Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Tähvend Uustalu

Lühikesed eeltäpsed jadad eeljärjestatud Ω-algebrate kategoorias

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Valdis Laan

Tartu 2020

Lühikesed eeltäpsed jadad eeljärjestatud Ω-algebrate kategoorias

Bakalaureusetöö

Tähvend Uustalu

Lühikokkuvõte. Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on uurida lühikese eeltäpse jada mõistet eeljärjestatud Ω-algebrate kategoorias. A. Facchini ja C. Finocchiaro hiljuti ilmunud artikli (milles vaadeldakse eeljärjestatud hulkade kategooriat) eeskujul defineerime eeltuuma, eelkotuuma ning lühikese eeltäpse jada mõiste; konstrueerime igale morfismile eeltuuma ja eelkotuuma; kirjeldame isomorfismi täpsusega ära lühikesed eeltäpsed jadad ning konstrueerime ühe eelväändeteooria. Lisaks tõestame üldisema variandi lühikesest 5-lemmast, mis hõlmab ka eeljärjestatud Ω-algebrate eeltäpseid jadasid, ning nõrgema variandi 9-lemmast.
CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria

Märksõnad. Seosed, universaalalgebrad, homoloogiline algebra, kategooriateooria

Short preexact sequences in the category of preordered Ω-algebras

Bachelor's thesis

Tähvend Uustalu

Abstract. The aim of this thesis is to investigate short preexact sequences in the category of preordered Ω-algebras. Following a recent paper by A. Facchini and C. Finocchiaro (which considers the category of preordered sets), we define the prekernel, precokernel and short preexact sequence; construct a prekernel and a precokernel for each morphism; describe all short preexact sequences up to isomorphism and construct a pretorsion theory. In addition, we prove a more general variant of the short 5-lemma, which also applies to short preexact sequences of preordered Ω-algebras, and a weaker variant of the 9-lemma.
CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory

Keywords. Relations, universal algebras, homological algebra, category theory

Sisukord

Sissejuhatus

Täpsed jadad ning nende kohta käivad diagrammlemmad on homoloogilises algebras keskne tööriist. Kui tavaliselt vaadatakse neid Abeli rühmade või moodulite korral; üldisemalt Abeli kategooriates või regulaarsetes kategooriates, siis artikkel [3] tegeleb nende mõistetega uudsemas olukorras — defineerib lühikese eeltäpse jada eeljärjestatud hulkade kategoorias Preord. Eeltäpsuse mõte on motiveeritud faktist, et lühikesed eeltäpsed jadad vastavad parajasti lühikestele täpsetele jadadele teatavas faktorkategoorias $\underline{\mathsf{Preord}}$.

Käesolev bakalaureusetöö on jaotatud kolmeks peatükiks. Esimeses peatükis toome sisse vajalikud põhimõisted ja eelteadmised (eeljärjestatud) universaalalgebrate kohta ning illustreerime neid näidetega. Lisaks toome sisse artiklis [3] antud üldisema lühikese $\mathcal{Z}$-eeltäpse jada mõiste (koos selle defineerimiseks vajalike mõistetega), mille erijuhuks on eeljärjestatud Ω-algebrate lühikese eeltäpse jada mõiste.

Teine peatükk on suuresti inspireeritud A. Facchini ja C. Finocchiaro hiljutisest artiklist [3]. Peatükis üldistame artikli tähtsamad eeljärjestatud hulkade kategoorias kehtivad tulemused eeljärjestatud Ω-algebrate juhule: defineerime selles kontekstis eeltuuma, eelkotuuma ning lühikese eeltäpse jada mõiste; konstrueerime igale morfismile eeltuuma ja eelkotuuma, kirjeldame lühikesed eeltäpsed jadad isomorfismi täpsuseni ära ning näitame, et teatav paar $(\mathsf{Equiv}_\Omega, \mathsf{ParOrd}_\Omega)$ moodustab eelväändeteooria. Eelmainitud tulemuste tõestused on üldjoontes analoogilised artikli [3] tõestustele, kuid täiendavalt tuleb tõestuses arvestada Ω-algebral defineeritud tehetega. Lisaks anname eeltuumaks, eelkotuumaks ning lühikeseks eeltäpseks jadaks olemise piisava ja tarviliku tingimuse "elementide kaudu".

Kolmandas peatükis uurime täiendavalt eeljärjestatud Ω-algebra lühikese eeltäpse jada mõistet, tõestades selle jaoks klassikaliste diagrammlemmade analooge. Tõestame kaks sellist tulemust: üldisema variandi lühikesest 5-lemmast, mis hõlmab lisaks Abeli kategooriatele ka eeljärjestatud Ω-algebrate lühikesi eeltäpseid jadasid, ning nõrgema variandi 9-lemmast.

1 Põhidefinitsioonid

1.1 Ω-algebra

Antud töös on mugavam lugeda 0 naturaalarvuks. Sümboliga $\mathbb{N}$ tähistame ja naturaalarvudeks loeme hulka $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Mõnel pool töös kohtame kirjutist "olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $a_1, \ldots, a_n \in A$". Kui $n = 0$, tõlgendame seda üheelemendilise hulga A^0 ainsa elemendi fikseerimisena.

Definitsioon 1.1 ([4, def. 2.1.2]). Hulka Ω koos tükeldusega oma lõikumatute alamhulkade $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ ühendiks nimetatakse *tüübiks*. Hulga Ω_n elemente tõlgendatakse n-aarsete tehtemärkidena.

Kogu käesoleva töö jooksul tähistab Ω tüüpi.

Definitsioon 1.2 (vrd [4, def. 2.1.3]). Ω-*algebraks* nimetatakse paari $\mathbf{A} = (A, \Omega_A)$, kus

- A on hulk (seda hulka nimetatakse Ω-algebra $\mathbf{A}$ *põhihulgaks*),
- iga $n \in \mathbb{N}$ ja $\omega \in \Omega_n$ jaoks on defineeritud n-aarne tehe $\omega_A \colon A^n \to A$,
- Ω_A on nende tehete ω_A hulk.

Definitsioon 1.3 ([4, def. 2.8.1]). Olgu $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ Ω-algebrad. Nimetame kujutust $\varphi \colon A \to B$ Ω-*algebrate homomorfismiks*, kui iga $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$ ja $a_1, \ldots, a_n \in A$ korral kehtib võrdus

$$\varphi(\omega_A(a_1, \ldots, a_n)) = \omega_B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)).$$

1.2 Eeljärjestatud Ω-algebra

Olgu Ω tüüp ja $\mathbf{A}$ Ω-algebra.

Definitsioon 1.4. Olgu ρ binaarne seos hulgal A. Ütleme, et see on *kooskõlas* $\mathbf{A}$ *tehetega*, kui iga $n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega_n$ ja $a_1, a_2, \ldots, a_n, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \in A$ korral

$$a_1 \rho a'_1, \cdots, a_n \rho a'_n \implies \omega(a_1, \ldots, a_n) \, \rho \, \omega(a'_1, \ldots, a'_n). \tag{1}$$

Märkus 1.5. Selles töös kasutame ainult binaarseid seoseid. Seega öeldes "seos" mõtleme alati binaarset seost.

Definitsioon 1.6. Olgu ρ seos hulgal A.

- Seost ρ nimetatakse *eeljärestusseoseks* Ω-*algebral* $\mathbf{A}$, kui ta on eeljärjestusseos (refleksiivne ja transitiivne) ning kooskõlas $\mathbf{A}$ tehetega.
- Seost ρ nimetetakse *järjestusseoseks* Ω-*algebral* $\mathbf{A}$, kui ta on järjestusseos (refleksiivne, transitiivne ja antisümmeetriline) ning kooskõlas $\mathbf{A}$ tehetega.
- Seost ρ nimetatakse *kongruentsiks* Ω-*algebral* $\mathbf{A}$, kui ta on ekvivalentsusseos (refleksiivne, transitiivne ja sümmeetriline) ning kooskõlas $\mathbf{A}$ tehetega.

Ω-algebrat koos eeljärjestusega või järjestusega sellel nimetatakse vastavalt *eeljärjestatud* Ω-*algebraks* või *järjestatud* Ω-*algebraks*. Järjestatud Ω-algebraid on uuritud paljudes artiklites, neist üks esimesi oli [1].

Definitsioon 1.7. ([4, def. 2.5.4]) Olgu ρ kongruents Ω-algebral $\mathbf{A}$. *Faktoralgebraks* nimetame faktorhulka A/ρ, kus tehted on defineeritud järgnevalt: iga $n \in \mathbb{N}$ ja $\omega \in \Omega_n$ korral

$$\omega_{A/\rho}([a_1]_\rho, \ldots, [a_n]_\rho) = [\omega_A(a_1, \ldots, a_n)]_\rho.$$

Ω-algebra $\mathbf{A}$ faktoralgebrat kongruentsi ρ järgi tähistame sümboliga $\mathbf{A}/\rho$.

Näide 1.8. Olgu S kommutatiivne monoid. Defineerime seose $\mid$ järgnevalt: olgu $a, b \in S$, siis $a \mid b$ parajasti siis, kui leidub $c \in S$ nii, et $ac = b$. Siis $(\mathbf{S}, \mid)$ on eeljärjestatud Ω-algebra, täpsemalt eeljärjestatud kommutatiivne monoid. Siin Ω on selline, et $\Omega_0 = \{1\}$ ja $\Omega_2 = \{\cdot\}$.

Tõepoolest:

- *Refleksiivsus.* Iga $a \in S$ korral $a \mid a$, sest $a \cdot 1 = a$.
- *Transitiivsus.* Olgu $a \mid b$ ja $b \mid c$, ehk leidugu d ja f nii, et $ad = b$ ja $bf = c$. Siis $a \mid c$, sest $a(df) = c$.
- *Kooskõla tehetega.* Olgu $a \mid b$ ja $c \mid d$, ehk leidugu f ja g nii, et $af = b$ ja $cg = d$. Siis $ac \mid bd$, sest $(ac)(fg) = bd$.

Paneme tähele, et $\mid$ ei pruugi osutuda järjestusseoseks ega kongruentsiks. Tõepoolest, vaatleme täisarvude monoidi $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Seal $-1 \mid 1$ ja $1 \mid -1$, aga $-1 \neq 1$; samuti $2 \mid 4$, aga $4 \nmid 2$. Seega ei ole tegu ei sümmeetrilise ega antisümmeetrilise seosega. Niisiis leidub eeljärjestatud algebraid, mis ei ole järjestatud algebrad.

Näide 1.9. Olgu X mingi hulk ja $A = \mathcal{P}(X)$. Kui võtta Ω selline, et $\Omega_2 = \{\cap, \cup\}$ ning ülejäänud hulgad Ω_i on tühjad, siis $(\mathbf{A}, \subseteq)$ on järjestatud Ω-algebra. Tõepoolest, on lihtne veenduda, et kehtivad implikatsioonid

$$B \subseteq C, D \subseteq E \implies (B \cap D) \subseteq (C \cap E),$$
$$B \subseteq C, D \subseteq E \implies (B \cup D) \subseteq (C \cup E).$$

Lause 1.10 (vrd [3, lause 2.2])**.** *Olgu* $\mathbf{A}$ Ω*-algebra. Eeljärjestused sellel* Ω*-algebral on üksüheses vastavuses paaridega* $(\sim, \leqslant)$*, kus* $\sim$ *on kongruents algebral* $\mathbf{A}$ *ja* $\leqslant$ *on järjestusseos faktoralgebral* $\mathbf{A}/\sim$.

Tõestus. Olgu ρ eeljärjestus Ω-algebral $\mathbf{A}$. Defineerime hulgal A ekvivalentsusseose $\sim$ seosega

$$a \sim b \iff a\rho b \wedge b\rho a.$$

Näitame, et $\sim$ on kooskõlas tehetega. Olgu $n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega_n$, $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n \in A$ ja eeldame, et $a_1 \sim a'_1, a_2 \sim a'_2, \ldots a_n \sim a'_n$ ehk $a_1\rho a'_1, a'_1\rho a_1, \ldots, a_n\rho a'_n, a'_n\rho a_n$. Et ρ on tehetega kooskõlas ja $a_1\rho a'_1, \ldots, a_n\rho a'_n$, saame $\omega(a_1, \ldots, a_n)\rho\omega(a'_1, \ldots, a'_n)$. Analoogiliselt $\omega(a'_1, \ldots, a'_n)\rho\omega(a_1, \ldots, a_n)$. Seega $\omega(a_1, \ldots, a_n) \sim \omega(a'_1, \ldots, a'_n)$.

Et $\sim$ on kongruents, võime vaadelda faktoralgebrat $\mathbf{A}/\sim$. Defineerime faktorhulgal $A/\sim$ seose $\leqslant$ järgmiselt:

$$[a] \leqslant [b] \iff a\rho b.$$

Veendume, et $\leqslant$ definitsioon ei sõltu ekvivalentsiklassi esindajate valikust. Olgu $a, a' \in [a]$ ja $b, b' \in [b]$, s.t. $a \sim a'$ ja $b \sim b'$. Näitame, et siis $a\rho b$ parajasti siis, kui $a'\rho b'$. Seostest $a \sim a'$ ja $b \sim b'$ saame $a'\rho a$ ja $b\rho b'$. Kui nüüd $a\rho b$, siis saame ρ transitiivsusest, et $a'\rho b'$. Analoogiliselt saab tõestada teistpidi implikatsiooni.

Näitame, et $\leqslant$ on järjestusseos faktoralgebral $\mathbf{A}/\sim$.

- *Refleksiivsus.* Olgu $a \in A$. Et ρ on eeljärjestus, siis ρ on refleksiivne, seega kehtib $a\rho a$ ehk $[a] \leqslant [a]$.
- *Antisümmeetria.* Olgu $a, b \in A$, kusjuures $[a] \leqslant [b]$ ja $[b] \leqslant [a]$. Näitame, et $[a] = [b]$. Et $[a] \leqslant [b]$ ja $[b] \leqslant [a]$, siis saame, et $a\rho b$ ja $b\rho a$ ehk $a \sim b$. Et $a \sim b$, siis $[a] = [b]$.
- *Transitiivsus.* Olgu $a, b, c \in A$, kusjuures $[a] \leqslant [b]$ ja $[b] \leqslant [c]$. Siis $a\rho b$ ja $b\rho c$. Et ρ on transitiivne, siis $a\rho c$ ehk $[a] \leqslant [c]$.
- *Kooskõla tehetega.* Olgu $n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega_n$ ja $[a_1], \dots, [a_n], [a'_1], \dots [a'_n] \in A/\rho$. Siis

$$\begin{aligned}
[a_1] \leqslant [a'_1], \dots, [a_n] \leqslant [a'_n] &\implies a_1\rho a'_1, \dots, a_n\rho a'_n \\
&\implies \omega_A(a_1, \dots, a_n)\rho\omega_A(a'_1, \dots, a'_n) \\
&\implies [\omega_A(a_1, \dots, a_n)] \leqslant [\omega_A(a'_1, \dots a'_n)] \\
&\implies \omega_{A/\sim}([a_1], \dots, [a_n]) \leqslant \omega_{A/\sim}([a'_1], \dots, [a'_n]).
\end{aligned}$$

Seega võime igale Ω-algebra $\mathbf{A}$ eeljärjestusele seada vastavusse paari $(\sim, \leqslant)$, kus $\sim$ on Ω-algebra $\mathbf{A}$ kongruents ja $\leqslant$ on järjestusseos Ω-algebral $\mathbf{A}/\sim$.

