

Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Hanna Britt Soots

**Murrulise tuletisega
integro-diferentsiaalvõrrandi
numbriline lahendamine**

Matemaatika eriala

Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad: lektor Kaido Lätt
professor Arvet Pedas

Tartu 2021

Murrulise tuletisega integro-diferentsiaalvõrrandi numbriline lahendamine

Magistritöö
Hanna Britt Soots

Lühikokkuvõte. Magistritöös käsitletakse murrulise tuletisega integro-diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu, ühesust ning siledust. Kirjeldatakse meetodit numbrilise lahendi leidmiseks ning analüüsitakse selle täpsust. Numbrilise lahendi leidmisel kasutatakse kollokatsioonimeetodil põhinevat lähenemist koos gradueeritud võrguga. Lisaks rakendatakse kirjeldatud meetodit kahe näiteülesande lahendamiseks.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad. Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaator, Caputo murruline diferentsiaaloperaator, kollokatsioonimeetod, gradueeritud võrk.

Numerical solution of a class of fractional integro-differential equations

Master's thesis
Hanna Britt Soots

Abstract. In this Master's thesis we examine the existence, uniqueness and smoothness of the exact solution of a fractional integro-differential equation. A method based on collocation with graded grids for finding the numerical solution of the considered problem is presented. Convergence of the proposed method is evaluated. Two numerical examples are also given.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key words. Riemann-Liouville fractional differentiation operator, Caputo fractional differentiation operator, collocation method, graded grid.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Vajalikud mõisted ja tulemused	4
2 Murrulise tuletisega integro-diferentsiaalvõrrand	8
3 Lahendi olemasolu, ühesus ning siledus	14
4 Meetodi kirjeldus	20
5 Veahinnangud	23
6 Numbrilised näited	31
Kirjandus	37
Lisa 1 (Näiteülesande 1 kood)	38
Lisa 2 (Näiteülesande 2 kood)	44

Sissejuhatus

Murrulised tuletised ja neid sisaldavad võrrandid on väga aktiivne uurimisvaldkond tänapäeva matemaatikas. Kui varasemalt oli tegemist puhta matemaatika uurimisvaldkonnaga, muutus valdkonna käsitlus 20. sajandi keskpaigast praktilisemaks. See muutus oli tingitud uutest rakendustest füüsikas, keemias, bioloogias ning majanduses. Eriti kasulikud on murrulised tuletised kirjeldamiseks materjale ja süsteeme, mis sõltuvad iseenda varasemast käitumisest.

Käesolevas magistritöös käsitleme murrulise tuletisega integro-diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu, ühesuse ning siledusega seotud küsimusi. Töötame välja numbrilise lahendi leidmiseks ning analüüsime selle täpsust. Lisaks rakendame kirjeldatud meetodit kahe näiteülesande lahendamiseks.

Esimeses peatükis toome sisse meile vajalikud definitsioonid ja abitulemused. Teises peatükis formuleerime konkreetse Caputo murrulist tuletist sisaldava integro-diferentsiaalvõrrandi lisatingimustega ülesande ning viime selle ligikaudseks lahendamiseks sobilikule kujule.

Kolmandas peatükis tõestame kaks teoreemi, mis annavad tingimused ülesande lahendi olemasolule ja ühesusele ning kirjeldavad ülesande lahendi siledust. Neljandas ja viiendas peatükis esitame murrulise integro-diferentsiaalvõrrandi numbrilise lahendamise skeemi, tõestame selle koondumise ning hindame lähilahendi viga.

Viimases peatükis rakendame väljatöötatud meetodit kahe konkreetse näiteülesande lahendamiseks ning võrdleme numbrilisi tulemusi teoreetiliste hinnangutega.

Töös esitatud uuringute lähtepunkt on artikkel pealkirjaga *Numerical solution of linear fractional weakly singular integro-differential equations with integral boundary conditions* [1], kus vaadeldava Caputo murrulise diferentsiaaloperaatori järk α on vahemikus $(0, 1)$. Käesolevas magistritöös aga vaatleme juhtu, kus järk α on vahemikus $(1, 2)$.

1. Vajalikud mõisted ja tulemused

Käesolevas peatükis esitame töös kasutatavad põhilised mõisted ja abitulemused.

Tähistame naturaalarvude hulga sümboliga $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ja reaalarvude hulga sümboliga $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ning olgu $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Olgu $b \in (0, \infty)$ mingi positiivne reaalarv. Kõigi lõigus $[0, b]$ pidevate funktsioonide hulka tähistame sümboliga $C[0, b]$. See hulk on Banachi ruum normiga

$$\|y\|_{C[0,b]} = \|y\|_\infty = \max_{t \in [0,b]} |y(t)|, \quad y \in C[0, b].$$

Sümboliga $C^m[0, b]$ ($m \in \mathbb{N}_0$) tähistame kõigi lõigus $[0, b]$ m -korda ($m = 0$ korral $C^0[0, b] := C[0, b]$) pidevalt diferentseeruvate funktsioonide Banachi ruumi normiga

$$\|y\|_{C^m[0,b]} = \sum_{i=0}^m \|y^{(i)}\|_\infty, \quad y \in C^m[0, b].$$

Kõigi hulgas

$$\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq b\}$$

pidevate funktsioonide Banachi ruumi tähistame sümboliga $C(\Delta)$. Sümboliga $C^m(\Delta)$, ($m \in \mathbb{N}_0$) tähistame kõigi hulgas Δ m -korda ($m = 0$ korral $C^0(\Delta) := C(\Delta)$) pidevalt diferentseeruvate funktsioonide Banachi ruumi.

Kõigi lõigus $[0, b]$ mõõtuvate funktsioonide $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hulka, mille korral

$$\inf_{\Omega \subset [0,b], \mu(\Omega)=0} \sup_{t \in [0,b] \setminus \Omega} |f(t)| < \infty,$$

tähistame sümboliga $L^\infty(0, b)$. Siin $\mu(\Omega)$ on hulga Ω Lebesgue'i mõõt. Hulk $L^\infty(0, b)$ on normi

$$\|f\|_{L^\infty(0,b)} = \|f\|_\infty = \inf_{\Omega \subset [0,b], \mu(\Omega)=0} \sup_{t \in [0,b] \setminus \Omega} |f(t)|, \quad f \in L^\infty(0, b),$$

suhtes Banachi ruum.

Olgu X ja Y Banachi ruumid. Sümboliga $\mathcal{L}(X, Y)$ tähistame kõigi lineaarsete ja tõkestatud operaatorite $A : X \rightarrow Y$ Banachi ruumi normiga

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup\{\|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Definitsioon 1.1. Hulka K normeeritud ruumis nimetatakse *suhteliselt kompaktseks*, kui igast K elementidest moodustatud jadast saab eraldada koonduva osajada.

Definitsioon 1.2. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Lineaarset operaatorit $A : X \rightarrow Y$ nimetatakse *kompaktseks*, kui ta teisendab iga ruumis X tõkestatud hulga suhteliselt kompaktseks hulgaks ruumis Y .

Teoreem 1.3. [2] (Fredholmi alternatiiv) Olgu X Banachi ruum ja olgu $A \in \mathcal{L}(X, X)$ kompaktne operaator. Võrrand $z = Az + f$ on iga $f \in X$ korral lahenduv parajasti siis, kui homogeenisel võrrandil $z = Az$ on ainult triviaalne lahend $z = 0$.

Sel juhul on võrrand $z = Az + f$ iga $f \in X$ korral üheselt lahenduv.

Teoreemi 1.3 eeldustel on operaatoril $(I - A)$ olemas tõkestatud pöördoperaator $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$, kus I on ühikoperaator.

Teoreem 1.4. [2] Olgu E, F ja G normeeritud ruumid ja olgu $A : E \rightarrow F$ ning $B : F \rightarrow G$ tõkestatud lineaarsed operaatorid. Kui A või B on kompaktne operaator siis $BA : E \rightarrow G$ on kompaktne operaator.

Teoreem 1.5. [2] Olgu E ja F Banachi ruumid. Kui operaatorid $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ on sellised, et $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ ja

$$\|B\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(F, E)} < 1,$$

siis operaatoril $A + B$ leidub pöördoperaator $(A + B)^{-1}$ ja kehtib hinnang:

$$\|(A + B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(F, E)} \leq \frac{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(F, E)}}{1 - \|B\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(F, E)}}.$$

Definitsioon 1.6. Parameetrist $\alpha \in (0, \infty)$ sõltuvat päratut integraali

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

nimetame *gammafunktsiooniks*.

Definitsioon 1.7. Olgu D operaator, mis viib diferentseeruva funktsiooni f tema tuletiseks f' ehk

$$(Df)(x) = f'(x), \quad x \in [0, b].$$

Tähistusega D^n ($n \in \mathbb{N}$) märgime n -järku iteratsiooni operaatorist D (näiteks $D^1 = D$ ja $D^2 = DD$ jne). Kui $n = 0$, siis $D^0 := I$, kus I on ühikoperaator.

Definitsioon 1.8. Olgu funktsioon $f \in C[0, b]$ ning α positiivne reaalarv. Operaatorit J^α , mis on defineeritud võrdusega

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in [0, b], \quad (1.1)$$

nimetatakse α -järku *Riemanni-Liouville'i integraaloperaatoriks*. Defineerime $J^0 := I$, kus I on ühikoperaator.

Operaator J^α ($\alpha > 0$) on pidev, tõkestatud ja kompaktne operaator ruumist $L^\infty(0, b)$ ruumi $C[0, b]$ [3].

Definitsioon 1.9. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ning $\alpha \in (m-1, m]$. Operaatorit D_{R-L}^α , mis on defineeritud võrdusega

$$D_{R-L}^\alpha f = D^m J^{m-\alpha} f, \quad f \in C[0, b], \quad J^{m-\alpha} f \in C^m[0, b], \quad (1.2)$$

nimetatakse α -järku *Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaatoriks*.

Lause 1.10. Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1, n]$ ja $m \in \mathbb{N}$ selline, et $m > \alpha$. Kehtib võrdus

$$D_{R-L}^\alpha = D^m J^{m-\alpha}. \quad (1.3)$$

Lause 1.11. Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1, n]$ ning $f \in C[0, b]$. Siis

$$(D_{R-L}^\alpha J^\alpha f)(x) = f(x), \quad x \in [0, b].$$

Lause 1.12. Olgu α, β positiivsed reaalarvud ja $f \in C[0, b]$, siis

$$J^\alpha J^\beta f = J^{\alpha+\beta} f.$$

Lausete 1.10, 1.11 ja 1.12 tõestused võib leida monograafiast [4].

Definitsioon 1.13. Olgu m naturaalarv ning $f \in C^m[0, b]$. Funktsiooni $T_m f$, mis on defineeritud võrdusega

$$(T_m f)(t) := \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad t \in [0, b],$$

nimetatakse *funktsiooni f m -järku Taylori polünoomiks punktis 0*.

Definitsioon 1.14. Olgu $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (m - 1, m]$ ning olgu funktsioon $f \in C^{m-1}[0, b]$ selline, et $J^{m-\alpha}(f - T_{m-1}f) \in C^m[0, b]$. Operaatorit D_{Cap}^α , mis on defineeritud võrdusega

$$(D_{\text{Cap}}^\alpha f)(t) := (D^m J^{m-\alpha}(f - T_{m-1}f))(t), \quad t \in [0, b],$$

nimetatakse α -järku Caputo murruliseks diferentsiaaloperaatoriks.

2. Murrulise tuletisega integro-diferentsiaalvõrrand

Selles peatükis formuleerime meid huvitava Caputo murrulist tuletist sisaldava integro-diferentsiaalvõrrandi lisatingimustega ülesande ning viime selle meile vajalikule kujule, et ülesannet numbriliselt lahendada. Peatükis kasutatud lähenemine põhineb peamiselt artiklis [1] esitatud meetodikal. Käesolevas töös käsitletakse situatsiooni, kus vaadeldava Caputo murrulise diferentsiaaloperaatori D_{Cap}^α järk α on vahemikus $(1, 2)$ (artiklis [1] oli $\alpha \in (0, 1)$). Vaatleme võrrandit

$$(D_{\text{Cap}}^\alpha y)(t) + h(t)y(t) + \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s)y(s)ds = f(t), \quad 0 \leq t \leq b, \quad 0 < b, \quad (2.1)$$

mille lahend $y = y(t)$ rahuldab lisatingimusi

$$\begin{aligned} a_{11}y(0) + a_{12}y(b_1) &= \gamma_1, \\ a_{21}y'(0) + a_{22}y(b_1) &= \gamma_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Siin D_{Cap}^α on α -järku Caputo murruline diferentsiaaloperaator, mille korral $\alpha \in (1, 2)$, $h, f \in C[0, b]$, $\kappa \in [0, 1)$, $K \in C(\Delta)$, kus

$$\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq b\}$$

ning $b_1 \in (0, b]$ ja $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \gamma_1, \gamma_2$ on antud reaalarvud.

Olgu $y \in C^1[0, b]$ suvaline funktsioon, mille korral $D_{\text{Cap}}^\alpha y \in C[0, b]$, kui $\alpha \in (1, 2)$. Paneme tähele, et kuna $\alpha \in (1, 2)$, siis Caputo diferentsiaaloperaatori definitsiooni järgi on $D_{\text{Cap}}^\alpha y$ kujul

$$(D_{\text{Cap}}^\alpha y)(t) = (D^2 J^{2-\alpha} g)(t), \quad t \in [0, b],$$

kus

$$g(s) = y(s) - y(0) - y'(0)s, \quad s \in [0, b].$$

Tähistame $z := D_{\text{Cap}}^\alpha y$. Siis kehtib omadus (vt [4]):

$$y(t) = k_1 + k_2 t + (J^\alpha z)(t), \quad t \in [0, b], \quad (2.3)$$

kus $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ on konstandid. Võtame võrduses (2.3) $t = 0$. Siis

$$y(0) = k_1 + k_2 \cdot 0 + (J^\alpha z)(0) = 0 + k_1 + 0 = k_1,$$

ehk $k_1 = y(0)$. Leiame funktsioonist y (mis on defineeritud võrdusega (2.3)) esimest järku tuletise:

$$y'(t) = k_2 + D^1(J^1 J^{\alpha-1} z)(t) = k_2 + (J^{\alpha-1} z)(t), \quad t \in [0, b].$$

Viimases võrduste ahelas kasutasime lauseid 1.11 ja 1.12.

