Analüüs I

[illegible]

Suurused on muutuvad ja jäävad.
Muutuvad, näit., on: ringjoone pikkus, õhurõhumine jne.
Jäävad on: π, kolmnurga nurkade summa jne.
Suurused olenevad üksteisest. Ühed on meie tahtmist mööda muudetavad, teised aga muutuvad selle järele kuidas me esiom. oleme muutnud.
See suurus, millest teine oleneb, nimetatakse põhisuuruseks (argument), kuna olenev suurus jälle järelsuuruseks ehk funktsiooniks nimetatakse.
Funktsioon tähendatakse: $y = f(x)$; y võib oleneda ühest, kahest, kolmest jne põhisuurusest.
Ümberpöördud funksioonid on $f(x)$ ja $f(y)$
Selle järele, missugused tehted tulevad x kallal toime panna, et leida y, on funktsioonid kas algebralised või transtsendentsed.
Algebralised funktsioonid on, kas ratsionaalsed või irratsionaalsed, selle järele kas tehete hulgas mõni radikaali all olev argument on või mitte.
Ratsionaalsed funktsioonid omakorda on, kas terved või murrulised. On näituseks nimetajas argument, siis murruline. $y = \frac{m}{x}$

Transtsendentsed funktsioonid on:
1) astmelised (eksponentsed). $y = a^x$
2) logaritmilised $y = \log x$
3) trigonomeetrilised $y = \sin x$, $y = \cos x$

4) ringfunktsioonid (tsüklomeetrilised) $y = \arc\sin x$

Pidevuse kriteerium.

Funktsioon on pidev, kui järelsuuruste vahe absoluutselt võetuna on väiksem kui mistahes võetud arv δ, tingimusel et põhisuuruste vahe absoluutselt võetuna on väiksem kui väike positiivne arv ε.

Näitused.

1) $f(x) = 2x-1$;

$f(1) = 1$. $\quad x' = 1 \quad |x' - x''| < \varepsilon$

$f(1+h) = 2h+1 \quad x'' = 1+h$

$f(1) - f(1+h) = |1-2h-1|$

$2h < \delta$

$h < \frac{\delta}{2}$

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

$f(2) = 1 \quad x' = 2 \quad x'' = 2+h$

$f(2+h) = \frac{1}{4}(2+h)^2 = 1 + h + \frac{1}{4}h^2$

$|f(2) - f(2+h)| = |1 - (1+h+\frac{1}{4}h^2)| = |h + \frac{1}{4}h^2| < \delta$

$|h + \frac{1}{4}h^2| < |h + \frac{1}{4}h| < \delta$

$\frac{5}{4}h < \delta \; ; \; \underline{h < \frac{4}{5}\delta}$

§7 Põhisuuruste ja järelsuuruste muutumine.

Graafiline kujutus.

Funktsiooni geom. kujutus ei ole muud kui mõni joon. On funktsioon katkeline, siis leiame rea punktisid.

$y = \underline{f(x)}$ sirge

$y = \varphi(x)$ Leida geom. kujutus nende ühisväärtustele.

$f(x) = \varphi(x)$ Saame punktisid sirgete lõikamise punkti

§10 Ilmutud ja ilmutamata funktsioonid.

$xy = 1$; ilmutamata. $\quad y = \frac{1}{x}$ ilmutud

$3x - 4y + 5 = 0$. ilmutamata $\quad y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ ilmutud.

$z = f(x, y)$ geom. tähendus. Ta on pind.

§ 13. Piiride teooria.

Mõne muutuva suuruse x-si piiriks nimetatakse jäädav suurus a, millele x oma muutumisel ligineb nii, et vahe $/. a - x)$. võib saada vähemaks kui mistahes väike arv ε.

$\lim x = a$

$|x - a| < \varepsilon$

$\frac{1}{9} - \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9.10^n}$

1) $x = 0{,}1;\; 0{,}11;\; 0{,}111 \ldots$

$a = \frac{1}{9}; \quad \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{10}{90} - \frac{9}{90} = \frac{1}{9.10}$

$\frac{1}{9} - \frac{11}{100} = \frac{100}{900} - \frac{99}{900} = \frac{1}{9.10^2}$

$\frac{1}{9} - \frac{11}{1000} - \frac{1000}{9000} - \frac{999}{9000} = \frac{1}{9000} = \frac{1}{9.10^3}$

Vahe väheneb ja võib saada vähemaks kui ükskõik kui väike arv ε

2) $x = \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \dots \frac{1}{n} \dots$

$\underline{a=0}$ $\quad |a - \frac{1}{n} = 0 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\lim\limits_{n=\infty} (x) = 0;$

3) $x = \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4} \dots \frac{n}{n+1} \dots$

$\underline{a=1}$ $\quad \left|a - \frac{n}{n+1}\right| = \left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\lim\limits_{n=\infty} x = 1.$

§14 Põhi teoreemid lõpmata väiksetest arvudest.

1. Lõpliku arvu lõpmata väikeste suuruste summa on lõpmata väike suurus.

Lõpmata väiksed suurused $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n$ —

Tõendada: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n < \varepsilon$?

$x_1 < \eta$? $\quad |x_1| < \frac{\varepsilon}{n}$

$x_2 < \eta \quad |x_2| < \frac{\varepsilon}{n}$

$x_3 < \eta$

$- - - - -$

$|x_n| < \frac{\varepsilon}{n}$

$|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n| < \frac{\varepsilon \cdot \cancel{n}}{\cancel{n}}$

Absoluutsete suuruste summa on suurem kui summa absoluutselt võetuna.

Summa kõike täiendusteks lõpm. v. s.

$\frac{\varepsilon}{n}$ lõplik suurus

2. Kahe lõpmata väikse arvu vahe on lõpmata väike arv.

x_1 ja x_2 $\quad |x_1| < \eta$ ja $|x_2| < \eta$

$|x_1| - |x_2| < \varepsilon$

$|x_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_1| + |x_2| < \frac{\varepsilon \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} < \varepsilon$

3. Kui lõpmata väikest suurust kasvatame lõpliku suurusega, siis saame lõpmata väikese suuruse.

x ja m — lõplik positiivne suurus.

$|x| < \frac{\varepsilon}{m}$ $\quad$ [on m mõni murd, siis tuleb võtta ligem täisarv.] !

$m \cdot |x| < \varepsilon$

Järeldused.

1) Lõpmata väikeste suuruste teos on lõpmata väike suurus.

2) Lõpmata väikse arvu jagamine lõplikule arvule annab lõpmata väikse suuruse.

$3 \cdot x$

$3 \cdot 0.1 = 0{,}3$

$3 \cdot 0.01 = 0{,}03$

$3 \cdot 0.001 = 0.003$

jne.

Summa ja vahe piir.

Kui meil on muutuvad suurused

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \dots x_n$ —

ja nendele vastavad piirid

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \dots a_n$ —

Eksamil

Siis summa piir on piiride summa. —

s.t. $\lim(x_1+x_2+x_3+\dots x_n) = \lim x_1 + \lim x_2 + \dots \lim x_n$ —

$x_1 = a_1 + \alpha_1$

$x_2 = a_2 + \alpha_2 \quad (x_1+x_2+\dots x_n) = (a_1+a_2+\dots+a_n) + (\alpha_1+\alpha_2+\dots \alpha_n)$

$x_3 = a_3 + \alpha_3 \qquad \hat{\varepsilon}$ see pärast

— — — — —

$x_n = a_n + \alpha_n \quad \lim(x_1+x_2+\dots x_n) = a_1+a_2+\dots+a_n = \lim x_1 + \lim x_2 + \dots x_n$

Vahe suhtes samuti. Lüh. formel $\lim \sum_1^n x_i = \sum_1^n \lim x_i$

Eksamil

§16. Teose ja suhte piir.

Eks. Teose piir on piiride teos.

$\lim x_1 \cdot x_2 = \lim x_1 \cdot \lim x_2$

a_1 ja a_2 on piirid

$x_1 = a_1 + \alpha_1$

$x_2 = a_2 + \alpha_2$

$x_1 \cdot x_2 = (a_1+\alpha_1)(a_2+\alpha_2) = a_1 a_2 + \alpha_1 a_2 + a_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2$ —

$\lim x_1 \cdot x_2 = a_1 a_2 = \lim x_1 \cdot \lim x_2$

Suhte piir on piiride suhe. Eksam

$\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \Big| \quad \lim \frac{x_1}{x_2} = \frac{\lim x_1}{\lim x_2}$

$x_1 = a_1 + \alpha_1 \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1+\alpha_1}{a_2+\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1+\alpha_1}{a_2+\alpha_2} - \frac{a_1}{a_2} =$

$x_2 = a_2 + \alpha_2$

$= \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_2 + \alpha_1 a_2 - a_2 a_1 - a_1\alpha_2}{(a_2+\alpha_2)a_2}$ (lugeja lõpm. väike kogunule nulleile)

$\lim \frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\lim x_1}{\lim x_2}$

Järeldused: Astme piir on piiri aste.

$\lim (x)^m = (\lim (x))^m \quad \lim x^2 = \lim (x \cdot x) = \lim x \cdot \lim x = (\lim x)^2$

Juure piir on piiri juur.

$\lim \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim x}$

$\left[\lim a^x = a^{\lim x}; \quad \lim \log x = \log \lim x \right]$

Logaritmi piir on piiri logaritm.

<u>Piiride lause.</u> Kui on õige mõni võrdus, milles esinevad muutuvad suurused, siis on õige ka võrdus, kui muutuvate suuruste asemele asetada nende piirid.

$\frac{x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{\sqrt{a+x}}{\log(x-a)}; \quad \frac{A^2-1}{(A+1)^2} = \frac{\sqrt{a+A}}{\log(A-a)}$?

$\lim x = A$.

§17. Funktsiooni piiriline väärtus.

$y = f(x)$ $\quad y = \lim_{x=a} f(x)$

$x = a$

$y_a = f(a)$ $\quad f(a) = \lim_{x=a} f(x)$

Masser kui funktsioon on pidev.