Näitame, et mistahes selline paar $(\sim, \leqslant)$ tekitab eeljärjestusseose Ω-algebral $\mathbf{A}$. Võtame mingi paari $(\sim, \leqslant)$, kus $\sim$ on kongruents Ω-algebral $\mathbf{A}$ ja $\leqslant$ on järjestusseos faktoralgebral $\mathbf{A}/\sim$. Defineerime mistahes $a, b \in A$ korral

$$a\rho b \iff [a] \leqslant [b].$$

Näitame, et nii defineeritud ρ on eeljärjestusseos Ω-algebral $\mathbf{A}$.

- *Refleksiivsus.* Olgu $a \in A$. Et $\leqslant$ on järjestusseos, siis $[a] \leqslant [a]$, kust $a\rho a$.
- *Transitiivsus.* Olgu $a, b, c \in A$ ja eeldame, et $a\rho b$, $b\rho c$. Siis $[a] \leqslant [b]$ ja $[b] \leqslant [c]$, kust $\leqslant$ transitiivsuse tõttu $[a] \leqslant [c]$ ehk $a\rho c$.
- *Kooskõla tehetega.* Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_n$ ja $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n \in A$. Siis

$$\begin{aligned}
a_1\rho a'_1, \dots, a_n\rho a'_n &\implies [a_1] \leqslant [a'_1], \dots, [a_n] \leqslant [a'_n] \\
&\implies \omega_{A/\rho}([a_1], \dots, [a_n]) \leqslant \omega_{A/\rho}([a'_1], \dots, [a'_n]) \\
&\implies [\omega_A(a_1, \dots, a_n)] \leqslant [\omega_A(a'_1, \dots, a'_n)] \\
&\implies \omega_A(a_1, \dots, a_n)\rho\omega_A(a'_1, \dots, a'_n).
\end{aligned}$$

Niisiis ρ on eeljärjestusseos Ω-algebral $\mathbf{A}$. On lihtne aru saada, et kui rakendaksime eeljärjestusele ρ tõestuse esimese poole konstruktsiooni, saaksime tagasi sama paari $(\sim, \leqslant)$ ning vastupidi. $\square$

Näide 1.11. Vaatleme näite 1.8 situatsiooni. Sellises olukorras seos $\sim$ langeb täpselt kokku assotsieerituse mõistega: $a \sim b$ parajasti siis, kui $a \mid b$ ja $b \mid a$.

Näide 1.12. Olgu K korpus ja $K[x]$ polünoomide ring üle korpuse K. Et $(K[x], \cdot)$ on kommutatiivne monoid, saame defineerida sellel eeljärjestuse $\mid$ nagu näites 1.8.

Olgu $f, g \in K[x]$, siis $f \sim g$ parajasti siis, kui $f \mid g$ ja $g \mid f$. Teatavasti siis $f = kg$, kus $k \in K$. Paneme tähele, et ekvivalentsusklassid $\sim$ järgi on parajasti hulgad $\{kf \colon k \in K\}$. Nende ekvivalentsusklasside esindajateks võib valida unitaarsed polünoomid. Näeme, et seos $\leqslant$ on tõepoolest antisümmeetriline: kui f ja g on unitaarsed polünoomid üle K ning $[f] \leqslant [g]$ ja $[g] \leqslant [f]$ ehk $f \mid g$ ja $g \mid f$, siis $f = g$.

1.3 $\mathcal{Z}$-triviaalsus ja lühike $\mathcal{Z}$-eeltäpne jada

Lühikesed eeltäpsed jadad, mida me uurima hakkame, on erijuht üldisemas kontekstis defineeritud nn lühikestest $\mathcal{Z}$-eeltäpsetest jadadest. See on defineeritud artiklis [3] leheküljel 14. Refereerime siinkohal vajalikud definitsioonid.

Definitsioon 1.13 ([3, lk. 14])**.** Olgu $\mathcal{C}$ mingi kategooria ja $\mathcal{Z}$ tema objektide klassi mingi mittetühi alamklass. Nimetame kategooria $\mathcal{C}$ morfismi *$\mathcal{Z}$-triviaalseks*, kui ta faktoriseerub läbi klassi $\mathcal{Z}$ kuuluva objekti.

Mistahes objektide A ja B korral tähistame kõikide $\mathcal{Z}$-triviaalsete morfismide $A \to B$ klassi sümboliga $\mathrm{Triv}_{\mathcal{Z}}(A, B)$.

Näide 1.14.

1. Kui $\mathcal{Z} = \mathcal{C}_0$ ($\mathcal{C}_0$ tähistab kategooria $\mathcal{C}$ kõigi objektide klassi), siis kategooria $\mathcal{C}$ iga morfism on $\mathcal{C}_0$-triviaalne.
2. Kui $\mathcal{C} = \mathsf{Grp}$ on kõigi rühmade kategooria ja $\mathcal{Z}$ koosneb Abeli rühmadest, siis $\mathcal{Z}$-triviaalsed morfismid on kommutatiivse kujutisega Abeli rühmad.
3. Kui $\mathcal{C} = \mathsf{Vec}_K$ on kõigi vektorruumide kategooria üle korpuse K ja $\mathcal{Z}$-koosneb lõplikumõõtmelistest vektorruumidest üle K, siis $\mathcal{Z}$-triviaalsed morfismid on lineaarkujutused, mille kujutise mõõde on lõplik (s.t. lõpliku astakuga lineaarkujutused).

Näide 1.15. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria, mis sisaldab nullobjekti $\mathbf{0}$, ning võtame $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$. Mistahes kahe objekti $A, B \in \mathcal{C}_0$ korral selles kategoorias leidub täpselt üks morfism $A \to \mathbf{0}$ ning täpselt üks morfism $\mathbf{0} \to B$; neid komponeerides saame nullmorfismi $0_{A,B}$. $\mathcal{Z}$-triviaalsete morfismide kogum langeb täpselt kokku nullmorfismide kogumiga.

Konkreetsem näide sellisest kategooriast on Abeli rühmade kategooria Ab. Seal $\mathbf{0} = \{0\}$. On lihtne näha, et mistahes Abeli rühma A korral üheselt määratud morfism $A \to \mathbf{0}$ on kujutus $x \mapsto 0$ ning et mistahes B korral üheselt määratud morfism $\mathbf{0} \to B$ on kujutus $0 \mapsto 0$. Niisiis mistahes Abeli rühmade A ja B korral nullmorfism $0_{A,B}$ on kujutus $x \mapsto 0$. Näeme, et kui $\mathcal{C} = \mathsf{Ab}$ ja $\mathcal{Z} = \{\{0\}\}$, siis triviaalsete morfismide kogum on parajasti nende funktsioonide kogum, mis seavad kõikidele argumentidele vastavusse nulli.

Kuni käesoleva jaotise lõpuni eeldame kõikjal, et $\mathcal{C}$ on kategooria, mille jaoks on fikseeritud teatud objektide klass $\mathcal{Z}$.

Lemma 1.16. *$\mathcal{Z}$-triviaalse morfismi kompositsioon mistahes morfismiga on $\mathcal{Z}$-triviaalne.*

Tõestus. Olgu $f\colon A \to B$ $\mathcal{Z}$-triviaalne morfism. Siis leidub $Z \in \mathcal{Z}$ ja morfismid $z_1\colon A \to Z$, $z_2\colon Z \to B$ nii, et $f = z_2 z_1$.

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "h"'] & \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "z_1"'] & & B \arrow[ul, "g"'] \\
& Z \arrow[ur, "z_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Vaatleme morfismi $g\colon B \to C$. Siis $gf = g(z_2 z_1) = (g z_2) z_1$ ehk gf faktoriseerub läbi objekti Z ehk on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Analoogiliselt mistahes morfismi $h\colon C \to A$ korral $fh = (z_2 z_1)h = z_2(z_1 h)$ ehk fh on $\mathcal{Z}$-triviaalne. $\square$

Niisiis $\mathcal{Z}$-triviaalsete morfismide kogum käitub analoogiliselt poolrühma ideaaliga.

Definitsioon 1.17 ([3, lk. 14]; vrd def-d 2.12, 2.25)**.** Olgu $f\colon A \to B$ mingi kategooria $\mathcal{C}$ morfism. Morfismi $k\colon X \to A$ nimetatakse morfismi f *$\mathcal{Z}$-eeltuumaks*, kui kehtivad järgmised tingimused:

1. Morfism fk on $\mathcal{Z}$-triviaalne.
2. Iga sellise $\lambda\colon Y \to A$ korral, et $f\lambda$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne, leidub üheselt määratud morfism $\lambda'\colon Y \to X$ nii, et $\lambda = k\lambda'$.

Duaalselt: morfismi $p\colon B \to X$ nimetatakse morfismi f *$\mathcal{Z}$-eelkotuumaks*, kui:

1. Morfism pf on $\mathcal{Z}$-triviaalne.
2. Iga sellise $\lambda\colon B \to Y$ korral, et λf on $\mathcal{Z}$-triviaalne, leidub üheselt määratud morfism $\lambda_1\colon X \to Y$ nii, et $\lambda = \lambda_1 p$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, dashed, "\lambda'"'] \arrow[dr, "\lambda"] & & \\
X \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & Y \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "p"] & X \arrow[u, dashed, "\lambda_1"']
\end{tikzcd}$$

Näide 1.18. Tuleme tagasi näite 1.15 olukorda. Et mistahes A ja B korral ainus triviaalne morfism $A \to B$ on nullmorfism, siis võime tähele panna, et morfismi $f\colon A \to B$ $\mathcal{Z}$-eeltuuma mõiste langeb täpselt kokku morfismide f ja $0_{A,B}$ võrdsustaja mõistega. Nullobjektiga kategooriates on aga morfismide f ja $0_{A,B}$ võrdsustaja täpselt morfismi f tuuma mõiste.

Analoogiliselt näeme, et morfismi $f\colon A \to B$ $\mathcal{Z}$-eelkotuuma mõiste langeb täpselt kokku morfismide f ja $0_{A,B}$ kovõrdsustaja mõistega, mis langeb omakorda kokku morfismi f kotuuma mõistega.

Kui $\mathcal{C} = \mathsf{Ab}$ ja $\mathcal{Z} = \{\{0\}\}$, siis morfismi $f\colon A \to B$ $\mathcal{Z}$-eeltuum on niisiis sisestusfunktsioon

$$k\colon \operatorname{Ker} f \to A$$

ning $\mathcal{Z}$-eelkotuum on loomulik projektsioon

$$\pi\colon B \to B/f(A).$$

Definitsioon 1.19 ([3, lk. 14]; vrd def. 2.31)**.** Olgu $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ kategooria $\mathcal{C}$ morfismid. Ütleme, et

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

on *lühike $\mathcal{Z}$-eeltäpne jada*, kui f on morfismi g $\mathcal{Z}$-eeltuum ning g on morfismi f $\mathcal{Z}$-eelkotuum.

Näide 1.20. Abeli kategooriad on teatud omadustega kategooriad, kus muuhulgas leidub nullobjekt $\mathbf{0}$. Seega kehtivad nende kohta näidetes 1.15 ja 1.18 toodud omadused. Klassikalised näited Abeli kategooriatest on muuhulgas Abeli rühmade kategooria Ab, vektorruumide (üle fikseeritud korpuse K) kategooria Vec_K ja parempoolsete moodulite (üle fikseeritud ringi R) kategooria Mod_R.

Olgu $\mathcal{C}$ mingi Abeli kategooria ning $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$. Abeli kategooriates kehtib, et

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0} \tag{2}$$

on lühike täpne jada parajasti siis, kui f on g tuum ning g on f kotuum [5]. Teisest küljest teame, et tuuma ja kotuuma mõiste langevd antud olukorras kokku vastavalt $\mathcal{Z}$-eeltuuma ja $\mathcal{Z}$-eelkotuuma mõistetega. Niisiis langevad sel juhul kokku lühikese täpse jada ja lühikese $\mathcal{Z}$-eeltäpse jada mõisted.

2 Eeljärjestatud Ω-algebrate lühikesed eeltäpsed jadad

Selles peatükis defineerime antud töö jaoks kõige olulisema kategooria — eeljärjestatud Ω-algebrate kategooria — ja uurime selles kategoorias artiklis [3] defineeritud eeltuuma, eelkotuuma ja lühikese eeltäpse jada üldistusi.

2.1 Kategooria Preord_Ω

Definitsioon 2.1. Olgu Ω tüüp. Defineerime *eeljärjestatud Ω-algebrate kategooria* Preord_Ω:

- Objektid on paarid $(\mathbf{A}, \rho)$, kus $\mathbf{A} = (A, \Omega_A)$ on Ω-algebra ja ρ on eeljärjestus sellel.
- Morfismid on Ω-algebrate homomorfismid $f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$, mis säilitavad eeljärjestust, s.t. iga $a, b \in A$ korral
$$a\rho b \implies f(a)\sigma f(b). \tag{3}$$
- Morfismide komponeerimine on funktsioonide komponeerimine.
- Objekti $(\mathbf{A}, \rho)$ ühikmorfism on hulga A samasusteisendus 1_A.

Mistahes Ω-algebra $\mathbf{A}$ korral on võrdusseos hulgal A kooskõlas selle algebra kõigi tehetega. See lubab meil anda järgmise definitsiooni.

Definitsioon 2.2 (vrd [3, lk. 3])**.** Kategooria Preord_Ω *triviaalseteks* objektideks nimetatakse objekte kujul $(\mathbf{Z}, =)$.

Definitsioon 2.3 (vrd [3, lk. 3])**.** Olgu $f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$ kategooria Preord_Ω morfism. Nimetame teda *triviaalseks*, kui ta faktoriseerub läbi triviaalse objekti, s.t. leidub triviaalne objekt $(\mathbf{Z}, =)$ ja morfismid $g\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{Z}, =)$ ja $h\colon (\mathbf{Z}, =) \to (\mathbf{B}, \sigma)$ nii, et $f = hg$.

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{A}, \rho) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & (\mathbf{B}, \sigma) \\ & (\mathbf{Z}, =) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

On selge, et kui valida kategoorias Preord_Ω klassiks $\mathcal{Z}$ triviaalsete objektide klass, siis langevad triviaalse morfismi ja $\mathcal{Z}$-triviaalse morfismi mõisted täpselt kokku.