Paneme tähele, et $y'(0) = k_2 + (J^{\alpha-1} z)(0) = k_2$. Seega $k_1 = y(0)$, $k_2 = y'(0)$. Järelikult funktsioon y kujul (2.3) rahuldab tingimusi (2.2) parajasti siis, kui

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}[k_1 + k_2 b_1 + (J^\alpha z)(b_1)] &= \gamma_1, \\ a_{21}k_2 + a_{22}[k_1 + k_2 b_1 + (J^\alpha z)(b_1)] &= \gamma_2. \end{aligned}$$

Avame mõlemas võrduses sulud ning viime liidetava $(J^\alpha z)(b_1)$ teisele poole võrdusmärke. Siis saame

$$\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{12}k_1 + a_{12}b_1k_2 &= \gamma_1 - a_{12}(J^\alpha z)(b_1), \\ a_{21}k_2 + a_{22}k_1 + a_{22}b_1k_2 &= \gamma_2 - a_{22}(J^\alpha z)(b_1), \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{12}b_1 \\ a_{22} & b_1 a_{22} + a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} - J^\alpha z(b_1) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Süsteem (2.4) on tundmatute k_1, k_2 suhtes üheselt lahenduv, kui maatriksi

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{12}b_1 \\ a_{22} & b_1 a_{22} + a_{21} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

determinant ei ole võrdne nulliga. Arvutame maatriksi (2.5) determinandi:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (a_{11} + a_{12})(b_1 a_{22} + a_{21}) - a_{12} a_{22} b_1 \\ &= b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}. \end{aligned}$$

Järelikult süsteem (2.4) on lahenduv, kui

$$b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21} \neq 0.$$

Oletame, et süsteem (2.4) on lahenduv ning leiame selle lahendid. Maatriksiteooriast on teada, et kui maatriksi A determinant on nullist erinev, siis

$$A^{-1} = \frac{1}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}} \begin{pmatrix} b_1 a_{22} + a_{21} & -a_{12} b_1 \\ -a_{22} & a_{11} + a_{12} \end{pmatrix}.$$

Kuna

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} - (J^\alpha z)(b_1) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right),$$

siis

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(b_1 a_{22} + a_{21})(\gamma_1 - (J^\alpha z)(b_1) a_{12}) - a_{12} b_1 (\gamma_2 - (J^\alpha z)(b_1) a_{22})}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}} \\ &= (J^\alpha z)(b_1) \frac{-a_{21} a_{12}}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}} + \frac{\gamma_1 (b_1 a_{22} + a_{21}) - \gamma_2 a_{12} b_1}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}} \\ &= (J^\alpha z)(b_1) k_{00} + k_{01}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

ning

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{-a_{22}(\gamma_1 - (J^\alpha z)(b_1) a_{12}) + (a_{11} + a_{12})(\gamma_2 - (J^\alpha z)(b_1) a_{22})}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}} \\ &= (J^\alpha z)(b_1) k_{10} + k_{11}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

kus

$$\begin{aligned} k_{00} &= \frac{-a_{21} a_{12}}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}}, & k_{10} &= \frac{-a_{22} a_{11}}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}}, \\ k_{11} &= \frac{-\gamma_1 a_{22} + \gamma_2 (a_{11} + a_{12})}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}}, & k_{01} &= \frac{\gamma_1 (b_1 a_{22} + a_{21}) - \gamma_2 a_{12} b_1}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}}. \end{aligned}$$

Seostest (2.6) ja (2.7) näeme, et funktsion y kujul (2.3) rahuldab tingimusi (2.2) parajasti siis, kui funktsioon on kujul

$$y(t) = (J^\alpha z)(b_1) k_{00} + k_{01} + [(J^\alpha z)(b_1) k_{10} + k_{11}] t + (J^\alpha z)(t), \quad t \in [0, b]. \quad (2.8)$$

Olgu selle peatüki lõpuni $t \in [0, b]$. Oletame nüüd, et $y \in C^1[0, b]$ on ülesande (2.1)–(2.2) lahend, mille korral $D_{\text{Cap}}^\alpha y \in C[0, b]$. Varasema arutelu põhjal teame, et siis y avaldub kujul (2.8), kus $z = D_{\text{Cap}}^\alpha y \in C[0, b]$. Vaatame

võrrandit (2.1). Jätame vasakule poole võrdusmärgi Caputo tuletise (kus $z = D_{\text{Cap}}^\alpha y$) ning viime ülejäänud liikmed paremale poole võrdusmärgi:

$$z(t) = f(t) - h(t)y(t) - \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s)y(s)ds. \quad (2.9)$$

Kui me asendame võrrandisse (2.9) funktsiooni y seosest (2.8), siis

$$z(t) = f(t) - h(t)[(J^\alpha z)(b_1)k_{00} + k_{01} + ((J^\alpha z)(b_1)k_{10} + k_{11})t + (J^\alpha z)(t)] - \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s)[(J^\alpha z)(b_1)k_{00} + k_{01} + ((J^\alpha z)(b_1)k_{10} + k_{11})s + (J^\alpha z)(s)]ds.$$

Kasutades Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori J^α definitsiooni ning integraali linearsuse omadust saame, et

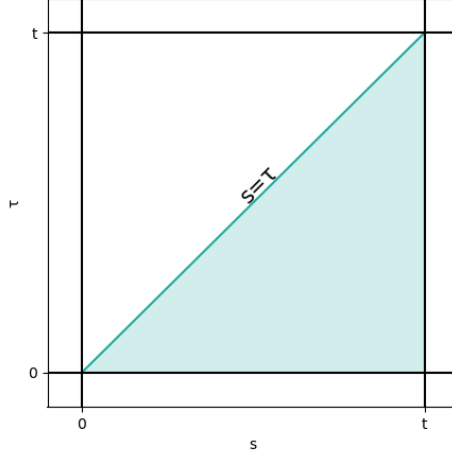
$$\begin{aligned} & - \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s)[(J^\alpha z)(b_1)k_{00} + k_{01} + ((J^\alpha z)(b_1)k_{10} + k_{11})s + (J^\alpha z)(s)]ds \\ = & - ((J^\alpha z)(b_1)k_{00} + k_{01}) \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s)ds - \\ & - ((J^\alpha z)(b_1)k_{10} + k_{11}) \int_0^t s(t-s)^{-\kappa} K(t,s)ds - \\ & - \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} z(\tau) d\tau ds. \end{aligned}$$

Järgmise sammuna vaatame eraldi integraali

$$\int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} z(\tau) d\tau ds. \quad (2.10)$$

Kahekordse integraali (2.10) integreerimispiirkond on kujutatud joonisel 2.1 värvitud kolmnurgana. Integraalis (2.10) integreerimise järjekorra muutmisel saame, et

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} z(\tau) d\tau ds \\ = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t z(\tau) \int_\tau^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s) (s-\tau)^{\alpha-1} ds d\tau \\ = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t z(s) \int_s^t (t-\tau)^{-\kappa} K(t,\tau) (\tau-s)^{\alpha-1} d\tau ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$



Joonis 2.1: Integraali (2.10) integreerimispiirkond

Kui me teeme integraalis (2.11) muutujavahetuse $\tau = (t-s)\sigma + s$, siis integraali (2.11) integreerimispiirkond B on kujul

$$\begin{aligned}
 B &= \{(s, \tau) : 0 \leq s \leq t, \quad s \leq \tau \leq t\} \\
 &= \{(s, (t-s)\sigma + s) : 0 \leq s \leq t, \quad s \leq (t-s)\sigma + s \leq t\} \\
 &= \{(s, (t-s)\sigma) : 0 \leq s \leq t, \quad s - s \leq (t-s)\sigma \leq t - s\} \\
 &= \{(s, \sigma) : 0 \leq s \leq t, \quad 0 \leq \sigma \leq 1\}.
 \end{aligned}$$

Paneme tähele, et fikseeritud $t \in [0, b]$ korral

$$(\tau - s)^{\alpha-1} = ((t-s)\sigma + s - s)^{\alpha-1} = ((t-s)\sigma)^{\alpha-1}, \quad s \in [0, t], \tau \in [s, t],$$

ning

$$(t - \tau)^{-\kappa} = (t - (t-s)\sigma - s)^{-\kappa} = ((t-s)(1-\sigma))^{-\kappa}, \quad s \in [0, t], \tau \in [s, t].$$

Pärast muutujavahetust $\tau = (t-s)\sigma + s$ saab integraal (2.11) järelilikult järgmise kuju:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \int_0^1 z(s) K(t, (t-s)\sigma + s) ((t-s)\sigma)^{\alpha-1} ((t-s)(1-\sigma))^{-\kappa} (t-s) d\sigma ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t z(s) (t-s)^{\alpha-\kappa} \int_0^1 K(t, (t-s)\sigma + s) \sigma^{\alpha-1} (1-\sigma)^{-\kappa} d\sigma ds.
 \end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$\begin{aligned}
z(t) &= f(t) - h(t)[(J^\alpha z)(b_1)k_{00} + k_{01} + ((J^\alpha z)(b_1)k_{10} + k_{11})t + (J^\alpha z)(t)] - \\
&\quad - ((J^\alpha z)(b_1)k_{00} + k_{01}) \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s) ds - \\
&\quad - ((J^\alpha z)(b_1)k_{10} + k_{11}) \int_0^t s(t-s)^{-\kappa} K(t,s) ds - \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t z(s)(t-s)^{\alpha-\kappa} \int_0^1 K(t, (t-s)\sigma + s) \sigma^{\alpha-1} (1-\sigma)^{-\kappa} d\sigma ds.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Järelikult $z = D_{\text{Cap}}^\alpha y$ rahuldab võrrandit

$$z = Tz + g,$$

kus

$$\begin{aligned}
(Tz)(t) &= -h(t)[(J^\alpha z)(b_1)k_{00} + (J^\alpha z)(b_1)k_{10}t + (J^\alpha z)(t)] - \\
&\quad - (J^\alpha z)(b_1)k_{00} \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s) ds - (J^\alpha z)(b_1)k_{10} \int_0^t s(t-s)^{-\kappa} K(t,s) ds - \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t z(s)(t-s)^{\alpha-\kappa} \int_0^1 K(t, (t-s)\sigma + s) \sigma^{\alpha-1} (1-\sigma)^{-\kappa} d\sigma ds,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

ning

$$g(t) = f(t) - h(t)[k_{01} + k_{11}t] - k_{01} \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s) ds - k_{11} \int_0^t s(t-s)^{-\kappa} K(t,s) ds. \tag{2.14}$$

Kehtib ka vastupidine: kui $z \in C[0, b]$ on võrrandi $z = Tz + g$ lahend, siis võrdusega (2.8) defineeritud funktsioon $y \in C[0, b]$, on ülesande (2.1)–(2.2) lahend.

3. Lahendi olemasolu, ühesus ning siledus

Selles peatükis vaatleme ülesande (2.1)–(2.2) lahendi olemasolu, ühesuse ning siledusega seotud küsimusi. Selleks toome artikli [3] eeskujul sisse funktsioonide ruumi $C^{q,\nu}(0, b]$ ja vaatleme selle mõningaid omadusi. Peatüki põhitu-
lemused on formuleeritud teoreemides 3.6, 3.7, mille tõestustes on kasutatud artikli [1] teoreemi 2.1 tõestusega sarnaseid võtteid.

Olgu $b > 0$, $q \in \mathbb{N}$ ja $\nu \in (-\infty, 1)$ Tähistame sümboliga $C^{q,\nu}(0, b]$ hulka, kuhu kuuluvad pidevad funktsioonid $y : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mis on q -korda pidevalt diferentseeruvad poollõiguses $(0, b]$ ning iga $t \in (0, b]$, $i = 1, \dots, q$ korral kehtivad järgmised hinnangud:

$$|y^{(i)}(t)| \leq c \begin{cases} 1, & i < 1 - \nu, \\ 1 + |\log t|, & i = 1 - \nu, \\ t^{1-\nu-i}, & i > 1 - \nu, \end{cases}$$

kus c on konstant.

Hulk $C^{q,\nu}(0, b]$ muutub Banachi ruumiks, kui varustada see normiga, mis on defineeritud järgmisel viisil:

$$\|y\|_{C^{q,\nu}} := \|y\|_{\infty} + |y|_{q,\nu}, \quad y \in C^{q,\nu}(0, b],$$

kus

$$|y|_{q,\nu} := \sum_{i=1}^q \sup_{0 < t \leq b} \omega_{i-1+\nu}(t) |y^{(i)}(t)|,$$

ning $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, puhul

$$\omega_{\lambda}(t) := \begin{cases} 1, & \lambda < 0, \\ \frac{1}{1 + |\log t|}, & \lambda = 0, \\ t^{\lambda}, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Näide 3.1. Olgu funktsioon kujul $y(t) = t^{\frac{5}{2}}$, kus $t \in (0, 1]$. Funktsioon y kuulub ruumi $C^{q, -\frac{3}{2}}(0, 1]$, $q \in \mathbb{N}$. Tõepoolest, leiame funktsiooni y esimesed neli tuletist:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &= \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}, \\ y^{(2)}(t) &= \frac{15}{4}t^{\frac{1}{2}}, \\ y^{(3)}(t) &= \frac{15}{8}t^{-\frac{1}{2}}, \\ y^{(4)}(t) &= -\frac{15}{16}t^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et $t \in (0, 1]$ korral kehtib $|y^{(1)}(t)| \leq 4$ ja $|y^{(2)}(t)| \leq 4$. Kui $i \geq 3$ on funktsiooni y i -ndat järku tuletise absoluutväärtus ülalt hinnatav funktsiooniga $ct^{1+\frac{3}{2}-i}$, kus $c \in \mathbb{R}$ ja $t \in (0, 1]$.

