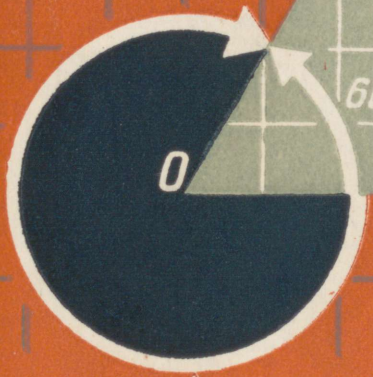
E. ETVERK O. PRINITS A. VIHMAN



MATEMAATIKA

IX KLASSILE

69925

28631

E. ETVERK, O. PRINITS, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

IX KLASSILE

3. trükk

KIRJASTUS «VALGUS» · TALLINN 1967

51
E

Kunstiliselt kujundanud *G. Pant*

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
69925

ARHIIVKOGU

6—6

1. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS.

1.1. JÄÄVAD JA MUUTUVAD SUURUSED.

Iga nähtuse uurimisel kohtume kaht erinevat liiki suurustega. Ühtedel neist on antud nähtuse puhul ainult üks väärtus, kuna teistel on neid väärtusi enam kui üks.

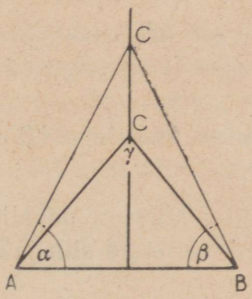
N ä i d e 1. Auto sõitmisel mööda maanteed on näiteks koorma kaal ikka 3 tonni ja autos sõitvate inimeste arv 2, kuna aga bensiini hulk paagis järjest väheneb, sõidu kiirus kord suureneb, kord väheneb ning läbitud tee pikkus kogu aeg suureneb.

N ä i d e 2. Vee keemisel kolvis on vee temperatuur ikka 100° C, vee hulk kolvis aga järjest väheneb.

Suurust, millel on antud nähtuse puhul ainult üks väärtus, nimetatakse selle nähtuse puhul jäävaks suuruseks ehk konstandiks, kuna suurust, millel on antud nähtuse puhul enam kui üks väärtus, nimetatakse muutuvaks suuruseks.

Missugused suurused näidetes 1 *ja* 2 *on jäävad ja missugused muutuvad?*

N ä i d e 3. Võrdhaarse kolmnurga tipu C liikumisel piki kõrgussirget (joon. 1) on kolmnurga aluse AB pikkus ja kolmnurga



Joon. 1.

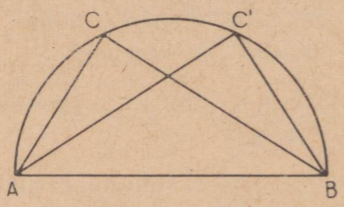
sisenurkade summa jäävad suurused ($AB=2{,}8$ cm ja $\alpha+\beta+\gamma=180°$). Kolmnurga kõrgus, külgede BC ja AC pikkused, kõigi nurkade suurused, kolmnurga ümbermõõt ja pindala on aga vaadeldaval juhul muutuvad suurused. Siinjuures võime tähele panna, et need muutuvad suurused on niiviisi üksteisega seotud, et ühe muutuva suuruse väärtuse andmisega on kõigi teiste muutuvate suuruste väärtused määratud. Tõepoolest, kui võtame kõrguseks 2,9 cm, siis on liikuva tipu C asukohaks punkt C' ja mõõtmise või arvutamise teel saab leida, et

$$\alpha=\beta=64°,\ \gamma=52°,\ AC'=BC'=3{,}2 \text{ cm jne.}$$

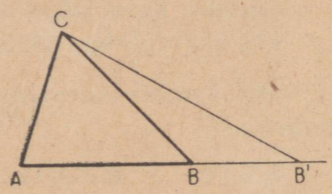
Niisamuti saame kõrguse i g a antud väärtuse puhul leida teiste muutuvate suuruste v a s t a v a d väärtused.

ÜLESANDEID.

1. Ringi diameetrile toetuva kolmnurga tipp liigub piki ringjoont (joon. 2). Missugused suurused osutuvad siin jäävaiks ja missugused muutuvaiks?
   Leia kõigi muutuvate suuruste väärtused, kui külje AC pikkuseks võtta 3,4 cm.

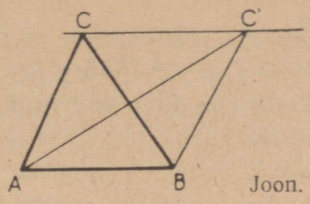


Joon. 2.



Joon. 3.

2. Kolmnurga tipp B liigub piki alussirget AB (joon. 3). Missugused suurused osutuvad siin jäävaiks ja missugused muutuvaiks?
   Leia kõigi muutuvate suuruste väärtused, kui aluse AB pikkuseks võtta 3,7 cm.
3. Kolmnurga aluse vastastipp liigub piki alusega paralleelset sirget (joon. 4). Missugused suurused osutuvad siin jäävaiks ja missugused muutuvaiks?



Joon. 4.

Leia kõigi muutuvate suuruste väärtused, kui nurga $\angle CAB$ suuruseks võtta 32°.

4. Näitest 3 ja ülesannetest 1—3 ilmneb, et suurus, mis ühe küsimusseade puhul on muutuv, võib teise küsimusseade puhul osutuda jäävaks.
Nimeta selliseid suurusi nende näidete juures, mis on seotud joonistega 1—4.
Missugused suurused on kõigi nende näidete juures muutuvad?
Missugused suurused on kõigi nende näidete juures jäävad?
Nimeta suurusi, mis osutuvad alati jäävaiks.

1.2. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS.

Kui ühe muutuva suuruse igale väärtusele vastab teise muutuva suuruse üks kindel väärtus, siis viimast suurust nimetatakse esimese suuruse funktsiooniks.

Funktsiooni nimetatakse ka **sõltuvaks muutujaks** ja suurust, millest sõltub funktsioon, nimetatakse **sõltumatuks muutujaks** ehk **argumendiks.** Seejuures nimetatakse argumendi väärtuste hulka **funktsiooni määramispiirkonnaks** ja funktsiooni väärtuste hulka **funktsiooni muutumispiirkonnaks.**

Näites 3 (lk. 3) vaatlesime kolmnurga haara kõrguse funktsioonina. Selle funktsiooni määramispiirkonnaks ja samuti funktsiooni muutumispiirkonnaks on kõigi positiivsete arvude hulk.

Samas näites vaatlesime ka sisenurki kõrguse funktsioonidena. Määramispiirkonnaks on nende funktsioonide puhul samuti kõigi positiivsete arvude hulk, kuid muutumispiirkonnaks on nurkade α ja β puhul nurgad 0°-st kuni 90°-ni, nurga γ puhul nurgad 180°-st kuni 0°-ni.

Missugune suurus on argumendiks ja missugused suurused on selle funktsioonideks ülesannetes 1—3 (lk. 4)? Määra iga ülesande puhul funktsiooni määramispiirkond ja vaadeldud funktsioonide muutumispiirkond!

Seost kahe muutuva suuruse vahel, kus ühe suuruse igale väärtusele vastab teise suuruse üks kindel väärtus, nimetatakse **funktsionaalseks sõltuvuseks.** Niisuguses sõltuvuses on näiteks

ruudu pindala ja külje pikkus,
ringjoone pikkus ja tema raadiuse pikkus,
läbitud tee pikkus ja liikumise aeg (kui liikumise kiirus on konstantne),
elektrivoolu tugevus ja vooluahela takistus (jääva pinge puhul) jne.

Suurustevahelise sõltuvuse all mõistame edaspidi ikka funktsionaalset sõltuvust, kuigi seda mõistet kasutatakse mõnikord laiemas tähenduses. Toome mõned näited, kus sõna «sõltub» esineb laiemas tähenduses.

Inimese raskus sõltub tema pikkusest,
koolis saadud hinne sõltub õppimiseks kulutatud ajast,
sillast ülekäijate arv sõltub kellaajast,
pesu kuivamise aeg sõltub tuule tugevusest jne.

Nende näidete puhul ei määra ühe suuruse väärtus sõltuva suuruse väärtust. Näiteks, kui on teada, et keegi on 160 cm pikk, siis ei saa kindlalt öelda, et tema raskus on näiteks 60 kg; ei kehti ka seaduspärasust, et kui kodus õppimiseks kulutab õpilane näiteks 1 tunni, siis saab hinde 3, ja kui kolm tundi, siis hinde 5 jne.

Seega pole mitte kõik suurustevahelised sõltuvused funktsionaalsed.

ÜLESANDEID.

5. Nimeta jäävaid ja muutuvaid suurusi ühenduses
   a) spordivõistlusega,
   b) koolitunniga,
   c) kinoseansiga.
6. Nimeta suurusi, mis on funktsionaalses sõltuvuses
   a) ruudu küljega,
   b) ringi raadiusega.

1.3. FUNKTSIOONI ESITUSVIISID.

Funktsioon on antud, kui on teada tema määramispiirkond ja eeskiri, mille järgi toimub antud argumendi väärtustele vastavate funktsiooni väärtuste leidmine.

1.3.1. FUNKTSIOONI ANALÜÜTILINE ESITUSVIIS.

Funktsioon on esitatud analüütiliselt, kui eeskiri funktsiooni väärtuste leidmiseks on antud matemaatilise avaldise kujul.

Olgu antud matemaatilised avaldised

$2x$; $\tan x$; $\frac{1}{x+2}$; $\frac{5+x}{x^2-4}$ jne.

või ka

$ax+b$; ax^2+bx+c, kus a, b ja c on konstandid.

Kui neis avaldistes esinevat tähte x vaadelda argumendi tähisena, siis need avaldised on funktsioonideks, sest muutuva suuruse x igale väärtusele vastab avaldise üks kindel väärtus. Nende funktsioonide määramispiirkonna (kui see pole antud) moodustavad need x väärtused, mille korral on funktsiooni väärtus arvutatav. Näiteks funktsiooni $\frac{5+x}{x^2-4}$ määramispiirkonda kuuluvad kõik arvud, välja arvatud -2 ja 2. Miks?

Leia funktsioonide $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x-2}$; $\frac{3-x}{x^2-9}$; $\frac{2x-3}{x^2+2x-3}$ määramispiirkond!

Matemaatilise avaldise lühemaks üleskirjutamiseks kasutatakse sageli uut tähte. Näiteks võib tähistada avaldist $ax+b$, kus a ja b on konstandid, tähega y, s. t.

$$y=ax+b.$$

Nüüd võime öelda, et tähega y tähistatud suurus on muutuva suuruse x funktsioon. Tähistades avaldise mingi tähega, saame valemi. Sageli kasutataksegi funktsiooni analüütilise esitusena valemit. Näiteks

$y=2x$; $s=\frac{gt^2}{2}$; $r=\cos u$ jne.

1.3.2. FUNKTSIOONI TABELILINE ESITUS.

Näide 1. Ühel poisil oli kodus uksepiidale märgitud igal sünnipäeval tema pikkus. Mõõtes need pikkused saame koostada järgmise tabeli, kus vanus aastates on tähistatud tähega v ja pikkus sentimeetrites tähega p.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	75	85	93	97	103	111	121	125	128	130	135	140	145	151	157

Siin vastab poisi igale vanusele tema kindel pikkus, seega on siin pikkus vanuse funktsioon. Kuigi tabelis on esitatud poisi pikkus ainult tema sünnipäevadel, on teada, et poisi vanuse muutumine ja kasvamine toimuvad pidevalt. Seega on vaadeldava funktsiooni määramispiirkonnaks kõik arvud 1-st kuni 15-ni ja muutumispiirkonnaks kõik arvud 75-st kuni 157-ni.

Näide 2. Terasvarda vastupidavus tõmbele sõltub terases sisalduvast süsiniku hulgast. Järgmises tabelis seisab esimeses reas terase süsinikusisaldus s protsentides, teises reas — maksimaalne koorem k tonnides, mida suudab kanda terasvarras, mille läbilõige on 1 cm^2.

s	0,14	0,46	0,57	0,66	0,78	0,80	0,87	0,96
k	4,36	5,27	5,51	6,20	6,39	7,11	7,14	8,19

Missugune suurus on siin argumendiks, missugune funktsiooniks? Leia selle funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond.

Iga tabel, milles on antud argumendi väärtused ja neile vastavad funktsiooni väärtused, esitab funktsionaalset sõltuvust.

Nii näiteks esitab tabel

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0	−1	−2	−3

funktsiooni y sõltuvust argumendist x.

Üldiselt, kui argumendi x väärtuseks on $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ja neile vastavaiks funktsiooni y väärtusteks $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, siis funktsiooni y väärtuste tabel näeb välja järgmine:

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

Olgu funktsioon antud analüütiliselt, s. t. avaldisena. Andes nüüd argumendile erinevaid väärtusi tema määramispiirkonnast, saame koostada funktsiooni väärtuste tabeli. Olenevalt sellest, missugused väärtused valime argumendile, võime koostada antud funktsioonile väga mitmesuguseid väärtuste tabeleid.

Näiteks olgu antud funktsioon $y=\frac{5-x}{3+x^2}$. Võttes argumendi väärtuseks 0, 1, 2, ..., 6, saame tabeli

x	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{5-x}{3+x^2}$	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{19}$	0	$-\frac{1}{39}$

Andes aga argumendile väärtused $-5, -3, -1, 0, 2, 4$, saame tabeli

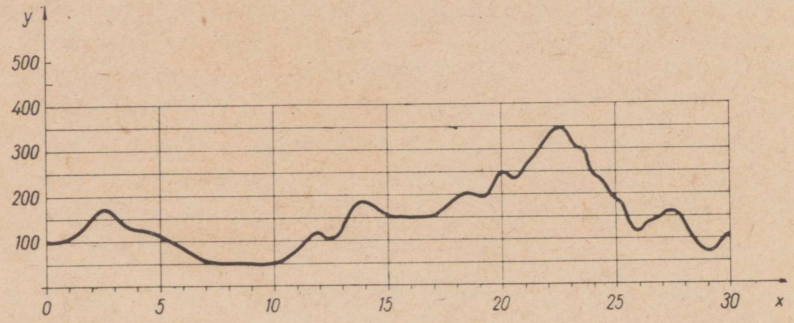
x	-5	-3	-1	0	2	4
$\frac{5-x}{3+x^2}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{19}$

Leia antud tabelite põhjal funktsiooni $y=\frac{5-x}{3+x^2}$ muutumispiirkond, kui tema määramispiirkonnaks on kõik arvud 0-st kuni 6-ni.

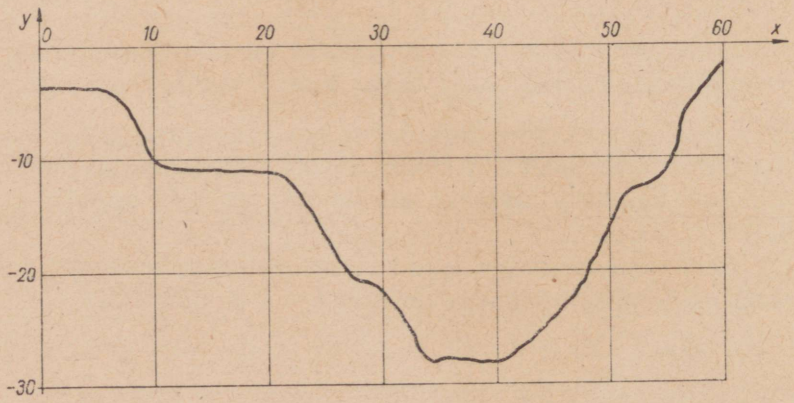
Leia sama valemiga antud funktsiooni muutumispiirkond, kui tema määramispiirkonnaks on arvud -5-st kuni 4-ni.

Joonisel 5 on esitatud 30 km pikkuse suusaraja skeem. Sellelt jooniselt on võimalik välja lugeda iga rajapunkti kõrgust (meetrites) üle merepinna mistahes kaugusel (kilomeetrites) stardikohast. Et siin igale kauguse väärtusele, mis on kujutatud x-teljel, vastab üks kindel kõrgus, mis on kujutatud y-teljel, sijs on võistlusraja kõrgus üle merepinna stardikohast arvatud kauguse funktsioon. Selle funktsiooni määramispiirkonnaks on arvud 0-st kuni 30-ni ja funktsiooni muutumispiirkonnaks arvud 50-st kuni 350-ni.

Joonisel 6 on esitatud allveelaeva kõrgusmõõtja poolt joonestatud graafik allveelaeva sukeldumise perioodil. Siin saab



Joon. 5.



Joon. 6.

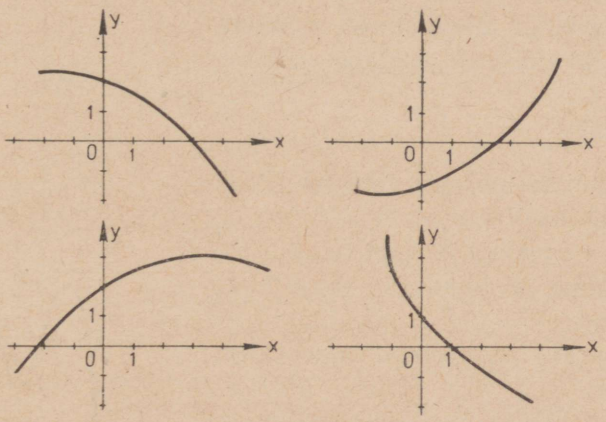
y-teljelt välja lugeda allveelaeva sügavuse (meetrites) alla merepinna, mis vastavad x-teljel märgitud ajamomentidele.

Missugune suurus on siin argumendiks ja missugune on funktsiooniks? Leia selle funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond!

Joonisel 7 on esitatud koordinaatteljestikes mitmesuguseid kõveraid. Ka need esitavad muutuvate suuruste x ja y vahelist funktsionaalset sõltuvust, sest igale x väärtusele saab jooniselt mõõta vastava y väärtuse.

Tee iga seal esitatud funktsiooni puhul kindlaks tema määramispiirkond ja muutumispiirkond.

Funktsiooni graafiliseks esituseks on niisugune joon koordinaatteljestikus, kus igale abstsissi väärtusele vastab ainult üks ordinaadi väärtus.



Joon. 7.

Kui funktsiooni avaldis on antud, siis saame koostada tema väärtuste tabeli. Vaadeldes tabeli arvupaare tasapinna punktide koordinaatidena ja ühendades need punktid sujuva kõveraga, saame selle funktsiooni graafiku.

Olgu funktsiooni analüütiliseks esituseks näiteks

$$y = x^3 - 3x.$$

Funktsiooni graafiku saamiseks näiteks vahemikus $-3 \leqslant x \leqslant 3$ koostame järgmise tabeli:

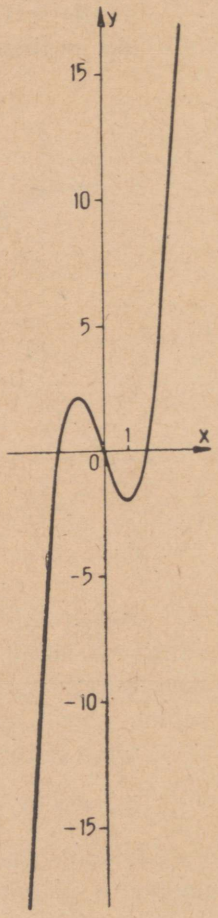
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	-2	2	0	-2	2	18

Selle põhjal saame joonisel 8 kujutatud graafiku.

Mida täpsema graafiku tahame saada, seda tihedamalt tuleb tabeli koostamisel anda argumendile väärtusi.

Tutvusime funktsiooni avaldise, tabeli ja graafikuga. Esimesel juhul on funktsiooni väärtused leitavad arvutamise teel, teisel juhul tabelist lugemise teel ning kolmandal juhul jooniselt mõõtmise teel.

Et nii tabel kui graafik annavad meile funktsiooni väärtusi ainult piiratud ulatuses, siis tuleb nimetatud kolmest funktsiooni esitusviisist lugeda kõige täielikumaks analüütilist esitust, s. t. avaldist või vastavat valemit.



Joon. 8.

ÜLESANDEID.

7. Esita järgmiste suuruste vaheline sõltuvus analüütiliselt:
   a) ringjoone pikkus ja ringi raadius;
   b) võrdkülgse kolmnurga pindala ja külje pikkus;
   c) korrapärase kuusnurga ümbermõõt ja apoteem;
   d) kera pindala ja kera suurringi pindala;
   e) antud ruumalaga silindri kõrgus ja põhja raadius.

8. Esita ruudu ümbermõõdu $ü$ ja ruudu külje pikkuse a vaheline sõltuvus analüütiliselt. Koosta ümbermõõdu väärtuste tabel, kui külje pikkuseks on 1; 2; ...; 10.

9. Esita võrdkülgse kolmnurga pindala S ja külje pikkuse a vaheline sõltuvus analüütiliselt. Koosta pindala väärtuste tabel, kui külje pikkuseks on 1; 1,5; 2; 2,5; ...; 5.

10. Esita jalakäijate poolt läbitud tee pikkuse s ja käimiseks kulutatud aja t vaheline sõltuvus analüütiliselt. Koosta tee pikkuse tabel, kui on teada, et jalakäija käis ühtlaselt 5,2 $\frac{km}{h}$ ja kui t väärtuseks on 1; 2; 3; ...; 6.

11. Järgnevas tabelis on kustunud funktsioonide $3x-5$; $\frac{2x}{x^2+1}$; x^2-2; $\frac{2-x}{x+3}$; $3-2x$; x^2+3x; $\frac{3}{x-4}$; $\frac{1-x}{x^2+1}$ avaldised ja osa nende funktsioonide väärtustest. Joonesta see tabel endale vihikusse. Leia nähtavaks jäänud väärtuste järgi, missuguse antud funktsiooni väärtused on igas reas ning seejärel ka funktsiooni puuduvad väärtused.

Argumendi väärtused / Funktsiooni avaldis	−2	−1	0	1	2	3
				−1		−3
			3			−3
		1	1		$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
				−2	1	
		−1		−1		
	4					$-\frac{1}{6}$
	$-\frac{4}{5}$	−1				
	−2	−2				

12. Koosta funktsiooni $\frac{3+4x-5x^2}{2x^2-1}$ väärtuste tabel, kui argumendi väärtuseks on:
a) 0; 1; 2; 3; 4.

b) $-4;\ -3;\ -2;\ -1.$

c) $-\frac{5}{3};\ -1;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ 1;\ \frac{5}{3}.$

13. Koosta funktsiooni $\frac{2x^2+1}{4x-1}$ väärtuste tabel, kui argumendi väärtuseks on:

a) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

b) 0,11; 0,12; 0,13; 0,14.

c) $-\frac{4}{7};\ -\frac{2}{7};\ 0;\ \frac{2}{7};\ \frac{4}{7}.$

14. Leia joonisel 7 toodud graafikutest mõõtmise teel argumendi väärtustele -2, -1, 0, 1 ja 2 vastavad funktsioonide väärtused.

15. Koosta alljärgnevate funktsioonide väärtuste tabel, kui argumendi väärtuseks on 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4:

1) $y=5x-3$

2) $y=\frac{1+x}{x^2}$

3) $y=\frac{2}{2+x}$

4) $y=-2x^2+3x$

5) $y=x^3-2x^2$

16. Joonesta ülesandes 15 antud funktsioonide graafikud saadud tabelite järgi.

17. Too 3 näidet funktsiooni tabelilise esituse kohta ja kolm näidet funktsiooni graafilise esituse kohta.

18. Joonesta funktsiooni $y=\begin{cases} x, \text{ kui } x>0 \\ 0, \text{ kui } x\leqslant 0 \end{cases}$ graafik.

19. Joonesta funktsiooni $y=\begin{cases} x^2, \text{ kui } x<1 \\ x, \text{ kui } x\geqslant 1 \end{cases}$ graafik.

20. Joonesta funktsiooni $y=\begin{cases} 4-x, \text{ kui } x<-1 \\ 2x-1, \text{ kui } x\geqslant -1 \end{cases}$ graafik.

21. Joonesta funktsiooni $y=x-2$ graafik, kui funktsiooni määramispiirkonnaks on arvude hulk (-3)-st kuni 4-ni. Missugune on selle funktsiooni muutumispiirkond?

22. Joonesta funktsiooni $y=x^2+1$ graafik, kui funktsiooni määramispiirkonnaks on arvude hulk (-3)-st kuni 2-ni. Missugune on selle funktsiooni muutumispiirkond?

23. Joonesta funktsiooni $y=|x|$ graafik, kui määramispiirkonnaks on arvude hulk (-2)-st kuni 3-ni.

24. Joonesta funktsiooni $y=\frac{x}{|x|}$ graafik, kui määramispiirkonnaks on arvude hulk (-4)-st kuni 5-ni, välja arvatud arv null.

25. Joonesta funktsiooni $y=x+|x|$ graafik, kui määramispiirkonnaks on arvude hulk (-3)-st kuni 3-ni. Missugune on selle funktsiooni muutumispiirkond?

26. Joonesta funktsiooni $y=\frac{1}{2}|x|\cdot x$ graafik, kui määramispiirkonnaks on arvude hulk (-2)-st kuni 2-ni. Missugune on selle funktsiooni muutumispiirkond?

1.4. JOONE VÕRRAND.

Olgu antud mingi funktsiooni, näiteks $y=x^3-3x$, graafik (joon. 8). Kui sellel joonel võtta mingi punkt, näiteks $(1; -2)$, siis selle koordinaadid rahuldavad seost $y=x^3-3x$, sest vastasel juhul poleks graafik õigesti joonestatud (või punkti koordinaadid pole jooniselt õigesti leitud).

Ümberpöördult, kui mingi punkti koordinaadid x ja y rahuldavad ülalantud seost, siis graafik läbib seda punkti, nagu selgub funktsiooni graafiku saamisviisist. Lühidalt: *funktsiooni $y=x^3-3x$ graafik läbib kõiki neid ja ainult neid punkte $(x; y)$, mille koordinaadid rahuldavad antud seost.* Seetõttu nimetatakse seost $y=x^3-3x$ joonisel 8 graafikuna saadud joone võrrandiks. Selles võrrandis x ja y tähendavad joone suvalise punkti $(x; y)$ koordinaate. Niisiis,

joone võrrandiks nimetatakse seost joone suvalise punkti koordinaatide x ja y vahel.

Joone võrrandi definitsioonist järeldub järgmine punkti joonel asetsemise tunnus:

antud punkt asetseb antud joonel siis ja ainult siis, kui punkti koordinaadid rahuldavad joone võrrandit.

Leia kolm punkti, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit $y=x^2-3x$, ja kolm punkti, mille koordinaadid seda võrrandit ei rahulda.

Et võrrandis võib liikmeid ühelt võrrandi poolelt kanda teisele poolele ja korrutada kõiki liikmeid ühe ja sama nullist erineva arvuga, siis võime antud joone võrrandile saada mitmeid eri kujusid. Nii on joonisel 8 esitatud joone võrrandiks ka näiteks $y-x^3+3x=0$ või $2y-2x^3=-6x$. Niisuguste teisenduste abil saadud võrrandeid rahuldavad needsamad arvupaarid, mis esialgset võrranditki. Me ütleme, et nende teisenduste abil saame antud võrrandiga s a m a v ä ä r s e d v õ r r a n d i d. Niisiis, samaväärsetele võrranditele vastab koordinaatteljestikus üks ja seesama joon.

1.5. JOONE VÕRRANDI NÄITEID.

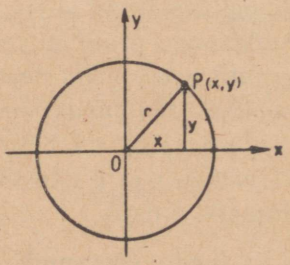
1.5.1. RINGJOONE VÕRRAND.

Ü l e s a n n e. Leida võrrand ringjoonele, mille keskpunkt on koordinaatide alguses ja mille raadius on r (joon. 9).

Et *ringjoon on antud punktist antud kaugusel ühes ja samas tasapinnas asetsevate punktide hulk,* siis, nagu näeme jooniselt 9, on ringjoone suvalise punkti $P(x; y)$ koordinaadid seotud raadiusega järgmise võrduse abil:

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$ (missuguse teoreemi põhjal?).

Saadud võrrand on **ringjoone võrrand.**



Joon. 9.

Näiteks kui ringjoone keskpunkt asetseb koordinaatide alguses ja raadius on 7, siis on selle ringjoone võrrandiks

$x^2+y^2=49$.

Kui pikk on ringjoone $x^2+y^2=121$ raadius?

Avaldades ringjoone võrrandist y, saame

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2},$$

s. t. ringjoon, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis, esitab kahe funktsiooni

$y=\sqrt{r^2-x^2}$ ja $y=-\sqrt{r^2-x^2}$

graafikuid.

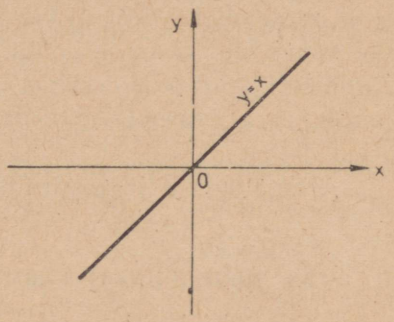
Ülalpool x-telge asuv poolringjoon on funktsiooni $y=\sqrt{r^2-x^2}$ graafikuks ja allpool x-telge asuv poolringjoon funktsiooni $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ graafikuks.

1.5.2. KOORDINAATTELGEDEVAHELISE NURGA POOLITAJA VÕRRAND.

Ülesanne. Leida võrrand sirgele, mis poolitab koordinaattelgedevahelised nurgad I ja III võrrandis (joon. 10).

Et nurgapoolitaja iga punkt asetseb nurga haaradest võrdsetel kaugustel, siis on vaadeldava sirge suvalise punkti $(x; y)$ abstsiss ja ordinaat võrdsed:

$$y=x,$$



Joon. 10.

mis on koordinaattelgedevahelisi nurki I ja III veerandis poolitava sirge võrrand.

Seega on koordinaattelgedevahelise I ja III veerandi nurga poolitaja funktsiooni $y=x$ graafikuks.

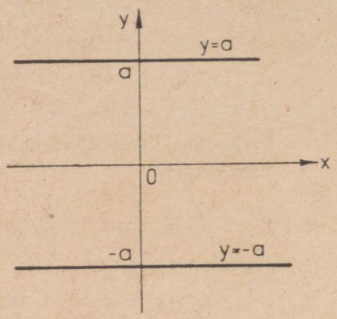
1.5.3. x-TELJEGA PARALLEELSETE SIRGETE VÕRRANDID.

Ülesanne. Leida võrrandid sirgetele, mis on paralleelsed x-teljega ja asetsevad temast a ühiku kaugusel (joon. 11).

Sirge, mille kõik punktid asetsevad antud sirgest samal kaugusel, on antud sirgega paralleelne sirge.

Seega on meid huvitavatest sirgetest ühel kõigi punktide ordinaadid võrdsed a-ga, teisel $-a$-ga. See tõsiasi lubabki nende sirgete võrrandeid esitada kujul

$$y=a \text{ ja } y=-a,$$



Joon. 11.

kus y tähendab vaadeldava joone suvalise punkti ordinaati. Teiselt poolt on saadud võrdused vaadeldavad valemitena, s. t. nad esitavad mingi funktsiooni analüütilist eeskirja. Eeskiri $y=a$ ei sisalda argumenti, kuid selle eeskirja saab kirjutada kujul $y=0 \cdot x+a$, mis näitab, et argumendi iga väärtuse puhul on funktsiooni väärtus a.

Seega on x-teljega paralleelne sirge konstandi graafikuks.

1.5.4. ALGUSPUNKTI LÄBIVA SIRGJOONE VÕRRAND.

Vaatleme sirgjoont, mis läbib koordinaatide alguspunkti $O(0;\ 0)$ ja veel $P(x_1;\ y_1)$ (joon. 12). Selle sirge suvaline punkt olgu $M(x;\ y)$. Lõik PQ on punkti P ordinaatlõik ja lõik MN punkti M ordinaatlõik. Tekkinud kolmnurgad ONM ja OQP on sarnased:

$$\triangle ONM \sim \triangle OQP \text{ (miks?)}.$$

Nende vastavad küljed on võrdelised:

$$\frac{NM}{QP}=\frac{ON}{OQ}$$

ehk

$$\frac{y}{y_1}=\frac{x}{x_1},$$

millest

$$y = \frac{y_1}{x_1} x.$$

Tähistades antud punkti koordinaatide suhte $\frac{y_1}{x_1}$ tähega a, s. t. $\frac{y_1}{x_1} = a$, saame alguspunkti läbiva sirgjoone võrrandi kujul

$$\boxed{y = ax}$$

Näiteks kui sirgjoon läbib alguspunkti ja veel punkti (3; 12), siis tema võrrand on $y = \frac{12}{3} x$ ehk $y = 4x$.

1.5.5. SIRGJOONE VÕRRAND TELGLÕIKUDES.

Oletame, et on antud sirgjoone kaks punkti oma koordinaatidega. Nende punktidega määratud sirgjoone võrrandi leidmiseks tuleb leida seos selle sirgjoone suvalise punkti koordinaatide x ja y vahel, kasutades antud punktide koordinaate.

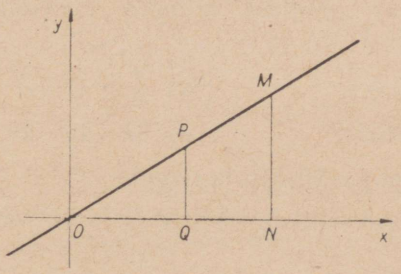
Olgu sirgjoont määravateks punktideks lõikepunktid koordinaattelgedega, s. o. punktid $A(p; 0)$ ja $B(0; q)$, kus $p \neq 0$ ja $q \neq 0$ (joon. 13). Sama sirgjoone suvaliseks punktiks olgu $P(x; y)$. Ülesandeks on leida võrrand, mis seob arvud p ja q sirgjoone suvalise punkti P koordinaatidega x ja y.

Jooniselt näeme, et

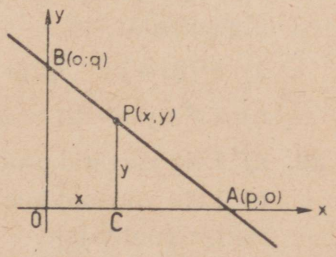
$$\triangle OBA \sim \triangle CPA \quad \text{(miks?)}$$

ja seega

$$\frac{CP}{OB} = \frac{CA}{OA}.$$



Joon. 12.



Joon. 13.

Et $CP=y$; $OB=q$; $CA=p-x$ ja $OA=p$, siis

$$\frac{y}{q}=\frac{p-x}{p}$$

ehk

$$\boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1,}$$

mis ongi antud sirgjoone võrrandiks. Et arvud p ja q näitavad, kuspool ja kui kaugel koordinaatide alguspunktist sirgjoon lõikab koordinaattelgi, siis nimetatakse saadud võrrandit ka **sirgjoone võrrandiks telglõikudes.**

Näiteks on sirgjoone $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ telglõikudeks 2 ja 3, s. t. et sirgjoon lõikab x-telge paremal pool alguspunkti 2 ühiku kaugusel ja y-telge ülalpool alguspunkti 3 ühiku kaugusel.

Millistes punktides lõikab koordinaattelgi sirgjoon $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$?

Missugune on koordinaattelgi punktides (4; 0) ja (0; −6) lõikava sirgjoone võrrand?

ÜLESANDEID.

27. a) Kas punkt $P(-1;\ 0)$ asetseb joonel, mille võrrandiks on $y=x^4-x^2$?

b) Kas punktid $P(0;\ 5)$, $Q(-2;\ 3)$ ja $R(1;\ 1{,}5)$ asetsevad joonel, mille võrrandiks on $2x^2-3xy+y-5=0$?

c) Kas joon $x^2+4y^2-2(x+y)-6=0$ läbib punkti $(2;\ -1)$?

28. Missugused järgnevatest joontest läbivad koordinaatide alguspunkti:

a) $x^2(2x+y)-3y^2(x+5)=4$ c) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

b) $(x^2+y^2)^2-2(x-y)=6x^3$ d) $3x-4y=0$?

29. a) Leia võrrand y-teljega paralleelsele sirgele.

b) Leia võrrand koordinaattelgedevahelise II ja IV veerandi nurga poolitajale.

c) Avalda koordinaattelgede võrrandid.

30. Leia järgmistest võrranditest ringjoone raadius:

a) $x^2+y^2=25$ b) $x^2+y^2=0{,}81$

c) $x^2+y^2=\frac{121}{169}$ d) $2x^2+2y^2=288$

31. Leia eelmises ülesandes antud ringjoonte pikkused ja vastavate ringide pindalad.

32. Näita, et kui ringjoone keskpunkti koordinaadid on a ja b ning raadius r, siis ringjoone võrrandiks on

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

33. Tuleta võrrand ringjoonele, mille raadius on 2 ja keskpunkt asub punktis:

a) $A(1;\ 4)$, b) $B(-2;\ 3)$, c) $C(-2{,}3;\ -4{,}1)$.

34. Esita võrrand sirgjoonele, mille lõikepunktid koordinaattelgedega A ja B on antud:

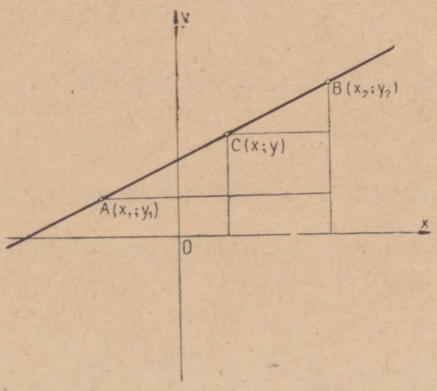
a) $A(5;\ 0)$ $B(0;\ 2)$
b) $A(2;\ 0)$ $B(0;\ 4)$
c) $A(-3;\ 0)$ $B(0;\ -1)$
d) $A(-2{,}5;\ 0)$ $B(0;\ 1{,}5)$

35. Leia punktid, kus alljärgnevad sirgjooned lõikavad koordinaattelgi:

a) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ c) $\frac{2x}{3}+\frac{3y}{4}=1$ e) $x+y=2$

b) $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ d) $2x+3y=1$ f) $-2x-5y=3$

Joonesta need sirgjoonedl



Joon. 14.