Lause 2.4 (vrd [3, lemma 2.3])**.** *Olgu $(\mathbf{A}, \rho)$ ja $(\mathbf{B}, \sigma)$ kategooria Preord_Ω objektid ja f nendevaheline morfism. Siis f on triviaalne morfism kategoorias Preord_Ω parajasti siis, kui iga $a, b \in A$ korral*
$$a\rho b \implies f(a) = f(b).$$

Tõestus. Üldistub vahetult artiklist [3]. $\square$

Näide 2.5. Vaatleme positiivsete täisarvude monoidi $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$. Defineerime seal seose ρ nii, et $a\rho b$ parajasti siis, kui $a = 2^k q$, $b = 2^l q$, kus q on paaritu ja $0 \leqslant k \leqslant l$. Veendume, et see on eeljärjestusseos monoidil $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$:

- *Refleksiivsus.* Ilmne.
- *Transitiivsus.* Olgu $a\rho b$ ja $b\rho c$; siis leidub paaritu q nii, et $a = 2^k q$, $b = 2^l q$, $c = 2^m q$. Et $a\rho b$ ja $b\rho c$ saame $k \leqslant l$ ja $l \leqslant m$, kust $k \leqslant m$ ja $a\rho c$.

- *Kooskõla tehetega.* Olgu $a\rho b$ ja $c\rho d$, näitame, et siis $ac\rho bd$. Leiduvad arvud k, l, m, n ja paaritud p, q nii, et $a = 2^k p$, $b = 2^l p$, $c = 2^m q$ ja $d = 2^n q$; seostest $a\rho b$ ja $c\rho d$ saame $k \leqslant l$ ja $m \leqslant n$. Siis $ac = 2^{k+m}pq$ ja $bd = 2^{l+n}pq$. Et pq on paaritu ja $k + m \leqslant l + n$, siis $ac\rho bd$.

Niisiis $(\mathbb{Z}^+, \cdot, \rho)$ on eeljärjestatud monoid. Seejuures märgime, et ta ei ole järjestatud monoid, kuna ρ ei ole antisümmeetriline. Tõepoolest, $2 \cdot 5 \rho 2 \cdot 7$ ja $2 \cdot 7 \rho 2 \cdot 5$, aga $5 \neq 7$. Analoogiliselt saab näidata, et ρ ei ole kongruents, kuna ρ ei ole ka sümmeetriline.

Defineerime funktsiooni $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ võrdusega

$$f(2^k q) = q,$$

kus q on paaritu. Näitame, et f on morfism järjestatud monoidide kategoorias objektide $(\mathbb{Z}^+, \cdot, \rho)$ ja $(\mathbb{Z}, \cdot, |)$ vahel:

- *Säilitab tehteid.* Olgu $2^k p, 2^l q \in \mathbb{Z}^+$, kus p ja q on paaritud. Siis

  $$f(2^k p \cdot 2^l q) = f(2^{k+l} pq) = pq = f(2^k p) f(2^l q).$$

  Samuti $f(1) = 1$.

- *Säilitab eeljärjestust.* Olgu $a\rho b$, siis $a = 2^k q$ ja $b = 2^l q$, kus $k \leqslant l$. Siis $f(a) \mid f(b)$. Tõepoolest, $f(a) = f(b) = q$ ja $q \mid q$.

Teine punkt näitab tegelikult lause 2.4 põhjal, et morfism f on triviaalne.

Enne edasi minemist vajame veel isomorfismide kirjeldust kategoorias Preord_Ω.

Lause 2.6. *Kategooria* Preord_Ω *morfism*

$$f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$$

on isomorfism parajasti siis, kui:

1. *f on bijektsioon;*
2. *f peegeldab eeljärjestust ehk iga $a, b \in A$ korral*

   $$f(a)\sigma f(b) \implies a\rho b.$$

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu f isomorfism, see tähendab, leidugu morfism $f^{-1}\colon (\mathbf{B}, \sigma) \to (\mathbf{A}, \rho)$ nii, et $ff^{-1} = 1_B$ ja $f^{-1}f = 1_A$; siis iga $a \in A$ korral $f^{-1}(f(a)) = a$ ja iga $b \in B$ korral $f(f^{-1}(b)) = b$. On ilmne, et f on bijektsioon.

Veendume teise tingimuse kehtivuses. Olgu $a, b \in A$; et f^{-1} on sürjektsioon, siis leiduvad $x, y \in B$ nii, et $f^{-1}(x) = a$ ja $f^{-1}(y) = b$. Võime tingimuse ümber kirjutada kujule

$$f(f^{-1}(x))\sigma f(f^{-1}(y)) \implies f^{-1}(x)\rho f^{-1}(y)$$

ehk ka

$$x\sigma y \implies f^{-1}(x)\rho f^{-1}(y),$$

mis triviaalselt tuleneb faktist, et f^{-1} on morfism.

Piisavus. Oletame, et f on bijektsioon ja et iga $a, b \in A$ korral $f(a)\sigma f(b) \implies a\rho b$. Et f on bijektsioon, leidub tal pöördfunktsioon f^{-1}, kusjuures $f^{-1}f = 1_A$ ja $ff^{-1} = 1_B$. Veendume, et f^{-1} on kategooria Preord_Ω morfism.

- *Säilitab tehteid.* Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$. Näitame, et

$$f^{-1}(\omega_B(b_1, \ldots, b_n)) = \omega_A(f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_n)).$$

  Tõepoolest,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\omega_B(b_1, \ldots, b_n)) &= f^{-1}(\omega_B(f(f^{-1}(b_1)), \ldots, f(f^{-1}(b_n)))) \\ &= f^{-1}(f(\omega_A(f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_n)))) \\ &= \omega_A(f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_n)). \end{aligned}$$

- *Säilitab eeljärjestust.* Olgu $x, y \in B$, kusjuures $x\sigma y$. Näitame, et $f^{-1}(x)\rho f^{-1}(y)$. Et kehtib $f(f^{-1}(x))\sigma f(f^{-1}(y))$, siis saamegi tingimuse tõttu, et $f^{-1}(x)\rho f^{-1}(y)$.

□

2.2 Eeltuum

Lemma 2.7. *Olgu* **A** *Ω-algebra ning* $\mathcal{R}$ *mingi hulgal* A *määratud binaarsete seoste mittetühi pere. Olgu iga* $\rho \in \mathcal{R}$ *tehetega kooskõlas. Siis on tehetega kooskõlas ka seos* $\bigcap_{\rho\in\mathcal{R}} \rho$*, kus*

$$a\Big(\bigcap_{\rho\in\mathcal{R}} \rho\Big)b \iff \forall\rho \in \mathcal{R}\colon\ a\rho b. \tag{4}$$

Kui iga $\rho \in \mathcal{R}$ *on refleksiivne, siis seda on ka* $\bigcap_{\rho\in\mathcal{R}} \rho$*. Sama tulemus kehtib sümmeetrilisuse, antisümmeetrilisuse ja transitiivsuse kohta.*

Tõestus. Tähistame $\tau = \bigcap_{\rho\in\mathcal{R}} \rho$.

Olgu iga ρ tehetega kooskõlas. Näitame, et seos τ on tehetega kooskõlas. Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_n$ ja $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n \in A$, kusjuures $a_1\tau a'_1, \ldots, a_n\tau a'_n$. Teisisõnu, iga $\rho \in \mathcal{R}$ korral $a_1\rho a'_1, \ldots, a_n\rho a'_n$. Et iga ρ on tehetega kooskõlas saame, et $\omega(a_1, \ldots, a_n)\rho\omega(a'_1, \ldots, a'_n)$ iga ρ korral. See aga tähendab vastavalt definitsioonile, et $\omega(a_1, \ldots, a_n)\tau\omega(a'_1, \ldots, a'_n)$.

Vahetu kontroll tõestab lemma teise poole. □

Märkus 2.8. Eelmises lemmas defineeritud seose üks erijuht on, kui $\mathcal{R} = \{\rho, \sigma\}$. Sellisel juhul kirjutame $a\left(\bigcap_{\rho\in\mathcal{R}}\right) b$ asemel $a(\rho \cap \sigma)b$. Lemmast järeldub vahetult, et kui ρ ja σ on tehetega kooskõlas, siis on seda ka seos $\rho \cap \sigma$.

Definitsioon 2.9 (vrd [3, lk. 3])**.** Olgu $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ Ω-algebrate homomorfism. Siis f *poolt tekitatud kongruents* (ka f *tuum*) on seos $\sim_f$ hulgal A, kus

$$a \sim_f b \text{ parajasti siis, kui } f(a) = f(b).$$

Lemma 2.10 ([4, lause 2.8.18])**.** *Seos* $\sim_f$ *on kongruents Ω-algebral* **A**.

Märkus 2.11. Siiani oleme kategooria Preord_Ω objekte tähistades kirjutanud välja tema mõlemad komponendid: $(\mathbf{A}, \rho), (\mathbf{B}, \sigma), (\mathbf{C}, \tau)$ jne. Järgnev definitsioon on sõnastatav puhtalt kategooriateoreetilistes terminites — meil ei ole vaja "ligipääsu" objekti põhihulgale, tehetele ega eeljärjestusele. Loetavuse ja lühiduse huvides tähistame siin kategooria Preord_Ω objekte kaldkirjas ladina suurte tähtedega: A, B, C jne.

Sama põhimõtet järgime läbi töö kõikides definitsioonides, tulemustes ja tõestustes, kus ei ole tarvis kasutada eeljärjestatud Ω-algebra põhihulka, elemente, tehteid ega eeljärjestust.

Definitsioon 2.12 (vrd [3, def. 2.11])**.** Olgu $f\colon A \to B$ kategooria Preord_Ω morfism. Morfismi $k\colon X \to A$ nimetatakse morfismi f *eeltuumaks*, kui:

1. Morfism fk on triviaalne.
2. Iga sellise $\lambda\colon Y \to A$ korral, et $f\lambda$ on triviaalne, leidub üheselt määratud morfism $\lambda'\colon Y \to X$ nii, et $\lambda = k\lambda'$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, dashed, "\lambda'"'] \arrow[dr, "\lambda"] & & \\ X \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

On selge, et kui valida kategoorias Preord_Ω klassiks $\mathcal{Z}$ triviaalsete objektide klass, siis langevad eeltuuma ja $\mathcal{Z}$-eeltuuma mõisted täpselt kokku.

Tuleb välja, et igal morfismil kategoorias Preord_Ω leidub vähemalt üks eeltuum.

Lause 2.13 (vrd [3, lause 2.12])**.** *Olgu* $f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$ *kategooria* Preord_Ω *morfism. Siis üks* f *eeltuum on morfism* $k\colon (\mathbf{A}, \rho \cap \sim_f) \to (\mathbf{A}, \rho)$*, kus* k *on samasusteisendus.*

Tõestus. Lemmadest 2.7 ja 2.10 teame, et $\rho \cap \sim_f$ on tehetega kooskõlas eeljärjestusseos ja seega $(\mathbf{A}, \rho \cap \sim_f)$ on kategooria Preord_Ω objekt. Samuti, samasusteisendus säilitab tehteid ja antud objektide vahel ka eeljärjestust: kui $a(\rho \cap \sim_f)b$, siis $a\rho b$, seega see k on kategooria Preord_Ω morfism.

Näitame, et fk on triviaalne. Tõepoolest, olgu $a(\rho \cap \sim_f)b$. Siis peame näitama, et $(fk)(a) = (fk)(b)$ ehk $f(a) = f(b)$. Aga et $a \sim_f b$, siis tõepoolest $f(a) = f(b)$.

Olgu nüüd $\lambda\colon (\mathbf{Y}, \tau) \to (\mathbf{A}, \rho)$ kategooria Preord_Ω morfism, kusjuures $f\lambda$ on triviaalne. Näitame, et leidub morfism $\lambda'\colon (\mathbf{Y}, \tau) \to (\mathbf{A}, \rho \cap \sim_f)$ nii, et $\lambda = k\lambda'$. Võtame $\lambda'(y) = \lambda(y)$. Siis tõepoolest $k(\lambda'(y)) = \lambda(y)$ iga $y \in Y$ korral. Peame veenduma, et nii defineeritud λ' on kategooria Preord_Ω morfism. Tehete säilitamine järeldub sellest, et λ on kategooria Preord_Ω morfism. Näitame, et λ' säilitab eeljärjestust. Olgu $a, b \in Y$ ja $a\tau b$. Et λ säilitab eeljärjestust, siis $\lambda(a)\rho\lambda(b)$ ehk $\lambda'(a)\rho\lambda'(b)$. Teisalt, et $f\lambda$ on triviaalne, siis $f(\lambda'(a)) = f(\lambda'(b))$, kust $\lambda'(a) \sim_f \lambda'(b)$. Seega $\lambda'(a)(\rho \cap \sim_f)\lambda'(b)$. Niisiis λ' säilitab eeljärjestust ja on kategooria Preord_Ω morfism.

Viimaks peame näitama, et see λ' on üheselt määratud. Tõepoolest, oletame, et $\lambda = k\lambda' = k\lambda''$. Et k on samasusteisendus, siis iga $y \in Y$ korral $\lambda'(y) = k(\lambda'(y)) = \lambda(y) = k(\lambda''(y)) = \lambda''(y)$.

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{Y}, \tau) \arrow[d, "\lambda'"] \arrow[dr, "\lambda"] & & \\ (\mathbf{A}, \rho \cap \sim_f) \arrow[r, "k"] & (\mathbf{A}, \rho) \arrow[r, "f"] & (\mathbf{B}, \sigma) \end{tikzcd}$$

□

Näide 2.14. Olgu Ω selline, et $\Omega_2 = \{\vee, \wedge\}$ ning ülejäänud on tühjad. Olgu X mingi lõplik hulk.

