 2\theta^2\theta^3$$

ja

$$g(\theta) = 5\theta^1 + 2\theta^2 + 8\theta^1\theta^2\theta^3.$$

Paneme tähele, et f ja g on mõlemad homogeensed. Nüüd

$$\begin{aligned} f(\theta)\cdot g(\theta) &= (3\mathbb{1} - 2\theta^2\theta^3)\cdot(5\theta^1 + 2\theta^2 + 8\theta^1\theta^2\theta^3) \\ &= 15\theta^1 + 6\theta^2 + 24\theta^1\theta^2\theta^3 - 10\theta^2\theta^3\theta^1 - 4\theta^2\theta^3\theta^2 - 2\theta^2\theta^3\theta^1\theta^2\theta^3 \\ &= 15\theta^1 + 6\theta^2 + 24\theta^1\theta^2\theta^3 - 10\theta^1\theta^2\theta^3 \\ &= 15\theta^1 + 6\theta^2 + 14\theta^1\theta^2\theta^3. \end{aligned}$$

Näeme, et tõesti

$$|f(\theta)\cdot g(\theta)| = 1 = 0 + 1 = |f(\theta)| + |g(\theta)|.$$

2.4 Cliffordi algebra

Tutvustame veel ühte algebralist struktuuri, millel saab defineerida superalgebra. Lugeja näeb, et algebra definitsioon sarnaneb Grasmanni algebra omaga.

Def 8. *Cliffordi algebra* $\mathcal{C}^n$ on assotsiatiivne ühikuga algebra üle korpuse $\mathbb{K}$, mille moodustajate süsteem $\{\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^n\}$, $n \in \mathbb{N}$ rahuldab tingimusi

$$\gamma^i\gamma^j = -\gamma^j\gamma^i \quad (i \neq j);$$

$$(\gamma^i)^2 = \mathbb{1}.$$

Saab kontrollida, et algebra moodutajate süsteemiga $\{\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, on Cliffordi algebra parajasti siis, kui iga $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ korral [7]

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2\delta^{ij}\mathbb{1}, \tag{2.7}$$

kus δ^{ij} on Kroneckeri delta.

Supervektorruumi ja superalgebra struktuurid antakse Cliffordi algebral analoogiliselt Grassmanni algebraga. Cliffordi algebra eelis Grassmanni algebra ees on see, et sellel leidub maatriksesitus.

Näide 4. Vaatame erijuhtu, kui $n = 2$. Siis algebra moodustajate süsteem on

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Seega vektorruumi $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ baasi moodustab hulk $\{\mathbb{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^1\sigma^2\}$, kus

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1\sigma^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Kontrollime, kas moodustajate süsteem rahuldab Cliffordi algebra tingimust (2.7). Tõesti

$$2\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 2\mathbb{1},$$

$$2\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = 2\mathbb{1}$$

ja

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-i & 0\\0 & i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

Peatükk 3

Maatriksid ja superdeterminant

Iseenesest ei erine maatriksid supergeomeetrias kuidagi tavalistest maatriksitest. Kuid seoses superdeterminandiga ja üldiselt superalgebra struktuuriga vaatame me just teatud konkreetse kujuga maatrikseid. Et selleni jõuda loomulikul viisil, alustame seda peatükki lineaarsetest kujutistest.

3.1 Lineaarsete kujutiste ruum End(V)

Olgu $V = V_0 \oplus V_1$ supervektorruum. Tähistame

$$\mathrm{End}(V) = \{L : V \to V |\, L \text{ on lineaarne.}\}$$

Hulga tähistus tuleb mõistest endomorfism. Paneme tähele, et End(V) on vektorruum. Tõesti, lineaaralgebrast teame, et

1) $(L_1 + L_2)(\vec{x}) = L_1(\vec{x}) + L_2(\vec{x})$;

2) $(\lambda L_1)(\vec{x}) = \lambda \cdot L_1(\vec{x})$,

millest viimane järeldub ilmselt. Samuti saab veenduda, et End(V) assotsiatiivne ühikuga algebra kujutuste kompositsiooni suhtes, kus ühikelemendiks on samasusteisendus I. Näitame, et End(V) on supervektorruum. Tema loomuliku gradueeringu indutseerib ruumi V gradueering. Defineerime

$$|L| = 0, \text{ kui } L : V_0 \to V_0 \text{ ja } L : V_1 \to V_1;$$

$$|L| = 1, \text{ kui } L : V_0 \to V_1 \text{ ja } L : V_1 \to V_0.$$

Näitame, et

$$\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}_0(V) \oplus \mathrm{End}_1(V).$$

Tõesti, iga $x \in V$ korral $x = x_0 + x_1$ ja seega

$$L(x) = L(x_0) + L(x_1) = (L(x_0))_0 + (L(x_0))_1 + (L(x_1))_0 + (L(x_1))_1.$$

Kuna $(L(x_0))_0$, $(L(x_1))_1 \in \mathrm{End}_0$ ja $(L(x_0))_1$, $(L(x_1))_0 \in \mathrm{End}_1$, siis tulemus kehtib. Näitame veel, et $\mathrm{End}(V)$ on superalgebra. Tõesti, kujutuste kompositsioon rahuldab hulga $\mathrm{End}(V)$ homogeensetel elementidel tingimust

$$|L_1 \circ L_2| = |L_1| + |L_2| \mod (2),$$

tulenevalt gradueeringu definitsioonist.