Märkus 3.2. [1] Kehtivad järgmised sisalduvused:

$$C^n[0, b] \subset C^{m, \nu}(0, b] \subset C^{m, \mu}(0, b] \subset C[0, b], \quad n \geq m \geq 1, \quad \nu \leq \mu < 1.$$

Toome ära mõned tulemused, mida meil on järgnevalt vaja. Olgu edaspidi

$$\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq b\}.$$

Lemma 3.3. [3] Kui $y_1, y_2 \in C^{q, \nu}(0, b]$, $q \in \mathbb{N}$, $\nu < 1$, siis $y_1 y_2 \in C^{q, \nu}(0, b]$ ning

$$\|y_1 y_2\|_{C^{q, \nu}(0, b]} \leq c \|y_1\|_{C^{q, \nu}(0, b]} \|y_2\|_{C^{q, \nu}(0, b]},$$

kus c on konstant, mis ei sõltu funktsioonidest y_1, y_2 .

Lemma 3.4. [3] Olgu $\eta \in (-\infty, 1)$ ja $K \in C(\Delta)$. Siis operaator S , mis on defineeritud võrdusega

$$(Sy)(t) = \int_0^t (t-s)^{-\eta} K(t, s)y(s)ds, \quad t \in [0, b], \quad (3.1)$$

on kompaktn operaator ruumist $L^\infty(0, b)$ ruumi $C[0, b]$.

Lemma 3.5. [3] Kui $K \in C^q(\Delta)$, $q \in \mathbb{N}$, siis operaator S , mis on defineeritud võrdusega (3.1), on kompaktn operaator ruumist $C^{q, \nu}(0, b]$ ruumi $C^{q, \nu}(0, b]$, kus $\eta \leq \nu < 1$.

Järgmisena vaatleme lisatingimustega ülesande (2.1)–(2.2) lahenduvust. Olgu edaspidi operaator T defineeritud võrdusega (2.13) ja funktsioon g võrdusega (2.14).

Teoreem 3.6. Olgu $\alpha \in (1, 2)$, $\kappa \in [0, 1)$, $h, f \in C[0, b]$, $K \in C(\Delta)$. Samuti eeldame, et $b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21} \neq 0$ ja et ülesandele (2.1)–(2.2) vastaval homogeesel ülesandel

$$(D_{\text{Cap}}^\alpha y)(t) + h(t)y(t) + \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s)y(s)ds = 0, \quad 0 \leq t \leq b, \quad 0 < b,$$

$$a_{11}y(0) + a_{12}y(b_1) = 0,$$

$$a_{21}y'(0) + a_{22}y(b_1) = 0$$

on ruumis $C[0, b]$ ainult triviaalne lahend $y = 0$.

Siis ülesandel (2.1)–(2.2) on täpselt üks lahend $y \in C^1[0, b]$ nii et $D_{\text{Cap}}^\alpha y \in C[0, b]$.

Tõestus. Kõigepealt paneme tähele, et võrrandi $z - Tz = g$ parem pool kuulub ruumi $C[0, b]$. Tõepoolest, eelduste järgi $f, h \in C[0, b]$ ning lemma 3.4 kohaselt on operaatorid

$$(Sv)(t) = \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s)ds, \quad v(s) = 1 \quad t \in [0, b],$$

$$(Su)(t) = \int_0^t s(t-s)^{-\kappa} K(t,s)ds, \quad u(s) = s, \quad t \in [0, b],$$

kompaktsed ja järelikult ka pidevad ruumist $C[0, b]$ ruumi $C[0, b]$. Kuna funktsioon g on iga $t \in [0, b]$ kujul

$$g(t) = f(t) - h(t)[k_{01} + k_{11}t] - k_{01}(Sv)(t) - k_{11}(Su)(t), \quad u(s) = s, \quad v(s) = 1,$$

siis g kuulub ruumi $C[0, b]$.

Järgmisena näitame, et operaator T on kompaktn operaator ruumist $C[0, b]$ ruumi $C[0, b]$. Defineerime operaatorid H_1 , H_2 , M ja T_1 järgmiselt:

$$(H_1 z)(t) = (J^\alpha z)(b_1)k_{00} + (J^\alpha z)(b_1)k_{10}t,$$

$$(H_2 z)(t) = h(t)z(t),$$

$$(Mz)(t) = \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s)z(s)ds,$$

$$(T_1 z)(t) = \int_0^t z(s)(t-s)^{\alpha-\kappa} \int_0^1 K(t, (t-s)\sigma + s)\sigma^{\alpha-1}(1-\sigma)^{-\kappa} d\sigma ds,$$

kus $t \in [0, b]$ ja $z \in C[0, b]$. Paneme tähele, et operaatori T saame ümber kirjutada järgmisel kujul:

$$T = -H_2(H_1 + J^\alpha) - MH_1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}T_1. \quad (3.2)$$

Operaator M on võrdne operaatoriga S , mis on defineeritud võrduses (3.1), kus $\eta = \kappa$. Järelikult on M kompaktne operaator ruumist $C[0, b]$ ruumi $C[0, b]$. Lemmast 3.4 ja teoreemist 1.4 järeldub, et J^α , T_1 ning H_1 on kompaktsed operaatorid ruumist $C[0, b]$ ruumi $C[0, b]$. Vahetult definitsioonist järeldub, et operaator H_2 on tõkestatud ja lineaarne operaator ruumist $C[0, b]$ ruumi $C[0, b]$. Seega teoreemi 1.4 järgi on operaator T kompaktne operaator ruumist $C[0, b]$ ruumi $C[0, b]$.

Kui $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ja $f(t) = 0$, $t \in [0, b]$, siis kordajad k_{11} , k_{01} on võrdsed nulliga:

$$k_{11} = \frac{\gamma_1(-a_{22}) + \gamma_2(a_{11} + a_{12})}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}} = 0,$$

$$k_{01} = \frac{\gamma_1(b_1 a_{22} + a_{21}) - \gamma_2 a_{12} b_1}{b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21}} = 0,$$

ning

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - h(t)[k_{01} + k_{11}t] - k_{01} \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t, s) ds - k_{11} \int_0^t s(t-s)^{-\kappa} K(t, s) ds \\ &= 0 - h(t)[0 + 0 \cdot t] - 0 \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t, s) ds - 0 \int_0^t s(t-s)^{-\kappa} K(t, s) ds \\ &= 0, \quad t \in [0, b]. \end{aligned}$$

Järelikult kui ülesandele (2.1)–(2.2) vastaval homogeesel ülesandel on ainult triviaalne lahend $y = 0$, siis ka võrrandil $z = Tz$ on ruumis $C[0, b]$ ainult triviaalne lahend $z = 0$.

Kuna $g \in C[0, b]$ ning operaator T on kompaktne, siis Fredholmi alternatiivi järgi leidub võrrandil $z = Tz + g$ ühene lahend $z \in C[0, b]$. Seose (2.8) abil saame järelikult öelda, et ülesandel (2.1)–(2.2) on ühene lahend $y \in C^1[0, b]$ nii, et $D_{\text{Cap}}^\alpha y = z \in C[0, b]$. \square

Teoreem 3.7. Kehtigu teoreemi 3.6 eeldused ja olgu $K \in C^q(\Delta)$, $h, f \in C^{q, \mu}(0, b]$, kus $q \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu < 1$. Siis ülesandel (2.1)–(2.2) on ühene lahend $y \in C^1[0, b]$ nii, et y ja selle Caputo tuletis $D_{\text{Cap}}^\alpha y$ kuuluvad ruumi $C^{q, \nu}(0, b]$, kus

$$\nu := \max\{\mu, \kappa\}. \quad (3.3)$$

Tõestus. Näitame kõigepealt, et võrrandi $z - Tz = g$ parem pool kuulub ruumi $C^{q,\nu}(0, b]$. Me saame funktsiooni g esitada kujul

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t), \quad t \in [0, b],$$

kus

$$g_1(t) = f(t) - h(t)[k_{01} + k_{11}t], \quad t \in [0, b]$$

ning

$$g_2(t) = - \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s)(k_{01} + k_{11}s)ds, \quad t \in [0, b].$$

Teoreemi eelduste põhjal $f, h \in C^{q,\mu}(0, b] \subset C^{q,\nu}(0, b]$ (seose (3.3) kohaselt $\mu \leq \nu$). Funktsioon

$$u(t) = k_{01} + k_{11}t \quad (t \in [0, b]) \tag{3.4}$$

kuulub ruumi $C^q[0, b] \subset C^{q,\nu}(0, b]$, $q \in \mathbb{N}$. Järelikult lemma 3.3 kohaselt $g_1 \in C^{q,\nu}(0, b]$.

Paneme tähele, et funktsioon g_2 on esitatav kujul

$$g_2(t) = -(Su)(t), \quad t \in [0, b],$$

kus operaator S on defineeritud võrdusega (3.1) ($\eta = \kappa$), ning u on defineeritud seosega (3.4). Lemma 3.5 järgi on $g_2 \in C^{q,\kappa}(0, b]$. Järelikult $g_2 \in C^{q,\kappa}(0, b] \subset C^{q,\nu}(0, b]$ (seose (3.3) kohaselt $\kappa \leq \nu$). Seega funktsioon g kuulub ruumi $C^{q,\nu}(0, b]$.

Järgmisena näitame, et operaator T , mis on seose (3.2) kohaselt esitatav kujul

$$T = -H_2(H_1 + J^\alpha) - MH_1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}T_1,$$

on kompaktn operaator ruumist $C^{q,\nu}(0, b]$ ruumi $C^{q,\nu}(0, b]$. Operaatorid T_1 , H_1 , H_2 , M on siin defineeritud samamoodi, kui teoreemi 3.6 tõestuses.

Kuna $1 - \alpha < \kappa \leq \nu$, siis Riemanni-Liouville'i integraaloperaator J^α on lemma 3.5 järgi kompaktn operaator ruumist $C^{q,\nu}(0, b]$ ruumi $C^{q,\nu}(0, b]$: võttes $K(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ ja $\eta = 1 - \alpha$ on operaator S , mis on defineeritud võrdusega (3.1), võrdne Riemanni-Liouville'i integraaloperaatoriga J^α .

Operaator H_1 on teoreemi 1.4 järgi kompaktn operaator ruumist $C^{q,\nu}(0, b]$ ruumi $C^{q,\nu}(0, b]$.

Teoreemi 1.4 ning lemmade 3.3 ja 3.4 põhjal näeme, et operaatorid H_1 , H_2 ,

M on tõkestatud operaatorid ruumist $C^{q,\nu}(0, b]$ ruumi $C^{q,\nu}(0, b]$. Seega operaatorid $H_2(H_1 + J^\alpha)$ ja MH_1 on kompaktsed operaatorid ruumist $C^{q,\nu}(0, b]$ ruumi $C^{q,\nu}(0, b]$.

Kuna $\kappa < 1$, siis $\kappa - \alpha < 1 - \alpha < \kappa \leq \nu$ ning lemmade 3.3 ja 3.4 järgi on operaator T_1 kompaktne operaator ruumist $C^{q,\nu}(0, b]$ ruumi $C^{q,\nu}(0, b]$.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et operaator T on kompaktne operaator ruumist $C^{q,\nu}(0, b]$ ruumi $C^{q,\nu}(0, b]$.

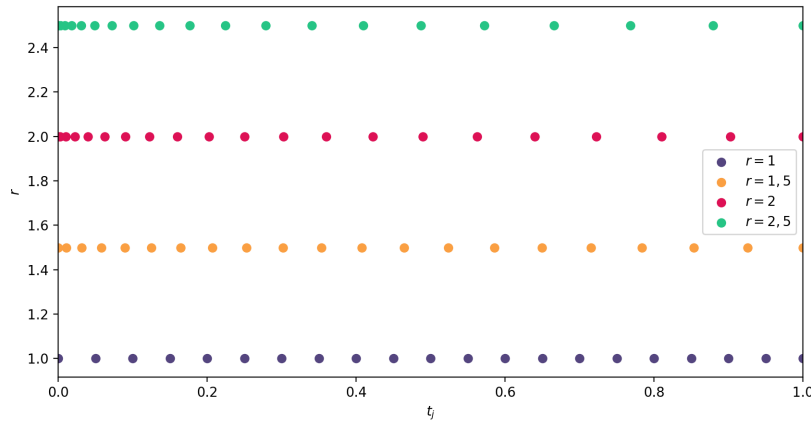
Teoreemi 3.6 tõestuses näitasime, et kui ülesandele (2.1)–(2.2) vastaval homogeesel ülesandel on ainult triviaalne lahend ruumis $C[0, b]$, siis ka võrrandil $z = Tz$ on ainult triviaalne lahend ruumis $C[0, b]$. Kuna $C^{q,\nu}(0, b] \subset C[0, b]$, siis on homogeesel võrrandil $z = Tz$ ruumis $C^{q,\nu}(0, b]$ ka ainult triviaalne lahend. Seega Fredholmi alternatiivi järgi on võrrandil $z = Tz + g$ ainult üks lahend $z \in C^{q,\nu}(0, b]$ ja ülesandel (2.1)–(2.2) on ainult üks lahend $y \in C^{q,\nu}(0, b] \subset C[0, b]$ (vaata (2.8)) nii, et $D_{\text{Cap}}^\alpha y = z \in C^{q,\nu}(0, b]$. \square

4. Meetodi kirjeldus

Selles peatükis anname arvutuseeskirja võrrandi $z = Tz + g$ ligikaudseks lahendamiseks, kus operaator T ja funktsioon g on määratud vastavalt võrdustega (2.13) ja (2.14). Samuti kirjeldame, kuidas saadud eeskirja abil on võimalik leida esialgsele ülesandele (2.1)–(2.2) ligikaudne lahend. Olgu siin ja edaspidi $N \in \mathbb{N}$, $b > 0$. Olgu $\Pi_N := \{t_0, \dots, t_N\}$ võrk lõigus $[0, b]$, kus sõlmed t_j on defineeritud järgmiselt:

$$t_j := b \left(\frac{j}{N} \right)^r, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad r \in [1, \infty). \quad (4.1)$$

Paneme tähele, et kui $r = 1$, siis on tegemist ühtlase võrguga. Kui $r > 1$, siis on punktid t_j rohkem koondunud nullile lähemale (vt joonis 4.1).