$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ $\quad x = a + h \quad 0 < h < 1$

$x = a$ $\quad f(x) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{\cancel{a} + h - \cancel{a}} =$

$f(a) = \frac{0}{0}$ $\quad = \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h} = 2a + h$

Nii ei saa selle funktsiooni piirilist väärtust võtta. Piiris võttes saame

$\lim_{x=a} f(x) = 2a$

Piiride arvamine.

1) $f(x) = \frac{x^m - a^m}{x - a}$ $\quad (x = a + h)$

$x = a$

$f(x) = \frac{x^m - a^m}{x - a} = \underbrace{x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots a^{m-1}}_{m \text{ liiget}} =$

$f(a) = \frac{0}{0}$

Kui $x = a$, siis $a^{m-1} + \overset{a^{m-1}}{a \cdot a^{m-2}} + \dots$ jne

„m" on posit. täisarv

$\lim_{x=a} f(x) = m a^{m-1}$

2) „m" on murd $\frac{p}{q}$

$f(x) = \frac{x^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{x - a}$ $\quad z = x^{\frac{1}{q}}$; $x = z^q$

$b = a^{\frac{1}{q}} \quad a = b^q$

$z^p = x^{\frac{p}{q}}$

$b^p = a^{\frac{p}{q}}$

$f(x) = \frac{x^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{x - a} = \frac{z^p - b^p}{z^q - b^q} = \frac{z^p - b^p}{z - b} : \frac{z^q - b^q}{z - b} =$

$\lim \frac{x^m - a^m}{x - a} = \lim \left(\frac{z^p - b^p}{z - b}\right) : \lim \frac{z^q - b^q}{z - b} = p b^{p-1} : q b^{q-1} =$

$= \frac{p}{q} b^{p-q} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q} - 1} = m a^{m-1}$

$(a^{\frac{1}{q}})^{p-q}$

3) $m = -n$

$\lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = \lim \frac{x^{-n} - a^{-n}}{x - a} = \lim \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{a^n}}{x - a} =$

$\lim \frac{-a^n + x^n}{x^n a^n (x - a)} = \lim - \frac{x^n - a^n}{x^n a^n (x - a)} = \lim - \frac{n a^{n-1}}{x^n a^n} =$

$= \cancel{\lim} - \frac{n a^{n-1}}{a^{2n}} = \cancel{\lim} - n a^{n-1} \cdot a^{-2n} = \cancel{\lim} - n a^{-n-1} =$

$= m a^{m-1}$

4) $m = -\frac{p}{q}$

$f(x) = \frac{x^m - a^m}{x - a} = \frac{x^{-\frac{p}{q}} - a^{-\frac{p}{q}}}{x - a} = \frac{\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} - \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}}{x - a} = \frac{\frac{1}{z^p} - \frac{1}{b^p}}{z^q - b^q} =$

$= - \frac{z^p - b^p}{z^p b^p (z^q - b^q)} = - \frac{z^p - b^p}{z - b} : \frac{z^p b^p (z^q - b^q)}{z - b} =$

$\lim_{x=a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = \lim - \frac{z^p - b^p}{z - b} : \lim \frac{z^p b^p (z^q - b^q)}{z - b} = \lim - p b^{p-1} : b^{2p} q b^{q-1} = -\frac{p}{q} a^{-\frac{p}{q} - 1} =$

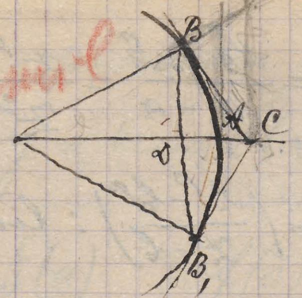
$= m a^{m-1}$

$\lim \frac{\sin x}{x} = ?$ Ersamul

$x = 0$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f(0) = \frac{0}{0}$



$\overline{BB_1} < \overset{\smile}{BB_1} < BCB_1$

$BD < BA < BC$

$\frac{BD}{R} < \frac{\overset{\smile}{BA}}{R} < \frac{BC}{R}$

$\sin x < x < \operatorname{tg} x$

$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$\lim \frac{x}{\sin x} = 1.$

$\lim \frac{\sin x}{x} = 1.$

exs

$S = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

$\lim_{n=\infty} S = ?$

$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{n!}$

IV liige $\frac{1}{1.2.3} < \frac{1}{2^2}$ V liige $\frac{1}{1.2.3.4} < \frac{1}{2^3}$

$n+1$ liige $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$

$S_{n+1} < 1 + \frac{1}{1} + \underbrace{\left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right]}_{S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1} + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \dots}_{R}$

$S_{n+1} < 1 + 1 + 1 = 3 \qquad 2 < S_{n+1} < 3$

$2 < e < 3$

$R = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\right]$

$\frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{(n+1)^2}; \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{1}{(n+1)^3}$ jne.

$R < \frac{1}{n!}\underbrace{\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots\right]}_{\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}}$

$R < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}$ See tähendab, kui suur on viga mille teeme kui R ära viskame.

Näitused:

$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \dots$

Võtame ainult 4 liiget, siis saame

$$\begin{array}{r} e = 2,50 \\ 0,17 \\ \hline 2,67 \end{array}$$

$1:6 = 0,17$

Viga on vähem kui $R < \frac{1}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{1}{n}$

$R < \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{3}$

$R < \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

Võtame 6 liiget, siis saame

$$\begin{array}{r} e = 2,500 \\ 0,167 \\ 0,042 \\ 0,008 \\ \hline 2,717 \end{array}$$

$R < \frac{1}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{600} = 0,001.$

$e = 2,718281828 4$

$$\lim_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Eksamil

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{1.2.3\dots k}\cdot\frac{1}{n^k}\dots =$$

$$= 2 + \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}\dots =$$

$$= 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{1.2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{1.2.3} + \dots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}\dots$$

$$\lim_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots \frac{1}{1.2.3\dots k} + \dots = e$$

tõendatud   nagu eelpool

Lõpmata väikeste suuruste järgud.

Lõpmata väike suurus on missugune, mille piiriks on null.

Nende peaomadus on see, et kahe lõpmata väikese suuruse suhe on, kas lõplik suurus ehk jälle lõpmata väike või suur suurus.

Kahest lõpmata väikesest suurusest on see kõrgema järguga, mis kiiremini nullile ligineb.

Ühejärgulised ehk samajärgulised on need, millede suhe on lõplik suurus.

§17 ~~Küsimused~~: Funktsioonide piiriline väärtus.

1) $f(x) = \frac{2x^2+3x^3+4x^4}{3x^2+x^4+x^6}$ Jagame lugejat ja nimetajat x^2
$x=0$

$f(0) = \frac{0}{0}$ $\lim_{x=0} f(x) = \frac{2+3x+4x^2}{3+x^2+x^4} = \frac{2}{3}$

Lugeja ja nimetaja siin samajärgulised.

2) $f(x) = \frac{2x^3+3x^4+x^5}{3x^2+x^4+x^5}$ Missugune tema piir?

Jagame lugejat ja nimetajat x^2.

$$f(x) = \frac{2x+3x^2+x^3}{3+x^2+x^5}$$

$\lim_{x=0} f(x) = 0$, sest lugeja on kõrgema järguga

3) $f(x) = \frac{2x+3x^2+4x^3}{3x^2+x^4+x^6}$ Jagame x-ga.
$x=0$

$$\lim_{x=0} f(x) = \lim_{x=0} \frac{2+3x+4x^2}{3x+x^3+x^5} = \frac{2}{0} \infty,$$ sest

nimetaja on kõrgema järgu väike suurus

4) Leida $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ piir kui $x = 1$.

$f(1) = \frac{0}{0}$; $x = 1+h$

$$\lim_{x=1} f(x) = \lim_{h=0} \frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)^2-4(1+h)+3} = \frac{\cancel{1}+2h+h^2+\cancel{1}+h-\cancel{2}}{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{4}-4h+\cancel{3}} =$$

$$= \frac{3h+h^2}{-2h+h^2} = \frac{3+h}{-2+h} = -1\frac{1}{2}$$

5) $$\lim_{x=0} f(x) = \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x} = \frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} =$$

$$= \frac{\cancel{a}+x-\cancel{a}+x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})} = \frac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} = \frac{2}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

6) $$\lim_{x=0} \frac{tg\,x}{x} = \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \cancel{\lim_{x=0}} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim \frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1.$$

7) $$\lim_{x=0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{2 \lim \sin 2x}{2x} = 2.1 = 2.$$

Lõpmata väikeste suuruste järgud.

α ja β

1) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = K$ samajärgulised.

Näit. $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$. α on kõrgemajärguline.

$$\lim_{x=0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x=0} x = 0.$$

3) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$. β on kõrgemajärguline

$$\lim \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

Kui on mitu lõpmata väikest suurust, siis võetakse üks aluseks ja nimetatakse kardinaalseks.

$\lim \frac{\alpha}{\beta^2} = K_1$ siis α teisejärguline

β on kõige alama järguline.

$\lim \frac{\alpha}{\beta^3} = K_2$ siis α kolmandajärguline.

$\lim \frac{\alpha}{\beta^n} = K_{n-1}$ siis α n järguline.

$\alpha = 1-\cos x$ ja $\beta = x$

$$\lim_{x=0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{1-\cos x}{x} = \frac{\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\cancel{2}\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.0 = 0$$

sest $x = \frac{2}{2}x$

Sest $1-\cos x$ on kõrgemajärguline.

Tuletud funktsioon.

$y = f(x)$

$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ $\qquad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$\cancel{y} + \Delta y - \cancel{y} = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ $\qquad \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Tuletud funktsioon on järelsuuruse ja põhisuuruse juurekasvude suhte piir.

$y = f(x)$. Tuletud on $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$ (lõpm. väike suurus)

$\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\text{differentsiaal}} + \varepsilon \cdot \Delta x$ → kaob ennem ära kui kõrgema järgu lõpm. väike arv.