Vaatame superalgebrat $\mathrm{End}(V)$ ühe konkreetse supervektorruumi korral. Olgu V n-mõõtmeline vektorruum, olgu $\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$ selle vektorruumi baas. Fikseerime täisarvu $l \in \{1, \dots, n-1\}$. Jaotame baasi kaheks

$$\begin{gathered} \text{paarisvektorid:}\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_l\}; \\ \text{paaritud vektorid:}\{\vec{e}_{l+1} \dots \vec{e}_n\}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Tähistame konkreetse arvu l korral sellise jaotusega vektorruumi V_l, tema paaris elementide hulka $V_{l,0}$ ning paaritute elementide hulka $V_{l,1}$. Olgu

$$V_{l,0} = \mathrm{span}\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_l\};$$

$$V_{l,1} = \mathrm{span}\{\vec{e}_{l+1} \dots \vec{e}_n\}.$$

Sellega on defineeritud supervektorruumi struktuur. Olgu $L \in \mathrm{End}(V_l)$. Siis temale saab vastavusse seada lineaarteisenduse maatriksi, mis on sõltuv baasist. Lühidalt

$$L(\vec{e}_i) = L_i^j \vec{e}_j, \tag{3.2}$$

kus

$$(L_i^j) = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & \cdots & L_n^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & \cdots & L_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1^n & L_2^n & \cdots & L_n^n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Valemis (3.2) kasutasime Einsteini summeerimiskokkulepet, mis ütleb, et kui valemis on kasutatad mõnda indeksit nii üla- kui ka alaindeksina, võtame summa üle selle indeksi. Seega praegusel juhul $L_i^j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^n L_i^j \vec{e}_j$.

3.2 Maatriksite ruum $\mathbf{Mat}_n(\mathbb{K})$

Olgu V_l mingi n-mõõtmeline vektorruum. Näitame, et $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ on superalgebra. Selle saame aga loomulikul viisil tuletada eelmises peatükis vaadatud lineaarsete kujutiste ruumist. Vaatame lähemalt maatriksit (3.3) ning kuidas ruumi $\mathrm{End}(V_l)$ superalgebra struktuur annab superalgebra struktuuri maatriksite ruumil $\mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$, kus n on antud ruumi maatriksite mõõde ja l tähistab konkreetset baasi jaotust (3.1). Edaspidi vaatame ainult ruutmaatrikseid. Vaatame juhtu, kui maatriksile (3.3) vastav lineaarne kujutis $L \in \mathrm{End}(V_l)$ on paariselement. Siis definitsiooni järgi jätab ta supervektorruumi V_l homogeensete elementide paarsuse samaks. Olgu $\vec{a} \in V_{l,0}$ ja $\vec{b} \in V_{l,1}$, siis

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + \ldots + a_l\vec{e_l}$$

ja

$$\vec{b} = b_{l+1}\vec{e_{l+1}} + \ldots + b_n\vec{e_n}$$

mingite $a_1, \ldots, a_n, b_{l+1}, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ korral. Kehtib, et

$$\begin{aligned}
L(\vec{a}) &= L(a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_l\vec{e}_l) = a_1L(\vec{e}_1) + \ldots + a_lL(\vec{e}_l) \\
&= a_1(L_1^1\vec{e}_1 + \ldots + L_1^n\vec{e}_n) + \ldots + a_l(L_l^1\vec{e}_1 + \ldots + L_l^n\vec{e}_n) \\
&= (a_1L_1^1 + \ldots + a_lL_l^1)\vec{e}_1 + \ldots + (a_1L_1^n + \ldots + a_lL_l^n)\vec{e}_n
\end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned}
L(\vec{b}) &= L(b_{l+1}\vec{e}_{l+1} + \ldots + b_n\vec{e}_n) = b_{l+1}L(\vec{e}_{l+1}) + \ldots + b_nL(\vec{e}_n) \\
&= b_{l+1}(L_{l+1}^1\vec{e}_1 + \ldots + L_{l+1}^n\vec{e}_n) + \ldots + b_n(L_n^1\vec{e}_1 + \ldots + L_n^n\vec{e}_n) \\
&= (b_{l+1}L_{l+1}^1 + \ldots + b_nL_n^1)\vec{e}_1 + \ldots + (b_{l+1}L_{l+1}^n + \ldots + b_nL_n^n)\vec{e}_n
\end{aligned}$$

Samas, kuna $L(\vec{a}) \in V_{l,0}$ ja $L(\vec{b}) \in V_{l,1}$, kehtib, et

$$(a_1L_1^1 + \ldots + a_lL_l^1)\vec{e}_1 + \ldots + (a_1L_1^n + \ldots + a_lL_l^n)\vec{e}_n \in \mathrm{span}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_l)$$

ja

$$(b_{l+1}L_{l+1}^1 + \ldots + b_nL_n^1)\vec{e}_1 + \ldots + (b_{l+1}L_{l+1}^n + \ldots + b_nL_n^n)\vec{e}_n \in \mathrm{span}(\vec{e}_{l+1}, \ldots, \vec{e}_n).$$

Kokkuvõttes, kuna baasielemendid on lineaarselt sõltumatud, peab

$$(a_1L_1^{l+1} + \ldots + a_lL_l^{l+1}) = \ldots = (a_1L_1^n + \ldots + a_lL_l^n) = 0$$

ning

$$(b_{l+1}L_{l+1}^1 + \ldots + b_nL_n^1) = \ldots = (b_{l+1}L_{l+1}^l + \ldots + b_nL_n^l) = 0$$

Kuna me võtsime $a_1, \ldots, a_n, b_{l+1}, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ suvalised, tähendab see, et

$$\forall i \in \{1, \ldots, l\}\, \forall j \in \{l+1, \ldots, n\}\; L_i^j = 0$$

ja

$$\forall i \in \{l+1, \ldots, n\}\, \forall j \in \{1, \ldots, l\}\; L_i^j = 0.$$

Seega paaris lineaarsele kujutusele $L \in \mathrm{End}(V_l)$ vastav maatriks on alati kujul

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

kus $\mathcal{L}_{11}$ on mingi $l \times l$ maatriks ja $\mathcal{L}_{22}$ on mingi $(n-l)\times(n-l)$ maatriks. Analoogiliselt saab näidata, et paaritule lineaarsele kujutusele $L \in \mathrm{End}(V_l)$ vastav maatriks on alati kujul

