

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Heleen Saarse
Osaliste moodulite tensorsorrutis

Matemaatika ja statistika õppekava

Matemaatika eriala

Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad: Kristo Väljako, PhD
prof. Valdis Laan

TARTU 2024

OSALISTE MOODULITE TENSORKORRUTIS

Magistritöö

Heleen Saarse

Lühikokkuvõte

Käesolevas magistritöös uuritakse osalisi mooduleid üle ringide ja nende tensorkorrutist ning selle omadusi. Töös defineeritakse nii vasak- ja parempoolsed osalised moodulid kui ka osalised bimoodulid ning nende homomorfismid. Järgmiseks defineeritakse osaliste moodulite osalised faktormoodulid ning sõnastatakse ja tõestatakse homomorfismi-teoreem osaliste moodulite jaoks. Edasi defineeritakse osaliste moodulite tensorkorrutis ja osaliste moodulite homomorfismide tensorkorrutis. Tõestatakse tensorkorrutisega seotud omadused, osaliste moodulite hom-funktori ja tensorfunktori olemasolu ning lõpuks viimaste adjunktsioon. Tulemused on üldistused tulemustele K. Väljako raamatus „Idempotentsete ringide Morita ekvivalentsus“ ning analoogid tulemustele H. Saarse ja K. Väljako artiklis „Tensor product of partial acts“.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebrara, rühmateooria

Märksõnad: algebralised struktuurid, ringid, ringiteooria, moodulid

TENSOR PRODUCT OF PARTIAL MODULES

Master's thesis

Heleen Saarse

Abstract

In this Master's thesis partial modules over rings and tensor product of partial modules and its properties are studied. Left and right partial modules, partial bimodules and their homomorphisms are defined. Next, partial quotient modules are defined and the fundamental homomorphism theorem for partial modules is proven. Also, the tensor product of partial modules and the tensor product of homomorphisms of partial modules is defined. Some properties of the tensor product, the existence of hom-functors and tensor functors are proven. Finally it is shown that the hom-functor and the tensor functor are adjoint functors. The results are generalizations of the results from K. Völjako's book „Idempotentsete ringide Morita ekvivalentsus“ and analogues of the results from H. Saarse's and K. Völjako's article „Tensor product of partial acts“.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory

Key Words: algebraic structures, rings, ring theory, modules

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Taustateadmised	6
1.1 Ringidest ja moodulitest	6
1.2 Kategooriateooriast	7
2 Osalise mooduli definitsioon	9
2.1 Osalise mooduli definitsioon ja sellega seotud mõisted	9
2.2 Osaliste moodulite näited	13
3 Osaliste moodulite faktoriseerimine ja homomorfismiteoreem	15
4 Osaliste moodulite tensorkorrutis	21
4.1 Osaliste moodulite tensorkorrutis ja selle omadused	21
4.2 Osaliste moodulite homomorfismide tensorkorrutis	32
4.3 Tensorfunktori eksaktsus	35
5 Tensorfunktori ja hom-funktori adjunktsioon	40
Kasutatud kirjandus	48

Sissejuhatus

Käesolev magistritöö uurib osalisi mooduleid üle assotsiatiivsete ringide. Me ei eelda, et ringi korrutamine oleks kommutatiivne või et selle tehte suhtes leiduks ühikelement.

Osaline n -kohaline algebraline tehe hulgal A on osaline kujutus hulgast A^n hulka A . See tähendab, et mingite argumentide väärtuste korral on tehte tulemus defineeritud, aga mingite teiste korral ei pruugi olla. Näiteks lahutamist võib vaadelda osalise kahekohalise tehtena naturaalarvude hulgal. Nii võib rääkida osalistest algebralistest struktuuridest, kus mingid tehted on kõikjal defineeritud, aga mingid tehted on osalised. Osalisi algebralisi struktuure on käsitletud näiteks raamatus [5]. Naturaalarvude lahutamise näite põhjal kirjeldavad osalised algebralised struktuurid tihti loomulikke olukordi. Osalised rühmade toimed võttis aastal 1998 kasutusele Ruy Excel artiklis [4], mis andis osaliste toimete uurimisele hoogu juurde. Kuigi osalisi struktuure on uuritud palju, vaata näiteks ülevaateartikleid [2, 1, 3], siis tundub, et konkreetset osalistele moodulitele pühendatud töid põhimõtteliselt avaldatud ei ole, kuigi moodulid on ühed algebra põhistruktuuridest. Ainus, mille käesoleva töö autor leida suutis, on artikkel [9], kus käsitletakse osalisi toimeid kategooriselt. Märgime aga ära, et käesolevas töös defineerime osalised moodulid üldisemalt kui artiklis [9].

Käesoleva magistritöö eesmärk on kirja panna artikli [8] definitsioonide ja tulemuste analoogid osaliste moodulite jaoks. Seejuures on suur osa tulemustest raamatu [10] vastavate osade üldistused moodulite juhult osalise moodulite juhule. Kuna aga raamat [10] pole magistritöö esitamise ajal veel ilmunud, siis võib sealne lausete nummerdus muutuda, seega tasub ka vastavatesse viidetesse siin töös suhtuda leebelt. Lisaks on artikkel [8] käesoleva magistritöö autori bakalaureusetöö „Osaliste polügoonide tensorkorrutis“ põhjal kirjutatud ja niisiis on magistritöö suuresti bakalaureusetöö loogiline edasiarendus.

Järgnevalt anname ülevaate käesoleva magistritöö sisust ja struktuurist.

Esimene peatükk annab vajalikud taustateadmised mõistmaks edasist magistritööd. Raamatust [10] tuuakse välja ringide ja moodulitega seotud põhimõisted. Samuti tutvustatakse raamatu [7] põhjal hom-funktori ning kaasfunktorite mõisteid.

Teine peatükk tutvustab osalise mooduli mõistet. Esimeses alapeatükis defineeritakse osalised moodulid ning osalised bimoodulid. Lisaks defineeritakse osaliste moodulite homomorfismid ning näidatakse, et osalised moodulid koos vastavate homomorfismidega moodustavad kategooria. Selle alapeatüki definitsioonid on raamatu [10] vastavate definitsioonide üldistused või raamatu [5] vastavate definitsioonide erijuhud. Seejuures on definitsioonid ja tulemused artikli [8] definitsioonide ja tulemuste analoogid osaliste moodulite juhule. Teises alapeatükis

tuuakse mõned näited osalistest moodulitest.

Kolmas peatükk vaatleb osaliste moodulite faktoriseerimist. Defineeritakse osaline faktormoodul ja tõestatakse homomorfismiteoreem osaliste moodulite jaoks. Peatüki definitsioonid ja tulemused on raamatu [10] vastavate definitsioonide ja tulemuste üldistused, mis põhinevad raamatu [5] vastavatel osadel.

Neljas peatükk käsitleb osaliste moodulite tensorkorrutist ning selle omadusi. Esimeses alapeatükis antakse osaliste moodulite tensorkorrutise definitsioon ja konstruktsioon, tõestatakse mõned selle tensorkorrutise omadused ning uuritakse, millistel tingimustel saab tensorkorrutist end vaadelda (globaalse) moodulina. Teises alapeatükis defineeritakse osaliste moodulite homomorfismide tensorkorrutis ning tõestatakse mõningad selle omadused. Kolmas alapeatükk tutvustab tensorfunktoreid ja uurib, kuidas need käituvad lühikeste täpsete jadade korral. Peatüki definitsioonid ja tulemused on raamatu [10] vastavate definitsioonide ja tulemuste üldistused ning üldiselt artikli [8] vastavate definitsioonide ja tulemuste analoogid.

Viies peatükk käsitleb osaliste moodulite tensorfunktoreid ja hom-funktoreid. Näidatakse, kuidas saab osaliste moodulite korral vaadelda tensorfunktoreid ja hom-funktoreid. Peatüki lõpus tõestatakse, et teatud tingimustel on osaliste moodulite tensorfunktor osaliste moodulite hom-funktori vasakpoolne kaasfunktor. Peatüki tulemused on artikli [8] vastavate tulemuste analoogid osaliste moodulite jaoks.

1 Taustateadmised

Esimeses peatükis tutvustame erinevaid algebralisi ja kategooriateoreetilisi mõisteid ja tulemusi, mis edasises töös ette tulevad ning vajalikuks osutuvad.

1.1 Ringidest ja moodulitest

Kõigepealt defineerime ringid ja globaalsed moodulid ning viimastega seotud homomorfismid. See alapeatükk põhineb raamatul [10]. Alustame ringi defineerimisega.

Definitsioon 1.1. Kolmikut $(R; +, \cdot)$ nimetatakse **ringiks**, kui R on hulk ja binaarsed tehted $+: R \times R \rightarrow R$ ning $\cdot: R \times R \rightarrow R$ rahuldavad järgnevat tingimusi:

$$(R1) \quad \forall r, s, t \in R: \quad (r + s) + t = r + (s + t);$$

$$(R2) \quad \exists 0 \in R \forall r \in R: \quad 0 + r = r = r + 0;$$

$$(R3) \quad \forall r \in R \exists -r \in R: \quad r + (-r) = 0 = (-r) + r;$$

$$(R4) \quad \forall r, s \in R: \quad r + s = s + r;$$

$$(R5) \quad \forall r, s, t \in R: \quad (r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t);$$

$$(R6) \quad \forall r, s, t \in R: \quad (r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t \wedge r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t.$$

Edaspidi tähistame ringi $(R; +, \cdot)$ lühemalt R ja korrutise $r \cdot s$ asemel kirjutame lihtsalt rs .

Järgmiseks defineerime globaalsed moodulid.

Definitsioon 1.2. Olgu R ring. **(Globaalseks) parempoolseks R -mooduliks** $(M; +, \cdot)$ nimetatakse hulka M koos kahe kujutusega $+: M \times M \rightarrow M$ ja $\cdot: M \times R \rightarrow M$, mille korral on täidetud järgnevad tingimused:

$$(GM1) \quad \text{paar } (M; +) \text{ on Abeli rühm;}$$

$$(GM2) \quad \forall m, m' \in M \forall r \in R: \quad (m + m') \cdot r = m \cdot r + m' \cdot r;$$

$$(GM3) \quad \forall m \in M \forall r, r' \in R: \quad m \cdot (r + r') = m \cdot r + m \cdot r';$$

$$(GM4) \quad \forall m \in M \forall r, r' \in R: \quad (m \cdot r) \cdot r' = m \cdot (rr').$$

Parempoolset R -moodulit $(M; +, \cdot)$ tähistame lühemalt M_R . Duaalselt saame defineerida ka (globaalsed) vasakpoolsed R -moodulid.

Definitsioon 1.3. Olgu R ja S ringid. Nelikut $(M; +, \star, \cdot)$ nimetatakse (**globaalseks**) (S, R) -**bimooduliks**, kui $(M; +, \cdot)$ on parempoolne R -moodul, $(M; +, \star)$ on vasakpoolne S -moodul ja iga $m \in M$, $s \in S$, $r \in R$ korral kehtib võrdus

$$(s \star m) \cdot r = s \star (m \cdot r).$$

Lühidalt tähistame (R, S) -bimoodulit $(M; +, \star, \cdot)$ ka ${}_S M_R$.

Viimaks defineerime globaalsete moodulite homomorfismid.

Definitsioon 1.4. Olgu R ring ja M_R, N_R parempoolsed R -moodulid. Kujutust $f : M \rightarrow N$ nimetatakse **parempoolsete moodulite homomorfismiks**, kui iga $m, m' \in M$ ja iga $r \in R$ korral kehtivad võrdused

$$f(m + m') = f(m) + f(m'),$$

$$f(m \cdot r) = f(m) \cdot r.$$

Duaalselt saame defineerida ka vasakpoolsete R -moodulite homomorfismid.

Definitsioon 1.5. Olgu R ning S ringid ja ${}_S M_R$ ning ${}_S N_R$ globaalsed (S, R) -bimoodulid. Kujutust $f : M \rightarrow N$ nimetatakse **bimoodulite homomorfismiks**, kui $f : {}_S M \rightarrow {}_S N$ on vasakpoolsete S -moodulite homomorfism ja $f : M_R \rightarrow N_R$ on parempoolsete R -moodulite homomorfism.

Parempoolsed (vasakpoolsed) R -moodulid ((S, R) -bimoodulid) moodustavad koos vastavate homomorfismidega kategooria, mida tähistame Mod_R (vastavalt ${}_R \text{Mod}$, ${}_S \text{Mod}_R$).

Moodulite nullkujutust $M \rightarrow N$, $m \mapsto 0$, tähistame $\mathbf{0}$.

1.2 Kategooriateooriast

Olgu \mathcal{C} kategooria. Siis tema objektide hulka tähistame $\text{Ob}(\mathcal{C})$. Kui $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, siis morfismide $A \rightarrow B$ hulka tähistame $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ või kui kategooria \mathcal{C} on kontekstist selge, siis ka $\text{Hom}(A, B)$. Järgmised definitsioonid pärinevad raamatust [7].

Definitsioon 1.6. Olgu \mathcal{C} kategooria ja $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Siis diagramm

$$\begin{array}{ccc}
B & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \ni g & A & \xrightarrow{g} & B \\
\downarrow f & & \downarrow f \circ _ & \downarrow & \searrow f \circ g & & \downarrow f \\
B' & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B') & \ni f \circ g & & & B'
\end{array}$$

kus $B, B' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, defineerib kovariantse funktori

$$\text{Hom}(A, _): \mathcal{C} \rightarrow \text{Set},$$

mida nimetatakse **kovariantseks hom-funktoriks (teise muutuja järgi)**. Seega kovariantne hom-funktor tegutseb objektidel võrdusega $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, _)(B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ja morfismidel võrdusega $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, _)(f) = f \circ _$. Analoogiliselt saab defineerida ka **kontravariantse hom-funktori esimese argumenti järgi**.

Definitsioon 1.7. Olgu \mathcal{C} ja \mathcal{D} kategooriad, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ja $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ kovariantsed funktorid ning $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(_), _)$ ja $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, G(_))$ sellised bifunktorid, mille esimeseks argumentiks on kategooria \mathcal{C} ja teiseks argumentiks kategooria \mathcal{D} objektid. Vaatleme nende bifunktorite loomulikku isomorfismi

$$\omega: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(_), _) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, G(_))$$

ehk iga $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ja $B \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ korral isomorfismide

$$\omega_{A,B}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(B))$$

peret, mis on esimese argumenti järgi kontravariantsete ja teise argumenti järgi kovariantsete funktorite loomulik isomorfism. Kui selline loomulik teisendus ω leidub, siis nimetatakse funktoori F funktoori G **vasakpoolseks kaasfunktoriks** ja funktoori G funktoori F **parempoolseks kaasfunktoriks** ning tähistatakse $F \dashv G$. Kolmikut $(F, G; \omega)$ nimetatakse **adjunktsiooniks**.

2 Osalise mooduli definitsioon

Selle ja järgmiste peatükkide eesmärk on laiendada artikli [8] mõisted ning tulemused osaliste moodulite juhule. Seejuures on uute mõistete ja tulemuste puhul tegu raamatu [10] definitsioonide ja tulemuste üldistustega. Tuletame meelde, et kui A ja B on hulgad, siis **osalise kujutuse** $f : A \rightarrow B$ all peame silmas kujutust f , mis on määratud hulga A mingil alamhulgalt. Alustame osaliste moodulite ning nende vaheliste homomorfismide defineerimisega.

