Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Urmas Luhaäär

Kvantaalide laiendid

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Valdis Laan

Tartu 2022

Kvantaalide laiendid

Bakalaureusetöö

Urmas Luhaäär

Lühikokkuvõte

Antud bakalaureusetöös uurime kvantaalide laiendeid. Tõestame kolm põhitulemust. Esiteks kui meil on mingi faktoriseeruv kvantaal Q, siis mistahes maatrikskvantaal üle Q on Q laiend. Teiseks mistahes ühikuga Reesi maatrikskvantaal üle ühikuga kvantaali Q on tema laiend. Kolmadaks kaks faktoriseeruvat kvantaali omavad ühist laiendit parajasti siis kui nad on Morita ekvivalentsed.

Nende teoreemide tõestamiseks kasutame kvantaalmaatrikseid ja mooduleid ning kvantaalide Morita teooriat.

Tulemuste ja nende tõestuste ideed on võetud ringiteooriast ning kohandatud kvantaalidele.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: algebra, maatriksid (mat.), moodulid (mat.), poolrühmad (mat.), võred (mat.).

Enlargements of quantales

Bachelor thesis

Urmas Luhaäär

Abstract

In this bachelor thesis we study the enlargements of quantales. We prove three main results. Firstly that if Q is a factorizable quantale then any matrix quantale over Q is an enlargement of Q. Secondly that any unital Rees matrix quantale over a quantale Q with identity element is an enlargement of Q. Thirdly that two quantales have a joint enlargement if and only if they are Morita equivalent.

To prove these theorems we use quantale matrices and modules and some Morita theory of qunatales.

The the main theorems and their proofs come from ring theory and are modified for quantales.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Key Words: algebra, matrices (math.), modules (math.), semigroups (math.), lattices (math.).

Sisukord

Sissejuhatus

Esimesena käsitles teooriat, mida me tänapäeval tunneme Morita teooriana, jaapani matemaatik Kiiti Morita, kes defineeris aastal 1958 ühikelemendiga rinigde Morita ekvivalentsuse. Kaks ühikelemendiga ringi on Morita ekvivalentsed kui nende unitaarste parempoolsete moodulite kategooriad on ekvivalentsed.

Tänaseks päevaks on uuritud ka paljude teiste struktuuride Morita ekvivalentsust. Näiteks on seda tehtud ühikuta ringide, monoidide, poolrühmade, järjestatud poolrühmade ja kvantaalide jaoks.

Selles bakalaureusetöös me uurime struktuure, mida kutsutakse kvantaalideks. Kvantaali mõiste tõi sisse Mulvey [18]. Kvantaalid on mõneti sarnased ühikuta (pool)ringidega, sest ülemiste rajade võtmine ja liitmine on sarnaste omadustega ning käituvad korrutamisega samamoodi. Samas lõpmatute ülemiste rajade võtmine ei ole algebraline tehe klassikalises mõttes, sest traditsiooniliselt loetakse, et tehted on lõpliku aarsusega.

Ühikelemendiga kvantaalide Morita ekvivalentsust uuriti esmakordselt artiklis [1]. Hiljem on Jan Paseka arendanud Morita teooriat ka ühikuta kvantaalide jaoks, muuhulgas artiklites [9], [10] ja [11].

Antud bakalaureusetöös me defineerime kvantaalide jaoks laiendi mõiste sarnaselt poolrühmade ja ringide laienditega ning anname laiendite abil tarviliku ja piisava tingimuse kahe faktoriseeruva kvantaali Morita ekvivalentsuseks. Regulaarsete poolrühmade laiendid defineeriti esmakordselt artiklis [5]. Ringide jaoks on see mõiste sisse toodud artiklis [4]. Antud bakalaureuse töös defineerime vajaliku masinvärgi kvantaalide Morita teooriaga tegelemiseks, toome näiteid kvantaalide laienditest ning tõestame, millal on kahel faktoriseeruval kvantaalil ühine laiend.

Tõestatavad tulemused ja nende tõestused on ringiteoreetilise artikli [4] analoogid kvantaalide jaoks.

Vajaliku teooria kvantaalide ja nende tensorkorrutiste jaoks oleme võtnud peamiselt doktoritööst [14], kusjuures siinses töös oleme üritanud kategooriateooria sisse toomist vältida.

Esimese peatükis toome sisse vajaminevad mõisted ja tõestame mõned lihtsamad abitulemused. Teises peatükis näitame, kuidas konstrueerida antud kvantaalile laiendeid esiteks kvantaalmaatiksite kvantaalina ja teiseks Reesi maatrikskvantaalina. Kolmandas peatükis toome sisse kvantaalmoodulite tensorkorrtuised ja kvantaalide Morita kontekstid ning tõestame, et kaks faktoriseeruvat kvantaali omavad ühist laiendit parajasti siis kui nad on Morita ekvivalentsed.

1 Põhimõisted

Definitsioon 1.1. Olgu meil hulk G, millel on antud seos $\leqslant \subseteq G \times G$. Siis hulka G koos selle seosega nimetame **osaliselt järjestatud kulgaks**, kui

1. $\forall x \in G \; x \leqslant x$
2. $\forall x, y \in G \; x \leqslant y$ ja $y \leqslant x \implies x = y$
3. $\forall x, y, z \in G \; x \leqslant y$ ja $y \leqslant z \implies x \leqslant z$.

Definitsioon 1.2. Elementi $a \in G$ nimetatakse osaliselt järjestatud hulga G alamhulga X **ülemiseks rajaks**, kui iga $x \in X$ korral $x \leqslant a$ ja iga $b \in G$ korral kui iga $x \in X$ korral $x \leqslant b$, siis $a \leqslant b$. Alamhulga X ülemist raja tähistatakse $\bigvee X$ või $\sup X$. Duaalselt saab defineerida alamhulga X alumise raja $\bigwedge X$.

Definitsioon 1.3. ([3]) Osaliselt järjestatud hulka G nimetame **täielikuks võreks**, kui iga $X \subseteq G$ korral leidub $\sup X = \bigvee_{x \in X} x$ ja $\inf X = \bigwedge_{x \in X} x$.

Definitsioon 1.4. Olgu G ja T täielikud võred. Siis kujutust $f \colon G \to T$ nimetame **täielike võrede homomorfismiks**, kui iga $X \subseteq G$ korral $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$ ja $f(\bigwedge X) = \bigwedge f(X)$.

Definitsioon 1.5. Olgu G täielik võre. Siis G alamhulka A nimetame G **täielikuks alamvõreks**, kui iga A alamhulga X korral $\bigvee X \in A$ ja $\bigwedge X \in A$.

Antud töös tegeleme sup-võredega, mis on võred, kus leiduvad ülemised rajad kõikidest hulkadest. Sup-võrede definitsioon ja omadused on võetud doktoritööst [14].

Definitsioon 1.6. Osaliselt järjestatud hulka G nimetame **sup-võreks**, kui iga $X \subseteq G$ korral leidub ülemine raja $\sup X = \bigvee X = \bigvee_{x \in X} x$.

Definitsioon 1.7. Olgu G ja T sup-võred. Siis kujutust $f \colon G \to T$ nimetame **sup-võrede homomorfismiks** (või sup-võrede morfismiks), kui mistahes $X \subseteq G$ korral $f(\bigvee G) = \bigvee f(G)$.

Definitsioon 1.8. Olgu G sup-võre. Siis G alamhulka A nimetame G **alamsup-võreks** kui iga A alamhulga X korral $\bigvee X \in A$.

Tuleb välja, et sup-võre definitsioon on samaväärne täieliku võre omaga, kuid neil kahel mõistel peab vahet tegema, sest sup-võrede homomorfism (alamsup-võre) ei pruugi olla täielike võrede homomorfism (täielik alamvõre).

Lause 1 ([3])**.** *Kui järjestatud hulgas G leiduvad kõik ülemised rajad, siis leiduvad ka kõik alumised rajad.*

Tõestus. Olgu $X \subseteq G$. Olgu $Y = \{y \in G \mid \forall x \in X \colon y \leqslant x\}$. Tõestame, et $\bigvee Y = \bigwedge X$. Ilmselt iga $x \in X$ korral $\bigvee Y \leqslant x$ s.t. $\bigvee Y$ on hulga X alumine tõke. See on ka suurim alumine tõke, sest kui $z \leqslant x$ iga $x \in X$ korral, siis Y definitsiooni kohaselt $z \in Y$, mistõttu $z \leqslant \bigvee Y$. □

Vaba sup-võret on meil vaja tensorkorrutiste defineerimise jaoks. Kui X on hulk, siis $\mathcal{P}(X)$ tähistab tema kõigi alamhulkade hulka.

Lause 2. *Olgu X mingi hulk. Siis osaliselt järjestatud hulk $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ on vaba sup-võre selles mõttes, et kui $i\colon X \to \mathcal{P}(X), x \mapsto \{x\}$ on loomulik sisestus ja Y suvaline sup-võre, siis iga kujutuse $f\colon X \to Y$ jaoks leidub üheselt määratud sup-võrede homomorfism $h\colon \mathcal{P}(X) \to Y$ nii, et $hi = f$, s.t. järgime diagramm kommuteerub.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Tõestus. Lihtne on näha, et $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ on sup-võre, kus ülemisteks rajadeks on ühendid. Olgu $A \subseteq X$. Defineerime

$$h(A) = \bigvee_{a \in A} f(a).$$

Näitame esiteks, et h on sup-võrede homomorfism. Selleks olgu meil mingi hulk I ja iga $i \in I$ korral $U_i \subseteq X$. Siis

$$h(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigvee_{u \in \bigcup_{i \in I} U_i} f(u) = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{u_i \in U_i} f(u_i) = \bigvee_{i \in I} h(U_i).$$

Järgmisena tõestame võrduse $hi = f$. Olgu $x \in X$. Siis

$$(hi)(x) = h(\{x\}) = \bigvee_{x \in \{x\}} f(x) = f(x).$$

Viimasena näitame h ühesuse. Olgu meil mingi teine sup-võrede homomorfism $g\colon \mathcal{P}(X) \to L$, mis rahuldab võrdust $gi = f$. Olgu meil mingi suvaline $A \subseteq X$. Siis

$$\begin{aligned}
g(A) &= g(\bigcup_{a \in A} \{a\}) \\
&= \bigvee_{a \in A} g(\{a\}) \\
&= \bigvee_{a \in A} g(i(a)) \\
&= \bigvee_{a \in A} f(a) \\
&= h(A)
\end{aligned}$$

Kuna g viib suvalise $\mathcal{P}(X)$ elemendi samaks Y elemendiks mis h, siis on need funktsioonid võrdsed. $\square$

Defineerime sup-võrede kongruentsid ja faktorid samamoodi nagu need on defineeritud universaalalgebrate jaoks raamatus [2]. Märgime, et sup-võred ei ole universaalalgebrad, sest ülemine raja lõpmatul hulgal ei ole algebraline tehe.