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

kus $\mathcal{L}_{12}$ on mingi $l \times (n-l)$ maatriks ja $\mathcal{L}_{21}$ on mingi $(n-l)\times l$ maatriks. Maatrikseid, mis on antud kujul

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

kus maatriksid $\mathcal{M}_{11}$, $\mathcal{M}_{12}$, $\mathcal{M}_{21}$, $\mathcal{M}_{22}$ on kindlate mõõtmetega, nimetatame blokkmaatriksiteks. Seega oleme näidanud, et $\mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$ on supervektorruum, kui võtame V_0 kõigi maatriksite hulk, mis on kujul (3.4), ning V_1 kõigi maatriksite hulk, mis on kujul (3.5). Näitame, et $\mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$ on superalgebra maatriksite korrutamise suhtes. Kui $L, M \in \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$ on paarismaatriksid, siis

$$L \cdot M = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} \cdot M_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{L}_{22} \cdot \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix},$$

seega korrutis on paarismaatriks. Kui $L, M \in \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$ on paaritud maatriksid, siis

$$L \cdot M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{12} \cdot M_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{L}_{21} \cdot \mathcal{M}_{12} \end{pmatrix},$$

seega korrutis on paarismaatriks. Kui $L \in \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$ on paarismaatriks ja $M \in \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$ on paaritu maatriks, siis

$$L \cdot M = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{L}_{22} \cdot \mathcal{M}_{21} \\ \mathcal{L}_{11} \cdot M_{12} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

seega korrutis on paaritu maatriks. Ilmselt kehtib tulemus ka paaritu ja paarismaatriksi korrutamisel.

3.3 Superjälg

Def 9. Maatriksi $L \in \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$ *superjälg*, tähistame $\mathrm{STr}(L)$, on kujutus [8] $\mathrm{STr} : \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, kujul

$$\mathrm{STr}(L) = \mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{11}) - \mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{22}),$$

kus maatriks L on kujul (3.6) ja $\mathrm{Tr} : \mathrm{Mat}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ on klassikaline maatriksi jälg [6].

Siit järeldub vahetult, et paaritu maatriksi superjälg on null.

Märkus. Superjälje võib defineerida ka maatriksi

$$I^* = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{I}_{22} \end{pmatrix}$$

abil [7], kus $\mathcal{I}_{11}$ ja $\mathcal{I}_{22}$ on vastavalt $l \times l$ ja $(n-l) \times (n-l)$ järku ühikmaatriksid. Sellisel juhul defineeritakse superjälg kui

$$\mathrm{STr}(A) = \mathrm{Tr}(I^* A).$$

On lihtne kontrollida, et antud kuju on tõesti samaväärne ülaltoodud definitsiooniga.

Klassikalisest maatriksite teooriast on teada tulemus

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA),$$

kus $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Näitame, et superjälje jaoks kehtib analoogiline tulemus, mis võtab arvesse superalgebra gradueeringut.

Lause 1. Iga homogeense $L, M \in \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$ korral kehtib [3]

$$\mathrm{STr}(LM) = (-1)^{|L||M|}\mathrm{STr}(ML).$$

Tõestus. Olgu$L, M \in \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$. Vaatame juhtu, kus L ja M on paarismaatriksid. Siis

$$\begin{aligned} \mathrm{STr}(LM) &= \mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{11}\mathcal{M}_{11}) - \mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{22}\mathcal{M}_{22}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{11}\mathcal{L}_{11}) - \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{22}\mathcal{L}_{22}) \\ &= \mathrm{STr}(ML) \end{aligned}$$

ehk võrdus kehtib. Kui L on paaris- ja M paaritu maatriks või vastupidi, siis nende korrutis on paaritu ehk tema superjälg on 0, mis juhul ka võrdus kehtib triviaalselt. Kui L ja M on mõlemad paaritud maatriksid, siis

$$\begin{aligned} \mathrm{STr}(LM) &= \mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{12}\mathcal{M}_{21}) - \mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{21}\mathcal{M}_{12}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{21}\mathcal{L}_{12}) - \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{12}\mathcal{L}_{21}) \\ &= -\big(\mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{12}\mathcal{L}_{21}) - \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{21}\mathcal{L}_{12})\big) \\ &= -\mathrm{STr}(ML). \end{aligned}$$

Seega lause kehtib. $\square$

3.4 Superdeterminant

Superdeterminandi defineerimisel lähtume soovist, et saadud üldistus rahuldaks maatriksite superalgebral omadusi, mis on analoogilised klassikaliste determinandi omadustega [3]

- $\det(LM) = \det(L)\det(M)$;
- $\det(e^L) = e^{\mathrm{Tr}(L)}$.

Siintoodud determinandi üldistuse pakkus esimesena välja vene matemaatik Felix A. Berezin [1], kelle järgi nimetatakse seda ka *Bereziniaaniks*.

Def 10. Olgu paaris $L \in \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$ selline, et temale vastav alammaatriks $\mathcal{L}_{22}$ on pööratav. Siis maatriksi L *Bereziniaan*(*superdeterminant*), tähistame $\mathrm{Ber}(L)$, on antud kujul

$$\mathrm{Ber}(L) = \det(\mathcal{L}_{11})\det(\mathcal{L}_{22}^{-1}),$$

kus det on klassikaline determinanti.