2.1 Osalise mooduli definitsioon ja sellega seotud mõisted

Definitsioon 2.1. Olgu R ring. **Osaliseks parempoolseks R -mooduliks** nimetatakse kolmikut $(M; +, \cdot)$, kus M on hulk, $+$: $M \times M \rightarrow M$ on kujutus, \cdot : $M \times R \rightarrow M$ on osaline kujutus ning kehtivad järgmised tingimused:

(M1) paar $(M; +)$ on Abeli rühm ühikelemendiga 0;

(M2) $\forall r \in R: \quad \exists 0 \cdot r \wedge 0 \cdot r = 0$;

(M3) $\forall m \in M: \quad \exists m \cdot 0_R \wedge m \cdot 0_R = 0$, kus 0_R on ringi R nullelement;

(M4) $\forall m, m' \in M \forall r \in R: \quad \exists m \cdot r \wedge \exists m' \cdot r \wedge \exists (m + m') \cdot r \Rightarrow (m + m') \cdot r = m \cdot r + m' \cdot r$;

(M5) $\forall m \in M \forall r, r' \in R: \quad \exists m \cdot r \wedge \exists m \cdot r' \wedge \exists m \cdot (r + r') \Rightarrow m \cdot (r + r') = m \cdot r + m \cdot r'$;

(M6) $\forall m \in M \forall r, r' \in R: \quad \exists m \cdot r \wedge \exists (m \cdot r) \cdot r' \Rightarrow \exists m \cdot (rr') \wedge (m \cdot r) \cdot r' = m \cdot (rr')$.

Osalist kujutust \cdot nimetame **osaliseks parempoolseks R -toimeks**. Osalist parempoolset R -moodulit $(M; +, \cdot)$ tähistame lühemalt M_R . Analoogiliselt defineerime ka osalise vasakpoolse R -toime ning osalise vasakpoolse R -mooduli ${}_R M$. Edaspidi tähistame ka ringi R nullelementi 0_R sümboliga 0.

Võib juhtuda, et osaline moodul M_R rahuldab tingimuse (M4) asemel tugevamat tingimust (M4') või (M5) asemel tugevamat tingimust (M5'):

(M4') $\forall m, m' \in M \forall r \in R: \quad \exists m \cdot r \wedge \exists m' \cdot r \Rightarrow \exists (m + m') \cdot r \wedge (m + m') \cdot r = m \cdot r + m' \cdot r$;

(M5') $\forall m \in M \forall r, r' \in R: \quad \exists m \cdot r \wedge \exists m \cdot r' \Rightarrow \exists m \cdot (r + r') \wedge m \cdot (r + r') = m \cdot r + m \cdot r'$.

Märgime veel ära, et iga $m, m' \in M$ korral tähistame

$$m - m' := m + (-m').$$

Niimoodi saame (kõikjal defineeritud) kujutuse $- : M \times M \rightarrow M$.

Definitsioon 2.2. Olgu R ja S ringid. **Osaliseks (S, R) -bimooduliks** nimetatakse nelikut $(M; +, \star, \cdot)$, kus ${}_S M = (M; +, \star)$ on osaline vasakpoolne S -moodul, $M_R = (M; +, \cdot)$ on osaline parempoolne R -moodul ning iga $m \in M$, iga $r \in R$ ja iga $s \in S$ korral kehtib

$$\exists s \star m \wedge \exists m \cdot r \Rightarrow \exists (s \star m) \cdot r \wedge \exists s \star (m \cdot r) \wedge (s \star m) \cdot r = s \star (m \cdot r).$$

Osalist (S, R) -bimoodulit $(M; +, \star, \cdot)$ tähistame ${}_S M_R$.

Märgime ära, et kui kontekstist on selge, millise osalise toimega on tegu, siis jätame vastava tehtemärgi kirjutamata.

Definitsioon 2.3. Olgu R ring ja M_R ning N_R osalised parempoolsed R -moodulid. Kujutust $f: M \rightarrow N$ nimetatakse **osaliste parempoolsete R -moodulite homomorfismiks**, kui iga $m, m' \in M$ ja $r \in R$ korral kehtivad tingimused

$$f(m + m') = f(m) + f(m')$$

ja

$$\exists mr \Rightarrow \exists f(m)r \wedge f(mr) = f(m)r.$$

Osaliste vasakpoolsete moodulite homomorfismi defineerime analoogiliselt.

On lihtne näha, et kui $f: M \rightarrow N$ on osaliste parempoolsete R -moodulite M_R ja N_R homomorfism, siis iga $m \in M$ korral

$$f(-m) = -f(m).$$

Definitsioon 2.4. Olgu R ja S ringid ning ${}_S M_R$ ja ${}_S N_R$ osalised (S, R) -bimoodulid. Kujutust $f: M \rightarrow N$ nimetatakse **osaliste (S, R) -bimoodulite homomorfismiks**, kui $f: {}_S M \rightarrow {}_S N$ on osaliste vasakpoolsete S -moodulite homomorfism ja $f: M_R \rightarrow N_R$ on osaliste parempoolsete R -moodulite homomorfism.

Toome sisse ka osaliste moodulite täishomomorfismi ning tugeva homomorfismi mõiste. Need võimaldavad meil edaspidi vajadusel kasutada tugevamate omadustega homomorfisme.

Definitsioon 2.5. [5, lk 81] Olgu M_R ja N_R osalised parempoolsed R -moodulid ning kujutus $f: M_R \rightarrow N_R$ osaliste parempoolsete moodulite homomorfism. Kujutust f nimetatakse **täishomomorfismiks**, kui iga $m \in M$ ja iga $r \in R$ korral kehtib tingimus

$$\exists f(m)r \Rightarrow (\exists m' \in M : f(m) = f(m') \wedge \exists m'r).$$

Definitsioon 2.6. [5, lk 81] Olgu M_R ja N_R osalised parempoolsed R -moodulid ning kujutus $f : M_R \rightarrow N_R$ osaliste parempoolsete moodulite homomorfism. Homomorfismi f nimetatakse **tugevaks**, kui iga $m \in M$ ja $r \in R$ korral kehtib tingimus

$$\exists f(m)r \Rightarrow \exists mr.$$

Paneme tähele, et iga tugev homomorfism on täishomomorfism ja iga täishomomorfism on homomorfism. Näitame, et osalised parempoolsed (vasakpoolsed) moodulid (bimoodulid) koos vastavate homomorfismidega moodustavad loomulikult viisil kateooria.

Lause 2.7. *Osalised parempoolsed (vasakpoolsed) R -moodulid ((S, R) -bimoodulid) koos vastavate (tugevate) homomorfismidega moodustavad kateooria.*

Tõestus. Olgu kateooria \mathcal{C} objektideks kõik osalised parempoolsed R -moodulid ning morfismideks nendevahelised homomorfismid.

1. Olgu $L_R, M_R, N_R \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Vaatleme homomorfisme $f : M_R \rightarrow L_R$ ja $g : L_R \rightarrow N_R$. Olgu $m \in M$ ja $r \in R$ sellised, et leidub korrutis mr . Siis saame vaadelda kujutust $g \circ f : M_R \rightarrow N_R$, mille korral

$$(g \circ f)(mr) = g(f(mr)) = g(f(m)r) = g(f(m))r = (g \circ f)(m)r$$

ja

$$\begin{aligned} (g \circ f)(m_1 + m_2) &= g(f(m_1 + m_2)) = g(f(m_1) + f(m_2)) \\ &= g(f(m_1)) + g(f(m_2)) = (g \circ f)(m_1) + (g \circ f)(m_2), \end{aligned}$$

kus $m_1, m_2 \in M$. Paneme tähele, et vastavalt osaliste moodulite homomorfismi definitsioonile korrutis $f(m)r$ leidub ja seetõttu leidub ka korrutis $g(f(m))r$. Järelikult on ka $g \circ f$ osaliste R -moodulite homomorfism. Kui f ja g on tugevad homomorfismid ja kui leidub korrutis

$$(g \circ f)(m)r = g(f(m))r,$$

kus $m \in M$, $r \in R$, siis g tugevuse tõttu leidub korrutis $f(m)r$ ja järelikult f tugevuse tõttu leidub korrutis mr . Seega kui f ja g on tugevad homomorfismid, siis ka $g \circ f$ on tugev homomorfism.

2. Kuna kujutuste komponeerimine on assotsiatiivne, siis on assotsiatiivne ka osaliste moodulite (tugevate) homomorfismide komponeerimine.
3. Iga M_R korral on $\text{id}_M: M \rightarrow M, m \mapsto m$, homomorfism. Kui mingite $m \in M, r \in R$ korral leidub korrutis mr , siis

$$\text{id}_M(mr) = mr = \text{id}_M(m)r.$$

Veel enam, kui mingite $m \in M, r \in R$ korral leidub korrutis $\text{id}_M(m)r$, siis leidub ka korrutis $mr = \text{id}_M(m)r$. Seega id_M on tugev homomorfism.

Lisaks, iga $m_1, m_2 \in M$ korral

$$\text{id}_M(m_1 + m_2) = m_1 + m_2 = \text{id}_M(m_1) + \text{id}_M(m_2).$$

Olgu nüüd $f: M_R \rightarrow N_R$ osaliste moodulite homomorfism. Siis

$$(f \circ \text{id}_M)(m) = f(\text{id}_M(m)) = f(m)$$

ja

$$(\text{id}_N \circ f)(m) = \text{id}_N(f(m)) = f(m).$$

Järelikult $f \circ \text{id}_M = \text{id}_N \circ f = f$.

Niisiis moodustavad osalised parempoolsed R -moodulid koos vastavate (tugevate) homomorfismidega kategooria. Samamoodi saab näidata, et ka osalised vasakpoolsed moodulid koos vastavate (tugevate) homomorfismidega ning osalised bimoodulid koos vastavate homomorfismidega moodustavad kategooria. \square

Analoogiliselt globaalste moodulite kategooriatega tähistame osaliste parempoolsete (vasakpoolsete) R -moodulite ((S, R) -bimoodulite) kategooriat PMod_R (${}_R\text{PMod}, {}_S\text{PMod}_R$). Tingimust (M5') rahuldavate osaliste parempoolsete (vasakpoolsete) R -moodulite kategooriat tähistame PMod'_R (${}_R\text{PMod}'$). Tugevate homomorfismidega osaliste parempoolsete (vasakpoolsete) R -moodulite kategooriat tähistame PMod^t_R (${}_R\text{PMod}^t$). Paneme tähele, et iga kategooria PMod'_R (${}_R\text{PMod}'$, PMod^t_R , ${}_R\text{PMod}^t$) objekt või morfism on ka vastavalt kategooria PMod_R (${}_R\text{PMod}$) objekt või morfism. Nendes kategooriates saab morfismihulki vaadelda Abeli rühmadena punktiivilise liitmise suhtes. Täpsemalt, kui $f, g: M \rightarrow N$ on kaks morfismi, siis

defineerime summa $f + g$ võrdusega

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m), \quad m \in M.$$

Peatüki lõpetuseks tutvustame osalise bimooduli viisakuse mõistet.

Definitsioon 2.8. Olgu R ja S ringid. Me nimetame osalist (S, R) -bimoodulit $(M; +, \star, \cdot)$ **vasakult viisakaks**, kui iga $m \in M$, $r \in R$ ja $s \in S$ korral

$$\exists m \cdot r \wedge \exists s \star (m \cdot r) \Rightarrow \exists s \star m \wedge \exists (s \star m) \cdot r.$$

Kui kehtib vastupidine implikatsioon, siis ütleme, et osaline bimoodul ${}_S M_R$ on **paremalt viisakas**. Kui ${}_S M_R$ on nii vasakult kui paremalt viisakas, ütleme, et ${}_S M_R$ on **viisakas**.

2.2 Osaliste moodulite näited

Järgmiseks toome mõned näited osalistest moodulitest.

Näide 2.9. Vaatleme ringi $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ osalist toimet, st osalist korrutamist, Abeli rühmal $(\mathbb{Z}; +)$. Teisisõnu, ütleme, et $z \cdot q$, kus $z \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{Q}$, on defineeritud parajasti siis, kui korrutis zq on täisarv ning sel juhul loeme, et $z \cdot q = zq$. Iga $q \in \mathbb{Q}$ korral $0q = 0 \in \mathbb{Z}$ ja iga $z \in \mathbb{Z}$ korral $z0 = 0 \in \mathbb{Z}$, seega $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}$ jaoks kehtivad osalise mooduli tingimused (M2) ja (M3). Korpusel \mathbb{Q} kehtivad distributiivsuse seadused ning ratsionaalarvude korrutamine on assotsiatiivne. Seega kuna $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, siis kehtivad $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}$ jaoks ka osalise mooduli tingimused (M4)–(M6).

Näide 2.10. Saame vaadata ka eelmise näite üldistust. Olgu R ring ja M rühma $(R; +)$ alamrühm. Siis M_R on osaline parempoolne R -moodul, kui iga $m \in M$ ja $r \in R$ korral on $m \cdot r$ defineeritud parajasti siis, kui $m \cdot r \in M$ ning sellisel juhul loeme $m \cdot r = mr$. Tõepoolest, iga $m \in M$ ja $r \in R$ korral $m0 = 0 \in M$ ja $0r = 0 \in M$, seega korrutised $m \cdot 0$ ja $0 \cdot r$ on defineeritud iga $m \in M$ ning $r \in R$ korral ehk kehtivad tingimused (M2), (M3). Lisaks kehtivad ringis R distributiivsuse seadused ning korrutamine ringis R on assotsiatiivne, seega kehtivad tingimused (M4)–(M6).

Näide 2.11. Olgu S ring, $R = \text{Mat}_n(S)$ ja M Abeli rühma $(\text{Mat}_{m,n}(S); +)$ alamrühm. Saame vaadelda osalist parempoolset R -moodulit M_R , kui $A \in M$ ja $B \in R$ korral $A \cdot B$ on defineeritud parajasti siis, kui tavalise maatriksite korrutamise suhtes $AB \in M$. Sellisel juhul loeme $A \cdot B = AB$. Paneme tähele, et maatriksite A ja B mõõtmed on korrutamiseks sobivad. Iga $B \in R$ korral $0B = 0 \in M$ ja kui $0 \in R$, siis iga $A \in M$ korral $A0 = 0 \in M$,

seega osalise mooduli definitsioonis on täidetud tingimused (M2), (M3). Sobivate mõõtmete korral kehtivad maatriksite vahel distributiivsuse seadused ning maatriksite korrutamine on assotsiatiivne. Seega kehtivad ka tingimused (M4)–(M6).

Paneme tähele, et sobivaid alamrühmi M on palju erinevaid. Näiteks moodustavad aditiivse alamrühma samamõõtmelised maatriksid, kus fikseeritud indeksitega kohtadel on kindlasti element 0 ning ülejäänud kohtadel kõikvõimalikud ringi S elemendid.

Näide 2.12. Olgu V vektorruum üle korpuse K ja U selle alamruum. Vaatleme V lineaarteisenduste ringi $R = \text{End}(V)$ punktiviisilise liitmise ja teisenduste järjest rakendamise suhtes. Saame vaadelda osalist vasakpoolset R -moodulit ${}_R U$, kui $f \in R$ ja $u \in U$ korral defineerime $f \cdot u$ parajasti siis, kui $f(u) \in U$. Sellisel juhul loeme, et $f \cdot u = f(u)$. Kehtib $\mathbf{0} \in R$ ning $\mathbf{0}(u) = 0 \in U$ iga $u \in U$ korral ja iga $f \in R$ korral $f(0) = 0 \in U$. Seega kehtivad osalise mooduli definitsioonis tingimused (M2) ja (M3). Näitame, et kehtivad ka teised osalise mooduli tingimused.