36. Missuguste funktsioonide graafikuid esitavad ülesande 34 lahendamisel leitud sirgjooned?

37. Näita, et kui sirgjoon läbib punkte $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$, siis esitub tema võrrand kujul $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Selleks leia jooniselt 14 sarnased kolmnurgad ja esita vastavate külgede võrdelisus koordinaatide kaudu.

KORDAMISÜLESANDEID.

38. Kolmnurga ABC tipp A liigub piki küljega AB ristuvat ja punkti A läbivat sirgjoont. Missugused suurused osutuvad siin muutuvaiks? Nimeta suurus, millest sõltuvad need muutuvad suurused.

39. Leia järgmiste muutuvate suuruste paaride hulgast need, mis on funktsionaalses sõltuvuses:

a) ühtlasel liikumisel etteantud ajavahemiku vältel keha poolt läbitud tee pikkus	liikumise kiirus
b) auto kiirus	paagis olev bensiini hulk
c) rongi liikumiskiirus	rongi kaal
d) veerõhk allveelaevale	allveelaeva sügavus
e) antud kõrgusega ristküliku pindala	ristküliku alus
f) õhu hulk antud klassiruumis	klassi õpilaste arv
g) saapatalla paksus	käidud tee pikkus
h) vaskjuhtme pikkus	temperatuur
i) vabalt langeva keha poolt läbitud tee pikkus	langemise aeg
j) sõidupileti hind	sõidetava tee pikkus
k) ostjate arv kaupluses	kellaaeg
l) toa temperatuur	ahju kütmise kestus

40. Esita alljärgnevad funktsioonid tabeliliselt ja graafiliselt:

a) $y=2x^2-3x+1$; b) $y=\frac{1}{1+x^2}$.

41. Esita funktsioon graafiliselt, kui tema tabeliline esitus on:

a)

x	-2	0	2	4	6	8
y	2	1	0	-2	-1	0

b)

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$-0{,}5$	1	$1{,}5$
y	-2	0	-1	$0{,}5$	0	1	$0{,}5$

42. Leia sirgjoonte $x=-2$ ja $x=5$ vaheline kaugus.

43. a) Leia võrrand sirgjoonele, mis asub sirgjoontest $y=-4$ ja $y=2$ võrdsel kaugusel.

b) Leia võrrand sirgjoonele, mis asub sirgjoontest $x=-5$ ja $x=-1$ võrdsel kaugusel.

c) Leia võrrand sirgjoonele, mis asub sirgjoonest $x=-3$ kaks korda kaugemal kui sirgjoonest $x=-1$.

d) Leia võrrand sirgjoonele, mis asub sirgjoonele $y=5$ kolm korda lähemal kui sirgjoonele $y=1$.

44. Kirjuta ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt on koordinaatide alguses ja

a) raadius on 1,5;
b) raadius on 2;
c) ringjoone pikkus on 6;
d) ringjoone pikkus on 2,4:
e) ringi pindala on 14;
f) ringi pindala on 5,22.

45. On antud joonte võrrandid:

$x=3$; $y=-2$; $x^2+y^2=4$; $y=x$; $y=-\frac{2}{3}x+2$

ja punktid:

$A(1;\ 1)$; $B(0;\ -2)$; $C(3;\ 0)$; $D(0;\ 0)$; $E(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

Leia, missugustel antud joontest need punktid asetsevad.

46. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

a) $\dfrac{\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}3}{0{,}2}$

b) $\dfrac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{15}}{0{,}8\cdot 0{,}25}$

c) $\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}$

d) $1\frac{7}{20}:2{,}7+2{,}7:1{,}35+\left(0{,}4:2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4{,}2-1\frac{3}{40}\right)$

e) $\left(10:2\frac{2}{3}+7{,}5:10\right)\cdot\left(\frac{3}{40}-\frac{7}{30}\cdot 0{,}25+\frac{157}{360}\right)$

47. Väävelhape sisaldab $64\frac{16}{31}\%$ hapnikku, kaks korda vähem väävlit, ülejäänud osa moodustab vesinik. Kui palju saadakse väävelhapet ja kui palju on selleks vaja väävlit ja hapnikku, kui vesinikku võetakse 5 kg?

48. Vabrikus töötab 2100 inimest, kusjuures meeste arv moodustab 75% naiste arvust. Pärast seda, kui tööliste üldarv suurenes 24% võrra, jäi tehasesse mehi $1\frac{1}{3}$ korda rohkem kui naisi. Mitme võrra suurenes meeste arv?

49. Hein kaotab koristamise ajal 60% oma esialgsest kaalust; 10% ülejäänud kaalust kaotab ta aga kuivas kohas seismisel. Leida, kui suur hulk heina saadakse 125 a suuruselt maatükilt, kui ühelt aarilt saadakse 250 kg toorest heina.

50. Kumb on suurem, kas $a\%$ arvust p või $p\%$ arvust a?

51. Lihtsustada järgmised avaldised:

a) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

b) $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$

c) $\dfrac{x}{ax-2a^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)$

d) $\dfrac{2a}{a^2-4x^2}+\dfrac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\dfrac{3x-6}{x-2}\right)$

52. Lahendada järgmised võrrandid:

a) $\frac{ax-b}{a+b}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

b) $\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}+\frac{x-a-b}{c}=3$

c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$

d) $\frac{x+m}{a+b}-\frac{ax}{(a+b)^2}=\frac{am}{a^2-b^2}-\frac{b^2x}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}$

2. LINEAARFUNKTSIOON.

2.1. LINEAARFUNKTSIOON JA SELLE PÕHIOMADUS.

Eelmises peatükis nägime, et kõige täielikumalt esitab funktsiooni matemaatiline avaldis. Seepärast kasutamegi edaspidi funktsioonide defineerimiseks matemaatilist avaldist.

Lineaarfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mida esitab avaldis $ax+b$, kus a ja b on antud arvud ($a \neq 0$).

Tähistades funktsiooni tähega y, saame lineaarfunktsiooni kujul $y=ax+b$. Kui $b=0$, siis saame lineaarfunktsiooni erijuhu $y=ax$, mida nimetatakse **võrdeliseks sõltuvuseks.**

Vaatleme lineaarfunktsiooni $-3x+2$ järgmist väärtuste tabelit:

x	-3	-1	2	3	8
$-3x+2$	11	5	-4	-7	-22

Nimetame argumendi kahe väärtuse vahet **argumendi muuduks** ja tähistame seda sümboliga Δx. Funktsiooni kahe väärtuse vahet nimetame **funktsiooni muuduks** ja tähistame sümboliga Δy.

Leides ülaltoodud tabelis argumendi kõrvutiseisvate väärtuste vahe ja neile vastavate funktsioonide väärtuste vahe, saame järgmise muutude tabeli:

Δx	2	3	1	5
Δy	-6	-9	-3	-15

Sellest tabelist ilmneb, et funktsiooni ja argumendi muudud on võrdelised:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = \frac{-3}{1} = \frac{-15}{5} = -3.$$

Tõestame, et see võrdelisus tuleb ilmsiks kõikide lineaarfunktsioonide juures.

Teame, et kui argumendi väärtuseks on x, siis funktsiooni väärtuseks on $ax+b$. Kui nüüd argument muutub Δx võrra, s. t. kui argumendi väärtuseks on $x+\Delta x$, siis saame funktsiooni väärtuseks $a(x+\Delta x)+b$. Funktsiooni muudu Δy leidmiseks tuleb viimasest väärtusest lahutada funktsiooni esialgne väärtus, s. t.

$$\Delta y = a(x+\Delta x)+b-(ax+b)$$

ja siit

$$\Delta y = ax+a\cdot\Delta x+b-ax-b$$

ehk

$$\mathbf{\Delta y = a\cdot\Delta x},$$

s. t. et

lineaarfunktsiooni muut on võrdeline argumendi muuduga, kusjuures võrdeteguriks on funktsiooni avaldises esinev argumendi kordaja.

Seda omadust nimetatakse lineaarfunktsiooni põhiomaduseks.

Kui $\Delta x=1$, siis saame tõestatud omadusest, et $\Delta y=a$, s. t. et lineaarfunktsiooni avaldises argumendi kordaja näitab, kui palju muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtus kasvab ühe ühiku võrra.

Seetõttu nimetatakse lineaarfunktsiooni $ax+b$ avaldises esinevat konstanti a selle funktsiooni **muutumise kiiruseks**. Konstanti b nimetatakse aga funktsiooni **algväärtuseks**, sest ta vastab argumendi väärtusele 0: kui $x=0$, siis $ax+b=b$.

Kui $a>0$, siis x kasvades ka $ax+b$ kasvab, ja kui $a<0$, siis x kasvades $ax+b$ kahaneb.

Lineaarfunktsiooni nimetatakse kasvavaks, kui $a>0$, ja kahanevaks, kui $a<0$.

Näiteks on funktsioon $2x-5$ kasvav, aga funktsioon $-3x+1$ kahanev.

53. Missugused järgmistest funktsioonidest on lineaarfunktsioonid:

a) $3-5x$ c) $x(3-5x)$ e) $\frac{3-5x}{3}$

b) $2(3-5x)$ d) $(3-5x)^2$ f) $\frac{3-5x}{x}$?

54. Missugused järgmistest funktsioonidest on kasvavad ja missugused kahanevad

a) $3x-3$ c) $4x+1$ e) $-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}x$

b) $-5x-2$ d) $-15x+16$ f) $2{,}5-0{,}16x$?

55. Kui suur on järgmiste funktsioonide muutumise kiirus ja kui suur on nende algväärtus:

a) $3x-5$ c) $8-x$ e) $-2x$

b) $-\frac{2}{3}x+7$ d) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}x$ f) $\frac{5x}{4}$?

2.2. LINEAARFUNKTSIOONI GRAAFIK.

2.2.1. SIRGJOON KUI LINEAARFUNKTSIOONI GRAAFIK.

VIII klassis kogesime näidete varal, et lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ graafikuks on sirgjoon. Tõestame nüüd selle väite.

Tõestuseks näitame, et seos

$$y=ax+b,$$

kus $a\neq 0$ ja $b\neq 0$, on sirgjoone võrrand. Selleks teisendame antud võrrandit järgmiselt:

$$-ax+y=b;$$

$$-\frac{\frac{x}{b}+\frac{y}{b}=1}{a}.$$

Teame (vt. lk. 20), et saadud võrrand esitab sirgjoont, mille telglõigud on

$$p=-\frac{b}{a} \text{ ja } q=b.$$

Järelikult, kui lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ korral $a\neq 0$ ja $b\neq 0$, siis on selle lineaarfunktsiooni graafikuks sirgjoon, mille telglõigud on $-\frac{b}{a}$ ja b.

Kui $b=0$, siis on lineaarfunktsiooni graafikuks alguspunkti läbiv sirge $y=ax$ (vt. lk. 19).

Seega,

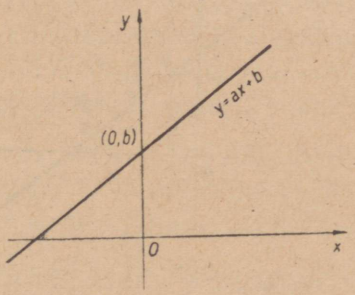
lineaarfunktsiooni graafikuks on sirgjoon, mis lõikab mõlemat koordinaattelge.

2.2.2. SIRGJOONE TÕUS JA ALGORDINAAT.

Lineaarfunktsioon $y=ax+b$ on oma muutumiskiirusega ja algväärtusega üheselt määratud. Tõepoolest igale a ja b väärtuspaarile vastab ainult üks lineaarfunktsioon. Näiteks, kui $a=2$ ja $b=-3$, siis on lineaarfunktsiooni avaldiseks $2x-3$. Öeldust järeldub, et võrrandiga $y=ax+b$ on sirgjoon üheselt määratud. Konstandid a ja b peavad määrama selle sirgjoone asendi koordinaatteljestikus. Seamegi nüüd eesmärgiks selgitada konstantide a ja b geomeetriline tähendus.

Konstandi b geomeetrilist tähendust on kerge näha: kui $x=0$, siis $y=b$, s. t. (joon. 15)

lineaarfunktsiooni algväärtus b võrdub sirgjoone ja y-telje lõikepunkti ordinaadiga, selle sirgjoone nn. algordinaadiga.



Joon. 15.

Nüüd võime kohe öelda, et sirgjooned

$y=2x+3$, $y=2x-3$ ja $y=2x$

lõikavad y-telge vastavalt punktides

(0; 3) (0; −3) (0; 0).

Funktsiooni muutumise kiiruse a geomeetrilise tähenduse selgitamiseks lähtume tõsiasjast, et lineaarfunktsiooni põhiomaduse kohaselt

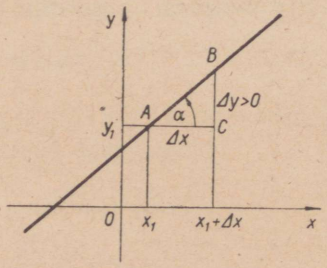
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a.$$

Püstitatud ülesanne on täidetud, kui leiame jagatise $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geomeetrilise tähenduse.

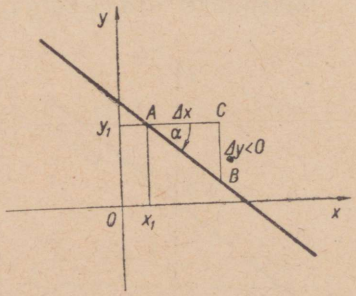
Valime sirgjoonel $y=ax+b$ punkti $A(x_1; y_1)$. Muutugu abstsiss positiivse Δx võrra, siis ordinaadi muut Δy võib olla kas positiivne (joon. 16) või negatiivne (joon. 17). Tekkinud täisnurksetes kolmnurkades ABC on teravnurk α x-telje positiivse suuna ja sirgjoone vaheline nurk. Seda nurka nimetatakse sirgjoone **sihinurgaks,** kusjuures see nurk loetakse positiivseks, kui $\Delta x>0$ puhul ka $\Delta y>0$ (joon. 16), ja negatiivseks, kui $\Delta x>0$ korral on $\Delta y<0$ (joon. 17). Seega teravnurk α on vahemikust $-90°<\alpha<90°$, kus $\alpha\neq 0$.

Kui $\alpha=0°$, siis on sirgjoon risti y-teljega (joon. 18), ja kui $\alpha=90°$, siis on sirgjoon risti x-teljega (joon. 19), kuid need sirged pole lineaarfunktsiooni graafikuteks.

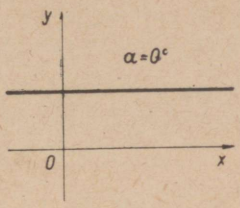
Kui α on positiivne teravnurk $(0<\alpha<90°)$, siis nimetatakse



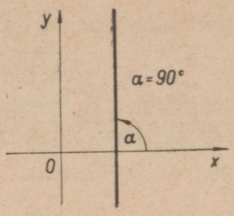
Joon. 16.



Joon. 17.



Joon. 18.



Joon. 19.

sirgjoont **tõusvaks**, ja kui α on negatiivne teravnurk ($-90° < \alpha < 0°$), siis nimetatakse sirgjoont **langevaks**.

Täisnurksest kolmnurgast ABC (joon. 16 ja 17) avaldame teravnurga α tangensi:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Sirgjoone sihinurga tangensit nimetatakse selle sirgjoone **tõusuks.** Tõusva sirgjoone puhul on tõus positiivne, kuid langeva sirgjoone puhul negatiivne, sest siis on $\Delta x > 0$ ja $\Delta y < 0$. Näiteks,

kui sihinurk $\alpha = 45°$, siis $\tan \alpha = 1$,
kui aga sihinurk $\alpha = -45°$, siis $\tan \alpha = -1$.

Üldiselt

$$\tan (-\alpha) = -\tan \alpha,$$

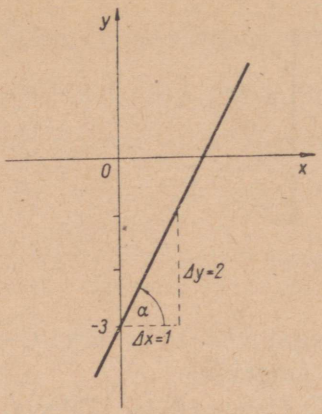
kus

$$0° < \alpha < 90°.$$

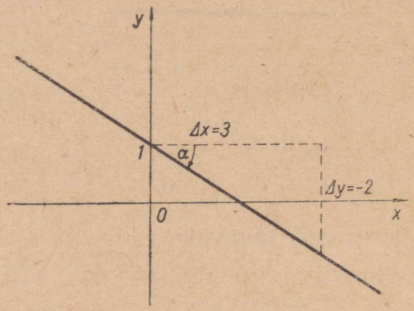
Seega olemegi leidnud vastuse püstitatud ülesandele:

lineaarfunktsiooni muutumise kiirus a on võrdne selle funktsiooni graafikuks oleva sirgjoone tõusuga.

Sirgjoone $y = ax + b$ asend koordinaatteljestikus on seega määratud tõusuga a ja algordinaadiga b. Olgu antud sirgjoon $y = 2x - 3$. Selle sirgjoone tõus on 2 ja algordinaat on -3. Sirgjoone joonestamiseks nende andmete põhjal konstrueerime punkti $(0; -3)$ juures täisnurkse kolmnurga kaatetitega 1 ja 2 $\left(\frac{2}{1} = 2\right)$ nii, nagu näidatud joonisel 20. Selle kolmnurga teravnurk ongi antud sirge sihinurk. Joonisel 21 on konstrueeritud sirgjoon $y = -\frac{2}{3}x + 1$ tema tõusu ja algordinaadi järgi.



Joon. 20.



Joon. 21.

ÜLESANDEID.

56. Leia nurkade

$30°$, $60°$, $450°$, $-30°$, $-60°$ ja $-45°$

tangens.

57. VIII klassis kasutusel olevate tabelite abil leia

$\tan 35°$;	$\tan(-16°)$;	$\tan(-76°)$;
$\tan 8°$;	$\tan(-32°)$;	$\tan(-88°)$;
$\tan 62°$;	$\tan(-48°)$;	$\tan(-50°)$;
$\tan 75°$;	$\tan(-64°)$;	$\tan(-80°)$.

58. VIII klassis kasutusel olevate tabelite abil leia x, kui

a) $\tan x = -0{,}213$
b) $\tan x = -0{,}727$
c) $\tan x = 1{,}66$
d) $\tan x = 3{,}73$
e) $\tan x = 0{,}466$
f) $\tan x = -5{,}14$
g) $\tan x = -14{,}3$
h) $\tan x = -0{,}052$

59. Mõõda jooniselt nurga suurus ja leia selle tangens, kui nurga üheks haaraks on x-telje positiivne pool ja teiseks haaraks alguspunktist lähtuv antud punkti läbiv kiir. Antud punktiks on:

a) $A(2;\ 1)$
b) $B(-3;\ 3)$
c) $C\left(\frac{2}{3};\ \frac{5}{7}\right)$
d) $D\left(-\frac{8}{5};\ 1{,}2\right)$
e) $E(7{,}6;\ 12{,}3)$
f) $F\left(-6{,}12;\ \frac{12}{5}\right)$

60. Tee kindlaks, missugused järgnevatest lausetest on õiged, missugused valed:

a) funktsiooni $y=2x+6$ graafik on tõusev sirge;
b) funktsiooni $y=3x-1$ graafik on langev sirge;
c) funktsiooni $y=-5x+3$ graafik on tõusev sirge;
d) funktsiooni $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}$ graafik on langev sirge.

61. Leia sirgjoone võrrand, kui

a) tõus on 4 ja algordinaat on 4;
b) tõus on -1 ja algordinaat on 12;
c) tõus on 2,3 ja algordinaat on $-0,7$;
d) tõus on $-\frac{5}{7}$ ja algordinaat on $-\frac{2}{3}$;
e) sihinurk on 45° ja algordinaat on 6;
f) sihinurk on 60° ja algordinaat on -4;
g) sihinurk on $-30°$ ja algordinaat on 2;
h) sihinurk on $-60°$ ja algordinaat on 0;
i) sihinurk on 33° ja algordinaat on 3,3;
j) sihinurk on 66° ja algordinaat on $-6,6$;
k) sihinurk on $-25°$ ja algordinaat on 1;
l) sihinurk on $-70°$ ja algordinaat on 7.

62. Joonesta sirgjooned etteantud tõusu ja algordinaadi järgi

a) tõus on 3 ja algordinaat on 1;
b) tõus on -2 ja algordinaat on -1;
c) tõus on $\frac{3}{4}$ ja algordinaat on 2;
d) tõus on $-\frac{1}{3}$ ja algordinaat on 0.

63. Joonesta sirgjooned nende võrrandis antud suuruste järgi:

a) $y=3x-2$
b) $y=-\frac{1}{2}x+3$
c) $y=-\frac{4}{3}x-3$
e) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$
f) $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-3}=1$
g) $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=-1$
h) $\frac{x}{3}-y=-1$

64. Esita koordinaatide alguspunkti läbiva sirgjoone võrrand, kui sirgjoon läbib antud punkti:

a) $A(2;\ 4)$ c) $C\ (4;\ -4)$
b) $B(-3;\ 4)$ d) $D(-5;\ -4)$

Kui suur on nende sirgjoonte tõus?

2.3. LINEAARFUNKTSIOONI UURIMINE.

2.3.1. LINEAARFUNKTSIOONI NULLKOHT.

Funktsiooni nullkohaks *nimetatakse seda argumendi väärtust, mille puhul funktsiooni väärtus on* 0.

Seega leiame lineaarfunktsiooni

$y=ax+b$

nullkoha, kui lahendame võrrandi

$ax+b=0.$

Lahendades saame

$$\boxed{x=-\frac{b}{a}}$$

Graafikul vastab lineaarfunktsiooni nullkohale sirge $y=ax+b$ ja x-telje lõikepunkt, s. o. punkt, mille abstsiss $x=-\frac{b}{a}$.

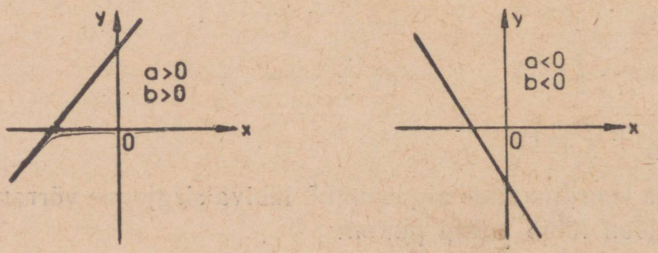
a) Kui a ja b on s a m a d e märkidega, s. t. kui

$a>0$ ja $b>0$ või $a<0$ ja $b<0$,

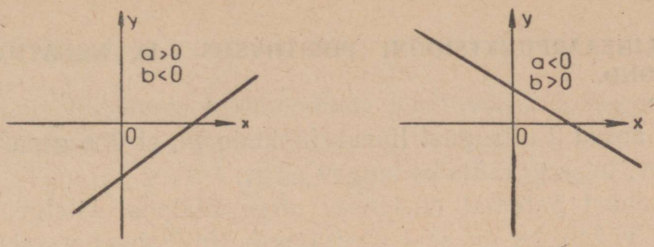
siis lineaarfunktsiooni nullkoht $x=-\frac{b}{a}$ on n e g a t i i v n e (joon. 22).

b) Kui a ja b on e r i n e v a t e märkidega, s. t. kui

$a>0$ ja $b<0$ või $a<0$ ja $b>0$,



Joon. 22.



Joon. 23.

siis lineaarfunktsiooni nullkoht $x=-\frac{b}{a}$ on positiivne (joon. 23).

c) Kui $b=0$, siis ka $x=-\frac{b}{a}=0$, s. t. lineaarfunktsiooni nullkohaks on koordinaatide alguspunkt.

ÜLESANDEID.

65. Missuguse märgiga on järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y=-2x+1$ 4) $y=-0{,}462x+\frac{12}{533}$

2) $y=3x-3$ 5) $y=\frac{63}{47}x-2{,}56$

3) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 6) $y=x+5$

66. Teisendades võrrandid sobivale kujule, tee kindlaks, missuguse märgiga on saadavate lineaarfunktsioonide nullkohad, ja seejärel leia need nullkohad:

1) $4x-6y+3=0$ 3) $\frac{15}{43}x-\frac{61}{18}y+1=0$

2) $21x+46y-100=0$ 4) $-8{,}43x+9{,}34y+0{,}105=0$

67. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{5}$ 3) $-3x+0{,}6y-\frac{2}{3}=0$

2) $y=5{,}32x+10{,}64$ 4) $\frac{4}{5}x-\frac{7}{8}y+5{,}2=0$

68. Lahenda järgmised võrrandid:

a) $9x+6=10\left(9-\frac{1}{2}x\right)$ d) $\frac{5-x}{8}=\frac{18-5x}{12}$

b) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=8$ e) $2-\frac{3x-7}{4}=\frac{x+17}{5}$

c) $0{,}36x-3{,}4=0{,}3(0{,}4x-1{,}2)$

2.3.2. LINEAARFUNKTSIOONI POSITIIVSUS- JA NEGATIIVSUSPIIRKOND.

Olgu antud 2 niisugust lineaarfunktsiooni, et ühe graafikuks oleks tõusev, teise graafikuks langev sirge.

Nullkohast paremal on tõusev sirge ülalpool x-telge, s. t. funktsiooni väärtused on seal positiivsed. Nullkohast vasakul on see sirge aga allpool x-telge ja funktsiooni väärtused on seal negatiivsed. Langeva sirge puhul on vastupidi.

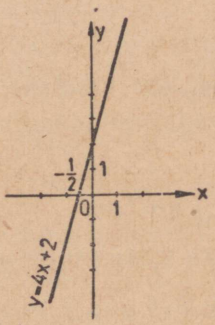
Olgu antud näiteks funktsioonid $y=4x+2$ ja $y=-3x+6$.

Neist esimese graafikuks on tõusev sirge (joon. 24), teise graafikuks langev sirge (joon. 25). Et esimese funktsiooni nullkohaks on $x=-\frac{1}{2}$ ja teise funktsiooni nullkohaks $x=2$, siis

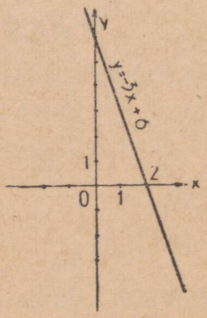
$4x+2>0$, kui $x>-\frac{1}{2}$, ja $4x+2<0$, kui $x<-\frac{1}{2}$;

$-3x+6>0$, kui $x<2$, ja $-3x+6<0$, kui $x>2$.

Funktsiooni positiivsuspiirkonnaks *nimetatakse argumendi nende väärtuste hulka, milledele vastavad funktsiooni väärtused on positiivsed.*



Joon. 24.



Joon. 25.

Funktsiooni negatiivsuspiirkonnaks *nimetatakse argumendi nende väärtuste hulka, milledele vastavad funktsiooni väärtused on negatiivsed.*

Nii on funktsiooni $4x+2$ positiivsuspiirkonnaks $x>-\frac{1}{2}$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x<-\frac{1}{2}$ ning funktsiooni $-3x+6$ positiivsuspiirkonnaks $x<2$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x>2$.

69. Leia järgmiste funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $y=3x-5$ c) $y=-4x-1$ e) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}$

b) $y=2x+7$ d) $y=-x+3$ f) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{7}$

70. Leia järgmiste funktsioonide nullkoht ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $y=x-2$ d) $y=-3x-5$ g) $y=4\frac{1}{5}x$

b) $y=5x+1$ e) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ h) $y=-\frac{4}{3}x$

c) $y=-2x+3$ f) $y=-0{,}4x-0{,}1$

2.4. LINEAARNE VÕRRATUS.

2.4.1. LINEAARSE VÕRRATUSE MÕISTE.

Leida antud funktsiooni $ax+b$ positiivsuspiirkond tähendab leida need x väärtused, mille puhul $ax+b>0$.

Leida antud funktsiooni $ax+b$ negatiivsuspiirkond tähendab leida need x väärtused, mille puhul $ax+b<0$.

Kirjutusi $ax+b>0$ ja $ax+b<0$ *nimetatakse* **lineaarseteks võrratusteks.**

Niisiis, selle asemel, et öelda:

leida funktsiooni $ax+b$ *positiivsuspiirkond,*

võib öelda:

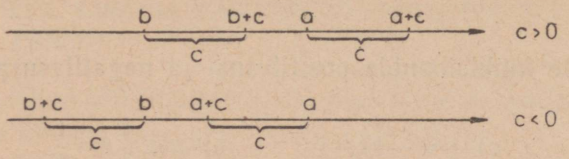
lahendada võrratus $ax+b>0$.

2.4.2. VÕRRATUSTE OMADUSED.

Olgu a ja b kaks arvu, mille kohta on teada, et

$a>b$.

See tähendab, et arvule a vastav punkt on arvteljel arvule b vastavast punktist paremal (joon. 26).



Joon. 26.

1° Kui liita võrratuse mõlema poolega üks ja sama arv, näiteks c, mis võib olla kas positiivne või negatiivne, siis saame samapidise võrratuse, s. t.

kui $a>b$, *siis ka* $a+c>b+c$.

Selle omaduse kehtivus selgub jooniselt 26.

Too arvulisi näiteid!

2° Kui korrutada võrratuse mõlemat poolt ühe ja sama positiivse arvuga, siis saame samapidise võrratuse, s. t.

kui $a>b$ *ja* $m>0$, *siis* $am>bm$.

Too arvulisi näiteid!

Selle omaduse tõestamiseks kasutame omadust I°. Liidame võrratuse $a>b$ mõlema poolega $-b$, siis saame

$$a-b>0.$$

Et arv $(a-b)$ on positiivne ja ka m on positiivne, siis on ka nende korrutis positiivne, s. t.

$$(a-b)m>0$$

ehk

$$am-bm>0.$$

Liites võrratuse mõlema poolega bm, saamegi

$$am>bm.$$

3° Kui korrutada võrratuse mõlemaid pooli ühe ja sama negatiivse arvuga, siis saame vastupidise võrratuse, s. t.

kui $a>b$ *ja* $n<0$, *siis* $an<bn$.

Too arvulisi näiteid!

Tõestamiseks lahutame võrratuse $a>b$ mõlemast poolest b (ehk liidame $-b$), saame

$$a-b>0.$$

Et n on negatiivne ja et negatiivse ja positiivse arvu korrutis on negatiivne, siis

$$(a-b)n<0,$$

millest

$$an-bn<0.$$

Liites võrratuse mõlema poolega bn, saamegi

$$an<bn.$$

2.4.3. LINEAARSE VÕRRATUSE LAHENDAMINE.

Eelmises paragrahvis käsitletud võrratuse omadused kehtivad ka tundmatut sisaldava võrratuse korral, sest iga tundmatut sisaldav võrratus muutub arvvõrratuseks, kui anname tundmatule mingi niisuguse arvulise väärtuse, mis seda võrratust rahuldab. Nii saame antud võrratust

$$ax+b>0$$

lahendada järgmiselt:

1) liidame võrratuse mõlema poolega $-b$, saame

$$ax>-b;$$

2) korrutame võrratuse mõlemaid pooli $\frac{1}{a}$-ga:

kui $a>0$, saame $x>-\frac{b}{a}$,

kui $a<0$, saame $x<-\frac{b}{a}$.

Võrratuste lahendamisel tugineme seega järgmistele omadustele:

1. Võrratuse liikmeid võib üle kanda võrratuse ühelt poolelt teisele, muutes selle liikme ees oleva märgi vastupidiseks.
2. Võrratuse mõlemaid pooli võib korrutada ühe ja sama arvuga: kui see arv on positiivne, jääb võrratuse märk muutmata, kui see arv on negatiivne, tuleb võrratuse märk muuta vastupidiseks.

Näiteid.

1. Lahendada võrratus:

$$3x-12<0.$$

Viies -12 võrratuse teisele poolele, saame

$3x<12.$

Jagades 3-ga, saame

$x<4.$

Tulemuse osaliseks kontrollimiseks võtame mõne arvulise väärtuse, mis rahuldab tingimust $x<4$, näiteks 1 ja $\frac{1}{3}$. Asetame need väärtused algvõrratusse. Saame $-9<0$ ja $-11<0$, mis on õiged. Tuleb muidugi silmas pidada, et niisugune kontroll pole täielik.

2. Lahendada võrratus:

$$\frac{7-x}{2}-3<\frac{3+4x}{5}-4.$$

Korrutame võrratuse mõlemad pooled 10-ga, saame

$35-5x-30<6+8x-40.$

Koondame ning kanname tuntud liikmed ühele, tundmatud teisele poolele:

$5-5x<8x-34;$
$-5x-8x<-34-5;$
$-13x<-39;$

Jagades -13-ga, saame

$$x>\frac{-39}{-13}$$

ehk

$x>3.$

Tulemuse osaliseks kontrollimiseks asetame algvõrratusse x asemele näiteks arvud 4 ja 10. Saame $-\frac{3}{2}<-\frac{1}{5}$ ja $-\frac{9}{2}<\frac{23}{5}$, mis on õiged.

Toodud näidetest ilmneb, et võrratuse lahendiks on väärtuste hulk, mis rahuldab saadud tingimust. Nii on esimese näite puhul võrratuse lahendiks kõik need arvud, mis on väiksemad kui 4, teise näite puhul on võrratuse lahendiks kõik need arvud, mis on suuremad kui 3.

71. Lahenda järgmised võrratused:

1) $5(x-2)-9<11$
2) $8(10-x)>5(x+3)$
3) $5(z+1)+6(z+2)<9(z+3)$
4) $8(3y-1)>30+9(5y-11)-2(7-2y)$

72. Lahenda võrratused:

1) $x-1<\frac{2x+1}{3}$
2) $x+\frac{12-x}{4}>\frac{26-x}{2}$
3) $\frac{9x+7}{2}-\left(x-\frac{7x-2}{7}\right)<36$
4) $\frac{x+10}{3}+\frac{16x-3}{20}-\frac{7x-6}{4}>\frac{x-3}{2}+\frac{3(x-3)}{10}$

73. Lahenda järgmised võrratused:

1) $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<11$
2) $\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}<15$
3) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}>x-17$
4) $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}<x-2$
5) $\frac{x+2}{4}+\frac{2x-3}{6}-\frac{x+3}{3}<0$

74. Lahenda järgmised võrratused:

1) $\frac{3(x-1)}{5}-\frac{2x-5}{2}>1-\frac{3(x-3)}{6}$
2) $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}>2-\frac{4+x}{4}$
3) $\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)>4\frac{5}{6}$
4) $\frac{5x}{3}+2x+6\left(x-\frac{x}{3}-\frac{4x}{9}\right)<450\,000$
5) $\frac{\frac{x}{3}-\frac{x-1}{2}}{\frac{4}{3}}+\frac{2\frac{1}{3}x}{2}>0$

2.4.4. LINEAARSE ÜHE TUNDMATUGA VÕRRATUSESÜSTEEMI LAHENDAMINE.

Olgu antud kaks ühe tundmatuga võrratust ja nõutagu leida selle tundmatu niisugused väärtused, mis rahuldaksid mõlemat antud võrratust. Niisugust ülesannet nimetatakse **võrratusesüsteemiks** ja tähistatakse loogelise suluga võrratuse ees nagu võrrandisüsteemigi. Näiteks on

$$\text{a)}\ \begin{cases} 4-2x>0 \\ 1+3x<0 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} 2x-3>0 \\ x-7<0 \end{cases} \qquad \text{c)}\ \begin{cases} 6-3x<0 \\ -2-2x>0 \end{cases}$$

võrratusesüsteemid.

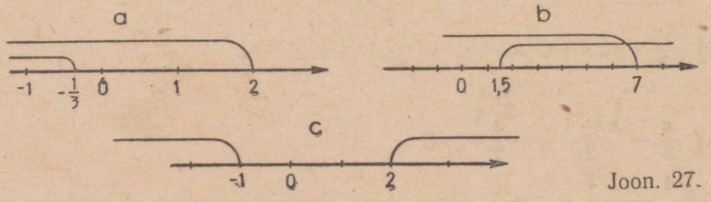
Lahendades neis võrratusesüsteemides eraldi kummagi võrratuse, teisenduvad need järgmisteks lihtsateks võrratusesüsteemideks:

$$\text{a)}\ \begin{cases} x<2 \\ x<-\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x>1{,}5 \\ x<7 \end{cases} \qquad \text{c)}\ \begin{cases} x>2 \\ x<-1 \end{cases}$$

Joonisel 27 on kujutatud arvteljel neid süsteeme rahuldavate väärtuste piirkonnad. Näeme, et süsteemi a) mõlema võrratuse lahenditel on ühine osa. Sinna kuuluvad kõik need arvud, mis on väiksemad kui $-\frac{1}{3}$. Samuti on süsteemi b) mõlema võrratuse lahenditel ühine osa. Sinna kuuluvad kõik need arvud, mis on suuremad kui 1,5 ja väiksemad kui 7. Süsteemi c) võrratuste lahenditel aga puudub ühine osa, s. t. ei leidu arve, mis rahuldaksid selle süsteemi mõlemat võrratust. Me ütleme, et süsteemidel a) ja b) on lahend olemas. Selleks on vastavalt

$$x<-\frac{1}{3} \text{ ja } 1{,}5<x<7,$$

süsteemil c) aga lahend puudub.



Joon. 27.

Selgita, missugust tingimust peavad rahuldama arvud a ja b, et võrratusesüsteemil

$$\begin{cases} x<a \\ x>b \end{cases}$$

puuduks lahend.

Missugusel juhul on võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$$

lahendiks $x>a$?

ÜLESANDEID.