Näitame, et eeltoodud omadused Bereziniaani jaoks tõesti kehtivad. Olgu $L, M \in \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$ sellised paarismaatriksis, et neile vastavad alammaatriksid $\mathcal{L}_{22}, \mathcal{M}_{22}$ on pööratavad. Siis ka maatriks LM on paaris ning klassikalisest maatriksite teooriast teame, et temale vastav alammaatriks $\mathcal{L}_{22}\mathcal{M}_{22}$ pööratav [6]. Seega Bereziniaan on maatriksil LM määratud ja

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ber}(LM) &= \det(\mathcal{L}_{11}\mathcal{M}_{11})\det((\mathcal{L}_{22}\mathcal{M}_{22})^{-1}) \\
&= \det(\mathcal{L}_{11})\det(\mathcal{M}_{11})\det(\mathcal{M}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{22}^{-1}) \\
&= \det(\mathcal{L}_{11})\det(\mathcal{M}_{11})\det(\mathcal{M}_{22}^{-1})\det(\mathcal{L}_{22}^{-1}) \\
&= \det(\mathcal{L}_{11})\det(\mathcal{L}_{22}^{-1})\det(\mathcal{M}_{11})\det(\mathcal{M}_{22}^{-1}) \\
&= \mathrm{Ber}(L)\mathrm{Ber}(M).
\end{aligned}$$

Näitame veel, et

$$\mathrm{Ber}(e^L) = e^{\mathrm{STr}(L)}.$$

Ka seda ei ole raske näha kasutades klassikalisest maatriksite teooriast tuntud analoogilist tulemust. Kuna $e^L \in \mathrm{Mat}_{n,l}(\mathbb{K})$, on paaris ning $(e^L)_{22}$ pööratav, siis piisab näidata, et

$$\det\left((e^L)_{11}\right)\det\left((e^L)_{11}\right)^{-1} = e^{\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{11})-\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{22})}.$$

Kuna L on paarismaatriks ja

$$e^L = I + L + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{6}L^3 + \frac{1}{24}L^4 + \dots,$$

siis

$$(e^L)_{11} = I + \mathcal{L}_{11} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{11}^2 + \frac{1}{6}\mathcal{L}_{11}^3 + \frac{1}{24}\mathcal{L}_{11}^4 + \ldots = e^{\mathcal{L}_{11}}$$

ning analoogilisetlt $(e^L)_{22} = e^{\mathcal{L}_{22}}$. Seega

$$\det\big((e^L)_{11}\big)\det\big((e^L)_{11}\big)^{-1} = \frac{\det(e^{\mathcal{L}_{11}})}{\det(e^{\mathcal{L}_{22}})} = \frac{e^{\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{11})}}{e^{\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{22})}} = e^{\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{11})-\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{22})}$$

ehk omadus kehtib.

3.5 Pfaffian

Def 11. Maatriksit A nimetatakse *kaldsümmeetriliseks*, kui $A^T = -A$.

Olgu A n-mõõtmeline, $n \in \mathbb{N}$, kaldsümmeetriline maatriks. Paneme tähele, et kui n on paaritu arv, siis $|A| = 0$, sest ühelt poolt $|A| = |A^T|$, aga teiselt poolt $|-A| = (-1)^n|A|$. Seega, kui A on kaldsümmeetriline ning n paaritu, siis $|A| = -|A|$ ehk $|A| = 0$. Siin peatükis vaatame ainult kaldsümmeetrilisi maatrikseid.

Def 12. Olgu A n-mõõtmeline ruutmaatriks, siis maatriksi A *Pfaffiaan*, tähistame PfA, on selline maatriksi A elementidest moodustatud avaldis, et $|A| = (\mathrm{Pf}A)^2$, kui n on paarisarv, ning $\mathrm{Pf}A = 0$, kui n on paaritu arv.

Et selline ruutvorm alati leidub, näitas esimesena briti matemaatik Arthur Cayley [9].

Märkus. Kaldsümmeetrilise $2n \times 2n$ maatriksi $A = (a_{ij})$ Pfaffiaan defineeritakse mõni kord ka kujul [3]

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{\sigma\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)}. \tag{3.7}$$

Sellisel juhul on meie definitsioonis toodud tingimus Pfaffiaani üks põhiomadustest.

Näide 5. Vaatame juhtu, kus $n = 2$. Siis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{K}.$$

Kuna $|A| = a^2$, siis $\mathrm{Pf}A = a$.

Näide 6. Vaatame juhtu, kus $n = 4$. Siis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

ja definitsiooni on determinant

$$\begin{aligned}|A| &= a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ &\qquad - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\ &= a_{12}^2a_{34}^2 + a_{12}a_{14}a_{23}a_{34} - a_{12}a_{24}a_{13}a_{34} - a_{12}a_{13}a_{24}a_{34} + a_{13}^2a_{24}^2 \\ &\qquad - a_{13}a_{14}a_{23}a_{24} + a_{12}a_{14}a_{23}a_{34} - a_{13}a_{14}a_{23}a_{24} + a_{14}^2a_{23}^2 \\ &= a_{12}^2a_{34}^2 + a_{13}^2a_{24}^2 + a_{14}^2a_{23}^2 \\ &\qquad + 2a_{12}a_{14}a_{23}a_{34} - 2a_{12}a_{24}a_{13}a_{34} - 2a_{12}a_{13}a_{24}a_{34}.\end{aligned}$$

Kuna

$$\begin{aligned}(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2 &= a_{12}^2a_{34}^2 + a_{13}^2a_{24}^2 + a_{14}^2a_{23}^2 \\ &\qquad + 2a_{12}a_{14}a_{23}a_{34} - 2a_{12}a_{24}a_{13}a_{34} - 2a_{12}a_{13}a_{24}a_{34},\end{aligned}$$

siis

$$\mathrm{Pf}(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}.$$

Teoreem 2. *Olgu $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ kommutatiivne superalgebra, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathcal{A}_0$ n-järku kaldsümmeetriline ruutmaatriks ja $\psi^1, \ldots, \psi^n \in \mathcal{A}_1$. Siis kehtib [7]*

$$e^{\frac{1}{2}\sum a_{ij}\psi^{ij}} = \sum_I Pf(A_I)\psi^I,$$

kus

$$e^f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n,\ f \in A,$$

$Pf(A_\emptyset) = 1$ ja $\psi^\emptyset = \mathbb{1}$.