(M4) Kui $u, u' \in U$ ja $f \in R$ on sellised, et $f(u) \in U$ ja $f(u') \in U$, siis

$$f(u + u') = f(u) + f(u') \in U.$$

(M5) Kui $f, f' \in R$ ja $u \in U$ korral $f(u) \in U$ ja $f'(u) \in U$, siis ka

$$(f + f')(u) = f(u) + f'(u) \in U.$$

(M6) Kui $f(u) \in U$ ja $g(f(u)) \in U$, siis $(gf)(u) = g(f(u)) \in U$ ehk kehtib tingimus (M6).

Näide 2.13. Eelnev näide läheb läbi ka juhul kui K on ring, V mingi (globaalne) K -moodul ja U mooduli V mingi alam-moodul.

Paneme tähele, et kõigi nende näidete puhul kehtivad osalise mooduli definitsioonis 2.1 tingimuste (M4) ja (M5) asemel ka tegelikult tingimused (M4') ja (M5').

3 Osaliste moodulite faktoriseerimine ja homomorfismiteoreem

Selles peatükis vaatleme osaliste moodulite faktoriseerimist ning sõnastame ja tõestame homomorfismiteoreemi osaliste moodulite jaoks. Raamatu [10] definitsioonide ja tulemuste laiendamisel on abiks raamat [5]. Niisiis, alustame osaliste moodulite osalise faktormooduli defineerimisega. Paneme tähele, et definitsioon on raamatu [5, lk 82] osalise faktoralgebra definitsiooni erijuht.

Definitsioon 3.1. Olgu R ring, M_R osaline parempoolne R -moodul, mis rahuldab tingimusi (M4') ja (M5'), ja $N \subseteq M$ selline alamhulk, mis moodustab M_R tehete suhtes globaalse R -mooduli. Osalise R -mooduli M_R **osaliseks faktormooduliks** globaalse mooduli N järgi nimetatakse osalist moodulit $M/N := \{[m] \mid m \in M\}$, kus

$$[m] := m + N = \{m + n \mid n \in N\},$$

iga $m, m' \in M$ korral

$$[m] + [m'] := [m + m']$$

ja iga $m \in M$ ning $r \in R$ korral korrutis $[m]r$ eksisteerib parajasti siis, kui leidub $m' \in M$ nii, et $[m] = [m']$ ja korrutis $m'r$ leidub. Sel juhul

$$[m]r := [m'r].$$

Märgime, et igal osalisel moodulil leidub vähemalt üks globaalne alamhulk – hulk $\{0\}$.

Järgmise tulemuse tõestuse võib leida raamatust [10, lemma 2.25], kus lemma on küll sõnastatud globaalsete moodulite jaoks, kuid osaliste moodulite puhul läheb tõestus läbi täpselt sama moodi.

Lemma 3.2. *Olgu M_R osaline R -moodul, mis rahuldab tingimusi (M4') ja (M5'), $N \subseteq M$ globaalne R -moodul osalise mooduli M_R tehete suhtes ja $m, m' \in M$. Osalise faktormooduli M/N elementide $[m]$, $[m']$ korral kehtib võrdus $[m] = [m']$ parajasti siis, kui $m - m' \in N$.*

Näitame, et osaline faktormoodul M/N tõepoolest on osaline R -moodul.

Lemma 3.3. *Kui osaline parempoolne R -moodul M_R rahuldab tingimusi (M4') ja (M5') ning $N \subseteq M$ on globaalne R -moodul osalise mooduli M_R tehete suhtes, siis M/N on osaline parempoolne R -moodul, mis rahuldab tingimusi (M4') ja (M5').*

Tõestus. Esiteks näitame, et osalise faktormooduli tehted on korrektselt defineeritud. Olgu $m, m', l, l' \in M$ sellised, et $[m] = [m']$ ja $[l] = [l']$. Siis lemma 3.2 põhjal $m - m' \in N$ ja $l - l' \in N$, järelikult ka

$$(m + l) - (m' + l') = (m - m') + (l - l') \in N,$$

mistõttu

$$[m] + [l] = [m + l] = [m' + l'] = [m'] + [l'].$$

Seega liitmine osalisel faktormoodulil on korrektselt defineeritud. Olgu nüüd ka $r \in R$. Siis

$$\exists [m]r \Leftrightarrow (\exists m'' \in M : [m'] = [m] = [m''] \wedge \exists m''r) \Leftrightarrow \exists [m']r.$$

Seega korrutis $[m]r$ eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib korrutis $[m']r$ ja sel juhul $[m]r = [m''r] = [m']r$. See tähendab, et ka osaline R -toime osalisel faktormoodulil on korrektselt defineeritud.

On kerge näha, et osaline faktormoodul M/N rahuldab osalise mooduli tingimusi (M1)–(M3). Näitame, et ka tingimused (M4'), (M5') ja (M6) kehtivad. Olgu $[m], [m'] \in M/N$ ja $r \in R$ sellised, et leiduvad korrutised $[m]r$ ja $[m']r$. Seega leiduvad $l, l' \in M$ nii, et leiduvad korrutised $lr, l'r$ ja $[l] = [m], [l'] = [m']$. Et osaline moodul M_R rahuldab tingimust (M4'), siis leidub ka korrutis $(l + l')r = lr + l'r$. Seetõttu leidub korrutis $[l + l']r = ([l] + [l'])r = ([m] + [m'])r$ ning kehtivad võrdused

$$[m]r + [m']r = [lr] + [l'r] = [lr + l'r] = [(l + l')r] = [l + l']r = ([l] + [l'])r = ([m] + [m'])r.$$

Seega kehtib tingimus (M4').

Olgu nüüd $[m] \in M/N$ ja $r, r' \in R$ sellised, et leiduvad korrutised $[m]r$ ja $[m]r'$. Siis leiduvad $l, l' \in M$ nii, et eksisteerivad korrutised $lr, l'r'$ ja $[l] = [m] = [l']$. Siis lemma 3.2 põhjal $n := l - l' \in N$. Kuna N on globaalne moodul, siis leidub korrutis nr' . Et osaline moodul M_R rahuldab tingimust (M4'), siis leidub korrutis $(n + l')r'$ ja

$$nr' + l'r' = (n + l')r' = (l - l' + l')r' = lr',$$

mistõttu leidub korrutis lr' . Kuna osaline moodul M_R rahuldab tingimust (M5'), siis leidub korrutis $l(r + r') = lr + lr'$. Seetõttu leidub korrutis $[l](r + r') = [m](r + r')$ ja kehtivad

võrdused

$$[m](r + r') = [l](r + r') = [l(r + r')] = [lr + lr'] = [lr] + [lr'] = [l]r + [l]r' = [m]r + [m]r'.$$

Seega kehtib tingimus (M5').

Viimaks, olgu $[m] \in M$, $r, r' \in R$ sellised, et leiduvad korrutised $[m]r$ ja $([m]r)r'$. Siis leiduvad $l, l' \in M$ nii, et leiduvad korrutised $lr, l'r'$ ning $[l] = [m]$, $[l'] = [m]r = [lr] = [l]r$. Lemma 3.2 põhjal $n := l' - lr \in N$. Kuna N on globaalne R -moodul, siis leiduvad korrutised nr' ja $(-n)r'$ ning $(-n)r' = -nr' \in N$. Et osaline moodul M_R rahuldab tingimust (M4'), siis leidub korrutis $(l' - n)r'$ ja

$$l'r' + (-n)r' = (l' - n)r' = (l' - l' + lr)r' = (lr)r',$$

mistõttu leidub korrutis $(lr)r'$. Osalise mooduli tingimuse (M6) järgi leidub nüüd korrutis $l(rr')$. Järelikult leidub ka korrutis $[l](rr') = [m](rr')$ ja

$$([m]r)r' = [lr]r' = [(lr)r'] = [l(rr')] = [l](rr') = [m](rr'),$$

seega rahuldab osaline faktormoodul M/N tingimust (M6). Niisiis on M/N tõepoolest osaline R -moodul, mis rahuldab tingimusi (M4') ja (M5'). \square

Selleks, et saaksime tõestada homomorfismiteoreemi osaliste moodulite jaoks näitame esiteks, et kehtivad järgmised lemmad.

Lemma 3.4. *Olgu R ring, M_R, N_R osalised parempoolsed R -moodulid ja $f : M_R \rightarrow N_R$ osaliste moodulite tugev homomorfism. Siis*

$$\ker f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

on globaalne R -moodul osalise mooduli M_R tehete suhtes.

Tõestus. Olgu $m, m' \in \ker f$ ja $r \in R$. Siis

$$f(m + m') = f(m) + f(m') = 0 + 0 = 0,$$

$$f(-m) = -f(m) = -0 = 0,$$

järelikult $m + m', -m \in \ker f$. Lisaks, kuna leidub korrutis $0r = f(m)r$, siis, et f on tugev

homomorfism, leidub ka korrutis mr ja

$$f(mr) = f(m)r = 0r = 0,$$

kust $mr \in \ker f$. Järelikult toime on defineeritud iga $m \in M$ ja iga $r \in R$ korral ning $\ker f$ on kinnine selle toime suhtes. Seega on $\ker f$ globaalne moodul osalise mooduli M_R tehete suhtes. \square

Lemma 3.5. *Olgu R ring, M_R osaline parempoolne R -moodul, mis rahuldab tingimusi (M4') ja (M5'), ning $N \subseteq M$ selline alamhulk, mis on osalise mooduli M_R tehete suhtes globaalne R -moodul. Siis kujutus*

$$\pi_N : M \rightarrow M/N, \quad m \mapsto [m],$$

mida nimetatakse loomulikuks projektsiooniks, on sürjektiivne osaliste moodulite täishomomorfism.

Tõestus. Olgu $m, m' \in M$. Siis osalise faktormooduli definitsiooni põhjal kehtivad võrdused

$$\pi_N(m + m') = [m + m'] = [m] + [m'] = \pi_N(m) + \pi_N(m').$$

Kui $r \in R$ on selline, et leidub korrutis mr , siis vastavalt osalise faktormooduli definitsioonile leidub korrutis $[m]r = [mr]$ ja seega ka

$$\pi_N(mr) = [mr] = [m]r = \pi_N(m)r.$$

Nüüsi on kujutus π_N osaliste moodulite homomorfism. Kui leidub korrutis $\pi_N(m)r = [m]r$, siis vastavalt osalise faktormooduli definitsioonile leidub $m'' \in M$ nii, et

$$\pi_N(m'') = [m''] = [m] = \pi_N(m)$$

ja leidub korrutis $m''r$. Seega π_N on täishomomorfism. Ilmselt on π_N sürjektiivne. \square

Nüüd sõnastame ja tõestame homomorfismiteoreemi osaliste moodulite jaoks.

Teoreem 3.6 (Osaliste moodulite homomorfismiteoreem). *Olgu R ring, M_R ja N_R osalised parempoolsed R -moodulid ning $f : M_R \rightarrow N_R$ osaliste R -moodulite tugev homomorfism. Eeldame, et M_R rahuldab tingimusi (M4') ja (M5'). Olgu $U \subseteq M$ selline alamhulk, et $U \subseteq \ker f$ ja U on osalise mooduli M_R tehete suhtes globaalne R -moodul. Siis leidub üheselt määratud*

osaliste moodulite tugev homomorfism $\varphi : M/U \rightarrow N$ nii, et

$$f = \varphi \circ \pi_U$$

ehk diagramm

$$\begin{array}{ccc} M_R & \xrightarrow{f} & N_R \\ & \searrow \pi_U & \nearrow \varphi \\ & M/U & \end{array}$$

kommuteerub. Lisaks kehtivad võrdused $\text{im } \varphi = \text{im } f$ ning $\ker \varphi = (\ker f)/U$.

Tõestus. Olgu R ring, M_R, N_R osalised R -moodulid, kusjuures M_R rahuldagu tingimusi (M4') ja (M5'), $f : M_R \rightarrow N_R$ osaliste R -moodulite tugev homomorfism ja $U \subseteq M$ selline alamhulk, et $U \subseteq \ker f$ ja U on globaalne R -moodul osalise mooduli M_R tehete suhtes. Defineerime kujutuse

$$\varphi : M/U \rightarrow N, \quad [m] \rightarrow f(m).$$

Näitame, et φ on korrektselt defineeritud. Kui $m, m' \in M$ on sellised, et $[m] = [m']$, siis tänu lemmale 3.2 kehtib $m - m' \in U \subseteq \ker f$. Seetõttu

$$\varphi([m]) = f(m) = f(m' + (m - m')) = f(m') + f(m - m') = f(m') + 0 = \varphi([m']).$$

Lisaks kehtib iga $[m], [m'] \in M/U$ korral

$$\varphi([m] + [m']) = \varphi([m + m']) = f(m + m') = f(m) + f(m') = \varphi([m]) + \varphi([m']).$$

Kui $r \in R$ on selline, et leidub korrutis $[m]r$, siis leidub $m'' \in M$ nii, et leidub korrutis $m''r$ ja kehtivad võrdused $[m] = [m'']$, $[m]r = [m''r]$. Seega leidub ka korrutis $f(m'')r$ ning

$$\varphi([m]r) = \varphi([m''r]) = f(m''r) = f(m'')r = \varphi([m''])r = \varphi([m])r.$$

Veel enam, kui $[m] \in M/N$ ja $r \in R$ on sellised, et leidub korrutis $\varphi([m])r = f(m)r$, siis et f on tugev homomorfism, leidub ka korrutis mr . Niisiis on φ osaliste R -moodulite tugev homomorfism. Selgelt kehtib võrdus $f = \varphi \circ \pi_U$.

Näitame nüüd, et φ on üheselt määratud. Olgu ka $\psi : M/U \rightarrow N$ selline osaliste moodulite homomorfism, et $f = \psi \circ \pi_U$. Et π_U on sürjektiivne homomorfism, siis on ta epimorfism kategoorias PMod_R , sest igas konkreetse kategoorias on sürjektiivsed morfismid epimorfismid (vt tõestust nt [10, lause 1.9]). Järelikult, kuna $\varphi \circ \pi_U = \psi \circ \pi_U$, siis $\varphi = \psi$. Seega osaliste

R -moodulite homomorfism φ on üheselt määratud.

Ilmselt kehtib võrdus

$$\operatorname{im} \varphi = \{\varphi([m]) = f(m) \mid m \in M\} = \operatorname{im} f.$$

Lõpetuseks, kehtib ka võrdus

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{[m] \mid m \in M, \varphi([m]) = 0\} = \{m + U \mid m \in M, f(m) = 0\} = \{m + U \mid m \in \ker f\} \\ &= (\ker f)/U. \end{aligned}$$

Sellega oleme teoreemi tõestanud. □

Paneme tähele, et Abeli rühmade homomorfismiteoreem on teoreemi 3.6 erijuht, seega saame teha järgneva järelduse. Klassikalise rühmade homomorfismiteoreemi tõestuse võib leida näiteks raamatust [6, teoreem 6.2.4].

Järeldus 3.7. *Olgu M, N Abeli rühmad ja $f : M \rightarrow N$ Abeli rühmade homomorfism. Olgu $U \subseteq \ker f$ rühma M alamrühm. Siis leidub üheselt määratud Abeli rühmade homomorfism $\varphi : M/U \rightarrow N$ nii, et*

$$f = \varphi \circ \pi_U$$

ja kehtivad võrdused $\operatorname{im} \varphi = \operatorname{im} f$ ning $\ker \varphi = (\ker f)/U$.