Vaatleme eeljärjestatud Ω-algebraid $(\mathbf{A}, \subseteq)$ ja $(\mathbf{B}, \leqslant)$, kus $A = \mathcal{P}(X)$ ja $B = \mathbb{N}$. Ω_A interpreteerib sümboleid $\vee$ ja $\wedge$ vastavalt ühendi ja ühisosana; Ω_B vastavalt maksimumi ja miinimumina. Vaatleme kujutust

$$f\colon (\mathbf{A}, \subseteq) \to (\mathbf{B}, \leqslant), \quad U \mapsto |U|.$$

Vastavalt lausele 2.13 on tema eeltuum siis samasusteisendus

$$k\colon (\mathbf{A}, \subseteq \cap \sim_f) \to (\mathbf{A}, \subseteq).$$

Aga võime tähele panna, et kui $U, V \in \mathcal{P}(X)$ on sellised, et $U \subseteq V$ ja $|U| = |V|$, siis tegelikult $U = V$. Niisiis võime eeltuuma ümber kirjutada ka kujule

$$k\colon (\mathbf{A}, =) \to (\mathbf{A}, \subseteq).$$

Lause 2.15 (vrd [3, laused 2.13 ja 4.1])**.** *Olgu $f\colon A \to B$ kategooria Preord_Ω morfism ja $k\colon X \to A$ tema eeltuum. Siis:*

1. *k on monomorfism;*

2. *kui $\mu\colon Y \to A$ on mingi teine morfismi f eeltuum, siis leidub üheselt määratud isomorfism $\varphi\colon Y \to X$ nii, et $\mu = k\varphi$.*

Tõestus. Rakendame artikli [3] lauset 4.1. On selge, et kui valida $\mathcal{C} = \mathsf{Preord}_\Omega$ ja võtta klassiks $\mathcal{Z}$ triviaalsete objektide klass, siis langeb $\mathcal{Z}$-eeltuuma mõiste kokku meie eeltuuma mõistega. Nüüd järelduvad väited vahetult. □

Lause 2.16. *Olgu $f\colon A \to B$ kategooria Preord_Ω morfism, $k\colon X \to A$ tema eeltuum ning $\varphi\colon Y \to X$ isomorfism. Siis $\mu = k\varphi\colon Y \to A$ on morfismi f eeltuum.*

Tõestus. Veendume, et morfism $f\mu$ on triviaalne. Tõepoolest, $f\mu = fk\varphi$; et fk on triviaalne, siis lemma 1.16 tõttu tema kompositsioon mingi muu morfismiga on samuti triviaalne.

Oletame, et $\lambda\colon Z \to A$ on mingi morfism nii, et $f\lambda$ on triviaalne. Siis leidub üheselt määratud morfism $\lambda'\colon Z \to X$ nii, et $\lambda = k\lambda'$. Näitame, et $\nu = \varphi^{-1}\lambda'$ on üheselt määratud morfism $Z \to Y$ nii, et $\lambda = \mu\nu$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\mu"] & & \\
X \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
Z \arrow[u, "\lambda'"] \arrow[ur, "\lambda"'] \arrow[uu, bend left, "\nu"] & &
\end{tikzcd}$$

Esiteks veendume, et $\lambda = \mu\nu$. Tõepoolest,

$$\mu\nu = k\varphi\varphi^{-1}\lambda' = k\lambda' = \lambda.$$

Nüüd veendume, et ν on üheselt määratud. Oletame, et $\nu'\colon Z \to Y$ on selline, et $\mu\nu' = \lambda$. Eelolevast saame siis, et

$$(k\varphi)\nu' = k\varphi\varphi^{-1}\lambda'.$$

Et k on monomorfism ja φ isomorfism, siis $k\varphi$ on monomorfism ja $\nu' = \varphi^{-1}\lambda'$. Järelikult on ν üheselt määratud.

Et mõlemad tingimused on täidetud, siis μ on morfismi f eeltuum. □

Järeldus 2.17. *Olgu $f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$ kategooria Preord_Ω morfism. Morfism*

$$\mu\colon (\mathbf{X}, \tau) \to (\mathbf{A}, \rho)$$

on morfismi f eeltuum parajasti siis, kui kujutus

$$\widetilde{\mu}\colon (\mathbf{X}, \tau) \to (\mathbf{A}, \rho \cap \sim_f), \quad \widetilde{\mu}(x) = \mu(x).$$

on isomorfism kategoorias Preord_Ω.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu μ morfismi f eeltuum. Lausest 2.13 teame, et $k\colon (\mathbf{A}, \rho \cap \sim_f) \to (\mathbf{A}, \rho)$, kus k on hulga A samasusteisendus, on samuti morfismi f eeltuum. Lause 2.15 põhjal leidub siis isomorfism $\widetilde{\mu}\colon (\mathbf{X}, \tau) \to (\mathbf{A}, \rho \cap \sim_f)$ nii, et $\mu = k\widetilde{\mu}$. Samasusteisenduse definitsioonist on selge, et $\widetilde{\mu}(x) = \mu(x)$ iga x korral. Järelikult antud kujutus on isomorfism kategoorias Preord_Ω.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{X},\tau) \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\widetilde{\mu}"'] & (\mathbf{A},\rho) \arrow[r, "f"] & (\mathbf{B},\sigma) \\
& (\mathbf{A}, \rho \cap \sim_f) \arrow[u, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Piisavus. Paneme tähele, et $k\widetilde{\mu} = \mu$. Lausest 2.16 saame, et μ on morfismi f eeltuum. $\square$

Järeldus 2.18. *Olgu $f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$ kategooria Preord_Ω morfism. Morfism*

$$\mu\colon (\mathbf{X}, \tau) \to (\mathbf{A}, \rho)$$

on morfismi f eeltuum parajasti siis, kui kehtivad järgmised tingimused.

1. *$\mu\colon X \to A$ on bijektsioon;*
2. *iga $x, y \in X$ korral*
$$\mu(x)\rho\mu(x) \wedge f(\mu(x)) = f(\mu(x)) \iff x\tau y.$$

Tõestus. Morfism μ on eeltuum parajasti siis, kui järelduse 2.17 morfism $\widetilde{\mu}$ on isomorfism. Tingimus

$$x\tau y \implies \mu(x)\rho\mu(y) \wedge f(\mu(x)) = f(\mu(y))$$

on samaväärne sellega, et $\widetilde{\mu}$ on morfism; ülejäänud tingimused on vahetult samaväärsed lauses 2.6 sõnastatud isomorfismi kirjelduse tingimustega ning on samaväärsed sellega, et $\widetilde{\mu}$ on isomorfism. $\square$

2.3 Eelkotuum

Definitsioon 2.19 (vrd [3, lk. 4])**.** Olgu ρ seos hulgal A, mis on kooskõlas Ω-algebra $\mathbf{A}$ tehetega. Seose ρ *poolt tekitatud kongruentsiks* nimetatakse seost $\equiv_\rho$, kus

$$\begin{aligned}
\equiv_\rho &= \bigcap \{\tau \mid \tau \text{ on kongruents}, \forall a, b \in A\colon a\rho b \implies a\tau b\} = \\
&= \bigcap \{\tau \mid \tau \text{ on kongruents}, \rho \subseteq \tau\}.
\end{aligned}$$

Lemmast 2.7 järeldub, et $\equiv_\rho$ on tõepoolest $\mathbf{A}$ kongruents. Veendume, et ühisosa võetakse üle mittetühja pere. Tõepoolest, seos $A \times A$ on kongruents ning iga $a, b \in A$ korral $(a, b) \in A \times A$.

Lemma 2.20. *Olgu $f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$ kategooria Preord_Ω morfism. Siis seos*

$$\eta_f = \{(f(a_1), f(a_2))\colon a_1, a_2 \in A, a_1\rho a_2\}$$

hulgal B on Ω-algebra $\mathbf{B}$ tehetega kooskõlas.

Tõestus. Olgu $n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega_n$ ja $b_1, \ldots, b_n, b'_1, \ldots, b'_n \in B$, kusjuures $b_1\eta_f b'_1, \ldots, b_n\eta_f b'_n$. Näitame, et

$$\omega_B(b_1, \ldots, b_n)\eta_f\omega_B(b'_1, \ldots, b'_n).$$

Leiduvad $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n$ nii, et $f(a_i) = b_i$, $f(a'_i) = b'_i$ ja $a_i \rho a'_i$ iga i korral. Seega

$$\omega_A(a_1, \dots, a_n) \rho \omega_A(a'_1, \dots, a'_n).$$

Seose η_f definitsioonist siis

$$f(\omega_A(a_1, \dots, a_n)) \eta_f f(\omega_A(a'_1, \dots, a'_n)).$$

Aga et f on homomorfism ja säilitab tehteid, siis

$$f(\omega_A(a_1, \dots, a_n)) = \omega_B(b_1, \dots, b_n) \text{ ja } f(\omega_A(a'_1, \dots, a'_n)) = \omega_B(b'_1, \dots, b_n).$$

Seega $\omega_B(b_1, \dots, b_n) \eta_f \omega_B(b'_1, \dots, b'_n)$. □

Definitsioon 2.21 (vrd [3, lk. 9])**.** Olgu $f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$ kategooria Preord_Ω morfism. *Seos* ζ_f on seose

$$\eta_f = \{(f(a_1), f(a_2))\colon\ a_1, a_2 \in A, a_1 \rho a_2\}$$

poolt tekitatud kongruents algebral $\mathbf{B}$.

Definitsioon 2.22 (vrd [3, lk. 9])**.** Olgu π ja ρ eeljärjestused Ω-algebral $\mathbf{A}$. Siis seos $\pi \vee \rho$ on defineeritud võrdusega

$$\pi \vee \rho = \bigcap \{\tau\colon\ \tau \text{ on tehetega kooskõlas, } \tau \text{ on eeljärjestus, } \pi \subseteq \tau, \rho \subseteq \tau\}. \tag{5}$$

Nagu definitsioonis 2.19, on ühisosa võetud üle mittetühja pere. Lemmast 2.7 järeldub, et seos $\pi \vee \rho$ on eeljärjestus Ω-algebral $\mathbf{A}$.

Lemma 2.23. *Olgu π ja ρ eeljärjestused Ω-algebral $\mathbf{A}$ ning olgu $a, b \in A$. Siis $a(\pi \vee \rho)b$ parajasti siis, kui leidub $k \in \mathbb{N}$ ja $c_0, \dots, c_k \in A$ nii, et $a = c_0$, $b = c_k$ ja iga $0 \leqslant i < k$ korral $c_i \pi c_{i+1}$ või $c_i \rho c_{i+1}$.*

Tõestus. Ütleme, et $a \sigma b$ parajasti siis, kui leidub $k \in \mathbb{N}$ ja $c_0, \dots, c_k \in A$ nii, $a = c_0$, $b = c_k$ ja iga $0 \leqslant i < k$ korral $c_i \pi c_{i+1}$ või $c_i \rho c_{i+1}$.

Näitame esmalt, et nii defineeritud σ on eeljärjestus Ω-algebral $\mathbf{A}$.

- *Kooskõla tehetega.* Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_n$ ja $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$, kusjuures iga $1 \leqslant i \leqslant n$ korral $a_i \sigma b_i$. See tähendab, et iga i korral leidub jada $c_i^0, \dots, c_i^{k_i}$ nii, et iga $0 \leqslant j < k_i$ korral $c_i^j \pi c_i^{j+1}$ või $c_i^j \rho c_i^{j+1}$. Näitame, et $\omega(a_1, \dots, a_n) \sigma \omega(b_1, \dots, b_n)$. Vaatleme jada

$$\begin{gathered}\omega(c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0), \omega(c_1^1, c_2^0, \dots, c_n^0), \omega(c_1^2, c_2^0, \dots, c_n^0), \dots, \omega(c_1^{k_1-1}, c_2^0, \dots, c_n^0),\\ \omega(c_1^{k_1}, c_2^0, \dots, c_n^0), \omega(c_1^{k_1}, c_2^1, \dots, c_n^0), \dots, \omega(c_1^{k_1}, c_2^{k_2-1}, c_3^0, \dots, c_n^0),\\ \omega(c_1^{k_1}, c_2^{k_2}, c_3^0, \dots, c_n^0), \omega(c_1^{k_1}, c_2^{k_2}, c_3^1, \dots, c_n^0), \dots, \omega(c_1^{k_1}, c_2^{k_2}, \dots, c_{n-1}^{k_{n-1}-1}, c_n^0),\\ \omega(c_1^{k_1}, c_2^{k_2}, \dots, c_{n-1}^{k_{n-1}}, c_n^0), \omega(c_1^{k_1}, c_2^{k_2}, \dots, c_{n-1}^{k_{n-1}}, c_n^1), \dots, \omega(c_1^{k_1}, c_2^{k_2}, \dots, c_n^{k_n}).\end{gathered}$$

  Selle jada iga element on oma naabriga seoses ρ või seoses π. Tõepoolest, valime selle jada mingi elemendi, see on tingimata kujul $\omega(c_1^{k_1}, \dots, c_{i-1}^{k_{i-1}}, c_i^j, c_{i+1}^0, \dots, c_n^0)$, kus $1 \leqslant i \leqslant n$ ja $0 \leqslant j < k_i$. Siis jada järgmine element on $\omega(c_1^{k_1}, \dots, c_{i-1}^{k_{i-1}}, c_i^{j+1}, c_{i+1}^0, \dots, c_n^0)$. Üldisust kitsendamata eeldame, et $c_i^j \pi c_i^{j+1}$. Siis ka π refleksiivuse tõttu iga $l \neq i$ korral $c_l^0 \pi c_l^0$ ja $c_l^{k_l} \pi c_l^{k_l}$. Et π on tehetega kooskõlas, siis

$$\omega(c_1^{k_1}, \dots, c_{i-1}^{k_{i-1}}, c_i^j, c_{i+1}^0, \dots, c_n^0) \pi \omega(c_1^{k_1}, \dots, c_{i-1}^{k_{i-1}}, c_i^{j+1}, c_{i+1}^0, \dots, c_n^0).$$

  Niisiis $\omega(a_1, \dots, a_n) \sigma \omega(b_1, \dots, b_n)$.

- *Refleksiivsus.* On selge, et $a\sigma a$ — leidub jada c_0, kus $a = c_0 = a$.

- *Transitiivsus.* Olgu $a\sigma b$ ja $b\sigma c$. Leiduvad jadad $a = d_0, \ldots, d_k = b$ ja $b = e_0, \ldots, e_l = c$, sobiv jada on siis $a = d_0, \ldots, d_k, e_1, \ldots, e_l = c$.

Viimaks näitame, et σ sisaldub igas tehetega kooskõlas eeljärjestuses τ, mis sisaldab seoseid π ja ρ. Olgu $a\sigma b$ ning τ eeljärjestus, kusjuures $\pi \subseteq \tau$ ja $\rho \subseteq \tau$. Leidub jada $a = c_0, \ldots, c_k = b$ nii, et iga i korral $c_i \pi c_{i+1}$ või $c_i \rho c_{i+1}$. Et $\pi \subseteq \tau$ ja $\rho \subseteq \tau$, siis ka $c_i \tau c_{i+1}$. Et τ on transitiivne, siis $a\tau b$. Järelikult $\sigma \subseteq \tau$.

Seega $\sigma = \pi \vee \rho$. □

Sisuliselt oleme näidanud, et seose $\pi \cup \rho$ transitiivne sulund on tehetega kooskõlas.