Joonis 4.1: Valemiga (4.1) defineeritud punktid t_j ($b = 1$)

Olgu $k \in \mathbb{N}_0$, defineerime hulga $S_k^{(-1)}(\Pi_N)$ järgmiselt:

$$S_k^{(-1)}(\Pi_N) := \{u : u|_{[t_{j-1}, t_j]} \in \pi_k, \quad j = 1, \dots, N\},$$

kus $u|_{[t_{j-1}, t_j]}$ on funktsiooni u ahend osalõigule $[t_{j-1}, t_j] \subset [0, b]$ ja π_k on ülimalt k -järku polünoomide ruum. Märgime, et funktsioon $u \in S_k^{(-1)}(\Pi_N)$ ei pruugi olla punktides t_1, \dots, t_{N-1} pidev.

Defineerime igal osalõigul $[t_{j-1}, t_j]$ $m \in \mathbb{N}$ kollokatsioonipunkti

$$t_{jk} := t_{j-1} + \eta_k(t_j - t_{j-1}), \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

kus arvud η_1, \dots, η_m on fikseeritud parameetrid, mis ei sõltu suurustest j ja N ning rahuldavad järgmisi võrratusi:

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_m < 1.$$

Defineerime iga $N, m \in \mathbb{N}$ korral interpoleeriva operaatori $\mathcal{P}_N = \mathcal{P}_{N,m} : C[0, b] \rightarrow S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N)$ nii, et

$$\mathcal{P}_N u \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N), \quad (\mathcal{P}_N u)(t_{jk}) = u(t_{jk}), \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.3)$$

kus $u \in C[0, b]$.

Järgnevalt konstrueerime ühe numbrilise meetodi ülesande (2.1)–(2.2) ligikaudseks lahendamiseks. Me otsime ülesande (2.1)–(2.2) lähislahendit y_N kujul

$$y_N(\tau) = (J^\alpha z_N)(b_1)k_{00} + k_{01} + [(J^\alpha z_N)(b_1)k_{10} + k_{11}]\tau + (J^\alpha z_N)(\tau), \quad \tau \in [0, b], \quad (4.4)$$

kus $z_N \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N)$, $m \in \mathbb{N}$, on määratud kollokatsioonitingimustega.

$$z_N(t_{jk}) = (Tz_N)(t_{jk}) + g(t_{jk}), \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.5)$$

Kollokatsioonitingimused (4.5) saame esitada operaatori \mathcal{P}_N (vt (4.3)) abil järgmiselt:

$$z_N = \mathcal{P}_N T z_N + \mathcal{P}_N g. \quad (4.6)$$

Kollokatsioonitingimused (4.5) moodustavad võrrandisüsteemi, mille täpse kuju määrab baasi valik ruumis $S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N)$. Me võime kasutada $z_N \in S_{m-1}(\Pi_N)$ jaoks esitlust Lagrange'i fundamentaalpolünoomide kaudu:

$$z_N(\tau) = \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^m c_{\lambda\mu} I_{\lambda\mu}(\tau), \quad \tau \in [0, b], \quad (4.7)$$

kus $I_{\lambda\mu}(\tau) = 0$, kui $\tau \notin [t_{\lambda-1}, t_\lambda]$ ja

$$I_{\lambda\mu}(\tau) = \prod_{i=1, i \neq \mu}^m \frac{\tau - t_{\lambda i}}{t_{\lambda\mu} - t_{\lambda i}},$$

kui $\tau \in [t_{\lambda-1}, t_\lambda]$.

Paneme tähele, et iga $j \in \{1, \dots, N\}$ ja $k \in \{1, \dots, m\}$ korral kehtib $z_N(t_{jk}) = c_{jk}$, kus $z_N \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N)$. Tõepoolest, kuna $t_{jk} \in [t_{j-1}, t_j]$, siis $I_{\lambda\mu}(t_{jk}) = 0$, kui $\lambda \neq j$. Kui $\lambda = j$, siis

$$I_{\lambda\mu}(t_{jk}) = \begin{cases} 1, & \mu = k, \\ 0, & \mu \neq k. \end{cases}$$

Seega (kollokatsioonitingumuste (4.5) järgi) tuleb meil konstantide c_{jk} , $j \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, leidmiseks lahendada lineaarvõrrandisüsteem:

$$c_{jk} = \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^m (TI_{\lambda\mu})(t_{jk})c_{\lambda\mu} + g(t_{jk}). \quad (4.8)$$

Olles leidnud kordajad c_{jk} , saame valemi (4.7) abil leida funktsiooni $z_N(\tau)$, $\tau \in [0, b]$. Kasutades võrdust (4.4) saame arvutada ülesande (2.1)–(2.2) lahendi y lähendi y_N järgnevalt

$$\begin{aligned} y_N(\tau) &= (J^\alpha z_N)(b_1)k_{00} + k_{01} + [(J^\alpha z_N)(b_1)k_{10} + k_{11}]\tau + (J^\alpha z_N)(\tau) \\ &= \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^m c_{\lambda\mu} (J^\alpha I_{\lambda\mu})(b_1)k_{00} + k_{01} + \left[\sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^m c_{\lambda\mu} (J^\alpha I_{\lambda\mu})(b_1)k_{10} + k_{11} \right] \tau \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu=1}^m c_{\lambda\mu} (J^\alpha I_{\lambda\mu})(\tau), \quad \tau \in [0, b]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

5. Veahinnangud

Selles peatükis vaatleme vea $\|y - y_N\|_\infty$ käitumist, kui $N \rightarrow \infty$. Siin y on ülesande (2.1)–(2.2) lahend ja y_N tema lähislahend, mis on leitud võrduse (4.9) abil.

Järgnevalt olgu operaator $\mathcal{P}_N : C[0, b] \rightarrow S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N)$, $N \in \mathbb{N}$, defineeritud võrdusega (4.3), operaator T seosega (2.13) ja g seosega (2.14). Kõigepealt esitleme kaks meile vajalikku abitulemust, nende tõestused võib leida töödest [3, 5].

Lause 5.1. Operaator $\mathcal{P}_N \in \mathcal{L}(C[0, b], L^\infty(0, b))$ ja $\|\mathcal{P}_N\|_{\mathcal{L}(C[0, b], L^\infty(0, b))} \leq c$, kus c on positiivne reaalarv, mis ei sõltu arvust N . Iga $z \in C[0, b]$ korral kehtib koondumine:

$$\|z - \mathcal{P}_N z\|_{L^\infty(0, b)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Lause 5.2. Olgu operaator $A : L^\infty(0, b) \rightarrow C[0, b]$ lineaarne ja kompaktn. Siis kehtib koondumine

$$\|A - \mathcal{P}_N A\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Järgmine teoreem annab meile ülevaate meetodi (4.4) ja (4.5) koondumise kohta.

Teoreem 5.3. Olgu $\alpha \in (1, 2)$, $\kappa \in [0, 1)$, $h, f \in C[0, b]$ ning $K \in C(\Delta)$. Samuti eeldame, et $b_1 a_{11} a_{22} + a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21} \neq 0$ ja et ülesandele (2.1)–(2.2) vastaval homogeensel ülesandel

$$(D_{\text{Cap}}^\alpha y)(t) + h(t)y(t) + \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t, s)y(s)ds = 0, \quad 0 \leq t \leq b, \quad 0 < b,$$

$$a_{11}y(0) + a_{12}y(b_1) = 0,$$

$$a_{21}y'(0) + a_{22}y(b_1) = 0,$$

on ruumis $C[0, b]$ ainult triviaalne lahend $y = 0$.

Olgu $m, N \in \mathbb{N}$, $r \in [1, \infty)$ ning eeldame, et võrgu Π_N sõlmed on defineeritud

seosega (4.1) ja kollokatsioonipunktid seosega (4.2), kus η_1, \dots, η_m on vabalt valitud parameetrid, mis rahuldavad tingimust $0 < \eta_1 < \dots < \eta_m < 1$. Siis ülesandel (2.1)–(2.2) on ühene lahend $y \in C^1[0, b]$ nii, et $D_{\text{Cap}}^\alpha y \in C[0, b]$. Eksisteerib naturaalarv N_0 nii, et iga $N \geq N_0$ korral võrrandil (4.6) leidub parajasti üks lahend $z_N \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N)$, mis määrab seose (4.9) põhjal ühese lähendi y_N ülesande (2.1)–(2.2) lahendile y ning kehtib koondumine

$$\|y - y_N\|_\infty \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Tõestus. Kõigepealt näitame, et võrrandil $z = Tz + g$ on ühene lahend ruumis $L^\infty(0, b)$. Teoreemi 3.6 tõestusega analoogsel viisil on võimalik näidata, et operaator T on kompaktne operaator ruumist $L^\infty(0, b)$ ruumi $C[0, b]$. Järelikult on operaator T kompaktne ka ruumist $L^\infty(0, b)$ ruumi $L^\infty(0, b)$. Samuti teame teoreemi 3.6 tõestusest, et $g \in C[0, b] \subset L^\infty(0, b)$. Siis ülesandel (2.1)–(2.2) on ühene lahend $y \in C^1[0, b]$ nii, et $D_{\text{Cap}}^\alpha y \in C[0, b]$ ning et homogeensel võrrandil $z = Tz$ on ruumis $C[0, b]$ ainult triviaalne lahend $z = 0$. Kuna $T \in \mathcal{L}(L^\infty(0, b), C[0, b])$, siis ka võrrandil $z = Tz$ on ainult triviaalne lahend ruumis $L^\infty(0, b)$. Fredholmi alternatiivi järgi on seega võrrandil $z = Tz + g$, kus $g \in L^\infty(0, b)$, üks ja ainult üks lahend $z \in L^\infty(0, b)$.

Teisisõnu võime öelda, et operaator $(I - T)$ on pööratav ruumis $L^\infty(0, b)$ ja selle pöördoperaator $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))$. Operaatori $(I - T)^{-1}$ tõkestatuse ja lause 5.2 järgi leidub $N_0 \in \mathbb{N}$ nii, et iga $N \geq N_0$ korral kehtib hinnang

$$\|(I - T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))} \|T - \mathcal{P}_N T\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))} < 1.$$

Viimase võrratuse ja teoreemi 1.5 abil näeme, et $N \geq N_0$ korral on operaator $(I - \mathcal{P}_N T)$ pööratav ruumis $L^\infty(0, b)$ ja

$$\begin{aligned} & \|(I - \mathcal{P}_N T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))} \\ &= \|((I - T) + (T - \mathcal{P}_N T))^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))} \leq c, \quad N \geq N_0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

kus c on konstant, mis ei sõltu arvust N . Seega leidub iga $N \geq N_0$ korral võrrandil (4.6) ühene lahend $z_N \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N)$. Kuna $z = Tz + g$ ja $z_N = \mathcal{P}_N T z_N + \mathcal{P}_N g$, siis

$$\begin{aligned} (I - \mathcal{P}_N T)(z - z_N) &= z - z_N - \mathcal{P}_N T z + \mathcal{P}_N T z_N \\ &= z - \mathcal{P}_N T z_N - \mathcal{P}_N g - \mathcal{P}_N T z + \mathcal{P}_N T z_N \\ &= z - \mathcal{P}_N (Tz + g) = z - \mathcal{P}_N z, \end{aligned}$$

kui $N \geq N_0$. Olgu tõestuse lõpuni $N \geq N_0$. Kuna operaatoril $I - \mathcal{P}_N T$ leidub pöördoperaator, siis

$$z - z_N = (I - \mathcal{P}_N T)^{-1}(z - \mathcal{P}_N z).$$

Järelikult võrratuse (5.1) kohaselt

$$\|z - z_N\|_\infty = \|(I - \mathcal{P}_N T)^{-1}(z - \mathcal{P}_N z)\|_\infty \leq c \|z - \mathcal{P}_N z\|_\infty,$$

kus c on konstant, mis ei sõltu suurusest N .

Vaatleme järgmisena vahet $|y(t) - y_N(t)|$, kus $t \in [0, b]$, y on ülesande (2.1)–(2.2) lahend ning y_N on leitud valemiga (4.9). Seoste (2.8) ja (4.9) kohaselt

$$\begin{aligned} |y(t) - y_N(t)| &= |((J^\alpha z)(b_1)k_{00} + k_{01} + [(J^\alpha z)(b_1)k_{10} + k_{11}]t + (J^\alpha z)(t)) - \\ &\quad - ((J^\alpha z_N)(b_1)k_{00} + k_{01} + [(J^\alpha z_N)(b_1)k_{10} + k_{11}]t + (J^\alpha z_N)(t))| \\ &= |(J^\alpha(z - z_N))(b_1)k_{00} + t(J^\alpha(z - z_N))(b_1)k_{10} + (J^\alpha(z - z_N))(t)|, \end{aligned}$$

kus $t \in [0, b]$. Seega

$$\|y - y_N\|_\infty \leq c \|z - z_N\|_\infty$$

ning kehtib hinnang

$$\|y - y_N\|_\infty \leq c \|z - z_N\|_\infty \leq c_1 \|z - \mathcal{P}_N z\|_\infty, \quad (5.2)$$

kus c ja c_1 on konstandid, mis ei sõltu suurusest N . Kuna lause 5.1 järgi $\|z - \mathcal{P}_N z\|_\infty \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), siis järelikult võrratusteahela (5.2) abil saame, et

$$\|y - y_N\|_\infty \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

□

Järgmise teoreemi tõestamiseks vajame järgnevat abitulemust.

Lemma 5.4. [3, 5] Olgu $z \in C^{m,\mu}(0, b]$, $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in (-\infty, 1)$. Siis

$$\|z - \mathcal{P}_N z\|_\infty \leq c \begin{cases} N^{-m}, & m < 1 - \mu, & r \geq 1, \\ N^{-m}(1 + \log N), & m = 1 - \mu, & r = 1, \\ N^{-m}, & m = 1 - \mu, & r > 1, \\ N^{-r(1-\mu)}, & m > 1 - \mu, & 1 \leq r < \frac{m}{1-\mu}, \\ N^{-m}, & m > 1 - \mu, & r \geq \frac{m}{1-\mu}, \end{cases}$$

kus $r \in [1, \infty)$ on seosega (4.1) defineeritud võrgu Π_N sõlmede ebaühtlust (gradeeringut) näitav parameeter ja c on konstant, mis ei sõltu arvust N .