4 Osaliste moodulite tensorkorrutis

Käesolevas peatükis vaatleme osaliste moodulite tensorkorrutist ja tema omadusi. Lisaks defineerime osaliste moodulite homomorfismide tensorkorrutise. Konstruksioonid ja tulemused üldistavad raamatus [10] leitud konstruksioone ja tulemusi ning on artikli [8] tulemuste analoogid osaliste moodulite jaoks.

4.1 Osaliste moodulite tensorkorrutis ja selle omadused

Definitsioon 4.1. Olgu R ring, ${}_R N$ osaline vasakpoolne ning M_R osaline parempoolne R -moodul. Olgu A Abeli rühm. Kujutust $\beta: M \times N \rightarrow A$ nimetatakse R -tasakaalustatuks, kui kehtivad järgmised tingimused:

1. $\forall m_1, m_2 \in M \forall n \in N: \beta(m_1 + m_2, n) = \beta(m_1, n) + \beta(m_2, n);$
2. $\forall m \in M \forall n_1, n_2 \in N: \beta(m, n_1 + n_2) = \beta(m, n_1) + \beta(m, n_2);$
3. $\forall m \in M \forall n \in N \forall r \in R: \exists mr \wedge \exists rn \Rightarrow \beta(mr, n) = \beta(m, rn).$

Definitsioon 4.2. Olgu T Abeli rühm ja $\tau: M \times N \rightarrow T$ R -tasakaalustatud kujutus. Paari (T, τ) nimetatakse **osaliste moodulite M_R ja ${}_R N$ tensorkorrutiseks**, kui iga Abeli rühma A ja iga R -tasakaalustatud kujutuse $\beta: M \times N \rightarrow A$ korral leidub parajasti üks Abeli rühmade homomorfism $f: T \rightarrow A$ nii, et $\beta = f \circ \tau$ ehk diagramm

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow \beta & \downarrow f \\ & & A \end{array}$$

kommuteerub.

Lause 4.3. Kui (T, τ) ja (T', τ') on kaks osaliste moodulite M_R ja ${}_R N$ tensorkorrutist, siis leidub Abeli rühmade isomorfism $f: T \rightarrow T'$ nii, et $\tau' = f \circ \tau$.

Tõestus. Olgu (T, τ) ja (T', τ') kaks osaliste moodulite M_R ja ${}_R N$ tensorkorrutist. Siis leiduvad ühesed Abeli rühmade homomorfismid f ja f' nii, et diagrammid

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow \tau' & \uparrow f' \\ & & T' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\tau'} & T' \\ & \searrow \tau & \uparrow f \\ & & T \end{array}$$

kommuteeruvad. Seega kommuteeruvad ka kolmnurgad järgnevas diagrammis.

$$\begin{array}{ccccc}
& & M \times N & & \\
& \swarrow \tau & \downarrow \tau' & \searrow \tau & \\
T & \xrightarrow{f} & T' & \xrightarrow{f'} & T \\
& \searrow \text{id}_T & & & \swarrow
\end{array}$$

Ühesuse nõude tõttu $f \circ f' = \text{id}_{T'}$ ning analoogiliselt $f' \circ f = \text{id}_T$. Järelikult on tensorkorrutised (T, τ) ja (T', τ') Abeli rühmadena isomorfsed. \square

Nägime, et osaliste R -moodulite tensorkorrutis on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud. Seega võime osaliste R -moodulite M_R ja ${}_R N$ tensorkorrutise (T, τ) jaoks võtta kasutusele tähistused

$$M \otimes_R N := T, \quad \otimes := \tau, \quad m \otimes n := \tau(m, n),$$

kusjuures avaldasi $m \otimes n$, $m \in M$, $n \in N$, nimetame **elementaartensoriteks**. Konstrueerime nüüd osaliste moodulite tensorkorrutise. Olgu R ring ning M_R parempoolne ja ${}_R N$ vasakpoolne osaline R -moodul. Vaatleme hulka

$$\mathbb{Z}^{(M \times N)} = \{f: M \times N \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(m, n) \neq 0 \text{ lõpliku arvu paaride } (m, n) \text{ korral}\}.$$

Paneme tähele, et hulk $\mathbb{Z}^{(M \times N)}$ on Abeli rühm liitmise

$$(f + g)(m, n) := f(m, n) + g(m, n), \quad (m, n) \in M \times N,$$

suhtes. Kui $(m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k) \in M \times N$ on paarid, mille korral f väärtus ei ole 0 ning $(m'_1, n'_1), \dots, (m'_l, n'_l) \in M \times N$ paarid, mille korral g väärtus ei ole 0, siis maksimaalselt argumentide $(m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k), (m'_1, n'_1), \dots, (m'_l, n'_l)$ korral $f + g$ väärtus pole 0. Seega ka $f + g \in \mathbb{Z}^{(M \times N)}$. Kuna nende funktsioonide väärtused on täisarvud, mille liitmine on assotsiatiivne ja kommutatiivne, siis on ka hulga $\mathbb{Z}^{(M \times N)}$ elementide liitmine assotsiatiivne ja kommutatiivne. Iga $f \in \mathbb{Z}^{(M \times N)}$ korral on tema vastandelemendiks funktsioon $-f$, mis on defineeritud võrdusega

$$(-f)(m, n) = -f(m, n), \quad (m, n) \in M \times N.$$

Nullelemendiks selles Abeli rühmas on nullfunktsioon

$$\mathbf{0}: M \times N \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto 0.$$

Seega tõepoolest $(\mathbb{Z}^{(M \times N)}; +)$ on Abeli rühm. Defineerime iga $(m, n) \in M \times N$ korral kujutuse

$$x_{(m,n)} : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (m', n') \mapsto \begin{cases} 1, & (m', n') = (m, n), \\ 0, & (m', n') \neq (m, n). \end{cases}$$

Iga $(m, n) \in M \times N$ puhul $x_{(m,n)} \in \mathbb{Z}^{(M \times N)}$. Hulk $\mathcal{B} = \{x_{(m,n)} \mid (m, n) \in M \times N\}$ on Abeli rühma $\mathbb{Z}^{(M \times N)}$ baas. Nüüd tähistame

$$\begin{aligned} kx_{(m,n)} &:= \underbrace{x_{(m,n)} + \dots + x_{(m,n)}}_{k \text{ liidetavat}}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ zx_{(m,n)} &:= -(|z|x_{(m,n)}), \quad z \in \mathbb{Z}, z < 0, \\ 0x_{(m,n)} &:= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Vaatame rühma $\mathbb{Z}^{(M \times N)}$ vähimat alamrühma $H \subseteq \mathbb{Z}^{(M \times N)}$, mis sisaldab järgnevaid elemente:

$$\begin{aligned} x_{(m_1+m_2,n)} - x_{(m_1,n)} - x_{(m_2,n)}, \quad &\text{kus } m_1, m_2 \in M, n \in N, \\ x_{(m,n_1+n_2)} - x_{(m,n_1)} - x_{(m,n_2)}, \quad &\text{kus } m \in M, n_1, n_2 \in N, \\ x_{(mr,n)} - x_{(m,rn)}, \quad &\text{kus } m \in M, n \in N, r \in R, \exists mr, \exists rn. \end{aligned}$$

Vaatleme faktorrühma

$$T := \mathbb{Z}^{(M \times N)} / H = \{[f] \mid f \in \mathbb{Z}^{(M \times N)}\},$$

kus iga $f \in \mathbb{Z}^{(M \times N)}$ korral

$$[f] = f + H = \{f + g \mid g \in H\}$$

ja kus iga $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}^{(M \times N)}$ korral on liitmine defineeritud võrdusega

$$[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2].$$

Defineerime ka kujutuse $\tau : M \times N \rightarrow T$ võrdusega

$$\tau(m, n) := [x_{(m,n)}] = x_{(m,n)} + H.$$

Lause 4.4. *Eelnevalt konstrueeritud paar (T, τ) on osaliste R -moodulite M_R ja ${}_R N$ tensor-*

korrutis.

Tõestus. Vaatleme eelnevalt defineeritud paari (T, τ) . Siis iga $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$ ja $r \in R$ korral

$$\begin{aligned}\tau(m_1 + m_2, n) &= [x_{(m_1+m_2, n)}] = [x_{(m_1, n)} + x_{(m_2, n)}] = [x_{(m_1, n)}] + [x_{(m_2, n)}] \\ &= \tau(m_1, n) + \tau(m_2, n), \\ \tau(m, n_1 + n_2) &= [x_{(m, n_1+n_2)}] = [x_{(m, n_1)} + x_{(m, n_2)}] = [x_{(m, n_1)}] + [x_{(m, n_2)}] \\ &= \tau(m, n_1) + \tau(m, n_2), \\ \exists mr \wedge \exists rn \Rightarrow \tau(mr, n) &= [x_{(mr, n)}] = [x_{(m, rn)}] = \tau(m, rn)\end{aligned}$$

tänu rühma H definitsioonile. Seega τ on R -tasakaalustatud kujutus.

Nüüd olgu A Abeli rühm ja $\beta : M \times N \rightarrow A$ R -tasakaalustatud kujutus. Vaatleme kujutust

$$\bar{\varphi} : \mathcal{B} \rightarrow A, \quad x_{(m, n)} \mapsto \beta(m, n).$$

Kuna \mathcal{B} on Abeli rühma $\mathbb{Z}^{(M \times N)}$ baas, siis leidub üheselt määratud Abeli rühmade homomorfism $\varphi : \mathbb{Z}^{(M \times N)} \rightarrow A$ nii, et

$$\varphi(x_{(m, n)}) = \beta(m, n)$$

iga $(m, n) \in M \times N$ korral. Vaatleme ka kujutust

$$\iota : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}^{(M \times N)}, \quad (m, n) \mapsto x_{(m, n)}.$$

Paneme tähele, et ι on injektiivne. Seejuures $\varphi \circ \iota = \beta$, sest iga $(m, n) \in M \times N$ korral

$$(\varphi \circ \iota)(m, n) = \varphi(\iota(m, n)) = \varphi(x_{(m, n)}) = \beta(m, n).$$

See tähendab, et ülemine kolmnurk diagrammil

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\beta} & A \\ \downarrow \tau & \searrow \iota & \nearrow \varphi \\ & \mathbb{Z}^{(M \times N)} & \\ & \swarrow \pi_H & \\ T = \mathbb{Z}^{(M \times N)} / H & & \end{array}$$

kommuteerub. Lisaks iga $(m, n) \in M \times N$ korral

$$(\pi_H \circ \iota)(m, n) = \pi_H(\iota(m, n)) = \pi_H(x_{(m,n)}) = [x_{(m,n)}] = \tau(m, n),$$

kus $\pi_H : \mathbb{Z}^{(M \times N)} \rightarrow \mathbb{Z}^{(M \times N)}/H$ on loomulik projektsioon. Seega kommuteerub diagrammil ka vasakpoolne kolmnurk.

Vaatleme nüüd rühma H elemente, mille abil selle rühma enne moodustasime. Iga $m_1, m_2, m \in M$ ja $n_1, n_2, n \in N$ korral

$$\begin{aligned} \varphi(x_{(m_1+m_2, n)} - x_{(m_1, n)} - x_{(m_2, n)}) &= \varphi(x_{(m_1+m_2, n)}) - \varphi(x_{(m_1, n)}) - \varphi(x_{(m_2, n)}) \\ &= \beta(m_1 + m_2, n) - \beta(m_1, n) - \beta(m_2, n) \\ &= \beta(m_1 + m_2, n) - (\beta(m_1, n) + \beta(m_2, n)) \\ &= \beta(m_1 + m_2, n) - \beta(m_1 + m_2, n) = 0, \\ \varphi(x_{(m, n_1+n_2)} - x_{(m, n_1)} - x_{(m, n_2)}) &= \varphi(x_{(m, n_1+n_2)}) - \varphi(x_{(m, n_1)}) - \varphi(x_{(m, n_2)}) \\ &= \beta(m, n_1 + n_2) - \beta(m, n_1) - \beta(m, n_2) \\ &= \beta(m, n_1 + n_2) - (\beta(m, n_1) + \beta(m, n_2)) \\ &= \beta(m, n_1 + n_2) - \beta(m, n_1 + n_2) = 0 \end{aligned}$$

ja iga $m \in M, n \in N$ ning $r \in R$, mille puhul leiduvad korrutised mr ja rn , korral

$$\varphi(x_{(mr, n)} - x_{(m, rn)}) = \varphi(x_{(mr, n)}) - \varphi(x_{(m, rn)}) = \beta(mr, n) - \beta(m, rn) = 0.$$

Niisiis $H \subseteq \ker \varphi$. Abeli rühmade homomorfismiteoreemi 3.7 kohaselt leidub homomorfism $\bar{\beta} : T \rightarrow A$ nii, et ka alumine kolmnurk joonisel kommuteerub. Seega on kogu diagramm kommuteeruv, mistõttu $\beta = \bar{\beta} \circ \tau$.

Viimaks veendume, et homomorfism $\bar{\beta}$ on ühene. Olgu ka $\beta' : T \rightarrow A$ selline homomorfism, et $\beta = \beta' \circ \tau$. Siis suvalise $\sum_{k=1}^{k^*} z_k x_{(m_k, n_k)} \in \mathbb{Z}^{(M \times N)}$ korral

$$\begin{aligned} \beta' \left(\sum_{k=1}^{k^*} z_k x_{(m_k, n_k)} \right) &= \sum_{k=1}^{k^*} z_k \beta'(x_{(m_k, n_k)}) = \sum_{k=1}^{k^*} z_k \beta'(\tau(m_k, n_k)) = \sum_{k=1}^{k^*} z_k (\beta' \circ \tau)(m_k, n_k) \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} z_k \beta(m_k, n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} z_k (\bar{\beta} \circ \tau)(m_k, n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} z_k \bar{\beta}(\tau(m_k, n_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} z_k \bar{\beta}(x_{(m_k, n_k)}) = \bar{\beta} \left(\sum_{k=1}^{k^*} z_k x_{(m_k, n_k)} \right). \end{aligned}$$

Järelikult $\beta' = \bar{\beta}$ ehk $\bar{\beta}$ on üheselt määratud. Niisiis on (T, τ) osaliste moodulite M_R ja ${}_R N$ tensorkorrutis. \square

Et tensorkorrutis on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud, võime edaspidi kasutada just eelpool kirjeldatud tensorkorrutise konstruktsiooni. Kirjeldame nüüd ära osaliste moodulite tensorkorrutise elemendid.