Kuigi siinkohal me antud teoreemi ei tõesta, näitame, et tulemus kehtib $n = 4$ korral. Olgu $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ kommutatiivne superalgebra, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}_0)$ kaldsümmeetriline maatriks ja $\psi^1, \ldots, \psi^n \in \mathcal{A}_1$. Arvestades, et $\psi^{ij} = -\psi^{ji}$, $a_{ij} = -a_{ji}$ ja $a_{ii} = 0$, saame, et

$$\sum a_{ij}\psi^{ij} = 2(a_{12}\psi^{12} + a_{13}\psi^{13} + a_{14}\psi^{14} + a_{23}\psi^{23} + a_{24}\psi^{24} + a_{34}\psi^{34}).$$

Seega

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{2}\sum a_{ij}\psi^{ij}} &= e^{a_{12}\psi^{12}+a_{13}\psi^{13}+a_{14}\psi^{14}+a_{23}\psi^{23}+a_{24}\psi^{24}+a_{34}\psi^{34}} \\ &= \mathbb{1} + a_{12}\psi^{12} + a_{13}\psi^{13} + a_{14}\psi^{14} + a_{23}\psi^{23} + a_{24}\psi^{24} + a_{34}\psi^{34} \\ &\qquad + \frac{1}{2}\big(a_{12}a_{34}\psi^{1234} + a_{13}a_{24}\psi^{1324} + a_{14}a_{23}\psi^{1423} + \\ &\qquad\qquad + a_{23}a_{14}\psi^{2314} + a_{24}a_{13}\psi^{2413} + a_{34}a_{12}\psi^{3412}\big) + 0 \\ &= \mathbb{1} + a_{12}\psi^{12} + a_{13}\psi^{13} + a_{14}\psi^{14} + a_{23}\psi^{23} + a_{24}\psi^{24} + a_{34}\psi^{34} + \\ &\qquad a_{12}a_{34}\psi^{1234} - a_{13}a_{24}\psi^{1234} + a_{14}a_{23}\psi^{1234}.\end{aligned}$$

Teiselt poolt

$$\sum_I \mathrm{Pf}(A_I)\psi^I = \mathbb{1} + a_{12}\psi^{12} + a_{13}\psi^{13} + a_{14}\psi^{14} + a_{23}\psi^{23} +$$

$$+ a_{24}\psi^{24} + a_{34}\psi^{34} + (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})\psi^{1234}.$$

Näeme, et tõesti

$$e^{\frac{1}{2}\sum a_{ij}\psi^{ij}} = \sum_I \mathrm{Pf}(A_I)\psi^I.$$

Peatükk 4

Tuletised ja integraal Grassmanni algebral

4.1 Tuletised Grassmanni algebral

Tuletise definitsiooni anname lähtudes Lebnizi valemist, kuid võttes arvesse superalgebra antikommutatiivsust. Olgu $\mathcal{G}^n$ Grassmanni algebra moodustjate süsteemiga $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$. Vaatame praegu tuletise võtmist üle monoomide. Sealt on lihtne üldistada tuletise operaator kogu superalgebrale, tulenevalt tuletise lineaarsusest. Esiteks, võtame

$$\frac{\partial}{\partial \theta^j}(\mathbb{1}) = 0;$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial \theta^j}(\theta^i) = \delta^i_j.$$

Olgu nüüd $\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k} \in \mathcal{G}^n$, kus $i_1, \dots i_k \in \{1, \dots, n\}$ ja $i_1 < \dots < i_k$, mingi monoom. Defineerime tema tuletise mingi moodustaja $\theta^j \in \mathcal{G}^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$, järgi, kasutades eelnevalt toodud moodustajate tuletisi kujul

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \theta^j}(\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k}) = \frac{\vec{\partial}}{\partial \theta^j}(\theta^{i_1})\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k} - \theta^{i_1}\frac{\vec{\partial}}{\partial \theta^j}(\theta^{i_2})\theta^{i_3}\dots\theta^{i_k} + \dots \\ + (-1)^{k-1}\theta^{i_1}\dots\theta^{i_{k-1}}\frac{\vec{\partial}}{\partial \theta^j}(\theta^{i_k}). \quad (4.1)$$

Näeme, et tegemist on justkui Lebnizi valemiga, kus iga teine liidetav on korrutatud miinus ühega. Sellest võib mõelda nii, et peame monoomis vastava moodustaja, üle mille hakkame tuletist võtma, tooma esimesele kohale. Antikommutatiivsuse reegli järgi tuleb vastav liidetav läbi korrutada miinus ühega parajasti siis, kui uus monoom on saadud eelmisest paarisarvu permutatsioonide abil. Samas, miski ei ütle, et me peame alustama tuletise võtmisega just vasakult poolt. Siit ka nool tuletise operaatori kohal, rõhutamaks, et vaatame just vasakpoolset osatuletist. Paneme tähele, et kui k on paaritu arv, siis võttes tuletist paremalt poolt (ehk jälgides, et moodustaja üle mille parajasti tuletist võtame, oleks kõige paremal) tuleb vastus sama, mis vasakult poolt diferentseerides. Kui aga k on paaris arv, siis vastus muutub, nimelt saadud vasaku käe diferentsiaal (4.1) tuleb läbi korrutada miinus ühega. Superalgebras eristame vasakpoolset tuletist, mis on kujul (4.1) ning parempoolset tuletist kujul

$$(\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k})\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^j} = \theta^{i_1}\dots\theta^{i_{k-1}}(\theta^{i_k})\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^j} - \theta^{i_1}\dots\theta^{i_{k-2}}(\theta^{i_{k-1}})\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^j}\theta^{i_k} + \dots \\ + (-1)^{k-1}(\theta^1)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^j}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k}. \quad (4.2)$$

Nagu juba mainisime, kehtib

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^j}(\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k}) = (\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k})\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^j},$$

kui k on paaritu arv ning

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^j}(\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k}) = -(\theta^{i_1}\theta^{i_2}\dots\theta^{i_k})\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^j},$$

kui k on paarisarv. Seega kehtib supertuletise puhul omadus [1]

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^i}f = -(-1)^{|f|}f\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^i}$$

iga moodustaja θ^i ja homogeense $f \in \mathcal{G}^n$ korral.