Teoreem 5.5. Kehtigu teoreemi 5.3 eeldused ning olgu $K \in C^q(\Delta)$ ja $h, f \in C^{q,\mu}(0, b]$, kus $q := m$ ja $\mu \in (-\infty, 1)$. Siis norm $\|y - y_N\|_\infty$ on ülalt hinnatav piisavalt suure $N \in \mathbb{N}$ korral järgmiselt:

$$\|y - y_N\|_\infty \leq c \begin{cases} N^{-m}(1 + \log N), & m = 1 - \nu, & r = 1, \\ N^{-m}, & m = 1 - \nu, & r > 1, \\ N^{-r(1-\nu)}, & m > 1 - \nu, & 1 \leq r < \frac{m}{1-\nu}, \\ N^{-m}, & m > 1 - \nu, & r \geq \frac{m}{1-\nu}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Siin c on positiivne konstant, mis ei sõltu arvust N , ν on defineeritud võrdusega (3.3) ja r on võrgu (4.1) gradueering.

Tõestus. Olgu $K \in C^m(\Delta)$, $h, f \in C^{m,\mu}(0, b]$, $m \in \mathbb{N}$ ja $\mu \in (-\infty, 1)$. Siis teoreemist 3.7 järeldub, et $z \in C^{m,\nu}(0, b]$, kus ν on defineeritud seosega (3.3). Teoreemi 5.3 tõestusest teame, et piisavalt suure N korral kehtib hinnang

$$\|y - y_N\|_\infty \leq c \|z - \mathcal{P}_N z\|_\infty.$$

Lemmast 5.4 järeldub, et kehtib hinnang

$$\|y - y_N\|_\infty \leq c \begin{cases} N^{-m}, & m < 1 - \nu, & r \geq 1, \\ N^{-m}(1 + \log N), & m = 1 - \nu, & r = 1, \\ N^{-m}, & m = 1 - \nu, & r > 1, \\ N^{-r(1-\nu)}, & m > 1 - \nu, & 1 \leq r < \frac{m}{1-\nu}, \\ N^{-m}, & m > 1 - \nu, & r \geq \frac{m}{1-\nu}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Kuna aga teoreemi eelduste järgi $\nu \geq 0$ ja $m \in \mathbb{N}$, siis $m \geq 1 - \nu$ ja järelikult hinnangus (5.4) esimene rida ei realiseeru ehk kehtib hinnang (5.3). \square

Paneme tähele, et teoreemides 5.3 ja 5.5 on kollokatsiooniparameetrid vabalt valitud suurused, mis rahuldavad tingimust $0 < \eta_1 < \dots < \eta_m < 1$. Selle peatüki viimane teoreem (teoreem 5.7) näitab, et kui me täpsustame kollokatsiooniparameetrite valikut ning nõuame, et funktsioonid f , h ja K on natuke siledamad kui teoreemis 5.3, siis saame täpsustada veahinnangut (5.3). Selleks on meil vaja järgmist abitulemust.

Lemma 5.6. [6] Olgu $z \in C^{m+1,\nu}(0, b]$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu \in (-\infty, 1)$. Olgu $N \in \mathbb{N}$, $r \in [1, \infty)$ ning eeldame, et võrgu sõlmed on defineeritud seosega (4.1) ja

kollokatsioonipunktid seosega (4.2). Eeldame, et kollokatsiooniparameetrid η_1, \dots, η_m on valitud selliselt, et sobivate kaaludega $\{w_k\}$ kvadratuurvalem

$$\int_0^1 F(x)dx = \sum_{k=1}^m w_k F(\eta_k) + R_m \quad (0 < \eta_1 < \dots < \eta_m < 1) \quad (5.5)$$

on täpne kõigi m -järku polünoomide F korral (see tähendab, et jääkliige R_m on võrdne nulliga, kui F on suvaline m -järku polünoom).

Siis kehtib järgmine hinnang:

$$\|J^1(z - \mathcal{P}_N z)\| \leq c \varepsilon_N^{(m, \nu, r)},$$

kus c on positiivne konstant, mis ei sõltu arvust N ning

$$\varepsilon_N^{(m, \nu, r)} = \begin{cases} N^{-m-1}, & m < 2 - \nu, & r \geq 1, \\ N^{-m-1}(1 + \log N)^2, & m = 2 - \nu, & r = 1, \\ N^{-m-1}(1 + \log N), & m = 2 - \nu, & r > 1, \\ N^{-r(2-\nu)}, & m > 2 - \nu, & 1 \leq r < \frac{m+1}{2-\nu}, \\ N^{-m-1}, & m > 2 - \nu, & r \geq \frac{m+1}{2-\nu}. \end{cases}$$

Teoreem 5.7. Olgu m naturaalarv ning kehtigu teoreemide 5.3 ja 5.5 eeldused, kus $q := m + 1$. Lisaks olgu meil defineeritud kollokatsioonipunktid eeskirjaga (4.2), kus kollokatsiooniparameetrid η_1, \dots, η_m on valitud nii, et sobivate kaaludega $\{w_k\}$ kvadratuurvalem

$$\int_0^1 F(x)dx = \sum_{k=1}^m w_k F(\eta_k) + R_m \quad (0 < \eta_1 < \dots < \eta_m < 1)$$

on täpne kõigi m -järku polünoomide F korral.

Siis ülesandel (2.1)–(2.2) on ühene lahend $y \in C^1[0, b]$ nii, et $y, D_{\text{Cap}}^\alpha y \in C^{m+1, \nu}(0, b]$. Piisavalt suure $N \in \mathbb{N}$ korral leidub võrrandil (4.6) ühene lahend $z_N \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N)$, mis määrab seose (4.9) põhjal ühese lähendi y_N ülesande (2.1)–(2.2) lahendile y , ja kehtib järgmine veahinnang:

$$\|y - y_N\|_\infty \leq c \begin{cases} N^{-m-1}, & m < 2 - \nu, & r \geq 1, \\ N^{-m-1}(1 + \log N)^2, & m = 2 - \nu, & r = 1, \\ N^{-m-1}(1 + \log N), & m = 2 - \nu, & r > 1, \\ N^{-r(2-\nu)}, & m > 2 - \nu, & 1 \leq r < \frac{m+1}{2-\nu}, \\ N^{-m-1}, & m > 2 - \nu, & r \geq \frac{m+1}{2-\nu}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Siin ν on arvutatud võrduse (3.3) järgi, r on võrgu (4.1) gradueering ning c on positiivne konstant, mis ei sõltu arvust N .

Tõestus. Teoreemist 5.3 teame, et ülesandel (2.1)–(2.2) on ühene lahend $y \in C^1[0, b]$ nii, et $z = D_{\text{Cap}}^\alpha y \in C[0, b]$. Samuti järeldub teoreemist 5.3, et leidub $N_0 \in \mathbb{N}$ nii, et iga $N \geq N_0$ korral võrrandil (4.6) on ühene lahend z_N . Teoreemi 3.7 järgi teame ka, et $y, z \in C^{m+1, \nu}(0, b]$. Näitame, et kehtib veahinnang (5.6). Tähistame

$$\hat{z}_N := Tz_N + g, \quad N \geq N_0. \quad (5.7)$$

Võrdustest (4.6) ja (5.7) järeldub, et

$$z_N = \mathcal{P}_N(Tz_N + g) = \mathcal{P}_N \hat{z}_N.$$

Asendame $z_N = \mathcal{P}_N \hat{z}_N$ seosesse (5.7). Siis näeme, et

$$\hat{z}_N = T\mathcal{P}_N \hat{z}_N + g, \quad N \geq N_0. \quad (5.8)$$

Kasutades võrdust $z = Tz + g$ ja seosest (5.8) saame, et iga $N \geq N_0$ korral

$$\begin{aligned} (I - T\mathcal{P}_N)(\hat{z}_N - z) &= \hat{z}_N - z - T\mathcal{P}_N \hat{z}_N + T\mathcal{P}_N z \\ &= \hat{z}_N - Tz - g - T\mathcal{P}_N \hat{z}_N + T\mathcal{P}_N z \\ &= \hat{z}_N - Tz - g - \hat{z}_N + g + T\mathcal{P}_N z \\ &= \hat{z}_N - \hat{z}_N - Tz + T\mathcal{P}_N z \\ &= T(\mathcal{P}_N z - z). \end{aligned}$$

Paneme tähele, et iga $N \geq N_0$ korral

$$\begin{aligned} &(I - T\mathcal{P}_N)(I + T(I - \mathcal{P}_N T)^{-1} \mathcal{P}_N) \\ &= I - T\mathcal{P}_N + T(I - \mathcal{P}_N T)^{-1} \mathcal{P}_N - T\mathcal{P}_N T(I - \mathcal{P}_N T)^{-1} \mathcal{P}_N \\ &= I - T\mathcal{P}_N + T[(I - \mathcal{P}_N T)^{-1} - \mathcal{P}_N T(I - \mathcal{P}_N T)^{-1}] \mathcal{P}_N \\ &= I - T\mathcal{P}_N + T[(I - \mathcal{P}_N T)(I - \mathcal{P}_N T)^{-1}] \mathcal{P}_N \\ &= I - T\mathcal{P}_N + T\mathcal{P}_N \\ &= I. \end{aligned}$$

Seega operaatori $I - T\mathcal{P}_N$ pöördoperaator avaldub järgmiselt:

$$(I - T\mathcal{P}_N)^{-1} = I + T(I - \mathcal{P}_N T)^{-1} \mathcal{P}_N, \quad N \geq N_0. \quad (5.9)$$

Pöördoperaatori (5.9) ning hinnangu (5.1) abil saame ülalt hinnata normi $\|\hat{z}_N - z\|_\infty$ järgnevalt:

$$\|\hat{z}_N - z\|_\infty = \|(I - T\mathcal{P}_N)^{-1} T(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty \leq c \|T(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty, \quad N \geq N_0, \quad (5.10)$$

kus c ei sõltu arvust N .

Järgmisena näitame, et $\|T(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty \leq c \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty$, $N \geq N_0$.
Operaatori T definitsiooni kohaselt

$$\begin{aligned} & (T(\mathcal{P}_N z - z))(t) = \\ & = -h(t)[(J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z))(b_1)k_{00} + (J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z))(b_1)k_{10}t + (J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z))(t)] - \\ & \quad - (J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z))(b_1)k_{00} \int_0^t (t-s)^{-\kappa} K(t,s) ds - \\ & \quad - (J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z))(b_1)k_{10} \int_0^t s(t-s)^{-\kappa} K(t,s) ds - \\ & \quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\mathcal{P}_N z - z)(s)(t-s)^{\alpha-\kappa} \int_0^1 K(t, (t-s)\sigma + s) \sigma^{\alpha-1} (1-\sigma)^{-\kappa} d\sigma ds, \end{aligned}$$

kus $0 \leq t \leq b$. Kõigepealt paneme tähele, et

$$|(J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z))(t)| \leq \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty, \quad t \in [0, b]. \quad (5.11)$$

Lausest 1.12 ning operaatori J^β ($\beta > 0$) pidevusest jäeldub, et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t (\mathcal{P}_N z - z)(s)(t-s)^{\alpha-\kappa} \int_0^1 K(t, (t-s)\sigma + s) \sigma^{\alpha-1} (1-\sigma)^{-\kappa} d\sigma ds \right| \\ & \leq c_1 \|J^{\alpha+1-\kappa}(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty \\ & = c_1 \|J^{1-\kappa} J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty \\ & \leq c_2 \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty, \end{aligned}$$

kus c_1, c_2 on konstandid, mis ei sõltu arvust N . Seega

$$\begin{aligned} & |T(\mathcal{P}_N z - z)(t)| \\ & \leq |h(t)| [\|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty k_{00} + \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty k_{10}t + \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty] + \\ & \quad + \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty k_{00} \int_0^t |(t-s)^{-\kappa} K(t,s)| ds + \\ & \quad + \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty k_{10} \int_0^t |s(t-s)^{-\kappa} K(t,s)| ds + \\ & \quad + c_2 \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty, \quad t \in [0, b]. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\|T(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty \leq c \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty, \quad N \geq N_0,$$

kus c on konstant, mis ei sõltu arvust N . Viimase võrratuse ning võrratuse (5.10) abil saame, et

$$\|\hat{z}_N - z\|_\infty \leq c_1 \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty, \quad N \geq N_0, \quad (5.12)$$

kus c_1 ei sõltu arvust N . Kuna $z_N = \mathcal{P}_N \hat{z}_N$, siis

$$z_N - z = \mathcal{P}_N \hat{z}_N - z = \mathcal{P}_N(\hat{z}_N - z) + \mathcal{P}_N z - z. \quad (5.13)$$

Seoste (2.8), (4.9) ja (5.13) abil saame, et iga $N \geq N_0$ korral

$$\begin{aligned} |y_N(t) - y(t)| &= |(J^\alpha(z_N - z))(b_1)k_{00} + t(J^\alpha(z_N - z))(b_1)k_{10} + (J^\alpha(z_N - z))(t)| \\ &\leq |(J^\alpha \mathcal{P}_N(\hat{z}_N - z))(b_1)k_{00} + t(J^\alpha \mathcal{P}_N(\hat{z}_N - z))(b_1)k_{10} + (J^\alpha \mathcal{P}_N(\hat{z}_N - z))(t)| \\ &\quad + |(J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z))(b_1)k_{00} + t(J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z))(b_1)k_{10} + (J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z))(t)|, \end{aligned}$$

kus $t \in [0, b]$. Viimase võrratuse ning seoste (5.11) ja (5.12) kohaselt iga $N \geq N_0$ korral

$$\|y_N - y\|_\infty \leq c_1 \|\hat{z}_N - z\|_\infty + c_2 \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty \leq c_3 \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty,$$

kus c_1, c_2 ja c_3 on konstandid, mis ei sõltu arvust N .