Märkus 2.24. Eelmise lemma saaks sõnastada ka nii: $a(\pi \vee \rho)b$ parajasti siis, kui leiduvad $k \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_k \in A$ nii, et

$$a = c_0 \; \pi \; c_1 \; \rho \; c_2 \; \pi \; c_3 \; \rho \; c_4 \ldots c_{k-2} \; \pi \; c_{k-1} \; \rho \; c_k = b\,.$$

Definitsioon 2.25 (vrd [3, def. 2.19])**.** Olgu $f\colon A \to B$ kategooria Preord_Ω morfism. Morfismi $p\colon B \to X$ nimetatakse morfismi f *eelkotuumaks*, kui:

1. morfism pf on triviaalne,

2. iga sellise $\lambda\colon B \to Y$ korral, et λf on triviaalne, leidub üheselt määratud morfism $\lambda_1\colon X \to Y$ nii, et $\lambda = \lambda_1 p$.

$$\begin{tikzcd} & & Y \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "p"] & X \arrow[u, dashed, "\lambda_1"'] \end{tikzcd}$$

On selge, et kui valida kategoorias Preord_Ω klassiks $\mathcal{Z}$ triviaalsete objektide klass, siis langevad eelkotuuma ja $\mathcal{Z}$-eelkotuuma mõisted täpselt kokku.

Olgu $f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$ kategooria Preord_Ω morfism. Et ζ_f on kongruents algebral $\mathbf{B}$, võime vaadelda faktoralgebrat $\mathbf{B}/\zeta_f$. Hulga B/ζ_f elemendid on B elementide ekvivalentsiklassid seose ζ_f järgi. Kirjutame $[a], [b] \in B/\zeta_f$ korral

$$[a](\sigma \vee \zeta_f)[b] \text{ parajasti siis, kui } a(\sigma \vee \zeta_f)b.$$

Sealjuures paneme tähele, et definitsioon ei sõltu ekvivalentsiklassi esindaja valikust. Tõepoolest, olgu $a, a', b, b' \in B$, $[a] = [a']$, $[b] = [b']$ ja eeldame, et $a(\sigma \vee \zeta_f)b$. Siis $a' \zeta_f a$ ja $b \zeta_f b'$. Et $\zeta_f \subseteq \sigma \vee \zeta_f$, siis saame $a'(\sigma \vee \zeta_f)a$ ja $b(\sigma \vee \zeta_f)b'$. Et $\sigma \vee \zeta_f$ on eeljärjestus ja seega transitiivne saame, et $a'(\rho \vee \zeta_f)b'$.

Vahetu kontroll näitab, et nii hulgal B/ζ_f defineeritud seos $\sigma \vee \zeta_f$ on eeljärjestusseos. Veendume, et see on Ω-algebra $\mathbf{B}/\zeta_f$ tehetega kooskõlas. Oletame niisiis, et $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_n$ ja $[b_1], \ldots, [b_n], [b'_1], \ldots, [b'_n] \in B/\zeta_f$. Siis:

$$\begin{aligned} [b_1](\sigma \vee \zeta_f)[b'_1], \ldots, [b_n](\sigma \vee \zeta_f)[b'_n] &\implies b_1(\sigma \vee \zeta_f)b'_1, \ldots, b_n(\sigma \vee \zeta_f)b'_n \\ &\implies \omega_B(b_1, \ldots, b_n)(\sigma \vee \zeta_f)\omega_B(b'_1, \ldots, b'_n) \\ &\implies [\omega_B(b_1, \ldots, b_n)](\sigma \vee \zeta_f)[\omega_B(b'_1, \ldots, b'_n)] \\ &\implies \omega_{B/\zeta_f}([b_1], \ldots, [b_n])(\sigma \vee \zeta_f)\omega_{B/\zeta_f}([b'_1], \ldots, [b'_n]). \end{aligned}$$

Lause 2.26 (vrd [3, lause 2.20]). *Olgu* $f\colon (\mathbf{A},\rho) \to (\mathbf{B},\sigma)$ *kategooria* Preord_Ω *morfism. Siis üks morfismi* f *eelkotuum on morfism* $\pi\colon (\mathbf{B},\sigma) \to (\mathbf{B}/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f)$*, kus* $\pi\colon B \to B/\zeta_f$ *on kanooniline projektsioon.*

Tõestus. Veendume, et π on kategooria Preord_Ω morfism. Teatavasti kanooniline projektsioon faktoralgebrale on tehetega kooskõlas. Peame näitama vaid, et π säilitab eeljärjestust. Oletame, et $a,b \in B$ ja $a\sigma b$. Et $\sigma \subseteq \sigma \vee \zeta_f$, siis $a(\sigma\vee\zeta_f)b$. Seega ka $[a](\sigma\vee\zeta_f)[b]$.

Näitame, et πf on triviaalne. Olgu $a,b \in A$, $a\rho b$. Näitame, et siis $(\pi f)(a) = (\pi f)(b)$. Vastavalt ζ_f definitsioonile $f(a)\zeta_f f(b)$. Järelikult $[f(a)]_{\zeta_f} = [f(b)]_{\zeta_f}$ ehk $\pi(f(a)) = \pi(f(b))$.

Olgu nüüd $\lambda\colon (\mathbf{B},\sigma) \to (\mathbf{Y},\tau)$ selline, et λf on triviaalne. Olgu $a,b \in B$, $a\eta_f b$. Siis leiduvad $x,y \in A$ nii, et $f(x) = a$, $f(y) = b$ ja $x\rho y$. Et λf on triviaalne, siis $(\lambda f)(x) = (\lambda f)(y)$ ehk $\lambda(a) = \lambda(b)$ ehk $a \sim_\lambda b$. Seega $\eta_f \subseteq {\sim_\lambda}$, kusjuures $\sim_\lambda$ on kongruents. ζ_f definitsioonist saame $\zeta_f \subseteq {\sim_\lambda}$. Defineerime kujutuse $\lambda_1\colon B/\zeta_f \to Y$ võrdusega

$$\lambda_1([a]_{\zeta_f}) = \lambda(a)\,.$$

See definitsioon ei sõltu ekvivalentsiklassi esindaja valikust: näitasime, et kui $a\zeta_f b$ ehk $[a]_{\zeta_f} = [b]_{\zeta_f}$, siis $\lambda(a) = \lambda(b)$.

Veendume, et λ_1 on kategooria Preord_Ω morfism. Esiteks näitame, et ta säilitab tehteid. Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_n$ ja $[a_1],\dots,[a_n] \in B/\zeta_f$. Siis

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\omega_{B/\zeta_f}([a_1],\dots,[a_n])) &= \lambda_1([\omega_B(a_1,\dots,a_n)]) \\
&= \lambda(\omega_B(a_1,\dots,a_n)) \\
&= \omega_Y(\lambda(a_1),\dots,\lambda(a_n)) \\
&= \omega_Y(\lambda_1([a_1]),\dots,\lambda_1([a_n])).
\end{aligned}$$

Nüüd näitame, et λ_1 säilitab eeljärjestust. Olgu $[a],[b] \in B/\zeta_f$, kusjuures $[a](\sigma\vee\zeta_f)[b]$. Näitame, et $\lambda_1([a])\tau\lambda_1([b])$. Et $[a](\sigma\vee\zeta_f)[b]$, siis $a(\sigma\vee\zeta_f)b$ ehk leidub jada $a = c_0,\dots,c_k = b$ nii, et iga i korral $c_i\sigma c_{i+1}$ või $c_i\zeta_f c_{i+1}$. Kui $c_i\sigma c_{i+1}$, siis et λ säilitab eeljärjestust, saame $\lambda(c_i)\tau\lambda(c_{i+1})$. Kui $c_i\zeta_f c_{i+1}$, siis saame $\zeta_f \subseteq {\sim_\lambda}$ tõttu $c_i \sim_\lambda c_{i+1}$ ehk $\lambda(c_i) = \lambda(c_{i+1})$, mis τ refleksiivsuse tõttu tähendab, et $\lambda(c_i)\tau\lambda(c_{i+1})$. Seega on meil jada

$$\lambda(a) = \lambda(c_0), \lambda(c_1), \dots, \lambda(c_k) = \lambda(b)$$

nii, et iga i korral $\lambda(c_i)\tau\lambda(c_{i+1})$. Et τ on transitiivne tähendab see, et $\lambda(a)\tau\lambda(b)$ ehk $\lambda_1([a]) = \lambda_1([b])$.

Viimaks peame näitama, et λ_1 on üheselt määratud. Oletame, et $\lambda_1 p = \lambda_2 p = \lambda$. On selge, et kanooniline projektsioon on sürjektsioon, seega võime ta paremalt taandada ja saame, et $\lambda_1 = \lambda_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & & (\mathbf{Y},\tau) \\
(\mathbf{A},\rho) \arrow[r, "f"] & (\mathbf{B},\sigma) \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "\pi"] & (\mathbf{B}/\zeta_f, \rho\vee\zeta_f) \arrow[u, "\lambda_1"']
\end{tikzcd}$$

□

Lause 2.27 (vrd [3, laused 2.21 ja 4.2]). *Olgu* $f\colon A \to B$ *ning* $p\colon B \to X$ *morfismi* f *eelkotuum. Siis:*

1. p *on epimorfism;*

2. *kui $\pi\colon B \to Y$ on mingi teine morfismi f eelkotuum, siis leidub üheselt määratud isomorfism $\psi\colon X \to Y$ nii, et $\pi = \psi p$.*

Tõestus. Rakendame artikli [3] lauset 4.2. On selge, et kui valida $\mathcal{C} = \mathsf{Preord}_\Omega$ ja võtta klassiks $\mathcal{Z}$ triviaalsete objektide klass, siis langeb $\mathcal{Z}$-eelkotuuma mõiste kokku meie eelkotuuma mõistega. Nüüd järelduvad väited vahetult. □

Lause 2.28. *Olgu $f\colon A \to B$ kategooria Preord_Ω morfism, $p\colon B \to X$ tema eelkotuum ja $\psi\colon X \to Y$ isomorfism. Siis $\pi = \psi p\colon B \to Y$ on morfismi f eelkotuum.*

Tõestus. Veendume esiteks, et πf on triviaalne. Tõepoolest, $\pi f = \psi p f$, mis pf triviaalsuse tõttu kasutades lemmat 1.16 on triviaalne.

Olgu $\lambda\colon B \to Z$ mingi morfism nii, et λf on triviaalne. Siis leidub üheselt määratud morfism $\lambda_1\colon X \to Z$ nii, et $\lambda = \lambda_1 p$. Näitame, et $\nu = \lambda_1 \psi^{-1}$ on üheselt määratud morfism $Y \to Z$ nii, et $\lambda = \nu\pi$.

$$\begin{tikzcd}
& & Y \arrow[dd, bend left=60, "\nu"] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\lambda"'] & X \arrow[u, "\psi"'] \arrow[d, "\lambda_1"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Esmalt veendume, et $\lambda = \nu\pi$. Tõepoolest,

$$\nu\pi = \lambda_1 \psi^{-1} \psi p = \lambda_1 p = \lambda.$$

Teiseks peame veenduma, et ν on üheselt määratud. Olgu $\nu'\colon Y \to Z$ selline, et $\nu'\pi = \lambda$. Saame

$$\nu' \psi p = \lambda_1 p.$$

ehk ka

$$\nu' \psi p = \lambda_1 \psi^{-1} \psi p.$$

Et p on epimorfism ja ψ on isomorfism, siis ψp on epimorfism, kust saame $\nu' = \lambda_1 \psi^{-1} = \nu$. Seega ν on üheselt määratud.

Et mõlemad tingimused on täidetud, siis π on morfismi f eelkotuum. □

Järeldus 2.29. *Olgu $f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$ kategooria Preord_Ω morfism. Morfism*

$$p\colon (\mathbf{B}, \sigma) \to (\mathbf{X}, \tau)$$

on morfismi f eelkotuum parajasti siis, kui kujutus

$$p_1\colon (\mathbf{B}/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f) \to (\mathbf{X}, \tau), \quad p_1([x]) = p(x)$$

on korrektselt defineeritud ning isomorfism kategoorias Preord_Ω.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu p morfismi f eelkotuum. Teame lausest 2.26, et morfismi f eelkotuum on ka

$$\pi\colon (\mathbf{B}, \sigma) \to (\mathbf{B}/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f),$$

kus π on loomulik projektsioon. Lause 2.27 põhjal leidub siis isomorfism

$$p_1\colon (\mathbf{B}/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f) \to (\mathbf{X}, \tau)$$

nii, et $p = p_1\pi$. Loomuliku projektsiooni definitsioonist näeme, et iga x korral kehtib $p_1([x]) = p(x)$. Niisiis antud kujutus on isomorfism kategoorias Preord_Ω.

$$\begin{tikzcd}
& (\mathbf{B}/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f) \arrow[dr, "p_1"] & \\
(\mathbf{A}, \rho) \arrow[r, "f"] & (\mathbf{B}, \sigma) \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "p"] & (\mathbf{X}, \tau)
\end{tikzcd}$$

Piisavus. Paneme tähele, et $p_1\pi = p$. Lausest 2.28 saame, et p on morfismi f eelkotuum. □

Järeldus 2.30. *Olgu $f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$ kategooria* Preord_Ω *morfism. Morfism*

$$p\colon (\mathbf{B}, \sigma) \to (\mathbf{X}, \tau)$$

on morfismi f eelkotuum parajasti siis, kui kehtivad järgmised tingimused.

1. *$p\colon B \to X$ on sürjektsioon;*
2. *iga $a, b \in B$ korral*
$$p(a) = p(b) \iff a\zeta_f b;$$
3. *iga $a, b \in B$ korral*
$$p(a)\tau p(b) \iff a(\zeta_f \vee \sigma)b.$$

Tõestus. Järelduse 2.29 tõttu on p morfismi f eelkotuum parajasti siis, kui p_1 on korrektselt defineeritud isomorfism. Me saame teoreemi tingimused ümber sõnastada järgmiselt:

1. “p on sürjektsioon” kirjutame ümber kujule “p_1 on sürjektsioon”;
2. $p(a) = p(b) \implies a\zeta_f b$ kirjutame ümber kujule $p_1([a]) = p_1([b]) \implies [a] = [b]$ ehk “p_1 on injektiivne”;
3. $a\zeta_f b \implies p(a) = p(b)$ kirjutame ümber kujule $[a] = [b] \implies p_1([a]) = p_1([b])$ ehk “p_1 on korrektselt (sõltumata ekvivalentsiklassi esindajast) defineeritud”;
4. $p(a)\tau p(b) \implies a(\zeta_f \vee \sigma)b$ kirjutame ümber kujule $p_1([a])\tau p_1([b]) \implies [a](\zeta_f \vee \sigma)[b]$ ehk “p_1 peegeldab eeljärjestust”;
5. $a(\zeta_f \vee \sigma)b \implies p(a)\tau p(b)$ kirjutame ümber kujule $[a](\zeta_f \vee \sigma)[b] \implies p_1([a])\tau p_1([b])$ ehk “p_1 säilitab eeljärjestust”.