Definitsioon 1.9. Olgu X sup-võre. Siis ekvivalentsusseost ρ hulgal X nimetame **kongruentsiks**, kui mistahes hulga I ja elementide $x_i, y_i \in X$, kus $i \in I$, korral kehtib implikatsioon

$$(\forall i \in I \; x_i \rho y_i) \implies \left(\bigvee_{i \in I} x_i \right) \rho \left(\bigvee_{i \in I} y_i \right).$$

Tekkivat faktorhulka tähistame kui X/ρ ja elemendi $x \in X$ ekvivalentsiklassi kui $\overline{x}$.

Lause 3. *Olgu U ja V sup-võred ning olgu $f \colon U \to V$ sup-võrede homomorfism. Siis homomorfismi f* ***tuum*** *ehk seos*

$$\ker f = \{(x, y) \in U^2 | f(x) = f(y)\}$$

on kongruents

Tõestus. Olgu I hulk ja iga $i \in I$ jaoks $x_i, y_i \in U$ sellised, et $(x_i, y_i) \in \ker f$. See on samaväärne sellega, et $f(x_i) = f(y_i)$ iga $i \in I$ korral. Seega ka $\bigvee_{i \in I} f(x_i) = \bigvee_{i \in I} f(y_i)$. □

Lause 4. *Kui meil on sup-võre X ja selle kongruents ρ, siis sup-võre X ekvivalentsiklassid ρ järgi moodustavad sup-võre kui ülemine raja defineerida esindajate abil: $\bigvee_{i \in I} \overline{x_i} = \overline{\bigvee_{i \in I} x_i}$.*

Tõestus. Peame veenduma definitsiooni korrektsuses. Olgu I hulk ja olgu $x_i, y_i \in X$ sellised, et $\overline{x_i} = \overline{y_i}$(ehk $x_i \rho y_i$) iga $i \in I$ korral. Siis sellest, et ρ on kongruents järeldub, et

$$\left(\bigvee_{i \in I} x_i \right) \rho \left(\bigvee_{i \in I} y_i \right) \iff \overline{\bigvee_{i \in I} x_i} = \overline{\bigvee_{i \in I} y_i}.$$

□

Järgnev lause on klassikalise homomorfismiteoreemi üldistus.

Lause 5. *Olgu X ja Y sup-võred ja olgu ρ kongruents sup-võrel X. Olgu $f \colon X \to Y$ sup-võrede homomorfism. Kui $\rho \subseteq \ker f$, siis kujutus $g \colon X/\rho \to Y$, $\overline{x} \mapsto f(x)$ on korrektselt defineeritud ja sup-võrede homomorfism s.t. kui π on loomulik projektsioon faktorhulgale, on järgmine diagramm kommutatiivne.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\rho \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Tõestus. Olgu $x, z \in X$ sellised, et $\overline{x} = \overline{z}$, s.t. $x\rho z$. Siis kuna $\rho \subseteq \ker f$, kehtib

$$(x, z) \in \rho \implies (x, z) \in \ker f \implies f(x) = f(z) \implies g(x) = g(z).$$

Oleme näidanud, et g definitsioon on korrektne.

Nüüd kui meil, on mingi hulk I ja $x_i \in X$ iga $i \in I$ korral, siis

$$g(\bigvee_{i\in I} \overline{x_i}) = g(\overline{\bigvee_{i\in I} x_i}) = f(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} f(x_i) = \bigvee_{i\in I} g(\overline{x_i}).$$

Näeme, et g on sup-võrede homomorfism.

Lõpuks näitame, et diagamm on kommutatiivne. Selleks olgu meil $x \in X$. Siis

$$g(\pi(x)) = g(\overline{x}) = f(x).$$

□

Lause 6. *Kui X on sup-võre ja on antud mingi seos $\rho \subseteq X \times X$, siis leidub vähim sup-võre kongruents, mis sisaldab seost ρ. Seda kongruentsi nimetatakse seose ρ poolt **genereeritud** või **tekitatud** kongruentsiks.*

Tõestus. Näitame esiteks, et mistahes kongruentside ühisosa on kongruents. Olgu I mingi hulk ja olgu meil kongruentsid ρ_i.

Kuna iga kongruents on ekvivalentsusseos, on meil ühisosa ekvivalentsusseostest, mis on ekvivalentsusseos.

Olgu meil mingi hulk J ja mingid elemendid $x_j, y_j \in X, j \in J$ nii, et iga $i \in I$ korral $x_j \sigma_i y_j$. Kuna iga i korral ρ_i on kongruents, kehtib iga $i \in I$ korral $(\bigvee_{j\in J} x_j)\rho_i(\bigvee_{j\in J} y_j)$, mida oligi tarvis.

Olgu nüüd S, kõikigi selliste kongruentside hulk, mis sisaldavad seost ρ. Siis $\kappa = \bigcap_{\sigma\in S} \sigma$ on mittetühi, sest ρ sisaldub igas kongruentsis $\sigma \in S$. Seos κ on kongruents, mis sisaldab endas kongruentsi ρ, kuna iga ühisosas olev kongruents sisaldab kongruentsi ρ. Kuna κ sisaldub igas kongruentsis, milles sisaldub ρ, on see vähim kongruents, mis sisaldab kongruentsi ρ.

□

Ka kvantaalidega seotud mõisted on võetud doktoritööst [14].

Definitsioon 1.10. Kvantaal (ingl. k. *quantale*) on sup-võre Q koos assotsiatiivse kahekohalise tehtega $* : Q \times Q \longrightarrow Q$ (mida kutsume kvantaali korrutamiseks), mis rahuldab järgmisi distributiivsuse tingimusi:

$$a * \left(\bigvee_{i\in I} b_i\right) = \bigvee_{i\in I}(a * b_i) \quad \text{ja} \quad \left(\bigvee_{i\in I} b_i\right) * a = \bigvee_{i\in I}(b_i * a)$$

mistahes indeksite hulga I ja elementide $a, b_i \in Q$, $i \in I$ korral.

Edaspidi, kui segadust ei teki, jätame korrutamise märgi ära ja kirjutame lihtsalt kaks tegurit kõrvuti.

Definitsioon 1.11. Olgu Q kvantaal ja $S \subseteq Q$. Siis hulka S nimetame kvantaali Q **alamkvantaaliks**, kui ta on kinnine suvaliste ülemiste rajade suhtes ja kinnine korrutamise suhtes.

Definitsioon 1.12. Ütleme, et kvantaal Q on **ühikelemendiga kvantaal**, kui leidub selline element $1 \in Q$, et iga $q \in Q$ korral $1 * q = q * 1 = q$.

Definitsioon 1.13. Nimetame kahte kvantaali **isomorfseteks**, kui nende vahel leidub bijektiivne kujutus, mis säilitab ülemisi rajasid ja korrutamist (**isomorfism**). Ühikuga kvantaale nimetatakse **isomorfseteks**, kui nende vahel leidub isomorfism, mis säilitab ka Ühikelementi.

Kvantaalide laiendid defineerime analoogina poolrühmade ja ringide laienditele (vt [5] ja [4]).

Definitsioon 1.14. Olgu Q kvantaal. Kahe Q alamkvantaali S ja R **korrutiseks** nimetame hulka

$$SR = \{\vee_{i \in I} s_i * r_i \mid I \text{ on mistahes hulk}, \forall i \in I\ s_i \in S, r_i \in R\}.$$

Analoogilist tähistust kasutame ka kolme või enama alamhulga korral.

Märgime, et kuna iga SR element kuulub hulka Q, siis on SR hulk.

Definitsioon 1.15. Ütleme, et kvantaal Q on kvantaali R' **laiend**, kui leidub kvantaaliga R' isomorfne kvantaali Q alamkvantaal R nii, et

$$Q = QRQ \quad \text{ja} \quad R = RQR.$$

Definitsioon 1.16. Ütleme, et kvantaal Q on **faktoriseeruv**, kui $Q = Q^2$, s.t. iga $q \in Q$ jaoks leidub hulk I ja iga $i \in I$ jaoks $a_i, b_i \in Q$ nii, et $q = \bigvee_{i \in I} a_i b_i$.