Lause 4.5. *Olgu R ring ja M_R osaline parempoolne ning ${}_R N$ osaline vasakpoolne R -moodul. Tensorkorrutise $M \otimes_R N$ iga elemendi ν saab esitada kujul*

$$\nu = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k,$$

kus $k^* \in \mathbb{N}$ ja $m_k \in M$, $n_k \in N$ iga $k = 1, \dots, k^*$ korral. Seejuures kehtivad järgmised omadused:

1. $\forall m_1, m_2 \in M \forall n \in N : (m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n;$
2. $\forall m \in M \forall n_1, n_2 \in N : m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2;$
3. $\forall m \in M \forall n \in N \forall r \in R : \exists mr \wedge \exists rn \Rightarrow mr \otimes n = m \otimes rn;$
4. $0 \otimes 0$ on Abeli rühma $M \otimes_R N$ nullelement ja $0 \otimes 0 = m \otimes 0 = 0 \otimes n$ iga $m \in M$ ning $n \in N$ korral;
5. $\forall m \in M \forall n \in N : -(m \otimes n) = (-m) \otimes n = m \otimes (-n).$

Tõestus. Vaatleme osaliste R -moodulite M_R ja ${}_R N$ tensorkorrutist $M \otimes_R N$ ja tema elementi ν . Et $\nu \in \mathbb{Z}^{(M \times N)} / H$, kus H on lauses 4.4 kasutatud alamrühm, siis ν avaldub kujul

$$\nu = \left[\sum_{k=1}^{k^*} z_k x_{(m_k, n_k)} \right] = \sum_{k=1}^{k^*} z_k [x_{(m_k, n_k)}] = \sum_{k=1}^{k^*} z_k \tau(m_k, n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} z_k (m_k \otimes n_k),$$

kus $k^* \in \mathbb{N}$, $z_k \in \mathbb{Z}$ ja $(m_k, n_k) \in M \times N$ iga $k = 1, \dots, k^*$ korral. Kui mingi $k \in \{1, \dots, k^*\}$ korral $z_k \neq 1$, siis

$$|z_k|(m_k \otimes n_k) = \sum_{i=1}^{|z_k|} m_k \otimes n_k$$

ja vajadusel saame miinusmärgi viia liidetava $m_k \otimes n_k$ sisse tänu omadusele 5. Seega võime elemendi ν esitada kujul

$$\nu = \sum_{k=1}^{k^*} (m_k \otimes n_k).$$

Näitame, et kehtivad ka väljatoodud omadused. Omadused 1, 2 ja 3 kehtivad, sest kujutus $\tau : M \times N \mapsto M \otimes_R N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$, on R -tasakaalustatud.

Nüüd iga $m \in M$ ja $n \in N$ korral

$$\begin{aligned} m \otimes n + 0 \otimes 0 &= m \otimes n + 0 \otimes (0n) = m \otimes n + (0 \cdot 0) \otimes n \\ &= m \otimes n + 0 \otimes n = (m + 0) \otimes n = m \otimes n. \end{aligned}$$

Järelikult $0 \otimes 0$ on Abeli rühma $M \otimes_R N$ nullelement, kusjuures $0 \otimes 0 = 0 \otimes n$ (esimene kuni kolmas võrdus) iga $n \in N$ ja analoogiliselt $0 \otimes 0 = m \otimes 0$ iga $m \in M$ korral. Niisiis kehtib omadus 4.

Viimaks, iga $m \in M$ ja $n \in N$ korral

$$m \otimes n + (-m) \otimes n = (m + (-m)) \otimes n = 0 \otimes n = 0 \otimes 0.$$

Seega $-(m \otimes n) = (-m) \otimes n$ ja analoogiliselt $-(m \otimes n) = m \otimes (-n)$. Järelikult kehtib ka omadus 5. \square

Teame nüüd, et tensorkorrutise iga element on elementaartensorite lõplik summa. Järgmiseks vaatame, kuidas esitada tensorkorrutise konstruktsioonis kasutatud üheselt määratud Abeli rühmade homomorfismi $\bar{\beta}$.

Lemma 4.6. *Olgu R ring, M_R ja ${}_R N$ osalised R -moodulid, A Abeli rühm ning $\beta : M \times N \rightarrow A$ R -tasakaalustatud kujutus. Siis*

$$\bar{\beta} : M \otimes_R N \rightarrow A, \quad \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \beta(m_k, n_k)$$

on Abeli rühmade homomorfism.

Tõestus. Eeldame, et R on ring, M_R ja ${}_R N$ osalised R -moodulid, A Abeli rühm ning kujutus $\beta : M \times N \rightarrow A$ on R -tasakaalustatud. Tensorkorrutise definitsiooni kohaselt leidub üheselt määratud Abeli rühmade homomorfism $\bar{\beta} : M \otimes_R N \rightarrow A$ nii, et $\beta = \bar{\beta} \circ \otimes$. Siis suvalise $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$ korral

$$\bar{\beta} \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) = \sum_{k=1}^{k^*} \bar{\beta}(m_k \otimes n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} (\bar{\beta} \circ \otimes)(m_k, n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} \beta(m_k, n_k).$$

Järelikult on homomorfism $\bar{\beta}$ soovitud kujul. \square

Just tõestatud lemma on kasulik olukordades, kus meil on vaja defineerida kujutus $\bar{\beta}$ tensorikorrutisest mingisse Abeli rühma. Nagu näeme, siis piisab sellest, kui oskame defineerida R -tasakaalustatud kujutuse β hulgal $M \times N$.

Nüüd näitame, et teatud eeldustel saame osaliste moodulite tensorikorrutist vaadelda globaalse moodulina.

Lause 4.7. *Olgu R, S ringid, ${}_R M_S$ osaline vasakult viisakas (R, S) -bimoodul, seejuures olgu ${}_R M$ globaalne vasakpoolne moodul, ning ${}_S N$ osaline vasakpoolne S -moodul. Siis ${}_R(M \otimes_S N)$ on globaalne vasakpoolne R -moodul toimega*

$$r \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) := \sum_{k=1}^{k^*} r m_k \otimes n_k,$$

kus $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_S N$.

Tõestus. Olgu R, S ringid, ${}_R M_S$ osaline vasakult viisakas (R, S) -bimoodul, ${}_R M$ globaalne vasakpoolne R -moodul ning ${}_S N$ osaline vasakpoolne S -moodul. Vaatleme tensorikorrutist $M \otimes_S N$. Vastavalt tensorikorrutise definitsioonile on $(M \otimes_S N; +)$ Abeli rühm. Vaatleme iga $r \in R$ korral kujutust

$$\beta_r : M \times N \rightarrow M \otimes_S N, \quad \beta_r(m, n) = r m \otimes n.$$

Paneme tähele, et saame sellise kujutuse β_r defineerida iga $r \in R$ korral, sest ${}_R M$ on globaalne moodul. Fikseerime $r \in R$. Näitame, et β_r on S -tasakaalustatud kujutus. Kui $m, m' \in M$ ja $n, n' \in N$, siis

$$\begin{aligned} \beta_r(m + m', n) &= r(m + m') \otimes n = (r m + r m') \otimes n = r m \otimes n + r m' \otimes n \\ &= \beta_r(m, n) + \beta_r(m', n), \\ \beta_r(m, n + n') &= r m \otimes (n + n') = r m \otimes n + r m \otimes n' = \beta_r(m, n) + \beta_r(m, n'). \end{aligned}$$

Lisaks, kui $s \in S$ on selline, et korrutised ms ja sn leiduvad, siis tänu ${}_R M$ globaalsusele leidub $r(ms)$, tänu ${}_R M_S$ vasakult viisakusele leidub $(rm)s$ ja $(rm)s = r(ms)$. Seega

$$\beta_r(ms, n) = r(ms) \otimes n = (rm)s \otimes n = r m \otimes sn = \beta_r(m, sn).$$

Järelikult kujutus β_r on S -tasakaalustatud ja lemma 4.6 põhjal leidub korrektselt defineeritud

Abeli rühmade homomorfism

$$\overline{\beta}_r : M \otimes_S N \rightarrow M \otimes_S N, \quad \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} r m_k \otimes n_k.$$

Defineerime kujutuse

$$R \times (M \otimes_S N) \rightarrow M \otimes_S N, \quad \left(r, \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \mapsto \overline{\beta}_r \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) = \sum_{k=1}^{k^*} r m_k \otimes n_k.$$

See kujutus on korrektselt defineeritud ja langeb kokku lause sõnastuses toodud R -toimega.

Viimaks jääb veenduda, et saame tensorkorrutist $M \otimes_S N$ vaadelda globaalse moodulina antud R -toime suhtes. Olgu $r, r' \in R$ ja $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, \sum_{l=1}^{l^*} m'_l \otimes n'_l \in M \otimes_S N$. Siis

$$\begin{aligned} r \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k + \sum_{l=1}^{l^*} m'_l \otimes n'_l \right) &= r \left(\sum_{t=1}^{k^*+l^*} m''_t \otimes n''_t \right) = \sum_{t=1}^{k^*+l^*} r m''_t \otimes n''_t \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} r m_k \otimes n_k + \sum_{l=1}^{l^*} r m'_l \otimes n'_l \\ &= r \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) + r \left(\sum_{l=1}^{l^*} m'_l \otimes n'_l \right), \end{aligned}$$

kus $m''_t = m_t$ ning $n''_t = n_t$, kui $t \in \{1, \dots, k^*\}$ ja $m''_t = m'_{t-k^*}$ ning $n''_t = n'_{t-k^*}$, kui $t \in \{k^* + 1, \dots, k^* + l^*\}$. Lisaks

$$\begin{aligned} (r + r') \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) &= \sum_{k=1}^{k^*} (r + r') m_k \otimes n_k = \sum_{k=1}^{k^*} (r m_k + r' m_k) \otimes n_k \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} (r m_k \otimes n_k + r' m_k \otimes n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} r m_k \otimes n_k + \sum_{k=1}^{k^*} r' m_k \otimes n_k \\ &= r \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) + r' \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \end{aligned}$$

ning viimaks ka

$$\begin{aligned} r' \left(r \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \right) &= r' \left(\sum_{k=1}^{k^*} r m_k \otimes n_k \right) = \sum_{k=1}^{k^*} r' (r m_k) \otimes n_k \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} (r' r) m_k \otimes n_k = (r' r) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right). \end{aligned}$$

Niisiis saame tõepoolest tensorkorrutist $M \otimes_S N$ vaadelda globaalse vasakpoolsse R -moodulina kirjeldatud R -toime suhtes. \square

Samamoodi saame tõestada ka järgmise lause.

Lause 4.8. *Olgu R, S ringid, ${}_S N_R$ osaline paremalt viisakas (S, R) -bimoodul, seejuures olgu N_R globaalne parempoolne R -moodul, ning M_S osaline parempoolne S -moodul. Siis $(M \otimes_S N)_R$ on globaalne parempoolne R -moodul toimega*

$$\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) r := \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k r,$$

kus $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_S N$.

Järgmine tulemus ütleb, et osaliste moodulite tensorkorrutis on teatud tingimustel isomorfismi täpsuseni assotsiatiivne.

Teoreem 4.9. *Olgu R ja S ringid, M_R osaline parempoolne R -moodul, ${}_R N_S$ globaalne (R, S) -bimoodul ja ${}_S P$ osaline vasakpoolne moodul. Siis leidub Abeli rühmade isomorfism*

$$\alpha : (M \otimes_R N) \otimes_S P \rightarrow M \otimes_R (N \otimes_S P), \quad (m \otimes n) \otimes p \mapsto m \otimes (n \otimes p).$$

Tõestus. Olgu R ja S ringid, M_R osaline parempoolne R -moodul, ${}_R N_S$ globaalne (R, S) -bimoodul ja ${}_S P$ osaline vasakpoolne moodul. Teame, et $M \otimes_R (N \otimes_S P)$ on Abeli rühm tensorkorrutise definitsiooni põhjal. Fikseerime $p \in P$ ja defineerime kujutuse

$$\gamma_p : M \times N \rightarrow M \otimes_R (N \otimes_S P), \quad (m, n) \mapsto m \otimes (n \otimes p).$$

Kui $m, m' \in M$ ja $n, n' \in N$, siis

$$\begin{aligned} \gamma_p(m + m', n) &= (m + m') \otimes (n \otimes p) = m \otimes (n \otimes p) + m' \otimes (n \otimes p) = \gamma_p(m, n) + \gamma_p(m', n), \\ \gamma_p(m, n + n') &= m \otimes ((n + n') \otimes p) = m \otimes (n \otimes p + n' \otimes p) = m \otimes (n \otimes p) + m \otimes (n' \otimes p) \\ &= \gamma_p(m, n) + \gamma_p(m, n') \end{aligned}$$

ning kui $r \in R$ on selline, et leidub korrutis mr , siis

$$\gamma_p(mr, n) = mr \otimes (n \otimes p) = m \otimes r(n \otimes p) = m \otimes (rn \otimes p) = \gamma_p(m, rn).$$

Paneme tähele, et korrutised rn ja $r(n \otimes p)$ leiduvad niikuinii, sest ${}_R N$ ja ${}_R(N \otimes_S P)$ on

globaalsed moodulid. Järelikult γ_p on R -tasakaalustatud kujutus. Tänu lemmale 4.6 on

$$\overline{\gamma}_p : M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R (N \otimes_S P), \quad \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \gamma_p(m_k, n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes p).$$

Abeli rühmade homomorfism. Järgmiseks defineerime kujutuse

$$\begin{aligned} \delta : (M \otimes_R N) \times P &\rightarrow M \otimes_R (N \otimes_S P), \\ \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, p \right) &\mapsto \overline{\gamma}_p \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes p). \end{aligned}$$

Näitame, et δ on S -tasakaalustatud. Kuna $\overline{\gamma}_p$ on Abeli rühmade homomorfism, siis δ on esimese argumendi suhtes aditiivne. Kui $p, p' \in P$ ja $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$, siis

$$\begin{aligned} \delta \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, p + p' \right) &= \overline{\gamma}_{p+p'} \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes (p + p')) \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes p + n_k \otimes p') \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} (m_k \otimes (n_k \otimes p) + m_k \otimes (n_k \otimes p')) \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes p) + \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes p') \\ &= \delta \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, p \right) + \delta \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, p' \right). \end{aligned}$$

Lisaks, kui $s \in S$ korral leidub korrutis sp , siis kasutades lauset 4.8 saame, et

$$\begin{aligned} \delta \left(\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) s, p \right) &= \overline{\gamma}_p \left(\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) s \right) = \overline{\gamma}_p \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k s \right) \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k s \otimes p) = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes sp) = \overline{\gamma}_{sp} \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \\ &= \delta \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, sp \right). \end{aligned}$$

Seega δ on S -tasakaalustatud kujutus. Nüüd, taas tänu lemmale 4.6, on kujutus

$$\alpha := \overline{\delta} : (M \otimes_R N) \otimes_S P \rightarrow M \otimes_R (N \otimes_S P), \quad \sum_{h=1}^{h^*} (m_h \otimes n_h) \otimes p_h \mapsto \sum_{h=1}^{h^*} m_h \otimes (n_h \otimes p_h)$$

Abeli rühmade homomorfism. Analoogiliselt leidub ka Abeli rühmade homomorfism

$$\beta : M \otimes_R (N \otimes_S P) \rightarrow (M \otimes_R N) \otimes_S P, \quad \sum_{h=1}^{h^*} m_h \otimes (n_h \otimes p_h) \mapsto \sum_{h=1}^{h^*} (m_h \otimes n_h) \otimes p_h.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta) \left(\sum_{h=1}^{h^*} m_h \otimes (n_h \otimes p_h) \right) &= \alpha \left(\sum_{h=1}^{h^*} (m_h \otimes n_h) \otimes p_h \right) = \sum_{h=1}^{h^*} m_h \otimes (n_h \otimes p_h), \\ (\beta \circ \alpha) \left(\sum_{h=1}^{h^*} (m_h \otimes n_h) \otimes p_h \right) &= \beta \left(\sum_{h=1}^{h^*} m_h \otimes (n_h \otimes p_h) \right) = \sum_{h=1}^{h^*} (m_h \otimes n_h) \otimes p_h. \end{aligned}$$

Seega $\alpha \circ \beta = \text{id}_{M \otimes_R (N \otimes_S P)}$ ja $\beta \circ \alpha = \text{id}_{(M \otimes_R N) \otimes_S P}$. Järelikult on $M \otimes_R (N \otimes_S P)$ ja $(M \otimes_R N) \otimes_S P$ isomorfsed Abeli rühmad. \square

4.2 Osaliste moodulite homomorfismide tensorkorrutis

Defineerime nüüd osaliste moodulite homomorfismide tensorkorrutise. Olgu R ring, M_R, M'_R osalised parempoolsed ja ${}_R N, {}_R N'$ osalised vasakpoolsed R -moodulid ning $f : M \rightarrow M'$, $g : N \rightarrow N'$ osaliste R -moodulite homomorfismid. Vaatleme kujutust

$$(f; g) : M \times N \rightarrow M' \otimes_R N', \quad (m, n) \mapsto f(m) \otimes g(n).$$

Kui $m, m' \in M$ ja $n, n' \in N$, siis

$$\begin{aligned} (f; g)(m + m', n) &= f(m + m') \otimes g(n) = (f(m) + f(m')) \otimes g(n) \\ &= f(m) \otimes g(n) + f(m') \otimes g(n) = (f; g)(m, n) + (f; g)(m', n), \\ (f; g)(m, n + n') &= f(m) \otimes g(n + n') = f(m) \otimes (g(n) + g(n')) \\ &= f(m) \otimes g(n) + f(m) \otimes g(n') = (f; g)(m, n) + (f; g)(m, n'). \end{aligned}$$

Kui nüüd lisaks $r \in R$ on selline, et korrutised mr ja rn leiduvad, siis leiduvad ka $f(m)r$ ja $rg(n)$ ning

$$\begin{aligned} (f; g)(mr, n) &= f(mr) \otimes g(n) = f(m)r \otimes g(n) = f(m) \otimes rg(n) = f(m) \otimes g(rn) \\ &= (f; g)(m, rn). \end{aligned}$$

Järelikult on kujutus $(f; g)$ R -tasakaalustatud. Tänu lemmale 4.6 leidub Abeli rühmade homomorfism $\overline{(f; g)} : M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$ nii, et $\overline{(f; g)} \circ \otimes = (f; g)$ ehk

$$\overline{(f; g)}(m \otimes n) = (\overline{(f; g)} \circ \otimes)(m, n) = (f; g)(m, n) = f(m) \otimes g(n)$$

ehk diagramm

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{(f;g)} & M' \otimes_R N' \\ & \searrow \otimes & \nearrow \overline{(f;g)} \\ & M \otimes_R N & \end{array}$$

kommuteerub.

