Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Heleen Saarse

Osaliste polügoonide tensorkorrutis

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Kristo Väljako, MSc

Tartu 2022

OSALISTE POLÜGOONIDE TENSORKORRUTIS

Bakalaureusetöö

Heleen Saarse

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uuritakse osalisi polügoone üle poolrühmade ja nende tensorkorrutist ning selle omadusi. Töös defineeritakse nii vasak- ja parempoolsed osalised polügoonid kui bipolügoonid ning nende homomorfismid. Edasi defineeritakse osaliste polügoonide tensorkorrutis ja osaliste polügoonide homomorfismide tensorkorrutis. Tõestatakse tensorkorrutisega seotud omadused, osaliste polügoonide hom-funktori ning tensorfunktori olemasolu ning lõpuks viimaste kaasfunktorlus. Tulemused on üldistused tulemustele raamatust „Monoids, Acts and Categories“, mille autoriteks on Mati Kilp, Ulrich Knauer ja Alexander V. Mikhalev.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria

Märksõnad: poolrühm, osaline polügoon, tensorkorrutis

TENSOR PRODUCT OF PARTIAL ACTS

Bachelor thesis

Heleen Saarse

Abstract

In this Bachelor's thesis partial acts over semigroups and tensor product of partial acts and its properties are studied. Left and right partial acts, biacts and their homomorphisms are defined. Also, tensor product of partial acts and tensor product of homomorphisms of partial acts are defined. The properties of the tensor product, the existence of hom-functor and tensor functor are proved. Finally the fact that the hom-functor and the tensor functor are adjoint functors, is shown. The results are generalizations of the results from book „Monoids, Acts and Categories“ by Mati Kilp, Ulrich Knauer and Alexander V. Mikhalev.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory

Key Words: semigroup, partial act, tensor product

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolevas bakalaureusetöös on defineeritud ja uuritud osalisi polügoone üle poolrühmade.

Polügoonid on ühed primitiivsemad algebralised struktuurid, mis tihti kirjeldavad loomulikke olukordi. Näiteks võime vaadelda naturaalarve polügoonina üle iseenda nii, et polügooni tehe on harilik liitmine. Tulemus on alati naturaalarv. Samas näiteks täisarvude jagamisel ei pruugi jagatis olla täisarv. See tähendab, et jagamine on osaline tehe, kuna see pole määratud kõikvõimalikel täisarvude paaridel. Samuti ei ole ratsionaalarvu juurimise tulemus naturaalarvulise juurija korral alati ratsionaalarv, mistõttu ka ratsionaalarvude juurimine on osaline tehe. Seega näeme, et osalised tehted tekivad väga loomulikes situatsioonides. Niisiis on igati põhjendatud ka osaliste struktuuride, seal hulgas osaliste polügoonide, uurimine.

Osalised rühmade toimed, st osalised kujutused $G \times X \to X$, kus G on rühm ja X on hulk, koos teatud omadustega, võttis kasutusele Ruy Excel aastal 1998 artiklis [4]. Sealt üldistasid Michael Megrelishvili ja Lutz Schröder aastal 2004 artiklis [12] osalised rühmade toimed osalistele monoidide toimetele. Seega olid nemad esimesed, kes käsitlesid osalisi polügoone üle monoidide. Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on üldistada raamatust [10] leitavad polügoonide tensorkorrutisega seotud definitsioonid ja tulemused osaliste polügoonide juhule. Lisaks, kui raamatus [10] vaadeldakse polügoone üle monoidide, siis antud töös tehakse seda üle poolrühmade.

Järgnevalt anname ülevaate käesoleva bakalaureusetöö sisust ja struktuurist.

Esimene peatükk tutvustab kategooria mõistet ja erinevaid morfismide liike. Lisaks tuuakse välja funktori ja loomuliku teisenduse definitsioon ning mõned nendega seotud konstruktsioonid, sh kaasfunktori mõiste, mis töös hiljem kasulikuks osutuvad. Esimene peatükk põhineb raamatutel [1] ja [9].

Teine peatükk tutvustab põhilisi hulgateoreetilisi ja algebralisi mõisteid, ilma milleta antud bakalaureusetöös läbi ei saa. Esimeses alapeatükis tehakse pikem kõrvalepõige seoste teemasse. Seoste tundmine on oluline hiljem osalise tensorseose mõistmiseks. Alapeatükk seostest käsitleb binaarseid seoseid, nendega seotud mõisteid ning eelkõige just ekvivalentsiseost, selle genereerimist ja omadusi. Seoste alapeatükk põhineb raamatutel [7] ning [10]. Teine alapeatükk tutvustab peamisi poolrühmade ja polügoonidega seotud mõisteid ning põhineb raamatutel [8] ja [10]. Kolmas alapeatükk, mis on kirjutatud raamatu [6] põhjal, toob välja osalise kujutuse defnititsiooni.

Kolmas peatükk täidab käesoleva bakalaureusetöö põhieesmärki, st selles peatükis üldistatakse raamatus [10] toodud polügoonide tensorkorrutisega seotud definitsioonid ja tulemused osaliste polügoonide juhule. Kõigepealt tuuakse välja osalise polügooni (artiklist [5]) ja osalise bipolügooni (raamatust [3]) definitsioon koos näidetega. Edasi näidatakse, et osalised polügoonid moodustavad kategooria ning tuuakse välja mõned osaliste polügoonide omadused. Neljandas alapeatükis antakse osaliste polügoonide tensorkorrutise definitsioon, selle saamise konstruktsioon ning piisav ja tarvilik tingimus osalise tensorseose ekvivalentsiklasside võrdumiseks. Lisaks vaadeldakse osaliste polügoonide homomorfismi mõistet, homomorfismide tensorkorrutist ja viimasega seotud omadusi. Lisaks raamtule [10] on selles alapeatükis kasutatud ka tööd [13] ning raamatut [2]. Alapeatüki lõpuks jõutakse tensorfunktoriteni, tänu millele saab viiendas alapeatükis konstrueerida sobiva hom-funktori. Bakalaureusetöö lõpuks on näidatud, et saab vaadelda hom-funktorit ja tensorfunktorit, mis on kaasfunktorid. Autorile ja juhendajale teadaolevalt on kolmanda peatüki tulemused originaalsed.

1 Kategooriateooria

Selles peatükis anname kategooria definitsiooni ja tutvustame töös hiljem ette tulevaid kategooriateooria mõisteid. Antud peatükk põhineb raamatutel [1] ja [9].

1.1 Kategooria definitsioon ja morfismide liigid

Kõigepealt esitame kategooria definitsiooni, mis on võetud raamatust [1, def. 3.1].

Definitsioon 1.1. **Kategooriaks** nimetatakse nelikut $\mathcal{C} = (\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \mathrm{Mor}(\mathcal{C}), \mathrm{id}, \circ)$, mis koosneb

1. klassist $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, mille elemente nimetatakse kategooria $\mathcal{C}$ **objektideks**;
2. iga objektipaari (A, B) jaoks hulgast $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, mida nimetatakse **morfismide hulgaks** objektist A objekti B; kõikide hulkade $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ühendit tähistame $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$;
3. iga objekti A jaoks morfismist $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$, mida nimetatakse **ühikmorfismiks**;
4. iga objektikolmiku (A, B, C) jaoks kujutusest

   $$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$
   $$(f, g) \mapsto g \circ f,$$

   mida nimetatakse **morfismide kompositisooniks** ehk **korrutiseks**,

nii, et

1. hulgad $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ on paarikaupa lõikumatud;
2. morfismide korrutamine on assotsiatiivne, st kui $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ja $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$, siis $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
3. iga morfismi $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ korral

   $$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Näide 1.2. Loomulik näide kategooriast on kõikide hulkade kategooria Set. Selle objektide klassiks $\mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ on kõikide hulkade klass, morfismideks on hulkade teisendused, morfismide kompositisooniks tavaline kujutuste komponeerimine ning ühikmorfismideks samasusteisendused. See näide illustreerib ka kategooriateooria eesmärki anda võimalus töötada struktuuridega, mis klassikalisest hulgateooriast välja jäävad.

Järgnevalt vaatleme mõningaid morfismide liike, mis siin töös hiljem oluliseks osutuvad.

Definitsioon 1.3. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria, $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Morfismi f nimetatakse

1. **monomorfismiks**, kui iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja iga $k, h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A)$ korral

$$f \circ k = f \circ h \Rightarrow k = h;$$

2. **epimorfismiks**, kui iga $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $k, h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, D)$ korral

$$k \circ f = h \circ f \Rightarrow k = h;$$

3. **bimorfismiks**, kui ta on nii mono- kui epimorfism;

4. **koretraktsiooniks**, kui leidub morfism $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ nii, et $g \circ f = \mathrm{id}_A$;

5. **retraktsiooniks**, kui leidub morfism $g \in \mathrm{Mor}_C(B, A)$ nii, et $f \circ g = \mathrm{id}_B$;

6. **isomorfismiks**, kui ta on nii retraktsioon kui koretraktsioon.

Esitame lemmana omaduse, mis seob omavahel erinevaid välja toodud morfisme. Tõestuse võib leida raamatust [1] lausete 7.35 ja 7.42 juurest.

Lemma 1.4. *Iga koretraktsioon on monomorfism ja iga retraktsioon on epimorfism.*

1.2 Funktorid ja loomulikud teisendused

Nüüd tutvustame funktori mõistet. Funktorid mängivad kategooriateoorias sarnast rolli, nagu homomorfismid teevad seda algebraliste struktuuride puhul.

Definitsioon 1.5. Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategooriad. Olgu $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eeskiri, mis seab igale kategooria $\mathcal{C}$ objektile A vastavusse üheselt määratud kategooria $\mathcal{D}$ objekti $F(A)$ ning igale kategooria $\mathcal{C}$ morfismile f üheselt määratud kategooria $\mathcal{D}$ morfismi $F(f)$. Eeskirja F nimetatakse **kovariantseks funktoriks**, kui

1. iga $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, korral $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ B \arrow[r, mapsto] & F(B) \end{tikzcd};$$

2. iga $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ ja $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$ korral $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;

3. iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.

Eeskirja F nimetatakse **kontravariantseks funktoriks**, kui

1. iga $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, korral $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & F(A) \\ B \arrow[r, mapsto] & F(B) \arrow[u, "F(f)"'] \end{tikzcd} \quad ;$$

2. iga $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ ja $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$ korral $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$;

3. iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.

Järgnevalt defineerime mor-funktori, mis on üks laialt levinud ning tihti ette tulev näide funktoritest. Lisaks on mor-funktor olemas iga kategooria $\mathcal{C}$ ja iga selle kategooria objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral.

Definitsioon 1.6. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ja $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Siis diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[d, "f\circ\_"] & \ni g \arrow[d, mapsto] \\ B' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B') & \ni f \circ g \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"] & B \arrow[d, "f"] \\ & B' \end{tikzcd}$$

defineerib iga $B, B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral kovariantse funktori

$$\mathrm{Mor}(A, \_) \colon \mathcal{C} \to \mathsf{Set},$$

mida nimetatakse **kovariantseks mor-funktoriks (teise muutuja järgi)**. Seega kovariantne mor-funktor tegutseb objektidel võrdusega $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \_)(B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ja morfismidel võrdusega $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, \_)(f) = f \circ \_$. Analoogiliselt saab defineerda ka **kontravariantse morfunktori esimese argumendi järgi**.

Järgmiseks tutvustame loomuliku teisenduse mõistet. Võib öelda, et loomulikud teisendused on morfismid funktorite vahel.

Definitsioon 1.7. Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategooriad, $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovariantsed funktorid ja $\alpha\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ selline eeskiri, mille korral on täidetud järgmised tingimused:

1. iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral $\alpha_A \coloneqq \alpha(A) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$, st $\alpha = (\alpha_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ on morfismide pere;
2. suvaliste objektide $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja suvalise morfismi $f\colon A \to A'$ korral on diagramm

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"] & G(A') \end{tikzcd}$$

kommutatiivne.

Sellisel juhul nimetatakse eeskirja α **loomulikuks teisenduseks** funktorist F funktorisse G ja tähistatakse $\alpha\colon F \Rightarrow G$.

Loomulikku teisendust α nimetatakse **loomulikuks isomorfismiks**, kui iga objekti A korral morfism α_A on isomorfism.

Viimaks defineerime kategooriateoorias ja siinses töös olulise kontseptsiooni, milleks on kaasfunktorid.

Definitsioon 1.8. Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategooriad, $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ja $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ kovariantsed funktorid ning $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(\_), \_)$ ja $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, G(\_))$ sellised liitfunktorid, mille esimeseks argumendiks on kategooria $\mathcal{C}$ ja teiseks argumendiks kategooria $\mathcal{D}$ objektid. Vaatleme nende liitfunktorite loomulikku isomorfismi

$$\omega\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(\_), \_) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, G(\_))$$

ehk iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ korral isomorfismide

$$\omega_{A,B}\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, G(B))$$

peret, mis on esimese argumendi järgi kontravariantsete ja teise argumendi järgi kovariantsete funktorite loomulik isomorfism. Kui selline loomulik teisendus ω leidub, siis nimetatakse funktorit F funktori G **vasakpoolseks kaasfunktoriks** ja funktorit G funktori F **parempoolseks kaasfunktoriks** ning tähistatakse $F \dashv G$.