Δx ja Δy lähenevad piirile

$dy = f'(x)dx$

dy – järelsuuruse differentsiaal

dx – põhisuuruse – " –

Ringi pinna tuletis:

$y = \pi r^2$ $\qquad y + \Delta y = \pi(r + \Delta r)^2$; $\Delta y = \pi[(r+\Delta r)^2 - r^2]$

$\Delta y = \pi(\cancel{r^2} + 2r\Delta r + \Delta r^2 - \cancel{r^2}) = \pi\Delta r(2r + \Delta r)$

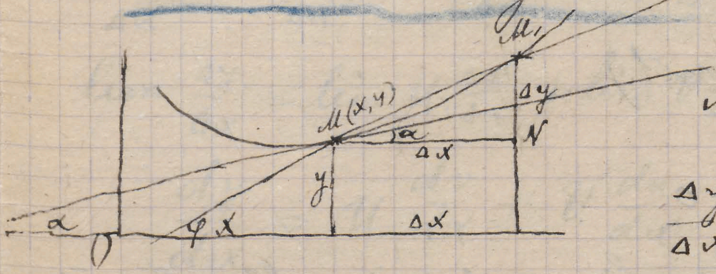
$\dfrac{\Delta y}{\Delta r} = \pi(2r + \Delta r)$ $\qquad \lim \dfrac{\Delta y}{\Delta r} = \pi \cdot 2r = \underline{2\pi r}$

$\dfrac{dy}{dx} = 2\pi r$

Ringi pinna tuletis on ringjoone pikkus.

Tuletud funktsiooni ja differentsiaali geomeetriline kujutamine.

eks.



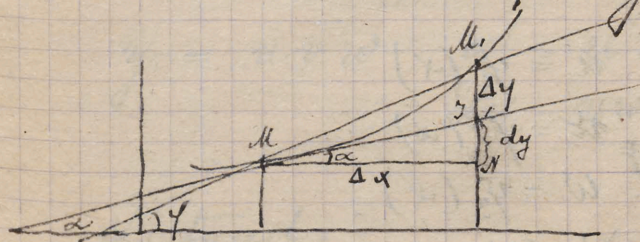
$M_1N = \Delta y$; $MN = \Delta x$

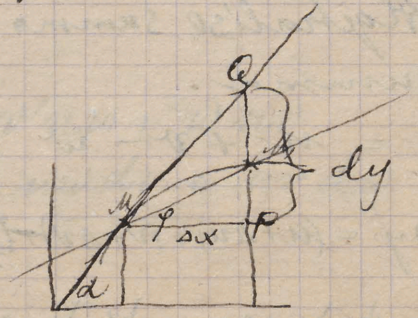
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\varphi$

$y = f(x)$ $\qquad \lim \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha = \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

Tuletis on puutuja tangens.

Mis mõte on dx ja dy?





$tg\,\alpha = f'(x)$

$MN = \Delta x$

Kolmnurgast MTN järgneb:

$NT = MN \cdot tg\,\alpha$

$NT = \Delta x \cdot f'(x) = dy$

Seega dy on NT

$QP = \Delta x \cdot tg\,\alpha = \Delta x \cdot f'(x) = dy$

Tuletud funktsiooni leidmine ongi õiguse pärast differentseerimine.

dy on puutuja ordinaadi juurekasv.?

dx ja Δx on üheväärtuslised.

Algebraliste funktsioonide differentseerimise teoreemid.

1) Jäädava suuruse tuletis on null.

$$y = f(x) = c \quad (\text{const.})$$

$$y + \Delta y = f(x+\Delta x) = c$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$ Lõpmata kõige järgu lõpmata väikse suurus,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0 \qquad dy = f'(x)\cdot dx = 0.$$

2) Algebralise summa tuletis on tuletiste algebraline summa.

$$y = u + v - w \qquad u = \varphi_1(x) \quad v = \varphi_2(x) \quad w = \varphi_3(x)$$

$$y + \Delta y = (u+\Delta u) + (v+\Delta v) - (w+\Delta w)$$

$$\cancel{y} + \Delta y - \cancel{y} = \cancel{u} - \cancel{u} + \Delta u + \cancel{v} - \cancel{v} + \Delta v - \cancel{w} + \cancel{w} - \Delta w$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx} \qquad dy = du + dv - dw$$

$$y' = u' + v' - w'$$

Kahe funktsiooni teose tuletis. eksam!

$$y = u.v \qquad u = \varphi_1(x); \quad v = \varphi_2(x)$$

$$y + \Delta y = (u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)$$

$$\cancel{y} + \Delta y - \cancel{y} = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = \cancel{uv} + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v - \cancel{uv}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$ (piirisvõttes kaob lõpp ära)

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim v\frac{\Delta u}{\Delta x} + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad \Big| \quad \frac{dv}{dx} = v' \quad du = u'dx$$

$$y' = uv' + vu' \qquad \Big| \quad dv = v'dx$$

$$dy = u\,dv + v\,du$$

Kolme teguriga.

$$y = u.v.w \qquad y' = u'vw + v'uw + w'uv$$

$$dy = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw$$

Näited.

1) $y = x \qquad y + \Delta y = x + \Delta x \qquad \cancel{y} + \Delta y - \cancel{y} = \cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}$

$\Delta y = \Delta x \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1. \qquad \lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1. \qquad \frac{dy}{dx} = 1. \quad dy = 1.dx$

$dy = dx$

$y' = x' = 1$

2) $y = x^2 \qquad y = x.x \qquad y' = x.x' + x'x = 2x\underset{1}{x'} = 2x$

$dy = 2x\,dx$

3) $y = x^3; \qquad y' = 3x^2 \qquad dy = 3x^2dx$

Jäädav suurus võib märgi alt välja tuua.

$$y = Cu \qquad u = f(x)$$

$$y' = \underset{0}{C'}u + Cu' = Cu' \qquad dy = C\,du$$

Suhte differentseerimine.

$$y = \frac{u}{v} \qquad u = f_1(x) \qquad v = f_2(x)$$

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - (v + \Delta v)u}{(v + \Delta v)v} =$$

$$= \frac{\cancel{uv} + v\Delta u - \cancel{uv} - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}; \quad \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

Suhte tuletis on murd, mille lugeja on kahe teose vahe, kus esimene (teos) on nimetaja ja lugeja tuletise teos, teine lugeja ja nimetaja tuletise teos, nimetaja on endise murru nimetaja kvadrat.

Funktsioon funktsioonist ja tema differentseerimine.

$$y = f(u) \qquad u = \varphi(x)$$

$$\text{NB } (x + \Delta x) \qquad y + \Delta y = f(u + \Delta u) \quad \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$ Toome Δu sisse.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = y' = f'(u) = \frac{df(u)}{du} = \frac{dy}{du}$$ sest $y = f(u)$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}; \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot du$$

Astme differentseerimine.

$$y = x^m; \quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^m - x^m \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\cancel{x^m} + mx^{m-1} \cdot \Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^{m-2}\Delta x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{m-3} \cdot \Delta x^3 + \dots + \Delta x^m - \cancel{x^m}}{\Delta x}$$

Kõik liikmed pääle $m x^{m-1} \cancel{\Delta x}$ muutuvad nulliks.

See liige saab koondada Δx.

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \qquad dy = mx^{m-1}dx$$

Harjutused:

3) $y = \frac{1}{x}$

1) $y = x\,;\quad y' = \frac{dy}{dx} = 1 \cdot x^{0} = 1.\quad dy = dx$

2) $y = x^2\,;\quad y' = 2x\,;\quad dy = 2x \cdot dx$

3) $y = x^3\,;\quad y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2\,;\ dy = 3x^2 dx$

4) $y = u^8 + 5u^3\,;\ \frac{dy}{du} = 8u^7 + 15x^2\,;\ dy = 8u^7 du + 15x^2 du$

5) $y = a_0 x^n + a x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{-3} + \dots a_{n-1} x + a_n$

Mitmeliikme tuletis.

$\frac{dy}{dx} = a_0 n x^{n-1} + a(n-1) x^{n-2} + a_2 (n-2) x^{n-3} + \dots a_{n-1}$

6) $y = (ax+b)^n\,;\quad (ax+b) = u$

$\frac{d(ax+b)^n}{dx} = \frac{d(u^n)}{dx} = n u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx} = n(ax+b)^{n-1} \cdot a.$

7) $y = \sqrt{ax^2+bx+c} = (ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}$

$dy = \frac{1}{2}(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(ax^2+bx+c) =$

$= \frac{1}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot (2ax+b)\,dx =$

$= \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} \cdot dx$

8) $y = f(u)\,;\quad u = \varphi(v)\,;\quad v = \psi(t)\,;\ t = \lambda(x)$

$dy = \frac{dy}{du} \cdot du\,;\quad du = \frac{du}{dv} \cdot dv\,;\ dv = \frac{dv}{dt} \cdot dt\,;\ dt = \frac{dt}{dx} dx$

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot dx$$

Näited:

1) $y = \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\,;\quad y' = \frac{(ax+b)'(\alpha x+\beta) - (ax+b)(\alpha x+\beta)'}{(\alpha x+\beta)^2} = \frac{a(\alpha x+\beta) - \alpha(ax+b)}{(\alpha x+\beta)^2} =$

$\frac{\cancel{a\alpha x} + a\beta - \cancel{a\alpha x} - \alpha b}{(\alpha x+\beta)^2} = \frac{\beta a - \alpha b}{(\alpha x+\beta)^2}$

2) $y = -\frac{1}{x^2}\quad y' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

3) $y = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{2ax+b}$

4) $y = (5x-4)^3$

5) $y = \dfrac{\sqrt{9x^2-5x+1}}{18x-5} =$

1921 I

Landesen anal. keemia
Mantil. kogused
füsioloogiline keemia
na prat.

Nautell Orgaan. keemia

Räa —

15

Analüüs II

J. Sarv

Transcendentsete funktsioonide differentseerimine.