Selles nimekirjas punktide 3 ja 5 kehtimine on tarvilik ja piisav selleks, et p_1 oleks korrektselt defineeritud kategooria Preord_Ω morfism. Punktide 1, 2 ja 4 kehtimine on lause 2.6 põhjal tarvilik ja piisav selleks, et p_1 oleks isomorfism kategoorias Preord_Ω. □

2.4 Lühike eeltäpne jada

Definitsioon 2.31 (vrd [3, def. 2.24])**.** Olgu $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ kategooria Preord_Ω morfismid. Ütleme, et

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

on *lühike eeltäpne jada*, kui f on morfismi g eeltuum ja g on morfismi f eelkotuum.

On selge, et kui valida kategoorias Preord_Ω klassiks $\mathcal{Z}$ triviaalsete objektide klass, siis langevad lühikese eeltäpse jada ja lühikese $\mathcal{Z}$-eeltäpse jada mõisted täpselt kokku.

Näide 2.32. Olgu $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{a, b\}$. Defineerime järjestusseosed ρ ja σ hulgal A, seose τ hulgal B ja funktsioonid f, g järgnevalt:

$$
\begin{tikzcd}
(A,\rho) & (A,\sigma) & (B,\tau) \\
3 \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, dash] & 3 \arrow[d, dash] \arrow[dr, mapsto, "g"] & \\
2 \arrow[r, mapsto, "f"] & 2 \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, dash] & b \arrow[d, dash] \\
1 \arrow[r, mapsto, "f"] & 1 \arrow[r, mapsto, "g"] & a
\end{tikzcd}
$$

Järjestatud hulki (A,ρ), (A,σ) ja (B,τ) võime vaadelda kui järjestatud Ω-algebraid, mille tüüp on tühihulk, s.t. Ω-algebraid, kus ei ole defineeritud ühtki tehet. Triviaalselt järjestusseosed ρ, σ ja τ on tehetega kooskõlas ning f ja g säilitavad tehteid. On lihtne näha, et f ja g säilitavad järjestust. Seega kui võtta Ω tühihulgaks saame vaadelda $(A,\rho), (A,\sigma), (B,\tau)$ kui Preord_Ω objekte ning f ja g kui morfisme.

Tuleb välja, et

$$(A,\rho) \xrightarrow{f} (A,\sigma) \xrightarrow{g} (B,\tau)$$

on lühike eeltäpne jada. Veendume selles.

Näitame, et f on morfismi g eeltuum. On selge, et gf on triviaalne morfism. Oletame, et $\lambda\colon (X,\pi) \to (A,\sigma)$ on selline morfism, et $g\lambda$ on triviaalne. Defineerime $\lambda'\colon (X,\pi) \to (A,\rho)$ võrdusega

$$\lambda'(x) = \lambda(x).$$

Peame veenduma, et λ' on kategooria Preord_Ω morfism, mis antud juhul tähendab veendumist, et ta säilitab järjestust. Oletame, et $x\pi y$. Siis ei ole võimalik, et $\lambda'(x) = 1$ ja $\lambda'(y) \neq 1$: sellisel juhul saaksime

$$g(\lambda(x)) = g(\lambda'(x)) = a \neq b = g(\lambda'(y)) = g(\lambda(y)),$$

mis on vastuolus $g\lambda$ triviaalsusega. Aga kõikide ülejäänud paaride korral langevad ρ ja σ kokku ehk et kui λ säilitab eeljärjestust siis ka λ' säilitab eeljärjestust. Seega leidub λ' nii, et $\lambda = f\lambda'$. Et f on injektiivne, siis mistahes λ'' korral, kui $\lambda = f\lambda' = f\lambda''$, saame f vasakult taandada ja näeme, et $\lambda' = \lambda''$. Niisiis on f morfismi g eeltuum. Analoogiliselt on võimalik näidata, et g on morfismi f eelkotuum.

Näide 2.33. Olgu $(\mathbf{A},\rho)$ eeljärjestatud Ω-algebra. Konstrueerime paari $(\sim, \leqslant)$ nagu lauses 1.10. Siis

$$(\mathbf{A},\sim) \xrightarrow{k} (\mathbf{A},\rho) \xrightarrow{\pi} (\mathbf{A}/{\sim}, \leqslant)$$

on lühike eeltäpne jada. Selle fakti tõestame teoreemis 2.39.

Näide 2.34. Tuleme tagasi näite 1.12 juurde. Veendusime, et seal lause 1.10 tekitatud seos $\sim$ langeb täpselt kokku polünoomide assotsieerituse mõistega. Niisiis

$$(K[x],\cdot,\sim) \xrightarrow{k} (K[x],\cdot,|) \xrightarrow{\pi} (K[x]/{\sim},\cdot,|)$$

on lühike eeltäpne jada, kus $K[x]/{\sim}$ koosneb assotsieeritud polünoomide ekvivalentsusklassidest.

Järgmine teoreem kirjeldab isomorfismi täpsuseni ära kõik lühikesed eeltäpsed jadad eeljärjestatud algebrate kategoorias.

Teoreem 2.35 (vrd [3, lause 2.27]). *Olgu* $(\mathbf{A},\rho) \xrightarrow{f} (\mathbf{B},\sigma) \xrightarrow{g} (\mathbf{C},\tau)$ *lühike eeltäpne jada kategoorias* Preord_Ω*. Siis leidub kommutatiivne diagramm*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{A},\rho) \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & (\mathbf{B},\sigma) \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & (\mathbf{C},\tau) \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
(\mathbf{B},\sigma\cap\sim_g) \arrow[r, "k"] & (\mathbf{B},\sigma) \arrow[r, "\pi"] & (\mathbf{B}/\zeta_k,\zeta_k\vee\sigma)
\end{tikzcd} \tag{6}$$

kus k on samasusteisendus, π on kanooniline projektsioon, vertikaalsed morfismid on isomofismid ja

$$(\mathbf{B},\sigma\cap\sim_g) \xrightarrow{k} (\mathbf{B},\sigma) \xrightarrow{\pi} (\mathbf{B}/\zeta_k,\zeta_k\vee\sigma)$$

on lühike eeltäpne jada.

Tõestus. Lause 2.13 järgi on morfism k morfismi g eeltuum. Et ka f on morfismi g eeltuum, siis leidub lause 2.15 järgi isomorfism φ, mis paneb diagrammi (6) vasakpoolse ruudu kommuteeruma.

Et g on morfismi f eelkotuum, siis sobiva isomorfismi leidumiseks piisab näidata, et π on morfismi f eelkotuum. Me teame lause 2.26 põhjal, et üks morfismi f eelkotuum on loomulik projektsioon $(\mathbf{B},\sigma)\to(\mathbf{B}/\zeta_f,\zeta_f\vee\sigma)$. Meil piisab näidata, et $\zeta_k=\zeta_f$, selleks omakorda piisab näidata, et $\eta_k=\eta_f$. Olgu $x,y\in B$ ja $x\eta_f y$. Siis leiduvad $a,b\in A$ nii, et $f(a)=x$ ja $f(b)=y$. Paneme tähele, et:

$$\begin{aligned}
x\eta_f y &\iff f(a)\eta_f f(b) \iff a\rho b \implies \varphi(a)(\sigma\cap\sim_g)\varphi(b)\\
&\iff k(\varphi(a))\eta_k k(\varphi(b)) \iff f(a)\eta_k f(b) \iff x\eta_k y.
\end{aligned}$$

Seega $\eta_f\subseteq\eta_k$. Teisalt eeldame, et $a,b\in B$ nii, et $a\eta_k b$. Teame, et φ on isomorfism, seega leidub pöördmorfism φ^{-1} nii, et $\varphi\varphi^{-1}=1_B$, kust saame $k\varphi=f$ tõttu $k=f\varphi^{-1}$. Paneme tähele, et:

$$\begin{aligned}
a\eta_k b &\iff k(a)\eta_k k(b) \iff a(\sigma\cap\sim_g)b \implies \varphi^{-1}(a)\rho\varphi^{-1}(b)\\
&\iff f(\varphi^{-1}(a))\eta_f f(\varphi^{-1}(b)) \iff k(a)\eta_f k(b) \iff a\eta_f b.
\end{aligned}$$

Järelikult $\eta_f=\eta_k$, kust $\zeta_f=\zeta_k$. Niisiis $(\mathbf{B}/\zeta_k,\zeta_k\vee\sigma)=(\mathbf{B}/\zeta_f,\zeta_f\vee\sigma)$ ja π ongi lause 2.26 tõttu leiduv f eelkotuum. Seega lause 2.15 tõttu leidub isomorfism ψ, mis paneb diagrammil (6) parempoolse ruudu kommuteeruma.

Viimaks peaksime veel näitama, et diagrammi (6) alumine rida on lühike eeltäpne jada. On selge et π on lause 2.26 tõttu leiduv morfismi k eelkotuum. Näitame, et k on lause 2.13 tõttu leiduv morfismi π tuum. Selleks piisab näidata, et seosed $\sim_g$ ja $\sim_\pi$ langevad kokku. Olgu $a,b\in B$, siis

$$a\sim_\pi b \iff \pi(a)=\pi(b) \iff \psi(g(a))=\psi(g(b)) \iff g(a)=g(b) \iff a\sim_g b,$$

kusjuures kolmas samaväärsus on samaväärsus, kuna ψ isomorfismina on injektiivne. □

Teades, et $\zeta_k=\zeta_f$ ja $\sim_g=\sim_\pi$, võime diagrammi (6) täiendada kujule

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{A},\rho) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"] & (\mathbf{B},\sigma) \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & (\mathbf{C},\tau) \arrow[d, "\cong"] \\
(\mathbf{B},\sigma\cap\sim_g) \arrow[r, "k"] \arrow[d, equal] & (\mathbf{B},\sigma) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & (\mathbf{B}/\zeta_f,\zeta_f\vee\sigma) \arrow[d, equal] \\
(\mathbf{B},\sigma\cap\sim_\pi) \arrow[r, "k"] & (\mathbf{B},\sigma) \arrow[r, "\pi"] & (\mathbf{B}/\zeta_k,\zeta_k\vee\sigma)
\end{tikzcd}$$

Näide 2.36. Vaatleme taas näite 2.32 situatsiooni. Seos $\sim_g$ jaotab hulga A ekvivalentsiklassideks $\{1\}$ ja $\{2,3\}$. Näeme, et $\sigma \cap \sim_g = \rho$ ja et f on samasusteisendus.

Teisalt, seos η_f langeb kokku seosega ρ, seega tema tekitatud kongruents ζ_f jaotab hulga A ekvivalentsiklassideks $\{1\}$ ja $\{2,3\}$. Defineerides isomorfismi

$$\psi\colon\ B \to A/\zeta_f; \qquad a \mapsto \{1\}, b \mapsto \{2,3\}$$

märkame, et $\pi = \psi g$, kus π on loomulik projektsioon $A \to A/\zeta_f$.

Järeldus 2.37. *Jada*

$$(\mathbf{A},\rho) \xrightarrow{f} (\mathbf{B},\sigma) \xrightarrow{g} (\mathbf{C},\tau)$$

on lühike eeltäpne jada parajasti siis, kui kehtivad järgmised tingimused:

1. $f\colon\ A \to B$ *on bijektsioon;*
2. *iga* $a,b \in A$ *korral*
$$f(a)\sigma f(b) \wedge g(f(a)) = g(f(b)) \iff a\rho b;$$
3. $g\colon\ B \to C$ *on sürjektsioon;*
4. *iga* $a,b \in B$ *korral*
$$g(a) = g(b) \iff a\zeta_f b;$$
5. *iga* $a,b \in B$ *korral*
$$g(a)\tau g(b) \iff a(\zeta_f \vee \sigma)b.$$

Tõestus. Vahetu järeldus lühikese eeltäpse jada definitsioonist ning järeldustest 2.18 ja 2.30. □

2.5 Eelväändeteooria

Eelväändeteooria üldine kategoorne definitsioon on järgmine.

Definitsioon 2.38 ([3, def. 4.3])**.** Olgu $\mathcal{C}$ suvaline kategooria, $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{F}$ kategooria $\mathcal{C}$ objektide mittetühjad ja isomorfismi all kinnised alamklassid. Tähistame $\mathcal{Z} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$. Öeldakse, et paar $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ on *eelväändeteooria*, kui on täidetud järgmised tingimused.

1. Iga $\mathcal{C}$ objekti B korral leidub lühike $\mathcal{Z}$-eeltäpne jada
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$
kusjuures $A \in \mathcal{T}$ ja $C \in \mathcal{F}$.
2. Iga $T \in \mathcal{T}$ ja $F \in \mathcal{F}$ korral $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,F) = \mathrm{Triv}_{\mathcal{Z}}(T,F)$.

Tähistame sümboliga Equiv_Ω kõikide kategooria Preord_Ω objektide klassi, mis on kujul $(\mathbf{A},\rho)$, kus ρ on kongruents. Samuti tähistame sümboliga ParOrd_Ω kõikide kategooria Preord_Ω objektide klassi, mis on kujul $(\mathbf{A},\rho)$, kus ρ on järjestusseos Ω-algebral $\mathbf{A}$.

Järgmine teoreem üldistab artikli [3] tulemust (vt. märkust lk. 15) eeljärjestatud hulkadelt eeljärjestatud algebratele.

Teoreem 2.39. *Paar* $(\mathsf{Equiv}_\Omega, \mathsf{ParOrd}_\Omega)$ *on eelväändeteooria kategoorias* Preord_Ω.

Tõestus. Esiteks paneme tähele, et $\mathsf{Equiv}_\Omega \cap \mathsf{ParOrd}_\Omega$ koosneb täpselt kategooria Preord_Ω triviaalsetest objektidest. Kui $(\mathbf{A}, \rho) \in \mathsf{Equiv}_\Omega \cap \mathsf{ParOrd}_\Omega$, siis ρ on nii ekvivalentsus- kui järjestusseos. Seega, kui $a\rho b$ saame sümmeetria tõttu, et $b\rho a$, kust antisümmeetria tõttu $a = b$. Et ρ on refleksiivne, siis $(\mathbf{A}, \rho) = (\mathbf{A}, =)$. Teiselt poolt seos $=$ mistahes Ω-algebral on nii kongruents kui tehetega kooskõlas olev järjestusseos. Seega definitsioonis mainitud $\mathcal{Z}$ langeb kokku kategooria Preord_Ω triviaalsete objektide klassiga. Niisiis ka definitsioonis mainitud lühikese $\mathcal{Z}$-eeltäpse jada ja $\mathcal{Z}$-triviaalse morfismi mõisted langevad kokku vastavalt lühikese eeltäpse jada ja triviaalse morfismi mõistetega.