Situatsiooni $F \dashv G$ nimetatakse ka **adjunktsiooniks**.

2 Hulgateoreetilised ja algebralised mõisted

Peatükis 2 anname ülevaate baasteadmistest seoste, seal hulgas ekvivalentsiseoste, poolrühmade ja polügoonide ning osaliste kujutuste kohta, ilma milleta töö teises pooles läbi ei saa.

2.1 Seostest

Siinkohal teeme kõrvalepõike seoste juurde. Vaatleme erinevaid seoste liike ja viise, kuidas neid genereerida. Arusaamine seostest, eriti ekvivalentsiseostest, on oluline osalise tensorseose mõistmisel. Käesolev alapeatükk seostest põhineb raamatutel [7] ja [10]. Meenutame, et **binaarseks seoseks** hulgal X nimetatakse otsekorrutise $X \times X$ mingit alamhulka.

Definitsioon 2.1. Hulga X **diagonaaliks** nimetatakse binaarset seost

$$\Delta_X = \{(x, x) |\, x \in X\}.$$

Definitsioon 2.2. Binaarsete seoste $\rho, \sigma \subseteq X \times X$ **korrutiseks** nimetatakse binaarset seost

$$\rho \circ \sigma = \{\,(x, z) \in X \times X |\, \exists y \in X \colon (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \sigma\}\,.$$

Definitsioon 2.3. Binaarse seose $\rho \subseteq X \times X$ **pöördseoseks** nimetatakse binaarset seost

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in X \times X |\, (y, x) \in \rho\}.$$

Järgnevalt defineerime binaarsete seoste olulised alamliigid ning näitame, kuidas suvalisest binaarsest seosest genereerida vähimat antud omadusega seost.

Definitsioon 2.4. Binaarset seost $\rho \subseteq X \times X$ nimetatakse

1. **refleksiivseks**, kui $\Delta_\rho \subseteq \rho$;
2. **sümmeetriliseks**, kui $\rho^{-1} \subseteq \rho$;
3. **transitiivseks**, kui $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Definitsioon 2.5. Tähistame $\rho^i = \rho \circ \ldots \circ \rho$ (i korda). Binaarse seose $\rho \subseteq X \times X$ **transitiivseks sulundiks** nimetatakse seost

$$\rho^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i.$$

Lemma 2.6. *Binaarse seose $\rho \subseteq X \times X$ korral on ρ^∞ vähim transitiivne seos hulgal X, mis sisaldab seost ρ.*

TÕESTUS. On selge, et $\rho \subseteq \rho^\infty$. Olgu $(x,y),(y,z) \in \rho^\infty$. Siis leiduvad $m,n \in \mathbb{N}$ nii, et $(x,y) \in \rho^m$ ja $(y,z) \in \rho^n$. Järelikult $(x,z) \in \rho^m \circ \rho^n = \rho^{m+n} \subseteq \rho^\infty$ ehk ρ^∞ on transitiivne seos.

Näitame nüüd, et ρ^∞ on vähim selline seos, mis on transitiivne ja sisaldab seost ρ. Olgu $\sigma \subseteq X \times X$ transitiivne seos ja $\rho \subseteq \sigma$. Siis $\rho^2 = \rho \circ \rho \subseteq \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$. Kui $\rho^k \subseteq \sigma$, siis $\rho^{k+1} = \rho^k \circ \rho \subseteq \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$. Seega $\rho^n \subseteq \sigma$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ja järelikult $\rho^\infty \subseteq \sigma$. Niisiis on ρ^∞ vähim transitiivne seos hulgal X, mis sisaldab seost ρ. $\square$

Definitsioon 2.7. Binaarset seost $\rho \subseteq X \times X$ nimetatakse **ekvivalentsiseoseks**, kui ta on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

Definitsioon 2.8. Binaarse seose $\rho \subseteq X \times X$ poolt **genereeritud ekvivalentsiseoseks** nimetatakse kõikide seost ρ sisaldavate ekvivalentsiseoste (hulgal X) ühisosa, mida tähistatakse ρ^e.

Lause 2.9. *Binaarse seose $\rho \subseteq X \times X$ korral $\rho^e = \left(\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X\right)^\infty$.*

TÕESTUS. Olgu $\rho \subseteq X \times X$ binaarne seos. On selge, et $\rho \subseteq \left(\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X\right)^\infty =: \tau$. Seos τ on ilmselt refleksiivne, sest $\Delta_X \subseteq \tau$, ja transitiivne. Kuna seos $\nu := \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X$ on sümmetriline, siis $\nu^n = \left(\nu^{-1}\right)^n = (\nu^n)^{-1}$. Nüüd kui $(x,y) \in \tau$, siis $(x,y) \in \nu^n$ mingi $n \in \mathbb{N}$ korral. Sel juhul $(y,x) \in (\nu^n)^{-1} = \nu^n$. Siis ka $(y,x) \in \tau$ ning järelikult τ on sümmeetriline. Niisiis on τ ekvivalentsiseos.

Olgu nüüd $\sigma \subseteq X \times X$ selline ekvivanlentsiseos, mille korral $\rho \subseteq \sigma$. Kuna $\Delta_X \subseteq \sigma$ ja $\rho^{-1} \subseteq \sigma$ (sest σ on ekvivalentsiseos), siis $\nu = \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X \subseteq \sigma$. Et $\nu \circ \nu \subseteq \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$, siis kasutades induktsiooni, saame, et $\nu^n \subseteq \sigma$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Järelikult $\tau \subseteq \sigma$, mis tähendab, et τ on vähim ekvivalentsiseos, mis seost ρ sisaldab ehk $\tau = \left(\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X\right)^\infty = \rho^e$. $\square$

Lause 2.10. *Olgu $\rho \subseteq X \times X$ binaarne seos. Siis $(x,y) \in \rho^e$ parajasti siis, kui $x = y$ või leiduvad hulga X elemendid $x = z_1, z_2, \ldots, z_n = y$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral kas $(z_i, z_{i+1}) \in \rho$ või $(z_{i+1}, z_i) \in \rho$.*

TÕESTUS. Tarvilikkus. Olgu $(x,y) \in \rho^e = \left(\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X\right)^\infty$. Seega leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $(x,y) \in \left(\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X\right)^n$. Kui $x = y$, siis väide kehtib. Kui $x \neq y$, siis leiduvad elemendid $x = z_1, z_2, \ldots, z_n = y$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral $(z_i, z_{i+1}) \in \rho \cup \rho^{-1}$. Seega $(z_i, z_{i+1}) \in \rho$ või $(z_i, z_{i+1}) \in \rho^{-1}$ ehk $(z_{i+1}, z_i) \in \rho$.

Piisavus. On selge, et kui $x = y$, siis $(x, y) \in \rho^e$, sest ρ^e on ekvivalentsiseos. Olgu nüüd $x \neq y$ ja leidugu nende vahel elementide jada $x = z_1, z_2, \dots, z_n \in y$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n-1\}$ korral $(z_i, z_{i+1}) \in \rho$ või $(z_{i+1}, z_i) \in \rho$ ehk $i \in \{1, \dots, n-1\}$ korral $(z_i, z_{i+1}) \in \rho \cup \rho^{-1} \subseteq \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X$. Järelikult (x, y) kuulub transitiivsesse seosse, mis sisaldab hulka $\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X$. Seega ka $(x, y) \in \big(\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_X\big)^\infty = \rho^e$ (vt lause 2.6). $\square$

2.2 Poolrühmadest ja polügoonidest

See alapeatükk annab ülevaate põhilistest poolrühmade ja polügoonidega seotud mõistetest, millest enamus pärineb raamatust [8]. Enne veel meenutame, et **binaarseks tehteks** hulgal X nimetatakse mistahes kujutust $X \times X \to X$.

Definitsioon 2.11. Paari $(S, *)$, kus S on hulk ja $*\colon S \times S \to S$ binaarne tehe, nimetatakse **poolrühmaks**, kui tehe $*$ on assotsiatiivne, st iga $a, b, c \in S$ korral

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Tihti kirjutame poolrühma $(S, *)$ tähistamiseks lihtsalt S, kui tehe $*$ on kontekstist selge.

Definitsioon 2.12. Poolrühma $(S, *)$, kus S on hulk ja $*\colon S \times S \to S$ binaarne tehe, nimetatakse **monoidiks**, kui leidub element $1 \in S$ nii, et $1 * s = s = s * 1$ iga $s \in S$ korral. Elementi 1 nimetatakse sellisel juhul monoidi **ühikelemendiks**.

Definitsioon 2.13 ([1, näide 4.17 C (12)])**.** Olgu $(S, *)$ poolrühm. Tähistame

$$S^1 = S \sqcup \{1\},$$

kus 1 on mingi element, mis ei kuulu hulka S. Hulgal S^1 defineerime korrutamise $\cdot$ võrdusega

$$s \cdot r = \begin{cases} s * r, & (s \in S \wedge r \in S), \\ 1, & (s = 1 \vee r = 1). \end{cases}$$

Öeldakse, et monoid $(S^1, \cdot)$ on saadud poolrühmast S **ühikelemendi lisamisel**.

Märgime, et eelistame sellist ühikelemendi lisamist viisile, mida on kasutatud raamatus [8, def. 3.31]. Nimelt sellisel juhul tekib funktor F poolrühmade kategooriast monoidide kategooriasse diagrammiga

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & F(S) = S^1 \arrow[d, "F(f)"] \\ P \arrow[r, mapsto] & F(P) = P^1 \end{tikzcd},$$

kus iga $s \in S^1$ korral

$$F(f)(s) = \begin{cases} f(s), & s \in S \\ 1_P, & s = 1_S \end{cases}.$$

Niisiis on selline ühikelemendi lisamine paremate kategoorsete omadustega.

Toome nüüd mõned näited poolrühmadest.

Näide 2.14. Hulk $\{2k \colon k \in \mathbb{Z}\}$ koos tavalise täisarvude korrutamisega on poolrühm, mis ei ole monoid.

Näide 2.15. Naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ (arvu 0 ei loe naturaalarvuks) koos tavalise liitmisega on poolrühm, aga mitte monoid.

Definitsioon 2.16. Olgu $(S, *)$ poolrühm ja A hulk. Kujutust $\cdot \colon A \times S \to A$, $(a, s) \mapsto a \cdot s$ nimetatakse **parempoolseks S-toimeks**, kui iga $a \in A$ ja iga $s, s' \in S$ korral

$$(a \cdot s) \cdot s' = a \cdot (s * s').$$

Paari $(A, \cdot)$ nimetatakse **parempoolseks S-polügooniks** ja tähistatakse A_S. Analoogiliselt saame defineerida **vasakpoolsed S-polügoonid**.

Definitsioon 2.17 ([10, def. 2.24])**.** Olgu R ja S poolrühmad. Kui $({}_RA, \star)$ on vasakpoolne polügoon, $(A_S, \cdot)$ parempoolne polügoon ning iga $r \in R$, $a \in A$, $s \in S$ korral $(r \star a) \cdot s = r \star (a \cdot s)$, siis kolmikut $(A, \star, \cdot)$ nimetatakse **(R, S)-bipolügooniks** ja tähistame ${}_RA_S$.

Paneme tähele, et iga poolrühma S saab vaadelda (S, S)-bipolügoonina.

Definitsioon 2.18. Olgu A_S ja B_S parempoolsed S-polügoonid. Kujutust $f \colon A_S \to B_S$ nimetatakse parempoolsete S-polügoonide **homomorfismiks** ehk **S-homomorfismiks**, kui iga $a \in A$ ja $s \in S$ korral $f(as) = f(a)s$.

Analoogiliselt defineeritakse homomorfismid ka vasakpoolsete polügoonide jaoks.

Definitsioon 2.19. Olgu ${}_RA_S$ ja ${}_RA'_S$ bipolügoonid. Kujutust $f \colon {}_RA_S \to {}_RA'_S$ nimetatakse bipolügoonide **homomorfismiks**, kui f on nii parempoolsete kui vasakpoolsete polügoonide homomorfism.

Nii vasak- kui parempoolsed S-polügoonid moodustavad kategooria, kus mofismideks on vastavad homomorfismid. Tähistame neid kategooriaid vastavalt Act_S ja ${}_S\mathsf{Act}$. Analoogiliselt moodustavad (R, S)-bipolügoonid koos bipolügoonide homomorfismidega kategooria ${}_R\mathsf{Act}_S$. [10, näide 6.5]

2.3 Osalistest kujutustest

Käesolev osalisi kujutisi tutvustav alapeatükk põhineb raamatul [6].

Definitsioon 2.20. Olgu $\phi \subseteq X \times Y$. Kui iga $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ korral kehtib tingimus

$$(x, y_1) \in \phi \wedge (x, y_2) \in \phi \implies y_1 = y_2,$$

siis hulka ϕ nimetatakse **osaliseks kujutuseks** hulgast X hulka Y.