Lemma 1. *Ühikelemendiga kvantaal on faktoriseeruv.*

Tõestus. Olgu meil kvantaal Q. Kuna kvantaal on korrutamise ja ülemiste rajade suhtes kinnine, on sisalduvus $Q^2 \subseteq Q$ selge. Teistpidi sisalduvuseks olgu meil $q \in Q$. Märkame, et $q = q * 1 \in Q^2$. $\square$

Lemma 2. *Kvantaalide isomorfism säilitab faktoriseeruvuse.*

Tõestus. Olgu $\varphi \colon A \to B$ kvantaalide isomorfism. Olgu A faktoriseeruv. Näitame, et ka B seda on. Sisalduvus $B^2 \subseteq B$ on selge. Olgu meil $b \in B$, siis $\varphi^{-1}(b) \in A$. Seega $\varphi^{-1}(b) = \bigvee_{i \in I} u_i v_i$, kus I on hulk ning $u_i, v_i \in A$ iga $i \in I$ korral. Rakendame isomorfismi φ mõlemale poole ja saame $b = \varphi(\bigvee_{i \in I} u_i v_i) = \bigvee_{i \in I} \varphi(u_i)\varphi(v_i)$, kus $\varphi(u_i), \varphi(v_i) \in B$ iga $i \in I$ korral, seega ka $B \subseteq B^2$. $\square$

Lause 7. *Igas kvantaalis Q kehtib $q\bot = \bot q = \bot$.*

Tõestus. Tõepoolest

$$q\bot = q\left(\bigvee \emptyset\right) = \bigvee_{x \in \emptyset} qx = \bigvee \emptyset = \bot.$$

Sarnaselt $\bot = \bot q$. $\square$

Lemma 3. *Faktoriseeruva kvantaali laiend on faktoriseeruv.*

Tõestus. Olgu Q faktoriseeruv kvantaal ja olgu R tema laiend. Siis kvantaalis R leidub isomorfne koopia kvantaalist Q s.t. võime üldisust kitsendamata eeldada, et Q on R alamkvantaal.

Nüüd $RR \subseteq R$ ja $R = RQR \subseteq RRR \subseteq RR$. □

Definitsioon 1.17. ([17]) Olgu meil kvantaal Q ja mittetühjad hulgad U ja V. Siis kujutust

$$A : U \times V \longrightarrow Q, \quad (u, v) \mapsto A_{u,v}$$

nimetame $U \times V$**-kvantaalmaatriksiks**.

Kõigi selliste kvantaalmaatriksite hulka tähistame $\mathrm{Mat}_{U,V}(Q)$ või $\mathrm{Mat}_U(Q)$ kui $U = V$.

Olgu $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Mat}_{U,V}(Q)$ ning olgu A $U \times V$-kvantaalmaatriks ja B $V \times T$-kvantaalmaatriks. Kvantaalmaatriksite jaoks saab defineerida ülemise raja punktiviisi, ehk kui

$$\left(\bigvee_{S \in \mathcal{S}} S \right)_{x,y} = \bigvee_{S \in \mathcal{S}} S_{x,y}, \tag{1}$$

korrutamise sarnaselt tavalistele maatriksitele kui

$$(AB)_{x,y} = \bigvee_{v \in V} (A_{x,v} B_{v,y})$$

ja konstandiga vasakult korrutamise kui

$$(qA)_{x,y} = qA_{x,y}.$$

Analoogselt defineerime ka paremalt konstandiga korrutamise.

2 Kvantaalide laiendid

Olgu Q kvantaal, U ja V hulgad, $u \in U$, $v \in V$ ja $a \in Q$. Tähistagu siis $A_{u,v}(a)$ sellist $U \times V$ maatriksit, kus kohal (u, v) on element a ja mujal $\perp$.

Lemma 4. *Olgu Q kvantaal ning olgu U, V ja W mittetühjad hulgad. Siis*

$$A_{u,v}(a)A_{v,w}(b) = A_{u,w}(ab).$$

Tõestus. Kirjutame maatriksid välja koordinaaditi ja rakendame korrutamise definitsiooni:

$$(A_{u,v}(a)A_{v,w}(b))_{x,y} = \bigvee_{i \in V} (A_{u,v}(a))_{x,i}(A(b)_{v,w})_{i,y}.$$

Kui $x \neq u$ või $y \neq v$, siis tuleb kohale xy element $\perp$, sest meil on ülemine raja korrutistest, kusjuures igas korrutises vähemalt üks element on võrdne elemendiga $\perp$ ja seega võtame ülemist raja vähimatest elementidest, mis on vähim element.

Kui $x = u$ ja $y = v$, siis on meil ülemine raja elemendist ab ja korrutistest, milles vähemalt üks tegur on $\perp$. Võtame ülemise raja vähimatest elementidest ja elemendist ab, mis on ab. □

Lemma 5. *Olgu Q kvantaal ja olgu U, V, S, T mittetühjad hulgad. Olgu B mingi $V \times S$ kvantaalmaatriks. Siis*

$$A_{u,v}(a)BA_{s,t}(c) = A_{u,t}(aB_{v,s}c),$$

kus $A_{u,v}(a)$ on $U \times V$ ja $A_{s,t}(c)$ on $S \times T$ kvantaalmaatriksid.

Tõestus. Arvutame korrutise $A_{u,v}(a)BA_{s,t}(c)$. Vaatame esiteks parempoolset korrutist $BA_{s,t}(c)$. Kohal i, j on see

$$(BA_{s,t}(c))_{i,j} = \bigvee_{l \in U} B_{i,l}A_{s,t}(c)_{l,j}.$$

Näeme, et kui $j \neq t$, siis on tegemist vähima elemendiga, kuna tekib ülemine raja korrutistest, kus igas on vähemalt üks tegur $\perp$ ja saame ülemise raja vähimatest elementidest. Kui nüüd $j = t$, siis kohal i, t on element $B_{i,t}c$, sest $A_{s,t}(c)_{s,t} = c$,kõik ülejäänud elemendid tulevad vähimad elemendid, nende korrutised B elementidega tulevad vähimad ja ülemine raja tuleb kokkuvõttes $B_{i,t}c$. Korrutades seda vasakult maatriksiga $A_{u,v}(a)$, saame kohale i, j analoogselt eelnevaga vähima elemendi kui $i \neq u$, kohale u, v saame $aB_{v,s}c$ ning $j \neq t$ korral vähima elemendi kohale u, j, sest maatriksis $BA_{s,t}(c)$ on kohal j, t $j \neq t$ alati vähim element. □

Teoreem 1. *Kui Q on faktoriseeruv kvantaal, siis on $R := \mathrm{Mat}_U(Q)$ kvantaali Q laiend.*

Tõestus. Olgu $q \in Q$ ja $u, v \in U$.

Fikseerime $k \in U$ (U on mittetühi). Näitame esiteks, et hulk

$$Q' = \{A_{k,k}(q) | q \in Q\}$$

on kvantaali R alamkvantaal. Kõigepealt näitame, et ta on kinnine suvaliste ülemiste rajade suhtes. Selleks olgu meil mingi Q' alamhulk S. Iga $s \in S$ korral võime kirjutada $s = A_{k,k}(q_s)$. Saame

$$(\bigvee S)_{i,j} = \bigvee_{s \in S} (A_{k,k}(q_s))_{i,j}.$$

Kuna ülemisi rajasid võetakse punktiviisi, siis kohale k, k saame $\bigvee_{s \in S} q_s$ ja mujale $\bigvee_{s \in S} \perp = \perp$. Näeme, et tulemuseks on $A_{k,k}(\bigvee_{s \in S}(q_s)) \in Q'$.

Kuna $A_{k,k}(q_1)A_{k,k}(q_2) = A_{k,k}(q_1 q_2)$, siis on Q' ka korrutamise suhtes kinnine.

Eelnevast on näha, et $\varphi\colon Q \to Q', q \mapsto A_{k,k}(q)$ on kvantaalide homomorfism. On selge, et see on sürjektiivne (definitsiooni põhjal) ja injektiivne (kaks maatriksit on võrdsed parajasti siis kui nad on koordinaaditi võrdsed). Näeme, et $Q \cong Q'$. Seega on ka Q' faktoriseeruv.

Tõestame nüüd, et $R = RQ'R$. Sisalduvus $RQ'R \subseteq R$ on selge, kuna R on kinnine korrutamise suhtes. Sisalduvuse $R \subseteq RQ'R$ näitamiseks piisab tõestada, et iga $u, v \in U$ ja iga $q \in Q$ korral $A_{u,v}(q) \in RQ'R$, sest iga $B \in R$ korral

$$B = \bigvee_{u,v \in U} A_{uv}(B_{uv}).$$

Eelnev valem kehtib, sest punktiviisi ülemisi rajasid võttes saame, et kohal uv on meil B_{uv} ülemine raja vähimate elementidega.

Kvantaali Q faktoriseeruvust kaks korda ja distributiivsust rakendades saame, et iga $q \in Q$ korral $q = \bigvee_{i \in I} a_i b_i c_i$, kus I on mingi hulk ja $a_i, b_i, c_i \in Q$. Siit

$$\begin{aligned}
\bigvee_{i \in I} A_{u,k}(a_i)A_{k,k}(b_i)A_{k,v}(c_i) &= \bigvee_{i \in I} A_{u,k}(a_i)A_{k,v}(b_i c_i) && \text{(lemma 4)}\\
&= \bigvee_{i \in I} A_{u,v}(a_i b_i c_i) && \text{(lemma 4)}\\
&= A_{u,v}(\bigvee_{i \in I} a_i b_i c_i) && \text{(def. (1))}\\
&= A_{u,v}(q).
\end{aligned}$$

Näitame nüüd, et kehtib $Q' = Q'RQ'$. Näeme, et iga $a, c \in Q$ ja $B \in R$ korral kehtib lemma 5 kohaselt

$$A_{k,k}(a)BA_{k,k}(c) = A_{k,k}(aB_{k,k}c).$$

Nüüd on sisalduvus $Q'RQ' \subseteq Q'$ ilmne ja teistpidine tuleb Q' faktoriseeruvusest. $\square$

Reesi maatrikskvantaalid ja nendega seotud mõisted oleme üldistanud ringiteooriast (vt [4]).