Olgu $(\mathbf{B}, \rho)$ objekt kategoorias Preord_Ω. Olgu $(\sim, \leqslant)$ paar, mis on lause 1.10 järgi vastavuses eeljärjestusega ρ. Siin $\sim$ on kongruents Ω-algebral $\mathbf{B}$ ning $\leqslant$ on järjestusseos Ω-algebral $\mathbf{B}/{\sim}$. Näitame, et

$$(\mathbf{B}, \sim) \xrightarrow{k} (\mathbf{B}, \rho) \xrightarrow{\pi} (\mathbf{B}/{\sim}, \leqslant) \tag{7}$$

on lühike eeltäpne jada kategoorias Preord_Ω. Siin k on samasusteisendus ja π on loomulik projektsioon.

Näitame, et k on morfismi π eeltuum. Lause 2.13 järgi on üks morfismi π eeltuum samasusteisendus $(\mathbf{B}, \rho \cap \sim_\pi) \to (\mathbf{B}, \rho)$. Paneme esiteks tähele, et seos $\sim_\pi$ langeb kokku seosega $\sim$: mistahes $a, b \in B$ korral

$$a \sim_\pi b \iff \pi(a) = \pi(b) \iff [a]_\sim = [b]_\sim \iff a \sim b.$$

Teisalt $\sim \subseteq \rho$ — vastavalt $\sim$ konstruktsioonile $a \sim b \implies a\rho b$. Seega $\rho \cap \sim_\pi$, $\rho \cap \sim$ ja $\sim$ langevad kokku, kust saame, et et lause 2.13 tõttu eksisteeriv π eeltuum ongi samasusteisendus $k\colon (\mathbf{B}, \sim) \to (\mathbf{B}, \rho)$.

Näitame, et π on morfismi k eelkotuum. Lause 2.26 järgi on üks morfismi k eelkotuum kanooniline projektsioon $(\mathbf{B}, \rho) \to (\mathbf{B}/\zeta_k, \rho \vee \zeta_k)$. Taas näitame esiteks, et seosed ζ_k ja $\sim$ langevad kokku. Esiteks paneme tähele, et seosed η_k ja $\sim$ langevad kokku: mistahes $a, b \in B$ korral

$$a\eta_k b \iff k(a)\eta_k k(b) \iff a \sim b.$$

Et ζ_k on vähim kongruents, milles η_k sisaldub, ja et η_k on ise kongruents, siis saame, et $\sim = \eta_k = \zeta_k$. Teiseks peame näitama, et seos $\rho \vee \sim$ Ω-algebral $\mathbf{B}/{\sim}$ langeb kokku seosega $\leqslant$. Definitsioonidest:

$$\begin{aligned} [a] \leqslant [b] &\iff a\rho b; \\ [a](\rho \vee \sim)[b] &\iff a(\rho \vee \sim)b. \end{aligned}$$

Seega piisab näitamisest, et $\sim \subseteq \rho$, milles veendusime ülal. Niisiis lause 2.26 tõttu eksisteeriv k eelkotuum ongi loomulik projektsioon $\pi\colon (\mathbf{B}, \rho) \to (\mathbf{B}/{\sim}, \leqslant)$.

Sellega oleme näidanud, et (7) on lühike eeltäpne jada. Seejuures märgime, et iga B korral ilmselt $(\mathbf{B}, \sim) \in \mathsf{Equiv}_\Omega$ ja $(\mathbf{B}/{\sim}, \leqslant) \in \mathsf{ParOrd}_\Omega$. Seega paar $(\mathsf{Equiv}_\Omega, \mathsf{ParOrd}_\Omega)$ rahuldab eelväändeteooria definitsiooni esimest punkti.

Näitame, et $(\mathsf{Equiv}_\Omega, \mathsf{ParOrd}_\Omega)$ rahuldab ka eelväändeteooria definitsiooni teist punkti. Olgu $(\mathbf{T}, \sim) \in \mathsf{Equiv}_\Omega$ ning $(\mathbf{F}, \leqslant) \in \mathsf{ParOrd}_\Omega$. Näitame, et kõik morfismid $(\mathbf{T}, \sim) \to (\mathbf{F}, \leqslant)$ on triviaalsed. Oletame, et $f\colon (\mathbf{T}, \sim) \to (\mathbf{F}, \leqslant)$ on kategooria Preord_Ω morfism. Mistahes $a, b \in T$ korral saame, et kui $a \sim b$, siis $f(a) \leqslant f(b)$. Teisalt, kui $a \sim b$, siis ka $b \sim a$, kust $f(b) \leqslant f(a)$. Et $\leqslant$ on antisümmeetriline, siis tähendab see, et $f(a) = f(b)$. Saime, et kui $a \sim b$, siis $f(a) = f(b)$. See näitabki, et f on triviaalne morfism.

Sellega oleme näidanud, et $(\mathsf{Equiv}_\Omega, \mathsf{ParOrd}_\Omega)$ on eelväändeteooria kategoorias Preord_Ω. □

3 Diagrammlemmad

Selles peatükis tõestame variandid kahest klassikalisest diagrammlemmast: lühike 5-lemma ja 9-lemma. Lühikese 5-lemma saame tõestada üldisemalt, hõlmates korraga muuhulgas nii lühikesi täpseid jadasid Abeli kategooriates kui ka lühikesi eeltäpseid jadasid kategoorias Preord_Ω. Samas kontekstis tõestame nõrgema variandi 9-lemmast.

3.1 $\mathcal{Z}$-eelmonomorfismid ja $\mathcal{Z}$-eelepimorfismid

Variante kõnealustest diagrammlemmadest on võimalik tõestada üldisemas kontekstis, mistahes kategooria lühikeste $\mathcal{Z}$-eeltäpsete jadade jaoks. Selleks peame kirjeldama morfisme, mis käituvad $\mathcal{Z}$-triviaalsete morfismidega nii, nagu Abeli kategoorias käituvad nullmorfismidega mono- ja epimorfismid. Olgu edaspidises $\mathcal{C}$ kategooria ja $\mathcal{Z}$ tema objektide klassi mittetühi alamklass.

Definitsioon 3.1. Olgu $f\colon A \to B$ kategooria $\mathcal{C}$ morfism. Ütleme, et f on *$\mathcal{Z}$-eelmonomorfism*, kui tal leidub $\mathcal{Z}$-triviaalne $\mathcal{Z}$-eeltuum.

Lemma 3.2. *$\mathcal{Z}$-eelmonomorfismi kõik $\mathcal{Z}$-eeltuumad on $\mathcal{Z}$-triviaalsed.*

Tõestus. Olgu $f\colon A \to B$ $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism, $k\colon X \to A$ tema $\mathcal{Z}$-triviaalne $\mathcal{Z}$-eeltuum ja $\lambda\colon Y \to A$ tema mingi teine $\mathcal{Z}$-eeltuum. Et fk on $\mathcal{Z}$-triviaalne ja $f\lambda$ on samuti $\mathcal{Z}$-triviaalne, siis leidub $\lambda'\colon Y \to X$ nii, et $\lambda = k\lambda'$. Et k on $\mathcal{Z}$-triviaalne, siis ka $k\lambda' = \lambda$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne tänu lemmale 1.16. Seega λ on $\mathcal{Z}$-triviaalne. $\square$

Näide 3.3. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ja $\mathcal{Z} = \mathcal{C}_0$. Siis iga morfism on $\mathcal{C}_0$-eelmonomorfism, kusjuures $\mathcal{C}_0$-eeltuumaks sobib ühikmorfism.

Näide 3.4. Olgu $\mathcal{C} = \mathsf{Preord}_\Omega$ ja $\mathcal{Z}$ kõikide triviaalsete objektide klass. Siin morfism

$$f\colon (\mathbf{A}, \rho) \to (\mathbf{B}, \sigma)$$

on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism parajasti siis, kui

$$a\rho b, f(a) = f(b) \implies a = b.$$

Tõestame selle.

Oletame, et f on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism; üks tema $\mathcal{Z}$-eeltuum on lause 2.13 järgi samasusteisendus $k\colon (\mathbf{A}, \rho \cap \sim_f) \to (\mathbf{A}, \rho)$. Et $\mathcal{Z}$-eelmonomorfismi iga $\mathcal{Z}$-eeltuum on lemma 3.2 põhjal $\mathcal{Z}$-triviaalne, siis k on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Seega $a(\rho\cap\sim_f)b \implies k(a) = k(b)$, ümber kirjutatuna saame $a\rho b, f(k(a)) = f(k(b)) \implies k(a) = k(b)$ ja et k on ühikteisendus, siis $a\rho b, f(a) = f(b) \implies a = b$.

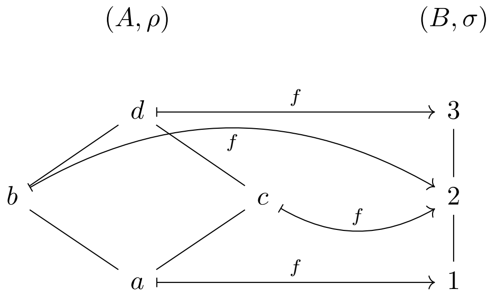
Teistpidine tõestus on analoogiline.

Siit näeme ka, et kategoorias Preord_Ω on iga injektiivne morfism $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism, kuid mitte vastupidi.

Näide 3.5. Vaatleme eelmist näidet juhul, kui Ω on tühihulk ehk objektid on lihtsalt eeljärjestatud hulgad ja morfismid eeljärjestust säilitavad kujutused.

Eeljärjestatud hulka (A, ρ) saame vaadelda suunatud graafina, kus tippudeks on A elemendid ja kaarteks $a \to b$ on paarid $(a, b) \in \rho$. Morfism f on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism parajasti siis, kui tolle suunatud graafi iga kaare otspunktid kujutuvad erinevateks B elementideks. Muuhulgas tähendab see, et kui ahendada funktsioon f ühele (A, ρ) tugevalt sidusale komponendile, siis muutub f injektiivseks.

Konkreetsemalt, vaatleme hulki $A = \{a, b, c, d\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$ ning defineerime nendel järjestusseosed ρ ja σ ning kujutuse f järgnevalt:



On lihtne aru saada, et f säilitab järjestust. Märkame, et f ei ole injektiivne, kuna $f(b) = f(c) = 2$. Samas f on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism: kuigi $f(b) = f(c)$ ja $b \neq c$ ei teki vastuolu $\mathcal{Z}$-eelmonomorfsusega, sest $(b, c) \notin \rho$.

Märgime veel, et see $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism on sürjektiivne. See erineb tüüpilistest olukordadest (nt. hulgad, Abeli rühmad, vektorruumid), kus monomorfismid on parajasti injektiivsed morfismid.

Näide 3.6. Olgu A kõikide reaalarvujadade (a_n) hulk, mille korral $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ koondub. Defineerime sellel tehte $+$ ja järjestusseose $\sqsubseteq$ järgmiselt.

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n);$$
$$(a_n) \sqsubseteq (b_n) \iff \forall k \in \mathbb{N}\colon\ a_k \leqslant b_k.$$

Siis $(A, +, \sqsubseteq)$ on järjestatud Ω-algebra; siin $\Omega_2 = \{+\}$. Ta on sama tüüpi Ω-algebraga $(\mathbb{R}, +, \leqslant)$, seega võime vaadata homomorfismi

$$f\colon\ (A, +, \sqsubseteq) \to (\mathbb{R}, +, \leqslant), \quad (a_n) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

On selge, et see on tehetega ja järjestusega kooskõlas.

Funktsioon f ei ole injektsioon, näiteks

$$f((0, 0, 0, 0, \ldots)) = 0 = f((1, -1, 0, 0, \ldots)).$$

Samas f on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism. Kui $(a_n) \sqsubseteq (b_n)$ ehk iga k korral $a_k \leqslant b_k$, aga $\sum a_k = \sum b_k$, siis iga k korral $a_k = b_k$ ehk $(a_n) = (b_n)$.

Näide 3.7. Olgu $\mathcal{C}$ mingi Abeli kategooria ja $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$. Abeli kategoorias on f monomorfsus samaväärne sellega, et tema tuum on nullmorfism [2, lause 1.5.4]. See on omakorda samaväärne sellega, et f $\mathcal{Z}$-eeltuum on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Niisiis $\mathcal{Z}$-eelmonomorfsus on selles olukorras samaväärne monomorfsusega.

Lause 3.8. *Olgu $f\colon Y \to A$ morfism, $g\colon A \to B$ $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism ja gf $\mathcal{Z}$-triviaalne morfism. Siis f on $\mathcal{Z}$-triviaalne.*

Tõestus. Et g on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism, siis leidub $\mathcal{Z}$-triviaalne morfism $k\colon X \to A$ nii, et k on morfismi g $\mathcal{Z}$-eeltuum. Et gf on $\mathcal{Z}$-triviaalne, siis leidub üheselt määratud morfism $\lambda\colon Y \to X$ nii, et $f = k\lambda$. Et k on $\mathcal{Z}$-triviaalne morfism, siis $k\lambda = f$ on samuti $\mathcal{Z}$-triviaalne lemma 1.16 põhjal. $\square$

$\mathcal{Z}$-eelmonomorfismi saab niisiis $\mathcal{Z}$-triviaalse morfismi eest "ära taandada" nii, et morfism jääb $\mathcal{Z}$-triviaalseks.

Definitsioon 3.9 (vrd def. 3.1)**.** Olgu $f\colon A \to B$ kategooria $\mathcal{C}$ morfism. Ütleme, et f on $\mathcal{Z}$-*eelepimorfism*, kui tal leidub $\mathcal{Z}$-triviaalne $\mathcal{Z}$-eelkotuum.

Lemma 3.10 (vrd lemma 3.2)**.** *$\mathcal{Z}$-eelepimorfismi kõik $\mathcal{Z}$-eelkotuumad on $\mathcal{Z}$-triviaalsed.*

Tõestus. Duaalne lemma 3.2 tõestusega. □

Lause 3.11. *Kategoorias* Preord_Ω *on morfism* $f\colon (\mathbf{A},\rho) \to (\mathbf{B},\sigma)$ *$\mathcal{Z}$-eelepimorfism parajasti siis, kui seosed ζ_f ja $\equiv_\sigma$ langevad kokku.*

Tõestus. Tarvilikkus. Oletame, et f on $\mathcal{Z}$-eelepimorfism. Olgu

$$p\colon (\mathbf{B},\sigma) \to (\mathbf{X},\tau)$$

tema $\mathcal{Z}$-triviaalne eelkotuum. Siis kehtib

$$\forall a,b \in B\colon\ a\sigma b \implies p(a) = p(b).$$

Et p on eelkotuum, siis järelduse 2.30 tõttu saame teisest küljest

$$\forall a,b \in B\colon\ p(a) = p(b) \implies a\zeta_f b.$$

Saime $\sigma \subseteq \zeta_f$. Teisest küljest $\eta_f \subseteq \sigma$. Et ζ_f on kõikide η_f sisaldavate kongruentside ühisosa, siis sellesse ühisossa kuuluvad ka kõik σ sisaldavad kongruentsid, kust saame $\equiv_\sigma = \zeta_f$.