Kui $x \in X$ on selline element, mille jaoks leidub $y \in Y$ nii, et $(x, y) \in \phi$, siis me kirjutame lühidalt, et leidub $\phi(x)$. Samuti kirjutame sellisel juhul $\phi(x) = y$.

Olgu $\phi \subseteq X \times Y$ osaline kujutus hulgast X hulka Y. Kujutuse ϕ **määramispiirkonnaks** nimetatakse hulka

$$\operatorname{dom}(\phi) = \{x \in X \,|\, \exists\, \phi(x) \in Y \colon (x, \phi(x)) \in \phi\}$$

ja **kujutiseks** hulka

$$\operatorname{im}(\phi) = \{y \in Y \,|\, \exists\, x \in X \colon (x, y) \in \phi\}.$$

Ilmselt võib iga kujutust $f \colon X \to Y$ vaadelda kui osalist kujutust hulgast X hulka Y, mille korral $\operatorname{dom}(f) = X$.

Näide 2.21. Mistahes kahe hulga X ja Y puhul saame vaadelda tühja kujutust hulgast X hulka Y, sest $\varnothing \subseteq X \times Y$.

Näide 2.22. Tangensfunktsioon $\tan \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on osaline kujutus, mille puhul

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(\tan) &= \mathbb{R} \setminus \left\{(2z+1)\frac{\pi}{2} \colon z \in \mathbb{Z}\right\}, \\ \operatorname{im}(\tan) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kui $\phi, \psi \subseteq X \times Y$ on sellised osalised kujutused hulgast X hulka Y, et $\phi \subseteq \psi$, siis ütleme, et ϕ on ψ **ahend** ja ψ on ϕ **jätk**.

3 Osalised polügoonid

Selle peatüki eesmärk on tutvustada osaliste polügoonide kategooriat ning üldistada raamatus [10] lehekülgedel 155 – 164 toodud tulemused polügoonide ja nende tensorkorrutise kohta osaliste polügoonide juhule.

3.1 Osalise polügooni definitsioon

Alustuseks defineerime osalised polügoonid ning toome nende kohta mõned näited.

Definitsioon 3.1 ([5, def. 2.2])**.** Olgu $(S, *)$ poolrühm ja A hulk. Osalist kujutust

$$\cdot\colon A \times S \to A, \quad (a, s) \mapsto a \cdot s$$

nimetatakse **osaliseks parempoolseks S-toimeks**, kui iga $a \in A$ ja iga $s, s' \in S$ korral

$$\exists\, a \cdot s \wedge \exists\, (a \cdot s) \cdot s' \Rightarrow \exists\, a \cdot (s * s') \wedge (a \cdot s) \cdot s' = a \cdot (s * s').$$

Paari $(A, \cdot)$ nimetatakse **osaliseks parempoolseks S-polügooniks** ja tähistatakse A_S.

Analoogiliselt saab defineerida ka **osalised vasakpoolsed S-toimed** ja **S-polügoonid**. Kui S-toime ning poolrühma tehted on kontekstist selged, jätame edaspidi korrutusmärgid $\cdot$ ja $*$ kirjutamata.

Näide 3.2.

1. Iga polügooni võib vaadelda osalise polügoonina, kus kõik korrutised eksisteerivad.
2. Iga hulka võib vaadelda osalise polügoonina üle suvalise poolrühma, kus korrutamine on defineeritud tühjal hulgal. Sellist osalist polügooni nimetatakse **triviaalseks**.

Näide 3.3.

1. Täisarvude hulk $\mathbb{Z}$ on osaline parempoolne polügoon üle naturaalarvude poolrühma $(\mathbb{N}, \cdot)$, kus polügooni tehe on jagamine. Tõepoolest, kui jagatised $\dfrac{z}{n_1}$ ja $\dfrac{\frac{z}{n_1}}{n_2}$, kus $z \in \mathbb{Z}$ ning $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, on täisarvud, siis ka $\dfrac{z}{n_1 n_2}$ on täisarv ja $\dfrac{\frac{z}{n_1}}{n_2} = \dfrac{z}{n_1 n_2}$.
2. Ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ on osaline vasakpoolne polügoon üle naturaalarvude poolrühma $(\mathbb{N}, \cdot)$, kus polügooni tehe on juurimine. Leidugu juured $\sqrt[n_1]{q} \in \mathbb{Q}$ ja $\sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{q}} \in \mathbb{Q}$. See tähendab, et kui $q < 0$, siis n_1 ja n_2 on paaritud arvud. Siis on ka $n_1 n_2$ paaritu arv ja seega saab võtta juure $\sqrt[n_1 n_2]{q} \in \mathbb{Q}$, kusjuures $\sqrt[n_1 n_2]{q} = \sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{q}}$. Kui $q \geqslant 0$, siis pole oluline, millise paarsusega n_1 ja n_2 on, seega alati $\sqrt[n_1 n_2]{q} = \sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{q}}$.

Definitsioon 3.4 ([3, lk 216]). Olgu S ja R poolrühmad. Osalist polügooni ${}_RA_S$ nimetatakse **kahepoolseks osaliseks polügooniks** ehk **osaliseks** (R, S)**-bipolügooniks**, kui $({}_RA, \star)$ on osaline vasakpoolne ja $(A_S, \cdot)$ osaline parempoolne polügoon ning iga $a \in A$, $r \in R$, $s \in S$ korral kehtib tingimus

$$\exists\, a \cdot s \wedge \exists\, r \star a \Rightarrow \exists\, r \star (a \cdot s) \wedge \exists\, (r \star a) \cdot s \wedge r \star (a \cdot s) = (r \star a) \cdot s.$$

Poolrühma $(S, *)$ **vastandpoolrühmaks** nimetatakse poolrühma $(S^{\mathrm{op}}, *_{\mathrm{op}})$, kus $S^{\mathrm{op}} = S$ ja iga $a, b \in S$ korral $a *_{\mathrm{op}} b = b * a$ [10, märkus 4.3 (3)]. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$. Sümboliga $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tähistame kõikide $(n \times m)$-maatriksite (üle reaalarvude) hulka, sümboliga $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ kõigi n. järku ruutmaatriksite (üle reaalarvude) hulka ning sümboliga $\mathrm{Mat}(\mathbb{R})$ kõigi maatrikiste (üle reaalarvude) hulka.

Näide 3.5.

1. Hulk $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ on osaline $(\mathrm{Mat}(\mathbb{R}), \mathrm{Mat}(\mathbb{R}))$-bipolügoon, kui nii osalise polügooni toime $\cdot$ kui ka poolrühma $(\mathrm{Mat}(\mathbb{R}), \cdot)$ tehe on harilik maatriksite korrutamine. Kui $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ ja $B, C \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R})$, siis korrutis $B \cdot A$ leidub parajasti siis, kui $B \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{R})$. Sama moodi, korrutis $A \cdot C$ leidub täpselt siis, kui $C \in \mathrm{Mat}_{m\times l}(\mathbb{R})$. Seega kui $B \cdot A$ ja $A \cdot C$ eksisteerivad, siis $B \cdot A \in \mathrm{Mat}_{k\times m}(\mathbb{R})$ ja $A \cdot C \in \mathrm{Mat}_{m\times l}(\mathbb{R})$. Järelikult on olemas ka korrutised $B \cdot (A \cdot C) \in \mathrm{Mat}_{k\times l}(\mathbb{R})$ ja $(B \cdot A) \cdot C \in \mathrm{Mat}_{k\times l}(\mathbb{R})$ ning $B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C$ maatriksite korrutamise assotsiatiivuse tõttu.

2. Vaatleme hulka $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ kui osalist $((\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))^{\mathrm{op}}, (\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}))^{\mathrm{op}})$-bipolügooni, kus polügooni teheteks on pöördmaatriksitega korrutamine. Paarid $((\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))^{\mathrm{op}}, \cdot_{\mathrm{op}})$ ja $((\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})^{\mathrm{op}}, \cdot_{\mathrm{op}})$ on poolrühmad, mille teheteks on maatriksite korrutamine vastandpoolrühmas. Märgime ära, et sümboliga S^{-1} tähistame maatriksi S pöördmaatriksit tavalise maatrikisite korrutamise suhtes, mitte korrutamise $\cdot_{\mathrm{op}}$ suhtes. Hulga $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ bipolügoonina vaatlemise jaoks defineerime kaks osalist kujutust (mida tähistame sama sümboliga $\circledast$)

$$\begin{aligned} \circledast\colon\ & (\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}), && S \circledast M := S^{-1} \cdot M, \\ \circledast\colon\ & \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}) \times (\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}))^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}), && M \circledast R := M \cdot R^{-1}. \end{aligned}$$

   Olgu $M \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Paneme tähele, et kui $S_1, S_2 \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ korral leiduvad nende pöördmaatriksid $S_1^{-1}, S_2^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, siis leiduvad korrutised

$$S_1 \circledast M = S_1^{-1} \cdot M \quad \text{ja} \quad S_2 \circledast (S_1 \circledast M) = S_2^{-1} \cdot (S_1^{-1} \cdot M),$$

kusjuures

$$S_2 \circledast (S_1 \circledast M) = S_2^{-1} \cdot (S_1^{-1} \cdot M) = (S_2^{-1} \cdot S_1^{-1}) \cdot M = (S_1 \cdot S_2)^{-1} \cdot M =$$
$$= (S_2 \cdot_{\mathrm{op}} S_1)^{-1} \cdot M = (S_2 \cdot_{\mathrm{op}} S_1) \circledast M.$$

Seega $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ on osaline vasakpoolne polügoon üle poolrühma $((\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))^{\mathrm{op}}, \cdot_{\mathrm{op}})$. Analoogiliselt saame ka, et $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ on osaline parempoolne polügoon üle poolrühma $((\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}))^{\mathrm{op}}, \cdot_{\mathrm{op}})$. Lisaks, kui maatriksitel $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja $R \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$ leiduvad pöördmaatriksid $S^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ja $R^{-1} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$, siis eksisteerivad korrutised $S \circledast M = S^{-1} \cdot M$ ning $M \circledast R = M \cdot R^{-1}$. Järelikult leiduvad ka korrutised

$$(S \circledast M) \circledast R = (S^{-1} \cdot M) \cdot R^{-1} = S^{-1} \cdot (M \cdot R^{-1}) = S \circledast (M \circledast R)$$

ja seega hulka $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ saame tõesti vaadelda osalise $((\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))^{\mathrm{op}}, (\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R}))^{\mathrm{op}})$-bipolügoonina. Sisuliselt oleme siin defineerinud maatriksitega jagamise.

3.2 Osaliste polügoonide kategooriad

Selles alapeatükis defineerime osaliste polügoonide homomorfismid ja näitame, et koos nendega moodustavad osalised polügoonid kategooriad.

Definitsioon 3.6. Olgu S poolrühm ning A_S ja A'_S osalised parempoolsed polügoonid. Kujutus $f\colon A_S \to A'_S$ on **osaliste parempoolsete polügoonide S-homomorfism**, kui iga $a \in A$ ja iga $s \in S$ korral

$$\exists\, as \;\Rightarrow\; \exists\, f(a)s \,\wedge\, f(as) = f(a)s.$$

Analoogiliselt saab defineerida **osaliste vasakpoolsete polügoonide S-homomorfismi**. Kui poolrühm S on kontekstist selge, nimetame edaspidi S-homomorfisme lihtsalt ka homomorfismideks.

On selge, et kui A_S ja A'_S on parempoolsed polügoonid, siis nende homomorfismid (definitsiooni 2.18 mõttes) on homomorfismid ka definitsiooni 3.6 mõttes, kui vaadelda polügoone A_S ja A'_S osaliste parempoolsete S-polügoonidena.

Definitsioon 3.7. Olgu R ja S poolrühmad ning ${}_RA_S$ ja ${}_RA'_S$ osalised bipolügoonid. Me nimetame kujutust $f\colon {}_RA_S \to {}_RA'_S$ **osaliste bipolügoonide homomorfismiks**, kui kujutus $f\colon {}_RA \to {}_RA'$ on vasakpoolsete R-polügoonide homomorfism ja $f\colon A_S \to A'_S$ on parempoolsete S-polügoonide homomorfism

Lause 3.8. *Osalised parempoolsed (vasakpoolsed) S-polügoonid ((R,S)-bipolügoonid) koos vastavate osaliste polügoonide homomorfismidega moodustavad kategooria.*

TÕESTUS. Olgu kategooria $\mathcal{C}$ objektideks kõik osalised parempoolsed S-polügoonid ning morfismideks nendevahelised S-homomorfismid.

1. Olgu $A_S, B_S, C_S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Vaatleme homomorfisme $f\colon A_S \to B_S$ ja $g\colon B_S \to C_S$. Kui $a \in A$, $s \in S$ ja leidub korrutis as, siis saab vaadelda homomorfismide g ja f kompositisiooni $g \circ f\colon A_S \to C_S$, mille korral

   $$(g \circ f)(as) = g(f(as)) = g(f(a)s) = g(f(a))s = (g \circ f)(a)s.$$

   Paneme tähele, et vastavalt osaliste polügoonide homomorfismi definitsioonile korrutis $f(a)s$ leidub ning seetõttu leidub ka korrutis $g(f(a))s$. Niisiis on ka $g \circ f$ osaliste polügoonide homomorfism.