Definitsioon 2.1. Olgu Q kvantaal. Olgu meil mittetühjad hulgad U ja V ja olgu P $V \times U$ kvantaalmaatriks. Siis **Reesi maatrikskvantaaliks** $\mathcal{M}(Q; U, V; P)$ nimetatakse kõigi $U \times V$ kvantaalmaatriksite hulka üle Q, kus ülemine raja defineeritakse samamoodi nagu kvantaalmaatriksitel ja korrutamine eeskirjaga

$$X \circ Y = XPY.$$

Lause 8. *Reesi maatrikskvantaal on kvantaal.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{M}(Q;U,V,P)$ Reesi maatrikskvantaal. Ilmselt on tegemist täieliku võrega, kus on määratud assotsiatiivne korrutamine. Näitame, et see korrutamine on distributiivne ülemiste rajade suhtes. Olgu meil selleks indeksite hulk $I \subseteq \mathcal{M}(Q;U,V,P)$, iga $i \in I$ jaoks elemendid $Q_i \in \mathcal{M}(Q;U,V,P)$ ja $X \in \mathcal{M}(Q;U,V,P)$.

$$X \circ \bigvee_{i\in I} Q_i = XP \bigvee_{i\in I} Q_i = \bigvee_{i\in I}(XPQ_i) = \bigvee_{i\in I}(X \circ Q_i).$$

Teiselt poolt korrutamise puhul toimime analoogselt. $\square$

Definitsioon 2.2. Nimetame Reesi maatrikskvantaali $\mathcal{M}(Q;U,V;P)$ **ühikuga Reesi maatrikskvantaaliks**, kui Q on ühikelemendiga kvantaal ja maatriksis P on vähemalt ühel kohal ühikelement.

Märgime, et ühikuga Reesi maatrikskvantaalil ei pruugi olla ühikelementi korrutamise suhtes.

Teoreem 2. *Olgu Q ühikuga kvantaal. Siis on suvaline ühikuga Reesi maatrikskvantaal $\mathcal{M} := \mathcal{M}(Q;U,V;P)$ kvantaali Q laiend.*

Tõestus. Kuna $\mathcal{M}$ on ühikuga, siis leiduvad $x \in U$ ja $y \in V$ nii, et $P_{y,x} = 1$. Vaatame hulka

$$Q' = \{A_{x,y}(q) | q \in Q\}.$$

Näitame, et tegemist on kvantaali $\mathcal{M}$ alamkvantaaliga. Kõigepealt kuna ülemised rajad defineerisime sama moodi nagu kvantaalmaatriksite puhul, siis on ka nende kinnisuse tõestus analoogne.

Näitame kinnisust korrutamise suhtes. Olgu meil $A_{x,y}(q), A_{x,y}(p) \in Q'$. Siis

$$A_{x,y}(q) \circ A_{x,y}(p) = A_{x,y}(q)PA_{x,y}(p).$$

Lemmat 5 kasutades näeme, et

$$A_{x,y}(q)PA_{x,y}(p) = A_{x,y}(qP_{y,x}p) \in Q'.$$

Tõepoolest Q' on kvantaali $\mathcal{M}$ alamkvantaal.

Tõestame nüüd, et $Q' \cong Q$. Selleks näitame, et funktsioon

$$\varphi : Q \longrightarrow Q', \quad \varphi(q) = A_{x,y}(q)$$

on isomorfism. On selge, et tegu on bijektsiooniga. Peame näitama, et φ on kvantaalide homomorfism. Tõestame kõigepealt, et φ säilitab ülemised rajad:

$$\varphi\left(\bigvee_{i\in I} q_i\right) = A_{x,y}\left(\bigvee_{i\in I} q_i\right) = \bigvee_{i\in I} A_{x,y}(q_i) = \bigvee_{i\in I} \varphi(q_i).$$

Samuti näeme, et φ säilitab korrutamist:

$$\begin{aligned}
\varphi(ab) &= A_{x,y}(ab) \\
&= A_{x,y}(a1b) \\
&= A_{x,y}(aP_{y,x}b) \\
&= A_{x,y}(a)PA_{x,y}(b) \\
&= A_{x,y}(a) \circ A_{x,y}(b) \\
&= \varphi(a)\varphi(b).
\end{aligned}$$

Nüüd on veel tõestada võrdused $\mathcal{M} = \mathcal{M} \circ Q' \circ \mathcal{M}$ ja $Q' = Q' \circ \mathcal{M} \circ Q'$. Sisalduvus $\mathcal{M} \circ Q' \circ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ on ilmne. Sisalduvus $Q' \circ \mathcal{M} \circ Q' \subseteq Q'$ tuleb lemmast 5:

$$\begin{aligned}
\bigvee_{i\in I} A_{x,y}(a_i) \circ C_i \circ A_{x,y}(b_i) &= \bigvee_{i\in I} A_{x,y}(a_i)PC_iPA_{x,y}(b_i) \\
&= \bigvee_{i\in I} A_{x,y}(a_i(PCP)_{y,x}b_i) \\
&= A_{x,y}(\bigvee_{i\in I} a_i(PCP)_{y,x}b_i) \in Q'.
\end{aligned}$$

Näitame sisalduvuse $Q' \subseteq Q' \circ \mathcal{M} \circ Q'$. Olgu meil $A_{x,y}(q) \in Q'$. Siis

$$\begin{aligned}
A_{x,y}(1) \circ A_{x,y}(q) \circ A_{x,y}(1) &= A_{x,y}(1)PA_{x,y}(q)PA_{x,y}(1) \\
&= A_{x,y}(1P_{y,x}q)PA_{x,y}(1) \\
&= A_{x,y}(11q)PA_{x,y}(1) = A_{x,y}(q)PA_{x,y}(1) \\
&= A_{x,y}(qP_{y,x}1) = A_{x,y}(q11) = A_{x,y}(q).
\end{aligned}$$

Lõpuks tõestame sisalduvuse $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \circ Q' \circ \mathcal{M}$. Kuna kvantaal on kinnine ülemiste rajade suhtes ja neid võetakse punktiviisi, siis piisab kui tõestame, et suvaliste $u \in U$, $v \in V$ ja $q \in Q$ korral $A_{uv}(q) \in \mathcal{M} \circ Q' \circ \mathcal{M}$. Viimane kehtib, sest

$$A_{u,v}(q) = A_{u,y}(q)PA_{x,y}(1)PA_{x,v}(1) = A_{u,y}(q) \circ A_{x,y}(1) \circ A_{x,v}(1).$$

$\square$

3 Laiendid ja Morita ekvivalentsus

Kvantaalmoodulite ja nende tensorkorrutiste defineerimisel tugineme doktoritööle [14].

Definitsioon 3.1. Olgu Q kvantaal. Siis **vasakpoolseks Q-mooduliks** ehk **vasakpoolseks kvantaalmooduliks üle kvantaali** Q nimetatakse sup-võret M, mille jaoks on defineeritud **toime**

$$\star\colon Q \times M \to M,$$

$$(q, m) \mapsto q \star m,$$

mis rahuldab järgmiseid tingimusi:

1. $$\forall q_1, q_2 \in Q, \forall m \in M \ (q_1 q_2) \star m = q_1 \star (q_2 \star m),$$

2. toime on distributiivne ülemiste rajade võtmise suhtes, ehk kui meil on hulk $A \subseteq M$ ja hulk $B \subseteq Q$, siis iga $q \in Q$ ja $m \in M$ korral

$$q \star \bigvee_{a \in A} a = \bigvee_{a \in A} (q \star a),$$

$$\left(\bigvee_{b \in B} b \right) \star m = \bigvee_{b \in B} (b \star m),$$

Asjaolu, et M on vasakpoolne Q-moodul, väljendatakse kirjutades ${}_Q M$.

Kui segadust ei teki, jätame toime märgi $\star$ ära.

Analoogselt defineerime ka parempoolsed kvantaalmoodulid.

Definitsioon 3.2. Olgu Q ja R kvantaalid ning olgu M vasakpoolne Q-moodul ning parempoolne R-moodul, kusjuures vasakpoolset toimet tähistame sümboliga $\star_l$ ja parempoolset toimet sümboliga $\star_r$. Kui iga $q \in Q, r \in R$ ja $m \in M$ korral kehtib

$$(q \star_l m) \star_r r = q \star_l (m \star_r r),$$

siis ütleme, et M on **(Q, R)-bimoodul** ja kirjutame ${}_Q M_R$.

Sellist bimoodulit ${}_Q M_R$ nimetame **unitaarseks**, kui $QM = MR = M$, kus

$$QM = \{\vee_{i \in I} (q_i \star_l m_i) \mid I \text{ on mistahes hulk}, \forall i \in I \ q_i \in Q, m_i \in M\}$$

ja MR on defineeritud analoogselt.

Järgnevas jätame toime märgid ära kui segaust ei teki.

Lemma 6. *Kui ${}_Q M$ on kvantaalmoodul, siis iga $m \in M$ korral*

$$\bot_Q m = \bot_M.$$

Tõestus. Tõepoolest,

$$\perp_Q m = (\vee\emptyset)m = \bigvee_{q\in\emptyset}(qm) = \bigvee \emptyset = \perp_M.$$

$\square$

Definitsioon 3.3. Olgu N_Q ja ${}_QM$ Q-moodulid ja L sup-võre. Kujutust $f : N \times M \longrightarrow L$ nimetatakse **bimorfismiks**, kui

- $\bigvee_{i\in I} f(n_i, m) = f((\bigvee_{i\in I} n_i), m)$,
- $\bigvee_{i\in I} f(n, m_i) = f(n, \bigvee_{i\in I} m_i)$,
- $f(nq, m) = f(n, qm)$.

mistahes hulga I ja $n, n_i \in N_Q$, $m, m_i \in {}_QM$ korral.