1) $y = \sin x$ eksamil

$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$

$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$

$\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{2x + \Delta x}{2}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 1 \cdot \cos x = \cos x.$

2) $y = \cos x$

$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$

$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$

$\Delta y = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$

$dy = d\sin x = \cos x \cdot dx$; $d\cos x = -\sin x \cdot dx$

3) $y = tg\,x$

$dy = d\,tg\,x = d\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot d\sin x - \sin x \cdot d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x} dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$; $d\,tg\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$

4) $y = cotg\,x$; $dy = d\,cotg\,x = d\frac{\cos x}{\sin x} =$

$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$;

$d\,cotg\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

Samasused.

$F(x) = 0 \quad F(x+\Delta x) = 0$

$F(x+\Delta x) - F(x) = 0$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = 0 \qquad \frac{dF(x)}{dx} = F'x = 0$$

Kui on samasus õige, siis on ka differentsiaalides ta õige.

Näitused:

1) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$

$2(x+4) \equiv 2x + 8$

$2x+8 \equiv 2x + 8$

Samasusel kirjutatakse kolm kriipsu $\equiv$

2) $(3x^2-1)^2 = 9x^4 - 6x^2 + 1$

$2(3x^2-1) \cdot 3 \cdot 2x \equiv 4 \cdot 9x^3 - 2 \cdot 6x$

Trigonomeetrilised funktsioonid.

$y = \arcsin x\,; \quad x = \sin y$

$$1 = \frac{d \sin y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$1 = \cos y \cdot \dfrac{dy}{dx}\,; \qquad \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} \qquad \cos^2 y + \sin^2 y = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,; \quad d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin^2 y = x^2$

17

$\underline{y = \arccos x}$

1) $x = \cos y$

2) $1 = \dfrac{d \cos y}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

3) $1 = -\sin y \cdot \dfrac{dy}{dx}$

4) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sin y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $\dfrac{d \arccos x}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $d \arccos x = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7) $d \arcsin x + d \arccos x = 0$

$d(\arcsin x + \arccos x) = 0$

Kui tuletis null, siis peab $\arcsin x + \arccos x$ olema jäädav suurus.

$\underline{y = \operatorname{arctg} x}\,; \quad x = \operatorname{tg} y$

$1 = \dfrac{d \operatorname{tg} y}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}\,; \quad 1 = \dfrac{1}{\cos^2 y} \cdot \dfrac{dy}{dx}\,; \quad \dfrac{dy}{dx} = \cos^2 y =$

$= \dfrac{1}{\sec^2 y} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}\,; \quad d \operatorname{arctg} x = \dfrac{dx}{1+x^2}$

$\underline{y = \operatorname{arccotg} x}$

$x = \operatorname{ctg} y$

$1 = \dfrac{d \operatorname{cotg} y}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}\,; \quad 1 = -\dfrac{1}{\sin^2 y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = -\sin^2 y = -\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$d(\operatorname{arc tg} x + \operatorname{arc ctg} x) = 0$

Astmelised funktsioonid.

$y = a^x$

1) Kui $a > 1$; $x > 0$ siis $y > 1$

$y \geq 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}4?.. > 1$

Kui $x = 0$, siis $y = 1$.

2) $a > 1$, $x < 0$, siis $y < 1$

$y \lessgtr 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} < 1$

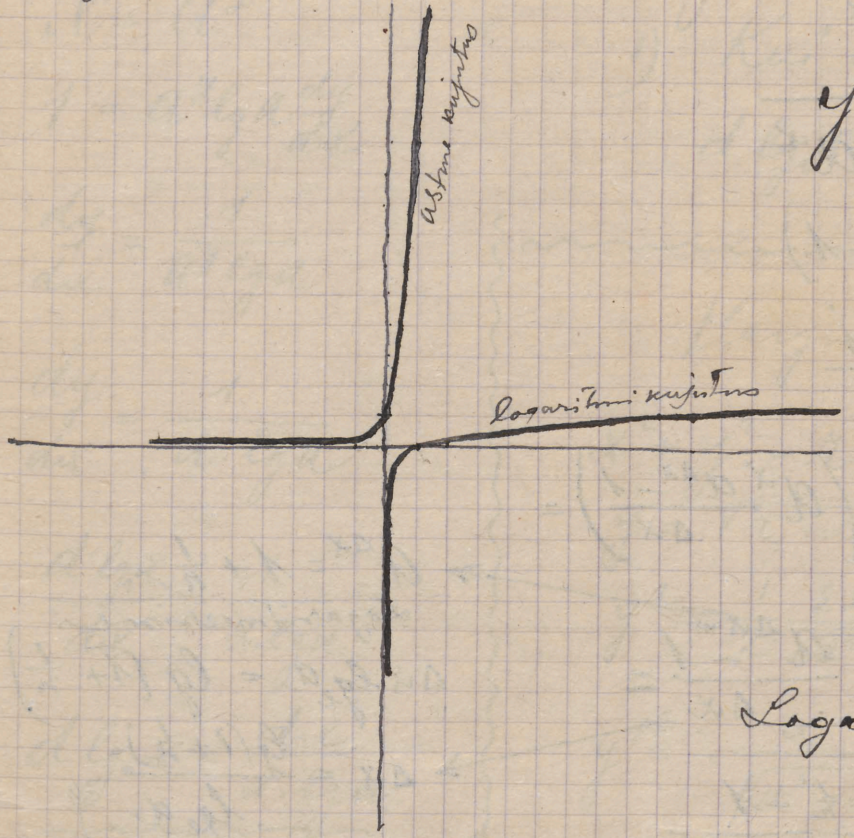
3) $a > 1$; $x = \infty$; $y = \infty$

$y = 2^{\infty} = \infty$

4) $a > 1$; $x - \infty$; $y = 0$

$y = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$

Graafiline kujutamine



$y = 10^x$

Astme kujutuseks.

x	y
0	1
1	10
2	100
-1	$\frac{1}{10} = 0{,}1$
-2	0,01
-3	0,001

$y = \lg_{10} x$

$10^y = x$

Logaritmi kujutuseks

x	y
0	$-\infty$
1	0
10	1
100	2
0,1	-1
0,01	-2
0,001	-3

$$y = a^x$$
$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$$

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x$$
$$\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\left(a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x = 0} a^x \cdot \lim \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$

$$a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{n}$$
Logaritmeerime:
$$\Delta x \, lg_e a = lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$\Delta x = \frac{lg(1+\frac{1}{n})}{lg_e a}$$

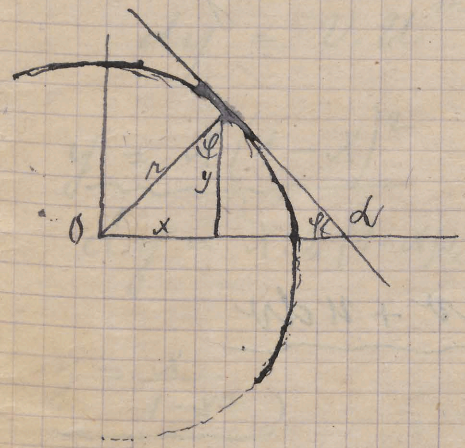
$$= a^x \cdot \lim_{n=\infty} \frac{x + \frac{1}{n} - x}{\frac{lg(1+\frac{1}{n})}{lg_e a}} =$$
$$= a^x \cdot \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot lg_e a}{n \cdot lg(1+\frac{1}{n})} =$$
$$= a^x \lim_{n=\infty} \frac{lg\, a}{\underbrace{lg(1+\frac{1}{n})^n}_{= lg e = 1}} = a^x \cdot \frac{lg\, a}{1}$$

$$dy = a^x lg\, a \cdot dx$$

Järeldus.

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot lg\, a \frac{dx}{dx}$$
Kui $a = e$
$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot 1^{lg\, e}$$

$$y = log_a x$$
$$x = a^y$$
$$1 = a^y lg\, a \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y lg\, a}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot lg\, a}$$
$$\frac{d\, lg_a x}{dx} = \frac{1}{x \cdot lg\, a}$$
$$d\, lg_a x = \frac{dx}{x \cdot lg\, a}$$



Järeldused.

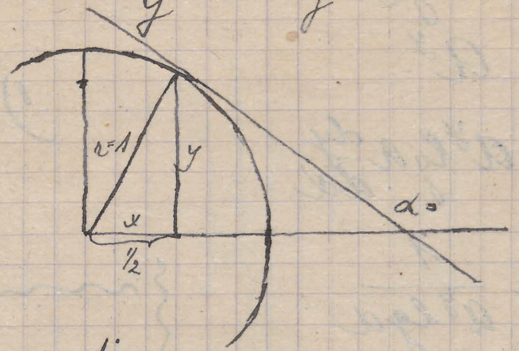
1) Kui $a = e$
$$d\, lg_e x = \frac{dx}{x \cdot 1_{lg e}} = \frac{dx}{x}$$

Harjutused.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$y' = -\frac{1 \cdot 2x}{2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}}$$
$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$
$$y' = tg\, \alpha \ ?$$

$$-\frac{x}{y} = -tg\, \varphi = tg(-\varphi) = tg(180° - \varphi) = tg\, \alpha$$
$$y' = tg\, \alpha \ !$$

2°) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\quad y' = -\frac{x}{y} = tg\alpha$



3°) $y = \sqrt{1-x^2}$

$y' = -\frac{x}{y}$

$x = \frac{1}{2}$

$y = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y' = -\frac{1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y' = -\frac{x}{y} = tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -tg\,30° = tg(-30°) = tg\,180°$ 150

$\alpha = 180°$ 150

Funktsioonide differentseerimine logaritmide abil.