75. Lahenda järgmised võrratusesüsteemid:

1) $\begin{cases} 2-3x>0 \\ 2x+1>0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2-3x<0 \\ 2x+1<0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x+2>0 \\ -3x+4<0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2-3x>0 \\ 2x+1<0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2-3x<0 \\ 2x+1>0. \end{cases}$

76. Lahenda järgmised võrratusesüsteemid:

1) $\begin{cases} 5x-0{,}3x<4{,}5x+2 \\ 0{,}1x-0{,}1<0{,}15x-5{,}1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(10-7x)<28 \\ 5x-(2x-7)>11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{x}{14}>14 \\ \frac{3}{4}x+\frac{5}{6}x>38 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{3}<\frac{x-5}{2}+\frac{x-1}{8} \\ \frac{8-x}{6}-\frac{5-4x}{3}>\frac{x+6}{6} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{3x+2}{18}-\frac{5x-8}{24}>\frac{3(2x+1)}{36}-\frac{x-1}{2}-\frac{2}{9} \\ \frac{26x-51}{52}-\frac{2(1-3x)}{13}>x-\frac{20x-(10-3x)}{156} \end{cases}$

77. Teades, et kahe teguri korrutis on positiivne, kui mõlemad tegurid on samamärgilised, ja negatiivne, kui mõlemad tegurid on erimärgilised, lahenda järgmised ülesanded, taandades need võrratusesüsteemi lahendamisele:

1) $(x-3)(x+4)>0$ 3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{1}{3}\right)<0$

2) $(x+2)(x+5)<0$ 4) $(2x-0{,}42)(3x-2{,}31)>0$

78. Lahenda järgmised võrratused, lahutades eelnevalt vasaku poole tegureiks:

1) $x^2+x-2<0$
2) $x^2+2x-3<0$
3) $15-8x+x^2>0$
4) $15-2x-x^2<0$
5) $5x^2-4x-1>0$
6) $5y^2-7y+2<0$
7) $3a^2-34a+11>0$
8) $15b^2+38b+11<0$
9) $2-x-6x^2>0$
10) $2+x-3x^2<0$

79. Teades, et murd on positiivne, kui lugeja ja nimetaja on samamärgilised, ja negatiivne, kui lugeja ja nimetaja on erimärgilised, lahenda järgmised ülesanded, taandades need võrratusesüsteemi lahendamisele:

1) $\frac{x-3}{2x+1}<0$
2) $\frac{5x+1}{x}>0$
3) $\frac{-3x-7}{(5x+6)^2}<0$
4) $\frac{(-3x+6)^2}{3-2x}>0$
5) $\frac{4x+3}{2x-7}>1$
6) $\frac{-3x+5}{4x}<2$
7) $\frac{-2x}{4-3x}>3$
8) $\frac{2-5x}{2x-5}<-1$
9) $\frac{1}{x}<2$

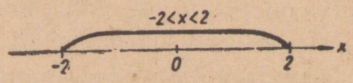
80. Kahekohalise arvu kümneliste number on üheliste numbrist 1 võrra suurem. Leia see arv, teades, et ta on suurem kui 77 ja väiksem kui 96.

81. Kui antud kahekohalise arvuga liita pool temast, siis saame 128-st suurema, kuid 130-st väiksema arvu. Leia see arv.

2.4.5. ABSOLUUTVÄÄRTUST SISALDAVAD VÕRRATUSED.

Teame, et $|a|=a$, kui $a\geqslant 0$, ja $|a|=-a$, kui $a<0$.

Näide 1. Lahendada võrratus: $|x|<2$. Seda võrratust rahuldavad kõik need positiivsed ja negatiivsed arvud, mille absoluutväärtus on väiksem kui 2 (joon. 28). Seega need arvud, mis rahuldavad tingimust $-2<x<2$.



Joon. 28.

Näide 2. Lahendada võrratus: $|x-1|<2$. Nüüd kehtivad avaldise $x-1$ kohta samad tingimused, mis eelmises näites x kohta, s. t.

$-2<x-1<2$.

See on võrratusesüsteem, milles võrratuste üks pool on üks ja seesama, s. t.

$$\begin{cases} x-1<2 \\ x-1>-2. \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} x<3 \\ x>-1. \end{cases}$$

Seega on süsteemi lahendiks x väärtuste hulk, mis rahuldab tingimust $-1<x<3$.

Selle ülesande võime lahendada ka lihtsamalt. Liidame kahekordse võrratuse

$$-2<x-1<2$$

iga poolega arvu 1, saame

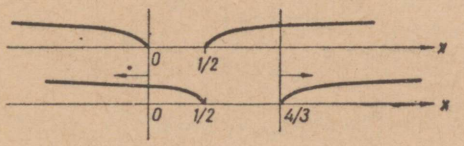
$$-1<x<3.$$

Näide 3. Lahendada võrratus $\left|\frac{x+2}{1-2x}\right|<2$. Selle võrratuse võime asendada võrratusesüsteemiga

$$\begin{cases} \frac{x+2}{1-2x}<2 \\ \frac{x+2}{1-2x}>-2. \end{cases}$$

Esimese võrratuse lahendiks on väärtuste piirkonnad $x<0$ ja $x>\frac{1}{2}$ ning teise võrratuse lahendiks väärtuste piirkonnad $x<\frac{1}{2}$ ja $x>\frac{4}{3}$. Antud võrratuse lahendiks on süsteemi võrratuste lahendite ühine osa (joon. 29), s. t.

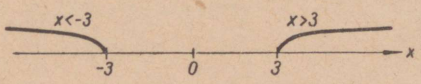
$$x<0 \text{ ja } x>\frac{4}{3}.$$



Joon. 29.

Näide 4. Lahendada võrratus $|x|>3$. Seda võrratust rahuldavad kõik positiivsed arvud, mis on suuremad kui 3, ja kõik negatiivsed arvud, mis on väiksemad kui -3 (joon. 30), s. t.

$x>3$ ja $x<-3$.



Joon. 30.

Näide 5. Lahendada võrratus $|2x-5|>3$. Nüüd kehtivad avaldise $2x-5$ kohta samad tingimused, mis eelmises näites x kohta. Niisiis tuleb lahendada kaks iseseisvat võrratust

$2x-5>3$ ja $2x-5<-3$.

Esimese võrratuse lahendiks on $x>4$ ja teise võrratuse lahendiks $x<1$. Need mõlemad väärtuste piirkonnad on antud võrratuse lahendiks.

ÜLESANDEID.

82. Lahenda järgmised võrratused:

a) $|x+3|<2$ c) $|7x+5|<19$

b) $|x-5|<12$ d) $|13-2x|<5$

83. Lahenda järgmised võrratused:

a) $|x+5|>4$ c) $|4x+9|>3$

b) $|x-7|>5$ d) $|-8-5x|>7$

84. Lahenda järgmised võrratused:

a) $\left|\frac{x-4}{3-x}\right|<2$ c) $\left|\frac{4-x}{3x+2}\right|>1$

b) $\left|\frac{3x+5}{2-3x}\right|<4$ d) $\left|\frac{3-2x}{-5-x}\right|>5$

2.5. ARITMEETILINE PROGRESSIOON.

2.5.1. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI MÕISTE.

Argumendi naturaalarvulistele väärtustele $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ vastavate funktsiooni väärtuste hulka, mis on üles kirjutatud argumendi väärtuste kasvavas järjekorras, nimetatakse **arvujadaks** ehk lihtsalt **jadaks.**

Nii saame lineaarfunktsioonist $y=2x+3$ jada

$$5, 7, 9, \ldots, 2n+3, \ldots; \tag{1}$$

funktsioonist $-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ jada

$$\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \ldots, -\frac{2}{3}n+\frac{4}{3}, \ldots; \tag{2}$$

funktsioonist x^2 jada

$$1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots. \tag{3}$$

Arvujadas nimetatakse arve vastavalt jada esimeseks, teiseks, kolmandaks jne. liikmeks ning tähistatakse

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Nii on jadas (1)

$$a_1=5;\ a_2=7;\ a_3=9;\ \ldots;\ a_n=2n+3;\ \ldots.$$

Lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ väärtustest saadud arvujadadel on omadus, et iga järgnev arv erineb temale eelnevast ühe ja sama kindla arvu a võrra, sest kui x muutub $\Delta x=1$ võrra, siis y muutub $\Delta y=a\cdot\Delta x=a$ võrra. Sellise omadusega arvujadale on antud eri nimetus — **aritmeetiline progressioon.** Seega

> **arvujada, milles teisest liikmest alates on iga arvu ja temale eelneva arvu vahe jääv suurus, nimetatakse aritmeetiliseks progressiooniks.**

Seda jäävat suurust nimetatakse aritmeetilise progressiooni **vaheks** ja tähistatakse tähega d (lad. k. differentia — vahe).

Toodud kolmest näitest on jadad (1) ja (2) seega aritmeetilised progressioonid, kuna jada (3) seda ei ole.

Näites (1) $d=2$ ja näites (2) $d=-\frac{2}{3}$.

Aritmeetilise progressiooni definitsiooni põhjal on

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_n-a_{n-1}=\ldots=d$$

ehk

$$a_2-a_1=d;\ a_3-a_2=d;\ \ldots;\ a_n-a_{n-1}=d.$$

Siit

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_n=a_{n-1}+d.$$

Nende võrduste vastavaid pooli liites saame

$$a_2+a_3+\ldots+a_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+(n-1)d.$$

Lahutades nüüd saadud võrduse mõlemast poolest summa $a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}$, jõuame nn. **aritmeetilise progressiooni üldliikme valemini**

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$$

See valem seob nelja suurust: a_1, d, n ja a_n. Kui neist suurustest kolm on antud, siis saame üldliikme valemi abil neljanda arvutada.

Näide 1. Leida jada (1) 41. liige. Siin leiame, et $a_1=5$, $d=2$, $n=41$. Arvutada tuleb a_{41}. Saadud valemi põhjal

$$a_{41}=5+(41-1)\cdot 2=85.$$

Näide 2. On antud, et $a_{66}=-194$ ja $a_1=1$. Leida d. Et

$$d=\frac{a_n-a_1}{n-1},\ \text{siis}\ d=\frac{-194-1}{66-1}=\frac{-195}{65}=-3.$$

ÜLESANDEID.

85. Esita järgmistest funktsioonidest saadavad arvujadad:

a) $-2x+1$; b) $2-x^2$; c) $\frac{x-1}{x+1}$; d) $3(1+x)$; e) $\frac{2}{x}$.

Missugused saadud jadadest on aritmeetilised progressioonid?

86. Arvuta aritmeetilise progressiooni esimesed 10 liiget, kui üldliikme valem on:

a) $a_n = -3+2(n-1)$

b) $a_n = -3+\frac{3}{4}(n-1)$

c) $a_n = 0-\frac{1}{2}(n-1)$

d) $a_n = -10+1{,}2(n-1)$

e) $a_n = 5-2{,}4(n-1)$

87. Avalda aritmeetilise progressiooni üldliikme valemist a_1, n, d.

88. Esita aritmeetilise progressiooni esimesed viis liiget, kui

a) $a_1 = 4$ ja $d = 3$;

b) $a_2 = -4$ ja $d = 2$;

c) $a_5 = -16$ ja $d = -3$;

d) $a_4 = 13$ ja $a_5 = 13{,}4$;

e) $a_2 = 5\frac{3}{4}$ ja $a_4 = 7\frac{1}{4}$.

89. Leia järgmises tabelis puuduvad suurused:

a_1	d	n	a_n
15	−3	10	
−21	4	25	
−9		11	21
−8		15	−29
23	−5		−22
−16	3		20

90. Arvuta aritmeetilise progressiooni

a) 8. liige, kui $a_3 = 8{,}4$ ja $d = 1{,}6$;

b) 23. liige, kui $a_{15} = 72{,}5$ ja $d = -0{,}5$;

c) 17. liige, kui $a_9 = -17$ ja $d = 2{,}2$;

d) 36. liige, kui $a_{24} = 18{,}36$ ja $d = -1{,}56$.

91.

	Aritmeetilises progressioonis on antud	Leia
a)	$a_5 = 23$ ja $a_{11} = 43$	a_1 ja d
b)	$a_8 = 19{,}4$ ja $a_{15} = 24{,}3$	a_1 ja d
c)	$a_7 = 19$ ja $a_{19} = 55$	n, kui $a_n = 28$

92. Vabalt langev keha langeb esimesel sekundil 4,9 m. Kui palju langeb keha 16. sekundil, kui langemistee pikkus kasvab igas sekundis 9,8 meetri võrra? Mitmendal sekundil langeb keha 249,9 m?
93. Matkaja, kes käib iga päev 1,5 km võrra lühema tee kui eelmisel päeval, matkab 3. päeval 16 km. Mitu kilomeetrit käis matkaja esimesel päeval?
94. Jalgrattur sõidab esimesel tunnil 20 km, igal järgneval tunnil sõidab ta 0,8 km vähem kui eelmisel. Mitu tundi sõitis jalgrattur, kui viimasel tunnil sõitis ta 16 km?
95. Paiguta arvude 12 ja 24 vahele 19 arvu nii, et need kõik koos moodustaksid aritmeetilise progressiooni. Leia selle progressiooni vahe.
96. Arvude 7 ja 35 vahele paiguta 6 arvu nii, et need koos antud arvudega moodustaksid aritmeetilise progressiooni.
97. Arvude a ja b vahele paiguta m arvu nii, et need koos antud arvudega moodustaksid aritmeetilise progressiooni. Leia selle progressiooni kolm esimest liiget.

2.5.3. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI ALGUSEST JA LÕPUST VÕRDSETEL KAUGUSTEL SEISVATE LIIKMETE OMADUS.

Olgu vaja leida aritmeetilise progressiooni esimese n liikme summa, s. o. $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Kui progressiooni liikmete arv on väike, siis on selle summa leidmine lihtne. Näiteks progressiooni $-3, -1, 1, 3, 5$ liikmete summaks on 5. Kui aga liikmete arv on suur, siis on summa arvutamine küllaltki aeganõudev. Sel juhul kasutatakse vastavat valemit, mille tuletamisele asumegi.

Eelkõige tutvume aga aritmeetilise progressiooni omadusega:

aritmeetilise progressiooni algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asuvate liikmete summa on võrdne esimese ja viimase liikme summaga.

Vaatleme aritmeetilist progressiooni

$-6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15.$

Siin on esimese ja viimase liikme summa

$-6+15=9$

ning algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asuvate liikmete summad:

$$-3+12=9;$$
$$0+9=9;$$
$$3+6=9.$$

Et aritmeetilise progressiooni teise liikme saame, kui esimesele liikmele liidame progressiooni vahe, ning eelviimase liikme saame, kui viimasest liikmest lahutame vahe, s. t.

$$a_2=a_1+d \text{ ja } a_{n-1}=a_n-d,$$

siis nende summa

$$a_2+a_{n-1}=a_1+d+a_n-d=a_1+a_n$$

ongi võrdne esimese ja viimase liikme summaga.

Samasuguse arutluse teel võime veenduda, et algusest ja lõpust kolmanda, neljanda jne. liikme summa on võrdne esimese ja viimase liikme summaga.

Selle omaduse kehtivust saame selgitada ka järgmise arutlusega.

Olgu antud aritmeetiline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Näeme, et lõpust teise liikme indeks on $n-1$, lõpust kolmanda liikme indeks $n-2$ jne. Lõpust k-nda liikme indeks on seega $n-k+1$. Teoreem väidab, et

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n.$$

Üldliikme valemi järgi

$$a_k=a_1+(k-1)d$$

ja

$$a_{n-k+1}=a_1+(n-k+1-1)d.$$

Niisiis

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+(k-1)d+a_1+(n-k)d.$$

Avades sulud ja koondades saame

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+kd-d+a_1+nd-kd=a_1+a_1+(n-1)d.$$

Et

$$a_1+(n-1)d=a_n,$$

siis saamegi, et

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n.$$

Kui osutub, et progressiooni liikmete arv on paaritu, siis keskmise liikme kahekordne on võrdne esimese ja viimase liikme summaga. Tõepoolest,

TRÜ Raamatukogu

kui $\bar{a}$ on keskmine liige, siis leidub niisugune k väärtus, mille puhul $a_k = a_{n-k+1} = \bar{a}$.

Saadud valemi kohaselt

$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$

ja seega

$2\bar{a} = a_1 + a_n$.

Siit

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_n}{2},$$

s. t. progressiooni keskmine liige on võrdne esimese ja viimase liikme aritmeetilise keskmisega.

2.5.4. ARITMEETILISE PROGRESSIOONI SUMMA VALEM.

Leiame nüüd valemi aritmeetilise progressiooni n liikme summa arvutamiseks.

Tähistades n liikme summa tähega S_n, võime kirjutada

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

Esitame selle summa kaks korda: üks kord on liidetavateks progressiooni liikmed antud järjestuses, teine kord vastupidises järjestuses.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

Üksteise all asetsevate liikmete summa on teatavasti jääv ja võrdne esimese ning viimase liikme summaga. Seega

$2S_n = (a_1 + a_n)n$

ja siit

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

Seega,

aritmeetilise progressiooni summa on võrdne äärmiste liikmete aritmeetilise keskmise ja liikmete arvu korrutisega.

Teades, et $a_n = a_1 + (n-1)d$, võime aritmeetilise progressiooni summa valemi esitada veel kujul

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.}$$

98. Leia aritmeetilise progressiooni n-es liige, kui

a) $a_1 = 3$ $\quad d = -2$ $\quad n = 16$

b) $a_1 = -\frac{2}{3}$ $\quad d = \frac{1}{3}$ $\quad n = 13$

c) $a_1 = 2{,}5$ $\quad d = -1{,}2$ $\quad n = 26$

99. Leia aritmeetilise progressi summa, kui

a) $a_1 = 6$ $\quad a_n = 76$ $\quad n = 15$

b) $a_1 = 10$ $\quad a_n = -19$ $\quad n = 30$

c) $a_1 = 3{,}4$ $\quad d = 2{,}1$ $\quad n = 14$

d) $a_1 = \frac{5}{6}$ $\quad d = \frac{4}{3}$ $\quad n = 12$

100. Täida järgnev tabel:

a_1	d	n	a_n	S_n
$\frac{3}{4}$		26	$3\frac{7}{8}$	
-10		6	-20	
	$-\frac{1}{4}$	13	1	
	2	15	-10	
14,5	0,7		32	
$-37\frac{1}{2}$	4		$46\frac{1}{2}$	
-10	-2	6		
5,2	0,4	43		
0,7		30		108
		10	-37	-55

101. Mitu silma on kokku ühel täringul?

102. Mitu lööki teeb ööpäeva jooksul kell, kui ta lööb ainult täistunde, alates 1 kuni 12?

103. Mitu lööki teeb ööpäeva jooksul Tartu raekoja kell, kui ta lööb täistunde alates 1 kuni 12 ja lisaks sellele iga veerandtunni ajal 1 löögi, pooltunni ajal 2 lööki, kolmveerand tunni ajal 3 lööki ja täistunni ajal 4 lööki?

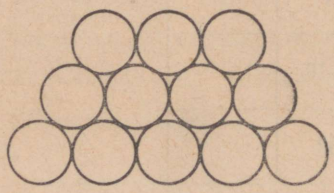
104. Leia esimese 100 täisarvu summa.

105. Leia esimese 100 paarisarvu summa.

106. Leia esimese 100 paaritu arvu summa.

107. Vabalt langev keha läbib esimeses sekundis 4,9 m ja igas järgnevas sekundis 9,8 m rohkem kui eelnevas. Leida: a) kui pika tee läbib see keha 21 sekundiga, b) mitu sekundit langeb keha 500 m kõrguselt.

108. Kahe linna vahelise gaasijuhtme ehitamiseks valmistatud 25 m pikkused torud olid laotud tehase õuele 8 suurde täpselt ühesuurusesse kuuerealisesse virna, nii nagu näidatud joonisel 31. Alumises reas oli 20 toru. Leia: a) mitu toru oli igas virnas, b) kui pikk oli ehitatav gaasijuhe.



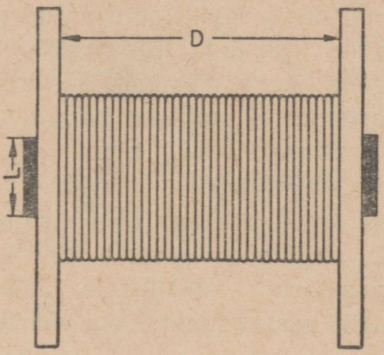
Joon. 31.

109. Jalgratturite matkagrupp otsustas pärast ühtlast kahetunnilist sõitu, kui oli läbitud 24 km, tõsta igas järgnevas tunnis keskmist kiirust 2 km võrra tunnis. Mis kellaajal jõudis matkagrupp sihtkohta, kui väljuti kell 7 hommikul ja kogu tee pikkus oli 114 km?

110. Maja katus koosneb kahest võrdsest trapetsikujulisest ja kahest võrdsest kolmnurgakujulisest osast. Trapetsikujulise osa räästapoolsele küljele pandi 240 kivi ja igasse järgmisse ritta kaks kivi vähem kui eelmisse. Kolmnurgakujulise osa

harjapoolsele viimasele reale pandi üks kivi ja igas eelmises reas oli kaks kivi rohkem. Teades, et kivide ridade arv nii trapetsikujulistel kui ka kolmnurgakujulistel osadel oli 30, leia, mitu kivi kulus katuse katmiseks.
Kui transpordil purunemise ja defektidega kivide osale langes 3,7% kogu tellimusest, siis ca mitmele kivile oli esitatud tellimus, kui katus sai täielikult kaetud ja ülejääki polnud?

111. Rullile, mille mõõtmed on D ja L (joon. 32), on mähitud telefonikaabel, mille läbimõõt on d cm. Kui paljú kaablit mahub 1., 2., 3., ..., n. kihile, kui iga järgnev kiht on keritud eelmisele täpselt peale, mitte vahekohtadesse? Kui pikk on rullile mähitud kaabel, kui $D=0{,}9$ m, $L=0{,}8$ m, $d=4$ cm ja kihte on 25?



Joon. 32.

112. Kolhoosi üldkoosolek võttis 1961. a. algul kohustuse tõsta 20 aasta jooksul piimatoodang 3-kordseks, kusjuures piimatoodangu juurdekasv iga aasta kohta kavandati ühtlane. Kui palju kohustus kolhoos piima tootma 1965. a., 1972. a. ja 1980. a., kui 1961. a. piimatoodang oli 760 tonni?

113. Aritmeetilise progressiooni n-es liige on 1800% esimesest liikmest ning liikmete arv ja liikmete summa suhtuvad nagu 1 : 19. Leida esimene liige.

114. Leida aritmeetilise progressiooni liikmete arv, kui esimene liige on 2,5% ja vahe 7,5% n-ndast liikmest.

2.6. LINEAARNE INTERPOLATSIOON.

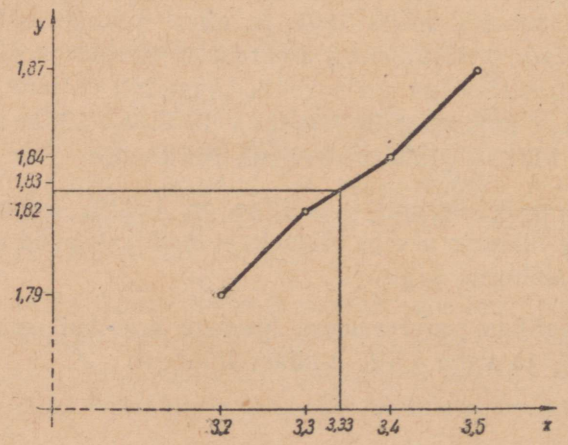
2.6.1. LINEAARSE INTERPOLATSIOONI VALEM.

Olgu antud mingi funktsiooni väärtuste tabel. Vaatame näiteks väljavõtet ruutjuurte tabelist:

x	3,2	3,3	3,4	3,5
y	1,79	1,82	1,84	1,87

Huvitagu meid y väärtus, kui x väärtus on 3,33. Esitatud tabeli ulatuses on argumendi muuduks 0,1; sellele vastavad funktsiooni muudud on 0,03; 0,02 ja 0,03. Et viimaste erinevus on küllaltki väike, siis võime vaatluse all oleva funktsiooni antud argumendi väärtuste vahemikus lugeda ligikaudu lineaarseks. Seda enam võime selle funktsiooni lugeda lineaarseks kahe kõrvutiasetseva tabeliväärtuse vahel. Kui argumendi muut on küllalt väike, siis tuleb see lineaarsus ilmsiks iga funktsiooni juures.

Joonisel 33 on esitatud antud tabeli väärtuspaaridele vastavad punktid. Näeme, et need asetsevad peaaegu ühel sirgjoonel. Võttes kahe punkti vahel graafiku sirgjoonena, saame leida funktsiooni väärtusi vahelmistele argumendi väärtustele. Jooniselt näeme, et argumendi väärtusele 3,33 vastav funktsiooni väärtus on veidi väiksem kui 1,83.



Joon. 33.

Selle funktsiooni väärtuse võime leida ka vastava valemi, nn. **lineaarse interpolatsiooni valemi** abil.

Interpolatsiooniks [1] *nimetataksegi funktsiooni väärtuste tabeli täiendamist vahepealsete väärtustega.* Lineaarse interpolatsiooni korral vaadeldakse funktsiooni antud väärtuste vahel lineaarse funktsioonina.

Tuletame nüüd **lineaarse interpolatsiooni valemi.**

Olgu antud mingi funktsiooni väärtuste tabel:

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_1	y_2	y_3	y_4

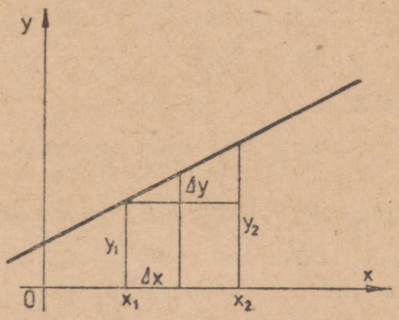
Leiame argumendi väärtusele $x_1+\Delta x$ vastava funktsiooni väärtuse $y_1+\Delta y$. Et me loeme funktsiooni vahemikus x_1-st x_2-ni lineaarseks, siis graafikul ühendab neid punkte sirge.

Jooniselt 34 näeme, et

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (põhjenda seda!).

Sellest

$$\Delta y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\Delta x.$$



Joon. 34.

Seega otsitav funktsiooni väärtus

$$y_1+\Delta y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\Delta x.$$

N ä i d e. Kasutades eelmisel leheküljel toodud tabelit, leiame $\sqrt{3{,}33}$. Sel juhul

$$\Delta y=\frac{1{,}84-1{,}82}{3{,}4-3{,}3}\cdot 0{,}03=\frac{0{,}02}{0{,}1}\cdot 0{,}03=0{,}006$$

ja otsitavaks funktsiooni väärtuseks on $1{,}82+0{,}006=1{,}826\approx 1{,}83$.

[1] *interpolatio (lad. k.)* — vahelelüke.

Vaatleme, kuidas on lineaarset interpolatsiooni rakendatud koolides kasutusel olevais V. Bradise tabeleis.

Toome väljavõtte näiteks kuupide tabelist

N	0	1	2	3	....	7	8	9
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	....	416,8	418,5	420,2

Otseselt leitavad on siit kolmekohaliste arvude 7,40 kuni 7,49 kuubid. Nii on näiteks

$$7{,}43^3 = 410{,}2, \qquad 7{,}47^3 = 416{,}8.$$

Kui tahame saada aga neljakohalise arvu kuupi, siis kasutame lineaarset interpolatsiooni. Leiame näiteks $7{,}422^3$. Tähistame

$$x_1 = 7{,}42; \qquad x_2 = 7{,}43;$$
$$y_1 = 408{,}5; \qquad y_2 = 410{,}2;$$
$$\Delta x = 0{,}002,$$

siis

$$\Delta y = \frac{410{,}2 - 408{,}5}{7{,}43 - 7{,}42} \cdot 0{,}002 = \frac{1{,}7}{0{,}01} \cdot 0{,}002 = 0{,}34 \approx 0{,}3$$

ja seega $7{,}422^3 = 408{,}5 + 0{,}3 = 408{,}8$.

Need lineaarse interpolatsiooni abil leitavad Δy väärtused on esitatud V. Bradise tabelites parandusveergudes. Vaatluse all olev rida jätkub seal veergudega

1	2	3	4	5
2	3	5	7	8

Siit leiamegi, et argumendi kahele neljanda koha ühikule vastab funktsiooni kolm neljanda koha ühikut jne.

Seega, et tabelist leida $7{,}422^3$, võtame tabelist $7{,}42^3$ ja liidame 2-le vastava paranduse, s. o. $408{,}5 + 0{,}3 = 408{,}8$.

Kui tahame selle tabeli abil leida aga näiteks

$7{,}487^3$,

siis võtame tabelist $7{,}49^3$ ja lahutame 3-le vastava paranduse, s. o. $420{,}2-0{,}5=419{,}7$.

Parandusveergude kasutamine toimub samal viisil ka teiste tabelite juures.

Näiteks olgu antud väljavõte siinuste tabelist

A	0′	6′	12′	...	48′	54′	60′		1′	2′	3′
54°	0,8090	8100	8111	...	8171	8181	0,8192	35°	2	3	5
	60′	54′	48′	...	12′	6′	0′	A			

Siit leiame näiteks, et $\sin 54°12′=0{,}8111$, $\sin 54°50′=0{,}8174$ ja $\sin 54°10′=0{,}8108$.

Viimasel juhul võtame tabelist $\sin 54°12′$ ja lahutame sellest 2′-le vastava paranduse, s. o. $0{,}8111-0{,}0003=0{,}8108$.

Siinuste tabelit kasutatakse ka koosinuste tabelina, sest nagu teada, on $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$. Nii on $\cos 35°12′=0{,}8171$, $\cos 35°59′=$ $=0{,}8092$. Koosinuse väärtuste leidmisel tuleb arvestada, et nurga suurenemisel koosinuse väärtused vähenevad.

ÜLESANDEID.

115. On antud tabel

x	9,10	9,11	9,12	9,13	9,14
x^2	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54

Leia lineaarse interpolatsiooni valemit kasutades x^2, kui $x=9{,}106$; 9,114; 9,121; 9,138.

116. On antud siinuste tabel

15°	15°10′	15°20′	15°30′	15°40′	15°50′	16°
0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756

Leia lineaarse interpolatsiooni valemit kasutades $\sin\alpha$, kui $\alpha = 15°06'$; $15°12'$; $15°27'$; $15°38'$; $15°43'$; $15°55'$.

117. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia

a) $\sin 15°42'$; $\sin 82°13'$; $\sin 62°53'$; $\cos 2°18'$; $\cos 52°49'$; $\cos 77°8'$;

b) $\tan 30°12'$; $\tan 53°16'$; $\tan 72°47'$; $\cot 18°18'$; $\cot 34°15'$; $\cot 65°5'$.

118. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia

a) $3{,}14^2$; $5{,}42^2$; $9{,}47^2$; $2{,}143^2$; $4{,}276^2$; $8{,}033^2$;

b) $\sqrt{7{,}44}$; $\sqrt{28{,}8}$; $\sqrt{94{,}7}$; $\sqrt{1{,}972}$; $\sqrt{6{,}409}$; $\sqrt{39{,}25}$; $\sqrt{47{,}12}$; $\sqrt{84{,}86}$.

c) $1{,}292^3$; $2{,}045^3$; $3{,}917^3$; $8{,}435^3$.

119. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia

a) ringjoone pikkus, kui diameetri pikkus on:
4; 15; 6,47; 5,321; 8,972; 2,651;

b) ringi pindala, kui diameetri pikkus on:
1,422; 3,563; 6,743; 8,106; 9,327.

120. Kasutades V. Bradise tabeleid, leia järgmiste arvude pöördväärtused:
1,192; 2,435; 3,569; 8,888; 9,052.

KORDAMISÜLESANDEID.

121. On antud lineaarsed funktsioonid:

a) $y = x - 2$

b) $y = 5x + 1$

c) $y = -2x + 3$

d) $y = -3x - 5$

e) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

f) $y = -0{,}4x - 0{,}1$

g) $y = 4\frac{1}{5}x$

h) $y = -\frac{4}{3}x$

a) Missugused nendest funktsioonidest on kasvavad, missugused kahanevad?

b) Kasutades trigonomeetriliste funktsioonide tabeleid, leia, kui suure nurga moodustavad vastavad sirged x-teljega.

c) Tee kindlaks, mis märgiga on nende funktsioonide nullkohad.

d) Leia nende funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

122. a) Leia kõigi kolmega jaguvate arvude summa vahemikus 100 kuni 300 (incl.).

b) Leia kõigi kolmega mittejaguvate arvude summa samas vahemikus.

c) Leia kõigi 5-ga jaguvate arvude summa vahemikus 100 kuni 1000 (incl.).

123. Jaota 10 mõõtu vilja kümnele isikule nõnda, et iga järgmine saab $\frac{1}{8}$ mõõtu vähem kui eelmine (Ahmes, ca 1700 a. e. m. a.).

124. Mitu inimest mahub teatrisse, mille välimine ümbermõõt on 420 jalga ja sisemine ümbermõõt 180 jalga ning astmete arv on 280? Iga jala kohta tuleb üks inimene. (Heron, Alexandria)

125. Üks reisija läbib esimesel päeval 2 teepikkust ja igal järgmisel 3 samasugust teepikkust rohkem. Teine reisija läbib samal teel esimesel päeval 3 niisugust teepikkust ja igal järgmisel 2 teepikkust rohkem. Millal need reisijad kohtuvad? (Bakshali, India)

126. Kahest reisijast, kes samaaegselt väljuvad, läbib üks iga päev 10 teepikkust. Teine aga läbib esimesel päeval ühe, teisel päeval kaks, kolmandal kolm teepikkust jne. Mitme päeva pärast jõuab teine reisija esimesele järele? (Alkarkhi, Araabia)

127. Keegi ostab hobuse tingimusel, et ta esimese kabjanaela eest maksab 5 krossi, teise eest 8, kolmanda eest 11 jne. Kui palju pidi ostja maksma hobuse eest, kui hobusel on 32 kabjanaela? (Euler, 1766)

128. Näita, et kui aritmeetilise progressiooni esimene liige on n^2-n+1 ja vahe on 2, siis n liikme summa on n^3.

129. Leia

a) progressiooni

$-12, -7, -2, 3, \ldots$ 236. liige ja 12. liige,

b) progressiooni

$0, -3, -6, -9, \ldots$ 101. liige ja 11. liige,

c) progressiooni

$-1\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}, \ldots$ 555. liige ja 5. liige.

130. Lahenda järgmised võrratused:

1) $\frac{x-1}{4}+\frac{2x+3}{2}>\frac{4-x}{3}$

2) $\frac{1}{3}-\frac{2-3x}{6}<\frac{4x+1}{12}+\frac{1-x}{4}$

3) $\frac{3x-5}{30}>\frac{6-5x}{75}$

131. Lahenda järgmine võrratusesüsteem ja võrratused.

1) $\begin{cases} \frac{4-3x}{20}-\frac{2-5x}{36}>1\frac{2}{3} \\ \frac{x-2}{9}+\frac{6-2x}{15}<3\frac{4}{5} \end{cases}$

2) $(5-3x)(6+7x)>0$

3) $\frac{8-2x}{x-5}<0.$

132. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid võrdlusmeetodiga:

1) $\begin{cases} 0{,}6x-3{,}2y=2{,}8 \\ 2{,}2x+1{,}4y=-6{,}3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -3{,}1x+0{,}2y=1{,}9 \\ 0{,}6x-1{,}3y=0{,}7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-2=\frac{1}{5}y \\ \frac{4}{5}x+\frac{2}{5}y=\frac{6}{7} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{3}{4}x+\frac{3}{8}y=8\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y=1\frac{3}{4} \end{cases}$

133. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid kas asendus- või liitmisvõttega:

1) $\begin{cases} 3x+2y=-10 \\ 4x-5y=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1{,}5x+2{,}3y=-1 \\ 0{,}3x+0{,}4y=-0{,}2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+14y=47 \\ 2x-21y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 0{,}7x+0{,}3y=12{,}7 \\ 0{,}3y+0{,}4x=9{,}7 \end{cases}$

134. Selgita, missugustel järgmistest süsteemidest on üks lahend, lõpmata palju lahendeid või lahendid puuduvad:

1) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -3x+2y=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=2 \\ 3x-3y=6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{1}{2}y=x-1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y=5-x \\ 2x-10=2y \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-x=7 \\ y+3x=21 \end{cases}$

135. Leia sirgete lõikepunkt:

1) $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=x+2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=-3x-1 \\ y=x+2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+2\frac{2}{3} \\ y=2\frac{2}{3}x-\frac{2}{3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} y=4{,}32-2{,}16x \\ y=-15{,}6+6{,}51x. \end{cases}$

136. Leia sirgete $y=2x-1$ ja $y=-x+2$ lõikepunkt.

137. Leia võrrand sirgele, mis läbib punkte $A(-3;\ 0)$ ja $B(0;\ 2)$, ja sirgele, mis läbib punkte $C(2;\ 0)$ ja $D(0;\ -2)$. Leia nende sirgete lõikepunkt.

138. Leia sirge $y=-2x+2$ ja ringjoone $x^2+y^2=4$ lõikepunktid.

139. Leia sirge $y=0{,}3x+3$ ja ringjoone $x^2+y^2=9$ lõikepunktid.

140. Leia sirge $y=2x-1$ ja ringjoone $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ lõikepunktid.

141. Leia sirge $y=-4x+3$ ja parabooli $y=\frac{1}{2}x^2$ lõikepunktid.

142. Leia sirge $y=2x-1$ ja hüperbooli $y=\frac{1}{x}$ lõikepunkt.

143. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(y+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{5}(x+2)=1{,}1 \\ x-2y+4=\frac{1}{4}\left[2x+3\left(y-\frac{1}{2}\right)\right] \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1}{2}-y=\left\{\frac{1}{3}[x-5(y-0{,}3)]-1\right\}+1{,}2 \\ 3\left[1-\frac{2-3(x-y)}{5}\right]+6{,}94=2(3x-1) \end{cases}$

144. Ühel riiulil on raamatuid kaks korda vähem kui teisel. Kui esimeselt riiulilt võtta ära 6 raamatut, aga teisele panna 8 raamatut lisaks, siis on esimesel riiulil 7 korda vähem raamatuid kui teisel. Mitu raamatut on kummalgi riiulil?

145. Sõiduki esiratta ümbermõõt on tagaratta ümbermõõdust $\frac{1}{2}$ m võrra lühem; esiratas tegi 30 m pikkusel teel niisama palju pöördeid kui tagaratas 36 m pikkusel teel. Leia kummagi ratta ümbermõõt.

146. Kahe kraani kaudu, kui mõlemad on üheaegselt avatud, täitub paak veega $9\frac{3}{8}$ tunni jooksul. Mõlemad kraanid olid avatud 5 tundi, siis torustiku rikke tõttu teine kraan suleti, esimene kraan jäi pärast seda 7 tundi avatuks, mis ajaga sai paak täis. Mitme tunniga saab paak täis kummagi kraani kaudu eraldi?

147. Kell 12 väljub jaamast kaubarong, sõites keskmise kiirusega 32 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. 45 minutit hiljem väljub samast jaamast samas suunas teine kaubarong, mis sõidab keskmise kiirusega 42 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Mis kella ajal möödub teine kaubarong esimesest, kui liiklemine toimub kahel paralleelsel raudteel?