Definitsioon 3.4. Olgu Q kvantaal. Olgu N ja M bimoodulid, kusjuures N on parempoolne Q-moodul ja M on vasakpoolne Q-moodul. Siis nende **tensorkorrutiseks** $N \otimes_Q M$ nimetatakse sup-võret $\mathcal{P}(N \times M)/\rho$, kus ρ on seose

$$\sigma = \left\{ \left(\left\{ \left(\bigvee A, y \right) \right\}, \bigcup_{a\in A} \{(a, y)\} \right) \middle| A \subseteq N, y \in M \right\} \bigcup$$
$$\left\{ \left(\left\{ \left(x, \bigvee B \right) \right\}, \bigcup_{b\in B} \{(x, b)\} \right) \middle| x \in N, B \subseteq M \right\} \bigcup$$
$$\{(\{(x \star q, y)\}, \{(x, q \star y)\}) | x \in N, y \in M, q \in Q\}$$

poolt genereeritud kongruents. Kuna $\mathcal{P}(M_1 \times M_2)$ on sup-võre ühendi suhtes, siis saame ülemised rajad tensorkorrutisel defineerida esindajate kaudu järgmiselt. Olgu I mingi hulk ja iga $i \in I$ korral $A_i \in \mathcal{P}(N \times M)$ siis vastavalt lausele 4 saame

$$\bigvee_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}.$$

Faktorhulga $\mathcal{P}(N \times M)/\rho$ elementideks on ρ-klassid. Sellist ρ-klassi, kuhu kuulub hulk $\{(x, y)\}$ hakkame edaspidi tähistama $x \otimes y$ ja nimetama **Q-tensoriks** või lihtsalt **tensoriks** kui on selge, mida mõeldakse. Kui $X \in \mathcal{P}(N \times M)$, siis tähistame X ρ-klassi ka kui $\overline{X}$. Tensorkorrutise $N \otimes_Q M$ igat elementi saame esitada kujul

$$\bigvee_{i\in I} x_i \otimes y_i,$$

Tõepoolest olgu meil mingi element $\overline{V} \in N \otimes_Q M$. Nüüd $V \subseteq N \times M$ kui hulk on ilmselt oma üheelemendiliste alamhulkade ühend s.t. $\overline{V} = \overline{\bigcup_{v\in V} \{v\}}$ ja iga $v \in V$ esitub kujul (n_v, m_v), kus $n_v \in N$ ja $m_v \in M$. Saame

$$\overline{V} = \overline{\bigcup_{v\in V} \{(n_v, m_v)\}} = \bigvee_{v\in V} \overline{\{(n_v, m_v)\}} = \bigvee_{v\in V} n_v \otimes m_v.$$

Olgu $x \in N$, $y \in M$ ja $q \in Q$ ning olgu $A \subseteq N$ ja $B \subseteq M$. Seose ρ definitsioonist järeldub, et tensorkorrutises $N \otimes_Q M$ kehtivad järgmised arvutusreeglid:

- $xq \otimes y = x \otimes qy$,
- $x \otimes \bigvee B = \bigvee_{b \in B} x \otimes b$,
- $\bigvee A \otimes y = \bigvee_{a \in A} a \otimes y$.

Kui N on (R, Q)-bimoodul, võime vasakpoolse $R-$toime tensorkorrutisel defineerida mooduli N toime abil:

$$r\left(\bigvee_{i \in I} x_i \otimes y_i\right) = \bigvee_{i \in I} (rx_i) \otimes y_i.$$

Saab näidata, et sellise toimega on $N \otimes_Q M$ vasakpoolne R-moodul. Analoogiliselt saab $N \otimes_Q M$ muuta parempoolseks Q-mooduliks, kui M on (Q, R)-bimoodul.

Tuleb välja, et tensorkorrutise võib ka defineerida läbi universaalomaduse. Saab tõestada, et niimodi defineeritud tensorkorrutis on isomorfne eespool antud definitsiooniga. Nõnda on tehtud näiteks doktoritöös [14].

Teoreem 3. *Olgu M_Q ja ${}_QN$ Q-moodulid ning X mingi sup-võre. Olgu $j\colon M \times N \to M \otimes_Q N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$. Siis iga bimorfismi $f\colon M \times N \to X$ jaoks leidub üheselt määratud sup-võrede morfism $h\colon M \otimes_Q N \to X$ nii, et $f = hj$.*

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_Q N \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
M \times N \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Tõestus. Kui meil on vaba sup-võre $\mathcal{P}(M \times N)$ baasiga $M \times N$, siis tänu lausele 2 saame kujutuse f laiendada sup-võrede morfismiks $g\colon \mathcal{P}(M \times N) \to X$.

Näitame, et $\rho \subseteq \ker g$, kus ρ ja σ on tensorkorrutise definitsioonis defineeritud seosed. Kuna kehtivad

$$\begin{aligned}
g(\{(\bigvee A, y)\}) &= f(\bigvee A, y) = \bigvee_{a \in A} f(a, y) = \bigvee_{a \in A} g(\{(a, y)\}) = g(\bigcup_{a \in A} \{(a, y)\}), \\
g(\{(x, \bigvee B)\}) &= f(x, \bigvee B) = \bigvee_{b \in B} f(x, b) = \bigvee_{b \in B} g(\{(x, b)\}) = g(\bigcup_{b \in B} \{(x, b)\}), \\
g(\{(xq, y)\}) &= f(xq, y) = f(x, qy) = g(\{(x, qy)\})
\end{aligned}$$

siis näeme, et $\sigma \subseteq \ker g$. Kuna ρ on vähim kongruents, mis sisaldab seost σ, siis $\rho \subseteq \ker g$. Lause 5 põhjal on nüüd kujutus $h\colon M \otimes_Q N \to X, \overline{x} \mapsto g(x)$ korrektselt defineeriud homomorfism.

Tõestame nüüd ühesuse. Oletame, et meil on $h_1 \colon M \otimes_Q N \to X$ ja $h_2 \colon M \otimes_Q N \to X$ mõlemad sellised sup-võrede homomorfismid, et $f = h_1 j$ ja $f = h_2 j$. Siis iga $A \in \mathcal{P}(M \times N)$ korral

$$\begin{aligned}
h_1(\overline{A}) &= h_1(\overline{\bigcup_{a \in A} a}) \\
&= h_1(\bigvee_{a \in A} \overline{a}) \\
&= \bigvee_{a \in A} h_1(\overline{a}) \\
&= \bigvee_{a \in A} h_1(j(a)) \\
&= \bigvee_{a \in A} f(a) \\
&= \bigvee_{a \in A} h_2(j(a)) \\
&= \bigvee_{a \in A} h_2(\overline{a}) \\
&= h_2(\bigvee_{a \in A} \overline{a}) \\
&= h_2(\overline{\bigcup_{a \in A} a}) \\
&= h_2(\overline{A}).
\end{aligned}$$

□

Universaalomadus lubab meil defineerida sup-võrede homomorfisme tensorkorrutisest mingisse teise supvõresse baasi kaudu.

Jan Paseka on artiklis [10] defineerinud m-regulaarsete kvantaalide Morita ekvivalentsuse järgmiselt.

Definitsioon 3.5. m-regulaarseid kvantaale A ja B nimetatakse **Morita ekvivalentseteks**, kui esiteks leiduvad sellised m-regulaarsed bimoodulid X ja Y, et X on vasakult $A-$ ja paremalt $B-$moodul, ning Y on vasakult $B-$ ja paremlt $A-$moodul.

Teiseks leiduvad kujutused $\theta \colon X \times Y \to A$ ja $\phi \colon Y \times X \to B$ nii, et $\theta(xb, y) = \theta(x, by)$, $\phi(ya, x) = \phi(y, ax)$, $\theta(x_1, y)x_2 = x_1\phi(y, x_2)$ ja $\phi(y_1, x)y_2 = y_1\theta(x, y_2)$.

Kolmandaks on θ ja ϕ poolt indutseeritud ülemisi rajasid säilitavad kujutused sup-võrede tensorkorrutistel $X \otimes Y$ ja $Y \otimes X$ sürjektiivsed.

Paari (X, Y) nimetatakse **Morita paariks** ja kuuikut $(A, B, X, Y, \theta, \phi)$ **Morita kontekstiks**.

Selles bakalaureuse töös lähtume järgmisest definitsioonist, kus me bimoodulite m-regulaarsust ei nõua. Samas on see definitsioon lähedasem poolrühmade juhule, mida esimesena vaatles Talwar artiklis [15].

Definitsioon 3.6. **Morita kontekst** on kuuik $(Q, R, {}_QX_R, {}_RY_Q, \theta, \phi)$, kus

1. Q, R on kvantaalid,
2. ${}_QX_R, {}_RY_Q$ on bimoodulid,
3. $\theta : X \otimes_R Y \longrightarrow Q$ on (Q, Q)-bimoodulite homomorfism,
4. $\phi : Y \otimes_Q X \longrightarrow R$ on (R, R)-bimoodulite homomorfism,
5. mistahes $x, x_1, x_2 \in X$ ja $y, y_1, y_2 \in Y$ korral

$$\theta(x_1 \otimes y)x_2 = x_1\phi(y \otimes x_2) \quad \text{ja} \quad \phi(y_1 \otimes x)y_2 = y_1\theta(x \otimes y_2).$$

Definitsioon 3.7. Faktoriseeruvaid kvantaale Q ja R nimetame **Morita ekvivalentseteks**, kui leidub neid sisaldav Morita kontekst, mille bimoodulid on unitaarsed ja kujutused on sürjektiivsed.

Selliseid Morita kontekste nimetame **sürjektiivseteks unitaarseteks Morita kontekstideks**.

Sarnaselt on defineeritud faktoriseeruvate poolrühmade tugev Morita ekvivalentsus (vt. [16, Definitsioon 7]).