Piisavus. Oletame, et f on selline morfism, et ζ_f ja $\equiv_\sigma$ langevad kokku. Vaatleme siis tema lause 2.26 tõttu leiduvat eelkotuuma

$$\pi\colon (\mathbf{B},\sigma) \to (\mathbf{B}/\zeta_f, \sigma \vee \zeta_f),$$

kus π on loomulik projektsioon. Veendume, et π on triviaalne. Olgu $a\sigma b$, siis $a \equiv_\sigma b$, kust $a\zeta_f b$ ehk $\pi(a) = [a] = [b] = \pi(b)$. Niisiis on f $\mathcal{Z}$-eelepimorfism. □

Kategoorias Preord_Ω on $\mathcal{Z}$-eelepimorfism olemiseks ka järgmine piisav tingimus. See mugandab lühikese 5-lemma sõnastamist, kui seda sõnastada ainult kategooria Preord_Ω jaoks.

Lause 3.12. *Olgu kategoorias* Preord_Ω *antud morfism*

$$g\colon (\mathbf{B},\sigma) \to (\mathbf{C},\tau),$$

mis on morfismi

$$f\colon (\mathbf{A},\rho) \to (\mathbf{B},\sigma)$$

eelkotuum. Siis g on $\mathcal{Z}$-eelepimorfism.

Tõestus. Kehtigu teoreemi eeldused. Näitame, et $\tau \subseteq \zeta_g$. Olgu $a,b \in C$ ning $a\tau b$. Et g on järelduse 2.30 tõttu sürjektiivne, siis leiduvad $x,y \in B$ nii, et $g(x) = a$ ja $g(y) = b$. Seega $g(x)\tau g(y)$, kust järelduse 2.30 tõttu saame $x(\sigma \vee \zeta_f)y$. Lemma 2.23 tõttu siis leidub jada $x = c_0, \ldots, c_k = y$ nii, et iga i korral $c_i\sigma c_{i+1}$ või $c_i\zeta_f c_{i+1}$. Kui $c_i\sigma c_{i+1}$, siis vastavalt definitsioonile $g(c_i)\eta_g g(c_{i+1})$, kust $g(c_i)\zeta_g g(c_{i+1})$. Aga kui $c_i\zeta_f c_{i+1}$, siis taaskord järelduse 2.30 tõttu $g(c_i) = g(c_{i+1})$, mis ζ_g refleksiivsuse tõttu tähendab $g(c_i)\zeta_g g(c_{i+1})$. Et ζ_g on transitiivne, siis $g(c_0)\zeta_g g(c_k)$ ehk $a\zeta_g b$. Järelikult $\tau \subseteq \zeta_g$.

Analoogiliselt lausega 3.11 järeldub sisalduvusest $\tau \subseteq \zeta_g$ see, et $\equiv_\tau = \zeta_g$, mis kategoorias Preord_Ω tähendab täpselt seda, et g on $\mathcal{Z}$-eelepimorfism. □

Näide 3.13. Olgu $\mathcal{C}$ mingi Abeli kategooria ja $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$. Duaalselt $\mathcal{Z}$-eelmonomorfismide juhule on siin $\mathcal{Z}$-eelepimorfismid täpselt epimorfismid.

Lause 3.14 (vrd lause 3.8)**.** *Olgu $f\colon A \to B$ $\mathcal{Z}$-eelepimorfism, $g\colon B \to Y$ morfism ja gf $\mathcal{Z}$-triviaalne morfism. Siis g on $\mathcal{Z}$-triviaalne.*

Tõestus. Duaalne lause 3.8 tõestusega. □

3.2 Lühike 5-lemma

Järgnev tulemus on klassikalise lühikese 5-lemma üldistus. Tõestuse sammud on analoogilised raamatus [5] leheküljel 202 toodud lemma 1 tõestuse sammudega, kuid teatavad mõisted on asendatud nendele vastavate üldistustega.

Teoreem 3.15 (lühike 5-lemma $\mathcal{Z}$-eeltäpsete jadade jaoks)**.** *Olgu kommutatiivse diagrammi*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{m} & B & \xrightarrow{e} & C \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ A' & \xrightarrow{m'} & B' & \xrightarrow{e'} & C' \end{array}$$

read lühikesed $\mathcal{Z}$-eeltäpsed jadad.

1. *Eeldame, et f ja h on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfismid, et g omab $\mathcal{Z}$-eeltuuma ja et m' on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism. Siis g on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism.*

2. *Eeldame, et f ja h on $\mathcal{Z}$-eelepimorfismid, et g omab $\mathcal{Z}$-eelkotuuma ja et e on $\mathcal{Z}$-eelepimorfism. Siis g on $\mathcal{Z}$-eelepimorfism.*

Tõestus. 1. Olgu k morfismi g $\mathcal{Z}$-eeltuum. Siis gk on $\mathcal{Z}$-triviaalne, kust $e'gk$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Kommutatiivsuse tõttu hek on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Et h on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism, siis ek on lause 3.8 põhjal $\mathcal{Z}$-triviaalne. Et ek on $\mathcal{Z}$-triviaalne ja m on morfismi e $\mathcal{Z}$-eeltuum, siis k esitub kujul $k = mk'$. Et gk on $\mathcal{Z}$-triviaalne, siis gmk' on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Kommutatiivsuse tõttu $gmk' = m'fk'$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Et m' on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism, siis fk' on $\mathcal{Z}$-triviaalne; et f on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism, siis k' on $\mathcal{Z}$-triviaalne, et k' on $\mathcal{Z}$-triviaalne, siis $k = mk'$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Et morfismil g leidub $\mathcal{Z}$-triviaalne $\mathcal{Z}$-eeltuum k, siis on ta $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "k'"'] \arrow[d, "k"] & \\ A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "h"] \\ A' \arrow[r, "m'"] & B' \arrow[r, "e'"] & C' \end{tikzcd}$$

2. Saab tõestada duaalselt esimese punktiga.

□

Järeldus 3.16. *Olgu kategoorias* Preord_Ω *kommutatiivse diagrammi*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{m} & B & \xrightarrow{e} & C \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ A' & \xrightarrow{m'} & B' & \xrightarrow{e'} & C' \end{array}$$

read lühikesed eeltäpsed jadad.

1. *Eeldame, et f ja h on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfismid. Siis g on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism.*

2. *Eeldame, et f ja h on $\mathcal{Z}$-eelepimorfismid. Siis g on $\mathcal{Z}$-eelepimorfism.*

Tõestus. Teame, et kategoorias Preord_Ω omab iga morfism $\mathcal{Z}$-eeltuuma ja $\mathcal{Z}$-eelkotuuma. Samuti teame, et kõik $\mathcal{Z}$-eeltuumad on injektsioonid ja et kõik injektsioonid on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfismid. Viimaks teame lausest 3.12, et kõik $\mathcal{Z}$-eelkotuumad on $\mathcal{Z}$-eelepimorfismid.

Nüüd järelduvad väited vahetult teoreemist 3.15. $\square$

Järeldus 3.17 (lühike 5-lemma Abeli kategooriates, [5, lk. 202, lemma 1])**.** *Olgu Abeli kategoorias kommutatiivse diagrammi*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A' \arrow[r, "m'"] & B' \arrow[r, "e'"] & C' \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

read lühikesed täpsed jadad.

1. *Eeldame, et f ja h on monomorfismid. Siis g on monomorfism.*
2. *Eeldame, et f ja h on epimorfismid. Siis g on epimorfism.*

Tõestus. Näidetes veendusime, et kui võtta Abeli kategoorias $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$, siis lühikese $\mathcal{Z}$-eeltäpse jada, $\mathcal{Z}$-eelmonomorfismi ja $\mathcal{Z}$-eelepimorfismi mõisted langevad kokku vastavalt lühikese täpse jada, monomorfismi ja epimorfismi mõistega. Lisaks on teada, et Abeli kategoorias on igal morfismil tuum ja kotuum ning jadade täpsuse tõttu on teada, et e on epimorfism ja m' on monomorfism.

Nüüd järelduvad väited vahetult teoreemist 3.15. $\square$

3.3 Nõrk 9-lemma

Abeli kategooriates on võimalik tõestada järgmine klassikaline tulemus.

Teoreem 3.18 (9-lemma, [2, lemma 1.10.5])**.** *Olgu mingis Abeli kategoorias antud kommutatiivne diagramm*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[d] & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} &
\end{tikzcd},$$

mille veerud on lühikesed täpsed jadad.

1. *Kui alumised kaks rida on lühikesed täpsed jadad, siis ka ülemine rida on lühike täpne jada.*
2. *Kui ülemised kaks rida on lühikesed täpsed jadad, siis ka alumine rida on lühike täpne jada.*

Meie olukorras võimalik tõestada järgmine nõrgem variant.

Teoreem 3.19 (nõrk 9-lemma)**.** *Olgu kategoorias $\mathcal{C}$ antud kommutatiivne diagramm*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "k_A"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "k_B"] & C_1 \arrow[d, "k_C"] \\
A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "l_A"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "l_B"] & C_2 \arrow[d, "l_C"] \\
A_3 \arrow[r, "f_3"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & C_3
\end{tikzcd} .$$

1. *Oletame, et iga $i \in \{2,3\}$ korral f_i on g_i $\mathcal{Z}$-eeltuum ja iga $j \in \{A,B,C\}$ korral k_j on l_j $\mathcal{Z}$-eeltuum. Eeldame, et k_C ja f_3 on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfismid. Siis f_1 on g_1 $\mathcal{Z}$-eeltuum.*

2. *Oletame, et iga $i \in \{1,2\}$ korral g_i on f_i $\mathcal{Z}$-eelkotuum ja iga $j \in \{A,B,C\}$ korral l_j on k_j $\mathcal{Z}$-eelkotuum. Eeldame, et g_1 ja l_A on $\mathcal{Z}$-eelepimorfismid. Siis g_3 on f_3 $\mathcal{Z}$-eelkotuum.*

Tõestus. 1. Näitame, et $g_1 f_1$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne morfism. Et $g_2 f_2$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne, siis ka $g_2 f_2 k_A$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne, kust kommutatiivsuse tõttu $k_C g_1 f_1$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Et k_C on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism, siis ka $g_1 f_1$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne.

Olgu $\lambda\colon Y \to B_1$ selline, et $g_1\lambda$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Siis ka $k_C g_1 \lambda$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne, kust kommutatiivsuse tõttu saame, et $g_2 k_B \lambda$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Et f_2 on g_2 $\mathcal{Z}$-eeltuum, siis leidub üheselt määratud morfism $\lambda_2\colon Y \to A_2$ nii, et $k_B\lambda = f_2\lambda_2$. Et $l_B k_B$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne, siis $l_B k_B \lambda$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne, kust kommutatiivsuse tõttu $f_3 l_A \lambda_2$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Et f_3 on $\mathcal{Z}$-eelmonomorfism, siis ka $l_A\lambda_2$ on $\mathcal{Z}$-triviaalne. Kuna k_A on l_A $\mathcal{Z}$-eeltuum, siis leidub $\lambda_1\colon Y \to A_1$ nii, et $\lambda_2 = k_A\lambda_1$. Võrdusest $f_2\lambda_2 = k_B\lambda$ saame siis $f_2 k_A \lambda_1 = k_B\lambda$, kust kommutatiivsuse tõttu $k_B f_1 \lambda_1 = k_B \lambda$. Et k_B on $\mathcal{Z}$-eeltuum, siis on ta monomorfism, seega saame $f_1\lambda_1 = \lambda$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, "\lambda"] \arrow[dr, dashed, "\lambda_1"] \arrow[ddr, "\lambda_2"'] & & & \\
& A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "k_A"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "k_B"] & C_1 \arrow[d, "k_C"] \\
& A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "l_A"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "l_B"] & C_2 \arrow[d, "l_C"] \\
& A_3 \arrow[r, "f_3"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & C_3
\end{tikzcd}$$

Viimaks peame näitama, et λ_1 on üheselt määratud. Oletame, et $\lambda_1, \lambda_1'\colon Y \to A_1$ on sellised, et $f_1\lambda_1 = f_1\lambda_1' = \lambda$. Siis $k_B f_1 \lambda_1 = k_B f_1 \lambda_1'$ ehk ka $f_2 k_A \lambda_1 = f_2 k_A \lambda_1'$. Kuna f_2 ja k_A $\mathcal{Z}$-eeltuumadena on monomorfismid, siis $\lambda_1 = \lambda_1'$.

2. Saab tõestada duaalselt esimese punktiga.

$\square$

Järeldus 3.20. *Olgu kategoorias* Preord_Ω *antud kommutatiivne diagramm*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "k_A"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "k_B"] & C_1 \arrow[d, "k_C"] \\
A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "l_A"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "l_B"] & C_2 \arrow[d, "l_C"] \\
A_3 \arrow[r, "f_3"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & C_3
\end{tikzcd} .$$

1. *Oletame, et iga* $i \in \{2,3\}$ *korral* f_i *on* g_i *eeltuum ja iga* $j \in \{A,B,C\}$ *korral* k_j *on* l_j *eeltuum. Siis* f_1 *on* g_1 *eeltuum.*

2. *Oletame, et iga* $i \in \{1,2\}$ *korral* g_i *on* f_i *eelkotuum ja iga* $j \in \{A,B,C\}$ *korral* l_j *on* k_j *eelkotuum. Siis* g_3 *on* f_3 *eelkotuum.*

Tõestus. Et k_C ja f_3 on eeltuumad, siis on nad injektsioonid, seega ka $\mathcal{Z}$-eelmonomorfismid. Samuti teame, et eelkotuumadena g_1 ja l_A on $\mathcal{Z}$-eelepimorfismid. Nüüd järelduvad väited vahetult teoreemist 3.19. $\square$

Viited

[1] Bloom, S. L., 1976. *Varieties of ordered algebras.* J. Comput. System Sci. 13, lk. 200–212.

[2] Borceux, F., 1994. *Handbook of Categorical Algebra.* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Cambridge University Press.

[3] Facchini, A., Finocchiaro, C., 2019. *Pretorsion theories, stable category and preordered sets.* Annali di Matematica Pura ed Applicata.

[4] Kaarli, K., 1989. *Sissejuhatus universaalalgebrasse.* Tartu Riiklik Ülikool.

[5] Mac Lane, S., 1978. *Categories for the working mathematician.* Springer-Verlag New York.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Tähvend Uustalu,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
   "Lühikesed eeltäpsed jadad eeljärjestatud Ω-algebrate kategoorias",
   mille juhendaja on Valdis Laan,
   reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni,

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Tähvend Uustalu
12.05.2020