Näide 7. Vaatame Grassmanni algebrat $\mathcal{G}^4$ moodustajate süsteemiga $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$. Olgu

$$f(\theta) = 5\theta^1 + 2\theta^2 + 8\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4.$$

Võtame $g(\theta)$ parempoolse tuletise moodustaja θ^2 järgi. Definitsiooni järgi

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^2}f(\theta) &= \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^2}(5\theta^1 + 2\theta^2 + 8\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4) \\ &= 5\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^2}(\theta^1) + 2\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^2}(\theta^2) + 8\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^2}(\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4) \\ &= 2 - 8\theta^1\theta^3\theta^4.\end{aligned}$$

Paneme veel tähele, et parempoolne tuletis üle sama moodustaja on

$$f(\theta)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^2} = 2 + 8\theta^1\theta^3\theta^4.$$

Def 13. Ütleme, et element $f \in \mathcal{G}^n$ *ei sõltu muutujast* θ^i, $i \in \{1, \dots, n\}$, kui

$$\frac{\partial}{\partial\theta^i}f = 0.$$

Lause 3. Olgu $\mathcal{G}^n$ Grassmanni. Näitame, et kui $\theta^i, \theta^j \in \mathcal{G}^n$ on moodustajad ja $\theta^i \neq \theta^j$, siis

$$\frac{\partial}{\partial\theta^i}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta^j}\Big) = -\frac{\partial}{\partial\theta^j}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta^i}\Big).$$

Tõestus. Üldisust kitsendamata eeldame, et $i < j$ ja osatuletis on vasakpoolne. Piisab, kui näitame, et tulemus kehtib monoomide korral. Fikseerime mingi monoomi

$$f = \theta^{u_1} \dots \theta^{u_k}.$$

Kui f ei sõltu moodustajast θ^i või θ^j, kehtib võrdus triviaalselt. Eeldame, et f sõltub mõlemast moodustajast. Siis leiduvad sellised $p, q \in \{1, \dots, k\}$, $p \neq q$, et $i = u_p$ ja $j = u_q$. Seega

$$f_j := \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^j}(f) = (-1)^{q-1}\theta^{u_1} \dots \theta^{u_{q-1}}\theta^{u_{q+1}} \dots \theta^{u_k}$$

ja

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^i}(f_j) = (-1)^{(q-1)+(p-1)}\theta^{u_1} \dots \theta^{u_{p-1}}\theta^{u_{p+1}} \dots \theta^{u_{q-1}}\theta^{u_{q+1}} \dots \theta^{u_k}.$$

Teiselt poolt

$$f_i := \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^i}(f) = (-1)^{p-1}\theta^{u_1} \dots \theta^{u_{p-1}}\theta^{u_{p+1}} \dots \theta^{u_k}$$

ja

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^j}(f_i) = (-1)^{(p-1)+(q-2)}\theta^{u_1} \dots \theta^{u_{p-1}}\theta^{u_{p+1}} \dots \theta^{u_{q-1}}\theta^{u_{q+1}} \dots \theta^{u_k}.$$

Kokkuvõttes, kui $(q-1)+(p-1) = p+q-2$ on paarisarv, siis $(p-1)+(q-2) = p+q-3$ on paaritu arv ja vastupidi. Seega lause kehtib. □

4.2 Integreerimine Grassmanni algebral

Lähtudes F. A. Berezini raamatust [1], defineerime integraali Grassmanni algebral lähtudes tingimustest

$$\int d\theta^i = 0, \tag{4.3}$$

$$\int \theta^i \, d\theta^i = 1 \tag{4.4}$$

ja

$$\int f(\theta)g(\theta)\, d\theta^i = f(\theta)\int g(\theta)\, d\theta^i, \tag{4.5}$$

kui $\theta^i \in \{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ ja $f(\theta)$ ei sõltu muutujast θ^i. Et võtta integraali üle mitme moodustaja, kasutame siin korduva integraali mõistet. See tähendab, et kirjaviisi

$$\int f(\theta)d\theta^{i_1} \dots d\theta^{i_k},$$

kus $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, all mõistame avaldist, kus kõigepealt võtame integraali üle elemendi $f(\theta)$ moodustaja θ^{i_1} järgi. Saadud tulemusest võtame integraali moodustaja θ^{i_2} järgi ja nii edasi, kuni oleme võtnud integraali moodustaja θ^{i_k} järgi. Paneme tähele, et integraali väärtus sõltub moodustajate järjekorrast ehk üldiselt

$$\int f(\theta)\, d\theta^{i_1} \ldots d\theta^{i_h} d\theta^{i_{h+1}} \ldots d\theta^{i_k} \neq \int f(\theta)\, d\theta^{i_1} \ldots d\theta^{i_{h+1}} d\theta^{i_h} \ldots d\theta^{i_k}.$$

Toome selle tõestamiseks ühe näite.