$y = uv \qquad u = f_1(x)$
$\qquad\qquad\quad v = f_2(x)$

Kui rakendatud

$dy = udv + vdu$

$lg\,y = lg\,u + lg\,v$

$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$

$\frac{dy \cdot uv}{y} = \frac{du \cdot uv}{u} + \frac{dv \cdot uv}{v}$

$dy = duv + udv$

$y = u^v$, kus $u = f_1(x)$ ja $v = f_2(x)$

umbes sarnane eksamil

$lg\,y = v\,lg\,u$

$\frac{dy}{y} = v \cdot \frac{du}{u} + lg\,u\,dv \qquad dy = v\frac{du}{u} \cdot u^v + lg\,u \cdot dv \cdot u^v =$

$= v \cdot u^{v-1} du + lg\,u \cdot dv \cdot u^v =$

$= u^{v-1}(v\,du + lg\,u \cdot u\,dv)$

eksamil!

$y = x^x$ Eelmise järele.

$dy = x^{x-1}(x\,dx + lg\,x \cdot x \cdot dx) = x^x(\underbrace{1 + lg\,x}_{lg(e \cdot x)})dx =$

$= x^x \cdot lg\,ex\,dx$

$y = u^v$ ~~Eelmise järele~~. $u = f_1(x)$; $v = f_2(x)$

$dy = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v\,lg\,u\,\frac{dv}{dx}$

$y = x(1-x)^2$

$dy = x \cdot 2(1-x)dx + (1-x)^2 dx = (1-x)(\cancel{2x} + 1 - \cancel{x})dx = (1-x^2)dx$

$y = \frac{x}{1-x^2}$

$dy = \frac{(1-x^2)dx - x \cdot d(1-x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \cdot dx$

$$y = \frac{x^m}{(1-x)^n}$$

$$dy = \frac{(1-x)^n dx^m - x^m d(1-x)^n}{(1-x)^{2n}} = \frac{(1-x)^n m x^{m-1} + x^m \cdot n(1-x)^{n-1} \cdot d(1-x)}{(1-x)^{2n}} =$$

$$= \frac{(1-x)^{n-1} \cdot x^{m-1}[(1-x) \cdot m + x \cdot n]}{(1-x)^{2n}} = \frac{x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1}[m - mx + nx]}{(1-x)^{2n}(1-x)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x^{m-1}[m + x(n-m)]}{(1-x)^{n+1}} \cdot \overset{?}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{3-x^2} = \frac{d}{dx}(3-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(3-x^2) = \frac{1 \cdot \overset{-2x}{\cancel{(3-x^2)'}}}{2(3-x^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x} = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}};$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{x \cdot 0 - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$-\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$d\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2} + x(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{a^2-x^2} = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

$y = \sin^m x$; $y' = m\sin^{m-1}x \cdot \cos x$

$$y = \sin mx)^*$$

$$d \sin mx = d\cancel{\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^m x}} = ? = \underline{m . \cos mx}$$

~~$d \sin mx = \cos mx$~~?

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg}^2 x = 2\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot \overset{1}{x'}$$

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} x' \quad / \quad (\operatorname{cosec} x)' = d\frac{1}{\sin x} = d \sin^{-1} x = -1 \sin^{-2} x \cdot \cos x =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$(\sec^2 x)' = \frac{2 \overset{\frac{1}{\cos x}}{\sec x} \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \sin x}{\cos^3 x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \ ?$$

$$\frac{d}{dx}(2x + \sin 2x) = 2 + \cos 2x \cdot 2 = \underline{2(1+\cos 2x)}$$

$$\frac{d}{dx}\cos^m(a+bx) = \underline{m \cos^{m-1}(a+bx) \cdot b}$$

$$\frac{d}{dx}(3\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^3 x) = -\frac{3}{\sin^2 x} \mp 3\operatorname{cotg}^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{3(1+\operatorname{cotg}^2 x)}{\sin^2 x} =$$

$\operatorname{cosec}^2 x$?

$$= -\frac{3\sec^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{3}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = -\frac{6.2}{\sin 2x} = -\frac{12}{\sin^2 2x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin ax \cdot \sin bx) = \sin ax \cdot (\sin bx)' + (\sin ax)' \sin bx =$$
$$= \sin ax \cdot b \cdot \cos bx + a \cos ax \cdot \sin bx$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin \frac{1}{x} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\frac{1 \cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\, x \sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{1}{x} = \sin y;$$

$$\frac{d}{dx} \arccos \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

Aksamil

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = e^{ax} \cdot a = a e^{ax}$$

$$\frac{d}{dx} e^{x^2} = e^{x^2} \cdot \lg e \cdot 2x = 2x e^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx} e^{\sin x} = \cancel{\sin x}\, e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \lg e$$

$$\frac{d}{dx} \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\sqrt{x^2+1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx} \log \sin x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{d}{dx} \sin \lg x = \cos \lg x \cdot \frac{1}{x};$$

$$\frac{d}{dx} \log \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\frac{d}{dx} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{\cancel{(1-\sqrt{x})}\left[(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})' + (1+\sqrt{x})\cancel{(1-\sqrt{x})'}\right]}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})^{\cancel{2}}} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$$

$$y = \lg \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

$$y = e^{ax} \cos bx$$

$$y = \lg\left[x + \sqrt{x^2 - a^2} + \arccos \frac{a}{x}\right]$$

$$y = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$y = x^{\sin x} \qquad \cancel{y' = \sin x \cdot x^{\sin x - 1} \cdot \cos x}$$

$$y' = x^{\sin x} \lg x \cdot \cos x$$

$$\lg y = \sin x \cdot \lg x \; ; \quad \cancel{dlg} \; \frac{dy}{y} = \frac{\sin x}{x} + \lg x \cdot \cos x$$

$$dy = \sin x \cdot x^{\sin x - 1} + x^{\sin x} \lg x \cdot \cos x = x^{\sin x - 1}(\sin x + x \lg x \cdot \cos x)$$

$$y = x^{x^x} \; ; \quad \boxed{y' = x^{x^x} \lg x \cdot x^x \lg x = \cancel{\lg^2 x^{x^x}} \; x^x \cdot x^{x^x} \lg^2 x}$$

Olevat vale! ~~on kull 6. gel~~. (ise aled!)

x^{x^x}

x^{x+x}

x^{2+x}

$$\lg y = x^x \lg x \; ; \quad \lg \lg y = x \lg x + \lg \lg x$$

$$\frac{d \lg y}{\lg y} = \frac{x + \lg x}{1 + \lg x} + \frac{d \lg x}{\lg x}$$

$$\cancel{dlg} \; \frac{dy}{y \lg y} = \left(\frac{1}{x} + \lg^2 x + \frac{dx}{x \lg x}\right) x^{x^x} \cdot x^x \lg x \Big\} \quad \text{Tohoh != Tohhoh}$$

Kõrgema järgu tuletised ja differentsialid.

$$y = f(x) \qquad y'' = f''(x)$$

$$y' = f'(x) \qquad y''' = f'''(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad y^n = f^n(x)$$

differentsiaalid.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad dy = f'(x) \cdot dx$$

Differentseerida kui kasvatist.

$$d\,dy = f'(x) \cdot d\,dx + dx \cdot d\,f'(x)$$

$$ddy = f'(x) \underbrace{d\,dx}_{ddx = 0} + dx \cdot f''(x)\,dx$$

$$d^2y = 0 + f''(x)\,dx^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y'' \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$$

klambrides

$$y = x^m$$
$$y' = m x^{m-1}$$
$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$
$$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$
$$y'''' = m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}$$
$$y^{(k)} = m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-k+1)x^{m-k}$$
$$y^{(m)} = m(m-1)(m-2)\cdots\overset{(k-1)}{(m-k+1)}x^{m-k}\cdots\underbrace{\overset{1}{(m-m+1)}}\ \overset{1}{x^{m-m}}$$

viimane lüge võrdub 1-le

$$y^{(m+1)} = m(m-1)(m-2)\cdots 3x^2\cdot 2x\cdot 1\cdot\underbrace{(m-m)}_{0}\underbrace{x^{m-m-1}}_{x^{-1}} = 0$$

Seega funktsiooni (x^m) tuletis, nimelt ~~...~~ „$m+1$" võrdub nullile. Kui m on negatiivne ehk murd, siis ei lõpe kunagi.

Näitus.

$y = x^3$; $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$; $y''' = 6$; $y'''' = 0$.

Neljas tuletis võrdub nullile.
(3+1)

$y = a^x$; $y' = a^x \lg a$. $y'' = a^x\cdot 0 + \lg a\cdot a^x\lg a = a^x\lg^2 a$

$y''' = a^x\cdot 0 + \lg^2 a\cdot a^x\cdot\lg a = a^x\lg^3 a$

$$y' = a^x\lg a$$
$$y'' = a^x\lg^2 a \text{ ehk } a^x(\lg a)^2$$
$$y''' = a^x\lg^3 a$$
$$y^{(n)} = a^x\lg^n a$$

$$y = e^x$$
$$y' = e^x\cdot\lg e = e^x$$
$$y'' = e^x\cdot\lg^2 e = e^x$$
$$y'' = e^x$$
$$y^{(n)} = e^x$$

eksamil

$$y = \sin x$$
$$y' = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$y'' = \sin\left(\frac{2\pi}{2}+x\right)$$
$$y''' = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$
$$y'''' = \sin\left(\frac{4\pi}{2}+x\right)$$
$$y^{(n)} = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$$

$$y = \cos x$$
$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$y'' = \cos\left(\frac{2\pi}{2}+x\right)$$
$$y^{(n)} = \cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$$

$$y = \lg x$$
$$y' = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$y'' = (-1)x^{-2}$$
$$y''' = (-1)(-2)x^{-3}$$
$$y^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n+2)(-n+1)x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$$

Kõrgema järgu tuletised.

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}\cdots a_{n-1}x + a_n$$ $(n+1)$ lüget

Algebraline polinoom üleüldisel kujul.

$$y' = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + a_2(n-2)x^{n-3}\cdots a_{n-1} + 0$$
$$y'' = a_0n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + 0 + 0$$
$$y''' = a_0n(n-1)(n-2)x^{n-3} + a_1(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} + \cdots\ 0+0+0$$
$$y^{(n)} = a_0n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2\cdot 1\cdot x^0 = \text{jäädav suurus.}$$
$$y^{(n+1)} = 0,$$ sest jäädava suuruse tuletis on null.