148. Kui raamatu leheküljel iga rida lühendada 3 täheruumi võrra ja seejärel ridade arvu vähendada 2 võrra, siis täheruumide arv leheküljel väheneb 145 võrra. Kui aga iga rida pikendada 4 täheruumi võrra ja ridade arvu suurendada 3 võrra, siis tähtede arv leheküljel suureneb 224 võrra. Mitu rida on leheküljel ja mitu tähte on reas?

149. Kui turist käiks tunnis 1 km võrra vähem kui praegu, siis vältaks teekond 6 tundi rohkem; kui ta käiks tunnis 2 km rohkem, siis kuluks tal teekonnaks $\frac{2}{3}$ sellest ajast, mis tal nüüd kulub. Leia liikumise aeg ja kiirus.

3. RUUTFUNKTSIOON.

3.1. RUUTFUNKTSIOONI UURIMINE.

3.1.1. RUUTFUNKTSIOON JA SELLE GRAAFIK.

Ruutfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mida esitab avaldis ax^2+bx+c, kus a, b ja c on antud arvud ($a \neq 0$).

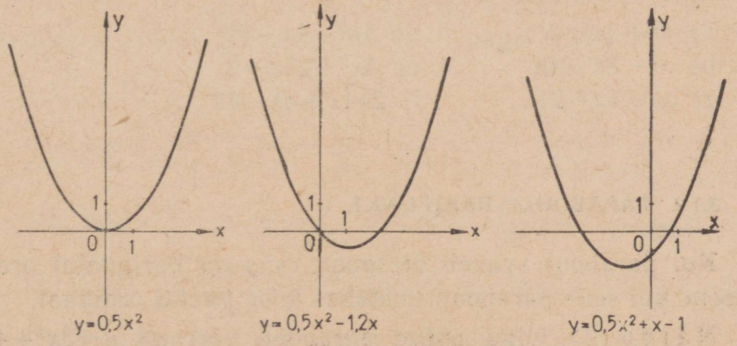
VIII klassis kasutasime ruutfunktsiooni graafiku joonestamiseks järgmist teed:

1° koostasime antud funktsiooni avaldise järgi ühe tema väärtuste tabeli,

2° kandsime tabeli väärtuspaaridele vastavad punktid koordinaatteljestikku,

3° ühendasime need punktid sujuva joonega.

Joonisel 35 on esitatud VIII klassis tundma õpitud ruutfunktsioonide graafikud. Nagu neilt jooniseilt nähtub, sõltub parabooli võrrand parabooli asendist koordinaatteljestiku suhtes. Ja nimelt järgmiselt.



Joon. 35.

1° Kui parabool ei läbi koordinaatide alguspunkti, siis tema võrrandis $y=ax^2+bx+c$ on c nullist erinev.

2° Kui parabool läbib koordinaatide alguspunkti, siis on $c=0$ ja parabooli võrrand esitub kujul $y=ax^2+bx$.

3° Kui parabooli haripunkt asub koordinaatide alguspunktis, siis on $b=c=0$ ja parabooli võrrand esitub kujul $y=ax^2$.

Teame ka, et parabool avaneb ülespoole, kui $a>0$, ja allapoole, kui $a<0$.

ÜLESANDEID.

150. Kuidas asetseb parabool koordinaatteljestiku suhtes, kui tema võrrand on:

a) $y=x^2+3x$ d) $y=2x^2-2$
b) $y=x^2-3x$ e) $y=2-2x^2$
c) $y=3x-x^2$ f) $y=1+2x-x^2$?

151. Kuidas asetseb parabool $y=ax^2+bx+c$ koordinaatteljestikus, kui

a) $a\neq 0$, $b=0$, $c\neq 0$;
b) $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$?

152. Täienda täisruuduks:

a) x^2+6x d) x^2+x
b) x^2-8x e) $x^2-\frac{1}{2}x$
c) x^2-3x f) $x^2+\frac{2}{3}x$

153. Eralda täisruut:

a) x^2+3x+2 d) $4x^2-4x-79$
b) $x^2-8x-48$ e) $5x^2+25x+9$
c) $x^2+4x-21$ f) $2x(x+4)-42$

3.1.2. PARABOOLI HARIPUNKT.

Kui parabool avaneb ülespoole, siis on haripunkti ordinaat väiksem kui selle parabooli mistahes teise punkti ordinaat.

Näide 1. Olgu antud parabooli võrrand $y=2x^2+4x-3$. Seame ülesandeks leida parabooli haripunkti koordinaadid. Selleks

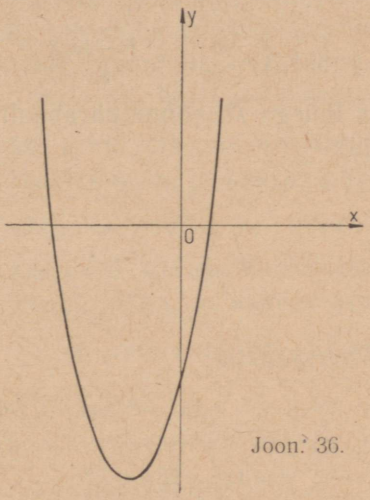
teisendame ruutfunktsiooni avaldist järgmiselt: võtame kahes esimeses liikmes 2 sulgude ette ja täiendame sulgudesse jäänud kaksliikme x^2+2x täisruuduks. Et avaldise väärtus ei muutuks, tuleb lahutada 2:

$$y=2(x^2+2x+1)-3-2.$$

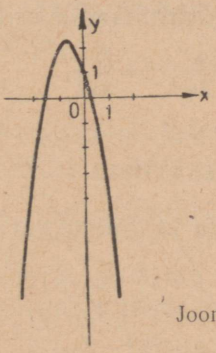
Siit

$$y=2(x+1)^2-5.$$

Kui nüüd $x=-1$, siis $y=-5$. Iga teise x väärtuse puhul on $(x+1)^2$ positiivne ja y väärtus suurem kui -5. Punkt $(-1;\ -5)$ on antud parabooli haripunktiks (joon. 36).



Joon. 36.



Joon. 37.

Näide 2. Olgu antud parabooli võrrand $y=-3x^2-4x+1$. Teisendame seda avaldist samal viisil nagu eelmistki:

$$y=-3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+1+\frac{4}{3};$$

$$y=-3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+2\frac{1}{3}.$$

Kui $x=-\frac{2}{3}$, siis $y=2\frac{1}{3}$. Kui $x\neq-\frac{2}{3}$, siis on $y<2\frac{1}{3}$.

Punkt $\left(-\frac{2}{3};\ 2\frac{1}{3}\right)$ on antud parabooli haripunktiks (joon. 37).

Teisendame nüüd parabooli üldkujulist võrrandit

$$y=ax^2+bx+c.$$

Võtame esimeses kahes liikmes a sulgude ette

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c.$$

Teisendame sulgavaldise täisruuduks, liites sulgudes $\frac{b^2}{4a^2}$ ning, et võrdus jääks kehtima, lahutame väljaspool sulge $\frac{b^2}{4a}$.

Saame

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

ehk

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Parabooli haripunktiks on punkt $\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Tähistades avaldise b^2-4ac tähega D, võime parabooli haripunkti koordinaadid esitada kujul

$$\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{D}{4a}\right).$$

ÜLESANDEID.

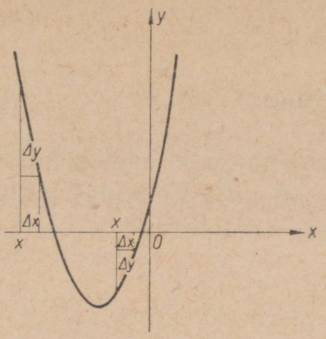
154. Leia järgmiste paraboolide haripunktid:

a) $y=x^2-6x+10$
b) $y=x^2+4x-2$
c) $y=2x^2-2x-2$
d) $y=-3x^2-4x+1$
e) $y=0{,}4x^2+4x+10$
f) $y=-2{,}4x^2+0{,}24x-0{,}096$
g) $y=-x^2+4x-4$
h) $y=3x^2-18x+27$
i) $y=2x^2+16$
j) $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{16}{27}$.

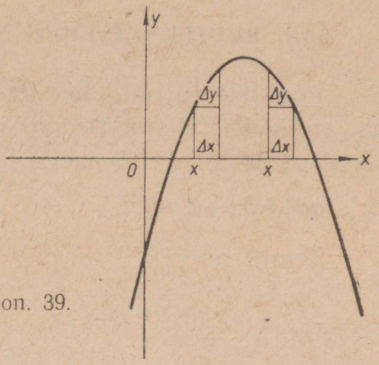
3.1.3. RUUTFUNKTSIOONI KASVAMINE JA KAHANEMINE.

Joonistel 38 ja 39 on esitatud ruutfunktsiooni $y=ax^2+bx+c$ graafikud juhul, kui $a>0$, ja juhul, kui $a<0$.

Võtame esimesel graafikul haripunktist vasakul ühe abstsissi väärtuse x ja tõmbame sellele vastava ordinaatlõigu. Muutugu nüüd x positiivse muudu Δx võrra, siis y muutub negatiivse muudu Δy võrra. See omadus kehtib iga x puhul, mis on haripunkti abstsissist vasakul.



Joon. 38.



Joon. 39.

Paremal pool haripunkti vastab aga positiivsele muudule Δx y positiivne muut Δy. See omadus kehtib iga x puhul, mis on haripunkti abstsissist paremal.

Tähistades haripunkti abstsissi x_e, võime seega öelda, et

kui $a>0$, siis ruutfunktsioon $y=ax^2+bx+c$ on kahanev piirkonnas $x<x_e$ ja kasvav piirkonnas $x>x_e$.

Jälgides joonist 39 võime öelda, et

kui $a<0$, siis ruutfunktsioon $y=ax^2+bx+c$ on kahanev piirkonnas $x>x_e$ ja kasvav piirkonnas $x<x_e$.

Nii on näiteks lk. 66—67 vaadeldud ruutfunktsioon

$$y=2x^2+4x-3$$

kahanev, kui $x<-1$, ja kasvav, kui $x>-1$, ja funktsioon

$$y=-3x^2-4x+1$$

kasvav, kui $x<-\frac{2}{3}$, ja kahanev, kui $x>-\frac{2}{3}$.

ÜLESANDEID.

155. Leia funktsioonide

a) x^2-3x+5 b) $-2x^2+3x-2$
c) $5x^2-10x+25$ d) $-4x^2-6x+9$

kasvamis- ja kahanemispiirkond.

156. Lahenda järgmised võrrandid:

a) $3x^2-8x-3=0$ c) $-5x^2+4x-7=0$
b) $-3x^2+2x+8=0$ d) $4x(2-x)-4=0$

3.1.4. RUUTFUNKTSIOONI NULLKOHAD.

Funktsiooni nullkohtadeks nimetasime neid argumendi väärtusi, mille korral funktsiooni väärtus on null. Et leida ruutfunktsiooni nullkohti, tuleb seega lahendada ruutvõrrand

$$ax^2+bx+c=0.$$

Teame, et selle võrrandi lahendid avalduvad järgmiselt:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Selles valemis esinevat juuritavat b^2-4ac nimetatakse ruutvõrrandi *diskriminandiks* ja tähistatakse tähega D, s. t.

$$b^2-4ac=D.$$

Teame samuti, et ruutvõrrandil $ax^2+bx+c=0$

a) lahendid puuduvad, kui $D<0$,

b) on 2 võrdset lahendit, kui $D=0$,

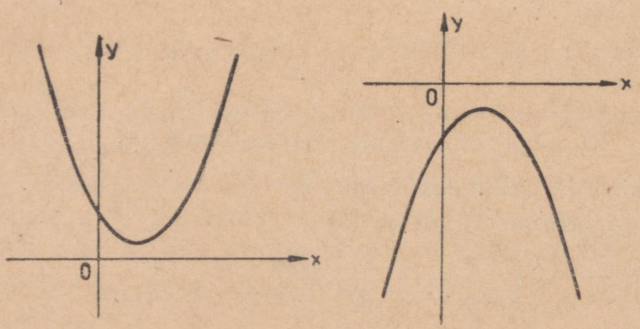
c) on 2 erinevat lahendit, kui $D>0$.

Graafikul vastavad ruutfunktsiooni nullkohtadele parabooli ja x-telje lõikepunktide abstsissid.

Selgitame nüüd eespool loetletud tingimusi ruutfunktsiooni nullkohtade olemasolu kohta graafiku abil.

a) Parabool võib koordinaatteljestikus asetseda nii, et ta ei lõika x-telge (joon. 40), s. t. et sel juhul vastaval ruutfunktsioonil *pole nullkohti*. Niisuguse juhuga on tegemist siis, kui pärast ruutkolmliikme teisendamist kujule

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$



Joon. 40.

on kas

1) $a>0$ ja $-\frac{D}{4a}>0$

või

2) $a<0$ ja $-\frac{D}{4a}<0$.

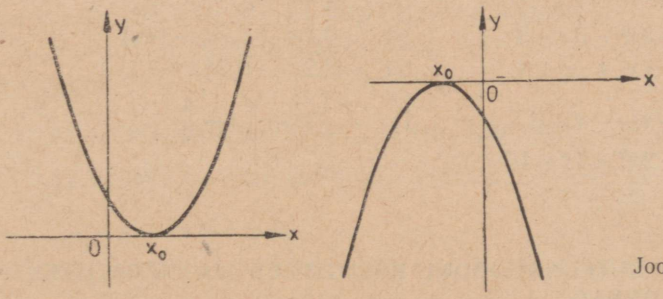
Nii esimesest kui teisest tingimusest järeldub, et

$D<0$.

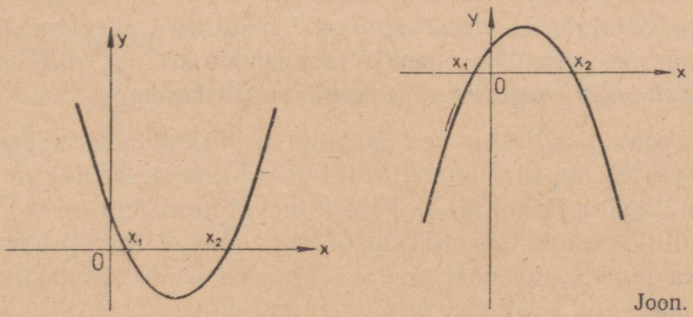
b) Parabool võib teljestikus asetseda nii, et tal on x-teljega ainult üks ühine punkt. See on siis, kui x-telg on parabooli puutujaks (joon. 41). Sel juhul asetseb haripunkt x-teljel ja järelikult haripunkti ordinaat on null, s. t. et $-\frac{D}{4a}=0$ ja siit

$D=0$.

c) Kolmandaks võimaluseks on, et paraboolil on x-teljega 2 lõikepunkti, s. t. et vastaval ruutfunktsioonil on kaks erinevat nullkohta (joon. 42). Kahe erineva nullkoha olemasolu



Joon. 41.



Joon. 42.

korral peavad a ja haripunkti ordinaat olema erinevate märkidega, s. t.

kui $a>0$, siis $-\frac{D}{4a}<0$ ja

kui $a<0$, siis $-\frac{D}{4a}>0$.

Nii esimesest kui teisest tingimusest järeldub, et

$D>0$.

ÜLESANDEID.

157. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

a) $2x^2-x-3$ c) $-2x^2-3x+6$

b) $9x^2+10x-27$ d) x^2-2x+1

158. Haripunkti leidmise kaudu tee kindlaks, mitu nullkohta on järgmistel ruutfunktsioonidel:

a) $5x^2-6x+7$ f) $\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x+1$

b) $-3x^2-3x-3$ g) $0{,}4x^2+2{,}6x-14{,}5$

c) $8x^2+x+3$ h) $-0{,}2x^2-0{,}75x+17$

d) $-x^2-x+6$ i) $-\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{7}$

e) $2x^2-7x-10$

3.1.5. RUUTFUNKTSIOONI POSITIIVSUS- JA NEGATIIVSUSPIIRKONNAD.

Kui oskame leida ruutfunktsiooni nullkohti, siis saame raskusteta välja kirjutada ka *need argumendi väärtuste piirkonnad, kus funktsioon on positiivne* (**positiivsuspiirkonnad**), *või piirkonnad, kus funktsioon on negatiivne* (**negatiivsuspiirkonnad**).

Vaatleme positiivsus- ja negatiivsuspiirkondade määramist eraldi juhtudel, kui ruutfunktsioonil nullkohti pole, kui tal on kaks võrdset nullkohta ja kui tal on kaks erinevat nullkohta.

a) Kui ruutfunktsioonil nullkohad puuduvad, siis on parabool kõigi oma punktidega ühel pool x-telge: kui $a>0$, siis on ta sellest ülalpool, kui $a<0$, siis allpool (joon. 40).

Missugustel tingimustel puuduvad ruutfunktsioonil nullkohad?

Järelikult, kui neile tingimustele lisandub, et $a>0$, siis on ruutfunktsioon positiivne x iga väärtuse korral, ja kui $a<0$, siis on ruutfunktsioon negatiivne x iga väärtuse korral.

b) Kui ruutfunktsioonil on kaks võrdset nullkohta, siis kõigi argumendi väärtuste korral, mis on nullkohast erinevad, on ruutfunktsioon positiivne, kui $a>0$, ja negatiivne, kui $a<0$.

See selgub jooniselt 41.

Tõepoolest, kui ruutfunktsiooni kahekordseks nullkohaks on $x=x_0$, siis:

1) kui $a>0$, on $ax^2+bx+c>0$ siis, kui $x>x_0$, ja ka siis, kui $x<x_0$;

2) kui $a<0$, on $ax^2+bx+c<0$ siis, kui $x>x_0$, ja ka siis, kui $x<x_0$.

Esimesel juhul ei ole ruutfunktsioonil negatiivsuspiirkonda, teisel juhul ei ole ruutfunktsioonil positiivsuspiirkonda.

c) Kui ruutfunktsioonil on kaks erinevat nullkohta, siis on tal olemas nii positiivsus- kui ka negatiivsuspiirkond.

Olgu nullkohtadeks $x=x_1$ ja $x=x_2$, kus $x_1<x_2$ (joon. 42). Jooniselt näeme, et

1) kui $a>0$, on $ax^2+bx+c>0$ siis, kui $x<x_1$ ja kui $x>x_2$, ning $ax^2+bx+c<0$ siis, kui $x_1<x<x_2$,

2) kui $a<0$, on $ax^2+bx+c>0$ siis, kui $x_1<x<x_2$, ning $ax^2+bx+c<0$ siis, kui $x<x_1$ ja kui $x>x_2$.

ÜLESANDEID.

159. Leia järgmiste funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $-2x^2-7x+3$ c) $-2x^2+4x+16$ e) x^2-5x+8

b) $3x^2-x-10$ d) $-\frac{1}{3}x^2+2x-3$ f) $-2x^2-10$

3.2. RUUTVÕRRATUSE LAHENDAMINE.

Võrratust, kus tundmatu kõrgeimaks astmeks on teine aste, nimetatakse ruutvõrratuseks.

Seega, leides ruutfunktsiooni ax^2+bx+c positiivsuspiirkonda või negatiivsuspiirkonda, lahendame vastavalt kas ruutvõrratust $ax^2+bx+c>0$ või ruutvõrratust $ax^2+bx+c<0$.

Kui antakse ülesandeks lahendada ruutvõrratus, siis vaatlemegi seda kui ülesannet ruutfunktsiooni positiivsuspiirkonna või negatiivsuspiirkonna määramiseks.

Näide 1. Lahenda võrratus

$$3x^2+5x-2<0,$$

s. t. leida funktsiooni $3x^2+5x-2$ negatiivsuspiirkond.

Leiame kõigepealt nullkohad, milleks lahendame ruutvõrrandi

$$3x^2+5x-2=0.$$

Siit

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}$$

ja nullkohad $x_1=\frac{1}{3}$ ja $x_2=-2$.

Et ruutliikme kordaja on positiivne, siis on nii antud funktsiooni negatiivsuspiirkonnaks kui ka antud võrratuse lahendiks

$$-2<x<\frac{1}{3}.$$

Kui ruutvõrratus ei ole normaalkujul, s. t. kujul

$$ax^2+bx+c \gtrless 0,$$

siis tuleb ta eelkõige sellisele kujule teisendada, kasutades lineaarse võrratuse lahendamisel tundmaõpitud teisendusi.

Näide 2. Lahenda ruutvõrratus $(3x-1)^2<2(2x+1)^2$.

Avame sulud, saame

$$9x^2-6x+1<8x^2+8x+2.$$

Nüüd kanname kõik liikmed võrratuse ühele poolele, näiteks vasakule, siis pärast koondamist saame

$$x^2-14x-1<0.$$

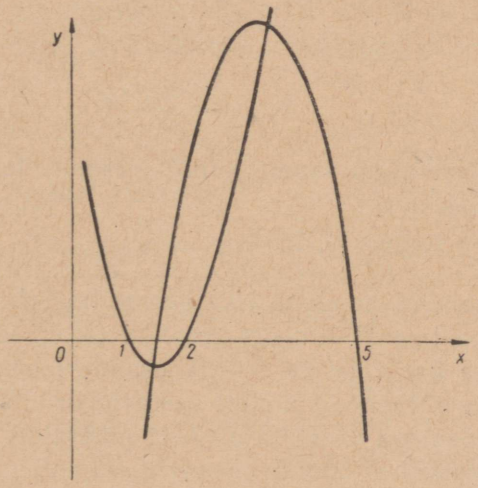
Ruutvõrratuse vasakuks pooleks oleva ruutfunktsiooni nullkohtadeks on $x_1 \approx 0$ ja $x_2 \approx 14$. Seega on võrratuse lahendiks

$$0 < x < 14.$$

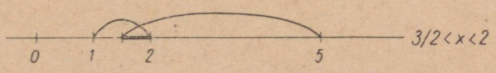
Näide 3. Lahenda graafiliselt võrratusesüsteem

$$\begin{cases} -2x^2+13x-15<0 \\ -x^2-3x+2>0. \end{cases}$$

Esimese võrratuse vasakuks pooleks on ruutkolmliige, mille nullkohtadeks on $\frac{3}{2}$ ja 5; teise võrratuse vasaku poole nullkohad on 1 ja 2. Skitseerime nüüd funktsioonide $-2x^2+13x-15$ ja x^2-3x+2 graafikud ühes ja samas teljestikus (joon. 43). Süsteemi lahend on jooniselt loetav. Skemaatiliselt on see lahend kujutatud joonisel 44.



Joon. 43.

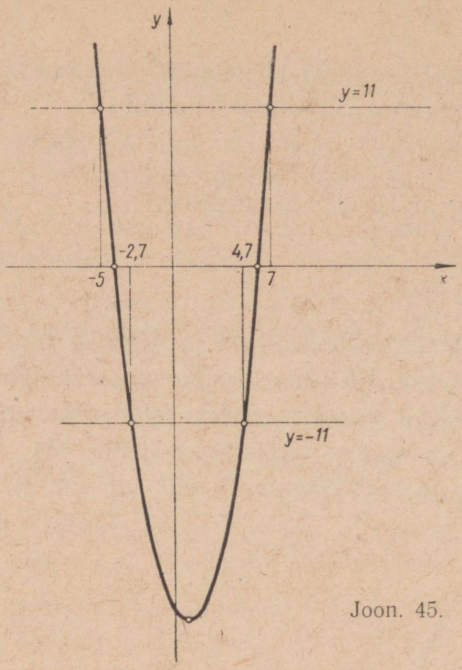


Joon. 44.

Seega antud ülesande lahendiks on kõik arvud piirkonnast

$$\frac{3}{2} < x < 2.$$

Näide 4. Lahenda võrratus $|x^2-2x-24|>11$.
See võrratus taandub kaheks iseseisvaks võrratuseks
$x^2-2x-24>11$ ja $x^2-2x-24<-11$.



Joon. 45.

Lahendades need võrratused, saame antud ülesande lahendiks kõik arvud piirkondadest:

$x<-5,\ -2{,}7<x<4{,}7,\ x>7.$

Selgitame selle ülesande lahendamist ka geomeetriliselt.

Skitseerime funktsiooni $y=x^2-2x-24$ graafiku (joon. 45) ja lõikame seda sirgjoontega $y=11$ ja $y=-11$. Ülesande lahendiks on need abstsissi väärtuste piirkonnad, millele vastavad ordinaadid ulatuvad väljapoole sirgjoontega $y=11$ ja $y=-11$ määratud riba.

ÜLESANDEID.

160. Lahenda järgmised ruutvõrratused:

1) $x^2-2x+1>0$
2) $-x^2+9x-14>0$
3) $3x^2+2x+1<0$
4) $6x^2-x-12<0$

161. Lahenda järgmised ruutvõrratused:

1) $x^2+2x-35>0$
2) $2x^2-7x+3<0$
3) $x^2+7x<18$
4) $4x^2-4x>15$
5) $3-4x^2<x$
6) $8x-5x^2<3$

7) $(3x+2)^2<3(x+2)$ 9) $(3-2x)^2>8x$

8) $(2x+5)^2>2(2x+9)$ 10) $12(3-x)<(1-3x)^2$

162. Lahenda järgmised ruutvõrratused:

1) $\frac{x^2}{5}-\frac{2x}{3}<\frac{x+5}{6}$

2) $\frac{x(x-7)}{3}-1>\frac{11x}{10}-\frac{x-4}{3}$

3) $\frac{(x+3)^2}{5}+1-\frac{(3x-1)^2}{5}<\frac{x(2x-3)}{2}$

4) $\frac{x+1}{3}+\frac{3(x-1)}{4}<(x-3)^2+1$

5) $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}>\frac{(x-14)^2}{2}+5$

163. Missuguste m väärtuste korral on järgmistel ruutfunktsioonidel ainult positiivsed väärtused?

1) x^2+2x+m 5) $(m+1)x^2-4x+3$

2) x^2-3x-m 6) $x^2-(m-2)x+2m$

3) $x^2+2x+m-10$ 7) $x^2+(m+3)x+6m-1$

4) $mx^2-10x-5$ 8) $x^2-(m-5)x-2-3m$

164. Missuguste m väärtuste korral on järgnevate võrrandite lahendid reaalsed ja erinevad, reaalsed ja võrdsed ning missuguste m väärtuste korral pole võrrand lahenduv?

1) $(5m+1)x^2+(7m+3)x+3m=0$

2) $(m-1)x^2-2(m+1)x+m=0$

3) $x^2+2(m-1)x+3m^2+5=0$

165. Lahenda järgmised võrratusesüsteemid graafiliselt:

1) $\begin{cases} 2x^2-13x+15<0 \\ 3x^2-4x-7<0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x^2+x+2>0 \\ x^2-1<0 \end{cases}$

166. Lahenda järgmised võrratused:

a) $|x^2+2x-35|<3$ c) $|-x^2-6x-8|<2$

b) $|x^2-4x-12|>5$ d) $|-x^2+8x+9|>6$

KORDAMISÜLESANDEID.

167. Leia järgmiste funktsioonide graafikute haripunktid, kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, nullkohad ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $-x^2+3x-4$ e) $2x^2-6x$
b) $3x^2+4x-7$ f) $-4x^2+3x$
c) $0{,}5x^2+1{,}5x+5$ g) x^2+6
d) $3x^2+2x+2$ h) $-3x^2+9$

168. Leia järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad:

a) $3x^2+3x-3$ d) $-2x^2-6x+3$
b) $2x^2-5$ e) $-3x^2+9x$
c) $-x^2+2x-1$ f) $-x^2-4$

169. Leia järgmiste funktsioonide ühine positiivsuspiirkond:

a) $y=2x-1$, $y=x^2-2x-3$ b) $y=-x^2+x+2$, $y=-x-1$

170. Leia järgmiste funktsioonide ühine negatiivsuspiirkond:

a) $y=x-2$, $y=2x^2-4x-16$ b) $y=-3x^2+2x+5$, $y=-x+3$

171. Lahenda järgmised võrratused:

a) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}>0$ d) $2-\frac{x-3}{x-2}<\frac{x-2}{x-1}$

b) $\frac{x-1}{x^2+4x+2}<0$ e) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}>0$

c) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}>0$ f) $3-\frac{2x-17}{x-5}<\frac{x-5}{x+2}$

172. Missuguse tingimuse korral sirge $y=ax+b$ ja ringjoon $x^2+y^2=r^2$

a) lõikuvad kahes punktis,
b) puutuvad,
c) ei lõiku?

173. a) On teada, et ruutfunktsioonil on suurim väärtus 25, kui $x=0{,}5$, ja väärtus 24, kui $x=0$. Leia see ruutfunktsioon.

b) Leia ruutfunktsiooni $y=ax^2+bx+c$ kordajad, kui tema ekstreemumpunktiks on $H(6;\ -12)$ ja nullkohaks $N(8;\ 0)$.
c) Leia ruutfunktsioon, kui on teada, et tema ekstreemumpunktiks on $H(-2;\ 7)$ ja tema graafik läbib punkti $(0;\ 15)$.

174. Lahenda järgmised võrrandid:

a) $x^2+ab=(a+b)x$

b) $x^2-ax+ab=b^2$

c) $x^2-3nx+2n^2=0$

d) $x^2-2nx+n^2=0$

e) $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$

f) $a+x=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}$

g) $\frac{2x}{x+b}+\frac{x}{x-b}=\frac{b^2}{4x^2-4b^2}$

h) $\frac{5a^2}{4x^2-a^2}=\frac{2x}{2x-a}-\frac{x}{2x+a}$

i) $\frac{2x}{x-b}+\frac{12x^2}{b^2-x^2}=\frac{b-x}{x+b}$

j) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{x}=\frac{1}{m+n+x}$

175. Lahenda järgmised võrratused:

a) $|17-4x|<1$

b) $|-15+2x|>3$

c) $\left|\frac{-2x+5}{3+x}\right|<7$

d) $|x^2-5x+6|<4$

e) $\left|\frac{3x+2}{3-2x}\right|-1<0$

f) $\left|\frac{-2x+3}{4x+3}\right|+2>0$

g) $|-x^2-3x+15|>10$

176. Leida kahekohaline arv, mille üheliste number on kümneliste numbrist 2 võrra suurem ja mille korrutamisel tema numbrite summaga saame 144.

177. Sõiduki tagaratta ümbermõõt on esiratta ümbermõõdust 2 korda suurem. Kui tagaratta ümbermõõtu vähendada 2 dm võrra ja esiratta ümbermõõtu suurendada 4 dm võrra, siis 120 m pikkusel teel teeks tagaratas 20 pööret vähem kui esiratas. Leia mõlema ratta ümbermõõdud.

178. Kaks isikut hakkasid kohtadest A ja B minema teineteisele vastu. Kohtamisel selgus, et üks oli 6 kilomeetri võrra rohkem käinud kui teine. Liikumist jätkates esimene jõuab kohta B 4 tundi, teine kohta A 9 tundi pärast kohtamist. Kui suur on kohtade A ja B vaheline kaugus?

179. Rong hilines jaamast väljumisega 16 minutit ja tegi hilinemise tasa 80-kilomeetrisel vahemaal, suurendades ettenähtud kiirust 10 km võrra tunnis. Leia rongi ettenähtud kiirus.

180. Kaks töölist koos töötades võivad töö lõpetada 12 tunniga; üks tööline üksi töötades lõpetaks selle töö 10 tunni võrra lühema ajaga kui teine üksi töötades. Mitme tunniga lõpetaks selle töö kumbki tööline üksi töötades?

181. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on ühest kaatetist 9 cm võrra pikem ja teisest kaatetist 18 cm võrra pikem. Arvuta selle täisnurkse kolmnurga küljed.

182. Täisnurga tipust alustavad üheaegselt täisnurga haarasid mööda liikumist kaks keha: üks liigub kiirusega 24 m minutis, teine kiirusega 10 m minutis. Mitme minuti pärast on nende kehade vaheline kaugus 806 meetrit?

4. TEHTED ASTMETE JA JUURTEGA. ASTMEFUNKTSIOONID.

4.1. TEHTED ASTMETEGA NATURAALARVULISTE ASTENDAJATE KORRAL.

Nagu teada,

astendamine naturaalarvulise astendajaga on võrdsetest teguritest koosneva korrutise arvutamine.

Astme definitsioonist järeldub, et kui n on naturaalarv, siis

$1^n = 1$ ja $0^n = 0$.

Negatiivsete arvude korrutamise juhisest järeldame, et

negatiivse arvu paarisarvulise astendajaga aste on positiivne ja paarituarvulise astendajaga aste on negatiivne.

Näiteid.

$(-4)^2 = 16$;
$(-4)^3 = -64$;
$(-a)^{2n} = a^{2n}$, sest $2n$ on paarisarv;
$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$, sest $2n-1$ on paaritu arv.

Astme definitsioonist on näha, et astendajaks võib olla iga positiivne täisarv, mis on suurem kui 1. Erijuhul, kui astendaja $n = 1$, mõistame astet a^n arvuna a.

$a^1 = a$.

ÜLESANDEID.

183. Arvuta astmed:

1) 2^6 3^5 5^5 2) $(-2)^3$ $(-2)^6$ $(-3)^5$ 3) $0{,}3^2$ $0{,}5^3$ $0{,}01^4$ 4) $(-0{,}9)^4$ $(-0{,}02)^5$ $(-0{,}1)^6$

184. Arvuta astmed:

1) 56^2 2) $(-12)^2$ 3) $(-a)^9$ 4) $(-b)^3$
$0{,}03^4$ $(-17)^3$ $(-b)^5$ $(-a)^{10}$
$1{,}7^4$ $(-0{,}2)^6$ $(-n)^8$ $(-m)^{11}$

185. Arvuta astmed:

1) 10^3 2) 20^5 3) $0{,}1^6$ 4) $(-0{,}1)^9$
10^9 30^4 $0{,}1^3$ $(-0{,}1)^5$
10^6 40^3 $0{,}1^5$ $(-10)^7$

5) $(-6)^2+(-4)^3+(-2)^5$
$7^2+(-5)^3+(-1)^{10}$
$(-1)^{10}\cdot(-2)^5\cdot(-3)^4$

186. Arenda astmed:

1) $(-c)^{2n+1}$ 2) $(+2)^3\cdot(-3)^2$
$(-x)^{2n}$ $(-3)^3\cdot(+2)^2$
$(-x)^{2m-1}$ $(-4)^4\cdot(-2)^2$

Tehted astmetega toimuvad järgmiste eeskirjade järgi.

1. Korrutise astendamisel astendatakse iga tema tegur ja saadud astmed korrutatakse.

Sümbolites:

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

Kui vahetame võrduse $(ab)^n=a^nb^n$ pooled, siis saame valemi võrdsete astendajatega astmete korrutamiseks:

$$a^nb^n=(ab)^n.$$

Näiteid.

$5^4\cdot2^4=(5\cdot2)^4=10^4=10\,000;$
$2{,}5^3\cdot8^3=(2{,}5\cdot8)^3=20^3=8000.$

2. Murru astendamisel astendatakse tema lugeja ning nimetaja ja esimene tulemus jagatakse teisega.

Sümbolites:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Näiteid.

$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$;

$\left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}$;

$\left(\frac{2a}{5b}\right)^2 = \frac{4a^2}{25b^2}$.

Kui vahetame võrduse $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ pooled, siis saame juhise võrdsete astendajatega astmete jagamiseks:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Näiteid.

$24^2 : 12^2 = (24 : 12)^2 = 4$;

$\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27$;

$\frac{(6ab)^5}{(3b)^5} = \left(\frac{6ab}{3b}\right)^5 = (2a)^5 = 32a^5$.

3. Võrdsete alustega astmete korrutamisel astendajad liidetakse ja tulemusega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Näiteid.

$8^2 \cdot 8^3 = 8^{2+3} = 8^5$;

$a^3 \cdot a^7 = a^{3+7} = a^{10}$.

Kui vahetame võrduse $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ pooled, siis saame valemi astme teisendamiseks, kui astendaja on summa:

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Näiteid.

$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x$;

$0{,}3 \cdot 10^7 = 0{,}3 \cdot 10 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^6$.

4. Võrdsete alustega astmete jagamisel astendaja jagajas lahutatakse astendajast jagatavas, kui viimane astendaja on eelmisest suurem, ja tulemusega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites:

$a^m : a^n = a^{m-n}$, kui $m > n$, $a \neq 0$.

Näiteid.

$\frac{3^8}{3^5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$;

$a^7 : a^5 = a^{7-5} = a^2$.

5. Astme astendamisel astendajad korrutatakse ja saadud korrutisega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites väljendub viimane teoreem nii:

$(a^m)^n = a^{mn}$.

Näiteid.

$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$;
$(2a^2b^3)^4 = 2^4a^8b^{12} = 16a^8b^{12}$;
$(a^3 + a^4)^2 = a^{3 \cdot 2} + 2a^{3+4} + a^{4 \cdot 2} = a^6 + 2a^7 + a^8$.

Võrdustest $(a^m)^n = a^{mn}$ ja $(a^n)^m = a^{mn}$ järeldub, et

$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

Näiteid.

$a^6 - x^2 = (a^3)^2 - x^2 = (a^3 + x)(a^3 - x)$;
$a^6 - x^3 = (a^2)^3 - x^3 = (a^2 - x)(a^4 + a^2x + x^2)$.

ÜLESANDEID.