Näide 8. Olgu Grassmanni algebra $\mathcal{G}^2$ moodustajate süsteem $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$. Siis ühelt poolt

$$\begin{aligned}
\int \theta^1\theta^2\theta^3\, d\theta^1 d\theta^2 &= \int \Big(\int \theta^1\theta^2\theta^3\, d\theta^1 \Big) d\theta^2 \\
&= \int \Big(\int \theta^2\theta^3\theta^1\, d\theta^1 \Big) d\theta^2 \\
&= \int \Big(\theta^2\theta^3 \int \theta^1\, d\theta^1 \Big) d\theta^2 \\
&= \int \theta^2\theta^3\, d\theta^2 \\
&= \int -\theta^3\theta^2\, d\theta^2 \\
&= -\theta^3 \int \theta^2\, d\theta^2 \\
&= -\theta^3.
\end{aligned}$$

Teiselt poolt

$$\begin{aligned}
\int \theta^1\theta^2\theta^3\, d\theta^2 d\theta^1 &= \int \Big(\int -\theta^1\theta^3\theta^2\, d\theta^2 \Big) d\theta^1 \\
&= \int \Big(-\theta^1\theta^3 \int \theta^2\, d\theta^2 \Big) d\theta^1 \\
&= \int -\theta^1\theta^3\, d\theta^1 \\
&= \int \theta^3\theta^1\, d\theta^1 \\
&= \theta^3 \int \theta^1\, d\theta^1 \\
&= \theta^3.
\end{aligned}$$

Anname nüüd definitsiooni kujutusele, mida üldiselt mõistekse niinimetatud superintegraali all [3].

Def 14. *Berezini integraal (superintegraal)* Grassmanni algebral $\mathcal{G}^n$ moodustajate süsteemiga $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ on lineaarne kujutus $\mathrm{B} : \mathcal{G}^n \to \mathbb{K}$,

$$\mathrm{B}(f) = \int f(\theta)\, d\theta^1 \ldots d\theta^n.$$

On lihtne kontrollida, et kehtib omadus [3]

$$\mathrm{B}(f) = f_{12\ldots n}$$

suvalise $f \in \mathcal{G}^n$ korral. Tulenevalt osatuletise definitsioonist kehtib suvalise $f \in \mathcal{G}^n$ korral ka

$$\int f(\theta)\, d\theta^1 \ldots d\theta^n = \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^n} \cdots \frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^1} f.$$

Integraali puhul oleks loomulik oodata, et see oleks invariantne koordinaatsüsteemi vahetusel. Berezini integraal on tõesti invariantne Grassmanni algebra ühelt koordinaatsüsteemilt teisele üleminku suhtes, mida näitab järgmine lause [3].

Lause 4. Olgu $\mathcal{G}^n$ Grassmanni algebra ning $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ ja $\{\eta^1, \ldots, \eta^n\}$ tema moodustajate süsteemid, kus $\theta^i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\eta^j$ ja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ on $n \times n$ pööratav maatriks. Siis

$$\int f(\theta)\, d\theta^1 \ldots d\theta^n = \frac{1}{\det A} \int g(\eta)\, d\eta^1 \ldots d\eta^n,$$

kus $g(\eta) = f(\theta(\eta)) = f(a_{1j}\eta^j, \ldots, a_{nj}\eta^j)$ (kasutame siin Einsteini summeerimiskokkulepet).

Tõestus. Teame, et

$$\int f(\theta)\, d\theta^1 \ldots d\theta^n = f_{1\ldots n}$$

ja

$$\int g(\eta)\, d\eta^1 \ldots d\eta^n = g_{1\ldots n}.$$

Kuna elemendi f superintegraali väärtus ei sõltu arvudest $f_{\mathcal{I}}$, kus $\mathcal{I} \neq \{1, \ldots, n\}$, siis võime üldisust kitsendamata võtta kõik arvud $f_{\mathcal{I}}$, välja arvatud $f_{1\ldots n}$, võrdseks nulliga. Toimime analoogiliset ka elemendiga g. Siis

$$\begin{aligned}
f(\theta(\eta)) &= f_{1\dots n}\theta^{1,2\dots n} \\
&= f_{1\dots n}\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\eta^{j}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\eta^{j}\Big)\dots\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}\eta^{j}\Big)\Big) \\
&= f_{1\dots n}\Big(a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}(\eta^1\eta^2\eta^3\dots\eta^n) \\
&\qquad\qquad + a_{11}a_{23}a_{32}\dots a_{nn}(\eta^1\eta^3\eta^2\dots\eta^n) + \dots \\
&\qquad\qquad + a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\dots a_{n1}(\eta^n\eta^{n-1}\eta^{n-2}\dots\eta^1)\Big) \\
&= f_{1\dots n}\Big(a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}(\eta^1\eta^2\eta^3\dots\eta^n) \\
&\qquad\qquad - a_{11}a_{23}a_{32}\dots a_{nn}(\eta^1\eta^2\eta^3\dots\eta^n) + \dots \\
&\qquad\qquad + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\dots a_{n1}(\eta^1\eta^2\eta^3\dots\eta^n)\Big) \\
&= f_{1\dots n}\Big(a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} - a_{11}a_{23}a_{32}\dots a_{nn} + \dots \\
&\qquad\qquad + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\Big)\eta^1\eta^2\eta^3\dots\eta^n \\
&= f_{1\dots n}\det(A)\eta^1\eta^2\eta^3\dots\eta^n.
\end{aligned}$$

Kuna $f(\theta(\eta)) = g(\eta)$, siis

$$f_{1\dots n}\det(A)\eta^1\eta^2\eta^3\dots\eta^n = f(\theta) = g(\eta) = g_{1\dots n}\eta^1\eta^2\eta^3\dots\eta^n$$

ehk

$$f_{1\dots n} = \frac{1}{\det A}g_{1\dots n}.$$

Sellega olemegi näitanud, et

$$\int f(\theta)\,d\theta^1\dots d\theta^n = f_{1\dots n} = \frac{1}{\det A}g_{1\dots n} = \frac{1}{\det A}\int g(\eta)\,d\eta^1\dots d\eta^n.$$

□

Integraali ja Pfafiaani vahel kehtib järgmine ilus seos [3].