Definitsioon 4.10. Kujutust $\overline{(f; g)}$ nimetatakse **osaliste moodulite homomorfismide f ja g tensorkorrutiseks**. Tähistame $f \otimes g := \overline{(f; g)}$.

Järgmiseks näeme, et osaliste moodulite homomorfismide tensorkorrutisel on mitmeid häid omadusi. Retraktsiooni, koretraktsiooni ja isomorfismi definitsioonid võib leida raamatust [7].

Lause 4.11. Olgu R ring, M_R, M'_R, M''_R osalised parempoolsed ja ${}_R N, {}_R N', {}_R N''$ osalised vasakpoolsed R -moodulid ning $f, f^* : M_R \rightarrow M'_R, f' : M'_R \rightarrow M''_R, g, g^* : {}_R N \rightarrow {}_R N', g' : {}_R N' \rightarrow {}_R N''$ osaliste R -moodulite homomorfismid. Siis

1. $\text{id}_M \otimes \text{id}_N = \text{id}_{M \otimes_R N}$;
2. $(f + f^*) \otimes g = f \otimes g + f^* \otimes g$;
3. $f \otimes (g + g^*) = f \otimes g + f \otimes g^*$;
4. $f \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes g = \mathbf{0}$;
5. kui f ja g on sürjektiivsed, on ka $f \otimes g$ sürjektiivne;
6. $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$;
7. kui f ja g on retraktsioonid, koretraktsioonid või isomorfismid, siis on ka $f \otimes g$ vastava omadusega. Viimasel juhul kehtib võrdus $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.

Tõestus. Olgu R ring, M_R, M'_R, M''_R osalised parempoolsed R -moodulid ja ${}_R N, {}_R N', {}_R N''$ osalised vasakpoolsed R -moodulid. Olgu kujutused $f, f^* : M_R \rightarrow M'_R, f' : M'_R \rightarrow M''_R$ ja $g, g^* : {}_R N \rightarrow {}_R N', g' : {}_R N' \rightarrow {}_R N''$ osaliste R -moodulite homomorfismid. Näitame, et välja toodud omadused kehtivad elementaartensoritel $m \otimes n \in M \otimes_R N$. Siis kehtivad omadused ka kõigil elementidel $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$.

1. Näeme, et

$$(\text{id}_M \otimes \text{id}_N)(m \otimes n) = \text{id}_M(m) \otimes \text{id}_N(n) = m \otimes n = \text{id}_{M \otimes_R N}(m \otimes n).$$

2. Kehtib

$$\begin{aligned} ((f + f^*) \otimes g)(m \otimes n) &= (f + f^*)(m) \otimes g(n) = (f(m) + f^*(m)) \otimes g(n) \\ &= f(m) \otimes g(n) + f^*(m) \otimes g(n) \\ &= (f \otimes g)(m \otimes n) + (f^* \otimes g)(m \otimes n) \\ &= (f \otimes g + f^* \otimes g)(m \otimes n). \end{aligned}$$

3. Kehtib analoogiliselt eelmise omadusega.

4. Näeme, et

$$\begin{aligned} (f \otimes \mathbf{0})(m \otimes n) &= f(m) \otimes \mathbf{0}(n) = f(m) \otimes 0 = 0 \otimes 0 \\ &= 0 \otimes g(n) = \mathbf{0}(m) \otimes g(n) = (\mathbf{0} \otimes g)(m \otimes n). \end{aligned}$$

5. Olgu f ja g sürjektiivsed. Kui $\sum_{k=1}^{k^*} m'_k \otimes n'_k \in M' \otimes_R N'$, siis leiduvad $m_k \in M$ ja $n_k \in N$ nii, et $m'_k = f(m_k)$ ja $n'_k = g(n_k)$ iga $k \in \{1, \dots, k^*\}$ korral. Järelikult

$$\sum_{k=1}^{k^*} m'_k \otimes n'_k = \sum_{k=1}^{k^*} f(m_k) \otimes g(n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} (f \otimes g)(m_k \otimes n_k) = (f \otimes g) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right).$$

Seega on ka $f \otimes g$ sürjektiivne.

6. Olgu $m \otimes n \in M \otimes_R N$. Siis

$$\begin{aligned} ((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(m \otimes n) &= (f' \otimes g')(f(m) \otimes g(n)) = f'(f(m)) \otimes g'(g(n)) \\ &= (f' \circ f)(m) \otimes (g' \circ g)(n) = ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(m \otimes n). \end{aligned}$$

7. Olgu f ja g retraktsioonid. Siis leiduvad $\hat{f} : M'_R \rightarrow M_R$ ja $\hat{g} : {}_R N' \rightarrow {}_R N$ nii, et $f \circ \hat{f} = \text{id}_{M'}$ ja $g \circ \hat{g} = \text{id}_{N'}$. Siis

$$(f \otimes g) \circ (\hat{f} \otimes \hat{g}) = (f \circ \hat{f}) \otimes (g \circ \hat{g}) = \text{id}_{M'} \otimes \text{id}_{N'} = \text{id}_{M' \otimes_R N'}.$$

Järelikult on ka $f \otimes g$ retraktsioon. Analoogiliselt, kui f ja g on koretraktsioonid või

isomorfismid, siis on ka $f \otimes g$ vastava omadusega. Kui f ja g on isomorfismid, siis ka

$$\begin{aligned}(f \otimes g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}) &= (f \circ f^{-1}) \otimes (g \circ g^{-1}) = \text{id}_{M'} \otimes \text{id}_{N'} = \text{id}_{M' \otimes_R N'}, \\ (f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (f \otimes g) &= (f^{-1} \circ f) \otimes (g^{-1} \circ g) = \text{id}_M \otimes \text{id}_N = \text{id}_{M \otimes_R N}.\end{aligned}$$

Järelikult $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.

□

4.3 Tensorfunktori eksaktsus

Siin alapeatükis näitame, et teatud tingimustel on osaliste moodulite tensorfunktor paremalt eksaktne. Selleks defineerime esiteks lõplikud täpsed jadad. Täpsed jadad on üheks väga oluliseks tööriistaks moodulite teoorias. Käesolev alapeatükk põhineb raamatul [10].

Definitsioon 4.12. Olgu R ring. Olgu iga $\gamma \in \{1, \dots, n\}$ korral M_R^γ osaline parempoolne R -moodul ja $f_\gamma : M_R^\gamma \rightarrow M_R^{\gamma+1}$ ($\gamma \neq n$) osaliste parempoolsete R -moodulite homomorfism. Siis jada

$$M_R^1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{\gamma-2}} M_R^{\gamma-1} \xrightarrow{f_{\gamma-1}} M_R^\gamma \xrightarrow{f_\gamma} M_R^{\gamma+1} \xrightarrow{f_{\gamma+1}} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_R^n$$

nimetatakse **täpsiks**, kui iga $\gamma \in \{1, \dots, n-1\}$ korral $\text{im } f_\gamma = \ker f_{\gamma+1}$.

Definitsioon 4.13. Olgu R ring, L_R, M_R, N_R osalised R -moodulid ning $f : L_R \rightarrow M_R$, $g : M_R \rightarrow N_R$ osaliste moodulite homomorfismid. Täpset jada

$$\{0\} \xrightarrow{0} L_R \xrightarrow{f} M_R \xrightarrow{g} N_R \xrightarrow{0} \{0\}$$

nimetatakse **lühikeseks täpsiks jadaks**.

On lihtne näha, et lühikese täpse jada korral on homomorfism f injektiivne ja homomorfism g surjektiivne. Järgmiseks defineerime tensorfunktorid osaliste moodulite jaoks.

Lause 4.14. Olgu M_R osaline parempoolne R -moodul. Siis diagramm

$$\begin{array}{ccc} {}_R N & \xrightarrow{\quad} & M \otimes_R N \\ \downarrow g & & \downarrow \text{id}_M \otimes g \\ {}_R N' & \xrightarrow{\quad} & M \otimes_R N' \end{array}$$

defineerib funktori $M \otimes_R _ : {}_R\text{PMod} \rightarrow \text{Ab}$, kus Ab tähistab Abeli rühmade kategooriat.

Tõestus. Vaatleme eeskirja $M \otimes_R _$, mis on defineeritud eelneva diagrammiga. Iga osalise mooduli ${}_R N \in \text{Ob}({}_R\text{PMod})$ korral leidub tensorkorrutis $M \otimes_R N$ ning see on Abeli rühm vastavalt definitsioonile 4.2, seega $M \otimes_R _ : \text{Ob}({}_R\text{PMod}) \rightarrow \text{Ob}(\text{Ab})$ on kujutus. Iga homomorfismi $g \in \text{Hom}_{{}_R\text{PMod}}(N, N')$ korral on $(M \otimes_R _)(g) = \text{id}_M \otimes g : M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N'$ morfism kategoorias Ab . Olgu nüüd $g \in \text{Hom}_{{}_R\text{PMod}}(N, N')$ ja $f \in \text{Hom}_{{}_R\text{PMod}}(N', N'')$. Siis

$$\begin{aligned} (M \otimes_R _)(f \circ g) &= \text{id}_M \otimes (f \circ g) = (\text{id}_M \circ \text{id}_M) \otimes (f \circ g) = (\text{id}_M \otimes f) \circ (\text{id}_M \otimes g) \\ &= (M \otimes_R _)(f) \circ (M \otimes_R _)(g). \end{aligned}$$

Viimaks, iga ${}_R N \in \text{Ob}({}_R\text{PMod})$ korral

$$(M \otimes_R _)(\text{id}_N) = \text{id}_M \otimes \text{id}_N = \text{id}_{M \otimes_R N}.$$

Järelikult on $M \otimes_R _$ funktor. Seda funktoorit nimetame **tensorfunktoriks**. □

Analoogiliselt saame ka tensorfunktori $_ \otimes_R N : \text{PMod}_R \rightarrow \text{Ab}$, kui ${}_R N$ on osaline vasakpoolne R -moodul. Järgmine teoreem näitab, kuidas tensorfunktor toimib lühikestel täpsetel jadadel.

Teoreem 4.15. *Olgu R ring ja ${}_R N$ osaline vasakpoolne R -moodul. Kui jada*

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} M_R \xrightarrow{f} K_R \xrightarrow{g} L_R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}, \quad (1)$$

kus g on täishomomorfism, on kategoorias PMod_R lühike täpne jada, siis ka jada

$$M \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \text{id}_N} K \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes \text{id}_N} L \otimes_R N \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\} \quad (2)$$

on täpne kategoorias Ab .

Tõestus. Vaatleme kategoorias PMod_R lühikest täpset jada

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} M_R \xrightarrow{f} K_R \xrightarrow{g} L_R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\},$$

kus g on täishomomorfism, ja kategoorias Ab jada

$$M \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \text{id}_N} K \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes \text{id}_N} L \otimes_R N \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}.$$

Kuna jada (1) on täpne, siis g on sürjektiivne. Lause 4.11 põhjal on ka $g \otimes \text{id}_N$ sürjektiivne. Et $\text{im } f = \ker g$, siis $g \circ f = \mathbf{0}$. Järelikult lause 4.11 põhjal

$$(g \otimes \text{id}_N) \circ (f \otimes \text{id}_N) = (g \circ f) \otimes (\text{id}_N \circ \text{id}_N) = \mathbf{0} \otimes \text{id}_N = \mathbf{0}.$$

Niisiis $\text{im}(f \otimes \text{id}_N) \subseteq \ker(g \otimes \text{id}_N)$. Näitame, et ka $\ker(g \otimes \text{id}_N) \subseteq \text{im}(f \otimes \text{id}_N)$. Järelduse 3.7 kohaselt leidub sürjektiivne Abeli rühmade homomorfism φ nii, et diagramm

$$\begin{array}{ccc} K \otimes_R N & \xrightarrow{g \otimes \text{id}_N} & L \otimes_R N \\ & \searrow \pi & \nearrow \varphi \\ & (K \otimes_R N) / (\text{im}(f \otimes \text{id}_N)) & \end{array}$$

kommuteerub, kus π on kanooniline sürjektsioon. Seega

$$\begin{aligned} \varphi \left(\sum_{h=1}^{h^*} [k_h \otimes n_h] \right) &= \varphi \left(\sum_{h=1}^{h^*} \pi(k_h \otimes n_h) \right) = \sum_{h=1}^{h^*} \varphi(\pi(k_h \otimes n_h)) = \sum_{h=1}^{h^*} (g \otimes \text{id}_N)(k_h \otimes n_h) \\ &= \sum_{h=1}^{h^*} g(k_h) \otimes n_h. \end{aligned}$$

Defineerime kujutuse

$$\beta : L \times N \rightarrow (K \otimes_R N) / (\text{im}(f \otimes \text{id}_N)), \quad (l, n) \mapsto [k \otimes n],$$

kus k on selline, et $g(k) = l$. Paneme tähele, et selline element k leidub, sest g on sürjektiivne. Näitame, et kujutus β on korrektselt defineeritud. Olgu $k, k' \in K$ sellised, et $g(k) = g(k') = l$ mingi $l \in L$ korral. Siis $k' - k \in \ker g = \text{im } f$ ja järelikult $(k' - k) \otimes n \in \text{im}(f \otimes \text{id}_N)$ ning $[(k' - k) \otimes n] = [0 \otimes 0]$. Nüüd

$$[k \otimes n] = [k \otimes n] + [0 \otimes 0] = [k \otimes n] + [(k' - k) \otimes n] = [k \otimes n + k' \otimes n - k \otimes n] = [k' \otimes n].$$