187. Arenda astmed:

1) $(4 \cdot 1{,}5)^2$ $(2 \cdot 5)^5$ $(4{,}5 \cdot 2)^3$

2) $(5mn)^3$ $(-4ab)^2$ $(-4uv)^4$

3) $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(-3\frac{2}{3}\right)^3$

4) $\left(-\frac{er}{4d}\right)^5$ $\left(-\frac{3h}{5mn}\right)^3$ $\left(-\frac{0{,}7anx}{0{,}01bz}\right)^2$

188. Leia lihtsaimal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

1) $2^3 \cdot 5^3$ 2) $3^2 \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^2$

$45^2 \cdot 2^2$ $13^7 \cdot \left(\frac{2}{13}\right)^7$

$2{,}5^5 \cdot 4^5$ $\left(5\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(3\frac{3}{4}\right)^2$

189. Arvuta peast järgmiste avaldiste väärtused:

1) $16^3 : 4^3$ 2) $\left(1\frac{7}{8}\right)^3 : \left(6\frac{1}{4}\right)^3$ 3) $\frac{5^3 \cdot 12^3}{6^3}$

$9^5 : 18^5$ $2{,}25^2 : 0{,}45^2$ $\frac{15^2 \cdot 4^2}{8^2 \cdot 5^2}$

$160^3 : 640^3$ $0{,}75^3 : 2{,}4^3$ $\left(1\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{2^5}{5^5}$

190. Kirjuta järgmised korrutised astmetena:

1) $c \cdot c^2 \cdot c^3$ 2) $x^{m+1}x^{m+2}$

$k^2 \cdot k^3 \cdot k^3$ $y^{n+3}y^{2n-1}$

$n \cdot n^2 \cdot n^3 \cdot n^4 \cdot n^5$ $z^{p+5}z^{p-5}$

191. Kirjuta järgmised korrutised võimalikult lühidalt:

1) $3u \cdot 5u^2$ 2) $6x \cdot 0{,}4x^2 \cdot 0{,}1x^3$

$(-6r^2) \cdot 7r^3$ $0{,}1D \cdot (-0{,}2D^2) \cdot 0{,}3D^3$

$aN^4 \cdot bN^3$ $\left(-\frac{3}{5}w^2\right) \cdot 2\frac{1}{2}w^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}w^2\right)$

192. Kirjuta järgmised jagatised astmetena:

1) $n^3 : n^5$ 2) $p^n : p^{n-1}$

$q^6 : q$ $q^{n+3} : q^n$

$r^4 : r^4$ $d^{m+1} : d^{n+1}$

193. Kirjuta järgmised jagatised võimalikult lühidalt:

1) $\frac{a^5b^3}{a^2b}$ 2) $\frac{a^{2n}b^{5m}}{a^n6^{3m}}$ 3) $3{,}6x^6y^5z^8 : 5{,}6x^2y^3z^4$

$\frac{9x^4y^3z^2}{54x^2y^2z}$ $\frac{x^{m+8}y^{n-5}}{x^{m-2}y^{n-7}}$ $7n^{2q} : 0{,}14n^{q-3}$

$\frac{8a^4}{5b^6} : \frac{16a^2}{25b^8}$ $\frac{a^{2n+2}}{b^{m-4}} : \frac{a^{n+3}}{b^{3n-1}}$ $1{,}72m^{p+6} : 4{,}3^{p+2}$

194. Arenda astmed:

1) $(4a)^3$ 2) $(-2h)^4$

$(3mn)^3$ $\left(+\frac{5aQ}{6cR}\right)^3$

$\left(-\frac{4a}{7H}\right)^2$ $\left(-\frac{0{,}2cU}{0{,}5d}\right)^4$

195. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult väheste sümbolitega:

1) $(-N^3)\cdot(2N)^5$ 2) $(-2f)^3 : (5f)^2$

$(4u^2)^2\cdot(-u^3)^3$ $(96ax)^4 : (16x)^4$

$\left(-\frac{2}{3}q\right)^3\cdot(6q)^2$ $(36nD)^5 : (-81D)^5$

196. Arenda astmed:

1) $(m^2)^3$ 2) $\left(\frac{2a^3}{3x^2}\right)^2$

$(u^{2n})^3$ $\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{m}{q^2}\right)^3$

$(Q^2)^{n+1}$ $\left(\frac{au^2}{bv^2}\right)^4$

197. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\left(\frac{2x}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{6x}{5a}\right)^2$ 2) $\left(-\frac{1}{N}\right)^3 : \left(\frac{N^3}{2}\right)$

$\left(-\frac{4m}{5n}\right)^3\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^4$ $\frac{3}{4}\left(\frac{a}{x}\right)^2 : \frac{3}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^2$

$\left(\frac{7u}{4v}\right)^4\cdot\left(\frac{2Nv}{7u}\right)^3$ $\left(\frac{4c}{5D^2}\right)^2 : \left(\frac{0{,}2}{D^3}\right)^2$

198. Lihtsusta avaldised:

1) $(ax)^m : (bx)^m$ 2) $(8Nu)^{2a-1} : (-2u)^{2a-1}$

$(3cu)^n : (cdu)^n$ $\left(\frac{2p}{3q}\right)^{2n+1} : \left(-\frac{3q}{2p}\right)^{2n+1}$

$(-pqr)^{2t} : (-pq^{2t})$ $\left(\frac{a^2}{5Q}\right)^{2m} : \left(\frac{5a}{Q}\right)^{m+2}$

199. Lihtsusta avaldised:

1) $\left(\frac{2}{5}\right) L^n \cdot \frac{3}{2} L \cdot 6L^3$

$u^a \cdot u^{a+b} \cdot u^{a+b+c}$

$D^n \cdot D^{n-m} \cdot D^{m-p}$

2) $\frac{1}{4} x^p \cdot \frac{4}{5} x^{p+2} \cdot \frac{2}{5} x^{2p+1}$

$7H^m \cdot 0{,}2H^{m+1} \cdot 0{,}5H^{m+2}$

$N^{x+2} \cdot N^{x-3} \cdot N^{2-2x}$

200. Arenda korrutised:

1) $(a^2+a^4) \cdot (a+a^3)$

2) $(a^6-a^5) \cdot (a^5+a^4)$

3) $(u^3+v^2) \cdot (u^3-v^2)$

4) $(2p^4+5q^3) \cdot (2p^4-5q^3)$

5) $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$

6) $\left(2s^3+\frac{1}{t^3}\right) \cdot \left(s^3-\frac{1}{t^3}\right)$

201. Arenda binoomide astmed:

1) $(a^2+b^2)^2$

2) $\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{a^2}{b^2}\right)^2$

3) $(a^4-a^2)^2$

4) $(3x^3-5x^5)^2$

5) $(m^2n^3+m^3n^2)^2$

6) $\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)^2$

7) $(a^2+b^2)^3$

8) $(a^3-b^3)^3$

9) $(m^3+m^2)^3$

4.2. KUUPFUNKTSIOON.

4.2.1. KUUPFUNKTSIOONI GRAAFIK.

Kui astme alust vaadelda muutuva suurusena, siis esitab aste nn. **astmefunktsiooni**. Nii näiteks on x^2, x^3 ja x^4 vastavalt teise, kolmanda ja neljanda astme funktsioonid. Tutvume lähemalt kuupfunktsiooniga $y=x^3$.

Me oleme tuttavad keha ruumala valemiga

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Igale r väärtusele vastab kindel ruumala suurus.

Seega on kera ruumala raadiuse funktsioon. Siin on tegemist funktsiooniga $y=ax^3$, kus $a=\frac{4}{3}\pi$.

Võtame lähema vaatluse alla juhu, kus $a=1$. Koostame funktsiooni $y=x^3$ väärtuste tabeli:

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
x^3	-8	$-3{,}4$	-1	$-0{,}1$	0	$0{,}1$	1	$3{,}4$	8

Esitame vastavad punktid koordinaatteljestikus ja ühendame need sujuva kõveraga (joon. 46).

Saadud joont nimetatakse **kuupparabooliks.**

Uurime funktsiooni $y=x^3$, tuginedes tema graafikule.

Kõigepealt paneme tähele, et funktsiooni $y=x^3$ graafikuks on tõusev joon. Kui argumendi mingi väärtus saab positiivse muudu, siis saab ka funktsioon positiivse muudu. Argumendi kasvades funktsioon kasvab. Kontrolli seda vähemalt kolme argumendi väärtuse juures!

Seega,

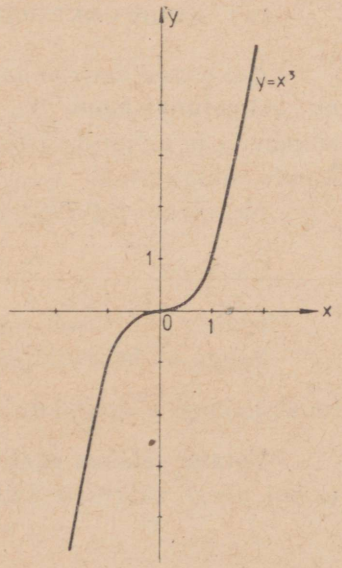
funktsioon $y=x^3$ *on kasvav.*

Nii graafikult kui ka funktsiooni valemist on kergesti näha, et

funktsiooni $y=x^3$ *nullkohaks on* $x=0$.

Nüüd võime kohe kirjutada, et

funktsiooni $y=x^3$ *positiivsuspiirkonnaks on* $x>0$ *ja negatiivsuspiirkonnaks on* $x<0$.



Joon. 46.

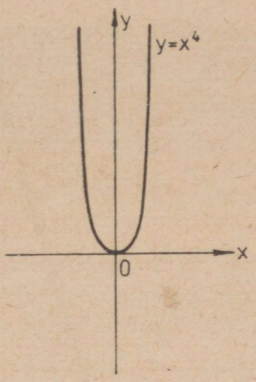
ÜLESANDEID JA KÜSIMUSI.

202. Uurida funktsioone $y=x^4$ ja $y=x^5$ nende graafikute abil (joon. 47 ja 48).

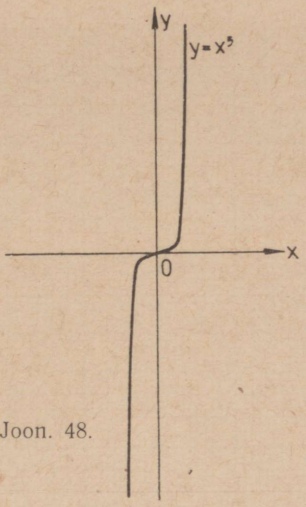
203. Mis on funktsiooni positiivsus- (negatiivsus-) piirkond?

204. Leia joonise 49 abil järgmiste arvude kuubid:

1) 1,5; 1,6; 2,2; 3,6; 4,8;
2) 2,4; 2,8; 3,2; 4,4; 4,9.



Joon. 47.



Joon. 48.

205. Kasutades joonist 49 ja kera ruumala ligikaudset valemit $V \approx 4{,}2r^3$,

arvuta kera ruumala, kui raadius on
1,7 cm; 2,3 cm; 3,5 dm; 3,8 m; 4,7 mm.

206. Kasutades joonist 49 ja kera ruumala ligikaudset valemit $V \approx 0{,}52d^3$,

arvuta kera ruumala, kui diameeter on

1,9 cm; 3,1 cm; 4,6 dm; 4,5 dm.

207. Leia joonise 49 abil arv x, kui x^3 on

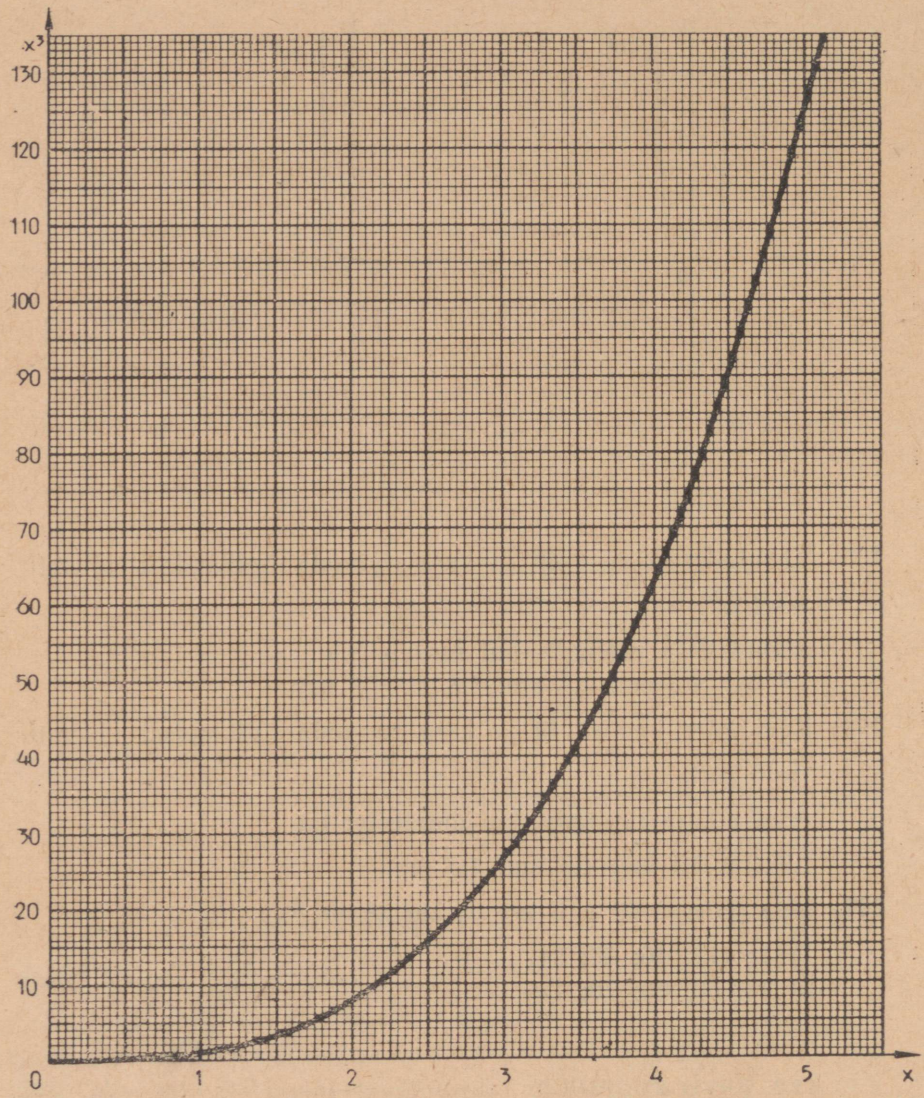
1) 18; 12; 40; 30; 94.
2) 10; 50; 60; 70; 130.

4.2.2. ARVU KUUPJUUR.

Arv, mille kuup on 27, võrdub 3-ga ja arv, mille kuup on 125, võrdub 5-ga.

Arvu 3 *nimetatakse arvu* 27 *kuupjuureks ja märgitakse sümboliga* $\sqrt[3]{27}$ (loe «kuupjuur kahekümne seitsmest»).

Seega $\sqrt[3]{27}=3$ ja $\sqrt[3]{8}=2$.



Joon. 49.

Et $(-9)^3=-729$, siis $\sqrt[3]{-729}=-9$. *Negatiivse arvu kuupjuur on negatiivne. Kuupjuur nullist on null, sest* $0^3=0$.

Antud arvu kuupjuureks ehk kolmandaks juureks nimetatakse niisugust arvu, mille kuup võrdub antud arvuga.

ÜLESANDEID.

208. Leia graafiku abil (joon. 49) kuupjuurte ligikaudsed väärtused.

1) $\sqrt[3]{21}$ 2) $\sqrt[3]{8}$ 3) $\sqrt[3]{-23}$

$\sqrt[3]{15}$ $\sqrt[3]{11}$ $\sqrt[3]{-29}$

$\sqrt[3]{92}$ $\sqrt[3]{28}$ $\sqrt[3]{-36}$

$\sqrt[3]{120}$ $\sqrt[3]{75}$ $\sqrt[3]{-52}$

Näide. $\sqrt[3]{-46}=-\sqrt[3]{46}\approx-3{,}6$.

209. Arvuta peast järgmised kuupjuured:

1) $\sqrt[3]{1000}$; 2) $\sqrt[3]{64}$; 3) $\sqrt[3]{216}$.

4.2.3. KUUPIDE TABELI KASUTAMISEST.

Koolis kasutatavais V. Bradise tabeleis on antud arvude 1 kuni 10 kuubid.

Tekib küsimus, kuidas leida ühest väiksemate ja kümnest suuremate arvude kuupe.

Näiteid.

1) Leida $0{,}235^3$.

Tabelis leidub $2{,}35^3$. Teisendame arvu 0,235 korrutiseks nii, et saaksime kasutada kuupide tabelit.

$0{,}235^3=(0{,}1\cdot 2{,}35)^3=0{,}1^3\cdot 2{,}35^3=0{,}001\cdot 12{,}98=0{,}01298$.

2) Leida $(24{,}7)^3$.

$(24{,}7)^3=(10\cdot 2{,}47)^3=10^3\cdot 2{,}47^3=1000\cdot 15{,}07=15070$.

Kuupide tabelit kasutatakse ka kuupjuurte leidmiseks.

Kuupjuure leidmiseks arvust, mis kuulub vahemikku 1 kuni 1000, otsime kuupide tabeli sees leiduvate arvude hulgast antud arvule lähima. Otsitava arvu saame vastava rea ja vastava veeru numbritest. Kui soovitakse saada täpsemat tulemust, siis arvestatakse ka parandusveerge.

Näiteid.

1. $\sqrt[3]{13}=?$

$\sqrt[3]{12{,}98}=2{,}35$

$2\ldots\ 01$

$\sqrt[3]{13}\ =2{,}351$

2. $\sqrt[3]{12{,}78}=?$

$\sqrt[3]{12{,}81}=2{,}34$

$3\ldots 02$

$\sqrt[3]{12{,}78}=2{,}338$

ÜLESANDEID.

210. Leia tabelist arvude kuubid.

1)	2)	3)
9,2	7,8	0,47
56	47	0,56
3,75	8,92	0,375
2,44	7,66	0,244

211. Leia tabelist arvude kuupjuured.

1)	2)
2,58	3,76
61,34	59,26
51,70	246
728	896

4.3. KUUBI JA KUUPJUURE LEIDMINE LÜKATI ABIL.

4.3.1. ARVUTUSLÜKATI SKAALA K.

Lükati korpuse esiküljel on peale skaalade *A*, *B*, *C* ja *D* ka skaala *K*. See asub esikülje ülemisel äärel (vt. joon. 50).

Skaala *K* on valmistatud kolm korda väiksemas mõõdus kui skaalad *C* ja *D*.

Skaala *K* koosneb kolmest konstruktsioonilt ühesugusest osast: esimesel neist on kujutatud arvud 1-st 10-ni, teisel 10-st 100-ni ja kolmandal 100-st 1000-ni. Mõnel lükatil on nullid nimetatud arvude lõpus trükkimata jäetud.

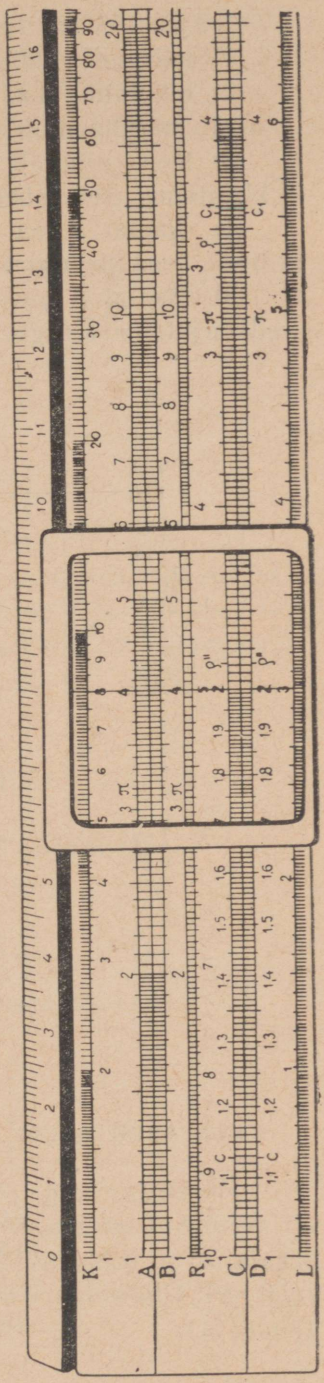
Mõõdu vähendamise tõttu on skaalal *K* jaotuskriipse vähem kui skaaladel *C* ja *D*, samuti ka vähem kui skaaladel *A* ja *B*.

Konstruktsioonilt on skaala *K* kõik kolmandikud ühesugused ja sarnased põhiskaalaga *D*.

Skaalal *K* tähendab iga väikseim kriipsuvahe

vahemikus	1	kuni	2	arvu	0,02,
„	2	„	5	„	0,05,
„	5	„	10	„	0,1,
„	10	„	20	„	0,2,
„	20	„	50	„	0,5,
„	50	„	100	„	1,
„	100	„	200	„	2,
„	200	„	500	„	5,
„	500	„	1000	„	10.

212. Lükatil märgitud arvude lugemise harjutamiseks joonesta järgnev tabel oma vihikusse ja täida kõik veerud lükatilt loetud tüvenumbritega.



Joon. 50.

Näpunäide. Tabeli täitmisel toimime nii:

1) märgime niidiga põhiskaalal D arvu 1,43;

2) nihutame skaalal C asuva arvu, mille tüvenumbrid on 1—3—1, märkija niidi alla;

3) loeme niidi alt skaalal B asuva arvu tüvenumbrid 1—7—1 ja kirjutame need tabelisse veergu B;

4) skaalal A on siis niidiga märgitud arvu tüvenumbrid 2—0—5, need kirjutame veergu A;
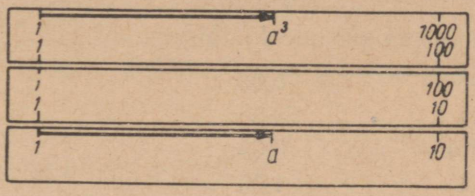
5) skaalal K on niidi all oleva arvu tüvenumbrid 2—9—2, need kirjutame veergu K.

D	C	B	A	K
1,43	1—3—1	1—7—1	2—0—5	2—9—2
1,56	1—4—2	2—0—2	2—4—3	3—8—0
1,70	1—5—5			
1,77	1—6—2			
1,89	1—7—2			
20,1	1—8—4			
21,9	2—0—0			
24,8	1—1—5			
26,1	2—3—8			
30,6	2—7—9			
319	2—9—2			
359	3—2—8			
442	4—0—3			
474	4—3—3			
548	5—0—0			
6,70	6—1—3			
7,68	7—0—2			
8,22	7—5—0			
8,45	7—7—1			
8,95	8—1—6			
9,15	8—3—5			
9,45	6—6—5			
9,50	1—6—7			
9,65	2—1—8			
9,75	4—3—5			

4.3.2. ARVU KUUBI LEIDMINE LÜKATIL.

Märkides niidiga põhiskaalal D näiteks arvu 2, näeme, et niidi all skaalal K on arv $8=2^3$ (joon. 50). Arv 2 skaalal D ja arv 2^3 skaalal K on kohakuti. Samuti on neil skaaladel kohakuti arvud 3 ja $3^3=27$. Üldiselt, arv a skaalal D ja arv a^3 skaalal K on kohakuti (joon. 51).

Võib öelda, et skaalad D ja K koos kujutavad kuupide tabelit. Niisiis, et leida lükatil antud arvu kuupi, märgime skaalal D selle arvu ja loeme niidi alt skaalal K antud arvu kuubi.



Joon. 51.

Näiteid.

$1{,}86^3 = 6{,}43$;
$2{,}54^3 = 16{,}4$;
$6{,}35^3 = 256$.

Kui antud arv on 1-st väiksem või 10-st suurem, siis nihutame koma selles arvus nii, et saame arvu, mis on 1 ja 10 vahel, ning korrutame või jagame siis vastavalt 10-ga või kümne astmega.

Näiteid.

1) $4250^3 = (4{,}25 \cdot 1000)^3 = 4{,}25^3 \cdot 10^9 = 77 \cdot 10^9$;
2) $35^3 = (3{,}5 \cdot 10)^3 = 3{,}5^3 \cdot 1000 = 43 \cdot 1000 = 43\,000$;
3) $0{,}2^3 = (2 : 10)^3 = 8 : 1000 = 0{,}008$;
4) $0{,}042^3 = (4{,}2 : 100)^3 = 74 : 1\,000\,000 = 0{,}000074$.

ÜLESANDEID.

Kontrolli lükati abil järgmiste võrduste õigsust:

213. 1) $1{,}1^3 = 1{,}33$; $1{,}5^3 = 3{,}38$; $1{,}68^3 = 4{,}74$; $2{,}2^3 = 10{,}6$.
2) $3{,}5^3 = 42{,}8$; $6{,}8^3 = 314$; $8{,}5^3 = 614$; $9{,}35^3 = 817$.

214. 1) $0{,}9^3 = 0{,}729$; $0{,}6^3 = 0{,}216$; $0{,}8^3 = 0{,}512$; $0{,}5^3 = 1{,}125$.
2) $0{,}75^3 = 0{,}422$; $0{,}7^3 = 0{,}343$; $0{,}3^3 = 0{,}027$; $0{,}4^3 = 0{,}064$.

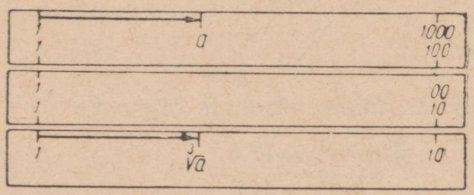
215. 1) $23^3 = 12\,200$ 2) $14{,}5^3 = 3050$
$22{,}3^3 = 11\,100$ $16{,}1^3 = 4200$
$18^3 = 5830$ $17{,}4^3 = 5270$
$34^3 = 39\,300$ $26{,}7 = 19\,000$

216. Leia lükati abil järgmiste arvude kuubid:

1) 4,05	2) 0,08	3) 6,05
2,14	1,24	12,5
8,05	0,061	5,65
0,252	3,44	4,55
4) 1,81	5) 0,54	6) 9,31
4,52	5,2	25,6
2,25	6,78	14,3
0,912	5,61	5,31

4.3.3. KUUPJUURE LEIDMINE.

Märkides skaalal K näiteks arvu 8, on niidi all skaalal D arv $2 = \sqrt[3]{8}$. Samuti on skaala K arv 27 kohakuti skaala D arvuga $3 = \sqrt[3]{27}$. Kohakuti on ka arv 343 skaalal K ja $7 = \sqrt[3]{343}$ skaalal D. Üldiselt, kui niidiga on märgitud skaalal K mingi arv a, siis skaalal D on märgitud a-ga kohakuti seisev arv $\sqrt[3]{a}$. Seega asendavad skaalad K ja D kuupjuurte tabelit. (Joon. 52.)



Joon. 52.

Kui antud arv on 1 ja 10 vahelt, siis kuupjuure leidmisel sellest arvust märgime ta skaala K vasakpoolsel osal ning niidi alt skaalalt D loeme kuupjuure sellest arvust.

Näide. $\sqrt[3]{4{,}5} = 1{,}65$.

Kui antud arv on 10 ja 100 vahel, siis kuupjuure leidmiseks

märgime ta skaala K keskmisel osal ja niidi alt skaalalt D leiame otsitava kuupjuure.

Näide. $\sqrt[3]{26{,}5}=2{,}98$.

Juhul kui antud arv on vahemikust 100 kuni 1000, siis märgime ta skaala K parempoolsel osal ja niidi alt skaalalt D leiame otsitava kuupjuure.

Näide. $\sqrt[3]{430}=7{,}55$.

ÜLESANDEID.

217. Kontrolli lükati abil järgmiste võrduste õigsust:

1) $\sqrt[3]{3}=1{,}44$
$\sqrt[3]{6{,}2}=1{,}84$
$\sqrt[3]{7{,}4}=1{,}95$
$\sqrt[3]{9{,}3}=2{,}1$

2) $\sqrt[3]{60}=3{,}92$
$\sqrt[3]{52{,}5}=3{,}74$
$\sqrt[3]{55{,}5}=3{,}82$
$\sqrt[3]{76}=4{,}24$

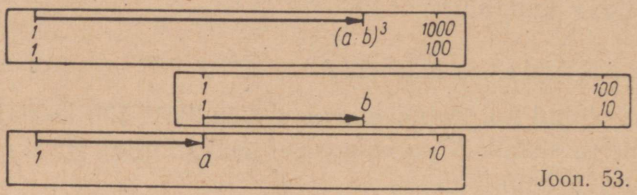
3) $\sqrt[3]{600}=8{,}43$
$\sqrt[3]{350}=7{,}05$
$\sqrt[3]{420}=7{,}5$
$\sqrt[3]{740}=9{,}05$

4) $\sqrt[3]{690}=8{,}84$
$\sqrt[3]{520}=8{,}04$
$\sqrt[3]{360}=7{,}11$
$\sqrt[3]{720}=8{,}96$

218. Leia lükati abil kuupjuured järgmistest arvudest:

1)	2)	3)
8,2	385	1,72
16	265	5,2
29,5	640	75
345	780	59

4.3.4. KORRUTISE KUUBI ARVUTAMINE.



Joon. 53.

Näide. Arvutada $(1{,}25 \cdot 2{,}15)^3$.

Leiame skaalade *C* ja *D* abil korrutise $1{,}25 \cdot 2{,}15$ ning märgime ta skaalal *D*. Sellega oleme ühtlasi märkinud skaalal *K* otsitava kuubi tüvenumbrid 1—9—2. Niisiis

$$(1{,}25 \cdot 2{,}15)^3 = 19{,}2.$$

Samal viisil arvutatakse ka kuupide korrutis, sest $a^3 \cdot b^3 = (a \cdot b)^3$.

ÜLESANDEID.

219. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust:

1) $(2{,}6 \cdot 0{,}423)^3 = 1{,}33$
$(1{,}85 \cdot 1{,}89)^3 = 42{,}8$
$(1{,}24 \cdot 1{,}21)^3 = 3{,}38$
$(2{,}38 \cdot 2{,}86)^3 = 314$

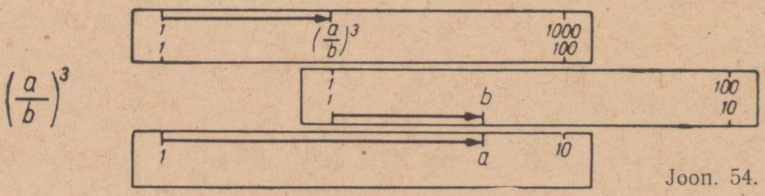
2) $(0{,}232 \cdot 7{,}25)^3 = 4{,}74$
$(1{,}28 \cdot 6{,}65)^3 = 614$
$(0{,}37 \cdot 5{,}95)^3 = 10{,}6$
$(2{,}53 \cdot 4{,}75)^3 = 1730$

220. Arvuta.

1) $(1{,}3 \cdot 0{,}85)^3$
$(3{,}7 \cdot 0{,}95)^3$
$(2{,}25 \cdot 1{,}22)^3$
$(2{,}45 \cdot 2{,}85)^3$

2) $0{,}464^3 \cdot 3{,}64^3$
$2{,}56^3 \cdot 3{,}35^3$
$0{,}75^3 \cdot 2{,}95^3$
$5{,}1^3 \cdot 3{,}75^3$

4.3.5. JAGATISE KUUBI ARVUTAMINE.



Joon. 54.

Näide. Arvutada $\left(\frac{7{,}45}{2{,}86}\right)^3$.

Selleks et leida jagatise kuupi, märgime jagatava 7,45 skaalal *D*, siis paneme skaala *C* arvu 2,86 niidi alla. Jagatis on nüüd skaalal *D* skaala *C* alguskriipsu 1 kohal; märgime jagatise niidiga, siis on ühtlasi skaalal *K* märgitud jagatise kuup, mille tüvenumbrid on 1—7—6.

$\left(\frac{7{,}45}{2{,}86}\right)^3 = 17{,}6.$

Samal viisil arvutatakse ka kuupide jagatis, sest

$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$

ÜLESANDEID.

221. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust:

1) $\left(\frac{7}{4{,}5}\right)^3 = 3{,}77$

$\left(\frac{8{,}7}{5{,}6}\right)^3 = 3{,}75$

$\left(\frac{2{,}16}{1{,}54}\right)^3 = 2{,}76$

$\left(\frac{5{,}55}{6{,}15}\right)^3 = 0{,}730$

2) $\left(\frac{6{,}3}{7{,}5}\right)^3 = 0{,}59$

$\left(\frac{5}{8{,}2}\right)^3 = 0{,}225$

$\left(\frac{41{,}5}{27{,}2}\right)^3 = 3{,}66$

$\left(\frac{0{,}83}{0{,}15}\right)^3 = 170$

222. Arvuta.

1) $\left(\frac{45{,}2}{1{,}81}\right)^3$

$\left(\frac{22{,}5}{4{,}56}\right)^3$

$\left(\frac{0{,}912}{0{,}541}\right)^3$

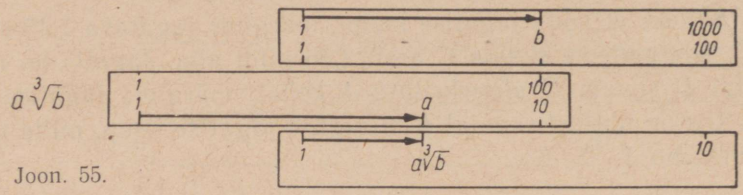
$\left(\frac{6{,}78}{5{,}61}\right)^3$

2) $\left(\frac{8{,}05}{6{,}05}\right)^3$

$\left(\frac{12{,}5}{4{,}2}\right)^3$

$\left(\frac{22{,}2}{1{,}65}\right)^3$

$\left(\frac{41{,}5}{2{,}35}\right)^3$



Joon. 55.

Näide. Arvutada $5{,}7 \cdot \sqrt[3]{72{,}5}$.

Märgime skaala K keskmisel osal arvu 72,5, sellega on ühtlasi skaalal D märgitud $\sqrt[3]{72{,}5}$. Korrutame kuupjuure arvuga 5,7. Selleks tõmbame keele lõppkriipsu, s. o. skaala C arvu 10 niidi alla. Seejärel märgime niidiga skaalal C arvu 5,7. Niidi alt skaalalt D saame otsitava arvu tüvenumbrid 2—3—8.

$5{,}7 \cdot \sqrt[3]{72{,}5} = 23{,}8.$

ÜLESANDEID.

223. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust:

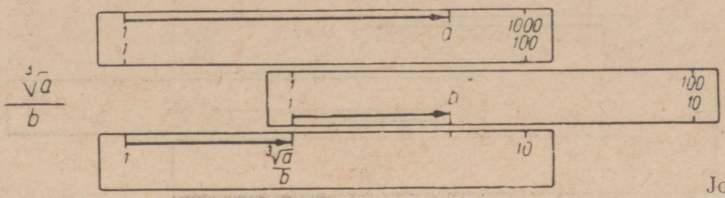
1) $3{,}5 \cdot \sqrt[3]{1{,}33} = 3{,}85$
$0{,}72 \cdot \sqrt[3]{614} = 6{,}12$
$3{,}42 \cdot \sqrt[3]{314} = 23{,}3$
$5{,}2 \cdot \sqrt[3]{3{,}4} = 7{,}82$

2) $2{,}86 \cdot \sqrt[3]{4{,}74} = 4{,}8$
$5{,}45 \cdot \sqrt[3]{42{,}8} = 19{,}1$
$6{,}55 \cdot \sqrt[3]{12} = 14{,}8$
$7{,}25 \cdot \sqrt[3]{520} = 58{,}3$

224. Arvuta.

1) $2 \cdot \sqrt[3]{1{,}26}$
$1{,}35 \cdot \sqrt[3]{1{,}91}$
$4{,}25 \cdot \sqrt[3]{41}$
$1{,}55 \cdot \sqrt[3]{175}$

2) $1{,}8 \cdot \sqrt[3]{94{,}8}$
$2{,}2 \cdot \sqrt[3]{5{,}9}$
$3{,}85 \cdot \sqrt[3]{34{,}5}$
$2{,}65 \cdot \sqrt[3]{34{,}2}$



Joon. 56.

Näide. Arvutada $\frac{\sqrt[3]{345}}{6,8}$.

Märgime skaalal K (parempoolsel osal) niidiga arvu 345. Sellega on skaalal D märgitud arv $\sqrt[3]{345}$. Lükkame seejärel keele nii, et niidi alla skaalal C tuleb arv 6,8. Jagatise leiame skaalalt D kohakuti skaala C alguskriipsuga 1. Sealt leiame jagatise tüvenumbrid 1—0—3. Seega

$$\frac{\sqrt[3]{345}}{6,8} = 1,03.$$

ÜLESANDEID.

225. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust:

1) $\frac{\sqrt[3]{3}}{0,52} = 2,77$ 2) $\frac{\sqrt[3]{52,5}}{2,54} = 1,48$

$\frac{\sqrt[3]{18}}{1,31} = 2$ $\frac{\sqrt[3]{6,12}}{0,72} = 2,54$

$\frac{\sqrt[3]{21,5}}{0,75} = 3,7$ $\frac{\sqrt[3]{7,4}}{0,655} = 2,97$

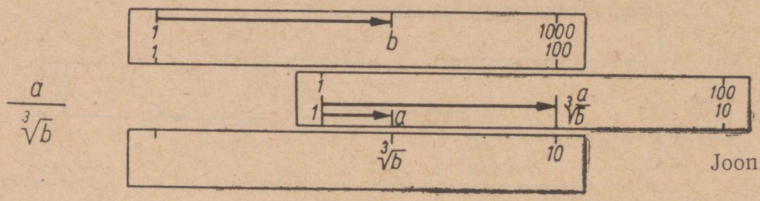
226. Arvuta.

1) $\sqrt[3]{12} : 1,55$ 2) $\sqrt[3]{32} : \pi$

$\sqrt[3]{25} : 2,5$ $\sqrt[3]{72} : 5,5$

$\sqrt[3]{600} : 8,15$ $\sqrt[3]{1200} : 5,2$

4.3.8. ARVU JAGAMINE KUUPJUUREGA.



Joon. 57.

Näide. Arvutada $\frac{24,5}{\sqrt[3]{56}}$.

Märgime skaala K keskmisel osal arvu 56. Sellega on skaalal D märgitud arv $\sqrt[3]{56}$. Nüüd nihutame keelt nii, et skaala C arv 24,5 tuleb niidi alla. Skaala D lõppkriipsu 10 kohalt loeme skaalalt C jagatise tüvenumbrid 6—4—0. Niisiis

$$\frac{24,5}{\sqrt[3]{56}} = 6,4.$$

ÜLESANDEID.

227. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust:

1) $\frac{7,85}{\sqrt[3]{55,5}} = 2,04$ 2) $\frac{6,45}{\sqrt[3]{124}} = 1,29$ 3) $\frac{8,4}{\sqrt[3]{49}} = 2,29$

$\frac{8,2}{\sqrt[3]{21,5}} = 2,95$ $\frac{4,2}{\sqrt[3]{1,38}} = 3,77$ $\frac{52}{\sqrt[3]{460}} = 6,77$

$\frac{12,6}{\sqrt[3]{247}} = 1,95$ $\frac{5,45}{\sqrt[3]{7,6}} = 2,77$

228. Arvuta.

1) $1,82 : \sqrt[3]{760}$ 2) $57,5 : \sqrt[3]{880}$

$1,88 : \sqrt[3]{245}$ $36 : \sqrt[3]{136}$

$9,1 : \sqrt[3]{11,8}$ $31,8 : \sqrt[3]{63}$

$18,1 : \sqrt[3]{47,5}$ $85,6 : \sqrt[3]{860}$

229. Kui palju kaalub klaasist kuup, mille serva pikkus on 47,5 mm? Klaasi erikaal on 2,25.

230. Kui pikk serv on vasest kuubil, mis kaalub 25 g? Vase erikaal on 8,93.

231. Kui palju kaalub rauast (erikaal 7,85) tõukekuul, mille läbimõõt $d = 11{,}36$ cm?

232. Kui palju kaalub tinast (erikaal 11,34) tõukekuul, mille läbimõõt on 8,78 cm?

233. Arvuta terasest (erikaal 7,85) tõukekuuli läbimõõt, kui kuuli raskus on 5 kg?

234. Kui suur on messingist (erikaal 8,5) tõukekuuli läbimõõt, kui kuuli kaal on 7,257 kg?

235. Arvuta ruudukujulise põhjaga püramiidi ruumala, kui põhiserv on 1,82 dm ja kõrgus 0,85 dm.

236. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi täispindala, teades, et püramiidi põhiserv on 6,24 dm ja apoteem 4,42 dm.

237. Koonusekujulise liivakuhja ümbermõõt on 13,5 m ja kõrgus 1,8 m. Mitu tonni on kuhjas liiva (liiva erikaal 1,4)?

ÜLESANDEID.

238. Arvuta ligikaudse arvu kuup, selle absoluutse vea ülemmäär ja relatiivse vea ülemmäär.

1) $8(\pm 0{,}01)$ $15(\pm 0{,}1)$ $11(\pm 0{,}01)$
$12(\pm 0{,}02)$ $9(\pm 0{,}05)$ $25(\pm 0{,}5)$

2) Kuubikujulise veepaagi seesmise serva pikkuse mõõtmisel saadi $1{,}75(\pm 0{,}005)$ m.

Arvuta paagi ruumala, tulemuse absoluutne viga liitrites ja relatiivne viga protsentides.

3) Leia kuupjuur antud ligikaudsest arvust, juure absoluutne viga ja relatiivne viga.

$93(\pm 0{,}5)$ $323(\pm 0{,}5)$ $384(\pm 0{,}5)$
$119(\pm 0{,}2)$ $78(\pm 0{,}1)$ $623(\pm 1)$

4) On teada, et kuubi ruumala on 100 liitrit, kusjuures ollakse kindel, et viga ei ületa 0,5 l.
Leia kuubi serva pikkus, selle absoluutne ja relatiivne viga.

4.4. ARVU n-es JUUR.

1. *Positiivset arvu, mille teine aste võrdub antud positiivse arvuga, nimetame antud arvu* **ruutjuureks;** *positiivne arv, mille kolmas aste võrdub antud positiivse arvuga, on arvu* **kolmas juur.**

Analoogiliselt eelnevaga ütleme, et *arv* 2 *on arvu* 32 **viies juur,** *sest* $2^5=32$.

Sümbolites:

$\sqrt[5]{32}=2$.

Üldiselt,

positiivse arvu a n-ndaks juureks nimetatakse positiivset arvu, mille n-es aste on arv a.

Arvu a n-ndat juurt tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$. Nii on:

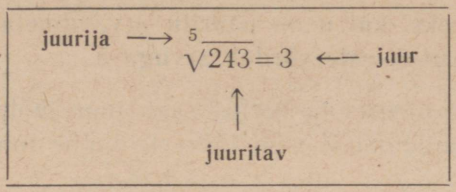
$\sqrt[4]{2401}=7$, sest $7^4=2401$;

$\sqrt[7]{128}=2$, sest $2^7=128$;

$\sqrt[5]{0{,}00243}=0{,}3$, sest $0{,}3^5=0{,}00243$.

n-nda juure leidmist mingist arvust nimetatakse selle arvu **juurimiseks** *arvuga n.*

Juurimine on astendamise pöördtehe. Astendamine seisneb astme leidmises antud astendatava ja astendaja järgi, juurimine aga seisneb selles, et antud astme a ja astendaja n järgi leitakse niisugune astendatav x, et $x^n=a$. Seega juur $\sqrt[n]{a}$ on otsitav astendatav x, kui on antud aste a ja astendaja n. Sel puhul *astet a ehk arvu, mida juuritakse, nimetatakse* **juuritavaks** *ja astendajat n ehk arvu, millega juuritakse,* — **juurijaks.**



Juure definitsiooni järgi on juure $\sqrt[n]{a}$ n-es aste võrdne juuritavaga a, kui $a>0$. Seega juure definitsiooni järeldusena saame samasuse:

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

Juure definitsioonist järeldub ka samasus:

$$\sqrt[n]{a^n}=a, \text{ kui } a>0.$$

Juurija n võib olla kas paaris- või paaritu arv. Kui n on paarisarv, siis peab juuritav a olema positiivne arv; tõepoolest, võrduse

$$(\sqrt[n]{a})^n=a$$

vasak pool on paarisarvulise n puhul ikka positiivne arv, millest järeldub, et ka a on positiivne arv. Seega,

negatiivsetel arvudel pole paarisarvuliste juurijatega juuri.

Paarituarvulise juurija m ja negatiivse juuritava a korral leidub niisugune negatiivne arv, mille m-es aste võrdub negatiivse arvuga a.

Näiteks $\sqrt[3]{-8}=-2$, sest $(-2)^3=-8$.

Üldiselt, olgu $a<0$ ja $m=2k+1$ ning

$$\sqrt[m]{a}=x.$$

Astendades selle võrduse mõlemad pooled arvuga m, saame

$$a=x^m=x^{2k+1}.$$

Et siin $a<0$, siis ka $x<0$, sest ainult negatiivse arvu paarituarvulise astendajaga aste on negatiivne.

Niisiis, paarituarvulise juurijaga juurimisel võib juuritav olla nii positiivne kui ka negatiivne arv või null. Seega paarituarvulise juurija korral võib juurt defineerida järgmiselt:

arvu a n-ndaks juureks, kui n on paaritu arv, nimetatakse niisugust arvu, mille n-es aste võrdub arvuga a.

2. Vastavate tabelite olemasolu korral saab juuri hõlpsasti leida tabelitest. Tabelite puudumisel võib juure leidmine toimuda proovimise teel.

Leiame proovimise teel näiteks

$$\sqrt[5]{16\,807}.$$

Tarvis on leida arv, mille 5. aste on 16 807. Proovides leiame, et

$$2^5=32<16807, \qquad 3^5=243<16807,$$
$$4^5=1024<16807,\ldots, \qquad 7^5=16807.$$

Seega,

$$\sqrt[5]{16807}=7.$$

ÜLESANDEID.

239. Kirjuta järgmised avaldised juuremärgita:

1) $(\sqrt{5})^2$ 2) $(\sqrt[3]{17})^3$ 3) $\left(\sqrt[5]{37}\right)^5$ 4) $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n$

$\sqrt{19^2}$ $\sqrt[3]{12^3}$ $\sqrt[4]{7^4}$ $\sqrt[m]{c^m}$

$(\sqrt{23})^4$ $\left(\sqrt[3]{16}\right)^6$ $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}$ $\left(\sqrt[n]{Q}\right)^{2n}$

$8\sqrt{49}$ $4\sqrt[3]{27}$ $8\sqrt[4]{256}$ $R\sqrt[p]{R^p}$

$(5\sqrt{N})^2$ $\left(2\sqrt[3]{5}\right)^3$ $\left(h^2\sqrt[3]{u}\right)^3$ $\left(f^3\sqrt[n]{f^{2n}}\right)^n$

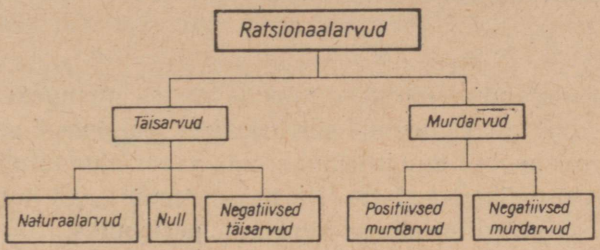
240. Leia proovimise teel järgmised juured:

1) $\sqrt{169}$; 2) $\sqrt{361}$; 3) $\sqrt{529}$;

$\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{1331}$; $\sqrt[3]{3,375}$;

$\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[4]{2401}$; $\sqrt[4]{0,0256}$.

4.5. RATSIONAALARVUD.



Joon. 58.

Ratsionaalarvude hulga moodustavad positiivsed ja negatiivsed täisarvud, arv null ning positiivsed ja negatiivsed murdarvud. Igaüks nimetatud arvuliigist on väljendatav kahe täisarvu jagatisena. Näiteks

$$4 = 8 : 2 = (-16) : (-4);$$
$$-2 = 6 : (-3) = (-10) : 5;$$
$$\frac{2}{3} = 8 : 12 = (-14) : (-21);$$
$$0 = 0 : 1 = 0 : (-3).$$

Iga harilikku murdu saab väljendada kümnendmurruna, jagades lugeja nimetajaga. Näiteks $\frac{3}{8} = 0{,}375$. Mõne hariliku murru kümnendmurruks teisendamisel lugeja jagamine nimetajaga ei lõpe, näiteks saame, et $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$, $\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$ ja $\frac{12}{55} = 0{,}2181818\ldots$

Niisuguseid kümnendmurde, mille murdosas mõni number või numbrirühm lõpmatult kordub, nimetatakse **lõpmatuteks perioodilisteks kümnendmurdudeks.**

Hariliku murru (kahe täisarvu jagatise) teisendamisel kümnendmurruks on ainult kaks võimalust, jagamine kas lõpeb või ei lõpe. Esimesel juhul on tulemuseks **lõplik kümnendmurd,** teisel juhul **lõpmatu perioodiline kümnendmurd.** See lõpmatu kümnendmurd tuleb paratamatult perioodiline, s. t. mingi number või numbrirühm jagatises hakkab paratamatult korduma. Viimase asjaolu põhjuseks on see, et jagamisel täisarvuga on erinevate jääkide arv piiratud. Näiteks saavad 3-ga jagamisel olla nullist erinevateks jääkideks ainult 1 ja 2; 7-ga jagamisel saavad nullist erinevateks

jääkideks olla ainult 1, 2, 3, 4, 5, 6. Üldiselt, arvuga b jagamisel saavad nullist erinevateks jääkideks olla

$$1, 2, 3, \ldots, b-1.$$

On ilmne, et kui jagamisel jõutakse jääkide sarjas niisuguse jäägini, mis juba kord on esinenud, siis edasisel jagamisel saame jagatises sama numbri või numbrirühma, mis saadi nimetatud eelviimasest niisugusest jäägist alates. Korduvat numbrit või numbrirühma perioodilise murru murdosas nimetame **perioodiks.**

Seega iga ratsionaalarv on väljendatav kas **lõpliku kümnendmurruna** või **lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.**

Selgitame paari näite varal, et ka, ümberpöördult, iga lõpmatu perioodiline kümnendmurd on väljendatav kahe täisarvu jagatisena, s. o. hariliku murruna ehk, teisiti öeldes, iga lõpmatu perioodiline kümnendmurd on ratsionaalarv.

Küsime, missuguse hariliku murruga võrdub 0,181818 . . .

Oletades, et niisugune harilik murd on olemas, tähistame selle tähega x, nii et

$$x = 0{,}181818\ldots \qquad (1)$$

Nihutame võrduse (1) paremas pooles koma esimese perioodi lõppu, see tähendab antud juhul korrutamist sajaga. Seega

$$100x = 18{,}181818\ldots \qquad (2)$$

Lahutades võrduse (2) pooltest võrduse (1) vastavad pooled, saame

$$99x = 18.$$

Siit

$$x = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}.$$

Seega $0{,}181818\ldots = \frac{2}{11}$.

Teisendame teise näitena harilikuks murruks niisuguse lõpmatu perioodilise kümnendmurru, milles periood ei alga kohe koma järelt.

Olgu

$$x = 0{,}3151515\ldots. \qquad (3)$$

Nüüd korrutame võrduse (3) pooli esmalt 1000-ga (nihutame koma esimese perioodi lõppu) ja seejärel 10-ga (nihutame koma esimese perioodi ette) ning lahutame:

$$\begin{aligned} 1000x &= 315{,}151515\ldots \\ 10x &= 3{,}151515\ldots \\ \hline 990x &= 312 \end{aligned}$$

$$x = \frac{312}{990} = \frac{52}{165}.$$

Niisiis

$$0{,}3151515\ldots = \frac{52}{165}.$$

Kontrolliks võib saadud hariliku murru teisendada kümnendmurruks ning veenduda, et tulemuseks on antud perioodiline murd.

Eelöeldu põhjal võib ratsionaalarvude hulka defineerida nüüd ka nii:

ratsionaalarvude hulga moodustavad kõik lõplikud kümnendmurrud ja kõik lõpmatud perioodilised kümnendmurrud.

ÜLESANDEID.

241. Väljenda kahe täisarvu jagatisena järgmised ratsionaalarvud:

$1;\ \frac{1}{5};\ -0{,}72;\ -1;\ 0{,}222;\ 5{,}253.$

242. Teisenda harilikeks murdudeks:

a) $0{,}777\ldots$ b) $0{,}232323\ldots$ c) $0{,}3297297297\ldots$

243. Leia arvude $0{,}6111\ldots$ ja $0{,}363636\ldots$ korrutis.

4.6. IRRATSIONAALARVUD.

Olgu ülesandeks arvutada niisuguse ruudu külg, mille pindala on 2 m^2.

Kui selle ruudu külje pikkus on x meetrit, siis pindala on x^2 ruutmeetrit; seega peab olema

$$x^2=2,$$

millest

$$x=\sqrt{2}.$$

On ilmne, et x ei saa olla täisarv, sest $x \neq 1$ ja $x \neq 2$, kuna $1^2<2$ ja $2^2>2$.

Näitame, et ei leidu ka murdarvulist ratsionaalarvu, mille ruut on 2.

Katsume nõuet $x^2=2$ rahuldada murdarvuga, näiteks murruga $\frac{a}{b}$.

Loomulikult võtame proovitava murru tema lihtsamal, see on taandatud kujul. Sel juhul a ja b on ühistegurita arvud.

Kirjutame murru $\frac{a}{b}$ nii, et tema lugeja ja nimetaja esineksid algtegureiks lahutatuina:

$$\frac{a}{b}=\frac{h\cdot k\cdot l\ldots n}{p\cdot q\cdot r\ldots v};$$

siin on lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja tegureist. Ruutu tõstes saame

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{h\cdot h\cdot k\cdot k\cdot l\cdot l\ldots n\cdot n}{p\cdot p\cdot q\cdot q\cdot r\cdot r\ldots v\cdot v}.$$

Näeme, et ka sellel murrul lugeja tegurid kõik erinevad nimetaja teguritest, seega ka murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ on taandumatu. Meie nõude kohaselt peab olema

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=2,$$

tähendab, kõnesolev murd $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ peab olema taanduv täisarvule 2. Murd ei saa korraga olla taandumatu ja taanduv. Seega meie nõuet ei rahulda murdarv. See tähendab, et ei leidu ka murdarvu, mille ruut on 2.

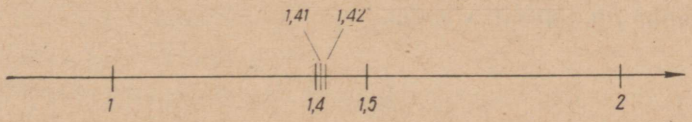
Esitatust näeme, et põhimõtteliselt on võimatu nõuet $x^2=2$ täpselt rahuldada täis- või murdarvuga.

Küll aga on võimalik nõuet rahuldada ligikaudu ja pealegi nii hästi kui iganes soovime.

Jätkates ruutjuure leidmist järk-järgult viga vähendades, näeme, et

$1 < x < 2,$
$1{,}4 < x < 1{,}5,$
$1{,}41 < x < 1{,}42.$

Joonisel 59 on arvteljel kujutatud vahemikud arvust 1 arvuni 2, arvust 1,4 arvuni 1,5 ja arvust 1,41 arvuni 1,42 graafiliselt.



Joon. 59.

Vaadeldava vahemiku edasisel kitsendamisel saame:

$1{,}414 < x < 1{,}415,$
$1{,}4142 < x < 1{,}4143,$
$1{,}41421 < x < 1{,}41422,$
jne.

Nii seisab arv x suletuna järjest kitsamasse ja kitsamasse vahemikku. Vasakpoolses tulbas seisavad x *lähendid* puuduga, parempoolses tulbas x *lähendid* liiaga. Vastavate lähendite vahe järjest väheneb: esimeses reas ei küüni vahe 1-ni, teises reas ei küüni ta 0,1-ni, kolmandas reas ei küüni ta 0,01-ni jne. Nii ühe kui teise tulba lähendid juhivad neid x väärtusele:

$x = 1{,}41421\ldots$

Selles kirjutuses numbrite jada ei lõpe.

Tõepoolest, kui see nii poleks, siis seisaks meie ees lõplik kümnendmurd, mis on alati teisendatav harilikuks murruks, ning selle ruut oleks 2. Eespool tõestatu põhjal pole säärast murdu olemas. Seega on x lõpmatu kümnendmurd. See lõpmatu kümnendmurd ei saa olla perioodiline, sest ka lõpmatu perioodiline

kümnendmurd on teisendatav harilikuks murruks, kuid säärast harilikku murdu, nagu nägime, pole olemas.

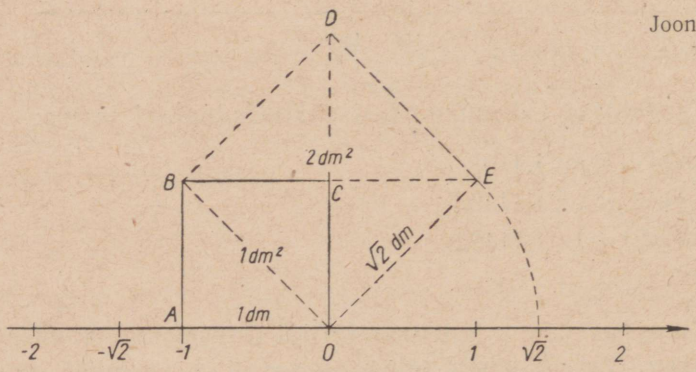
Niisiis murd 1,41421 ... on lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd. Et ratsionaalarvude hulka kuuluvad ainult lõplikud kümnendmurrud, siis lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd ei ole ratsionaalarv.

Murru 1,41421 ... saamislugu tagab, et tema ruut on 2:

$$(1{,}41421\ldots)^2=2;$$

vastavalt sellele kirjutame selle lõputu mitteperioodilise kümnendmurru lühiduse mõttes sümboliga $\sqrt{2}$.

Vaatamata sellele, et $\sqrt{2}$ pole täpselt väljendatav ühegi täisarvu ega ühegi hariliku murru abil, on ometi võimalik anda täpne konstruktsioon sirkli ja joonlaua abil joonlõigu joonestamiseks, mille pikkus on täpselt $\sqrt{2}$ dm.



Joon. 60.

Kui ehitame ruudu *ABCO* külje pikkusega 1 dm (joon. 60), siis selle pindala on 1 dm². Kui nüüd pikendame ühe paari lähiskülgi oma pikkuse võrra ja võtame pikendatud küljed uue nelinurga *OBDE* diagonaalideks, siis uus nelinurk on ruut pindalaga 2 dm². Seda näeme sellest, et uus ruut koosneb neljast niisugusest tükist, nagu neid esialgses ruudus on kaks.

Uue ruudu külje pikkuse leidmiseks peame arvutama ruutjuure arvust 2, seega on see pikkus $\sqrt{2}$ dm. Jooniselt näeme, et uue ruudu külg on esialgsele ruudule diagonaaliks, seepärast võime öelda, et kui ruudu külje pikkus on 1 pikkusühik, siis ruudu diagonaali pikkus on $\sqrt{2}$ pikkusühikut.

Samale tulemusele jõuame ka vaadeldes joonisel 53 täisnurkset kolmnurka OCE. Selles $OC=1$ ja $CE=1$. Rakendades Pütagorase teoreemi, saame

$$OE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Kirjeldatud konstruktsioon võimaldab arvteljel konstrueerida punkti, mis vastab arvule $\sqrt{2}$.

Kandes lõigu OE punktist O alates arvteljele negatiivses suunas, saame punkti, mis kujutab sümbolit $-\sqrt{2}$.

Samuti nagu $\sqrt{2}$ korral, saab näidata, et $\sqrt{3}$ ei väljendu täpselt ühegi täisarvu ega ühegi murdarvuna, kuid sirkli ja joonlaua abil saame ehitada lõigu pikkusega $\sqrt{3}$. Seda saab teha Pütagorase teoreemi rakendamisega: ehitame täisnurkse kolmnurga, mille üks kaatet on 1 ühik ja hüpotenuus on 2 ühikut, siis teise kaateti pikkus on $\sqrt{3}$ ühikut.

Kandes saadud kaateti arvteljele nullpunktist positiivses suunas, saame arvteljel punkti, mis vastab sümbolile $\sqrt{3}$.

Et sümbolid $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$ ei ole väljendatavad ei täisarvudena ega harilike murdudena, siis nad ei ole ratsionaalarvud. Et aga on olemas lõigud, mille pikkuste mõõtarvudeks on need sümbolid, siis tuleb need sümbolid lugeda arvudeks. Neid nimetatakse irratsionaalarvudeks. Nende väljendiks on lõpmatud mitteperioodilised kümnendmurrud.

Niisugust arvu, mida saab väljendada lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, nimetatakse irratsionaalarvuks.

Loeme aksioomiks, et

igale irratsionaalarvule vastab arvteljel üksainus punkt.

Kui näiteks arvude 1 ja 2 vahel oleks kõik ratsionaalarvud kujutatud arvteljel punktidena, siis ei oleks arvtelje lõik punktide 1 ja 2 vahel veel punktidega täidetud, sest seal leidub veel kohta punktidele, millele ei vasta ükski ratsionaalarv, vaid neile vastavad irratsionaalarvud, nagu näiteks arvud $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$.

Nagu $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$, nii on paljud juured, näiteks $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{10}$, irratsionaalarvud. Irratsionaalarvud on enamik trigonomeetriliste

funktsioonide väärtusi, ka arv $\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots$ on irratsionaalarv.

Samuti on iga lõpmatu kümnendmurd, mille numbreid kirjutatakse mingi reegli järgi, mis takistab perioodi tekkimist, irratsionaalarv.

Näiteks:

$5{,}13133133313\ldots$,
$0{,}54898898889888898\ldots$,
$3{,}272272227222272\ldots$

on irratsionaalarvud.

Praktiliste arvutuste korral avaldame antud irratsionaalarvude lähendid ligikaudsete ratsionaalarvude (kümnendmurdude) abil lubatava vea ülemmääraga ja teeme arvutused saadud ligikaudsete arvudega vastavate reeglite järgi.

ÜLESANDEID.

244. Missugused allpool antud arvudest on ratsionaalsed ja missugused irratsionaalsed:

1) $2{,}5$ $\quad$ $0{,}888\ldots$ $\quad$ $1{,}2777\ldots.$ $\quad$ $3{,}15115111511115\ldots$

2) $3{,}2$ $\quad$ $0{,}2132133213332133332\ldots$ $\quad$ $2{,}18656565\ldots$ $\quad$ $0{,}835835835\ldots$?

245. Kirjuta neli irratsionaalarvu, mis on suuremad kui 1 ja väiksemad kui 2.

246. Ehita ruut külje pikkusega 2 ühikut ning selle abil 2 korda suurema pindalaga ruut. Kui pikk on uue ruudu külg?

247. Ehita ruut külje pikkusega 2,5 cm ning selle abil 2 korda suurema pindalaga ruut.

248. Ehita ruut külje pikkusega 5 cm ning selle abil 2 korda väiksema pindalaga ruut.

249. Ehita ruut pindalaga 36 cm^2 ning selle abil ruut pindalaga 18 cm^2.

250. Ehita lõik pikkusega $\sqrt{18}$ cm.

251. Ehita lõik pikkusega $\sqrt{32}$ cm.

252. Konstrueeri sirkli ja joonlaua abil lõik, mille pikkus on $\sqrt{5}$ ühikut.

253. Kujuta arv $\sqrt{5}$ arvteljel punktina; joonesta arvteljel punkt, mis vastab arvu $\sqrt{5}$ vastandarvule.

254. Konstrueeri arvteljel punktid, mis kujutavad arve $\sqrt{13}$ ja $-\sqrt{13}$.

255. Leia tabelist irratsionaalarvude

1) $\sqrt{5}$ ja $\sqrt[3]{2}$

2) $\sqrt[3]{9}$ ja sin 10

ligikaudsed väärtused täpsusega 0,01 ning arvuta nende summa, vahe, korrutise ja jagatise ligikaudsed väärtused.

4.7. REAALARVUD.

Omal ajal laiendasime arvuvalda, luues positiivsete arvude kõrvale negatiivsed arvud. Siis tihendasime arvuvalda murdarvudega ja saime ratsionaalarvude valla. Irratsionaalarvude loomisega ratsionaalarvude vahele tihendame arvuvalda veelgi. Negatiivsete arvude loomisega said sümbolid, nagu

$$-1,\ -5,\ -7\tfrac{1}{2},$$

kindla mõtte ja sisu. Irratsionaalarvude loomisega saavad mõtte ka sümbolid, nagu

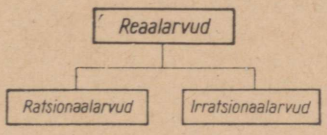
$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5\tfrac{1}{2}},\ \sqrt[7]{10{,}2},\ -\sqrt[3]{4},\ -\pi,$$

milledel pole vastet täis- ja murdarvude vallas.

Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud moodustavad koos **reaalarvude hulga.**

On tõestatud, et arvutamise põhiseadused jäävad kehtima ka reaalarvude vallas.

Joonisel 61 näeme reaalarvude liigitamise skeemi.



Joon. 61.

Eespool toodud arutlusest järeldame, et igale reaalarvule vastab arvteljel üks punkt. Tunnustame aksioomina, et ka igale punktile arvteljel vastab üks reaalarv.

ÜLESANDEID.

256. Kirjuta

1) viis ratsionaalarvu;
2) viis irratsionaalarvu;
3) viis täisarvu;
4) viis naturaalarvu.

257. Kirjuta võrratuste jada

$$1<\sqrt{3}<2;$$
$$1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8;$$
$$1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74;$$
$$1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733;$$
$$1{,}7320<\sqrt{3}<1{,}7321;$$
$$1{,}73204<\sqrt{3}<1{,}73205$$

põhjal $\sqrt{3}$ ligikaudne väärtus

1) täpsusega 0,1;
2) „ 0,01;
3) „ 0,001;
4) „ 0,0001.

258. Kirjuta võrratuste jada

$$3<\pi<4;$$
$$3{,}1<\pi<3{,}2;$$
$$3{,}14<\pi<3{,}15;$$
$$3{,}141<\pi<3{,}142;$$
$$3{,}1415<\pi<3{,}1416;$$
$$3{,}14159<\pi<3{,}14160;$$
$$3{,}141592<\pi<3{,}141593$$

põhjal irratsionaalarvu π ligikaudne väärtus

1) täpsusega 1;
2) täpsusega 0,1;
3) täpsusega 0,001.

4.8. JUURTE OMADUS.

Mõistes juuritavat ja juurt positiivsete arvudena, saame tõestada teoreemi:

võrdsete juurijatega juurtest on suurem see, millel juuritav on suurem

ehk sümbolites, kui

$$a>b>0,$$

siis ka

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

Tõestus. Kui oletada, et $\sqrt[n]{a}$ ei ole suurem kui $\sqrt[n]{b}$, siis oleks

$$\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b};$$

siis oleks ka

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\leqslant\left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

ehk juure definitsiooni põhjal

$$a\leqslant b,$$

mis on vastuolus eeldusega $(a>b)$. Seega

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

Järeldus. **Arvust 1 suurema arvu n-es juur on suurem kui 1.**

Tõestus. Kui

$$a>1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{1}.$$

Et

$$\sqrt[n]{1}=1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a}>1.$$

Sellest omakorda järeldub, et

arvust 1 väiksema positiivse arvu n-es juur on 1-st väiksem positiivne arv.

Sümbolites, kui

$0<a<1$, siis $0<\sqrt[n]{a}<1$.

Tõestus. Kui antud tingimustel oleks

$\sqrt[n]{a} \geqslant 1$,

siis oleks

$(\sqrt[n]{a})^n \geqslant 1$

ehk

$a \geqslant 1$,

mis on vastuolus eeldusega, et $0<a<1$. See vastuolu tõestabki teoreemi.

ÜLESANDEID.

259. Leia proovimise teel järgmised juured täpsusega 0,1;

1) $\sqrt{1,7}$ 2) $\sqrt[3]{1,2}$ 3) $\sqrt{0,8}$ 4) $\sqrt[3]{0,9}$ 5) $\sqrt[4]{28}$
6) $\sqrt[5]{15}$ 7) $\sqrt[5]{3,4}$ 8) $\sqrt[4]{10}$ 9) $\sqrt[5]{100}$ 10) $\sqrt[5]{24,2}$

4.9. TEOREEMID TEHETEST JUURTEGA.

4.9.1. TEOREEM JUURTE KORRUTAMISEST.

Võrdsete juurijatega juurte korrutamisel juuritavad korrutatakse ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Sümbolites:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Tõestus. Tähistame juurte korrutise tähega x, nii et

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = x.$$

Astendades selle võrduse mõlemad pooled arvuga n, saame

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = x^n$$

ehk korrutise astendamise juhise põhjal

$$(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = x^n;$$

et juure definitsiooni põhjal $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ja $(\sqrt[n]{b})^n = b$, siis tähendab eelmine võrdus, et

$$ab = x^n.$$

Seega x on arv, mille n-es aste on ab; juure definitsiooni kohaselt

$$x = \sqrt[n]{ab}.$$

Võttes nüüd arvesse, et tähega x oli meil tähistatud $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, saame võrduse

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näide.

$$\sqrt[3]{16cm^2} \cdot \sqrt[3]{4c^2m} = \sqrt[3]{64c^3m^3} = \sqrt[3]{(4cm)^3} = 4cm.$$

Vahetades tõestatud võrduse pooled, saame:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Näide.

$$\sqrt[5]{32x^{10}} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x^{10}} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{(x^2)^5} = 2 \cdot x^2 = 2x^2.$$

Korrutise juurimise teoreemi rakendamisel peame arvestama asjaolu, et paarisarvulise juurija puhul ei saa seda teoreemi alati kasutada. Nimelt ei ole see teoreem rakendatav juhul, kui juurija on paarisarv ja kui juuritav teisendatakse korrutiseks, mille mõned tegurid on negatiivsed. Näiteks $\sqrt{30}$ on küll esitatav kujul $\sqrt{2} \cdot (-3) \cdot (-5)$, kuid mitte $\sqrt{2} \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5}$, sest negatiivsel arvul ei ole paarisarvulise juurijaga juurt.

260. Leia peast.

1) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ 2) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$ 3) $\sqrt[3]{1000 \cdot 729}$

$\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$ $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$ $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}$

261. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks juurte korrutamise teoreemi:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ 2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ 3) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

$\sqrt{162} \cdot \sqrt{0{,}5}$ $\sqrt{0{,}8} \cdot \sqrt{45}$ $\sqrt{2{,}4} \cdot \sqrt{0{,}6}$

$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$ $\sqrt[3]{-7} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ $\sqrt[3]{-12} \cdot \sqrt[3]{18}$

$\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[3]{40\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ $\sqrt[3]{0{,}32} \cdot \sqrt[3]{-200}$

$\sqrt[4]{64} \cdot \sqrt[4]{4}$ $\sqrt[4]{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{486}$ $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[5]{48}$

262. Lihtsusta järgmised avaldised, kasutades korrutise juurimise teoreemi:

1) $\sqrt{49a^2}$ 2) $\sqrt{121x^4}$ 3) $\sqrt{a^2b^2}$

$\sqrt[3]{125u^3}$ $\sqrt[3]{-343f^6}$ $\sqrt[3]{-p^3q^9}$

$\sqrt[4]{256g^4}$ $\sqrt[5]{k^5x^{10}}$ $\sqrt[7]{-128r^7}$

263. Kirjuta järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

1) $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a}$ 2) $\sqrt[4]{\frac{243}{x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^9}{3}}$ 3) $\sqrt{\frac{1}{2}ax^3} \cdot \sqrt{288ax}$

$\sqrt[3]{4c} \cdot \sqrt[3]{2c^2}$ $\sqrt[3]{9u} \cdot \sqrt[3]{-3u^5}$ $\sqrt[3]{m^{14}n^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{n^7}{m^2}}$

$\sqrt[4]{3N^2} \cdot \sqrt[4]{27N^2}$ $\sqrt[4]{48x^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}x^5}$ $\sqrt[5]{9H^3} \cdot \sqrt[5]{27H^7}$

264. Kirjuta järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ 2) $\sqrt[8]{5x} \cdot \sqrt[8]{3y}$ 3) $\sqrt[3]{-m} \cdot \sqrt[3]{-n}$

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{15}$ $\sqrt[6]{-\frac{x^2}{a}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^2}{x^2}}$ $\sqrt[3]{1\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{80}$

265. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks korrutise juurimise teoreemi:

1) $\sqrt{81 \cdot 169}$ 2) $\sqrt{196 \cdot 10^4}$ 3) $\sqrt{57600}$

$\sqrt[3]{216 \cdot 27}$ $\sqrt[3]{7{,}29 \cdot 121}$ $\sqrt[3]{512000}$

$\sqrt[3]{729 \cdot 1000}$ $\sqrt[3]{3375 \cdot 1331}$ $\sqrt[4]{81 \cdot 10^{12}}$

266. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv.

1) $\sqrt{50}$ 2) $\sqrt{45}$ 3) $\sqrt{32}$ 4) $\sqrt{63}$

$\sqrt{72}$ $\sqrt{245}$ $\sqrt{300}$ $\sqrt{768}$

$\sqrt[3]{54}$ $\sqrt[3]{375}$ $\sqrt[3]{108}$ $\sqrt[3]{1512}$

$\sqrt[3]{-24}$ $\sqrt[3]{320}$ $\sqrt[3]{-1024}$ $\sqrt[3]{2000}$

$\sqrt[4]{512}$ $\sqrt[4]{240}$ $\sqrt[5]{486}$ $\sqrt[5]{-96}$

267. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

1) $\sqrt{N^3}$ 2) $\sqrt{a^5}$ 3) $\sqrt{c^2n^3}$ 4) $\sqrt{ax^4}$

$\sqrt{c^5h}$ $\sqrt{7m^2x^2}$ $\sqrt{4a^4b}$ $\sqrt{25f^4g^3}$

$\sqrt[3]{27c^5}$ $\sqrt[3]{16a^4}$ $\sqrt[3]{2a^2x^3}$ $\sqrt[3]{8a^3b^2}$

$\sqrt[3]{40cu^4}$ $\sqrt[3]{54h^6k}$ $\sqrt[3]{135u^3v^3}$ $\sqrt[3]{-64N^3}$

$\sqrt[4]{6a^4}$ $\sqrt[4]{64n^5}$ $\sqrt[4]{32P^6}$ $\sqrt[5]{81a^5x}$

268. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil ja teisenda tulemus nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3a}$ 2) $\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{10n}$ 3) $\sqrt{5A}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3A}$

$\sqrt[3]{h^2}\cdot\sqrt[3]{ah}$ $\sqrt[3]{pq^2r^2}\cdot\sqrt[3]{p^2q}$ $\sqrt[3]{6x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{x}}\cdot\sqrt[3]{4x^3}$

$\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}$ $\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$ $\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{240}$

$\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{36}$ $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{75}$ $\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[4]{49}\cdot\sqrt[4]{98}$ $\sqrt[5]{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[5]{96}$ $\sqrt[6]{2{,}5}\cdot\sqrt[6]{1{,}6}\cdot\sqrt[6]{48}$

4.9.2. KUUPJUURE LEIDMINE TABELI VÕI LÜKATI KASUTAMISEGA.

Teoreemi korrutise juurimisest kasutame kuupjuure leidmisel lükati või tabeli abil juhul, kui antud arv on 1-st väiksem või 1000-st suurem. Siis enne kuupjuure leidmist korrutame antud arvu vastavalt 1000-ga (1 000 000-ga) või 0,001-ga (0,000001-ga).

Näiteid.

1. $\sqrt[3]{0{,}009447}=\sqrt[3]{0{,}001\cdot 9{,}447}=0{,}1\cdot 2{,}114=0{,}2114.$

2. $\sqrt[3]{11390}=\sqrt[3]{1000\cdot 11{,}39}=10\cdot 2{,}25=22{,}5.$

ÜLESANDEID.

269. Leia tabelist järgmiste arvude kuupjuured:

1)	2)	3)
9994	0,2794	0,003667
1154	0,3422	0,004065
6623	0,1991	0,02102
7940	0,2172	0,07167

270. Kontrolli lükati abil järgmiste võrduste õigsust:

1) $\sqrt[3]{0,7}=0,888$
$\sqrt[3]{0,56}=0,824$
$\sqrt[3]{0,64}=0,862$
$\sqrt[3]{0,48}=0,783$
$\sqrt[3]{0,34}=0,698$

2) $\sqrt[3]{0,02}=0,272$
$\sqrt[3]{0,035}=0,327$
$\sqrt[3]{0,042}=0,348$
$\sqrt[3]{0,0285}=0,306$
$\sqrt[3]{0,0335}=0,322$.

271. Leia lükati abil kuupjuur järgmistest arvudest:

1) 0,0483
0,8
0,0025

2) 1728
68500
343000

272. Kasutades kera ruumala valemit

$V \approx 4,19r^3$,

leia kera raadius, kui ruumala on 1) 33,7 dm³; 2) 10,5 m³; 3) 7,2 m³.

273. Kasutades kera ruumala valemit

$V \approx 0,52d^3$,

leia kera läbimõõt, kui ruumala on 1) 5190 cm³; 2) 53040 mm³; 3) 0,6404 m³.