Kuna $\alpha \in (1, 2)$, siis lause 1.12 ning $J^{\alpha-1}$ pidevuse järgi leiame, et

$$\begin{aligned} \|y_N - y\|_\infty &\leq c_1 \|J^\alpha(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty \\ &= c_1 \|J^{\alpha-1} J^1(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty \\ &\leq c_2 \|J^1(\mathcal{P}_N z - z)\|_\infty, \quad N \geq N_0. \end{aligned}$$

Kasutades lemmat 5.6 näeme, et kehtib hinnang (5.6). □

6. Numbrilised näited

Selles peatükis vaatleme erinevaid murrulise tuletisega integro-diferentsiaalvõrrandit sisaldavaid näiteülesandeid, mis on kujul (2.1)–(2.2). Kõigi järgnevate numbriliste tulemuste saamiseks on kasutatud autori poolt Pythoni keskkonnas kirjutatud programme, mis on esitatud töö lisas.

Järgnevalt esitatud näiteülesannete puhul olgu y vastava ülesande täpne lahend ja y_N ($N \in \mathbb{N}$) peatükis 4 kirjeldatud meetodi abil leitud lähislahend. Selleks, et rakendada peatükis 4 kirjeldatud meetodit, kasutame lõigul $[0, b]$ seose (4.1) abil leitud võrku $\Pi_N = \{t_0, \dots, t_N\}$. Kollokatsioonipunktid olgu defineeritud seose (4.2) järgi, kus kollokatsiooniparameetritena kasutame mõlemas näites suurusi

$$\eta_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \quad \eta_2 = 1 - \eta_1 \quad (\text{kui } m = 2) \quad (6.1)$$

ning

$$\eta_1 = \frac{5 - \sqrt{15}}{10}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}, \quad \eta_3 = 1 - \eta_1 \quad (\text{kui } m = 3). \quad (6.2)$$

Kui me valime kollokatsiooniparameetrid seoste (6.1) ja (6.2) kohaselt, siis on meil täidetud teoreemi 5.7 eeldused kollokatsiooniparameetrite valiku kohta, sest suurused (6.1) ning (6.2) on lõigus $[0, 1]$ Gaussi kvadratuurivalemi sõlmed [7].

Teise näite puhul toome ära ka numbrilised tulemused, kus on kasutatud suurustest (6.1) ja (6.2) erinevaid kollokatsiooniparameetrid (täpsed suurused on defineeritud näites 2).

Iga näiteülesande puhul arvutame vead

$$\varepsilon_N = \max_{j=1, \dots, N} \max_{k=0, \dots, 10} |y(\tau_{jk}) - y_N(\tau_{jk})|,$$

kus

$$\tau_{jk} := t_{j-1} + k(t_j - t_{j-1})/10, \quad k = 0, \dots, 10, \quad j = 1, \dots, N,$$

ning suurused t_j , $j = 0, \dots, N$, on defineeritud võrdusega (4.1).

Lisaks leiame suhted

$$\Theta_N = \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_N}.$$

Eksperimentaalsed tulemused on esitatud tabelites 6.1-6.5, kusjuures tabelite veahinnangutes tähistus 8.35E-04 tähistab suurust 8.35×10^{-4} .

Näiteülesanne 1

Vaatame võrrandit

$$(D_{\text{Cap}}^{\frac{21}{20}}y)(t) + ty(t) + \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} tsy(s) ds = \frac{\Gamma\left(\frac{21}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{21}{20}\right)} t^{\frac{1}{20}} + t^{\frac{21}{10}} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{31}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{67}{20}\right)} t^{\frac{67}{20}}, \quad t \in [0, 1],$$

(6.3)

koos lisatingimustega

$$\begin{aligned} y(0) + y\left(\frac{1}{10}\right) &= \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{11}{10}}, \\ y'(0) + y\left(\frac{1}{10}\right) &= \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{11}{10}}. \end{aligned}$$

(6.4)

Näeme, et tegemist on ülesandega kujul (2.1)–(2.2), kus

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{21}{20}, \quad \kappa = \frac{3}{4}, \quad b_1 = \frac{1}{10}, \quad b = 1, \\ a_{11} &= a_{12} = a_{21} = a_{22} = 1, \\ h(t) &= t, \quad t \in [0, 1], \\ K(t, s) &= ts, \quad t \in [0, 1], \quad s \in [0, t], \\ f(t) &= \frac{\Gamma\left(\frac{21}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{21}{20}\right)} t^{\frac{1}{20}} + t^{\frac{21}{10}} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{31}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{67}{20}\right)} t^{\frac{67}{20}}, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ülesande (6.3)–(6.4) täpne lahend on kujul

$$y(t) = t^{\frac{11}{10}}, \quad t \in [0, 1].$$

Paneme tähele, et selle ülesande puhul funktsioonid f ja h kuuluvad ruumi $C^{q,\mu}(0, 1]$, kus $q \in \mathbb{N}$ ja $\mu = \frac{19}{20}$. Seetõttu võrduse (3.3) järgi:

$$\nu = \max \left\{ \frac{19}{20}, \frac{3}{4} \right\} = \frac{19}{20}.$$

Tabelites 6.1–6.2 on välja toodud numbriliste eksperimentide tulemused parameetrite m , r ja N erinevate väärtuste korral.

N	$r = 1$		$r = 2$		$r = 3$		$r = 4$	
	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N
4	8.35E-04		1.79E-04		2.66E-04		2.94E-04	
8	5.18E-04	1.61	4.90E-05	3.65	3.28E-05	8.10	4.07E-05	7.22
16	2.15E-04	2.41	1.03E-05	4.74	2.63E-06	12.47	5.57E-06	7.31
32	9.78E-05	2.20	2.13E-06	4.84	5.07E-07	5.19	6.63E-07	8.40
64	4.50E-05	2.17	4.43E-07	4.82	5.83E-08	8.70	8.04E-08	8.25
128	2.06E-05	2.18	9.35E-08	4.73	4.67E-09	12.49	9.82E-09	8.18
256	9.41E-06	2.19	2.16E-08	4.32	8.57E-10	5.44	1.21E-09	8.12
		2.07		4.29		8.00		8.00

Tabel 6.1: Numbrilised tulemused ülesande (6.3)–(6.4) jaoks kui $m = 2$

N	$r = 1$		$r = 2$		$r = 3$		$r = 4$	
	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N
4	4.85E-04		8.77E-05		4.30E-05		4.73E-05	
8	2.01E-04	2.42	2.03E-05	4.31	4.61E-06	9.34	4.18E-06	11.33
16	9.55E-05	2.10	4.07E-06	5.00	4.33E-07	10.64	1.77E-07	23.65
32	4.37E-05	2.19	8.42E-07	4.83	3.66E-08	11.83	1.07E-08	16.49
64	2.00E-05	2.19	1.73E-07	4.87	3.64E-09	10.05	6.64E-10	16.12
128	9.11E-06	2.19	3.77E-08	4.58	3.58E-10	10.17	4.13E-11	16.10
256	4.15E-06	2.19	8.80E-09	4.29	3.81E-11	9.39	2.61E-12	15.84
		2.07		4.29		8.88		16.00

Tabel 6.2: Numbrilised tulemused ülesande (6.3)–(6.4) jaoks kui $m = 3$

Kui $m = 2$ ja $\nu = \frac{19}{20}$, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, siis teoreemi 5.7 hinnangu (5.6) kohaselt piisavalt suure $N \in \mathbb{N}$ korral

$$\varepsilon_N \leq c \begin{cases} N^{-r(\frac{21}{20})}, & r = 1, 2, \\ N^{-3}, & r = 3, 4, \end{cases}$$

kus c on konstant, mis ei sõltu arvust N .

Järelikult $m = 2$ ja $r \in \{1, 2, 3, 4\}$ korral suhted Θ_N peaksid ligikaudu olema vastavalt $2^{\frac{21}{20}} \approx 2.07$, $2^{\frac{42}{20}} \approx 4.29$, $2^3 = 8$ ja $2^3 = 8$. Need väärtused on lisatud tabeli 6.1 viimasesse ritta.

Kui $m = 3$ ja $\nu = \frac{19}{20}$, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, siis teoreemi 5.7 hinnangu (5.6) kohaselt piisavalt suure $N \in \mathbb{N}$ korral

$$\varepsilon_N \leq c \begin{cases} N^{-r(\frac{21}{20})}, & r = 1, 2, 3, \\ N^{-4}, & r = 4, \end{cases}$$

kus c on konstant, mis ei sõltu arvust N . Kui $m = 3$ ja $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, siis suhted Θ_N peaksid olema vastavalt $2^{\frac{21}{20}} \approx 2.07$, $2^{\frac{42}{20}} \approx 4.29$, $2^{\frac{63}{20}} \approx 8.88$ ja $2^4 = 16$. Need väärtused on lisatud tabeli 6.2 viimasesse ritta.

Me näeme, et saadud numbrilised tulemused on kooskõlas teoreetiliste hinnangutega.

Näiteülesanne 2

Vaatame ülesannet:

$$D_{\text{Cap}}^{\frac{3}{2}}y(t) + y(t) + \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}y(s)ds = \frac{\Gamma(\frac{29}{10})}{\Gamma(\frac{7}{5})}t^{\frac{2}{5}} + t^{\frac{19}{10}} + \frac{\Gamma(\frac{29}{10})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{17}{5})}t^{\frac{12}{5}}, \quad t \in [0, 1], \quad (6.5)$$

koos lisatingimustega:

$$\begin{aligned} y(0) + y(1) &= 1, \\ y'(0) + y(1) &= 1. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Näeme, et tegemist on ülesandega kujul (2.1)–(2.2), kus

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{2}, \quad \kappa = \frac{1}{2}, \quad b_1 = b = 1, \\ h(t) &= 1, \quad t \in [0, 1], \\ K(t, s) &= 1, \quad t \in [0, 1], \quad s \in [0, t], \\ f(t) &= \frac{\Gamma(\frac{29}{10})}{\Gamma(\frac{7}{5})}t^{\frac{2}{5}} + t^{\frac{19}{10}} + \frac{\Gamma(\frac{29}{10})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{17}{5})}t^{\frac{12}{5}}, \quad t \in [0, 1], \\ a_{11} &= a_{12} = a_{21} = a_{22} = 1. \end{aligned}$$

Ülesande (6.5)–(6.6) täpne lahend on kujul:

$$y(t) = t^{\frac{19}{10}}, \quad t \in [0, 1].$$

Funktsioonid f ja h kuuluvad ruumi $C^{q,\mu}(0, 1]$, kus $q \in \mathbb{N}$ ja $\mu = \frac{3}{5}$. Seetõttu (võrduse (3.3) järgi):

$$\nu = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{5} \right\} = \frac{3}{5}.$$

Tabelites 6.3–6.4 on välja toodud numbriliste eksperimentide tulemused parameetrite m , r ja N erinevate väärtuste korral.

N	$r = 1$		$r = 2$		$r = 3$		$r = 4$	
	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N
4	1.01E-03		4.02E-04		8.74E-04		1.77E-03	
8	3.70E-04	2.73	4.82E-05	8.33	8.18E-05	10.69	1.91E-04	9.27
16	1.38E-04	2.68	5.99E-06	8.05	6.90E-06	11.86	1.71E-05	11.21
32	5.21E-05	2.65	7.75E-07	7.74	5.84E-07	11.82	1.47E-06	11.63
64	1.97E-05	2.64	1.04E-07	7.48	4.94E-08	11.82	1.26E-07	11.67
128	7.45E-06	2.64	1.42E-08	7.29	4.20E-09	11.76	1.08E-08	11.63
256	2.82E-06	2.64	1.98E-09	7.17	3.59E-10	11.69	9.35E-10	11.54
		2.64		6.96		8.00		8.00

Tabel 6.3: Numbrilised tulemused ülesande (6.5)–(6.6) jaoks kui $m = 2$

N	$r = 1$		$r = 2$		$r = 3$		$r = 4$	
	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N
4	3.61E-04		6.00E-05		4.93E-05		1.12E-04	
8	1.35E-04	2.67	8.04E-06	7.47	2.45E-06	20.14	5.36E-06	20.93
16	5.11E-05	2.65	1.13E-06	7.14	1.16E-07	21.04	2.83E-07	18.91
32	1.93E-05	2.64	1.60E-07	7.02	5.60E-09	20.77	1.36E-08	20.78
64	7.32E-06	2.64	2.30E-08	6.97	2.77E-10	20.22	6.26E-10	21.78
128	2.77E-06	2.64	3.29E-09	6.97	1.39E-11	19.87	2.82E-11	22.22
256	1.05E-06	2.64	4.73E-10	6.97	7.12E-13	19.53	1.26E-12	22.45
		2.64		6.96		16.00		16.00

Tabel 6.4: Numbrilised tulemused ülesande (6.5)–(6.6) jaoks kui $m = 3$

Kui $m = 2$ ja $\nu = \frac{3}{5}$, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, siis teoreemi 5.7 hinnangu (5.6) kohaselt piisavalt suure $N \in \mathbb{N}$ korral

$$\varepsilon_N \leq c \begin{cases} N^{-r(\frac{7}{5})}, & r = 1, 2, \\ N^{-3}, & r = 3, 4, \end{cases}$$

kus c on konstant, mis ei sõltu arvust N . Kui $m = 2$ ja $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, siis suhted Θ_N peaksid ligikaudu olema vastavalt $2^{\frac{7}{5}} \approx 2.64$, $2^{\frac{14}{5}} \approx 6.96$, $2^3 = 8$ ja $2^3 = 8$. Need väärtused on lisatud tabeli 6.3 viimasesse ritta.

Kui $m = 3$ ja $\nu = \frac{3}{5}$, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, siis teoreemi 5.7 hinnangu (5.6)

kohaselt piisavalt suure $N \in \mathbb{N}$ korral

$$\varepsilon_N \leq c \begin{cases} N^{-r(\frac{7}{5})}, & r = 1, 2, \\ N^{-4}, & r = 3, 4, \end{cases}$$

kus c on konstant, mis ei sõltu arvust N . Kui $m = 3$ ja $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, siis suhted Θ_N peaksid ligikaudu olema vastavalt $2^{\frac{7}{5}} \approx 2.64$, $2^{\frac{14}{5}} \approx 6.96$, $2^4 = 16$ ja $2^4 = 16$. Need väärtused on lisatud tabeli 6.4 viimasesse ritta.