2. Ilmselt kui $(A_S, A'_S) \neq (B_S, B'_S)$, siis $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_S, A'_S) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B_S, B'_S) = \varnothing$.

3. Kuna kujutuste komponeerimine on assotsiatiivne, siis on assotsiatiivne ka osaliste polügoonide homomorfismide komponeerimine.

4. Iga A_S korral $\mathrm{id}_A\colon A_S \to A_S$, $a \mapsto a$ on homomorfism. Tõepoolest, kui mingite $a \in A$ ja $s \in S$ korral leidub korrutis as, siis

   $$\mathrm{id}_A(as) = as = \mathrm{id}_A(a)s.$$

   Olgu lisaks ka $f\colon A_S \to B_S$ homomorfism. Siis

   $$(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = f(a)$$

   ja

   $$(\mathrm{id}_B \circ f)(a) = \mathrm{id}_B(f(a)) = f(a),$$

   seega $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$.

Niisiis moodustavad osalised parempoolsed S-polügoonid koos vastavate homomorfismidega kategooria. Sama moodi saab näidata, et leidub ka osaliste vasakpoolsete S-polügoonide kategooria ning osaliste (R,S)-bipolügoonide kategooria. □

Osaliste parempoolsete S-polügoonide kategooriat tähistame PAct_S ja osaliste vasakpoolsete S-polügoonide kategooriat ${}_S\mathsf{PAct}$. Paneme tähele, et kategooria Act_S on kategooria PAct_S alamkategooria. Märgime, et kategoorias PAct_S on isomorfismideks bijektiivsed osaliste parempoolsete S-polügoonide homomorfismid. Analoogilised tähelepanekud kehtivad ka kategoorias ${}_S\mathsf{PAct}$.

Osaliste (R, S)-bipolügoonide kategooriat tähistame ${}_R\mathsf{PAct}_S$.

3.3 Osaliste polügoonidega seotud mõisteid

Toome sisse ka paar osaliste polügoonidega seotud mõistet. Neist viimane mängib edaspidiste tulemuste juures väga suurt rolli.

Definitsioon 3.9 ([5, def. 2.4])**.** Olgu $(S, *)$ poolrühm. Osalist parempoolset S-toimet $\cdot$ nimetatakse **tugevaks**, kui iga $a \in A$ ja $s, s' \in S$ korral

$$\exists\, a \cdot s \wedge \exists\, a \cdot (s * s') \Rightarrow \exists\, (a \cdot s) \cdot s'.$$

Sellisel juhul $(a \cdot s) \cdot s' = a \cdot (s * s')$. Osalist polügooni A_S nimetatakse **tugevaks**, kui tema toime on tugev.

Analoogiliselt saame defineerida tugevad osalised vasakpoolsed polügoonid.

Üldistame nüüd unitaarsete polügoonide definitsiooni osalistele polügoonidele. Unitaarsuse mõiste on polügoonide teoorias laialt levinud. Näiteks on seda kasutatud artiklis [11].

Definitsioon 3.10. Olgu S poolrühm. Nimetame osalist S-polügooni A_S **unitaarseks**, kui iga $a \in A$ jaoks leiduvad $a' \in A$ ja $s \in S$ nii, et eksisteerib korrutis $a' \cdot s$ ning kehtib võrdus $a = a' \cdot s$.

Lemma 3.11. *Kui S on monoid, siis tugev osaline S-polügoon A_S on unitaarne parajasti siis, kui iga $a \in A$ korral leidub korrutis $a \cdot 1$ ja $a = a \cdot 1$.*

TÕESTUS. Piisavus tuleb vahetult unitaarse osalise polügooni definitsioonist. Tarvilikkuse jaoks olgu $a \in A$. Siis leiduvad $a' \in A$ ja $s' \in S$ nii, et $a = a' \cdot s$. Kuna leiduvad korrutised $a' \cdot s$ ja $a' \cdot (s * 1)$, siis vastvalt osalise polügooni definitsioonile leidub ka korrutis $(a' \cdot s) \cdot 1$ ning $(a' \cdot s) \cdot 1 = a' \cdot (s * 1)$. See tähendab, et $a \cdot 1 = a' \cdot s = a$. $\square$

Olgu A_S parempoolne osaline S-polügoon. Me saame teda alati vaadelda osalise polügoonina üle monoidi S^1, kui defineerime, et iga $a \in A$ korral korrutis $a1$ eksisteerib ja $a1 = a$. Seejuures tänu lemmale 3.11 on polügoon A_{S^1} unitaarne.

Definitsioon 3.12. Olgu R ja S poolrühmad. Osalist (R, S)-bipolügooni ${}_RA_S$ nimetame **viisakaks**, kui iga $a \in A$, $r \in R$, $s \in S$ korral

$$\exists\, a \cdot s \wedge \exists\, r \star (a \cdot s) \Rightarrow \exists\, r \star a \wedge \exists (r \star a) \cdot s,$$

kus $\star$ on vasakpoolne R-toime ja $\cdot$ on parempoolne S-toime.

3.4 Osaliste polügoonide tensorkorrutis

Järgnevalt defineerime osaliste polügoonide tensorkorrutise ja tutvume selle peamiste omadustega.

Definitsioon 3.13. Olgu S poolrühm, A_S osaline parempoolne S-polügoon, ${}_SM$ osaline vasakpoolne S-polügoon ja Y hulk. Kujutust

$$\beta \colon A_S \times {}_SM \to Y$$

nimetatakse **S-tensoriaalseks**, kui iga $a \in A$, iga $m \in M$ ja iga $s \in S$, mille puhul korrutised as ning sm leiduvad, korral $\beta(as, m) = \beta(a, sm)$.

Definitsioon 3.14. Olgu S poolrühm, A_S osaline parempoolne S-polügoon ja ${}_SM$ osaline vasakpoolne S-polügoon. Hulka T koos S-tensoriaalse kujutusega $\tau \colon A_S \times {}_SM \to T$ nimetatakse **osaliste polügoonide** A_S ja ${}_SM$ **tensorkorrutiseks**, kui iga hulga Y ja iga S-tensoriaalse kujutuse $\beta \colon A_S \times {}_SM \to Y$ jaoks leidub üheselt määratud hulkade kujutus $\overline{\beta} \colon T \to Y$ nii, et $\beta = \overline{\beta} \circ \tau$.

$$\begin{tikzcd} A_S \times {}_SM \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\tau"] & Y \\ & T \arrow[u, dashed, "\overline{\beta}"] \end{tikzcd}$$

Järgmise lause tõestus põhineb lause 4.13 tõestusel töös [13].

Lause 3.15. *Kui (T, τ) ja (T', τ') on kaks osaliste polügoonide A_S ja ${}_SM$ tensorkorrutist, siis T ja T' on hulkadena isomorfsed.*

TÕESTUS. Olgu (T, τ) ja (T', τ') kaks osaliste polügoonide A_S ja ${}_SM$ tensorkorrutist. Siis leiduvad ühesed hulkade kujutused $\overline{\beta}$ ja $\overline{\beta}'$ nii, et diagrammid

$$\begin{tikzcd} A_S \times {}_SM \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & T \\ & T' \arrow[u, "\overline{\beta}'"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_S \times {}_SM \arrow[r, "\tau'"] \arrow[dr, "\tau"'] & T' \\ & T \arrow[u, "\overline{\beta}"] \end{tikzcd}$$

kommuteeruvad. Seega kommuteeruvad ka kolmnurgad järgnevas diagrammis.

$$\begin{tikzcd} & A_S \times {}_SM \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[d, "\tau'"] \arrow[dr, "\tau"] & \\ T \arrow[r, "\overline{\beta}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_T"'] & T' \arrow[r, "\overline{\beta}'"] & T \end{tikzcd}$$

Ühesuse nõude tõttu $\overline{\beta} \circ \overline{\beta}' = \mathrm{id}_{T'}$ ning $\overline{\beta}' \circ \overline{\beta} = \mathrm{id}_T$. Järelikult on tensorkorrutised (T, τ) ja (T', τ') hulkadena isomorfsed. $\square$

Olgu A_S parempoolne osaline S-polügoon ja ${}_SM$ vasakpoolne osaline S-polügoon. Seost ν nimetame **osaliseks tensorseoseks**, kui ta on paaride $((as, m), (a, sm))$ poolt genereeritud ekvivalentsiseos hulgal $A_S \times {}_SM$, kus $a \in A, m \in M, s \in S$ ja korrutised as ning sm leiduvad. Defineerime

$$A \otimes_S M := (A_S \times {}_SM)/\nu, \quad a \otimes m := [(a, m)]_\nu.$$

Lause 3.16. *Olgu A_S parempoolne osaline S-polügoon ja ${}_SM$ vasakpoolne osaline S-polügoon. Siis $a \otimes m = a' \otimes m'$, $a, a' \in A$, $m, m' \in M$, parajasti siis, kui eksisteerivad elemendid $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k \in S^1$, $b_1, \ldots, b_{k-1} \in A$ ja $n_1, \ldots, n_k \in M$ nii, et leiduvad korrutised $s_i n_i$, $t_i n_i$, $b_i t_i$, $b_i s_{i+1}$ ja kehtivad võrdused*

$$\begin{aligned} & & s_1 n_1 &= m \\ a s_1 &= b_1 t_1 & s_2 n_2 &= t_1 n_1 \\ b_1 s_2 &= b_2 t_2 & s_3 n_3 &= t_2 n_2 \\ \ldots & & \ldots & \\ b_{k-1} s_k &= a' t_k & m' &= t_k n_k. \end{aligned} \tag{1}$$

TÕESTUS. Olgu $H = \{((as, m), (a, sm)) | a \in A, m \in M, s \in S, \exists\, as, \exists\, sm\}$ ja olgu ν seose H poolt genereeritud ekvivalentsiseos. Lisaks defineerime seose $\sigma \subseteq (A \times M)^2$ nii, et $(a, m)\sigma(a', m')$, kus $a, a' \in A$ ja $m, m' \in M$, parajasti siis, kui eksisteerivad elemendid $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k \in S^1$, $b_1, \ldots, b_{k-1} \in A$ ja $n_1, \ldots, n_k \in M$ nii, et leiduvad korrutised

s_in_i, t_in_i, b_it_i, b_is_{i+1} ja kehtivad võrdused

$$\begin{array}{ll} & s_1n_1 = m \\ as_1 = b_1t_1 & s_2n_2 = t_1n_1 \\ b_1s_2 = b_2t_2 & s_3n_3 = t_2n_2 \\ \dots & \dots \\ b_{k-1}s_k = a't_k & m' = t_kn_k. \end{array}$$

Näitame, et σ on ekvivalentsiseos.

Esiteks võime kirjutada

$$\begin{array}{ll} & 1m = m \\ a1 = a1 & m = 1m. \end{array}$$

Järelikult $(a, m)\sigma(a, m)$, seega σ on refleksiivne.

Teiseks, kehtigu $(a, m)\sigma(a', m')$. Siis eksisteerivad elemendid $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k \in S^1$, $b_1, \dots, b_{k-1} \in A$ ja $n_1, \dots, n_k \in M$ nii, et leiduvad korrutised s_in_i, t_in_i, b_it_i, b_is_{i+1} ja kehtivad võrdused (1). Võime need võrdused järjestada järgnevalt:

$$\begin{array}{ll} & t_kn_k = m' \\ a't_k = b_{k-1}s_k & t_{k-1}n_{k-1} = s_kn_k \\ b_{k-1}t_{k-1} = b_{k-2}s_{k-1} & t_{k-2}n_{k-2} = s_{k-1}n_{k-1} \\ \dots & \dots \\ b_1t_1 = as_1 & m = s_1n_1. \end{array}$$

See aga tähendab, et ka $(a', m')\sigma(a, m)$. Järelikult on σ sümmeetriline.

Kolmandaks, kehtigu $(a, m)\sigma(a', m')$ ja $(a', m')\sigma(a'', m'')$. See tähendab, et on olemas elemendid $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k \in S^1$, $b_1, \dots, b_{k-1} \in A$ ja $n_1, \dots, n_k \in M$ nii, et leiduvad korrutised s_in_i, t_in_i, b_it_i, b_is_{i+1} ja kehtivad võrdused (1) ning eksisteerivad ka elemendid $s'_1, \dots, s'_l$, $t'_1, \dots, t'_l \in S^1$, $b'_1, \dots, b'_{l-1} \in A$ ja $n'_1, \dots, n'_l \in M$ nii, et leiduvad korrutised $s'_in'_i$, $t'_in'_i$, $b'_it'_i$, $b'_is'_{i+1}$ ja

$$\begin{array}{ll} & s'_1n'_1 = m' \\ a's'_1 = b'_1t'_1 & s'_2n'_2 = t'_1n'_1 \\ b'_1s'_2 = b'_2t'_2 & s'_3n'_3 = t'_2n'_2 \\ \dots & \dots \\ b'_{l-1}s'_l = a''t'_l & m'' = t'_ln'_l. \end{array}$$

Järelikult $s'_1n'_1 = m' = t_kn_k$ ja tänu sellele saame kaks skeemi üheks kokku kirjutada järgnevalt:

$$\begin{array}{ll} & s_1n_1 = m \\ as_1 = b_1t_1 & s_2n_2 = t_1n_1 \\ b_1s_2 = b_2t_2 & s_3n_3 = t_2n_2 \\ \dots & \dots \\ b_{k-1}s_k = a't_k & s_1'n_1' = t_kn_k \\ a's_1' = b_1't_1' & s_2'n_2' = t_1'n_1' \\ b_1's_2' = b_2't_2' & s_3'n_3' = t_2'n_2' \\ \dots & \dots \\ b_{l-1}'s_l' = a''t_l' & m'' = t_l'n_l', \end{array}$$

mistõttu $(a,m)\sigma(a'',m'')$. Seega σ on transitiivne ja kuna ta on ka refleksiivne ning sümmeetriline, on ta ekvivalentsiseos.