274. Leia kuubi serva pikkus, kui kuubi ruumala on 1) 0,523 m³; 2) 0,0725 m³; 3) 8577 cm³.

4.9.3. TEOREEM JUURTE JAGAMISEST.

Võrdsete juurijatega juurte jagamisel juuritav jagatavas jagatakse juuritavaga jagajas ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Sümbolites:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Tõestus. Tähistame antud juurte jagatise tähega x, siis

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x.$$

Astendades saadud võrduse kummagi poole arvuga n, saame

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = x^n$$

ehk jagatise astendamise eeskirja põhjal

$$\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = x^n.$$

Juure definitsiooni põhjal

$$\frac{a}{b} = x^n.$$

Et x on arv, mille n-es aste on $\frac{a}{b}$, siis juure definitsiooni järgi

$$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Võrdustest

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x \text{ ja } x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

järeldame, et

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Näide.

$$\frac{\sqrt[3]{cu^4}}{\sqrt[3]{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{cu^4}{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{u^3}{c^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{u}{c}\right)^3} = \frac{u}{c}.$$

Vahetades eespool tõestatud võrduse pooled, saame:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Näide.

$$\sqrt[4]{\frac{256}{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{4^4}}{\sqrt[4]{(ax^2)^4}} = \frac{4}{ax^2}.$$

Jagatise juurimise teoreemi ei saa kasutada siis, kui juurija on paarisarv ja jagatav või jagaja juuritavas on negatiivsed.

ÜLESANDEID.

275. Kirjuta järgmised avaldised juurtena üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita:

1) $\sqrt{72} : \sqrt{2}$ 2) $\sqrt{ab} : \sqrt{b}$ 3) $\sqrt[4]{b} : \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$

$\sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{5}$ $\sqrt[3]{c^2} : \sqrt[3]{c}$ $\sqrt[3]{N^2} : \sqrt[3]{\frac{1}{N}}$

$\sqrt[3]{102} : \sqrt[3]{17}$ $\sqrt[3]{H^2u^2} : \sqrt[3]{Hu^2}$ $\sqrt[3]{\frac{P}{Q^2}} : \sqrt[3]{\frac{Q}{p^2}}$

276. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita.

1) $\sqrt[4]{8N^3u} : \sqrt[4]{\frac{N^2u}{2}}$ 2) $\sqrt{\frac{9ax^3}{25n^6}} : \sqrt{\frac{a^5x}{n^2}}$ 3) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}$

$\sqrt[3]{\frac{H^2}{25u}} : \sqrt[3]{\frac{5u^2}{H}}$ $\frac{\sqrt{a^2b-a^2c}}{\sqrt{b-c}}$ $\frac{\sqrt{(u+v)^2}}{\sqrt{u^2-v^2}}$

$\sqrt[3]{ab^2c^3} : \sqrt[3]{\frac{27c^6}{64a^5b}}$ $\frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m^2-n^2}}$ $\frac{\sqrt[3]{a^2(a^2-b^2)}}{\sqrt[3]{a(a+b)}}$

277. Kirjuta järgmised juurte jagatised võimalikult väheste sümbolitega:

1) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$ 2) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$ $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{44}}$

$\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}}$ $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}}$ $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n}}$ $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{56}}$

3) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{ac^2}}$ 4) $\frac{\sqrt{aN}}{\sqrt{N}}$ $\frac{\sqrt{px^3}}{\sqrt{p^2x^2}}$

$\frac{\sqrt[3]{h^7}}{\sqrt[3]{h}}$ $\frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{c^2u^2}}$ $\frac{\sqrt[3]{a^2h}}{\sqrt[3]{ah^2}}$ $\frac{\sqrt[3]{mx^2}}{\sqrt[3]{m^4x^5}}$

278. Leia järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks jagatise juurimise teoreemi:

1) $\sqrt{\frac{9}{64}}$ 2) $\sqrt{\frac{49}{81}}$ 3) $\sqrt{\frac{144}{25}}$ 4) $\sqrt{\frac{169}{289}}$

$\sqrt{6\frac{1}{4}}$ $\sqrt{3\frac{1}{16}}$ $\sqrt{7\frac{9}{16}}$ $\sqrt{4\frac{21}{25}}$

$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ $\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$ $\sqrt[3]{5\frac{23}{64}}$ $\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$

5) $\sqrt{\frac{5^2}{6^4}}$ 6) $\sqrt[3]{\frac{2^6}{7^3}}$ 7) $\sqrt[4]{\frac{236}{10^8}}$ 8) $\sqrt[5]{\frac{243}{10^{15}}}$

$\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2}$ $\sqrt[4]{\left(1\frac{9}{16}\right)^3}$ $\sqrt[4]{3\left(\frac{13}{81}\right)^2}$ $\sqrt[5]{\left(-\frac{32}{243}\right)^3}$

279. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi all oleksid võimalikult lihtsad avaldised:

1) $\sqrt{\frac{18}{25}}$ 2) $\sqrt[3]{\frac{16}{27}}$ 3) $\sqrt[3]{\frac{125a}{27x^3}}$

$12\sqrt{\frac{a^3}{16x^2}}$ $\sqrt{1\frac{9x^3}{16a^2}}$ $0{,}2\sqrt[3]{1000Nu^3}$

$10\sqrt[3]{\frac{1}{8}M}$ $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{4}m^2n^4}$ $10\sqrt[3]{\frac{H^2}{0{,}008}}$

4.9.4. TEOREEM JUURE ASTENDAMISEST.

Juure astendamisel astendatakse juuritav ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Sümbolites:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},\ a>0.$

Tõestus. Kirjutame astme $(\sqrt[n]{a})^m$ korrutisena, siis saame

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{m \text{ tegurit}}.$$

Juurte korrutamise teoreemi põhjal võime nüüd kirjutada:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{m \text{ tegurit}} = \underbrace{\sqrt[n]{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}}_{m \text{ tegurit}} = \sqrt[n]{a^m};$$ seega

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

m. o. t. t.

Näide.

$$(\sqrt{5a^3})^3 = \sqrt{5^3a^9} = \sqrt{5^2a^8}\cdot\sqrt{5a} = 5a^4\sqrt{5a}.$$

Vahetades eespool tõestatud võrduse pooled, saame:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Selle võrduse mõtet võime sõnastada nii:

arvu astendamise ja saadud astme juurimise asemel võib arvu juurida ja siis saadud juurt astendada.

Näide.

$$\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{16}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{4^2}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{a^2b^2}{4^2}}\right)^3 = \left(\frac{ab}{4}\right)^3 = \frac{a^3b^3}{64}.$$

Valemit $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ ei ole võimalik kasutada siis, kui juurija n on paarisarv ja astendatav a juuritavas on negatiivne.

280. Kirjuta järgmised astmed võimalikult väheste sümbolitega:

1) $(\sqrt{5})^4$ 2) $(\sqrt[3]{7})^5$ 3) $(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5})^6$

$(\sqrt{3})^8$ $(\sqrt[5]{a})^6$ $(\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b})^6$

$(\sqrt{2})^{10}$ $(\sqrt[4]{x})^5$ $(\sqrt[4]{x}:\sqrt[4]{y})^5$

$(\sqrt[3]{3})^6$ $(\sqrt[5]{b^2})^7$ $(\sqrt[4]{27}:\sqrt[4]{3})^2$

281. Arenda järgmised korrutised ja astmed:

1) $(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{3}$ 2) $(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{11}-\sqrt{10})$

$(\sqrt{7}+\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}$ $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

3) $(\sqrt{7}-1)^2$ 4) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$

$(\sqrt{10}-\sqrt{8})^2$ $(2\sqrt{8}-3)(9+4\sqrt{8})$

$(\sqrt{3}-1)^3$ $(2\sqrt{6}-4\sqrt{3})^3$

282. Teisenda järgmised astmed nii, et juuremärgi all oleks võimalikult vähe tegureid:

1) $(\sqrt{2a^2})^3$ 2) $(\sqrt[3]{4x^2})^2$ 3) $\left(\sqrt{\frac{bc^3}{3a}}\right)^3$

$(\sqrt{3hu^2})^5$ $(2\sqrt[3]{cu^6})^3$ $\left(\sqrt{\frac{a^3x}{5u^3}}\right)^3$

$(\sqrt[3]{5c^2N^2})^2$ $(\sqrt[4]{6R^2})^2$ $\left(\sqrt{\frac{2m^3x^5}{n^4}}\right)^4$

$(\sqrt[4]{7p^4q^2})^4$ $(\sqrt[4]{\pi R^3h})^2$ $\left(\sqrt[3]{\frac{3c^5x^2}{4f^3}}\right)^4$

4.9.5. TEOREEM ASTME JUURIMISEST.

Kui juuritavaks on aste, mille astendaja on juurija kordne, s. t. kui avaldises $\sqrt[n]{a^m}$ on $m=kn$, siis saab näidata, et

$$\sqrt[n]{a^{kn}}=a^k.$$

Astme juurimisel astendaja jagatakse juurijaga ja saadud jagatisega astendatakse astendatav juuritavas.

Tõestus. Avaldise a^{kn} võime kirjutada kujul $(a^k)^n$. Eelmise teoreemi ja juure definitsiooni põhjal saame nüüd, et

$$\sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = (\sqrt[n]{a^k})^n = a^k.$$

Näide.

$$\sqrt[7]{x^{21}} = x^{\frac{21}{7}} = x^3.$$

Teiseks juhtumiks, mis astme juurimisel märkimist väärib, on see juhtum, kus juurijal ja juuritava astendajal on ühine tegur. Sel juhul saab juurt taandada, s.t.

juurijat ja juuritava astendajat võib jagada nende ühise teguriga.

Olgu juurija ja juuritava astendaja ühine tegur märgitud tähega k; siis võime neid arve kirjutada kujul km ja kn ja juure taandamise teoreem avaldub kujul

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Tõestus. Tähistame $\sqrt[km]{a^{kn}}$ tähega x; teatavasti aga $a^{kn} = (a^n)^k$, mistõttu ka

$$\sqrt[km]{(a^n)^k} = x$$

ehk eelmise teoreemi põhjal

$$(\sqrt[km]{a^n})^k = x.$$

Astendades võrduse mõlemad pooled arvuga m, saame

$$(\sqrt[km]{a^n})^{km} = x^m$$

ehk

$$a^n = x^m.$$

Et x on niisugune arv, mille m-es aste on a^n, siis juure definitsiooni järgi

$$x = \sqrt[m]{a^n}.$$

Võttes arvesse, et tähega x tähistasime tõestuse algul avaldist $\sqrt[km]{a^{kn}}$, saamegi võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Näiteid.

$$\sqrt[9]{a^6} = \sqrt[3\cdot 3]{a^{3\cdot 2}} = \sqrt[3]{a^2};$$

$$\sqrt[8]{4x^6y^4} = \sqrt[8]{2^2x^6y^4} = \sqrt[8]{(2x^3y^2)^2} = \sqrt[4]{2x^3y^2}.$$

Vahetades võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}$$

pooled, saame juure laiendamise teoreemi:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[km]{a^{kn}},$$

s. t.

juurijat ja juuritava astendajat võib korrutada ühe ning sama arvuga.

Näiteid.

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{a^{10}}; \quad \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[15]{a^9}.$$

ÜLESANDEID.

283. Kirjuta järgmised avaldised juuremärgita:

1) $\sqrt{3^4}$ 2) $\sqrt[3]{a^6}$ 3) $\sqrt{a^2b^4}$

$\sqrt{2^6}$ $\sqrt[4]{a^4b^8}$ $\sqrt[3]{125a^6}$

$\sqrt[3]{64}$ $\sqrt[3]{27m^3n^6}$ $\sqrt[3]{8r^3}$

284. Taanda järgmised juured:

1) $\sqrt[4]{a^2}$ 2) $\sqrt[9]{a^6}$ 3) $\sqrt[4]{5^2}$

$\sqrt[6]{a^2}$ $\sqrt[12]{a^4b^8}$ $\sqrt[4]{64}$

$\sqrt[4]{a^2x^6}$ $\sqrt[12]{\frac{x^6}{y^3}}$ $\sqrt[6]{9}$

$\sqrt[6]{a^2b^4}$ $\sqrt[15]{u^5v^{10}}$ $\sqrt[6]{1000}$

$\sqrt[2n]{a^{2m}}$ $\sqrt[3n]{a^{3p}b^{9q}}$ $\sqrt[6]{\frac{25}{81}}$

285. Teosta juurte korrutamine või jagamine, juurt tarbe korral laiendades või taandades:

1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2^4}$ 2) $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt{a}$

$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2}$ $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[15]{a^2}$

$\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7}$ $\sqrt[4]{b} : \sqrt{b}$

4.9.6. TEOREEM JUURE JUURIMISEST.

Juure juurimisel juurijad korrutatakse ja tulemusega juuritakse antud juuritav arv.

Sümbolites:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Tõestus.

Tähistame avaldise $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ tähega x, nii et

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x.$$

Astendame selle võrduse pooled arvuga m, saame

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = x^m$$

ehk

$$\sqrt[n]{a} = x^m.$$

Astendame nüüd saadud võrduse kummagi poole veel arvuga n, siis saame

$$(\sqrt[n]{a})^n = (x^m)^n$$

ehk

$$a = x^{mn}.$$

Juure definitsiooni põhjal ongi nüüd

$$x = \sqrt[mn]{a}.$$

Viimasest võrdusest ja võrdusest

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$$

järeldame, et

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

m. o. t. t.

Näide.

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{D^{30}}} = \sqrt[15]{D^{30}} = D^{\frac{30}{15}} = D^2.$$

Nagu varem käsitletud võrdustes, nii võib ka kõnesolevas võrduses vahetada pooled; siis saame

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

või ka

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Seega on alati võimalik juurimist mingi kordarvuga mn teostada sel teel, et enne juuritakse näiteks arvuga n ja tulemust juuritakse arvuga m. Nii võime 4-nda juure arvust 625 leida sel teel, et leiame arvu 625 ruutjuure ja tulemusest veel kord ruutjuure:

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5.$$

Analoogiliselt leiame $\sqrt[6]{27}$:

$$\sqrt[6]{27} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3} = 1{,}732.$$

286. Kirjuta järgmised avaldised üheainsa juuremärgiga:

1) $\sqrt{\sqrt{5}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{13}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{29}}$; $\sqrt{2\sqrt{3}}$.

2) $\sqrt{\sqrt{N^3}}$ 3) $\sqrt[3]{\sqrt{ab^3}}$ 4) $\sqrt[4]{a^2\sqrt{256b^8}}$

$\sqrt[3]{\sqrt{h^3}}$ $\sqrt{\sqrt[5]{(3c^4)}}$ $\frac{1}{3}\sqrt{81\sqrt{16a^2b^4}}$

$\sqrt[5]{\sqrt{c^{10}}}$ $\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6c^9}}$ $\sqrt[3]{27\sqrt{a^3b^{12}}}$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4x^3}}$ $\sqrt[5]{\sqrt[3]{N^{10}f^{15}}}$ $\frac{1}{2a}\sqrt[5]{32a^5\sqrt{b^5}}$

$\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ $\sqrt{2x\sqrt[3]{\frac{a}{2}}}$ $\sqrt{\sqrt[5]{a^{10}b^5}}$

287. Arvuta järgmiste juurte väärtused, kasutades ruut- ja kuupjuurte tabeleid:

1) $\sqrt[4]{4}$ 2) $\sqrt[4]{16}$ 3) $\sqrt[6]{25}$ 4) $\sqrt[6]{100}$

$\sqrt[6]{36}$ $\sqrt[6]{27}$ $\sqrt[6]{144}$ $\sqrt[4]{1331}$

$\sqrt[8]{81}$ $\sqrt[8]{625}$ $\sqrt[8]{1296}$ $\sqrt[12]{10000}$

4.10. JUURAVALDISTE TEISENDAMISI.

Juuravaldisteks *nimetame niisuguseid avaldisi, mis sisaldavad juuri.*

Näiteks

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3};\quad \left(10-2\sqrt[5]{100}\right)^2;\quad \frac{1}{3-\sqrt{5}}.$$

Nende avaldiste väärtusi saab arvutada vaid ligikaudu, milleks asendame avaldises esinevad juured nende ligikaudsete väärtustega, tavaliselt 2-, 3- või 4-kohaliste kümnendmurdudega, ja teostame avaldises näidatud tehted. Töö hõlbustamiseks on sageli

kohane avaldist enne teisendada. Teisendamise võtteist käsitleme kahte:

a) teguri toomine juuremärgi alt juuremärgi ette;

b) juure kaotamine murru nimetajast või lugejast.

Esimene teisendus põhineb kas korrutise või jagatise juurimise teoreemil ja vastavalt sellele teostub see kas nii:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$$

või nii:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{a}.$$

Teine teisendus — juure kaotamine murru nimetajast või lugejast — toimub murru lugeja ja nimetaja korrutamisel kohaselt valitud juuravaldisega.

Näiteid.

1. $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \dfrac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \dfrac{a \cdot \sqrt{b}}{b} = \dfrac{a}{b}\sqrt{b}.$

2. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \dfrac{a\sqrt[3]{b^2}}{b} = \dfrac{a}{b}\sqrt[3]{b^2}.$

3. $\dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}.$

4. $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \dfrac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \dfrac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2} = \dfrac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$

Nende teisendusvõtete kasutamist selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Arvutada avaldise

$$4\sqrt{63}-5\sqrt{28}-2\sqrt{7}+\sqrt{20}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et kõigepealt leiame tabeli abil kõik antud avaldises esinevad juured, siis teostame nõutavad korrutamised ja seejärel liitmised ning lahutamised. Tunduvalt hõlpsamini jõuame eesmärgile antud avaldist teisendades. Nii saame:

$$4\sqrt{63}-5\sqrt{28}-2\sqrt{7}+\sqrt{20}=4\sqrt{9\cdot 7}-5\sqrt{4\cdot 7}-2\sqrt{7}+$$
$$+\sqrt{4\cdot 5}=4\cdot 3\sqrt{7}-5\cdot 2\sqrt{7}-2\sqrt{7}+2\sqrt{5}=$$
$$=12\sqrt{7}-10\sqrt{7}-2\sqrt{7}+2\sqrt{5}=2\sqrt{5}.$$

Avaldise väärtuse arvutamine algkuju järgi nõuab 4 juurimis-, 2 korrutamis-, 2 lahutamistehte ja 1 liitmistehte, s. o. 10 tehte sooritamist. Avaldise väärtuse arvutamine teisendatud kuju järgi nõuab kõigest ühe juure leidmist ja üht korrutamist. Võttes tabelist $\sqrt{5}$ lähisväärtuse 2,236, saame avaldise väärtusena 4,472. Kontrolliks märgime, et $2\sqrt{5}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{20}$ ehk tabeli järgi 4,472.

Ülesanne 2. Arvutada avaldise $\frac{26}{5\sqrt{13}}$ väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et võtame tabelist $\sqrt{13}$ näiteks neljakohalise lähisväärtuse, korrutame selle 5-ga ja jagame 26 saadud korrutisega. Et hoiduda tülikast jagamistehtest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juure. Selleks korrutame murru lugejat ja nimetajat arvuga $\sqrt{13}$. Nii saame:

$$\frac{26}{5\sqrt{13}}=\frac{26\cdot\sqrt{13}}{5\cdot 13}=\frac{2}{5}\sqrt{13}=0{,}4\sqrt{13}.$$

Avaldise väärtuse arvutamine teisendatud kuju järgi nõuab ühtainsat korrutamist, kui $\sqrt{13}$ lähisväärtus võetakse tabelist.

Ülesanne 3. Arvutada avaldise

$$\frac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{15}}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et leiame tabelist $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ näiteks neljakohalised lähisväärtused, arvutame nende vahe ja jagame 8 selle vahega. Et hoiduda tülikast jagamistehtest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juured. Selleks korrutame murru lugeja ja nimetaja summaga $\sqrt{19}+\sqrt{15}$:

$$\frac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{15}}=\frac{8(\sqrt{19}+\sqrt{15})}{(\sqrt{19}-\sqrt{15})(\sqrt{19}+\sqrt{15})}=$$
$$=\frac{8(\sqrt{19}+\sqrt{15})}{19-15}=\frac{8}{4}(\sqrt{19}+\sqrt{15})=2(\sqrt{19}+\sqrt{15}).$$

Antud avaldise väärtuse arvutamine teisendatud kuju järgi nõuab vaid üht liitmis- ja üht korrutamistehet, kui $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ lähisväärtused on teada.

Ülesanne 4. Vabastada murru

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$$

nimetaja juurtest.

Lahendus. Laiendame antud murdu arvude $\sqrt[3]{4}$ ja $\sqrt[3]{2}$ vahe mittetäieliku ruuduga. Saame

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2})} = \frac{\sqrt[3]{16}-2+\sqrt[3]{4}}{4+2} =$$

$$= \frac{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}}{6}.$$

Ülesanne 5. Vabastada murru

$$\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}{3}$$

lugeja juurtest.

Lahendus. Laiendame murdu arvude $\sqrt[3]{7}$ ja $\sqrt[3]{4}$ summa mittetäieliku ruuduga.

Saame

$$\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}{3} = \frac{(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})}{3(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})} = \frac{3}{3(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+2\sqrt[3]{2}}.$$

ÜLESANDEID.

288. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

1) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{\frac{3}{20}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 3) $\sqrt{1\frac{1}{2}}$ 4) $\sqrt{3\frac{1}{7}}$

$\sqrt{\frac{5}{12}}$ $\sqrt{1\frac{5}{18}}$ $\sqrt{2\frac{1}{50}}$

$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

289. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne täisavaldis:

1) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 2) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ 3) $\sqrt[4]{\frac{x}{y^3}}$

$\sqrt{\frac{m}{2n}}$ $\sqrt{\frac{5x}{8a}}$ $\sqrt{\frac{p}{q^3}}$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$ $\sqrt[4]{\frac{5x}{y^2}}$ $\sqrt[5]{\frac{a^2}{d^3}}$

$\sqrt[4]{\frac{m^5}{n}}$ $\sqrt[3]{\frac{250}{3x}}$ $\sqrt[5]{\frac{243}{49a^3}}$

290. Kirjuta järgmised juuravaldised kujul, mille nimetajas puudub juur, ja arvuta avaldiste väärtused:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ $\frac{7}{2\sqrt{7}}$ $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{27}}$

$\frac{6}{\sqrt{6}}$ $\frac{6}{\sqrt{18}}$ $\frac{10}{3\sqrt[3]{25}}$ $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$

291. Kirjuta järgmised avaldised kujul, mille nimetajas ei esine juuri:

1) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 2) $\frac{a}{\sqrt{a}}$ 3) $\frac{m}{\sqrt{2n}}$ 4) $\frac{3p}{\sqrt{3q}}$

$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{125}}$ $\frac{a^2}{x\sqrt{ax}}$ $\frac{4xy}{\sqrt{2xy^3}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\frac{3}{\sqrt[3]{6}}$ $\frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}}$

292. Kirjuta järgmised avaldised kujul, mille nimetajas ei esine juurt, ja arvuta avaldiste väärtused:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ 2) $\frac{21}{5+\sqrt{2}}$ 3) $\frac{12}{5-\sqrt{13}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ $\frac{8}{\sqrt{15}-\sqrt{13}}$

$\frac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\frac{19}{3\sqrt{11}-4\sqrt{5}}$ $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-4}$

293. Anna järgmistele murdudele kuju, mille nimetaja on juurevaba:

1) $\frac{n}{\sqrt{u}-1}$ 2) $\frac{w}{w\sqrt{w}+1}$ 3) $\frac{a^2-b}{a-\sqrt{b}}$

$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}-\sqrt{x}}$ $\frac{10x}{\sqrt{x}+\sqrt{5x}}$ $\frac{a+2\sqrt{x}}{a-2\sqrt{x}}$

$\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}$ $\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{3\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$ $\frac{u-2\sqrt{u}}{u+3\sqrt{u}}$

294. Kirjuta järgmised avaldised kujul, mille lugejas ei esine juuri:

1) $\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}$ 2) $\frac{1+\sqrt[3]{a}}{a}$ 3) $\frac{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{1-\sqrt[3]{a}}$

$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ $\frac{1-\sqrt[3]{a}}{a}$ $\frac{\sqrt[3]{m}+1}{2}$

$\frac{a-2\sqrt{x}}{a+2\sqrt{x}}$ $\frac{1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{1-\sqrt[3]{a}}$ $\frac{\sqrt[3]{n}-1}{3}$

295. Koonda järgmised juuravaldised:

1) $6\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ 2) $10\sqrt[3]{5}-9\sqrt[3]{5}$ 3) $a\sqrt{x}+\sqrt{x}$

$8\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ $\sqrt[5]{4}+4\sqrt[5]{4}$ $m\sqrt[3]{d}-2n\sqrt[3]{d}$

$m\sqrt{7}+n\sqrt{7}$ $a\sqrt[3]{x}+b\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[4]{3f}-5\sqrt[4]{3f}$

$a\sqrt{z}-2\sqrt{z}$ $k\sqrt[n]{a}+\frac{\sqrt[n]{a}}{k}$ $a^2\sqrt[5]{b}-a\sqrt[5]{b}$

296. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult väheste ja lihtsate juurte abil:

1) $8\sqrt{7}+5\sqrt[3]{7}-10{,}7\sqrt{7}-\sqrt[3]{7}$

$3\sqrt{10}+\sqrt[3]{10}-5{,}5\sqrt[3]{10}-0{,}7\sqrt{10}$

$2\sqrt{N}-\sqrt{M}+4\sqrt{N}-6\sqrt{M}$

$\sqrt[3]{H}+3\sqrt{H}-2\sqrt{H}+\sqrt[3]{H}$

2) $6\sqrt{3}-7\sqrt{12}+\sqrt{75}-3\sqrt{48}+3\sqrt{108}+\sqrt{300}$

$\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{40}+9\sqrt[3]{250}-2\sqrt[3]{128}+2\sqrt[3]{432}$

$6\sqrt{18}-5\sqrt[3]{54}-4\sqrt{72}+4\sqrt[3]{1024}$

$5\sqrt[3]{72}-7\sqrt{45}+11\sqrt[3]{9000}-10\sqrt{180}$

3) $4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$2\sqrt[3]{2}\cdot 5\sqrt[3]{12}\cdot\frac{3}{5}\sqrt[3]{32}$

$5\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{18}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{20}$

$\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}\cdot 7\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{16}$

4) $5\sqrt{3}:(2\sqrt{12})$

$\sqrt{48}:\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$

$\frac{3}{5}\sqrt{56}:(3\sqrt{8})$

$\sqrt{91}:\left(\frac{3}{4}\sqrt{39}\right)$

297. Leides tabelist vastavate arvude ruut- ja kuupjuured, arvuta järgmiste juuravaldiste väärtused:

1) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$

$\sqrt{21}$

2) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$

$\sqrt{14}$

$\sqrt{98}$

3) $\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{35}$

$\sqrt[3]{45}$

4) $\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{49}$

$\sqrt[3]{448}$

5) $\sqrt{50}-\sqrt{28}+\sqrt{35}$

$2\sqrt{15}+\sqrt{27}-2\sqrt{75}$

$\sqrt[3]{18}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{200}$

298. Teisenda järgmised korrutised nii, et kõik tegurid oleksid juuremärgi all:

1) $2\sqrt{5}$ 2) $b\sqrt[3]{c^2}$ 3) $ax^2\sqrt[3]{a}$

$h^2\sqrt{u}$ $N^2\sqrt[5]{N}$ $3D^2\sqrt[3]{3D}$

$c^2\sqrt{\frac{b}{c}}$ $4x\sqrt[3]{\frac{m}{16x^2}}$ $\frac{1}{2}a^2u^3\sqrt[3]{\frac{4}{au^2}}$

299. Teisenda järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne avaldis:

1) $\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}$ 2) $3N\sqrt{N^2-\frac{5}{9}N^2}$

$\sqrt{b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ $\sqrt{4x^2-\frac{19}{25}x^6}$

$2\pi\sqrt{r^2-\frac{3}{8}r^2}$ $\sqrt{\frac{12}{25}R^4-\frac{4}{25}R^2}$

300. Lihtsusta järgmised korrutised:

1) $\frac{2}{a}\sqrt{3x}\cdot\frac{5}{a}\sqrt{6x}$ 2) $\sqrt{N}(\sqrt{N}-a\sqrt{aN})$

$m^2\sqrt{\frac{2}{m}}\cdot 3\sqrt{m}$ $\sqrt{2x}(\sqrt{2}+\sqrt{x})$

$h^2\sqrt[3]{2u}\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{4u^2}$ $m\sqrt{n}(\sqrt{mn}-5m\sqrt{n})$

$\pi\sqrt{aR^2}\cdot\frac{5R^2}{3}\sqrt[3]{a^2R}$ $3\sqrt{cD}(\sqrt{cD}+2\sqrt{aD})$

4.11. JUURVÕRRANDITE LAHENDAMISE NÄITEID.

Võrrandit, milles tundmatu esineb juuritavas, nimetatakse **juurvõrrandiks.**

Juurvõrrandid on näiteks võrrandid

$\sqrt{x}+\sqrt{2x}=3$

ja

$\sqrt[3]{x}+50=4.$

Seevastu võrrand

$$x\sqrt{2}+3=\sqrt{6}$$

ei ole juurvõrrand, sest tundmatu ei esine juuritavas.

Et lahendada juurvõrrand, selleks tuleb teda enne niisuguseks teisendada, et üheski juuritavas ei esineks tundmatut.

Allpool selgitame lähemalt juurvõrrandite lahendamise võtteid kolme näite varal.

1. Olgu vaja lahendada võrrand

$$x-\sqrt{x+2}=10.$$

Kui võrrandi vabastamiseks juurest tõstaksime ta otsekohe ruutu, siis võrrandi vasakul poolel peale juurevabade liikmete saaksime ka liikmete x ja $-\sqrt{x+2}$ kahekordse korrutise; seega jääks juur $\sqrt{x+2}$ ikkagi võrrandisse püsima. Seepärast talitame nii, nagu eespool öeldud: viime juure võrrandi ühele poolele ja kogume kõik muud liikmed teisele poolele; siis võrrand omandab kuju:

$$x-10=\sqrt{x+2}.$$

Tõstes selle võrrandi pooled ruutu, saame võrrandi

$$(x-10)^2=x+2$$

ehk pärast sulgude avamist ja koondamist

$$x^2-21x+98=0.$$

Selle võrrandi lahendid on 14 ja 7.

Asendades lähtevõrrandis tähe x ruutvõrrandi lahendiga 14, saame võrrandi vasakul poolel $14-\sqrt{14+2}$ ehk 10, s. o. sama arvu, mis seisab paremal poolel. Seega ruutvõrrandi lahend 14 on ka antud juurvõrrandi lahendiks.

Tehes sedasama ruutvõrrandi teise lahendiga, arvuga 7, saame juurvõrrandi vasakul poolel $7-\sqrt{7+2}$ ehk 4. Et aga paremal poolel seisab 10, siis arv 7 juurvõrrandit ei rahulda.

Arv 7 rahuldab küll võrrandit $x+\sqrt{x+2}=10$, kuid mitte antud võrrandit.

Lähtevõrrand ja temast poolte astendamisel saadud võrrand pole s a m a v ä ä r s e d, s. o. mitte kõik astendamisel saadud võrrandi lahendid pole ühtlasi ka lähtevõrrandi lahenditeks, sest astendamine tähendab korrutamist, ja korrutamisel tundmatut

sisaldava avaldisega võib saada võrrandi, millel on rohkem lahendeid kui antud võrrandil.

Lõppvõrrandi lahendit, mis ei rahulda lähtevõrrandit, nimetatakse lähtevõrrandi **võõrlahendiks.**

Arv 7 on seega antud juurvõrrandi võõrlahend ja selle võrrandi ainsaks lahendiks on 14.

Kõigest öeldust järeldub, et võrrandi teisendamisel astendamise teel võib tekkida võõrlahendeid. Seepärast

alati tuleb selgitada, missugused juurvõrrandi lahendamise tulemustest rahuldavad seda võrrandit.

2. Olgu antud lahendada võrrand

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+5}=1,$$

milles peale juurevaba liikme esineb kaks ruutjuurt tundmatuga juuritavas.

Kui tõstaksime ruutu selle võrrandi mõlemad pooled, siis vasakul poolel saaksime peale juurevabade liikmete ka juurte kahekordse korrutise. Et vältida selle keerulise avaldise tekkimist, teisendame võrrandit nii, et jätame vasakule poolele ainult ühe juure, näiteks esimese:

$$\sqrt{3x+4}=1+\sqrt{x+5}.$$

Tõstes nüüd võrrandi pooled ruutu, saame:

$$3x+4=1+2\sqrt{x+5}+x+5$$

ehk pärast koondamist ja taandamist

$$x-1=\sqrt{x+5}.$$

Tõstes uuesti mõlemad pooled ruutu, saame pärast koondamist võrrandi

$$x^2-3x-4=0.$$

Selle võrrandi lahendid on 4 ja -1.

Tehes lähtevõrrandis asendused $x=4$ ja $x=-1$, veendume, et esimene neist rahuldab lähtevõrrandit, teine aga ei rahulda. Seega antud võrrandi ainsaks lahendiks on 4.

3. Võrrandi

$$\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{5-x}=3$$

lahendamisel kasutame valemit

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b).$$

Saame

$$(\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{5-x})^3=27$$

ehk

$$4+x+5-x+3\sqrt[3]{4+x}\cdot\sqrt[3]{5-x}(\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{5-x})=27,$$

$$9+3\sqrt[3]{4+x}\cdot\sqrt[3]{5-x}(\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{5-x})=27.$$

Et antud võrrandi järgi

$$\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{5-x}=3,$$

siis saame

$$9+3\cdot 3\cdot\sqrt[3]{4+x}\cdot\sqrt[3]{5-x}=27$$

ehk

$$\sqrt[3]{(4+x)(5-x)}=2,$$

siit

$$x^2-x-12=0,$$

millest

$$x_1=4,\ x_2=-3.$$

Kontroll näitab, et mõlemad leitud arvud rahuldavad antud võrrandit.

ÜLESANDEID.

301. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{5x}=10$

2) $x-\sqrt{3x}=0$

3) $\sqrt{x}-\sqrt{2}=\sqrt{3}$

4) $\sqrt{x-1}-3=0$

5) $x-3+\sqrt{x^2}-1=0$

6) $\sqrt{x^2+8}=\sqrt{2x^2-2x}$

7) $\sqrt[3]{10x+46}=\sqrt[3]{7x+43}$

8) $\sqrt{x^2+10x}=12$

9) $\sqrt{6x+25}-x=3$

10) $3x-4\sqrt{x}-32=0$

302. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{2x}=8$

2) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{z}{8}}=z$

3) $\sqrt[3]{5x}=x$

4) $\sqrt[3]{x^2}=9$

5) $\sqrt[5]{v^5}=1024$

6) $\sqrt{x+7}=x$

7) $y-2=\sqrt{y}$

8) $\sqrt{10u-24}=u$

9) $x-11\sqrt{x}+24=0$

10) $x+1=\sqrt{2x+4}$

303. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{x+8}=x+2$

2) $\sqrt{x+8}=-x-2$

3) $\sqrt{x^2+16}+x=8$

4) $\sqrt{2x}-x=4$

5) $4x+2\sqrt{5-4x}=5$

6) $2a-\sqrt{x^2-8a}=1$

304. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{x-5}-\sqrt{x}+1=0$

2) $\sqrt{x}-\sqrt{x-28}=2$

3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{6}$

4) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+\sqrt{5}$

5) $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$

6) $\sqrt{a^2+x}+\sqrt{b^2-x}=a+b$

7) $\sqrt{x}+\sqrt{3x-a}=\sqrt{a}$

305. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 1 cm võrra pikem kui üks kaatet ja kolmnurga ümbermõõt on 56 cm. Leia kolmnurga küljed.

306. Täisnurkse kolmnurga kaatetite vahe on 7 cm ja kolmnurga ümbermõõt 30 cm. Leia kolmnurga küljed.

307. Kolmnurga kahe külje suhe on 5 : 8, kolmas külg on 39 cm ja sellele tõmmatud kõrgus 24 cm. Leia kolmnurga kaks külge.

308. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$

2) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-11}=\sqrt{x-3}$

3) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x+5}=\sqrt{17x-4}$

4) $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{3x+4}$

5) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{7x-27}=\sqrt{3x+4}$

6) $5\sqrt{3x+4}-3\sqrt{2x-5}=4\sqrt{3x-5}$

7) $x+\sqrt{2ax+x^2}=a$

8) $2a-\sqrt{2ax+x^2}=x$

9) $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$

10) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2a}$

11) $\sqrt{3x+a+2b}-\sqrt{3x+a-2b}=2\sqrt{x-a}$

12) $\sqrt{ax+b^2}+\sqrt{2b(x-a)}=\sqrt{ax+4bx+b^2}$

309. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $\sqrt[3]{7+x}+\sqrt[3]{9-x}=4$

2) $\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{6+x}=1$

3) $\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{7-x}=3$

4) $\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{3x-5}=1$

4.12. ASTENDAJA 0.

Olgu a mingi arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Me teame, et siis

$a^m : a^n = a^{m-n}$, kui $m > n$.

Laiendame nüüd astme mõistet nii, et ka siis, kui $m = n$ või $m < n$, kehtiks võrdus

$a^m : a^n = a^{m-n}$.

Kui $m = n$ ja $a \neq 0$, siis

$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{n-n} = a^0$.

Avaldisel a^0 ei ole astme senise definitsiooni järgi mõtet.

Et vaadeldaval juhul, kui $m=n$, $a^m=a^n$ ja et kahe võrdse arvu jagatis on 1, siis tuleb sümbolit a^0 mõista arvuna 1:

$$\boxed{a^0=1}$$

Nii on

$$7^0=1 \qquad (-9)^0=1 \qquad \left(\frac{5}{8}\right)^0=1.$$

Võrdust $a^0=1$ loetakse õigeks ainult siis, kui $a\neq 0$; 0^0, jäetakse aga ilma arvu tähenduseta.

4.13. NEGATIIVNE ASTENDAJA.

Kui $m<n$ ja $a\neq 0$, siis

$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-(n-m)}$, kus $n-m>0$.

Saadud avaldisel kui negatiivse astendajaga astmel pole astme senise definitsiooni järgi mõtet.

Kirjutame vaadeldava astmete jagatise murru kujul ja jagame selle murru lugejat ja nimetajat arvuga a^m:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m : a^m}{a^n : a^m} = \frac{1}{a^{n-m}};$$

seega

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ kui } m<n.$$

Niisiis tuleb avaldist $a^{-(n-m)}$ mõista naturaalarvulise astendajaga astme a^{n-m} pöördväärtusena:

$$a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Tähistades vahet $n-m$ üheainsa tähega r, näeme, et

$$\boxed{a^{-r}=\frac{1}{a^r}.}$$

Nii on

$$4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$$

ja

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = 1 : \frac{5}{2} = \frac{2}{5}.$$

Astme mõiste laiendamisel võtsime aluseks, et jääks kehtima võrdsete alustega astmete jagamise reegel. Saab näidata, et ka teised tehted, mis kehtivad naturaalarvulise astendajaga astmete korral, jäävad kehtima samuti täisarvulise astendajaga astmete korral.