$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

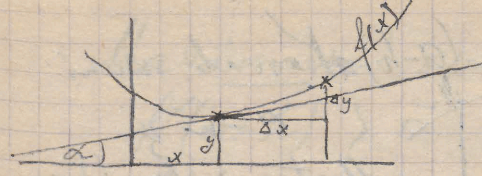
Funktsioonide kasvamine ja kahanemine.

$y = f(x) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$

$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

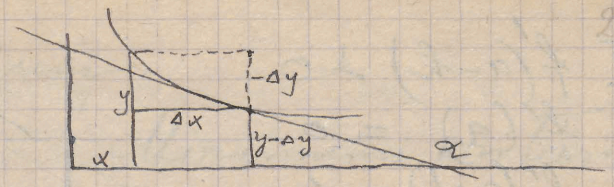
Missugune on tuletise märk? Ripub ära Δx ja Δy märkidest.

On nad ühesuguste märkidega, siis tuletis positiivne, on aga teineteisest erinevate märkidega, siis tuletis negatiivne.
Võib asja peale nii vaadata, et Δx on alati positiivne, siis on loomulik, et tuletis ja funktsiooni juure kasv (Δy) on ühesuguse märgiga. On Δy positiivne, siis ka tuletis positiivne; on Δy negatiivne, siis ka tuletis negatiivne. Seda võib geomeetriliselt kujutada.



Siit on näha: „x" suurendamise läbi, saab „y" positiivse juurekasvu. $tg\alpha = y' = f'(x)$ on positiivne.

Kui funktsioon kasvab, siis tuletis positiivne.



Siin vastupidi: suurendame „x"-i, siis „y" väheneb, s.t. „Δy" on negatiivne. $tg\alpha = f'(x)$ on negatiivne suurus.

Kui tuletis negatiivne, siis funktsioon kahaneb.

Maximum ja minimum

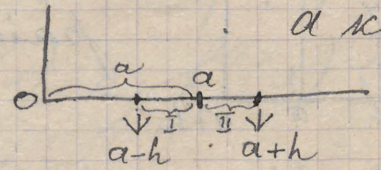
Eksamil

Selleks, et näha kuidas funktsioon muutub, tuleb teda vaadelda kahes intervallis. Nimelt teda tuleb vaadelda kolme väärtuse juures.

$(a-h) < a < (a+h)$

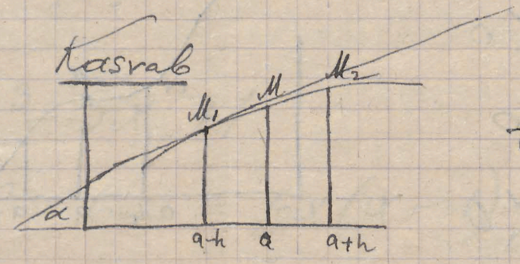
I intervaal (a−h) kuni a

II intervaal a kuni a+h.



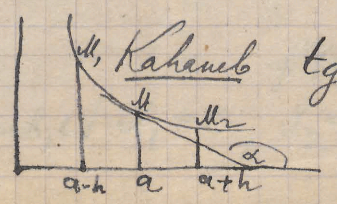
Juhust

1) $f'(a-h) > 0$
$f'(a) > 0$
$f'(a+h) > 0$



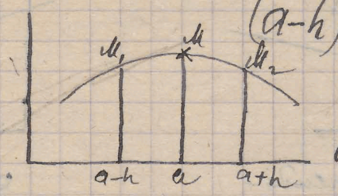
$tg\alpha = f'(x) > 0$

2) $f'(a-h) < 0$
$f'(a) < 0$
$f'(a+h) < 0$



$tg\alpha = f'(x) < 0$

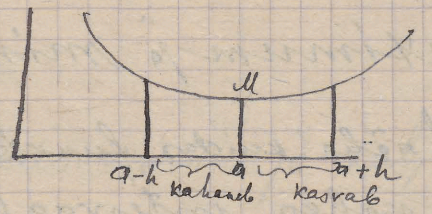
III $f'(a-h) > 0$
$f'(a) = 0$
$f'(a+h) < 0$



(a-h)-st Kasvab kuni a-ni; a-st kuni (a+h) kahaneb

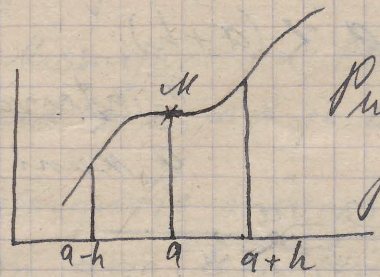
Siin on ~~maximum~~ punktis M ehk (funktsiooni f(a) (~~väärtuse~~) juures.
$x=a$

IV $f'(a-h) < 0$
$f'(a) = 0$
$f'(a+h) > 0$



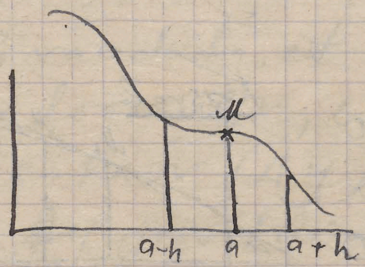
Siin minimum.

V $f'(a-h) > 0$
$f'(a) = 0$
$f'(a+h) > 0$



Punkt M - mis on painde koht.

$f'(a-h) < 0$
$f'(a) = 0$
$f(a+h) < 0$



Nüsama.

Maximumi kriteerium

$f'(a-h) > 0$
$f'(a) = 0$
$f'(a+h) < 0$

Minimumi kriteerium

$f'(a-h) < 0$
$f'(a) = 0$
$f'(a+h) > 0$

Et leida neid sarnasel viisil, on tarvis palju vaeva näha.
Lihtsamad kriteeriumid on teise järgu tuletised.

Võtame juhtumise $f'(x)=0$. Tarvis aga määrata, kas on max või min.
Selleks võtame $f''(x)$; On

$f'(x)=0;\ f''(x) < 0$, siis maximum

$f'(x)=0;\ f''(x) > 0$, siis minimum.

Näitus.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1);$

$6x(x-1) = 0.$

$6x = 0$
ehk
$x - 1 = 0$

Järgneb, et $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $f''(x) = 12 \cdot 1 - 6 = \underline{6}$

$f''(x) = 12x - 6$

Kui siia x-si asemele panna $x_1 = 0$ ja siis ka $x_2 = 1$, saame

$f''(x) = 12 \cdot 0 - 6 = \underline{-6}$

Tähendab, $f'(x)=0$ võib olla maximum kui $x=0$, sest siis on $f''(x)<0$.
Minimum on siis, kui $x=1$.

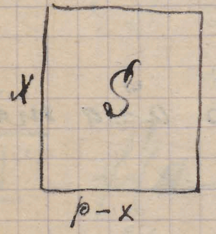
Kui suur on funktsiooni maximaalne väärtus?

Selleks paneme $x=0$ antud funktsiooni.

$f_{max.}(x) = 2.\cancel{0}^3 - 3\cancel{0}^2 + 1 = +1$; $\underline{\underline{f(0) = +1}}$.

Kui suur minimaalne väärtus?

$f_{min.}(1) = \overset{2}{2.1^3} - \overset{-3}{3.1^2} + 1 = 0$; $\underline{\underline{f(1) = 0}}$.



2p.-perimeeter

Kunas on S kõige suurem?

$S = x.(p-x)$

$S' = 1.(p-x) - x = \underline{p-2x}$ $p-2x=0$; $x = \frac{p}{2}$

$S'' = -2$. See tähendab, et funktsioon (S'') iga x-si väärtuse juures on -2, misdugi ka $x = \frac{p}{2}$

Tähendab antud funktsioon $S = x(p-x)$ on maximum is $x = \frac{p}{2}$;

Kui suur on see maximum?

$S_{max} = \frac{p}{2}\left(p - \frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2}\cdot\frac{p}{2} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$

See on ruut.

Kus $\frac{p}{2}$ perif

Eksami

27

$(x+1)(x-1)^2$
$(x+1)(x-1)(x-1)$
$(x^2-1)(x-1)$
$x^2(x-1)-(x-1)$

$\underline{f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 1}$

$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 60x^2 + 60x = 60x(x^3 - x^2 - x + 1) =$

$= 60x(x+1)(x-1)^2$;

$60x(x+1)(x-1)^2 = 0$

$60x = 0$ $x+1 = 0$ $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$.

1) $x = 0$. 2) $x = -1$. 3) $x = 1$.

$f''(x) = 240x^3 - 180x^2 - 120x + 60 = 60(4x^3 - 3x^2 - 2x + 1)$;

$f''(0) = 60(0-0-0+1) = \underline{60}$. minimum

$f''(-1) = 60(-4 - 3 + 2 + 1) = -240$ maximum.

$f''(+1) = 60(4 - 3 - 2 + 1) = 0$

Kui teisejärgu tuletis on null, siis peab valima abiks intervaalid.

Tähendab, $x=+1$ ei saa teada veel kumb on.

Võtame $\underset{1-h}{x-h}$ ja $\underset{1+h}{x+h}$.

$f'(x-h) = 60(x-h)(x-h+1)(x-h-1)^2$

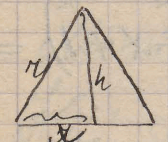
[et $x = +1$ ei kõlba, siis võtame tema asemele, s.t. ühe asemele $x-h = 1-h$ ja $x+h = 1+h$]

$f'(1-h) = 60(1-h)(2-h)(-h)^2 > 0$ Tähendab I intervaalis positiivne.

$f'(1+h) = 60(1+h)(2+h)(+h)^2 > 0$ II intervaalis positiivne.

Järjelikult on meil tegemist käändepunktiga.

Kuidas kõige kasulikum on filter teha?