Nüüd näitame, et $\nu \subseteq \sigma$. Olgu $((as,m),(a,sm)) \in H$. Siis

$$\begin{array}{ll} & 1m = m \\ (as)1 = as & (sm) = sm, \end{array}$$

seega $(as,m)\sigma(a,sm)$. Järelikult $H \subseteq \sigma$. Kuna ν on vähim ekvivalentsiseos, mille korral $H \subseteq \nu$, ning σ on ekvivalentsiseos, siis $\nu \subseteq \sigma$.

Viimaks näitame, et $\sigma \subseteq \nu$. Olgu $((a,m),(a',m')) \in \sigma$. Siis eksisteerivad elemedid $s_1,\dots,s_k$, $t_1,\dots,t_k \in S^1$, $b_1,\dots,b_{k-1} \in A$ ja $n_1,\dots,n_k \in M$ nii, et leiduvad korrutised s_in_i, t_in_i, b_it_i, b_is_{i+1} ja kehtivad võrdused (1). Nüüd paneme tähele, et

$$(a,m) = (a,s_1n_1)H(as_1,n_1) = (b_1t_1,n_1)H(b_1,t_1n_1) = \ldots = (a't_k,n_k)H(a',t_kn_k) = (a',m').$$

Kuna $H \subseteq \nu$ ja ν on transitiivne, siis $(a,m)\nu(a',m')$ ehk $\sigma \subseteq \nu$. Järelikult $\nu = \sigma$, mida oligi tarvis tõestada. $\square$

Märgime ära, et lauses 3.16 esitatud konstruktsioon on analoogiline konstruktsiooniga lauses 2.10. Raamatus [10] kasutatakse skeemi (1) jaoks ingliskeelset sõna *tossing*.

Lause 3.17. *Hulk $A \otimes_S M$ koos kanoonilise sürjektsiooniga*

$$\tau\colon A_S \times {}_SM \to A \otimes_S M, \quad \tau(a,m) = a \otimes m,$$

on osaliste polügoonide A_S ja ${}_SM$ tensorkorrutis.

TÕESTUS. Olgu Y hulk ja $\beta : A_S \times {_S M} \to Y$ S-tensoriaalne kujutus. Defineerime iga $b \in A$ ja $n \in M$ korral

$$\overline{\beta}\colon A \otimes_S M \to Y, \quad \overline{\beta}(b \otimes n) = \beta(b, n).$$

Näitame, et $\overline{\beta}$ on korrektselt defineeritud. Oletame, et $a \otimes m = a' \otimes m'$, $a, a' \in A$, $m, m' \in M$. Siis $a \otimes m$ ja $a' \otimes m'$ vahel leidub jada, nagu kirjeldatud lauses 3.16. Lisaks, kuna β on S-tensoriaalne, saame

$$\begin{aligned}\beta(a, m) = \beta(a, s_1 n_1) = \beta(a s_1, n_1) = \beta(b_1 t_1, n_1) = \dots \\ = \beta(a' t_k, n_k) = \beta(a', t_k n_k) = \beta(a', m').\end{aligned}$$

Seega

$$\overline{\beta}(a \otimes m) = \beta(a, m) = \beta(a', m') = \overline{\beta}(a' \otimes m'),$$

mis tähendab, et $\overline{\beta}$ on korrektselt defineeritud.

Nüüd

$$\left(\overline{\beta} \circ \tau\right)(a, m) = \overline{\beta}(\tau(a, m)) = \overline{\beta}(a \otimes m) = \beta(a, m)$$

ehk $\beta = \overline{\beta} \circ \tau$.

Kujutuse $\overline{\beta}$ ühesuse näitamiseks oletame, et eksisteerib ka $\overline{\overline{\beta}}\colon A \otimes_S M \to Y$ nii, et

$$\overline{\beta} \circ \tau = \beta = \overline{\overline{\beta}} \circ \tau$$

Olgu $a \otimes m \in A \otimes_S M$. Vastavalt τ definitsioonile $a \otimes m = \tau(a, m)$. Nüüd saame

$$\overline{\beta}(a \otimes m) = \left(\overline{\beta} \circ \tau\right)(a, m) = \beta(a, m) = \left(\overline{\overline{\beta}} \circ \tau\right)(a, m) = \overline{\overline{\beta}}(a \otimes m),$$

Niisiis kehtib $\overline{\beta} = \overline{\overline{\beta}}$ ehk kujutus $\overline{\beta}$ on üheselt määratud. $\square$

Järgmiseks tutvustame osaliste polügoonide homomorfismide tensorkorrutise mõistet.

Definitsioon 3.18. Olgu S poolrühm, $f\colon A_S \to A'_S$ ja $g\colon {_S M} \to {_S M'}$ osaliste polügoonide homomorfismid ning $\tau\colon A_S \times {_S M} \to A \otimes_S M$ ja $\tau'\colon A'_S \times {_S M'} \to A' \otimes_S M'$ kanoonilised sürjektsioonid. **Homomorfismide** f ja g **tensorkorrutiseks** nimetatakse üheselt määratud kujutust $\overline{\tau' \circ (f \times g)}$, mille korral diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_S \times {}_SM & \xrightarrow{f\times g} & A'_S \times {}_SM' \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau'} \\ A \otimes_S M & \xrightarrow{\overline{\tau'\circ(f\times g)}} & A' \otimes_S M' \end{array}$$

kommuteerub. Homomorfismide f ja g tensorkorrutist tähistame $f \otimes g := \overline{\tau' \circ (f \times g)}$.

Näitame, et eelnev definitsioon on korrektne. Selleks peame näitama, et homomorfismide f ja g tensorkorrutis leidub. Paneme tähele, et kehtib võrdus

$$(\tau' \circ (f \times g))(m, n) = f(m) \otimes g(n).$$

Näitame, et kujutus $\tau' \circ (f \times g)$ on tensoriaalne. Olgu $a \in A$, $m \in M$, $s \in S$ ning leidugu korrutised as ja sm. Siis leiduvad ka korrutised $f(a)s$ ning $sg(m)$, kusjuures $f(a)s = f(as)$ ja $sg(m) = g(sm)$. Järelikult

$$\begin{aligned}(\tau' \circ (f \times g))(as, m) = f(as) \otimes g(m) = f(a)s \otimes g(m) = f(a) \otimes sg(m) = f(a) \otimes g(sm) = \\ = (\tau' \circ (f \times g))(a, sm),\end{aligned}$$

seega kujutus $\tau' \circ (f \times g)$ on tensoriaalne. Järelikult vastavalt tensorkorrutise definitsioonile leidub üheselt määratud kujutus $\overline{\tau' \circ (f \times g)}\colon A \otimes_S M \to A' \otimes_S M'$ nii, et $\overline{\tau' \circ (f \times g)} \circ \tau = \tau' \circ (f \times g)$. Seega

$$\begin{aligned}\overline{\tau' \circ (f \times g)}(a \otimes m) = \overline{\tau' \circ (f \times g)}(\tau(a, m)) = (\overline{\tau' \circ (f \times g)} \circ \tau)(a, m) \\ = (\tau' \circ (f \times g))(a, m) = f(a) \otimes g(m).\end{aligned}$$

Niisiis homomorfismide f ja g tensorkorrutis eksisteerib. Paneme tähele, et oleme tõestanud ka järgneva lemma.

Lemma 3.19. *Olgu $f\colon A_S \to A'_S$ ja $g\colon {}_SM \to {}_SM'$ osaliste polügoonide homomorfismid. Siis iga $a \in A$ ning iga $m \in M$ korral*

$$(f \otimes g)(a \otimes m) = f(a) \otimes g(m).$$

Tõestame mõned osaliste polügoonide homomorfismide tensorkorrutisega seotud omadused.

Lause 3.20. *Olgu A_S osaline parempoolne S-polügoon ja ${}_SM$ osaline vasakpoolne S-polügoon.*

Siis

1. *$id_A \otimes id_M = id_{A \otimes_S M}$;*
2. *kui $f\colon A_S \to A'_S$ ja $g\colon {}_SM \to {}_SM'$ on sürjektsioonid, siis $f \otimes g$ on ka sürjketsioon;*
3. *kui $f\colon A_S \to A'_S$, $g\colon {}_SM \to {}_SM'$, $f'\colon A'_S \to A''_S$ ja $g'\colon {}_SM' \to {}_SM''$ on osaliste polügoonide homomorfismid, siis*

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)\colon A \otimes_S M \to A'' \otimes_S M'';$$

4. *kui $f\colon A_S \to A'_S$ ja $g\colon {}_SM \to {}_SM'$ on retraktsioonid, koretraktsioonid või isomorfismid, siis on seda ka $f \otimes g$. Isomorfismide korral*

$$(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}.$$

TÕESTUS. 1. Olgu $a \otimes m \in A \otimes_S M$. Et osalise polügooni samasusteisendus on osaliste polügoonide homomorfism, siis

$$(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_M)(a \otimes m) = \mathrm{id}_A(a) \otimes \mathrm{id}_M(m) = a \otimes m = \mathrm{id}_{A \otimes_S M}(a \otimes m).$$

Järelikult $\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{A \otimes_S M}$.

2. Olgu f ja g sürjektiivsed ning $a' \otimes m' \in A' \otimes_S M'$. Kuna f ja g on sürjektiivsed, siis leiduvad $a \in A$ ja $m \in M$ nii, et $a' = f(a)$ ja $m' = g(m)$. Võime valida $a' \otimes m'$ originaaliks $a \otimes m$ ning järelikult $f \otimes g$ on sürjektiivne.

3. Olgu $a \otimes m \in A \otimes_S M$. Siis

$$\begin{aligned}\big((f' \otimes g') \circ (f \otimes g)\big)(a \otimes m) &= (f' \otimes g')(f(a) \otimes g(m)) = (f'(f(a))) \otimes (g'(g(m)))\\ &= ((f' \circ f)(a)) \otimes ((g' \circ g)(m)).\end{aligned}$$

Seega $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$.

4. Olgu f ja g retraktsioonid. Sel juhul leiduvad $f^*\colon A'_S \to A_S$ ja $g^*\colon {}_SM' \to {}_SM$ nii, et $f \circ f^* = \mathrm{id}_{A'}$ ja $g \circ g^* = \mathrm{id}_{M'}$. Siis

$$(f \otimes g) \circ (f^* \otimes g^*) = (f \circ f^*) \otimes (g \circ g^*) = \mathrm{id}_{A'} \otimes \mathrm{id}_{M'} = \mathrm{id}_{A' \otimes_S M'},$$

seega ka $f \otimes g$ on retraktsioon.

Olgu f ja g on koretraktsioonid. Sel juhul leiduvad $f^*\colon A'_S \to A_S$ ja $g^*\colon {}_SM' \to {}_SM$ nii, et $f^* \circ f = \mathrm{id}_A$ ja $g^* \circ g = \mathrm{id}_M$. Siis

$$(f^* \otimes g^*) \circ (f \otimes g) = (f^* \circ f) \otimes (g^* \circ g) = \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{A\otimes_S M},$$

seega ka $f \otimes g$ on koretraktsioon.

Olgu f ja g isomorfismid, st mõlemad nii retraktsioonid kui koretraktsioonid. Siis neil leiduvad pöördmorfismid $f^{-1}\colon A'_S \to A_S$ ja $g^{-1}\colon {}_SM' \to {}_SM$. Nüüd

$$(f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (f \otimes g) = (f^{-1} \circ f) \otimes (g^{-1} \circ g) = \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{A\otimes_S M}$$

ja

$$(f \otimes g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}) = (f \circ f^{-1}) \otimes (g \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_{A'} \otimes \mathrm{id}_{M'} = \mathrm{id}_{A'\otimes_S M'},$$

seega $f \otimes g$ on isomorfism ja $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.

□

Järgnevalt näitame, et teatud eeldustel on osaliste bipolügoonide tensorkorrutist ennast võimalik vaadelda kui osalist bipolügooni.

Lause 3.21. *Kui ${}_RA_S$ ja ${}_SM_T$ on osalised viisakad bipolügoonid, siis ${}_R(A \otimes_S M)_T$ on osaline bipolügoon toimetega*

$$r(a \otimes m) = ra \otimes m, \quad (a \otimes m)t = a \otimes mt$$

iga $a \in A$, $m \in M$, $r \in R$, $t \in T$, mille korral korrutised ra ja mt leiduvad.