Teoreem 5. *Olgu A mingi n-järku kaldsümmeetriline maatriks, siis*

$$\int e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\theta^i\theta^j}d\theta^1\dots d\theta^n = \mathrm{Pf}(A).$$

Tõestus. Kui n on paaritu arv, siis mõlemad pooled on võrdsed nulliga ning võrdus kehtib triviaalselt. Olgu n paarisarv. Vaatame võrduse paremat poolt. Arvutame

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\theta^i\theta^j &= \frac{1}{2}\Big(a_{11}\theta^1\theta^1 + a_{12}\theta^1\theta^2 + \ldots + a_{1n}\theta^1\theta^n + a_{21}\theta^2\theta^1 + \ldots \\
&\qquad\qquad + a_{n-1,n}\theta^{n-1}\theta^n + a_{nn}\theta^n\theta^n\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big((a_{12} - a_{21})\theta^1\theta^2 + (a_{13} - a_{31})\theta^1\theta^3 + \ldots + (a_{1n} - a_{n1})\theta^1\theta^n + \ldots \\
&\qquad\qquad + (a_{n-1,n} - a_{n,n-1})\theta^{n-1}\theta^n\Big) \\
&= a_{12}\theta^1\theta^2 + a_{13}\theta^1\theta^3 + \ldots + a_{1n}\theta^1\theta^n + \ldots + a_{n-1,n}\theta^{n-1}\theta^n.
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\theta^i\theta^j} &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\theta^i\theta^j\Big)^m \\
&= \mathbb{1} + a_{12}\theta^1\theta^2 + a_{13}\theta^1\theta^3 + \ldots + a_{1n}\theta^1\theta^n + \ldots + a_{n-1,n}\theta^{n-1}\theta^n \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(a_{12}a_{34}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4 + a_{12}a_{35}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^5 + \ldots + a_{12}a_{3n}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^n \\
&\qquad + a_{12}a_{45}\theta^1\theta^2\theta^4\theta^5 + \ldots + a_{12}a_{n-1,n}\theta^1\theta^2\theta^{n-1}\theta^n \\
&\qquad - a_{13}a_{24}\theta^1\theta^3\theta^2\theta^4 - \ldots - a_{13}a_{2n}\theta^1\theta^3\theta^2\theta^n + a_{13}a_{45}\theta^1\theta^3\theta^4\theta^5 + \ldots \\
&\qquad + a_{n-1,n}a_{n-3,n-2}\theta^{n-3}\theta^{n-2}\theta^{n-1}\theta^n\Big) + \ldots \\
&\quad + \frac{1}{\frac{n}{2}!}\Big(\sum_{\sigma^*\in S_n^*}\operatorname{sgn}(\sigma^*)\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{\sigma^*(2i-1),\sigma^*(2i)}\Big)\theta^1\ldots\theta^n,
\end{aligned}$$

kus S_n^* on kõikide selliste hulga $\{1,\ldots,n\}$ permutatsioonide hulk, kus iga $i \in \{1,\ldots,\frac{n}{2}\}$ korral $\sigma(2i-1) < \sigma(2i)$. Viimane siin toodud liidetav on summas $e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\theta^i\theta^j}$ viimane nullist erinev, sest iga monoom, mis on saadud rohkem kui n moodustaja korrutamisel, võrdub nulliga. On ka lihtne, et

$$\int e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\theta^i\theta^j} d\theta^1\ldots d\theta^n = \frac{1}{\frac{n}{2}!}\Big(\sum_{\sigma^*\in S_n^*}\operatorname{sgn}(\sigma^*)\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{\sigma^*(2i-1),\sigma^*(2i)}\Big).$$

Vaadates võrduse paremal pool olevat summat üle kõikide permutatsioonide hulga S_n, saame, et

$$\frac{1}{\frac{n}{2}!}\Big(\sum_{\sigma^*\in S_n^*}\operatorname{sgn}(\sigma^*)\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{\sigma^*(2i-1),\sigma^*(2i)}\Big) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!}\Big(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)}\Big),$$

sest iga $\sigma^* \in S_n^*$ kohta leidub $2^{\frac{n}{2}}$ erinevat permutatsiooni $\sigma \in S_n$ nii, et $a_{\sigma^*(2i-1),\sigma^*(2i)} = a_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)}$. Kuna vastavalt valemile (3.7) on $2k \times 2k$ kaldsümmeetrilise maatriksi $A = (a_{ij})$ korral

$$\operatorname{Pf}(A) = \frac{1}{2^k k!}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{k} a_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)},$$

oleme tõestanud, et võrdus kehtib. $\square$

Kirjandus

[1] F. A. Berezin, *Introduction to supersymmetry.* D. Reidel Publishing Company, 1987.

[2] V. Abramov and P. Kuusk, *Supersümmeetria füüsikas ja matemaatikas.* Tartu Ülikooli Kirjastus, 1994.

[3] L. A. Takhtadzhian, *Quantum mechanics for mathematicians.* American Mathematical Society, 2008.

[4] B. C. Hall, *Quantum theory for mathematicians.* Springer, 2013.

[5] E. Wittens, M. B. Green, and J. H. Schwarz, *Superstring theory*, vol. 2. Cambridge University Press, 1988.

[6] G. Kangro, *Kõrgem algebra.* Eesti Riiklik Kirjastus, 1962.

[7] D. Quillern and V. Mathai, “Superconnections, thom classes, and equivariant differential forms,” *Topology*, vol. 25, p. 85–110, 1986.

[8] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators.* Springer, 2004.

[9] A. Cayley, “Sur les déterminants gauches,” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 38, p. 93–96, 1848.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Georg Simmul,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Supergeomeetria struktuurid", mille juhendaja on Viktor Abramov, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Georg Simmul
08.05.2019