Seega kujutus β on korrektselt defineeritud. Järgmiseks näitame, et β on R -tasakaalustatud kujutus. Olgu $l, l' \in L$ ja $k, k' \in K$ sellised, et $g(k) = l$ ja $g(k') = l'$. Siis

$$g(k + k') = g(k) + g(k') = l + l'$$

ning järelikult iga $n, n' \in N$ korral

$$\beta(l + l', n) = [(k + k') \otimes n] = [k \otimes n] + [k' \otimes n] = \beta(l, n) + \beta(l', n),$$

$$\beta(l, n + n') = [k \otimes (n + n')] = [k \otimes n] + [k \otimes n'] = \beta(l, n) + \beta(l, n').$$

Kui $r \in R$ on selline, et leidub korrutis $lr = g(k)r$, siis et g on täishomomorfism, leidub $k'' \in K$ nii, et korrutis $k''r$ eksisteerib ja $g(k'') = g(k) = l$. Järelikult leidub korrutis $g(k'')r$ ja

$$lr = g(k)r = g(k'')r = g(k'')r.$$

Kui lisaks leidub ka korrutis rn , siis

$$\beta(lr, n) = [k''r \otimes n] = [k'' \otimes rn] = \beta(l, rn).$$

Seega on β R -tasakaalustatud kujutus. Vastavalt lemmale 4.6 on kujutus

$$\bar{\beta} : L \otimes_R N \rightarrow (K \otimes_R N) / \text{im}(f \otimes \text{id}_N), \quad \sum_{h=1}^{h^*} l_h \otimes n_h \mapsto \sum_{h=1}^{h^*} [k_h \otimes n_h],$$

kus iga h korral $l_h = g(k_h)$, Abeli rühmade homomorfism. Nüüd

$$\begin{aligned} (\bar{\beta} \circ \varphi) \left(\sum_{h=1}^{h^*} [k_h \otimes n_h] \right) &= \bar{\beta} \left(\varphi \left(\sum_{h=1}^{h^*} \pi(k_h \otimes n_h) \right) \right) = \bar{\beta} \left(\varphi \left(\pi \left(\sum_{h=1}^{h^*} k_h \otimes n_h \right) \right) \right) \\ &= \bar{\beta} \left((g \otimes \text{id}_N) \left(\sum_{h=1}^{h^*} k_h \otimes n_h \right) \right) = \bar{\beta} \left(\sum_{h=1}^{h^*} g(k_h) \otimes n_h \right) \\ &= \sum_{h=1}^{h^*} [k_h \otimes n_h], \end{aligned}$$

kus $\sum_{h=1}^{h^*} [k_h \otimes n_h] \in (K \otimes_R N) / \text{im}(f \otimes \text{id}_N)$. Seega $\bar{\beta} \circ \varphi = \text{id}_{(K \otimes_R N) / \text{im}(f \otimes \text{id}_N)}$. Lisaks sellele iga $\sum_{h=1}^{h^*} l_h \otimes n_h \in L \otimes_R N$ korral

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \bar{\beta}) \left(\sum_{h=1}^{h^*} l_h \otimes n_h \right) &= \varphi \left(\sum_{h=1}^{h^*} [k_h \otimes n_h] \right) = \varphi \left(\pi \left(\sum_{h=1}^{h^*} k_h \otimes n_h \right) \right) \\ &= (g \otimes \text{id}_N) \left(\sum_{h=1}^{h^*} k_h \otimes n_h \right) = \sum_{h=1}^{h^*} g(k_h) \otimes n_h = \sum_{h=1}^{h^*} l_h \otimes n_h. \end{aligned}$$

Seega ka $\varphi \circ \bar{\beta} = \text{id}_{L \otimes_R N}$. Niisiis kujutus φ on Abeli rühmade isomorfism. Seetõttu $\ker \varphi = \{0\}$.

Nüüd Abeli rühmade homomorfismiteoreemi (vt järeldust 3.7) kohaselt

$$\{0\} = \ker \varphi = \ker(g \otimes \text{id}_N) / \text{im}(f \otimes \text{id}_N).$$

Et viimane faktorrühm on üheelemendiline ja $\text{im}(f \otimes \text{id}_N) \subseteq \ker(g \otimes \text{id}_N)$, siis $\ker(g \otimes \text{id}_N) =$

$\text{im}(f \otimes \text{id}_N)$. Seega on jada (2) täpne. \square

Näide 4.16. Olgu M_R osaline parempoolne R -moodul, mis rahuldab tingimusi (M4'), (M5'), ja $N \subseteq M$ selline alamhulk, et N_R on osalise mooduli M_R tehete suhtes globaalne moodul. Siis loomulik projektsioon $\pi : M \rightarrow M/N$, $m \mapsto [m]$, on definitsiooni 3.1 kohaselt täishomomorfism. Sisestus $\iota : N_R \rightarrow M_R$, $n \mapsto n$ on osaliste moodulite homomorfism, seejuures $\text{im } \iota = N = \ker \pi$. Seega osalise R -mooduli ${}_R K$ korral on jada

$$N \otimes_R K \xrightarrow{\iota \otimes \text{id}_K} M \otimes_R K \xrightarrow{\pi \otimes \text{id}_K} (M/N) \otimes_R K \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}$$

täpne.

Viimaseks defineerime funktoore eksaktsuse ning teeme teoreemist 4.15 kasuliku järelduse.

Definitsioon 4.17. Olgu R ring ja $\mathcal{A} \subseteq \text{PMod}_R$ alamkateooria. Funktorit $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ nimetatakse **paremalt eksaktseks**, kui iga lühikese täpse jada

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}$$

korral on

$$F(M_1) \xrightarrow{F(f)} F(M_2) \xrightarrow{F(g)} F(M_3) \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}$$

täpne jada. Duaalselt saab defineerida ka **vasakult eksaktsed** funktoore.

Kuna iga tugev osaliste moodulite homomorfism on ühtlasi ka täishomomorfism, kehtib järgmine järeldus.

Järeldus 4.18. Olgu R ring ja ${}_R N$ osaline vasakpoolne R -moodul. Siis tensorfunktor ${}_R \otimes N : \text{PMod}_R^t \rightarrow \text{Ab}$ on paremalt eksaktne.

5 Tensorfunktori ja hom-funktori adjunksioon

Käesolevas peatükis tõestame töö põhitulemuse ehk näitame, et teatud eeldustel on osaliste moodulite tensorfunktor osaliste moodulite hom-funktori vasakpoolne kaasfunktor. Taas, tulemused on artikli [8] tulemuste analoogid osaliste moodulite jaoks. Esiteks defineerime osaliste moodulite jaoks tensorfunktorid, mille sihtkategoriat on moodulite kategooria.

Lause 5.1. *Olgu ${}_S M_R$ selline vasakult viisakas osaline (S, R) -bimoodul, et ${}_S M$ on globaalne vasakpoolne S -moodul. Siis leidub funktor $M \otimes_R _ : {}_R \text{PMod} \rightarrow {}_S \text{Mod}$.*

Tõestus. Tänu lausele 4.14 leidub tensorfunktor $M \otimes_R _ : {}_R \text{PMod} \rightarrow \text{Ab}$. Lause 4.7 põhjal on ${}_S(M \otimes_R N)$ globaalne vasakpoolne S -moodul, seega $M \otimes_R _ : \text{Ob}({}_R \text{PMod}) \rightarrow \text{Ob}({}_S \text{Mod})$ on kujutus. Iga $g \in \text{Hom}_{{}_R \text{PMod}}(N, N')$ korral on $(M \otimes_R _)(g) = \text{id}_M \otimes g : M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N'$ morfism kategoorias ${}_S \text{Mod}$. Järelikult saame vaadelda tensorfunktorit $M \otimes_R _ : {}_R \text{PMod} \rightarrow {}_S \text{Mod}$. \square

Analoogiliselt saame vaadelda ka tensorfunktorit $_ \otimes_S M : \text{PMod}_S \rightarrow \text{Mod}_R$, kus M_R on globaalne moodul ja osaline moodul ${}_S M_R$ paremalt viisakas.

Olgu ${}_S M_R$ osaline bimoodul. Definitsiooni 1.6 põhjal leidub hom-funktor $\text{Hom}({}_S M_R, _) : {}_S \text{PMod} \rightarrow \text{Set}$. Me saame vaadelda homomorfismide ${}_S M_R \rightarrow {}_S N$, kus ${}_S N$ on osaline vasakpoolne moodul, hulka Abeli rühmana punktiiviisi liitmise suhtes. Näitame, et saame teatud eeldustel Abeli rühma $\text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$ vaadelda ka osalise vasakpoolse R -moodulina.

Lause 5.2. *Olgu R ja S ringid ning ${}_S M_R$ osaline paremalt viisakas bimoodul. Siis leidub kovariantne hom-funktor $\text{Hom}({}_S M_R, _) : {}_S \text{PMod} \rightarrow {}_R \text{PMod}$.*

Tõestus. Olgu ${}_S M_R \in \text{Ob}({}_S \text{PMod}_R)$ paremalt viisakas osaline bimoodul ja ${}_S N \in \text{Ob}({}_S \text{PMod})$. Me tahame Abeli rühma $\text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$ muuta osaliseks vasakpoolseks R -mooduliks. Olgu $f \in \text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$ ning $r \in R$. Defineerime korrutise rf parajasti siis, kui korrutis mr leidub iga $m \in M$ korral või kui $f = \mathbf{0}$. Esimesel juhul olgu iga $m \in M$ korral

$$(rf)(m) = f(mr)$$

ja viimasel juhul $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$, st $(r\mathbf{0})(m) = 0$ iga $m \in M$ puhul. Selgelt $r\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$. Olgu $r \in R$ nüüd selline, et korrutis mr leidub iga $m \in M$ korral. Siis korrutised $m_1 r$, $m_2 r$ ja $(m_1 + m_2)r$, kus $m_1, m_2 \in M$, leiduvad ning

$$(rf)(m_1 + m_2) = f((m_1 + m_2)r) = f(m_1 r + m_2 r) = f(m_1 r) + f(m_2 r)$$

$$= (rf)(m_1) + (rf)(m_2).$$

Kui $s \in S$ on selline, et korrutis sm , $m \in M$, leidub, siis $(sm)r$ leidub tänu eelnevale eeldusele r kohta. Et ${}_S M_R$ on paremalt viisakas, siis leidub ka $s(mr)$ ja

$$(rf)(sm) = f((sm)r) = f(s(mr)) = sf(mr) = s(rf)(m).$$

Järelikult $rf \in \text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$.

Viimaks kontrollime, kas defineeritud osalise toimega on $\text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$ osaline vasakpoolne R -moodul. Paneme tähele, et osalise mooduli definitsiooni tingimus (M2) kehtib tänu meie osalise toime definitsioonile. Iga $f \in \text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$ korral on $0f$ defineeritud, sest iga $m \in M$ korral korrutis $m0$ eksisteerib ja seega

$$(0f)(m) = f(m0) = f(0) = 0.$$

Järelikult kehtib ka tingimus (M3). Olgu nüüd $r, r' \in R$, $f, g \in \text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$. Kui korrutised rf , rg ja $r(f + g)$ eksisteerivad, siis leidub mr iga $m \in M$ korral ja

$$(r(f + g))(m) = (f + g)(mr) = f(mr) + g(mr) = (rf)(m) + (rg)(m) = (rf + rg)(m).$$

Seega kehtib tingimus (M4). Kui leiduvad korrutised rf , $r'f$ ja $(r + r')f$, siis iga $m \in M$ korral leiduvad korrutised mr , mr' ja $m(r + r')$ ning seega

$$\begin{aligned} ((r + r')f)(m) &= f(m(r + r')) = f(mr + mr') = f(mr) + f(mr') = (rf)(m) + (r'f)(m) \\ &= (rf + r'f)(m) \end{aligned}$$

ehk kehtib tingimus (M5). Kui leiduvad korrutised $r'f$ ja $r(r'f)$, siis leiduvad korrutised mr' ja mr iga $m \in M$ korral. Fikseerides $m \in M$ saame, et järelikult leidub ka korrutis $(mr)r'$. Seega eksisteerib korrutis $m(rr')$, mistõttu $(rr')f$ on defineeritud ja

$$((rr')f)(m) = f(m(rr')) = f((mr)r') = (r'f)(mr) = (r(r'f))(m).$$

Niisi kehtib ka tingimus (M6). Oleme näidanud, et saame hulka $\text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$ vaadelda osalise vasakpoolse R -moodulina. Olgu nüüd $g : {}_S N \rightarrow {}_S N'$ osaliste vasakpoolsete S -moodulite homomorfism. Näitame, et $g \circ _ : \text{Hom}({}_S M_R, {}_S N) \rightarrow \text{Hom}({}_S M_R, {}_S N')$ on osaliste

vasakpoolsete R -moodulite homomorfism. Olgu $f, f' \in \text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$ ja $m \in M$. Siis

$$\begin{aligned} (g \circ _)(f + f')(m) &= (g \circ (f + f'))(m) = g((f + f')(m)) = g(f(m) + f'(m)) \\ &= g(f(m)) + g(f'(m)) = (g \circ f)(m) + (g \circ f')(m) \\ &= (g \circ _)(f)(m) + (g \circ _)(f')(m) = ((g \circ _)(f) + (g \circ _)(f'))(m), \end{aligned}$$

seega $g \circ _$ on aditiivne. Olgu nüüd $r \in R$ ja $f \in \text{Hom}({}_S M_R, {}_S N)$ sellised, et leidub korrutis rf . Kui $f = \mathbf{0}$, siis

$$(g \circ _)(rf) = g \circ (r\mathbf{0}) = g \circ \mathbf{0} = \mathbf{0} = r\mathbf{0} = r(g \circ \mathbf{0}) = r(g \circ f) = (r(g \circ _))(f).$$

Vastasel juhul leidub iga $m \in M$ korral korrutis mr ja

$$\begin{aligned} (g \circ _)(rf)(m) &= (g \circ (rf))(m) = g((rf)(m)) = g(f(mr)) = (g \circ f)(mr) = (r(g \circ f))(m) \\ &= (r(g \circ _))(f)(m). \end{aligned}$$

Seega on $g \circ _$ osaliste vasakpoolsete R -moodulite homomorfism. Järelikult saame vaadelda hom-funktorit $\text{Hom}({}_S M_R, _) : {}_S \text{PMod} \rightarrow {}_R \text{PMod}$. \square

Meenutame, et ${}_S \text{PMod}'$ on tingimust (M5') rahuldavate osaliste vasakpoolsete S -moodulite kategooria.

Lause 5.3. *Olgu R ja S ringid. Siis kujutus*

$$\begin{aligned} \chi : \text{Hom}({}_R N, {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P))) &\rightarrow \text{Hom}({}_S(M \otimes_R N), {}_S P), \\ \chi(f) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) &= \sum_{k=1}^{k^*} f(n_k)(m_k) \end{aligned}$$

on bijektiivne iga ${}_S M_R \in \text{Ob}({}_S \text{Mod}_R)$, ${}_R N \in \text{Ob}({}_R \text{PMod})$ ning ${}_S P \in \text{Ob}({}_S \text{PMod}')$ korral.

Tõestus. Olgu ${}_S M_R \in \text{Ob}({}_S \text{Mod}_R)$, ${}_R N \in \text{Ob}({}_R \text{PMod})$ ja ${}_S P \in \text{Ob}({}_S \text{PMod}')$. Esiteks näitame, et $\chi(f)$ on korrektselt defineeritud iga $f \in \text{Hom}({}_R N, {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P)))$ korral. Olgu kujutus $\beta : M \times N \rightarrow P$ selline, et

$$\beta(m, n) := f(n)(m),$$

kus $m \in M$ ja $n \in N$. Näitame, et β on R -tasakaalustatud. Olgu $m, m' \in M$ ja $n, n' \in N$.