TÕESTUS. Olgu ${}_RA_S$ ja ${}_SM_T$ viisakad osalised bipolügoonid. Defineerime

$$r(a \otimes m) \coloneqq (ra) \otimes m,$$
$$(a \otimes m)t \coloneqq a \otimes (mt)$$

iga $a \in A$, $m \in M$, $r \in R$ ja $t \in T$ jaoks, mille korral korrutised ra ja mt on olemas. Näitame, et selline kujutus $R \times (A \otimes_S M) \to A \otimes_S M$ on korrektselt defineeritud. Olgu $a, a' \in A$, $m, m' \in M$, $r \in R$ sellised, et leidub korrutis ra ning $a \otimes m = a' \otimes m'$. Vastavalt lausele 3.16 eksisteerivad elemendid $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k \in S^1$, $b_1, \dots, b_{k-1} \in A$ ja $n_1, \dots, n_k \in M$ nii, et leiduvad korrutised $s_i n_i$, $t_i n_i$, $b_i t_i$, $b_i s_{i+1}$ ja kehtivad võrdused

$$
\begin{array}{ll}
 & s_1 n_1 = m \\
a s_1 = b_1 t_1 & s_2 n_2 = t_1 n_1 \\
b_1 s_2 = b_2 t_2 & s_3 n_3 = t_2 n_2 \\
\dots & \dots \\
b_{k-1} s_k = a' t_k & m' = t_k n_k.
\end{array}
$$

Siis

$$
\begin{aligned}
r(a \otimes m) &= (ra) \otimes m && \text{(R-toime definitsioon)} \\
&= (ra) \otimes (s_1 n_1) && \text{(asendus $m = s_1 n_1$ skeemist)} \\
&= ((ra) s_1) \otimes n_1 && \text{(osalise bipolügooni definitsioon, tensoriaalsus)} \\
&= (r(a s_1)) \otimes n_1 && \text{(osalise bipolügooni defnitsioon)} \\
&= (r(b_1 t_1)) \otimes n_1 && \text{(asendus $a s_1 = b_1 t_1$ skeemist)} \\
&= ((r b_1) t_1) \otimes n_1 && \text{(viisakus)} \\
&= (r b_1) \otimes t_1 n_1 && \text{(tensoriaalsus)} \\
&= (r b_1) \otimes (s_2 n_2) && \text{(asendus $t_1 n_1 = s_2 n_2$ skeemist)} \\
&= \dots \\
&= (r a') \otimes (t_k n_k) && \text{(tensoriaalsus)} \\
&= (r a') \otimes m' && \text{(asendus $t_k n_k = m'$ skeemist)} \\
&= r(a' \otimes m'), && \text{(R-toime definitsioon)}
\end{aligned}
$$

seega tõepoolest on kujutus $R \times (A \otimes_S M) \to A \otimes_S M$ korrektselt defineeritud. Analoogiliselt on ka kujutus $(A \otimes_S M) \times T \to A \otimes_S M$ korrektselt defineeritud.

Nüüd näitame, et ${}_R(A \otimes_S M)$ on vasakpoolne osaline R-polügoon. Olgu $r, r' \in R$, $a \in A$, $m \in M$, $t \in T$. Oletame, et leiduvad korrutised ra ja $r'(ra)$. Kuna ${}_R A$ on osaline vasakpoolne polügoon, siis eksisteerib ka korrutis $(r'r)a$ ja $(r'r)a = r'(ra)$. Lisaks eksisteerivad korrutised $r(a \otimes m) = (ra) \otimes m$ ning $r'((ra) \otimes m) = (r'(ra)) \otimes m$. Seega

$$
r'(r(a \otimes m)) = r'((ra) \otimes m) = (r'(ra)) \otimes m = ((r'r)a) \otimes m = (r'r)(a \otimes m).
$$

Järelikult on ${}_R(A \otimes_S M)$ on vasakpoolne osaline R-polügoon defineeritud toimega. Analoogiliselt saame näidata, et $(A \otimes_S M)_T$ on parempoolne osaline S-polügoon.

Eksisteerigu nüüd korrutised ra ja mt. Siis on olemas korrutised $r(a \otimes m) = (ra) \otimes m$, $(a \otimes m)t = a \otimes (mt)$ ning järelikult ka $(r(a \otimes m))t$ ja $r((a \otimes m)t)$. Viimaks paneme tähele, et

$$(r(a \otimes m))t = ((ra) \otimes m)t = (ra) \otimes (mt) = r(a \otimes (mt)) = r((a \otimes m)t).$$

Seega ${}_R(A \otimes_S M)_T$ on kahepoolne osaline polügoon. □

Eelmise lause tõestusest on näha, et kui vaid üks osalistest polügoonidest A_S ja ${}_SM$ on viisakas osaline bipolügoon, siis nende tensorkorrutis on vastav ühepoolne osaline polügoon. Järgnevalt näitame, et tegurite viisakus kandub üle ka tensorkorrutisele.

Lause 3.22. *Kui ${}_RA_S$ ja ${}_SM_T$ on osalised viisakad bipolügoonid, siis ${}_R(A \otimes_S M)_T$ on samuti osaline viisakas bipolügoon.*

TÕESTUS. Olgu ${}_RA_S$ ja ${}_SM_T$ on osalised viisakad bipolügoonid. Vaatleme bipolügooni ${}_R(A \otimes_S M)_T$ nagu lauses 3.21. Meil piisab näidata selle bipolügooni viisakust. Selleks olgu $r \in R$, $t \in T$, $a \in A$, $m \in M$ ja eksisteerigu korrutised $(a \otimes m)t$ ning $r((a \otimes m)t)$. Järelikult on olemas korrutis mt ning $(a \otimes m)t = a \otimes (mt)$ ja $r((a \otimes m)t) = r(a \otimes (mt))$. Viimane võrdus annab, et ka korrutis ra eksisteerib ja

$$r((a \otimes m)t) = r(a \otimes (mt)) = (ra) \otimes (mt) = ((ra) \otimes m)t = (r(a \otimes m))t.$$

Seega tõepoolest bipolügoon ${}_R(A \otimes_S M)_T$ on viisakas. □

Inspireerituna lausest [2, lause 20.8] näitame järgmiseks, et kui A_S on parempoolne ja ${}_RC$ vasakpoolne osaline polügoon ning ${}_SB_R$ osaline viisakas bipolügoon, siis tensorkorrutised $(A \otimes_S) \otimes_R C$ ja $A \otimes_S (B \otimes_R C)$ on hulkadena isomorfsed, st tensorkorrutis on isomorfismi täpsuseni assotsiatiivne.

Teoreem 3.23. *Olgu A_S parempoolne ja ${}_RC$ vasakpoolne osaline polügoon ning ${}_SB_R$ osaline viisakas bipolügoon. Siis leidub bijektiivne kujutus*

$$\nu \colon (A \otimes_S B) \otimes_R C \to A \otimes_S (B \otimes_R C)$$
$$\nu((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c),$$

kusjuures see kujutus on iga muutuja A, B ja C suhtes loomulik.

TÕESTUS. Olgu A_S parempoolne ja ${}_RC$ vasakpoolne osaline polügoon ning ${}_SB_R$ osaline viisakas bipolügoon. Paneme tähele, et $A \otimes_S B$ on osaline parempoolne R-polügoon ja $B \otimes_R C$ on osaline vasakpoolne S-polügoon lauses 3.21 defineeritud toimete suhtes.

Fikseerime $a \in A$ ja defineerime

$$\beta_a(b, c) = (a \otimes b) \otimes c.$$

iga $b \in B$ ning $c \in C$ korral. Näitame, et β_a on R-tensoriaalne. Olgu $b \in B$, $c \in C$ ja $r \in R$ sellised, et eksisteerivad korrutised br ja rc. Siis

$$\begin{aligned}
\beta_a(br, c) &= (a \otimes (br)) \otimes c && (\beta_a \text{ definitsioon})\\
&= ((a \otimes b)r) \otimes c && (\text{osalise polügooni } A \otimes_S B \ R\text{-toime})\\
&= (a \otimes b) \otimes (rc) && (\text{tensoriaalsus ja korrutise } rc \text{ leidumine})\\
&= \beta_a(b, rc). && (\beta_a \text{ definitsioon})
\end{aligned}$$

Vastavalt definitsioonile 3.14 leidub üheselt määratud kujutus $\overline{\beta_a}\colon B \otimes_R C \to (A \otimes_S B) \otimes_R C$ nii, et kanoonilise sürjektsiooni $\tau\colon B \times C \to B \otimes_R C$ korral $\beta_a = \overline{\beta_a} \circ \tau$.

Nüüd vaatleme kujutust $\gamma\colon A \times (B \otimes_R C) \to (A \otimes_S B) \otimes_R C$, mis on iga $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ korral defineeritud võrdusega

$$\gamma(a, b \otimes c) = \overline{\beta_a}(b \otimes c) = \overline{\beta_a}(\tau(b, c)) = \beta_a(b, c) = (a \otimes b) \otimes c.$$

Näitame, et γ on S-tensoriaalne. Olgu $a \in A$, $b \in B$ ja $s \in S$ sellised, et leiduvad korrutised as ning sb. Lisaks olgu $c \in C$. Siis

$$\begin{aligned}
\gamma(as, b \otimes c) &= \overline{\beta_{as}}(b \otimes c) && (\gamma \text{ defintisioon})\\
&= \overline{\beta_{as}}(\tau(b, c)) && (\tau \text{ definitsioon})\\
&= \beta_{as}(b, c) && (\text{võrdus } \beta_{as} = \overline{\beta_{as}} \circ \tau)\\
&= ((as) \otimes b) \otimes c && (\beta_{as} \text{ definitsioon})\\
&= (a \otimes (sb)) \otimes c && (\text{tensoriaalsus ja korrutise } sb \text{ leidumine})\\
&= \beta_a(sb, c) && (\beta_a \text{ definitsioon})\\
&= \overline{\beta_a}(\tau(sb, c)) && (\text{võrdus } \beta_a = \overline{\beta_a} \circ \tau)\\
&= \overline{\beta_a}((sb) \otimes c) && (\tau \text{ definitsioon})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma(a, (sb) \otimes c) && (\gamma \text{ definitsioon}) \\
&= \gamma(a, s(b \otimes c)). && (\text{osalise polügooni } B \otimes_R C \ S\text{-toime})
\end{aligned}
$$

Järelikult, taas tänu tensorkorrutise definitsioonile 3.14, leidub üheselt määratud kujutus $\overline{\gamma}\colon A \otimes_S (B \otimes_R C) \to (A \otimes_S B) \otimes_R C$ nii, et $\gamma = \overline{\gamma} \circ \tau'$, kus $\tau'\colon A \times (B \otimes_R C) \to A \otimes_S (B \otimes_R C)$ on kanooniline sürjektsioon. Seega oleme saanud sellise kujutuse, et iga $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ korral

$$\overline{\gamma}(a \otimes (b \otimes c)) = \overline{\gamma}(\tau'(a, b \otimes c)) = \gamma(a, b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c.$$

Analoogiliselt saab näidata, et leidub kujutus $\overline{\mu}\colon (A \otimes_S B) \otimes_R C \to A \otimes_S (B \otimes_R C)$ nii, et iga $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ korral

$$\overline{\mu}((a \otimes b) \otimes c) = a \otimes (b \otimes c).$$

Paneme tähele, et $\overline{\gamma} \circ \overline{\mu}$ on hulga $(A \otimes_S B) \otimes_R C$ ühikteisendus ja $\overline{\mu} \circ \overline{\gamma}$ on hulga $A \otimes_S (B \otimes_R C)$ ühikteisendus. Järelikult $\overline{\mu}$ on bijektiivne kujutus ning võimegi võtta $\nu \coloneqq \overline{\mu}$.