Lause 9. *Morita ekvivalentsuse seos on ekvivalentsiseos faktoriseeruvate kvantaalide klassil.*

Tõestus. Tõestame esiteks refleksiivsuse. Olgu meil selleks faktorisseruv kvantaal Q ja võtame ${}_QX_Q = {}_QY_Q = {}_QQ_Q$. Kvantaalid Q faktoriseeruvuse tõttu on vastavad moodulid unitaarsed. Defineerime $\theta, \phi \colon X \otimes_Q X \to Q$ baasi elementide kaudu kui

$$\theta(q \otimes q') = \phi(q \otimes q') = qq'.$$

See definitsioon on korrektne tensorkorrutise universaalomaduse tõttu. Iga $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in Q$ korral kehtivad

$$\theta(x_1 \otimes y)x_2 = (x_1y)x_2 = x_1(yx_2) = x_1\phi(y \otimes x_2)$$

ja

$$\phi(y_1 \otimes x)y_2 = (y_1x)y_2 = y_1(xy_2) = y_1\theta(x \otimes y_2).$$

Olgu meil $q \in Q$. Siis Q faktoriseeruvuse tõttu leidub hulk I ja iga $i \in I$ korral $q_i, q_i' \in Q$ nii, et $q = \bigvee_{i\in I} q_iq_i'$. Nüüd

$$q = \bigvee_{i\in I} q_iq_i' = \bigvee_{i\in I} \theta(q_i \otimes q_i') = \theta(\bigvee_{i\in I} q_i \otimes q_i').$$

Sümmetrilisus on selge.

Viimaks tõestame transitiivsuse. Saab tõestada, et tensorkorrutised on isomorfismi täpsusega assotsiatiivsed. See teeb asjade kirjapaneku mugavamaks.

Olgu Q, R ja S faktoriseeruvad kvantaalid ning olgu kuuikud $(Q, R, {}_QX_R, {}_RY_Q, \theta, \phi)$ ja $(R, S, {}_RZ_S, {}_SW_R, \mu, \nu)$ sürjektiivsed unitaarsed Morita kontekstid. Defineerime

$$\gamma\colon {}_Q((X \otimes_R Z) \otimes_S (W \otimes_R Y))_Q \to {}_QQ_Q$$

ja

$$\delta\colon {}_S((W \otimes_R Y) \otimes_Q (X \otimes_R Z))_S \to {}_SS_S$$

järgmiste kompositsioonidena:

$$\gamma = \theta \circ (\mu_X \otimes 1_Y) \circ (1_X \otimes \mu \otimes 1_Q),$$

$$\begin{tikzcd}
X \otimes_R Z \otimes_S W \otimes_R Y \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "1_X \otimes \mu \otimes 1_Y"'] & Q \\
X \otimes_R R_R \otimes Y \arrow[r, "\mu_X \otimes 1_Y"'] & X \otimes_R Y \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

$$\delta = \nu \circ (\mu_W \otimes 1_z) \circ (1_W \otimes \phi \otimes 1_Z).$$

$$\begin{tikzcd}
W \otimes_R Y \otimes_S X \otimes_R Z \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "1_W \otimes \phi \otimes 1_Z"'] & Q \\
W \otimes_R R_R \otimes Z \arrow[r, "\mu_W \otimes 1_Z"'] & W \otimes_R Z \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd}$$

kus $\mu_X\colon X \otimes_R R \to X_R, x \otimes r \mapsto xr$ ja $\mu_W : W \otimes_R R \to W_R, w \otimes r \to wr$. Tensorkorrutise universaalomaduse abil saab näidata, et μ_X ja μ_W on korrektselt defineeritud.

Näitame, et

$$(Q, S, {}_Q(X \otimes_R Z)_S, {}_S(W \otimes_R Y)_Q, \gamma, \delta)$$

on sürjektiivne unitaarne Morita kontekst. Jäänud on tõesatada definitsiooni omadus 5 ning moodulite ${}_Q(X \otimes {}_RZ)_S$ ja ${}_S(W \otimes {}_RY)_Q$ unitaarsus ja sürjektiivsus.

Olgu meil $\bigvee_{i\in I} x_i \otimes z_i, \bigvee_{k\in K} x'_k \otimes z'_k \in X \otimes_R Z$ ja $\bigvee_{j\in J} w_j \otimes y_j \in W \otimes_R Y$. Siis

$$\begin{aligned}
&\gamma((\bigvee_{i\in I} x_i \otimes z_i) \otimes (\bigvee_{j\in J} w_j \otimes y_j))(\bigvee_{k\in K} x'_k \otimes z'_k)\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} \gamma(x_i \otimes z_i \otimes w_j \otimes y_j)(x'_k \otimes z'_k)\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} ((\theta \circ (\mu_X \otimes 1_Y) \circ (1_X \otimes \mu \otimes 1_Q))(x_i \otimes z_i \otimes w_j \otimes y_j))(x'_k \otimes z'_k)\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} ((\theta \circ (\mu_X \otimes 1_Y))(x_i \otimes \mu(z_i \otimes w_j) \otimes y_j))(x'_k \otimes z'_k)\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} \theta(x_i\mu(z_i \otimes w_j) \otimes y_j)(x'_k \otimes z'_k)\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} \theta(x_i\mu(z_i \otimes w_j) \otimes y_j)x'_k \otimes z'_k\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} x_i\mu(z_i \otimes w_j)\phi(y_j \otimes x'_k) \otimes z'_k\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} x_i \otimes \mu(z_i \otimes w_j)\phi(y_j \otimes x'_k)z'_k\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} x_i \otimes z_i\nu(w_j\phi(y_j \otimes x'_k) \otimes z'_k)\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} (x_i \otimes z_i)\nu(w_j\phi(y_j \otimes x'_k) \otimes z'_k)\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} (x_i \otimes z_i)(\nu \circ (\mu_W \otimes 1_Z))(w_j \otimes \phi(y_j \otimes x'_k) \otimes z'_k)\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} (x_i \otimes z_i)(\nu \circ (\mu_W \otimes 1_Z) \circ (1_W \otimes \phi \otimes 1_Z))(w_j \otimes y_j \otimes x'_k \otimes z'_k)\\
&= \bigvee_{i\in I, j\in J, k\in K} (x_i \otimes z_i)\delta(w_j \otimes y_j \otimes x'_k \otimes z'_k)\\
&= (\bigvee_{i\in I} x_i \otimes z_i)\delta((\bigvee_{j\in J} w_j \otimes y_j) \otimes (\bigvee_{k\in K} x'_k \otimes z'_k)).
\end{aligned}$$

Teise võrduse saab tõestada sarnaselt.

Järgmisena tõestame bimoodulite unitaarsuse. Vaatame bimoodulit ${}_Q(X \otimes_R Z)_S$. On selge, et kehtib $Q(X \otimes_R Z) \subseteq (X \otimes_R Z)$. Vaatame teistpidi sisalduvust. Olgu meil mingi element $\bigvee_{i\in I} x_i \otimes z_i \in X \otimes_R Z$. Nüüd mooduli ${}_QX$ unitaarsusest saame iga $i \in I$ jaoks leida hulga J_i ja elemendid $q_{j_i} \in Q, x_{j_i} \in X$ nii, et $x_i = \bigvee_{j_i \in J} q_{j_i} x_{j_i}$. Järelikult

$$\bigvee_{i\in I} x_i \otimes z_i = \bigvee_{i\in I}(\bigvee_{j_i\in J_i} q_{j_i}x_{j_i}) \otimes z_i = \bigvee_{i\in I}\bigvee_{j_i\in J_i}(q_{j_i}x_{j_i} \otimes z_i) = \bigvee_{i\in I}\bigvee_{j_i\in J_i} q_{j_i}(x_{j_i} \otimes z_i).$$

Viimane on aga selgelt hulga $Q(X \otimes_R Z)$ element. Sarnaselt saame tõestada võrduse paremalt poolt korrutamisega. Sama moodi saame ka teise bimooduli jaoks unitaarsuseks vajalikud võrdused tõestada.

Viimaks tõestame γ ja δ sürjektiivsuse. Kuna μ_X ja μ on sürjektiivsed, siis ka $1_X \otimes \mu \otimes 1_Y$ ja $\mu_X \otimes 1_Y$ on sürjektiivsed. Samuti θ on sürjektiivne. Seega ka γ on sürjektiivne, sest ta on kolme sürjektiivse kujutuse kompositsioon.

Sarnaselt saame tõestada ka teise funktsiooni sürjektiivsuse.

$\square$

Definitsioon 3.8. Olgu $\Gamma = (Q, R, {}_QX_R, {}_RY_Q, \theta, \phi)$ Morita kontekst. Siis Morita konteksti Γ **Morita kvantaaliks** $\overline{\Gamma}$ nimetame maatriksite hulka

$$\overline{\Gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} q & x \\ y & r \end{pmatrix} \middle| q \in Q, r \in R, x \in X, y \in Y \right\}$$

kvantaali tehetega, kusjuures ülemised rajad võetakse punktiviisi ja korrutamine on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} q & x \\ y & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' & x' \\ y' & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qq' \vee \theta(x \otimes y') & qx' \vee xr' \\ yq' \vee ry' & \phi(y \otimes x') \vee rr' \end{pmatrix}.$$

Lause 10. *Hulk $\overline{\Gamma}$ on kvantaal niimoodi defineeritud tehete suhtes.*

Tõestus. Kuna ülemised rajad on defineeritud punktiviisi ja maatriksi igas lahtris on kas kvantaali või bimooduli elemendid, on $\overline{\Gamma}$ sup-võre.