Siis

$$\begin{aligned}\beta(m + m', n) &= f(n)(m + m') = f(n)(m) + f(n)(m') = \beta(m, n) + \beta(m', n), \\ \beta(m, n + n') &= f(n + n')(m) = (f(n) + f(n'))(m) = f(n)(m) + f(n')(m) \\ &= \beta(m, n) + \beta(m, n'),\end{aligned}$$

sest f ja $f(n)$ on osaliste vasakpoolsete moodulite homomorfismid. Kui nüüd $r \in R$ on selline, et korrutis rn eksisteerib (korrutis mr eksisteerib iga $m \in M$ korral niikuinii, sest ${}_S M_R$ on globaalne bimoodul), siis leidub ka $rf(n)$, kusjuures $rf(n) = f(rn)$ ja

$$\beta(mr, n) = f(n)(mr) = (rf(n))(m) = f(rn)(m) = \beta(m, rn).$$

Seega β on R -tasakaalustatud kujutus ja järelikult lemma 4.6 põhjal on $\bar{\beta} : M \otimes_R N \rightarrow P$, mis on defineeritud võrdusega

$$\bar{\beta} \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) = \sum_{k=1}^{k^*} f(n_k)(m_k),$$

Abeli rühmade homomorfism. Paneme tähele, et $\chi(f) = \bar{\beta}$, seega $\chi(f)$ on korrektselt defineeritud. Näitame, et χ on korrektselt defineeritud. Selleks näitame, et $\chi(f)$ säilitab osalist vasakpoolset S -toimet. Olgu $s \in S$ ja $\nu = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k$. Siis

$$\begin{aligned}\chi(f)(s\nu) &= \chi(f) \left(s \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) = \chi(f) \left(\sum_{k=1}^{k^*} (sm_k) \otimes n_k \right) = \sum_{k=1}^{k^*} f(n_k)(sm_k) \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} s(f(n_k)(m_k)) \stackrel{(\bullet)}{=} s \sum_{k=1}^{k^*} f(n_k)(m_k) = s\chi(f) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) = s\chi(f)(\nu),\end{aligned}$$

kusjuures võrdus (\bullet) kehtib tänu sellele, et osalise vasakpoolse mooduli ${}_S P$ jaoks kehtib tingimus (M5') ja seetõttu korrutis $s \sum_{k=1}^{k^*} f(n_k)(m_k)$ üldse eksisteerib. Niisiis on kujutus χ korrektselt defineeritud.

Näitame nüüd, et χ on bijektiivne. Olgu $f_1, f_2 \in \text{Hom}({}_R N, {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P)))$ sellised, et $\chi(f_1) = \chi(f_2)$. Siis muu hulgas iga $m \in M$ ja $n \in N$ korral

$$f_1(n)(m) = \chi(f_1)(m \otimes n) = \chi(f_2)(m \otimes n) = f_2(n)(m).$$

Et $f_1(n)(m) = f_2(n)(m)$ iga $m \in M$ korral, siis $f_1(n) = f_2(n)$ ning et viimane võrdus kehtib iga $n \in N$ korral, siis $f_1 = f_2$. Seega on χ injektiivne.

Viimaks näitame, et χ on sürjektiivne. Olgu $g \in \text{Hom}({}_S(M \otimes_R N), {}_S P)$ ja olgu kujutus $f : {}_R N \rightarrow {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P))$ selline, et

$$f(n)(m) = g(m \otimes n)$$

iga $m \in M$, $n \in N$ puhul. Kuna g on osaliste vasakpoolsete S -moodulite homomorfism, siis iga $n \in N$, $m, m' \in M$ ja $s \in S$ korral

$$\begin{aligned} f(n)(m + m') &= g((m + m') \otimes n) = g(m \otimes n + m' \otimes n) = g(m \otimes n) + g(m' \otimes n) \\ &= f(n)(m) + f(n)(m'), \\ f(n)(sm) &= g((sm) \otimes n) = g(s(m \otimes n)). \end{aligned}$$

Paneme tähele, et kuna korrutis $s(m \otimes n)$ leidub, siis leidub ka $sg(m \otimes n)$ ja

$$g(s(m \otimes n)) = sg(m \otimes n) = sf(n)(m).$$

Järelikult on $f(n) : {}_S M_R \rightarrow {}_S P$ osaliste vasakpoolsete S -moodulite homomorfism. Nüüd kui $n, n' \in N$ ja $m \in M$, siis

$$\begin{aligned} f(n + n')(m) &= g(m \otimes (n + n')) = g(m \otimes n + m \otimes n') = g(m \otimes n) + g(m \otimes n') \\ &= f(n)(m) + f(n')(m). \end{aligned}$$

Olgu $r \in R$ selline, et korrutis rn eksisteerib. Siis

$$f(rn)(m) = g(m \otimes rn) = g(mr \otimes n) = f(n)(mr) = (rf(n))(m),$$

kusjuures kujutus $rf(n)$ on defineeritud, sest M_R on globaalne moodul ja seetõttu mr eksisteerib iga $m \in M$ korral. Seega on ka f osaliste vasakpoolsete R -moodulite homomorfism ehk $f \in \text{Hom}({}_R N, {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P)))$. Paneme tähele, et iga $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$ korral

$$\chi(f) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) = \sum_{k=1}^{k^*} f(n_k)(m_k) = \sum_{k=1}^{k^*} g(m_k \otimes n_k) = g \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right).$$

See tähendab, et $\chi(f) = g$ ja järelikult χ on sürjektiivne. □

Nüüd oleme valmis tõestama magistritöö põhiteoreemi tensorfunktori ja hom-funktori adjunktsiooni kohta.

Teoreem 5.4. Olgu R ja S ringid ning ${}_S M_R$ globaalne bimoodul. Siis on tensorfunktor $M \otimes_R _ : {}_R \text{PMod} \rightarrow {}_S \text{PMod}'$ hom-funktori $\text{Hom}({}_S M_R, _) : {}_S \text{PMod}' \rightarrow {}_R \text{PMod}$ vasakpoolne kaasfunktor.

Tõestus. Olgu ${}_S M_R$ globaalne bimoodul. Tänu lausele 4.7 on iga ${}_R N \in \text{Ob}({}_R \text{PMod})$ korral ${}_S(M \otimes_R N)$ globaalne vasakpoolne S -moodul, muu hulgas rahuldab ta tingimust (M5'). See lubab meil vaadelda funktoorit $M \otimes_R _ : {}_R \text{PMod} \rightarrow {}_S \text{PMod}'$. Vaatleme homomorfismide peret

$$\xi := (\xi_{N,P})_{\substack{N \in \text{Ob}({}_R \text{PMod}) \\ P \in \text{Ob}({}_S \text{PMod}')}} : \text{Hom}({}_R _, {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, _))) \Rightarrow \text{Hom}({}_S(M \otimes_R _), {}_S _),$$

kus iga ${}_R N \in \text{Ob}({}_R \text{PMod})$ ja ${}_S P \in \text{Ob}({}_S \text{PMod}')$ korral $\xi_{N,P} := \chi$, kus χ on defineeritud lauses 5.3. Me teame, et ξ iga komponent on bijektsioon. Jäab tõestada, et ξ on loomulik teisendus nii N kui P suhtes. Fikseerime ${}_R N, {}_R N' \in \text{Ob}({}_R \text{PMod})$, ${}_S P \in \text{Ob}({}_S \text{PMod}')$, $f \in \text{Hom}({}_R N, {}_R N')$ ja näitame, et diagramm

$$\begin{array}{ccc} {}_R N & \text{Hom}({}_R N, {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P))) & \xrightarrow{\xi_{N,P}} \text{Hom}({}_S(M \otimes_R N), {}_S P) \\ \downarrow f & \uparrow _ \circ f & \uparrow _ \circ (\text{id}_M \otimes f) \\ {}_R N' & \text{Hom}({}_R N', {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P))) & \xrightarrow{\xi_{N',P}} \text{Hom}({}_S(M \otimes_R N'), {}_S P) \end{array}$$

kommuteerub. Olgu $\varphi \in \text{Hom}({}_R N', {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P)))$, $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$ ning χ' osalistele moodulitele ${}_R N', {}_S P$ ja globaalsele moodulile ${}_S M_R$ vastav bijektsioon lausest 5.3. Siis

$$\begin{aligned} (\xi_{N,P} \circ (_ \circ f))(\varphi) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) &= (\xi_{N,P}((_ \circ f)(\varphi))) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \\ &= (\xi_{N,P}(\varphi \circ f)) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \\ &= (\chi(\varphi \circ f)) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} (\varphi \circ f)(n_k)(m_k) = \sum_{k=1}^{k^*} \varphi(f(n_k))(m_k) \end{aligned}$$

ja

$$((_ \circ (\text{id}_M \otimes f)) \circ \xi_{N',P})(\varphi) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) = (_ \circ (\text{id}_M \otimes f))(\xi_{N',P}(\varphi)) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (\xi_{N',P}(\varphi) \circ (\text{id}_M \otimes f)) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \\
&= \chi'(\varphi) \left((\text{id}_M \otimes f) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \right) \\
&= \chi'(\varphi) \left(\sum_{k=1}^{k^*} \text{id}_M(m_k) \otimes f(n_k) \right) \\
&= \chi'(\varphi) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes f(n_k) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} \varphi(f(n_k))(m_k).
\end{aligned}$$

Järelikult ξ on loomulik esimese muutuja suhtes. Näitame, et ξ on loomulik ka teise muutuja suhtes. Olgu lisaks ${}_S P' \in \text{Ob}({}_S \text{PMod}')$ ja $g \in \text{Hom}({}_S P, {}_S P')$. Näitame, et diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
{}_S P & & \text{Hom}({}_R N, {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P))) & \xrightarrow{\xi_{N,P}} & \text{Hom}({}_S(M \otimes_R N), {}_S P) \\
\downarrow g & & \downarrow (g \circ _) \circ _ & & \downarrow g \circ _ \\
{}_S P' & & \text{Hom}({}_R N, {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P'))) & \xrightarrow{\xi_{N,P'}} & \text{Hom}({}_S(M \otimes_R N), {}_S P')
\end{array}$$

kommuteerub. Võtame $\psi \in \text{Hom}({}_R N, {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, {}_S P)))$ ja $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$. Olgu χ'' on osalistele moodulitele ${}_R N, {}_S P'$ ja globaalsele moodulile ${}_S M_R$ vastav bijektsioon lausest 5.3. Siis

$$\begin{aligned}
((g \circ _) \circ \xi_{N,P})(\psi) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) &= ((g \circ _) (\xi_{N,P}(\psi))) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \\
&= (g \circ \chi(\psi)) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \\
&= g \left(\chi(\psi) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \right) \\
&= g \left(\sum_{k=1}^{k^*} \psi(n_k)(m_k) \right)
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
(\xi_{N,P'} \circ ((g \circ _) \circ _))(\psi) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) &= \xi_{N,P'}((g \circ _) \circ \psi) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) \\
&= \chi''((g \circ _) \circ \psi) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{k^*} ((g \circ _) \circ \psi)(n_k)(m_k) \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} ((g \circ _)(\psi(n_k)))(m_k) \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} (g \circ \psi(n_k))(m_k) \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} g(\psi(n_k)(m_k)) \\
&= g \left(\sum_{k=1}^{k^*} \psi(n_k)(m_k) \right).
\end{aligned}$$

Järelikult ξ on loomulik ka teise muutuja suhtes. Niisiis on ξ loomulik isomorfism. Ilmselt ka pere

$$\xi^{-1} := ((\xi_{N,P})^{-1})_{\substack{N \in \text{Ob}({}_R\text{PMod}) \\ P \in \text{Ob}({}_S\text{PMod}')}} : \text{Hom}({}_S(M \otimes_R _), {}_S_) \Rightarrow \text{Hom}({}_R_, {}_R(\text{Hom}({}_S M_R, _)))$$

on loomulik isomorfism, mistõttu kehtib adjunksioon $M \otimes_R _ \dashv \text{Hom}({}_S M_R, _)$. \square

Iga ringi saab vaadelda (bi)moodulina üle iseenda. Seega saame teha eelmisest teoreemist järgmise huvipakkuva järelduse.

Järeldus 5.5. *Olgu R ring. Tensorfunktor ${}_R R \otimes_R _ : {}_R\text{PMod} \rightarrow {}_R\text{PMod}'$ on kovariantse hom-funktori $\text{Hom}({}_R R_R, _) : {}_R\text{PMod}' \rightarrow {}_R\text{PMod}$ vasakpoolne kaasfunktor.*

Et iga (osaline) moodul on Abeli rühm, siis kehtib adjunksioon teoreemist 5.4 ka funktoore $M \otimes_R _ : {}_R\text{PMod} \rightarrow \text{Ab}$ ja $\text{Hom}(M_R, _) : \text{Ab} \rightarrow {}_R\text{PMod}$ korral. Märgive ära, et kui N on Abeli rühm, siis osaline R -toime Abeli rühmal $\text{Hom}(M_R, N)$ on sama, mis lauses 5.2.

Järeldus 5.6. *Olgu R ring. Iga $M_R \in \text{Ob}(\text{Mod}_R)$, ${}_R N \in \text{Ob}({}_R\text{PMod})$ ja $P \in \text{Ob}(\text{Ab})$ korral on kujutus*

$$\begin{aligned}
\chi : \text{Hom}({}_R N, {}_R(\text{Hom}(M_R, P))) &\rightarrow \text{Hom}(M \otimes_R N, P), \\
\chi(f) \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \right) &= \sum_{k=1}^{k^*} f(n_k)(m_k)
\end{aligned}$$

bijektiivne.

Järeldus 5.7. *Olgu R ring ning M_R globaalne parempoolne R -moodul. Siis on tensorfunktor $M \otimes_R _ : {}_R\text{PMod} \rightarrow \text{Ab}$ hom-funktori $\text{Hom}(M_R, _) : \text{Ab} \rightarrow {}_R\text{PMod}$ vasakpoolne kaasfunktor.*

Kasutatud kirjandus

- [1] Batista, E. Partial actions: what they are and why we care. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 24(1) (2017), 35–71.
- [2] Dokuchaev, M. Partial actions: a survey. *Contemp. Math.* 537 (2011), 173–184.
- [3] Dokuchaev, M. Recent developments around partial actions. *São Paulo J. Math. Sci.* 13 (2019), 195–247.
- [4] Excel, R. Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (1998), 3481–3494.
- [5] Grätzer, G. *Universal Algebra*. Springer New York, 2008. New York.
- [6] Kilp, M. *Algebra I*. Eesti Matemaatika Selts, 2005. Tartu.
- [7] Kilp, M. *Kategooriad*. Eesti Matemaatika Selts, 2000. Tartu.
- [8] Saarse, H. ja Väljako, K. Tensor product of partial acts. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 26 (2022), 265–280.
- [9] Sarraco, P. ja Vercruysse, J. On the globalization of geometric partial (co)modules in the categories of topological spaces and algebras. *Semigroup Forum* 105 (2022), 534–550.
- [10] Väljako, K. *Idempotentsete ringide Morita ekvivalentsus*. Ilmumas.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Heleen Saarse,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Osaliste moodulite tensorkorrutis“, mille juhendajad on Kristo Väljako ja Valdis Laan, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, alates 01.09.2025 kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Heleen Saarse

22.05.2024