Olgu nüüd $f\colon A_S \to A'_S$ osaliste polügoonide homomorfism. Vaatleme diagrammi

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes_S B) \otimes_R C \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "(f \otimes \mathrm{id}_B) \otimes \mathrm{id}_C"] & A \otimes_S (B \otimes_R C) \arrow[d, "f \otimes (\mathrm{id}_B \otimes \mathrm{id}_C)"] \\
(A' \otimes_S B) \otimes_R C \arrow[r, "\nu'"] & A' \otimes_S (B \otimes_R C)
\end{tikzcd}
$$

ja paneme tähele, et kui $(a \otimes b) \otimes c \in (A \otimes_S B) \otimes_R C$, siis

$$
\begin{aligned}
((f \otimes (\mathrm{id}_B \otimes \mathrm{id}_C)) \circ \nu)((a \otimes b) \otimes c) &= (f \otimes (\mathrm{id}_B \otimes \mathrm{id}_C))(\nu((a \otimes b) \otimes c)) \\
&= (f \otimes (\mathrm{id}_B \otimes \mathrm{id}_C))(a \otimes (b \otimes c)) \\
&= f(a) \otimes ((\mathrm{id}_B \otimes \mathrm{id}_C)(b \otimes c)) \\
&= f(a) \otimes (\mathrm{id}_B(b) \otimes \mathrm{id}_C(c)) \\
&= f(a) \otimes (b \otimes c)
\end{aligned}
$$

ning

$$
\begin{aligned}
(\nu' \circ ((f \otimes \mathrm{id}_B) \otimes \mathrm{id}_C))((a \otimes b) \otimes c) &= \nu'(((f \otimes \mathrm{id}_B) \otimes \mathrm{id}_C)((a \otimes b) \otimes c)) \\
&= \nu'(((f \otimes \mathrm{id}_B)(a \otimes b)) \otimes \mathrm{id}_C(c)) \\
&= \nu'((f(a) \otimes \mathrm{id}_B(b)) \otimes c) \\
&= \nu'((f(a) \otimes b) \otimes c)
\end{aligned}
$$

$$= f(a) \otimes (b \otimes c).$$

Seega diagramm kommuteerub ehk ν on loomulik esimese argumendi suhtes. Analoogiselt saame näidata, et ka diagrammid

$$\begin{tikzcd} {}_S B_R \arrow[d, "g"] & (A \otimes_S B) \otimes_R C \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_A \otimes g) \otimes \mathrm{id}_C"] & A \otimes_S (B \otimes_R C) \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes (g \otimes \mathrm{id}_C)"] \\ {}_S B'_R & (A \otimes_S B') \otimes_R C \arrow[r, "\nu''"] & A \otimes_S (B' \otimes_R C) \end{tikzcd}$$

ja

$$\begin{tikzcd} {}_R C \arrow[d, "h"] & (A \otimes_S B) \otimes_R C \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_B) \otimes h"] & A \otimes_S (B \otimes_R C) \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes (\mathrm{id}_B \otimes h)"] \\ {}_R C' & (A \otimes_S B) \otimes_R C' \arrow[r, "\nu'''"] & A \otimes_S (B \otimes_R C') \end{tikzcd}$$

kommuteeruvad. Järelikult on ν loomulik iga kolme muutuja järgi, nagu soovisimegi näidata. □

Paneme tähele, et bijektiivsed iga argumendi suhtes loomulikud teisendused on loomulikud isomorfismid kategoorias Set. Seega $(A \otimes_S B) \otimes_R C$ ja $A \otimes_S (B \otimes_R C)$ on loomulikult isomorfsed kategoorias Set.

Me saame tensorkorrutised $(A \otimes_S B) \otimes_R C$ ja $A \otimes_S (B \otimes_R C)$ muuta isomorfseteks ka osaliste polügoonidena, kui A või C on lisaks viisakad bipolügoonid. Selleks on vaja, et teoreemis 3.23 vaadeldud kujutus ν oleks vastavate osaliste polügoonide homomorfism.

Lause 3.24. *Olgu ${}_T A_S$ ja ${}_S B_R$ osalised viisakad bipolügoonid ning ${}_R C$ osaline vasakpoolne polügoon. Siis teoreemis 3.23 toodud kujutus ν on vasakpoolsete osaliste polügoonide T-isomorfism.*

TÕESTUS. Olgu ${}_T A_S$ ja ${}_S B_R$ osalised viisakad bipolügoonid ning ${}_R C$ osaline vasakpoolne bipolügoon. Vaatleme kujutust ν teoreemist 3.23. Olgu $t \in T$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ ja eeldame, et leidub korrutis $t((a \otimes b) \otimes c)$. See tähendab, et leiduvad korrutised ta ja $t(a \otimes b) = (ta) \otimes b$. Kehtib

$$t((a \otimes b) \otimes c) = (t(a \otimes b)) \otimes c = ((ta) \otimes b) \otimes c \in (A \otimes_S B) \otimes_R C.$$

Järelikult on olemas ka $t(a \otimes (b \otimes c))$ ja

$$\nu(t((a \otimes b) \otimes c)) = \nu(((ta) \otimes b) \otimes c) = (ta) \otimes (b \otimes c) = t(a \otimes (b \otimes c)) = t\nu((a \otimes b) \otimes c).$$

See tähendab, et ν on T-homomorfism. Kujutuse ν bijektiivsus on tõestatud teoreemis 3.23. $\square$

Analoogiliselt lausega 3.24 võime tõestada alljärgneva tulemuse.

Lause 3.25. *Kui ${}_RC_T$ ja ${}_SB_R$ on viisakad bipolügoonid ning A_S osaline parempoolne polügoon, siis kujutus ν on osaliste parempoolsete polügoonide T-isomorfism.*

Viimaks, võttes kokku laused 3.24 ja 3.25, saame, et kehtib ka järgmine lause.

Lause 3.26. *Olgu ${}_TA_S$, ${}_SB_R$ ja ${}_RC_P$ viisakad osalised bipolügoonid. Siis teoreemis 3.23 vaadeldud kujutus ν on (T,P)-bipolügoonide isomorfism.*

Seega ${}_T((A\otimes_S B)\otimes_R C)_P$ ja ${}_T(A\otimes_S (B\otimes_R C))_P$ on loomulikult isomorfsed kategoorias ${}_T\mathsf{PAct}_P$.

Nüüd toome sisse osaliste polügoonide tensorfunktorid.

Lause 3.27. *Olgu A_S parempoolne osaline polügoon. Siis*

$$A \otimes_S \_\_ \colon {}_S\mathsf{PAct} \to \mathsf{Set}$$

$$\begin{tikzcd} {}_SM \arrow[r] \arrow[d, mapsto, "g"] & A \otimes_S M \arrow[d, mapsto, "\mathrm{id}_A \otimes g"] \\ {}_SM' \arrow[r] & A \otimes_S M' \end{tikzcd}$$

on kovariantne funktor. Sama moodi on vasakpoolse osalise polügooni ${}_SM$ jaoks olemas kovariantne funktor

$$\_\_ \otimes_S M \colon \mathsf{PAct}_S \to \mathsf{Set}.$$

Lisaks, kui ${}_RA_S$ on viisakas osaline bipolügoon, saame funktori

$${}_RA \otimes_S \_\_ \colon {}_S\mathsf{PAct} \to {}_R\mathsf{PAct}$$

ning viisaka osalise bipolügooni ${}_SM_T$ korral funktori

$$\_\_ \otimes_S M_T \colon \mathsf{PAct}_S \to \mathsf{PAct}_T.$$

TÕESTUS. Olgu A_S parempoolne osaline polügoon. Tähistame diagrammiga antud eeskirja tähega F. On selge, et $F\colon \operatorname{Ob}({}_S\mathsf{PAct}) \to \operatorname{Ob}(\mathsf{Set})$ on kujutus. Näitame, et F on kovariantne funktor.

1. Iga morfismi $g \in \mathrm{Mor}_{{}_S\mathsf{PAct}}({}_SM, {}_SM')$ korral leidub homomorfismide tensorkorrutis

$$F(g) = \mathrm{id}_A \otimes g\colon A \otimes_S M \to A \otimes_S M',$$

mis on morfism kategoorias Set.

2. Olgu $f \in \mathrm{Mor}_{{}_S\mathsf{PAct}}({}_SM, {}_SM')$ ja $g \in \mathrm{Mor}_{{}_S\mathsf{PAct}}({}_SM', {}_SM'')$. Siis

$$F(g \circ f) = \mathrm{id}_A \otimes (g \circ f) = (\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A) \otimes (g \circ f) = (\mathrm{id}_A \otimes g) \circ (\mathrm{id}_A \otimes f) = F(g) \circ F(f).$$

3. Olgu ${}_SM \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{PAct})$. Siis

$$F(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{A \otimes_S M}\,.$$

Niisiis on F kovariantne funktor. Funktorit F tähistamegi $A \otimes_S \_$. Analoogiliselt on iga vasakpoolse osalise polügooni ${}_SM$ korral $\_ \otimes_S M$ kovariantne funktor.

Kui meil on osaline viisakas bipolügoon ${}_RA_S$ ning vasakpoolne osaline polügoon ${}_SM$, siis vastavalt lausele 3.21 on ${}_R(A \otimes_S M)$ osaline vasakpoolne polügoon. Seega saame vaadelda funktorit F kui kujutust $F\colon \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{PAct}) \to \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{PAct})$. Järelikult leidub funktor ${}_RA \otimes_S \_\colon {}_S\mathsf{PAct} \to {}_R\mathsf{PAct}$. Analoogiliselt on olemas ka funktor $\_ \otimes_S M_T\colon \mathsf{PAct}_S \to \mathsf{PAct}_T$ $\square$

Lauses 3.27 defineeritud funktoreid nimetame **tensorfunktoriteks**.

3.5 Osaliste polügoonide hom-funktor

Olgu S poolrühm ja ${}_RA_S \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{PAct}_S)$. Tähistame iga ${}_RB \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Pact})$ korral

$$\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RB) \coloneqq \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{PAct}}({}_RA_S, {}_RB).$$

Vastavalt definitsioonile 1.6 saame vaadelda mor-funktorit, mida nimetame **hom-funktoriks**,

$$\mathrm{Hom}({}_RA_S, \_)\colon {}_R\mathbf{PAct} \to \mathbf{Set},$$

mille iga ${}_RB, {}_RB' \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{PAct})$ korral defineerib diagramm

$$
\begin{tikzcd}
{}_RB \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RB) \arrow[d, "f\circ\_\_"] & \ni g \arrow[d, mapsto] & {}_RA_S \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"] & {}_RB \arrow[d, "f"] \\
{}_RB' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RB') & \ni f\circ g & & {}_RB'
\end{tikzcd}
.
$$

Lause 3.28. *Olgu R ja S poolrühmad ning ${}_RA_S$ osaline bipolügoon. Siis leidub kovariantne hom-funktor* $\mathrm{Hom}({}_RA_S, \_\_)\colon {}_R\mathsf{PAct} \to {}_S\mathsf{PAct}$.

TÕESTUS. Olgu ${}_RA_S \in {}_R\mathsf{PAct}_S$, ${}_RB \in {}_R\mathsf{PAct}$ ja $f \in \mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RB)$. Olgu $s \in S$ selline, et iga $a \in A$ korral leidub korrutis as. Siis defineerime osalise vasakpoolse S-toime hulgal $\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RB)$ nii, et $(sf)(a) := f(as)$. See tähendab, et korrutis sf leidub täpselt selliste $s \in S$ korral, mille puhul eksisteerib korrutis as iga $a \in A$ korral.

Tegu on tõepoolest osalise vasakpoolse S-toimega. Olgu $s, s' \in S$ sellised, et eksisteerivad homomorfismid $s'f$ ja $s'(sf)$. Siis iga $a \in A$ korral leiduvad korrutised as' ja as. Fikseerime $a \in A$. Siis leidub korrutis $as \in A$ ning eksisteerib ka korrutis $(as)s'$. Kuna A_S on osaline polügoon, siis järelikult on korrutis $a(ss')$ olemas ja $a(ss') = (as)s'$. Niisiis on $(ss')f$ defineeritud ning iga $a \in A$ korral

$$((ss')f)(a) = f(a(ss')) = f((as)s') = (s'f)(as) = (s(s'f))(a),$$

mis tähendab, et $(ss')f = s(s'f)$.

Järelikult $\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RB)$ on osaline vasakpoolne S-polügoon ja me saame vaadelda hom-funktorit $\mathrm{Hom}({}_RA_S, \_\_)\colon {}_R\mathsf{PAct} \to {}_S\mathsf{PAct}$. $\square$

3.6 Tensorfunktori ja hom-funktori kaasfunktorlus

Märgime ära, et ilmselt iga (R, S)-bipolügoon on osaline viisakas (R, S)-bipolügoon.

Lause 3.29. *Olgu R ja S poolrühmad, ${}_RA_S \in {}_R\mathsf{Act}_S$, ${}_SB \in {}_S\mathsf{PAct}$ ja ${}_RC \in {}_R\mathsf{PAct}$. Siis iga $a \in A$, $b \in B$ ja $f \in \mathrm{Hom}({}_SB, {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC)))$ korral kujutus*

$$\chi\colon \mathrm{Hom}({}_SB, {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC))) \to \mathrm{Hom}({}_R(A \otimes_S B), {}_RC)$$

$$\chi(f)(a \otimes b) = f(b)(a)$$

on bijektsioon.