Olgu nüüd I mingi hulk ja $\begin{pmatrix} q & x \\ y & r \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q_i & x_i \\ y_i & r_i \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma}$. Siis kasutades tensorkorrutiste ja homomorfismide omadusi saame

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} q & x \\ y & r \end{pmatrix} \bigvee_{i\in I} \begin{pmatrix} q_i & x_i \\ y_i & r_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q & x \\ y & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vee_{i\in I} q_i & \vee_{i\in I} x_i \\ \vee_{i\in I} y_i & \vee_{i\in I} r_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q(\vee_{i\in I} q_i) \vee \theta(x \otimes (\vee_{i\in I} y_i)) & q(\vee_{i\in I} x_i) \vee x(\vee_{i\in I} r_i) \\ y(\vee_{i\in I} q_i) \vee r(\vee_{i\in I} y_i) & \phi(y \otimes (\vee_{i\in I} x_i)) \vee r(\vee_{i\in I} r_i) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vee_{i\in I}(qq_i \vee \theta(x \otimes y_i)) & \vee_{i\in I}(qx_i \vee xr_i) \\ \vee_{i\in I}(yq_i \vee ry_i) & \vee_{i\in I}(\phi(y \otimes x_i) \vee rr_i) \end{pmatrix} \\
&= \bigvee_{i\in I} \begin{pmatrix} qq_i \vee \theta(x \otimes y_i) & qx_i \vee xr_i \\ yq_i \vee ry_i & \phi(y \otimes x_i) \vee rr_i \end{pmatrix} \\
&= \bigvee_{i\in I} \begin{pmatrix} q & x \\ y & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i & x_i \\ y_i & r_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Samamoodi saab ka paremalt poolt distributiivsuse tõestada. Näitame, et morita kvantaal on assotisiatiivne korrutamise suhtes. Olgu meil kolm maatriksit

$$\begin{pmatrix} q_1 & x_1 \\ y_1 & r_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 & x_2 \\ y_2 & r_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_3 & x_3 \\ y_3 & r_3 \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma}.$$

Siis

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} q_1 & x_1 \\ y_1 & r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_2 & x_2 \\ y_2 & r_2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} q_3 & x_3 \\ y_3 & r_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_1q_2 \vee \theta(x_1 \otimes y_2) & q_1x_2 \vee x_1r_2 \\ y_1q_2 \vee r_1y_2 & \phi(y_1 \otimes x_2) \vee r_1r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_3 & x_3 \\ y_3 & r_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

kus

$$\begin{aligned}
u_1 &= (q_1q_2 \vee \theta(x_1 \otimes y_2))q_3 \vee \theta((q_1x_2 \vee x_1r_2) \otimes y_3) \\
u_2 &= (q_1q_2 \vee \theta(x_1 \otimes y_2))x_3 \vee (q_1x_2 \vee x_1r_2)r_3 \\
u_3 &= (y_1q_2 \vee r_1y_2)q_3 \vee (\phi(y_1 \otimes x_2) \vee r_1r_2)y_3 \\
u_4 &= \phi((y_1q_2 \vee r_1y_2) \otimes x_3) \vee (\phi(y_1 \otimes x_2) \vee r_1r_2)r_3
\end{aligned}$$

Teiselt poolt saame

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} q_1 \, x_1 \\ y_1 \, r_1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} q_2 \, x_2 \\ y_2 \, r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_3 \, x_3 \\ y_3 \, r_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} q_1 \, x_1 \\ y_1 \, r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_2q_3 \vee \theta(x_2 \otimes y_3) & q_2x_3 \vee x_2r_3 \\ y_2q_3 \vee r_2y_3 & \phi(y_2 \otimes x_3) \vee r_2r_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_1 \, v_2 \\ v_3 \, v_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

kus

$$\begin{aligned}
v_1 &= q_1(q_2q_3 \vee \theta(x_2 \otimes y_3)) \vee \theta(x_1 \otimes (y_2q_3 \vee r_2y_3)) \\
v_2 &= q_1(q_2x_3 \vee x_2r_3) \vee x_1\phi(y_2 \otimes x_3) \vee r_2r_3 \\
v_3 &= y_1(q_2q_3 \vee \theta(x_2 \otimes y_3)) \vee r_1(y_2q_3 \vee r_2y_3) \\
v_4 &= \phi(y_1 \otimes (q_2x_3 \vee x_2r_3))) \vee r_1(\phi(y_2 \otimes x_3) \vee r_2r_3)
\end{aligned}$$

Kui nüüd maatriksite elemendid lahti korrutada ja arvsetada homomorfismide θ, ϕ ja tensorkorrutiste omadustega, näeme, et maatriksid on tõepoolest võrdsed. $\square$

Lemma 7. *Olgu X_Q ja ${}_QY$ kvantaalmoodulid. Siis kujutus $x \otimes - \colon Y \to X \otimes Y$, $y \mapsto x \otimes y$ säilitab järjestust.*

Tõestus. Olgu $x \in X$ ja $a, b \in Y$, kusjuures $a \leqslant b$. Nüüd

$$(x \otimes a) \vee (x \otimes b) = x \otimes (a \vee b) = x \otimes b.$$

See aga tähendab, et $x \otimes a \leqslant x \otimes b$. $\square$

On selge, et samamoodi saame tõestada, et $- \otimes y$ on järjestust säilitav.

Lause 11. *Kui kvantaale Q ja R seob Morita kontekst $\Gamma = (Q, R, {}_QX_R, {}_RY_Q, \theta, \phi)$ siis $\theta(x \otimes \perp) = \theta(\perp \otimes y) = \perp$ ja $\phi(y \otimes \perp) = \phi(\perp \otimes x) = \perp$ iga $x \in X$ ja $y \in Y$ korral.*

Tõestus. Tõestame võrduse $\theta(x \otimes \perp) = \perp$ iga $x \in X$ korral. Tõepoolest,

$$\theta(x \otimes \perp) = \theta(x \otimes \perp\perp) = \theta(x\perp \otimes \perp) = \theta(\perp \otimes \perp) = \theta(\perp) = \perp.$$

Samamoodi kasutades ϕ, θ ja $\otimes$ omadusi saame tõestada teised võrdused. $\square$

Lemma 8. *Kvantaali laiend on fakoriseeruv.*

Tõestus. Olgu Q kvantaal ja R tema laiend. Samastame Q mingi R alamkvantaaliga. Ilmselt kehtib $RR \subseteq R$. Teistpidi $R = RQR \subseteq RRR \subseteq RR$. $\square$

Definitsioon 3.9. Olgu Q ja R kvantaalid. Siis kvantaal T on kvantaalide Q ja R **ühine lained** kui T on nii Q laiend kui R laiend.

Teoreem 4. *Kaks faktoriseeruvat kvantaali omavad ühist laiendit parajasti siis, kui nad on Morita ekvivalentsed.*

Tõestus. ($\Longleftarrow$)

Olgu meil faktoriseeruvad kvantaalid Q, R ja olgu $\Gamma = (Q, R, {}_Q X_R, {}_R Y_Q, \theta, \phi)$ neid siduv unitaarne sürjektiivne Morita kontekst. Näitame, et sobivaks ühiseks laiendiks on $\overline{\Gamma}$.

Defineerime

$$\overline{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} q & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \middle| q \in Q \right\}.$$

Näitame, et tegemist on $\overline{\Gamma}$ alamkvantaaliga. On selge, et $\overline{Q}$ on kinnine ülemiste rajade suhtes. Olgu $\begin{pmatrix} q_1 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \in \overline{Q}$. Siis

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1 q_2 \vee \theta(\perp \otimes \perp) & q_1 \perp \vee \perp\perp \\ \perp q_2 \vee \perp\perp & \phi(\perp \otimes \perp) \vee \perp\perp \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_1 q_2 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \in \overline{Q}. \end{aligned}$$

Sisalduvus $\overline{\Gamma}\,\overline{Q}\,\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Gamma}$ on ilmne.

Märkame, et hulga $\overline{\Gamma}$ iga elemendi saab esitada kujul

$$\begin{pmatrix} q & x \\ y & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \perp & x \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ y & \perp \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & r \end{pmatrix}.$$

Sisalduvuse $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Gamma Q \Gamma}$ tõestamiseks on niisiis piisav, kui tõestame, et iga ülalolevas ülemises rajas olev maatriks sisaldub hulgas $\overline{\Gamma Q \Gamma}$.

Esiteks näitame, et maatriks $\begin{pmatrix} q & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix}$ sisaldub selles hulgas. Kuna Q on faktoriseeruv kvantaal, siis leiduvad hulk I ning ja iga $i \in I$ korral $q_i, r_i, s_i \in Q$ nii, et $q = \bigvee_{i \in I} q_i r_i s_i$. Nüüd sama moodi nagu tõestasime $\overline{Q}$ korrutamise kinnisuse, saame tõestada, et

$$\bigvee_{i \in I} \begin{pmatrix} q_i & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_i & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix}.$$

Järgmisena vaatame maatriksit $\begin{pmatrix} \perp & x \\ \perp & \perp \end{pmatrix}$. Kuna ${}_QX$ on unitaarne, siis leidub hulk I ning iga $i \in I$ jaoks $q_i \in Q$ ja $x_i \in X$ nii, et $x = \bigvee_{i\in I} q_i x_i$. Saame

$$\begin{pmatrix} \perp & x \\ \perp & \perp \end{pmatrix} = \bigvee_{i\in I} \begin{pmatrix} q_i & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & x_i \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \in \overline{Q\Gamma} = \overline{QQ\Gamma} \subseteq \overline{\Gamma Q\Gamma}.$$

Maatriksi $\begin{pmatrix} \perp & \perp \\ y & \perp \end{pmatrix}$ hulgas $\overline{\Gamma Q\Gamma}$ sisalduvuses saame analoogselt veenduda.

Näitame, et $\begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & r \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma Q\Gamma}$. Kuna ϕ on sürjektiivne, siis leidub $\bigvee_{i\in I}(y_i \otimes x_i) \in {}_RY_Q \otimes {}_QX_R$ nii, et $\phi(\bigvee_{i\in I}(y_i \otimes x_i)) = r$. Siis

$$\begin{pmatrix} \perp & \perp \\ \perp & r \end{pmatrix} = \bigvee_{i\in I} \begin{pmatrix} \perp & \perp \\ y_i & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \perp & x_i \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma\Gamma Q\Gamma} \subseteq \overline{\Gamma Q\Gamma},$$

kuna iga $i \in I$ korral $\begin{pmatrix} \perp & x_i \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \in \overline{\Gamma Q\Gamma}$.