Vaatame ülesannet (6.5)–(6.6), aga seekord võtame kollokatsiooniparameetrid

$$\eta_1 = \frac{1}{4}, \quad \eta_2 = 1 - \eta_1 \quad (\text{kui } m = 2).$$

Nende kollokatsiooniparameetrite korral ei ole teoreemi 5.7 eeldused täidetud ja seega me ei saa veahinnangut (5.6) kasutada. Samas on täidetud teoreemi 5.5 eeldused ning kehtib hinnang (5.3). Tabelis 6.5 on välja toodud numbriliste eksperimentide tulemused parameetrite r ja N erinevate väärtuste korral.

N	$r = 1$		$r = 4$		$r = 5$	
	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N	ε_N	Θ_N
4	4.90E-03		7.08E-03		9.49E-03	
8	1.99E-03	2.46	2.01E-03	3.53	2.83E-03	3.36
16	7.96E-04	2.50	5.11E-04	3.92	7.29E-04	3.88
32	3.14E-04	2.53	1.27E-04	4.01	1.82E-04	4.01
64	1.22E-04	2.56	3.17E-05	4.02	4.51E-05	4.03
128	4.74E-05	2.58	7.89E-06	4.02	1.12E-05	4.02
256	1.82E-05	2.60	1.97E-06	4.01	2.80E-06	4.01
		1.32		3.03		4

Tabel 6.5: Numbrilised tulemused ülesande (6.5)–(6.6) jaoks kui $m = 2$

Kui $m = 2$, $\eta_1 = \frac{1}{4}$, $\eta_2 = \frac{3}{4}$, $\nu = \frac{3}{5}$, $r \in \{1, 4, 5\}$, siis teoreemi 5.5 hinnangu (5.3) kohaselt piisavalt suure $N \in \mathbb{N}$ korral

$$\varepsilon_N \leq c \begin{cases} N^{-r(\frac{2}{5})}, & r = 1, 4, \\ N^{-2}, & r = 5, \end{cases}$$

kus c on konstant, mis ei sõltu arvust N . Kui $m = 2$ ja $r \in \{1, 4, 5\}$, siis suhted Θ_N peaksid ligikaudu olema vastavalt $2^{\frac{2}{5}} \approx 1.32$, $2^{\frac{8}{5}} \approx 3.03$ ja $2^2 = 4$. Need väärtused on lisatud tabeli 6.5 viimasesse ritta.

Me näeme, et saadud numbrilised tulemused on kooskõlas teoreetiliste hinnangutega.

Kirjandus

- [1] Arvet Pedas, Enn Tamme ja Mikk Vikerpuur. „Numerical solution of linear fractional weakly singular integro-differential equations with integral boundary conditions“. *Applied Numerical Mathematics* 149 (2020), lk. 124–140.
- [2] Eve Oja ja Peeter Oja. *Funktsionaalanaliisus*. TÜ Trükikoda, Tartu, 1991.
- [3] Hermann Brunner, Arvet Pedas ja Gennadi Vainikko. „Piecewise Polynomial Collocation Methods for Linear Volterra Integro-Differential Equations with Weakly Singular Kernels“. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 39.3 (2001), lk. 957–982.
- [4] Kai Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Lecture Notes in Mathematics 2004. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [5] Gennadi Vainikko. *Multidimensional weakly singular integral equations*. Berlin New York: Springer-Verlag, 1993.
- [6] Marek Kolk, Arvet Pedas ja Enn Tamme. „Smoothing transformation and spline collocation for linear fractional boundary value problems“. *Applied Mathematics and Computation* 283 (2016), lk. 234–250.
- [7] Enn Tamme. *Arvutusmeetodid II*. Valgus, Tallinn, 1973.

Lisa 1 (Näiteülesande 1 kood)

```
1 import numpy as np
2 import time
3 import pandas as pd
4 from datetime import datetime
5 from scipy.special import gamma as G
6 from scipy import integrate
7 import os
8
9 #####
10 #Defineerime vajalikud funktsioonid#
11 #####
12
13 (lim, epsr, epsa) = (200, 1.49e-12, 1.49e-12)
14
15
16 def konstandid(a11,a12,a21,a22, gamma1, gamma2,b1):
17     # Arvutame algtingimuste j2rgi konstandid
18
19     c00 = -a21 * a12 / (b1 * a11 * a22 + a11 * a21 + a12 *
20 a21)
21     c10 = -a22 * a11 / (b1 * a11 * a22 + a11 * a21 + a12 *
22 a21)
23     c11 = (-a22 * gamma1 + gamma2 * (a11 + a12)) / (b1 * a11
24 * a22+ a11 * a21 + a12 * a21)
25     c01 = (gamma1 * (b1 * a22 + a21) - gamma2 * a12 * b1) / (
26 b1 * a11* a22 + a11 * a21 + a12 * a21)
27     return (c00, c01, c10, c11)
28
29 def v6rk(N,b,eta,r=1):
30     # Funktsioon tagastab v6rgu T (elementidega tjk) ning
31     listi tj
32     m = len(eta)
33     tj = np.array([b * (j / N) ** r for j in range(0, N + 1)
34 ])
35     T = np.zeros((N, m))
36     for j in range(1, N + 1):
37         for k in range(1, m + 1):
```

```

32         tjk = tj[j - 1] + eta[k - 1] * (tj[j] - tj[j -
1])
33         T[j - 1, k - 1] = tjk
34     return (tj, T, m)
35
36 def I(lambd, mu, tau): # lamb 1, ..., N, mu 1,...,m
37     # Lagrange polynoom
38     korrutis = 1
39     if tau <= tj[lambd - 1] or tau > tj[lambd]:
40         korrutis = 0
41     else:
42         korrutis = 1
43         for i in range(1, m + 1):
44             if i != mu:
45                 korrutis *= (tau - T[lambd - 1][i - 1]) / (T[
lambd- 1][mu - 1] - T[lambd - 1][i - 1])
46     return korrutis
47
48 def TI(lamb,mu,t,b1,dbl=True):
49     # lamb: 1,2,... #mu 1,..
50     lamb_mu = lambda t11: I(lamb, mu, t11)
51
52     # i1(t1) -> J^alpha I(b1)
53     i1 = lambda t12: (b1 - t12) ** (alpha - 1) * lamb_mu(t12)
54     if b1 < tj[lamb - 1]:
55         l1 = [0, 0]
56     elif b1 >= tj[lamb - 1] and b1 < tj[lamb]:
57         l1 = integrate.quad(i1,tj[lamb - 1],b1,limit=lim,
epsrel=epsr,epsabs=epsa)
58     else:
59         l1 = integrate.quad(i1,tj[lamb - 1],tj[lamb],limit=
lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)
60     J_z_b = l1[0] / G(alpha)
61
62     # i2(t1) -> J^alpha I(t)
63     i2 = lambda t13: (t - t13) ** (alpha - 1) * lamb_mu(t13)
64     if t < tj[lamb - 1]:
65         l2 = [0, 0]
66     elif t >= tj[lamb - 1] and t <= tj[lamb]:
67         l2 = integrate.quad(i2,tj[lamb - 1],t,limit=lim,
epsrel=epsr,epsabs=epsa)
68     else:
69         l2 = integrate.quad(i2,tj[lamb - 1],tj[lamb],limit=
lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)
70     J_z_t = l2[0] / G(alpha)
71     liidetav1 = -h(t) * (J_z_b * c00 + J_z_b * c10 * t +
J_z_t)
72
73     # i3(t1) -> (t-s)**-Kappa K(t,s)

```



```

74     liidetav2 = -c00 * J_z_b * t * 16 * t ** (5 / 4) / 5
75
76     # i4(t1) -> s*(t-s)**-Kappa *K(t,s)
77     liidetav3 = -J_z_b * c10 * t * 128 * t ** (9 / 4) / 45
78
79     # i5 (t1) -> I(s)(t-s)**(alpha-Kappa)*K(t,(t-s)*sigma + s
80     ) * sigma ** (alpha - 1) * (1 - sigma) ** -Kappa
81     if dbl:
82         i5 = lambda sigma1, s1: (t - s1) ** -(Kappa - alpha)
83         * lamb_mu(s1) * sigma1 ** (alpha - 1) * (1 - sigma1) ** -
84         Kappa * ((t - s1) * sigma1 + s1)
85         liidetav4 = -t * integrate.dblquad(i5, 0, t, lambda s
86         : 0, lambda s: 1)[0] / G(alpha)
87     else:
88         i5 = lambda s: lamb_mu(s) * (t - s) ** (alpha - Kappa
89         ) * t * (G(2.05) * G(1 / 4) / G(1 / 4 + 2.05) * (t - s) +s
90         * G(1.05) * G(1 / 4) / G(1.05 + 1 / 4))
91         if t < tj[lamb - 1]:
92             liidetav4 = 0
93         elif t >= tj[lamb - 1] and t <= tj[lamb]:
94             liidetav4 = -integrate.quad(i5,tj[lamb - 1],t,
95             limit=lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)[0] / G(alpha)
96         else:
97             liidetav4 = -integrate.quad(i5,tj[lamb - 1],tj[
98             lamb],limit=lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)[0]/ G(alpha)
99         return liidetav1 + liidetav2 + liidetav3 + liidetav4
100
101
102
103 def g(t):
104     l1 = f(t) - h(t) * (c01 + c11 * t)
105     int1 = lambda s: (t - s) ** -Kappa * s
106     l2 = -c01 * t * 16 * t ** (5 / 4) / 5
107     int2 = lambda s: s * (t - s) ** -Kappa * s
108     l3 = -c11 * t * 128 * t ** (9 / 4) / 45
109     return l1 + l2 + l3
110
111
112 def c_ij_konstantide_arvutamine(dbl=True, printida=False):
113     C = np.zeros((m * N, m * N))
114     B = np.zeros(m * N)
115     for j in range(N):
116         for k in range(m):
117             t_punkt = T[j][k]
118             if printida:
119                 print (j, k)
120             for lamd in range(N):
121                 for mu in range(m):
122                     C[j * m + k, lamd * m + mu] = TI(lamd +
123                     1, mu + 1,t_punkt, b1, dbl)

```

```

114         B[j * m + k] = -g(t_punkt)
115     C = C - np.identity(m * N)
116     solve = np.linalg.solve(C, B)
117     c = np.zeros((N, m))
118     for j in range(N):
119         for k in range(m):
120             c[j, k] = solve[j * m + k]
121     return c
122
123
124 def Z_n(tau):
125     s = 0
126     for lamd in range(N):
127         for mu in range(m):
128             s += c[lamd, mu] * I(lamd + 1, mu + 1, tau)
129     return s
130
131
132 def J_z_b():
133     s = 0
134     for lamb in range(1, N + 1):
135         for mu in range(1, m + 1):
136             lamb_mu = lambda t11: I(lamb, mu, t11)
137             i2 = lambda t13: (b1 - t13) ** (alpha - 1) *
138             lamb_mu(t13)
139             if b1 < tj[lamb - 1]:
140                 l2 = [0, 0]
141             elif b1 >= tj[lamb - 1] and b1 <= tj[lamb]:
142                 l2 = integrate.quad(i2, tj[lamb - 1], b1, limit=
143                 lim, epsrel=epsr, epsabs=epsa)
144             else:
145                 l2 = integrate.quad(i2, tj[lamb - 1], tj[lamb],
146                 limit=lim, epsrel=epsr, epsabs=epsa)
147             s += c[lamb - 1, mu - 1] * l2[0] / G(alpha)
148     J_z_b = s
149     return J_z_b
150
151
152 def y_n(tau, J_Z_b):
153     s = 0
154     for lamb in range(1, N + 1):
155         for mu in range(1, m + 1):
156             lamb_mu = lambda t11: I(lamb, mu, t11)
157             i2 = lambda t13: (tau - t13) ** (alpha - 1) *
158             lamb_mu(t13)
159             if tau < tj[lamb - 1]:
160                 l2 = [0, 0]
161             elif tau >= tj[lamb - 1] and tau <= tj[lamb]:

```

```

159         l2 = integrate.quad(i2,tj[lamb - 1],tau,limit
=lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)
160     else:
161         l2 = integrate.quad(i2,tj[lamb - 1],tj[lamb],
limit=lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)
162         s += c[lamb - 1, mu - 1] * l2[0] / G(alpha)
163     J_Z_tau = s
164     return J_Z_b * c00 + c01 + (J_Z_b * c10 + c11) * tau +
J_Z_tau
165
166
167 def vea_arvutamine(real_funktsioon, calculated_function, N):
168     m_viga = 0
169     X = []
170     Y = []
171     T = []
172     for j in range(1, N + 1):
173         for k in range(10):
174             t = tj[j - 1] + k * (tj[j] - tj[j - 1]) / 10
175             cf = calculated_function(t)
176             viga = abs(real_funktsioon(t) - cf)
177             X.append(t)
178             Y.append(cf)
179             if m_viga < viga:
180                 m_viga = viga
181     return (m_viga, X, Y)
182
183
184 #####
185 #Defineerime konkreetse ylesande#
186 #####
187
188 b = 1
189 Kappa = 3 / 4
190 alpha = 1.05
191 def h(t):
192     return t
193 def K(t, s):
194     return s * t
195 def y(t):
196     return t ** 1.1
197 def f(t):
198     a = -3 / 4 + 1
199     b = 2.1 + 1
200     liidetav = G(a) * G(b) / G(a + b) * t ** 3.35
201     return G(1.1 + 1) / G(1.1 + 1 - alpha) * t ** (1.1 -
alpha) + y(t) * h(t) + liidetav
202 y_tuletis_0 = 0
203 a11 = 1