$v = \frac{\pi x^2 \cdot h}{3}$; $h^2 + x^2 = r^2$; $x^2 = r^2 - h^2$

$v = \frac{\pi (r^2 - h^2) \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} - \frac{\pi h^3}{3}$

$v' = \frac{\pi r^2}{3} - \pi h^2$; $v'' = -2\pi h$

$\frac{\pi r^2}{3} - \pi h^2 = 0$ $\pi h^2 = \frac{\pi r^2}{3}$; $h^2 = \frac{r^2}{3}$; $h = r\sqrt{\frac{1}{3}}$

Et $h = +r\sqrt{\frac{1}{3}}$, siis v'' on negatiivne, selle väärtuse juures on maximum.
Kui suur on maximum?

$v = \frac{\pi\left(r^2 - \frac{r^2}{3}\right) \cdot r\frac{1}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{3\pi r^3 \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi r^3}{3\sqrt{3}}}{3} = \pi r^3\left(\frac{9}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{9\sqrt{3}}\right) =$

$= \frac{\pi r^3 8}{9\sqrt{3}}$

$\cancel{r^2 + x^2 = \frac{r^2}{3}}$

$\cancel{3r^2 + 3x^2 = r^2 \quad 3x^2 = -2r^2}$

$\cancel{2r^2 + 3x^2 = 0}$

$r^2 - x^2 = \frac{r^2}{3} = 3r^2 - 3x^2 = r^2$

$2r^2 - 3x^2 = 0$

$3x^2 = 2r^2$

$x^2 = \frac{2}{3} r^2$

$x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$

$2\pi R$

$\frac{2\pi r}{360} =$

$\frac{\left(2\pi r - 2\pi r\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cdot 360}{2\pi r} = \frac{2\pi r\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) 360}{2\pi r} =$

$360° - 360\sqrt{\frac{2}{3}} = 2° = 65°$ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\frac{360}{\sqrt{3}} =$

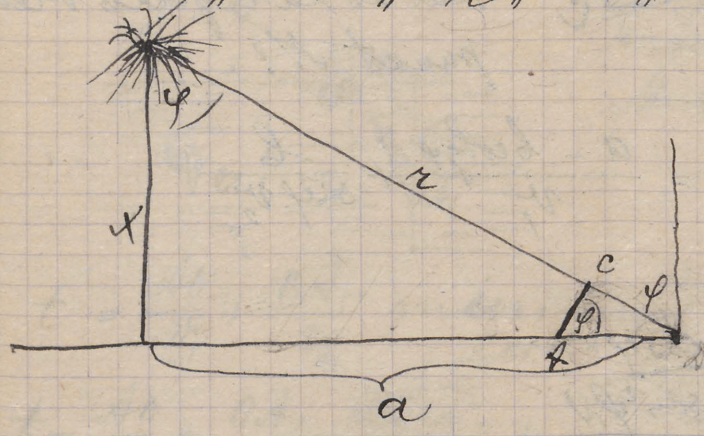
Sektori nurk peab olema 65°

Kuidas kõige kasulikum uisuteed valgustada.

Kui kõrge peab olema valgustuse sammas, et heledus oleks kõige suurem.

Heledus on 1 sm kaugusel $H = 1$.

" r " " $H_r = \frac{1}{r^2}$

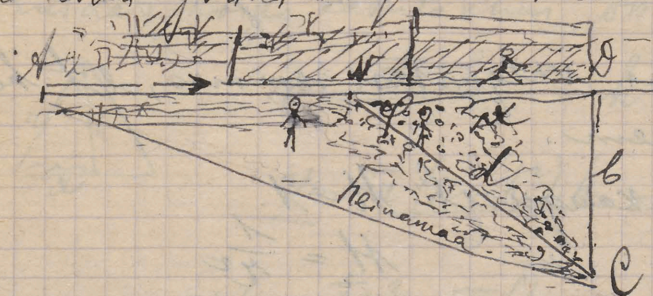


$\cos\varphi = \frac{x}{r}$; $r = \sqrt{x^2 + a^2}$

$H = \frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{x}{r^3} =$

$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$ $H' =$

Kuidas jõuda kõige kiiremini punkt A-st – kuni C.



Maantee

Maanteel kiirus v_1

Heinamaal kiirus v_2

Kus kohal peab olema punkt N?

$$t = \frac{AN}{v_1} + \frac{NC}{v_2}$$

$$t = \frac{a-x}{v_1} + \frac{d}{v_2} \qquad t = \frac{a - b\,\mathrm{cotg}\,\varphi}{v_1} + \frac{b}{\sin\varphi \cdot v_2}$$

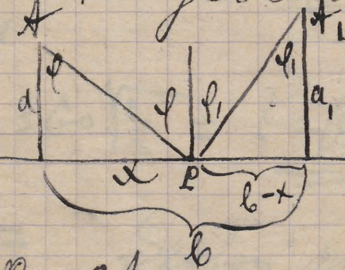
$$t' = \frac{b}{v_1 \cdot \sin^2\varphi} - \frac{b \cdot \cos\varphi}{v_2 \sin^2\varphi};$$

$$\frac{b}{\cancel{v_1 \sin^2\varphi}} - \frac{\cancel{b} \cdot \cos\varphi}{v_2 \cancel{\sin^2\varphi}} = 0; \quad \frac{1}{v_1} - \frac{\cos\varphi}{v_2} = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{v_2}{v_1} \qquad \text{Kui } v_1 : v_2 = 2, \text{ sis } \cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi = 60^\circ$$

Peegeldamise seadus.



Kuidas saab kõige kiiremini punkt A-st A_1-se. ?

$$x \cdot \sqrt{a_1^2+(b-x)^2} = (b-x)\sqrt{a^2+x^2}$$

võtame kvadratisse.

$$x^2(a_1^2+(b-x)^2) = (b-x)^2(a^2+x^2)$$

Kahts on φ ja φ_1 võrdsed?

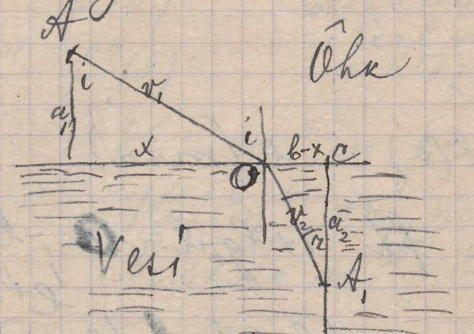
$S = AP + PA_1$, kunas minimum

$$S = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a_1^2+(b-x)^2}$$

$$S' = \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{a_1^2+(b-x)^2}} = 0$$

$$\overset{\sin\varphi}{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}} = \overset{\sin\varphi_1}{\frac{b-x}{\sqrt{a_1^2+(b-x)^2}}}$$

Valguse kiire murdumine.



Millal jõuab valguse kiir kõige kiiremini A kuni A_1. Missugune on murdumisenurk?

$$t = \frac{AO}{v_1} + \frac{OA_1}{v_2}$$ ~~maximum~~ minimum leida.

$$t = \frac{AO}{v_1} + \frac{OA_1}{v_2} = \frac{\sqrt{a_1^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+a_2^2}}{v_2};$$

$$t' = \frac{\cancel{v_1 \cdot 2} \, x}{\cancel{2} v_1 \sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1 \cdot \cancel{2}(b-x)\cdot 1}{\cancel{2} v_2 \sqrt{(b-x)^2+a^2}} = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{b-x}{v_2\sqrt{(b-x)^2+a^2}} =$$

$$\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2}; \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n$$

$$y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$ Vastus: $f(+1) = 3$ max. $f(-1) = \frac{1}{3}$ min.

$$y' = \frac{(1-x+x^2)(2x+1) - (1+x+x^2)(2x-1)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1-x+x^2)^2} =$$

$$y'' = \frac{-(1-x+x^2)^2 4x - (2-2x^2)2(1-x+x^2)(2x-1)}{(1-x+x^2)^4} = \frac{[illegible]}{(1-x+x^2)^4} =$$

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{(1-x+x^2)^4} =$$

$$= \frac{x^5-x^4-2x^3+3x^2-3x}{(1-x+x^2)^4} \quad x = \pm 1; \ f''(1) = \frac{-2}{1} = -2 \text{ max. on.}$$

$y = x \cdot e^{-x}$ Vastus $f(1) = \frac{1}{e}$ (max); $f(\infty) = 0$ (min)

$y' = x \cdot e^{-x} \cdot (-1) + 1 \cdot e^{-x} = e^{-x}(-x+1)$; $e^{-x}(-x+1) = 0$; $x = +1$; $x = +\infty$

$y'' = e^{-x} + (x+1)e^{-x} = e^{-x}(2+x)$

$y = x \cdot \log_e x$ $f(e) = e$ (min)

$y' = x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 1 = 1 + \lg_e x$ $1 + \lg_e x = 0$, $\lg_e x = -1$, $e^{-1} = x$

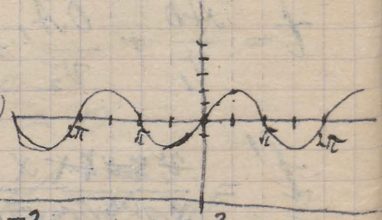
$y'' = \frac{1}{x}$; $f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e$ (min). $y = e^{-1} \lg_e e^{-1} = \frac{1}{e}(\lg_e 1 - \lg e) = -\frac{1}{e}$

$y = \sin x$ Kunas max ja kunas min?

$y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$

$\cos x = 0$ $-\sin x = -\sin 90° = -1$ (max)

$x = 90° = \pm\frac{\pi}{2}$ $-\sin(-90°) = +1$ (min)



$y = \operatorname{tg} x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ $y'' = (\cos x)^{-2} = +2(\cos x)^{-3} \sin x =$

$\frac{1}{\cos^2 x} = 0 = \sec^2 x$; $= \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$

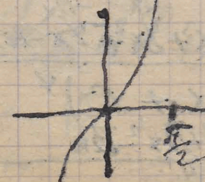
võimatu.