Tõestame nüüd sisalduvuse $\overline{Q\Gamma Q} \subseteq \overline{Q}$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} q_1 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & x \\ y & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1q \vee \theta(\perp \otimes y) & q_1x \vee \perp r \\ \perp q \vee \perp y & \phi(\perp \otimes x) \vee \perp r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_1q & q_1x \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_1qq_2 \vee \theta((q_1x) \otimes \perp) & q_1q\perp \vee q_1x\perp \\ \perp q_2 \vee \perp\perp & \phi(\perp \otimes \perp) \vee \perp\perp \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_1qq_2 & \perp \\ \perp & \perp \end{pmatrix} \in \overline{Q}.
\end{aligned}$$

Tänu faktoriseeruvusele $\overline{Q} = \overline{Q}\,\overline{Q}\,\overline{Q} \subseteq \overline{Q}\,\overline{\Gamma}\,\overline{Q}$.

$(\Longrightarrow)$

Näitame, et kui Q rahuldab teoreemi eeldusi ja R on tema laiend, siis Q ja R on Morita ekvivalentsed. Tõestatav väide tuleb siis Morita ekvivalentsuse transitiivsusest.

Kuna R on Q laiend, siis leidub R alamkvantaal, mis on isomorfne kvantaaliga Q. Samastame Q selle isomorfse kvantaalga s.t. oletame, et Q on R alamkvantaal. Näitame, et Morita konteksti definitsioonis võime võtta ${}_QX_R = QR$ ja ${}_RY_Q = RQ$, kus toimed on defineeritud loomulikul viisil.

Tensorkorrutise $RQ \otimes_Q QR$ üldine element esitub kujul

$$\begin{aligned}
\bigvee_{s\in S} \left((\bigvee_{j\in J} r_j^s q_j^s) \otimes (\bigvee_{k\in K} q_k^s r_k^s) \right) &= \bigvee_{s\in S, j\in J} \left(r_j^s q_j^s \otimes (\bigvee_{k\in K} q_k^s r_k^s) \right) \\
&= \bigvee_{s\in S, j\in J, k\in K} \left(r_j^s q_j^s \otimes q_k^s r_k^s \right) \\
&= \bigvee_{i\in I} \left(r_i q_i \otimes q_i' r_i' \right).
\end{aligned}$$

mingi hulga I jaoks. Sarnaselt saame esitada ka $QR \otimes_R RQ$ elemente.

Defineerime kujutusted θ ja ϕ:

$$\theta\colon RQ \otimes_Q QR \to R, \quad \bigvee_{i\in I}(r_iq_i \otimes q'_ir'_i) \mapsto \bigvee_{i\in I} r_iq_iq'_ir'_i,$$

$$\phi\colon QR \otimes_R RQ \to Q, \quad \bigvee_{i\in I}(q_ir_i \otimes r'_iq'_i) \mapsto \bigvee_{i\in I} q_ir_ir'_iq'_i.$$

Veendume, et θ ja ϕ on korrektselt defineeritud. Võrdusetest $R = RQR$ ja $Q = QRQ$ järelduvad sihthulkade korrektsused. Tõestame korrektsuse θ jaoks. Selleks defineerime esmalt $X \bullet Y = \{xy | x \in X, y \in Y\}$. Eelneva arutelu põhjal

$$RQ \otimes_Q QR = (R \bullet Q) \otimes_Q (Q \bullet R)$$

ning

$$QR \otimes_R RQ = (Q \bullet R) \otimes_R (R \bullet Q).$$

On otsene kontroll, et

$$\theta^*\colon (R \bullet Q) \times (Q \bullet R) \to R, (rq, q'r') \mapsto rqq'r'$$

on bimorfism.

Nüüd θ on θ^* ühene laiend sup-võrele $(R \bullet Q) \otimes_Q (Q \bullet R) = RQ \otimes_Q QR$. Sarnaselt saab tõestada, et ϕ definitsioon on korrektne.

Kuna nii Q kui R on faktoriseeruvad, siis on RQ ja QR unitaarsed.

Tõestus, et θ ja ϕ on bimoodulite homomorfismid on otsene definitsiooni kontroll:

$$\theta\left(\bigvee_{i\in I}(r_iq_i \otimes q'_ir'_i)\right) = \bigvee_{i\in I} r_iq_iq'_ir'_i = \bigvee_{i\in I} \theta(r_iq_i \otimes q'_ir'_i),$$

$$\begin{aligned} r\theta\left(\bigvee_{i\in I}(r_iq_i \otimes q'_ir'_i)\right) &= r\bigvee_{i\in I} r_iq_iq'_ir'_i \\ &= \bigvee_{i\in I} rr_iq_iq'_ir'_i \\ &= \bigvee_{i\in I} \theta(rr_iq_i \otimes q'_ir'_i) \\ &= \bigvee_{i\in I} \theta(r(r_iq_i \otimes q'_ir'_i)) \\ &= \theta(\bigvee_{i\in I} r(r_iq_i \otimes q'_ir'_i)) \\ &= \theta(r\bigvee_{i\in I} r_iq_i \otimes q'_ir'_i). \end{aligned}$$

Samamoodi saame tõestada θ kooskõlalisuse parema toimega ja selle, et ϕ on bimoodulite homomorfism.

Tõestame θ sürjektiivsuse. Selleks olgu meil suvaline $r \in R$. Teame, et $R = RQR = RQQR$. Seega leidub hulk I ning iga $i \in I$ korral $r_i, r'_i \in R$ ja $q_i, q'_i \in Q$ nii, et $r = \bigvee_{i \in I} r_i q_i q'_i r'_i$. Järelikult

$$r = \bigvee_{i \in I} r_i q_i q'_i r'_i = \theta(\bigvee_{i \in I} r_i q_i \otimes q'_i r'_i),$$

mida oligi tarvis.

Olgu $a \in RQ$ ja $b \in QR$. Tõestame võrduse $\theta(a \otimes b) = ab$. Hulkade RQ ja QR definitsioonidest saame $a = \bigvee_{i \in I} r_i q_i$ ja $b = \bigvee_{j \in J} q'_j r'_j$. Nüüd

$$\begin{aligned}
\theta(a \otimes b) &= \theta((\bigvee_{i \in I} r_i q_i) \otimes (\bigvee_{j \in J} q'_j r'_j)) \\
&= \bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \theta(r_i q_i \otimes q'_j r'_j) \\
&= \bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J} r_i q_i q'_j r'_j \\
&= (\bigvee_{i \in I} r_i q_i)(\bigvee_{j \in J} q'_j r'_j) \\
&= ab.
\end{aligned}$$

Analoogiliselt saab näidata, et $\phi(b \otimes a) = ba$.

Olgu $a_1, a_2 \in RQ$ ja $b_1, b_2 \in QR$.

Siis

$$\theta(a_1 \otimes b_1)a_2 = a_1 b_1 a_2 = a_1 \phi(b_1 \otimes a_2),$$

$$b_1 \theta(a_1 \otimes b_2) = b_1 a_1 b_2 = \phi(b_1 \otimes a_1) b_2.$$

Oleme näidanud, et Q ja R on seotud unitaarse sürjektiivse Morita kontekstiga. $\square$

Kasutades teoreeme 1 ja 4 näeme, et kehtib järeldus 1.

Järeldus 1. *Kui Q on faktoriseeruv kvantaal, siis on ta Morita ekvivalentne iga kvantaaliga* $\mathrm{Mat}_U(Q)$.

Teoreemidest 2 ja 4 saame järelduse 2.

Järeldus 2. *Kui Q on ühikuga kvantaal, siis on ta Morita ekvivalentne iga ühikuga Reesi maatrikskvantaaliga $\mathcal{M}(Q; U, V; P)$.*

Viited

[1] F. Borceux, E.M. Vitale, *A Morita theorem in topology*, V International Meeting on Topology in Italy (Lecce, 1990/Otranto, 1990). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 29 (1992), 353–362.

[2] K. Kaarli, *Sissejuhatus universaalalgebrasse*, Tartu, 1989.

[3] V. Laan, L. Tart, *Sissejuhatus algebra struktuuridesse*, `https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.013/2021_fall/uploads/Main/kon.pdf`, kasutatud 4.04.2022

[4] V. Laan, K. Väljako, (2021). *Enlargements of rings*, Comm. Algebra **49**, 1764–1772.

[5] M. V. Lawson, (1996). *Enlargements of regular semigroups.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **39**, 425–460.

[6] M. V. Lawson, (2011). *Morita equivalence of semigroups with local units.* J. Pure Appl. Algebra **215**, 455–470.

[7] M. V. Lawson, L. Márki, (2000). *Enlargements and coverings by Rees matrix semigroups.* Monatsh. Math. **129**, 191–195.

[8] L. Márki, O. Steinfeld, (1988). *A Rees matrix construction without regularity.* Contributions to general algebra **6**, 197–202, Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna.

[9] J. Paseka, *Morita equivalence in the context of Hilbert modules*, Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium (2001), 223–251, Topol. Atlas, North Bay, ON, 2002.

[10] J. Paseka, *Characterization of Morita equivalence pairs of quantales*, Internat. J. Theoret. Phys. **44** (2005), 875–883.

[11] J. Paseka, *Morita equivalence for m-regular quantales*, Contributions to general algebra. **16**, 155–171, Heyn, Klagenfurt, 2005.

[12] M. Petrich, *Rings and semigroups*, Springer-Verlag, 1974.

[13] M. Petrich, *Some constructions related to Rees matrix rings*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **71** (2002), 69–91.

[14] C. Russo, *Quantale modules, with applications to logic and image processing*, PhD thesis, 2007, `https://arxiv.org/pdf/0909.4493.pdf`, kasutatud 4.04.2022

[15] S. Talwar, *Morita equivalence for semigroups*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **59** (1995), 81–111.

[16] S. Talwar, *Strong Morita equivalence and a generalisation of the Rees theorem*, *J. Algebra* **181** (1996), 371–394.

[17] *Quantaloid*, Nlab, `https://ncatlab.org/nlab/show/quantaloid`, kasutatud 19.04.2022.

[18] *Quantale*, Encyclopedia of Mathematics, http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Quantale&oldid=51710

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Urmas Luhaäär,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Kvantaaalide laiendid", mille juhendaja on Valdis Laan, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Urmas Luhaäär
11.05.2022