```

```

204 a12 = 1
205 a21 = 1
206 a22 = 1
207 b1 = 0.1
208
209 gamma1 = a11 * y(0) + a12 * y(b1)
210 gamma2 = a21 * y_tuletis_0 + a22 * y(b1)
211
212 #####
213 #L2hislahendi leidmine#
214 #####
215 # Kaust arvutustulemuste salvestamiseks
216 path = os.getcwd()
217 path = path + '/calculations1'
218 os.mkdir(path)
219 R = [1, 2,3,4,5]
220 eta = [[(3 - np.sqrt(3)) / 6, 1 - (3 - np.sqrt(3)) / 6], [(5
221     - np.sqrt(15)) / 10, 1 / 2, 1 - (5 - np.sqrt(15)) /
222     10]]
223
224 db1 = [True, False]
225 data = {}
226 for N in [4,8,16,32,64,128,256]:
227     for r in R:
228         for theta in eta:
229             t = False
230             print ('N:',N,'r:',r,'theta:',len(theta),'
kasutan_dbluquadi:',t)
231             (c00, c01, c10, c11) = konstandid(a11,a12,a21,a22
,gamma1,gamma2,b1)
232             (tj, T, m) = v6rk(N, b, theta, r)
233             c = c_ij_konstantide_arvutamine(t, False)
234             J_z = J_z_b()
235             y_N = lambda tau: y_n(tau, J_z)
236             (viga, X_plot, Y_plot) = vea_arvutamine(y, y_N, N
)
237             data[N] = dict()
238             data[N]['viga'] = viga
239             data[N]['X'] = X_plot
240             data[N]['Y'] = Y_plot
241             dateTimeObj = datetime.now()
242             t_finish = str(dateTimeObj.year) + '_' + str(
dateTimeObj.month) + '_' + str(dateTimeObj.day) + '_' +str
(dateTimeObj.hour) + ':' + str(dateTimeObj.minute)
243             csv_format = pd.DataFrame(data[N])
244             csv_format.to_csv(path + '/N_' + str(N) + '_r_' +
str(r)
245
                                     + '_eta_' + str(len(theta)) + '

```

```
246     _t_'
        + str(t) + '_' + str(t_finish)
        + '.csv')
```

Lisa 2 (Näiteülesande 2 kood)

```
1 import numpy as np
2 import time
3 import pandas as pd
4 from datetime import datetime
5 from scipy.special import gamma as G
6 from scipy import integrate
7 import os
8
9 #####
10 #Defineerime vajalikud funktsioonid#
11 #####
12
13 (lim, epsr, epsa) = (200, 1.49e-12, 1.49e-12)
14
15
16 def konstandid(a11,a12,a21,a22,gamma1,gamma2,b1):
17
18     # Arvutame algtingimuste j2rgi konstandid
19     c00 = -a21 * a12 / (b1 * a11 * a22 + a11 * a21 + a12 *
20 a21)
21     c10 = -a22 * a11 / (b1 * a11 * a22 + a11 * a21 + a12 *
22 a21)
23     c11 = (-a22 * gamma1 + gamma2 * (a11 + a12)) / (b1 * a11
24 * a22 + a11 * a21 + a12 * a21)
25     c01 = (gamma1 * (b1 * a22 + a21) - gamma2 * a12 * b1) / (
26 b1 * a11* a22 + a11 * a21 + a12 * a21)
27     return (c00, c01, c10, c11)
28
29
30 def v6rk(N,b,eta,r=1):
31
32     # Funktsioon tagastab v6rgu T (elementidega tjk) ning
33     listi tj
34     m = len(eta)
35     tj = np.array([b * (j / N) ** r for j in range(0, N + 1)
36 ])
37     T = np.zeros((N, m))
```

```

32     for j in range(1, N + 1):
33         for k in range(1, m + 1):
34             tjk = tj[j - 1] + eta[k - 1] * (tj[j] - tj[j -
1])
35             T[j - 1, k - 1] = tjk
36     return (tj, T, m)
37
38
39 def I(lambd, mu, tau): # lamb 1, ..., N, mu 1,...,m
40
41     # Lagrange polynoom
42     korrutis = 1
43     if tau <= tj[lambd - 1] or tau > tj[lambd]:
44         korrutis = 0
45     else:
46         korrutis = 1
47         for i in range(1, m + 1):
48             if i != mu:
49                 korrutis *= (tau - T[lambd - 1][i - 1]) / (T[
lambd - 1][mu - 1] - T[lambd - 1][i - 1])
50     return korrutis
51
52
53 def TI(lamb,mu, t, b1,dbl=True):
54
55     # lamb: 1,2,... #mu 1,..
56     lamb_mu = lambda t11: I(lamb, mu, t11)
57
58     # i1(t1) -> J^alpha I(b1)
59     i1 = lambda t12: (b1 - t12) ** (alpha - 1) * lamb_mu(t12)
60     if b1 < tj[lamb - 1]:
61         l1 = [0, 0]
62     elif b1 >= tj[lamb - 1] and b1 < tj[lamb]:
63         l1 = integrate.quad(i1,tj[lamb - 1],b1,limit=lim,
epsrel=epsr,epsabs=epsa)
64     else:
65         l1 = integrate.quad(i1,tj[lamb - 1],tj[lamb],limit=
lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)
66
67     J_z_b = l1[0] / G(alpha)
68
69     # i2(t1) -> J^alpha I(t)
70     i2 = lambda t13: (t - t13) ** (alpha - 1) * lamb_mu(t13)
71     if t < tj[lamb - 1]:
72         l2 = [0, 0]
73     elif t >= tj[lamb - 1] and t <= tj[lamb]:
74         l2 = integrate.quad(i2, tj[lamb - 1],t,limit=lim,
epsrel=epsr,epsabs=epsa)
75     else:

```

```

76         l2 = integrate.quad(i2,tj[lamb - 1],tj[lamb],limit=
77 lim, epsrel=epsr,epsabs=epsa)
78         J_z_t = l2[0] / G(alpha)
79
80         liidetav1 = -(J_z_b * c00 + J_z_b * c10 * t + J_z_t)
81
82         # i3(t1) -> (t-s)**-Kappa K(t,s)
83         i3 = lambda s1: (t - s1) ** -Kappa
84         liidetav2 = -c00 * J_z_b * integrate.quad(i3,0, t,limit=
85 lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)[0]
86
87         # i4(t1) -> s*(t-s)**-Kappa *K(t,s)
88         i4 = lambda s2: s2 * (t - s2) ** -Kappa
89         liidetav3 = -J_z_b * c10 * integrate.quad(i4,0,t,limit=
90 lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)[0]
91
92         if dbl:
93             i5 = lambda sigma1, s1: (t - s1) ** -(Kappa - alpha)
94             * lamb_mu(s1) * sigma1 ** (alpha - 1) * (1 - sigma1) ** -
95             Kappa
96             liidetav4 = -integrate.dblquad(i5, 0, t, lambda s: 0,
97 lambda s: 1)[0] / G(alpha)
98         else:
99             i5 = lambda s: lamb_mu(s) * (t - s) ** (alpha - Kappa
100 ) * np.pi / 2
101             if t < tj[lamb - 1]:
102                 liidetav4 = -0
103             elif t >= tj[lamb - 1] and t <= tj[lamb]:
104                 liidetav4 = -integrate.quad(i5, tj[lamb - 1], t,
105 limit=lim,epsrel=epsr, epsabs=epsa)[0] / G(alpha)
106             else:
107                 liidetav4 = -integrate.quad(i5,tj[lamb - 1],tj[
108 lamb],limit=lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)[0] / G(alpha)
109
110         return liidetav1 + liidetav2 + liidetav3 + liidetav4
111
112     def g(t):
113         l1 = f(t) - (c01 + c11 * t)
114         int1 = lambda s: (t - s) ** -Kappa
115         l2 = -c01 * integrate.quad(int1,0,t,limit=lim,epsrel=epsr
116 ,epsabs=epsa)[0]
117         int2 = lambda s: s * (t - s) ** -Kappa
118         l3 = -c11 * integrate.quad(int2,0,t,limit=lim,epsrel=epsr
119 ,epsabs=epsa)[0]
120         return l1 + l2 + l3

```



```

114 def c_ij_konstantide_arvutamine(dbl=True, printida=False):
115     C = np.zeros((m * N, m * N))
116     B = np.zeros(m * N)
117     for j in range(N):
118         for k in range(m):
119             t_punkt = T[j][k]
120             if printida:
121                 print (j, k)
122             for lamd in range(N):
123                 for mu in range(m):
124                     C[j * m + k, lamd * m + mu] = TI(lamd +
1, mu + 1, t_punkt, b1, dbl)
125                     B[j * m + k] = -g(t_punkt)
126     C = C - np.identity(m * N)
127     solve = np.linalg.solve(C, B)
128     c = np.zeros((N, m))
129     for j in range(N):
130         for k in range(m):
131             c[j, k] = solve[j * m + k]
132     return c
133
134
135 def Z_n(tau):
136     s = 0
137     for lamd in range(N):
138         for mu in range(m):
139             s += c[lamd, mu] * I(lamd + 1, mu + 1, tau)
140     return s
141
142
143 def J_z_b():
144     s = 0
145     for lamb in range(1, N + 1):
146         for mu in range(1, m + 1):
147             lamb_mu = lambda t11: I(lamb, mu, t11)
148             i2 = lambda t13: (b1 - t13) ** (alpha - 1) *
lamb_mu(t13)
149             if b1 < tj[lamb - 1]:
150                 l2 = [0, 0]
151             elif b1 >= tj[lamb - 1] and b1 <= tj[lamb]:
152                 l2 = integrate.quad(i2, tj[lamb - 1], b1, limit=
lim, epsrel=epsr, epsabs=epsa)
153             else:
154                 l2 = integrate.quad(i2, tj[lamb - 1], tj[lamb],
limit=lim, epsrel=epsr, epsabs=epsa)
155             s += c[lamb - 1, mu - 1] * l2[0] / G(alpha)
156     J_z_b = s
157     return J_z_b
158

```

```

159
160 def y_n(tau, J_Z_b):
161     s = 0
162     for lamb in range(1, N + 1):
163         for mu in range(1, m + 1):
164             lamb_mu = lambda t11: I(lamb, mu, t11)
165             i2 = lambda t13: (tau - t13) ** (alpha - 1) *
lamb_mu(t13)
166             if tau < tj[lamb - 1]:
167                 l2 = [0, 0]
168             elif tau >= tj[lamb - 1] and tau <= tj[lamb]:
169                 l2 = integrate.quad(i2,tj[lamb - 1],tau,limit
=lim, epsrel=epsr,epsabs=epsa)
170             else:
171                 l2 = integrate.quad(i2,tj[lamb - 1],tj[lamb],
limit=lim,epsrel=epsr,epsabs=epsa)
172             s += c[lamb - 1, mu - 1] * l2[0] / G(alpha)
173             J_Z_tau = s
174             return J_Z_b * c00 + c01 + (J_Z_b * c10 + c11) * tau +
J_Z_tau
175
176
177 def vea_arvutamine(real_funktsioon, calculated_function, N):
178     m_viga = 0
179     X = []
180     Y = []
181     T = []
182     for j in range(1, N + 1):
183         for k in range(10):
184             t = tj[j - 1] + k * (tj[j] - tj[j - 1]) / 10
185             cf = calculated_function(t)
186             viga = abs(real_funktsioon(t) - cf)
187             X.append(t)
188             Y.append(cf)
189             if m_viga < viga:
190                 m_viga = viga
191             return (m_viga, X, Y)
192
193
194 #####
195 #Defineerime konkreetse ylesande#
196 #####
197
198 b = 1
199 Kappa = 1 / 2
200 alpha = 3 / 2
201
202
203 def h(t):

```

```

204     return 1
205
206
207 def K(t, s):
208     return 1
209
210
211 def y(t):
212     return t ** (19 / 10)
213
214
215 def f(t):
216     caputo = G(19 / 10 + 1) / G(-alpha + 19 / 10 + 1) * t **
(19 / 10 - alpha)
217     teine = h(t) * y(t)
218     beta = 1 / 2
219     al = 19 / 10 + 1
220     integraal = G(al) * G(beta) / G(al + beta) * t ** (al +
beta - 1)
221     return caputo + teine + integraal
222
223
224 y_tuletis_0 = 0
225 a11 = 1
226 a12 = 1
227 a21 = 1
228 a22 = 1
229 b1 = 1
230
231 gamma1 = a11 * y(0) + a12 * y(b1)
232 gamma2 = a21 * y_tuletis_0 + a22 * y(b1)
233
234 #####
235 #L2hislahendi leidmine#
236 #####
237
238 # Kaust arvutustulemuste salvestamiseks
239
240 path = os.getcwd()
241 path = path + '/calculations2'
242 os.mkdir(path)
243
244 R = [1, 2,3,4,5]
245 eta = [[(3 - np.sqrt(3)) / 6, 1 - (3 - np.sqrt(3)) / 6], [(5-
np.sqrt(15)) / 10, 1 / 2, 1 - (5 - np.sqrt(15)) / 10]]
246
247 # eta = [[1/2,3/4]]
248 dbl = [True, False]
249 data = {}

```

```

250 for N in [4,8,16,32,64,128,256]:
251     for r in R:
252         for theta in eta:
253             t = False
254             print ('N:',N,'r:',r,'theta:',len(theta),'
kasutan_dbluquadi:',t)
255             (c00, c01, c10, c11) = konstandid(a11,a12,a21,a22
, gamma1, gamma2, b1)
256             (tj, T, m) = v6rk(N, b, theta, r)
257             c = c_ij_konstantide_arvutamine(t, False)
258             J_z = J_z_b()
259             y_N = lambda tau: y_n(tau, J_z)
260             (viga, X_plot, Y_plot) = vea_arvutamine(y, y_N, N
)
261             data[N] = dict()
262             data[N]['viga'] = viga
263             data[N]['X'] = X_plot
264             data[N]['Y'] = Y_plot
265             dateTimeObj = datetime.now()
266             t_finish = str(dateTimeObj.year) + '_' + str(
dateTimeObj.month) + '_' + str(dateTimeObj.day) + '_' +
str(dateTimeObj.hour) + ':' + str(dateTimeObj.minute)
267
268             csv_format = pd.DataFrame(data[N])
269             csv_format.to_csv(path + '/N_' + str(N) + '_r_' +
str(r) + '_eta_' + str(len(theta)) + '_t_' + str(t) + '_' +
str(t_finish) + '.csv')

```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Hanna Britt Soots

1. Annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose, Murrulise tuletisega integro-diferentsiaalvõrrandi numbriline lahendamine, mille juhendajad on lektor Kaido Lätt ning professor Arvet Pedas reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni,
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Hanna Britt Soots

25.05.2021