Ei olegi ei max ei min. $x = 0$ on pöördpunkt.

Kuhu poole kumerused?

$h > 0$ on kumerus allapoole.

$h < 0$ on — „ — ülespoole.



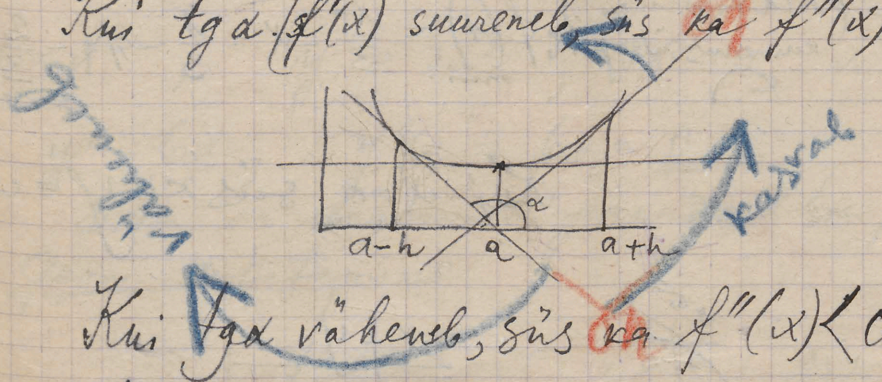
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$ 90°	∞

Teise järgu tuletise geomeetriline kujutus.

$y = f(x)$ Esimese järgu tuletis y' on y kohta
$y' = f'(x)$ seesama, mis y'' on y' kohta.
$y'' = f''(x)$ (Peab vastupidi ütlema: II järgu tuletis on y' kohta jne).

Kui y'' on positiivne, siis funktsioon $f'(x)$ kasvab
Kui y'' on negat., siis „ $f'(x)$ kahaneb.
Niisama oli ju lugu $f'(x)$ ja $f(x)$-ga.

Kui $\operatorname{tg}\alpha$ ($f'(x)$) suureneb, siis ka $f''(x) > 0$.



Kui $\operatorname{tg}\alpha$ väheneb, siis ka $f''(x) < 0$.

Seda näeme joonestusel. $f(a-h)$ kuni $f(a)$ algfunktsioon $f(x)$ kahaneb; kuid kasvab ~~ka~~ esimese järgu tuletis $f'(x)$, s.t. $\operatorname{tg}\alpha$ ~~väheneb~~ kasvab. (Järjelikult, väheneb $\operatorname{tg}\alpha$, siis ka $f''(x) < 0$).

$\operatorname{tg}\alpha$ $(a-h)$ kuni $f(a)$ kuni $f(a+h)$ ~~$f(x)$~~ kasvab, II j. tuletis $f''(x)$ on positiivne, s.t. $\operatorname{tg}\alpha$ suureneb, ~~$f''(x)$ ka peab positiivne olema~~. Kumerus allapoole, ja vastupidi.

$\pm f''(x)$ näitab kas ~~$\operatorname{tg}\alpha$ suureneb või väheneb~~ kumerus on ülespoole või allapoole.

Leida pööri punkt.

$f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ Missugune on tema kuju koordinaatide süsteemis?

$f'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = 0$.

$\boxed{\begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}}$

Kui suur min? ja max?

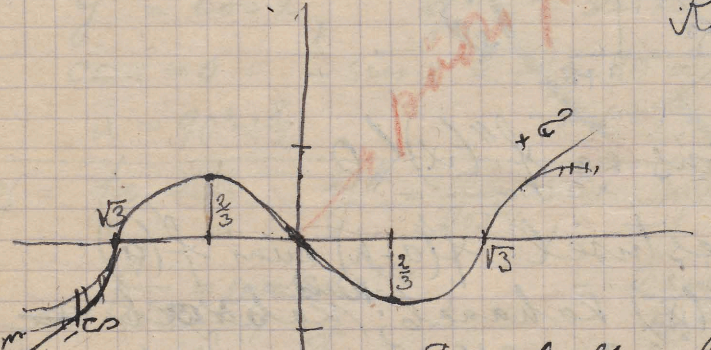
$f''(x) = 2x$

$f''(1) = +2$ (minim) kumerus allapoole $\quad f(-1)_{max} = \frac{x^3}{3} - x = -\frac{1}{3} + 1 = +\frac{2}{3}$

$f''(-1) = -2$ (maximum) kumerus ülespoole $\quad f(1)_{min} = \frac{x^3}{3} - x = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ min.

pööri punkt.

Kui $x = 0$, siis ka $y = 0$.



x	y
0	0
-1	$+\frac{2}{3}$
1	$-\frac{2}{3}$
$+\sqrt{3}$	0
$-\sqrt{3}$	0

Et leida, kus kohal ta veel lõikab x telge, teame, et siis $y = 0$ ehk

$y = x(x^2 - 3) = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$

$x = 0$;

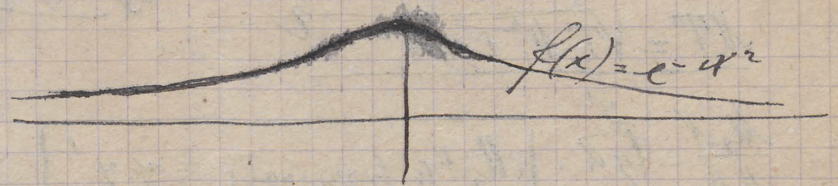
$\boxed{f(x) = e^{-x^2}}$; ~~$f'(x) = e^{-x^2}$; $f''(x) = e^{-x^2}$; $f''(x)$.~~

$\frac{e^{-x^2}}{1} = 0$; $\frac{1}{e^{x^2}} = 0$; $\cancel{x \neq 0}$; $\frac{\lg 1}{x^2 \lg e}$ $\frac{\lg 1}{x^2} = 0$, $x = \pm\infty$

$f(x) = e^{-x^2}$; $f'(x) = -e^{-x^2} \cdot 2x = -2x e^{-x^2}$

$f''(x) = +2x \cdot 2x \cdot e^{-x^2} - e^{-x^2} \cdot 2 = (2x^2 - 1) 2e^{-x^2}$

$-2x \cdot e^{-x^2} = 0$, $x = 0$, $x = \pm\infty$ | $f''_{max}(0) = -2$; $f''(\pm\infty) = 0$ Pööripunkt.



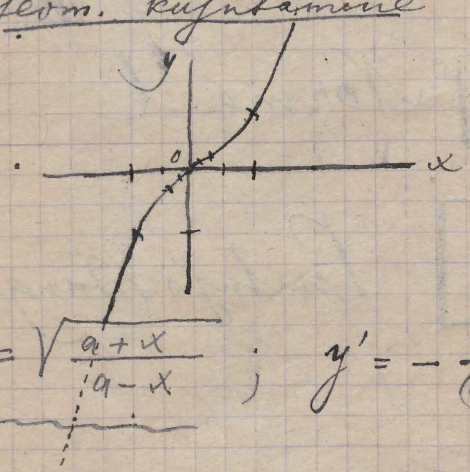
$y = x^3$; $y' = 3x^2$; $3x^2 = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$.

$y'' = 6x$; $y''(0) = 6 \cdot 0 = 0$

Siin on tegemist painde ehk pööripunktiga.

Geom. kujutamine

Kuidas on kumerused?



x	y
0	0
1	1
-1	-1
$+2$	8
-2	-8

x	y
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{64}$

$y''_{(0-h)} = -6h$; tga väheneb

$y''_{(0+h)} = 6h$ tga kasvab.

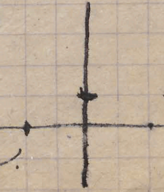
$y = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$; $y' = -\frac{x}{(a-x)\sqrt{a^2-x^2}}$; $y'' = \frac{x - 2a(a+x)}{2(a-x)(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$

$\frac{x}{(a-x)\sqrt{a^2-x^2}} = 0$; $x(a-x)\sqrt{a^2-x^2} = 0$; $x = 0$. $x = a$;

x	y
0	1
a	∞

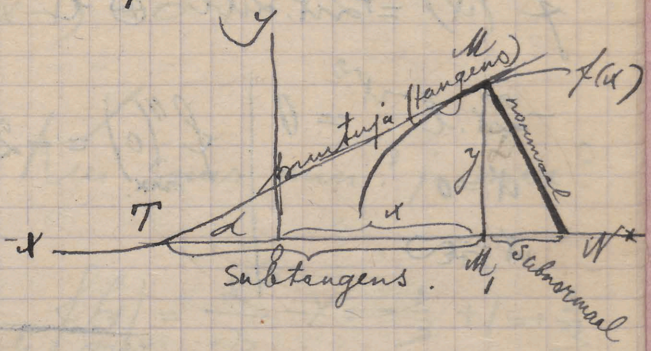
$f''(0) = \frac{-2a^2}{2a^2\sqrt{a^2}} = -\frac{2a^2}{2a^4} = -\frac{1}{a^2}$ maximum.

$f''(a) = \frac{a - 2a(a+a)}{0} = \frac{a - 4a^2}{0} = -\infty$ maximum.



Mõned geomeetrilised ettekujutused.

Subtangens. Subnormaal ja normaal



$y = f(x)$

$\operatorname{tg}\alpha = f'(x) = y'$

$MT = \sqrt{TM_1^2 + MM_1^2}$?

$\frac{M_1N}{\underbrace{MM_1}_{y}} = \overset{y'}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\boxed{M_1N \text{(subnormaal)} = y y'}$ Subnormaal

$\frac{\overset{y}{MM_1}}{TM_1} = \overset{y'}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\boxed{\underset{\text{subtg.}}{TM_1} = \frac{y}{y'}}$ Subtangens

$\underset{\text{(normaal)}}{MN} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = \boxed{y\sqrt{1+y'^2}}$ Normaal

$\underset{\text{Puutuja (Tangens)}}{MT} = \sqrt{\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2} = \boxed{\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}}$ Puutuja (Tangens)