TÕESTUS. Olgu R ja S poolrühmad ning ${}_RA_S \in {}_R\mathsf{Act}_S$, ${}_SB \in {}_S\mathsf{PAct}$ ja ${}_RC \in {}_R\mathsf{PAct}$. Näitame, et χ on korrektselt defineeritud. Vaatleme kujutust $\beta : A \times B \to C$, mis on defineeritud võrdusega

$$\beta(a, b) = f(b)(a)$$

iga $a \in A$ ja $b \in B$ korral. Kuna nii f kui $f(b)$ on kujutused, siis selline definitsioon on korrektne ja tulemuseks on tõesti kujutus. Näitame, et β on S-tensoriaalne. Olgu $a \in A$, $b \in B$, $s \in S$ sellised, et leiduvad korrutised as ja sb. Kuna $f \colon {}_SB \to {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC))$ on vasakpoolsete osaliste polügoonide homomorfism, siis leidub korrutis $sf(b)$ ja

$$sf(b) = f(sb). \tag{2}$$

Nüüd

$$\begin{aligned}
\beta(as, b) &= f(b)(as) && (\beta \text{ definitsioon})\\
&= (sf(b))(a) && (\text{osalise polügooni } \mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC)\ S\text{-toime})\\
&= f(sb)(a) && (\text{võrdus } (2))\\
&= \beta(a, sb). && (\beta \text{ definitsioon})
\end{aligned}$$

Siis defintsiooni 3.14 põhjal leidub üheselt määratud kujutus $\overline{\beta} \colon A \otimes_S B \to C$ nii, et $\beta = \overline{\beta} \circ \tau$, kus τ on kanooniline sürjektsioon. Paneme tähele, et $\chi(f) = \overline{\beta}$ ja järelikult $\chi(f)$ on korrektselt defineeritud. Olgu $r \in R$, $a \in A$ ja $b \in B$ sellised, et eksisteerib korrutis ra. Et

$$\begin{aligned}
\chi(f)(r(a \otimes b)) &= \chi(f)((ra) \otimes b) && (\text{osalise polügooni } {}_R(A \otimes_S B) \text{ toime})\\
&= f(b)(ra) && (\chi \text{ definitsioon})\\
&= r(f(b)(a)) && (f(b) \in \mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC))\\
&= r(\chi(f)(a \otimes b)), && (\chi \text{ definitsioon})
\end{aligned}$$

siis $\chi(f)$ on vasakpoolsete osaliste R-polügoonide homomorfism ehk

$$\chi(f) \in \mathrm{Hom}({}_R(A \otimes_S B), {}_RC).$$

Kokkuvõttes on χ korrektselt defineeritud.

Olgu nüüd $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}({}_SB, {}_S\,\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC)))$ sellised, et $\chi(f_1) = \chi(f_2)$. See tähendab, et iga $a \in A$ ja $b \in B$ korral

$$\chi(f_1)(a \otimes b) = \chi(f_2)(a \otimes b)$$

ehk

$$f_1(b)(a) = f_2(b)(a).$$

Kuna viimane võrdus kehtib iga a korral, siis saame sellest $f_1(b) = f_2(b)$. Samamoodi, kuna $f_1(b) = f_2(b)$ kehtib iga b korral, peab kehtima $f_1 = f_2$. Järelikult on kujutus χ injektiivne.

Viimaks näitame, et χ on sürjektiivne. Olgu $g \in \mathrm{Hom}({}_R(A \otimes_S B), {}_RC)$. Defineerime kujutuse

$$f\colon {}_SB \to {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC)),$$

kus iga $a \in A$ ja $b \in B$ korral

$$f(b)(a) = g(a \otimes b).$$

Olgu $r \in R$ selline, et leidub korrutis ra. Kuna g on vasakpoolsete osaliste polügoonide homomorfism, siis

$$f(b)(ra) = g((ra) \otimes b) = g(r(a \otimes m)) = rg(a \otimes m) = rf(b)(a).$$

Järelikult ka $f(b)$ on vasakpoolsete osaliste R-polügoonide homomorfism.

Oletame nüüd, et leidub korrutis sb. Kuna ${}_RA_S$ on bipolügoon, siis iga $s \in S$ korral on olemas korrutis as ning järelikult eksisteerib $sf(b)$ ja $(sf(b))(a) = f(b)(as)$ iga $a \in A$ korral. Järelikult

$$f(sb)(a) = g(a \otimes sb) = g(as \otimes b) = f(b)(as) = (sf(b))(a).$$

See tähendab, et f on homomorfism. Definitsiooni põhjal $\chi(f) = g$, seega kujutus f on kujutuse g originaal. Järelikult χ on sürjektiivne.

Et χ on injektiivne ja sürjektiivne, siis χ on bijektiivne. $\square$

Järgnevalt tõestame käesoleva bakalaureusetöö põhitulemuse. Näitame, et kovariantsed funktorid $\mathrm{Hom}({}_RA_S, \_\_)\colon {}_R\mathsf{PAct} \to {}_S\mathsf{PAct}$ ja ${}_RA \otimes_S \_\_\colon {}_S\mathsf{PAct} \to {}_R\mathsf{PAct}$ on teineteise kaasfunktorid.

Teoreem 3.30. *Olgu R ja S poolrühmad ning ${}_RA_S$ bipolügoon. Tensorfunktor ${}_RA \otimes_S \_\_\colon {}_S\mathsf{PAct} \to {}_R\mathsf{PAct}$ on kovariantse hom-funktori $\mathrm{Hom}({}_RA_S, \_\_)\colon {}_R\mathsf{PAct} \to {}_S\mathsf{PAct}$ vasakpoolne kaasfunktor.*

TÕESTUS. Olgu ${}_RA_S$ bipolügoon.Tähistame morfismide pere

$$\xi \coloneqq (\xi_{B,C})_{(B,C)\in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{PAct})\times \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{PAct})} \colon \quad \mathrm{Hom}({}_S\_\_, {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, \_\_))) \Rightarrow \mathrm{Hom}({}_R(A \otimes_S \_\_), {}_R\_\_),$$

kus iga ${}_SB \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{PAct})$ ja ${}_RC \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{PAct})$ korral $\xi_{B,C} \coloneqq \chi$, kus χ on defineeritud lause 3.29 sõnastuses. Lausest 3.29 teame, et pere ξ iga komponent on bijektsioon. Peame näitama, et ξ on loomulik nii esimese kui teise argumendi suhtes. Esiteks näitame, et ξ on (kontravariantselt) loomulik esimese argumendi suhtes. Fikseerime ${}_SB, {}_SD \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{PAct})$, ${}_RC \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{PAct})$ ja $f \colon {}_SB \to {}_SD$ ning näitame, et diagramm

$$\begin{tikzcd}
{}_SB \arrow[d, "f"] & \mathrm{Hom}({}_SB, {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC))) \arrow[r, "\xi_{B,C}"] & \mathrm{Hom}({}_R(A \otimes_S B), {}_RC) \\
{}_SD & \mathrm{Hom}({}_SD, {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC))) \arrow[u, "__\circ f"] \arrow[r, "\xi_{D,C}"] & \mathrm{Hom}({}_R(A \otimes_S D), {}_RC) \arrow[u, "__\circ(\mathrm{id}_A \otimes f)"']
\end{tikzcd}$$

kommuteerub. Selleks olgu $\varphi \in \mathrm{Hom}({}_SD, {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC)))$, $a \otimes b \in A \otimes_S B$. Siis

$$\begin{aligned}
(\xi_{B,C} \circ (__ \circ f))(\varphi)(a \otimes b) &= (\xi_{B,C}(\varphi \circ f))(a \otimes b) = (\chi(\varphi \circ f))(a \otimes b) = (\varphi \circ f)(b)(a) \\
&= \varphi(f(b))(a)
\end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned}
((__ \circ (\mathrm{id}_A \otimes f)) \circ \xi_{D,C})(\varphi)(a \otimes b) &= (__ \circ (\mathrm{id}_A \otimes f))(\xi_{D,C}(\varphi))(a \otimes b) \\
&= (__ \circ (\mathrm{id}_A \otimes f))(\chi'(\varphi))(a \otimes b) = (\chi'(\varphi) \circ (\mathrm{id}_A \otimes f))(a \otimes b) \\
&= \chi'(\varphi)((\mathrm{id}_A \circ f)(a \otimes b)) = \chi'(\varphi)(a \otimes f(b)) = \varphi(f(b))(a),
\end{aligned}$$

kus χ' on osalistele (bi)polügoonidele ${}_RA_S$, ${}_SD$ ja ${}_RC$ vastav bijektsioon lausest 3.29. Seega $\xi_{B,C} \circ (\_\_ \circ f) = (\_\_ \circ (\mathrm{id}_A \otimes f)) \circ \xi_{D,C}$, mis tõestab pere ξ loomulikkuse esimese argumendi suhtes.

Nüüd olgu lisaks ${}_RE$ vasakpoolne osaline R-polügoon ning $g \colon {}_RC \to {}_RE$ mingi morfism. Näitame, et diagramm

$$\begin{tikzcd}
{}_RC \arrow[d, "g"] & \mathrm{Hom}({}_SB, {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC))) \arrow[r, "\xi_{B,C}"] \arrow[d, "(g\circ__)\circ__"] & \mathrm{Hom}({}_R(A \otimes_S B), {}_RC) \arrow[d, "g\circ__"] \\
{}_RE & \mathrm{Hom}({}_SB, {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RE))) \arrow[r, "\xi_{B,E}"] & \mathrm{Hom}({}_R(A \otimes_S B), {}_RE)
\end{tikzcd}$$

kommuteerub ehk ξ on loomulik ka teise argumendi suhtes. Võtame homomorfismi $\psi \in \mathrm{Hom}({}_SB, {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, {}_RC)))$ ja $a \otimes b \in A \otimes_S B$. Siis

$$\begin{aligned}((g \circ \_) \circ \xi_{B,C})(\psi)(a \otimes b) &= ((g \circ \_)(\xi_{B,C}(\psi)))(a \otimes b) = ((g \circ \_)(\chi(\psi)))(a \otimes b) \\ &= (g \circ \chi(\psi))(a \otimes b) = g(\chi(\psi)(a \otimes b)) = g(\psi(b)(a))\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}(\xi_{B,E} \circ ((g \circ \_) \circ \_))(\psi)(a \otimes b) &= (\xi_{B,E}((g \circ \_) \circ \psi))(a \otimes b) = (\chi''((g \circ \_) \circ \psi))(a \otimes b) \\ &= ((g \circ \_) \circ \psi)(b)(a) = (g \circ \_)(\psi(b)(a)) = g(\psi(b)(a))\end{aligned}$$

kus χ'' on osalistele (bi)polügoonidele ${}_RA_S$, ${}_SB$ ja ${}_RE$ vastav bijektsioon lausest 3.29. Niisiis on ka see diagramm kommutatiivne ehk $(g \circ \_) \circ \xi_{B,C} = \xi_{B,E} \circ ((g \circ \_) \circ \_)$, mis tõestab pere ξ loomulikkuse teise argumendi suhtes. Järelikult on ξ loomulik isomorfism. Ilmselt ka pere

$$\xi^{-1} := ((\xi_{B,C})^{-1})_{(B,C) \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{PAct}) \times \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{PAct})} \colon \ \mathrm{Hom}({}_R(A \otimes_S \_), \_) \to \mathrm{Hom}(\_, {}_S(\mathrm{Hom}({}_RA_S, \_)))$$

on loomulik isomorfism, mistõttu kehtib adjunktsioon ${}_RA \otimes_S \_ \dashv \mathrm{Hom}({}_RA_S, \_)$. $\square$

Meenutame, et iga poolrühma saame vaadelda bipolügoonina üle iseenda. Seega saame teha eelmisest teoreemist huvipakkuva järelduse.

Järeldus 3.31. *Olgu R poolrühm. Tensorfunktor ${}_RR \otimes_R \_ \colon {}_R\mathsf{PAct} \to {}_R\mathsf{PAct}$ on kovariantse hom-funktori $\mathrm{Hom}({}_RR_R, \_) \colon {}_R\mathsf{PAct} \to {}_R\mathsf{PAct}$ vasakpoolne kaasfunktor.*

Kirjandus

[1] Adámek, J., Herrlich, H. & Strecker, G. E. (2004). *Abstract and Concrete Categories.* University of Bremen.

[2] Anderson, F. W. & Fuller, K. R. (1974). *Rings and Categories of Modules.* Springer-Verlag New York Inc. New York.

[3] Araújo, I. M., Branco, M. J. J., Fernandes, V. H. & Gomes, G. M. S. (2004). *Semigroups and Languages.* World Scientific Publishing Co Pte Ltd. Singapur.

[4] Exel, R. (1998). *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups.* Proceedings of the AMS. **126**, 3481–3494.

[5] Hollings, C. (2007). *Partial actions of monoids.* Semigroup Forum. **75**, 293–316.

[6] Howie, J. M. (1995) *Fundamentals of Semigroup Theory.* Clarendon Press. Oxford.

[7] Kaarli, K. (1989). *Sissejuhatus universaalalgebrasse.* Tartu Riiklik Ülikool. Tartu.

[8] Kilp, M. (1998). *Algebra II.* Eesti Matemaatika Selts. Tartu.

[9] Kilp, M. (2000). *Kategooriateooria.* Eesti Matemaatika Selts. Tartu.

[10] Kilp, M., Knauer, U. & Mikhalev, A. (2000). *Monoids, Acts and Categories.* De Gruyter expositions in mathematics. New York.

[11] Laan, V., Reimaa, Ü. & Tart, L. (2021). *Morita equivalence of finite semigroups.* Semigroup Forum. **102**, 842–860.

[12] Megrelishvili, M. & Schröder, L. (2004) *Globalization of Confluent Partial Actions on Topological and Metric Spaces.* Topology and Applications. **145**, 119–145.

[13] Väljako, K. (2018), *Monomorfismid moodulite kategoorias.* Magistritöö. Tartu.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Heleen Saarse,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Osaliste polügoonide tensorkorrutis“, mille juhendaja on Kristo Väljako, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Heleen Saarse

10.05.2022