Näiteks on

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}.$$

Tõepoolest,

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}.$$

Samuti

$$(a^{-m})^n = a^{-mn}.$$

Tõepoolest,

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

Samuti

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n,$$

sest

$$a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n.$$

Iga avaldist, milles esineb negatiivseid astendajaid, saame murrujoone abiksvõtmisel kirjutada nii, et esineksid vaid positiivsed astendajad. Näiteks

$$n^2x^3 \cdot \frac{2}{5} n^{-3}x^{-2} = \frac{2}{5} n^{-1}x = \frac{2x}{5n}.$$

Tehnikaalases praktikas kasutatakse negatiivset astendajat sageli. Allpool on toodud mõned näited, mil kasutatakse negatiivset astendajat.

1) Parema ülevaate saamiseks füüsikalistest konstantidest, kui konstandid on väiksed kümnendmurrud. Nii kirjutame näiteks joonpaisumise koefitsiendid järgmiselt:

plaatina	$0{,}90 \cdot 10^{-5}$	kuld	$1{,}42 \cdot 10^{-5}$
raud	$1{,}20 \cdot 10^{-5}$	vask	$1{,}65 \cdot 10^{-5}$.

Kirjutades vase joonpaisumise koefitsiendi negatiivset astendajat kasutamata, saame $1{,}65 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000165$.

2) Väikeste mõõtühikute puhul, näiteks:
1 mikromeeter $= 10^{-6}$ m $= 10^{-3}$ mm;
1 nanomeeter $= 10^{-9}$ m $= 10^{-6}$ mm.
Vesiniku aatomi läbimõõt on 10^{-8} cm;
aatomituuma läbimõõt on ligikaudu 10^{-12} cm;
elektroni läbimõõt on $3 \cdot 10^{-13}$ cm;
vesiniku aatomi mass on $1{,}65 \cdot 10^{-24}$ g.

3) Murrujoone vältimiseks mõõtühikute nimetuste kirjutuses, näiteks:

kiiruse mõõtühik $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kirjutatakse $1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;

kiirenduse mõõtühik $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ kirjutatakse $1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$;

tiheduse mõõtühik $1\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ kirjutatakse $1\ \text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$.

ÜLESANDEID.

310. Allpool on antud pikkusmõõtude tabel.

	km	m	cm	mm	μm	*nm*
1 km (kilomeeter)	1	10^3	10^5	10^6	10^9	10^{12}
1 m (meeter)	10^{-3}	1	10^2	10^3	10^6	10^9
1 cm (sentimeeter)	10^{-5}	10^{-2}	1	10	10^4	10^7
1 mm (millimeeter)	10^{-6}	10^{-3}	10^{-1}	1	10^3	10^6
1 μm (mikromeeter)	10^{-9}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-3}	1	10^3
1 nm (nanomeeter)	10^{-12}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-3}	1

Avalda meetrites $3{,}5 \cdot 10^2$ cm.
„ sentimeetrites $0{,}2 \cdot 10^{-3}$ km.
„ $(\text{m} \cdot \text{sec}^{-1})$-tes kiirus 6 $\text{m} \cdot \text{h}^{-1}$.
„ $(\text{km} \cdot \text{sec}^{-1})$-tes valguse kiirus $2{,}99790 \cdot 10^{10}$ $\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$.

311. Juukse kasvamise kiirus on $3 \cdot 10^{-7}$ $\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$. Mitu millimeetrit kasvab juus ööpäevas?

312. Maa ekvaatori raadius on $6{,}378245 \cdot 10^3$ m. Avalda see kilomeetrites.

313. Maa ümbermõõt meridiaani mööda on $4{,}0008548 \cdot 10^4$ m. Mitu kilomeetrit see on?

314. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1)	2)	3)	4)
3^{-2}	6^{-2}	2^{-5}	10^{-7}
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(1\frac{3}{5}\right)^{-2}$	$\left(3\frac{1}{3}\right)^{-3}$
$1{,}7^{-2}$	$0{,}9^{-1}$	$2{,}4^{-3}$	$3{,}6^{-2}$
$4^0 \cdot 5^{-2}$	$2^5 \cdot 3^{-4}$	$(-1)^4 \cdot 8^{-2}$	$(-4)^{-1} \cdot 10^{-3}$
$\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} \cdot 2^{-3}$	$\left(-\frac{16}{7}\right)^{-2} \cdot 4^4$	$\left(\frac{7}{12}\right)^{-2} \cdot 6^0$	$(-0{,}2)^{-5} \cdot 10^3$

315. Kirjuta järgmised murrud nimetajaist vabade avaldistena:

1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{u^5}$
$\frac{2}{n^3}$	$\frac{4}{v}$	$\frac{5}{N^6}$	$\frac{a}{b^4}$
$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{1}{2x^3}$	$\frac{u}{3v^4}$	$\frac{m}{p^2p^5}$
$\frac{0{,}7}{cx^2}$	$\frac{5a}{x^3}$	$\frac{9a}{8b^2u^3}$	$\frac{8}{10c^2u^4}$
$\frac{100}{\pi D^2}$	$\frac{3c^3}{10gh^2}$	$\frac{0{,}2p}{q^2r^3}$	$\frac{7s^3}{23rh^2}$

316. Kirjuta järgmised avaldised nõnda, et neis esineksid ainult positiivsed astendajad:

1)	2)	3)
a^{-1}	$3b^0$	$2^{-1}c^{-1}$
N^{-2}	$5u^{-3}$	$7^{-1}m^{-2}$
$4h^{-3}$	$8ab^{-2}$	$0{,}9a^{-2}x^{-3}$
$\frac{3^0}{x^{-4}}$	$\frac{m}{2n^{-3}}$	$\frac{4a}{5bc^{-2}}$
$\frac{7a^{-1}}{N^{-2}u^{-3}}$	$\frac{m^{-2}n^{-3}}{15p^{-2}}$	$\frac{7au^{-5}}{3a^{-3}u^0}$

317. Kasutades arvu 10 astmeid avalda:

1) 1 km meetrites
1 mm sentimeetrites
1 kg milligrammides
0,7 ha ruutmeetrites
1,4 l kuupsentimeetrites

2) l m millimeetrites
a cm meetrites
s m^2 aarides
V cm^3 liitrites
P g tonnides

318. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1) $7^3 \cdot 7^{-4}$ 2) $3 \cdot 5^6 \cdot 5^{-8}$ 3) $7{,}2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4}$

$5^3 : 5^{-1}$ $2 \cdot 10^6 : 10^{-6}$ $3{,}43 \cdot 10^{-6} : (0{,}49 \cdot 10^{-8})$

$4^5 \cdot 4^{-3}$ $5{,}7 \cdot 9^{-3} : 9^0$ $8 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}125 \cdot 10^{12}$

$3^{-6} : 3^{-4}$ $10^4 : (5 \cdot 10^{-2})$ $1{,}74 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^0$

$10^{-4} : 10^{-7}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^0 : (2 \cdot 10^{-3})$ $2{,}25 \cdot 10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^3$

319. Kirjuta järgmised arvud kümne astme kordsetena:

1) 70 2) 900 3) 1400 4) 1750 000

$\frac{9}{10}$ $\frac{13}{100}$ $\frac{325}{1000}$ $\frac{112}{10000}$

$\frac{11}{20}$ $\frac{7}{500}$ $\frac{15}{4000}$ $\frac{283}{500000}$

0,72 3,2 1,11 0,033

0,025 1,375 5,0081 0,000 765

320. Teosta järgmised tehted ja kirjuta tulemus, kasutades vaid positiivseid astendajaid:

1) $a^5 : a^0$ 2) $8{,}5q^{-3} : 1{,}5q^{-5}$ 3) $5a^{-4}x^2 : a^2$

$h^{10} : (-h)^0$ $10p^{-5} \cdot 0{,}2p^8$ $3a^0b^{-2} \cdot \frac{2}{3} b^{-3}$

$3m^5 \cdot (-n)^{-1}$ $\frac{3}{2} u^3 : 6u^{-2}$ $f^0g^1h^2 \cdot \frac{7}{12} f^{-2}g^{-1}h^0$

321. Lihtsusta järgmised avaldised ja teisenda tulemused nõnda, et neis esineksid üksnes positiivsed astendajad:

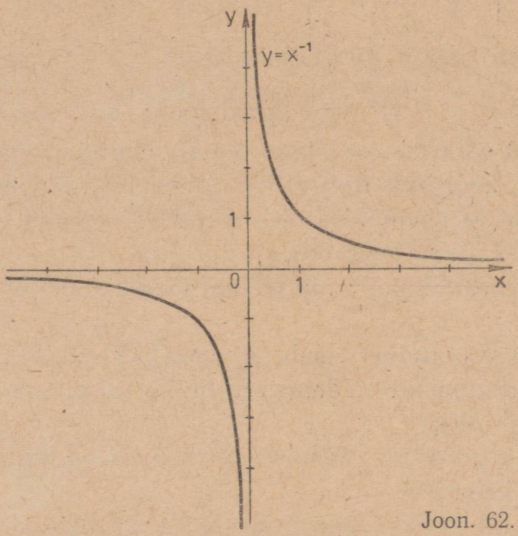
1) $(N^{-2})^2$ 2) $\left(\frac{1}{2} m^3\right)^{-2}$ 3) $(0{,}1a^2x^{-1})^2$

$(a^{-1})^{-3}$ $(0{,}3h^{-2})^{-1}$ $(1{,}2H \cdot 5H)^{-2}$

$(cu^{-2})^{-2}$ $(3ax^4)^{-3}$ $\left(\frac{1}{2} x^{-1} \cdot 3x^{-2}\right)^{-4}$

4.14. FUNKTSIOONID $y=x^{-1}$ JA $y=x^{-2}$.

Funktsioon $y=x^{-1}$ ehk $y=\frac{1}{x}$ esitab x ja y vahelist **pöördvõrdelist sõltuvust.** Selle funktsiooni graafikuks on **hüperbool** (joon. 62).



Joon. 62.

Uurime nüüd funktsiooni $y=x^{-1}$ tema graafiku põhjal. Kõigepealt näeme, et see graafik koosneb kahest harust: üks asub teljestiku I veerandis, teine III veerandis. Paneme tähele, et kui x väärtus läheneb nullile negatiivselt poolelt, siis funktsiooni väärtus on negatiivne ja kasvab absoluutväärtuse poolest kuitahes suureks. Kui aga argumendi väärtus läheneb nullile positiivselt poolelt, siis funktsiooni väärtus on positiivne ja kasvab kuitahes suureks.

Mis sünnib funktsiooni x^{-1} väärtustega, kui x väärtus on negatiivne ja ta absoluutväärtus saab kuitahes suureks?

Mis sünnib funktsiooni x^{-1} väärtustega, kui x väärtus kasvab kuitahes suureks?

Graafikult ilmneb, et funktsioon $y=x^{-1}$ on kahanev. Selgita seda!

Edasi näeme, et vaadeldaval funktsioonil nullkohti pole ning et ta positiivsuspiirkonnaks on $x>0$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x<0$.

Funktsiooni $y=x^{-2}$ graafiku joonestamiseks koostame tema väärtuste tabeli:

x	0,01	0,1	0,5	1	2	3	4	5
x^{-2}	10000	100	4	1	0,25	0,11	0,06	0,04

Et $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ ja $x^2=(-x)^2$, siis funktsiooni x^{-2} väärtus ei muutu, kui argumendi väärtus asendada tema vastandarvuga.

Konstrueerides koordinaatteljestikus nendele väärtuspaaridele vastavad punktid ja ühendades need sujuva kõveraga, saame funktsiooni $y=x^{-2}$ graafiku (joon. 63).

Tuginedes sellele graafikule, anna vastus järgmistele küsimustele.

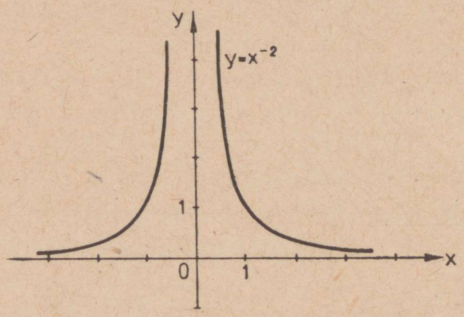
a) Missugustes veerandites asub see graafik?

b) Kas leidub argumendi väärtusi, mille korral ei saa funktsiooni väärtust leida? Miks?

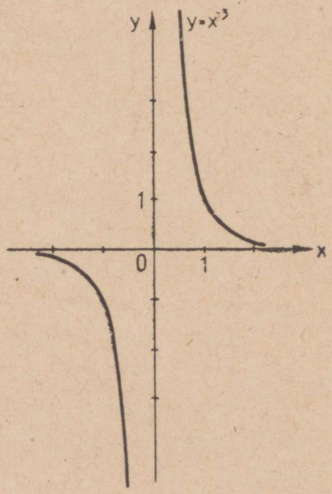
c) Missuguses argumendi väärtuste piirkonnas on funktsioon kasvav, missuguses kahanev?

d) Kuidas muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi väärtus läheneb nullile negatiivselt (positiivselt) poolelt?

e) Kuidas muutub funktsiooni väärtus, kui argumendi absoluutväärtus kasvab?



Joon. 63.



Joon. 64.

322. Joonisel 64 on antud funktsiooni $y=x^{-3}$ graafik. Uuri seda funktsiooni graafiku põhjal!

4.15. MURRULISE ASTENDAJAGA ASTE.

Olgu a mingi positiivne arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Astme juurimise teoreemi järgi

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},$$

kui arv m on arvu n kordne. Astendaja $\frac{m}{n}$ on siis täisarv. Sel puhul sümbol $a^{\frac{m}{n}}$ tähendab $\frac{m}{n}$ teguri korrutist, milles kõik tegurid on võrdsed arvuga a.

Laiendame nüüd astme mõistet murrulise astendajaga astme puhuks. Selleks loeme võrduse

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

kehtivaks ka siis, kui $\frac{m}{n}$ on murdarv. Seega

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}}$$

iga täisarvulise m ja n korral.
Selle kokkuleppe kohaselt

$$49^{\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7,$$

$$27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(27)^2}=\left(\sqrt[3]{27}\right)^2=3^2=9,$$

$$125^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{125^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{125}}=\frac{1}{5}.$$

Saab näidata, et kõik tehted astmetega toimuvad ühtede ja samade teoreemide järgi, olenemata sellest, kas astendajad on täis- või murdarvud.

Näiteks on

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Tõepoolest,

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} =$$

$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Iga avaldist, milles esineb murrulisi astendajaid, saab kirjutada juuremärgi abil nii, et esineksid vaid täisarvulised astendajad.

Näide.

$$\left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{5}} = x^{-\frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 5}} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Et juurt saab kirjutada murrulise astendajaga astmena ja murrulise astendajaga astet saab kirjutada juuremärgi abil, siis arvutuste asemel juurtega võib sooritada arvutused murrulise astendajaga astmetega ja ümberpöördult.

Kumba eelistada, kas juuremärki või murrulist astendajat, see sõltub lahendatavast probleemist. Mõnikord on otstarbekohasem esimene, mõnikord teine viis.

ÜLESANDEID.

323. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1) $9^{\frac{1}{2}}$ 2) $16^{\frac{3}{2}}$ 3) $27^{\frac{1}{3}}$ 4) $64^{\frac{2}{3}}$

$1{,}44^{\frac{1}{2}}$ $0{,}001^{\frac{5}{3}}$ $0{,}343^{\frac{4}{3}}$ $0{,}729^{\frac{2}{3}}$

$\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ $\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\left(\frac{1}{519}\right)^{\frac{4}{3}}$

324. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata:

$\sqrt{5x}$ $7\sqrt[3]{c^2}$ $0{,}1\sqrt[3]{D^2}$ $\sqrt[5]{(3cu)^3}$

$0{,}7\sqrt[5]{a^2b^3}$ $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{H^2u^4}$ $\frac{1}{2}\sqrt[3]{N^4x}$ $\sqrt[5]{a^3x^5}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$ $\frac{1}{5\sqrt{k}}$ $\frac{1}{\sqrt[5]{u^2}}$ $\sqrt[3]{\frac{m}{n^2}}$

325. Kirjuta järgmised avaldised juurtena:

1) $19^{\frac{1}{2}}$ 2) $7^{\frac{1}{2}}$ 3) $83^{\frac{1}{4}}$ 4) $100^{\frac{1}{5}}$

$N^{\frac{1}{6}}$ $u^{\frac{4}{3}}$ $a^{\frac{3}{5}}$ $x^{\frac{5}{2}}$

$(2h)^{\frac{4}{3}}$ $\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$ $(10f)^{0,1}$ $(mn^2)^{0,3}$

326. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata:

1) $\sqrt[3]{a^{-2}}$ 2) $\sqrt[5]{x^{-3}}$ 3) $\frac{\sqrt{(a+bx)^3}}{a}$ 4) $\sqrt[4]{c^{-1}d^{-3}}$

$\frac{a}{\sqrt{a+bx}}$ $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$ $\frac{5}{\sqrt{2px}}$ $\frac{7}{10\sqrt[3]{mn^2}}$

$\sqrt[5]{\left(\frac{2}{N}\right)^3}$ $\sqrt{\frac{b}{a+bx}}$ $\sqrt[3]{\frac{a^2}{cx}}$ $\sqrt[4]{\frac{\pi D^2}{S^3}}$

327. Kirjuta järgmised avaldised, kasutamata negatiivseid ja murrulisi astendajaid:

1) $27^{-\frac{2}{3}}$ 2) $36^{-\frac{1}{2}}$ 3) $8^{-\frac{4}{3}}$ 4) $64^{-\frac{3}{4}}$

$0{,}343^{-\frac{1}{3}}$ $0{,}01^{-\frac{1}{2}}$ $0{,}0016^{-\frac{3}{4}}$ $0{,}0169^{-\frac{2}{3}}$

$\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $\left(\frac{216}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ $\left(\frac{625}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}$

$3a^{-\frac{3}{4}}f^{\frac{3}{4}}$ $\left(\frac{3c}{x}\right)^{-\frac{3}{2}}$ $(5kw^3)^{-\frac{1}{3}}$ $\left(\frac{22}{7}ah^3\right)^{-\frac{2}{3}}$

328. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

1) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$ 2) $d^{\frac{1}{2}}\cdot d^{\frac{1}{3}}$ 3) $f^{\frac{1}{3}}\cdot f^{\frac{2}{3}}$ 4) $h^0\cdot h^{\frac{3}{4}}$

$N^{\frac{1}{2}}\cdot N^{-\frac{1}{4}}$ $u\cdot u^{-\frac{2}{3}}$ $p^{-\frac{1}{2}}\cdot p^0$ $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{4}}$ $l^0\cdot l^{-\frac{3}{2}}$ $D^{\frac{1}{3}}\cdot D^{-\frac{3}{4}}$ $c^{-\frac{1}{2}}\cdot c^{-\frac{2}{3}}$

329. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

1) $A : A^{\frac{1}{2}}$ 2) $c^2 : c^{\frac{1}{3}}$ 3) $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{3}{2}}$ 4) $a^{\frac{3}{5}} : a^{\frac{2}{3}}$

$c^2 : c^{-\frac{1}{3}}$ $f^{\frac{5}{6}} : f^{\frac{1}{2}}$ $h^{\frac{3}{4}} : h^{\frac{2}{3}}$ $u^{\frac{2}{3}} : u^{-2}$

$N^{-1} : N^{\frac{3}{2}}$ $z^{\frac{4}{5}} : z^{-1}$ $q^0 : q^{-\frac{1}{2}}$ $l^{\frac{1}{3}} : l^{-\frac{5}{6}}$

330. Kirjuta järgmised avaldised juuremärki kasutamata, toimeta nõutavad tehted ja anna tulemus juure kujul:

1) $\sqrt[3]{u} \cdot \sqrt[4]{u^2}$ 2) $\sqrt{c^3} : \sqrt[3]{c}$ 3) $\sqrt{3x} \cdot \sqrt[3]{9x^2}$

$\sqrt[4]{D^2} \cdot \sqrt{D^3}$ $\sqrt[3]{h^4} : \sqrt{h}$ $\sqrt[4]{a^3x^2} : \sqrt[3]{a^2x^2}$

331. Kirjuta järgmised avaldised, kasutades ainult positiivseid täisarvulisi astendajaid:

1) $(x^0)^{\frac{1}{2}}$ 2) $(h^2)^{\frac{3}{2}}$ 3) $(u^{-1})^{\frac{2}{3}}$ 4) $(D^{-1})^{-\frac{1}{2}}$

$(a^{\frac{2}{3}})^3$ $(N^{-1})^{\frac{2}{3}}$ $(c^{-2})^{-\frac{1}{3}}$ $(x^{-\frac{1}{3}})^6$

$N^{\frac{2}{3}} \cdot N^{\frac{3}{5}}$ $(2u^{\frac{3}{4}})^4$ $x : x^{-\frac{3}{4}}$ $H^2 : H^{\frac{2}{3}}$

KORDAMISÜLESANDEID.

332. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\left(\frac{2}{3}a^2\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4a^2}\right)^2$ 2) $\left(\frac{2u}{v}\right) \cdot \left(\frac{3v}{2u}\right)^3$

$\left(\frac{4x^3}{y^2}\right)^2 : \left(-\frac{2x}{y}\right)^3$ $\left(\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1} : \left(\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1}$

333. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{32}$ 2) $\sqrt[4]{a^{-13}} : \sqrt[4]{a^{-1}}$ 3) $\sqrt[n]{a^{-3n}b^{2n}}$

$\sqrt[3]{750} : \sqrt[3]{6}$ $\sqrt[3]{a^{3n+8}} : \sqrt[3]{a^{n+3}}$ $\sqrt[5]{-a^{16}} : \sqrt[5]{a}$

334. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\sqrt[3]{\frac{27a^3}{64}}+2\sqrt[4]{\frac{81b^8}{16}}$ 2) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})$ $\frac{\sqrt{m^2p-m^2q}-\sqrt{n^2p-n^2q}}{\sqrt{p-q}}$

335. Vabasta järgmiste murdude nimetajad juurtest:

1) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{5}+1}$ 3) $\frac{8+3\sqrt{2}}{8-3\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\frac{2\sqrt{2}+5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-5\sqrt{5}}$

336. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ 2) $\frac{16}{\sqrt{8}}$ 3) $\frac{21}{\sqrt{7}}$ 4) $\frac{30}{\sqrt[3]{25}}$

$\frac{h}{\sqrt[3]{h}}$ $\frac{a}{b\sqrt[3]{a^2}}$ $\frac{c^2}{a\sqrt{c}}$ $\frac{x}{\sqrt[5]{x^2}}$

337. Lihtsusta järgmised juured ning leia nende väärtused ruut- ja kuupjuurte tabelite abil:

1) $\sqrt{\frac{2}{25}}$ 2) $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ 3) $\sqrt[4]{\frac{10}{81}}$ 4) $\sqrt[4]{\frac{1}{625}}$

$\sqrt{\frac{9}{5}}$ $\sqrt[3]{\frac{27}{6}}$ $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{9\cdot 64}}$

338. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate juurte abil ja koonda:

1) $\sqrt{11\frac{1}{4}}-\sqrt{20}-5\sqrt{\frac{1}{18}}-\frac{1}{6}\sqrt{245}-\sqrt{24\frac{1}{2}}$

2) $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{\frac{a^5}{8}}-3a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

339. Arenda järgmiste kaksliikmete ruudud:

1) $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$ 2) $\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{3}{\sqrt{ab}}\right)^2$

340. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\sqrt{\frac{25}{27}} : 10 - \frac{\sqrt{3}}{6}$

2) $\sqrt{3 - \frac{6a}{b} + \frac{3a^2}{b^2}}$

3) $\frac{5}{4-\sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} - \frac{2}{3+\sqrt{7}}$

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + 1\right)$

341. Lihtsusta avaldised:

$$\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}, \quad \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x-a}}, \quad \frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[6]{a^4}}.$$

342. a) Näita, et $\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{18}$.

b) Koosta ruutvõrrandid, mille lahendid on:

1) $2+\sqrt{3}$ ja $2-\sqrt{3}$

2) $-3+\sqrt{5}$ ja $-3-\sqrt{5}$

3) $\frac{5-\sqrt{7}}{6}$ ja $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$

4) $\frac{-9-\sqrt{11}}{10}$ ja $\frac{-9+\sqrt{11}}{10}$

343. Teisenda järgmised avaldised sellisteks, et nende nimetajais poleks juurt:

$$\frac{1}{n\sqrt{3}-1} - \frac{1}{n\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{p-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

344. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1) $(-5)^3-(-2)^0+(-1)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}-\left(\frac{5}{6}\right)^0$

345. Vabasta järgmised avaldised negatiivseist astendajaist ja lihtsusta tulemus:

1) $(a^5-a^{-3}) : (a-a^{-3})$

2) $(a^{-4}-a^{-6}) : (a^{-2}+a^{-3})$.

346. 1) Näita, et $a=b^{\pm 1}$, kui $a+a^{-1}=b+b^{-1}$

2) Näita, et

$(a-b)^{-2}-(a+b)^{-2}=4ab(a^2-b^2)^{-2}$.

3) Arenda avaldis $(a^x-a^{-x})^2$.

347. Kirjuta järgmised avaldised juuremärgita:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{2}{x}\right)}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}, \quad \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

348. Kirjuta järgmised avaldised juurtena, kasutades ainult positiivseid juurijaid:

1) $ax^{\frac{1}{2}}$ 2) $(ab)^{\frac{2}{3}}$ 3) $(x-y)^{1\frac{1}{2}}$

$a^{-\frac{1}{3}}$ $a(2n)^{-\frac{3}{4}}$ $\left(u+v^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

349. 1) Arenda korrutis $(x^{\frac{1}{2}}-5)(x^{\frac{1}{2}}+4)$.

2) Arenda avaldis $\left(a^x-a^{\frac{1}{x}}\right)^2$.

350. Taanda murd $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

351. Näita, et

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{9}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

352. Lihtsusta avaldised:

$$\sqrt{10}:0{,}81^{-\frac{1}{4}}, \quad \sqrt[3]{25}\cdot(0{,}04)^{\frac{1}{6}}, \quad 0{,}16^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{5}.$$

353. Leia avaldise $\left(7\frac{19}{32}\right)^{-0{,}4}$ väärtus.

354. Lihtsusta järgmised korrutised ja jagatised:

1) $(\sqrt[3]{3x^2})^2\cdot\sqrt[5]{\frac{2y}{81x^5}}$ 4) $5c^2:\left(2{,}5c\sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}}\right)$

2) $\sqrt{\frac{2x}{9}}:\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{6x}$ 5) $\sqrt[3]{\frac{s}{t}}\,(5s)^{\frac{1}{3}}$

3) $\frac{3}{7}a\sqrt[3]{2x^2}:(6\sqrt{a})$ 6) $\left(\frac{1{,}5}{2}a\right)^3:\left(\frac{0{,}375}{a}\right)^3$

355. Kirjuta järgmised avaldised võimalikult lihtsate ja väheste juurte abil:

1) $6\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{6}} + \sqrt{16\frac{2}{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2) $8{,}5\sqrt{4\sqrt{63}} - 10\sqrt{3\sqrt{7}} - 3\sqrt{6\sqrt{28}}$

3) $\sqrt{x^3} - \sqrt{4x} + \frac{3x}{\sqrt{x}} - 4x^3\sqrt{\frac{1}{x^3}}$

356. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1) $144^3 : 72^3$

$\left(-5\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\left(4\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$

$9^{-\frac{1}{2}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + 0{,}25^{-1\frac{1}{2}}$

2) $\sqrt[3]{\left(\frac{8}{343}\right)^{-2}}$

$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(1\frac{7}{9}\right)^{-1}$

$\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^3$

357. Kirjuta avaldis ainult ühe juuremärgi abil:

$$\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^5\sqrt[4]{\frac{1}{a}}}}.$$

358. Arenda binoomi ruut:

$$\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{3}{\sqrt{b}}}\right)^2.$$

359. Lihtsusta avaldis:

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b}.$$

360. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $x + \sqrt{16 + x^2} = 8$

2) $\sqrt{x-7} - \sqrt{x+1} = -2$

3) $\sqrt{x+20} - \sqrt{x-1} = 3$

4) $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$

5) $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}} - 2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}} = \frac{7}{3}$

361. Alljärgnevatest võrranditest mõnel lahend puudub. Tee kindlaks missugusel.

1) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x-1}=1$
2) $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-5}=2$
3) $\sqrt{x+11}=1+\sqrt{x+6}$
4) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+6}+7=0$
5) $\sqrt{5x-9}-\sqrt{5x-16}=1$
6) $\sqrt{10x-1}+\sqrt{10x+6}+7=0$
7) $a\sqrt{x+1}=b\sqrt{x-1}$
8) $\sqrt{x+b^2}=b+\sqrt{x-2b}$
9) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$
10) $\sqrt{4x-3a}-\sqrt{x-3a}=\sqrt{x+6a}$

362. Arvuta.

1) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 2) $\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 3) $\left(39\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$

4) $\left[9^{-\frac{1}{4}}+\left(3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]\cdot\left[9^{-\frac{1}{4}}-\left(3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]$

5) $\left[\left(3+5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3-5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$ 6) $\left[\left(5+11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(5-11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

363. Näita, et

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; 4) $2\cdot 2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}=18^{\frac{1}{2}}$

364. Lihtsusta, juuremärki kasutamata:

1) $\frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}:\left[\frac{b^{\frac{1}{2}}-\frac{a}{(ab)^{-0,5}}}{1-a}-(ab)^{\frac{1}{2}}\right]$, $a>0$, $b>0$.

2) $\left\{a^{-\frac{2}{3}}\cdot\left[\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{4}{3}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

3) $\frac{a}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b}$, $a>0$, $b>0$.

4) $\left[a^{\frac{1}{2}}+(ab^2+c)^{\frac{1}{2}}\right]:\left[b\cdot a^{\frac{1}{2}}+b(ab^2+c)^{\frac{1}{2}}\right]$

5) $\left[\frac{3}{(1+a)^{\frac{1}{2}}}+(1-a)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[\frac{3}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}+1\right]$

6) $\frac{(x+a)^{\frac{1}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x-a)^{\frac{1}{2}}}{(x+a)^{\frac{1}{2}}}$, kus $x>a$.

7) $\frac{(x+3)^{\frac{1}{2}}}{(x-3)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x-3)^{\frac{1}{2}}}{(x+3)^{\frac{1}{2}}}$, kus $x>3$.

V. $\frac{6}{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}$.

365. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $(2x)^{\frac{1}{2}}=8$

2) $(5x)^{\frac{1}{3}}=x$

3) $x^{\frac{2}{3}}=9$

4) $(x+7)^{\frac{1}{2}}=x$

5) $(x-1)^{\frac{1}{2}}-3=0$

6) $x-3+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}=0$

7) $x-11x^{\frac{1}{2}}+24=0$

8) $x+1=(2x+4)^{\frac{1}{2}}$

9) $2x^{\frac{1}{2}}+6x^{-\frac{1}{2}}=8$

10) $2(x-2)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{x+2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

11) $(x+7)^{\frac{1}{2}}=(3x+19)^{\frac{1}{2}}-(x+2)^{\frac{1}{2}}$

12) $(5x+4)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{2}}=(3x+1)^{\frac{1}{2}}$

13) $(4x-3)^{\frac{1}{2}}=(3x-1)\,(3x-5)^{-\frac{1}{2}}$

14) $3\,(x-2)^{-\frac{1}{2}}=(2x+3)^{\frac{1}{2}}$

15) $(x-2)^{\frac{1}{2}}+(2x+3)^{\frac{1}{2}}=4$

16) $(2x+2)^{\frac{1}{3}}-(2x-7)^{\frac{1}{3}}=3$

17) $(76+x)^{\frac{1}{3}}+(76-x)^{\frac{1}{3}}=8$

5. GEOMEETRILISED TEISENDUSED TASAPINNAL.

5.1. GEOMEETRILISE TEISENDUSE MÕISTE.

5.1.1. GEOMEETRILISE TEISENDUSE DEFINITSIOON JA NÄITEID.

Geomeetriliseks teisenduseks tasapinnal nimetatakse tasapinna antud punktidest mingi eeskirja järgi uute punktide tuletamist.

Antud punktideks võivad siin olla kas tasapinna üksikud punktid või mingi sellel tasapinnal asetseva kujundi (lõigu, ringjoone jm.) punktid või lõpuks selle tasapinna kõik punktid. Antud punktide hulka nimetatakse **originaalkujundiks** ehk lihtsalt **originaaliks.**

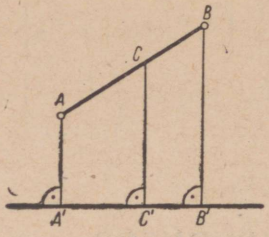
Antud punktidest tuletatud uusi punkte nimetatakse antud punktidele antud teisenduses *vastavateks punktideks* ehk antud punktide **teisenditeks** ehk ka antud punktide **kujutisteks.** Üleminek originaalkujundi juurest tema teisendi (kujutise) juurde ongi geomeetriline teisendus.

Eeskiri, mis ütleb, kuidas antud punktide järgi leida nende teisendeid, on **teisenduseeskiri.** Allpool näeme, et teisenduseeskiri antakse mõnikord sõnalise juhisena, mõnikord valemina või geomeetrilise konstruktsioonina.

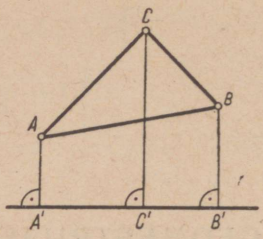
Kui teisendus on niisugune, et originaali igal punktil leidub ainult üks teisend ja viimane kujutab ainult üht originaali punkti, siis teisendust nimetatakse **üksüheseks.**

Vaatleme neid mõisteid ühenduses mõne näitega.

Näide 1. Tasapinnal on antud sirge ja väljaspool seda lõik AB (joon. 65). Loeme lõigu mistahes punkti C teisendiks antud sirge punkti C', kus punktist C antud sirgele tõmmatud ristsirge lõikab antud sirget, s. o. punkti C teisendiks loeme tema ristprojektsiooni antud sirgel.



Joon. 65.



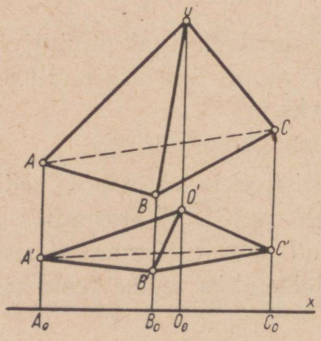
Joon. 66.

Siin on originaalkujundiks lõik AB ja tema teisendiks on lõik $A'B'$. Vastavus originaali ja teisendi punktide vahel on üksühene: lõigu igal punktil on ainult üks projektsioon ja projektsiooni iga punkt kujutab ainult üht lõigu punkti.

Näide 2. Antud on kolmnurk ABC ja seda mitte lõikav sirge (joon. 66). Mõistame siin kolmnurga all kinnist murdjoont (mitte sellega piiratud tasapinnatükki) ja loeme kolmnurga mistahes punkti teisendiks tema ristprojektsiooni antud sirgel. Siis kolmnurga külje AB teisendiks on lõik $A'B'$, külje BC teisendiks lõik $B'C'$, külje AC teisendiks lõik $A'C'$ ja kogu kolmnurga teisendiks samuti lõik $A'B'$.

Siin originaali (kolmnurga ABC) igale punktile vastab üks teisendi (lõigu $A'B'$) punkt, kuid teisendi iga punkt (välja arvatud A' ja B') kujutab originaali kaht punkti. Näiteks teisendi punkt C' on kolmnurga tipu C teisendiks, aga ka külje AB selle punkti teisendiks, kus see külg lõikub sirgega CC'. Seega vastavus originaali ja teisendi punktide vahel ei ole üksühene.

Näide 3. Tasapinnal on antud sirge x ja sellest ühel pool mingi kujund, näiteks kolmnurkse püramiidi kujutis $OABC$ (joon. 67). Teisendame kujundit nii, et originaali punkt ja selle teisend asetsevad sirgest x ühel ja samal pool selle sirge ühel ja



Joon. 67.

samal ristsirgel, kusjuures teisendi ja originaalpunkti kaugused sirgest x on jääva suhtega m (joonisel 67 $m=\frac{1}{3}$).

Selle teisenduseeskirja puhul punktide teisendite kaugused sirgest x on võrdelised originaalpunktide kaugustega sellest sirgest, kusjuures võrdetegur on m:

$$A_0A'=mA_0A;\ B_0B'=mB_0B;\ C_0C'=mC_0C \text{ jne.}$$

On ilmne, et teisendus on üksühene. Kui $0<m<1$, siis seda teisendust võib nimetada tasapinna kokkusurumiseks sirge x poole suhtes m. Kui $m>1$, siis teisendus on tasapinna väljavenitamine.

Tasapinna kokkusurumist (samuti väljavenitamist) on kerge avaldada valemites, kui selleks sirgeks, mille poole ta kokku surutakse, võtta üks koordinaattelg. Näiteks, kui tasapinna kokkusurumine toimub x-telje poole suhtes m, siis originaalpunktil ja tema teisendil on üks ja sama abstsiss, kuid teisendi ordinaat on originaali ordinaadi m-kordne (vrd. joon. 67). Tähistades originaalpunkti koordinaate x ja y, tema teisendi koordinaate x' ja y', saame valemid:

$$x'=x, \tag{1}$$

$$y'=my. \tag{2}$$

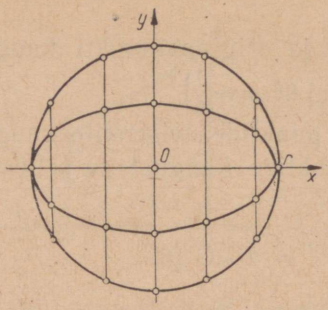
Niisiis, punkt A $(x;\ y)$ teisendub punktiks A' $(x;\ my)$.

5.1.2. ELLIPS RINGJOONE TEISENDINA.

Kasutades tasapinna kokkusurumist x-telje poole, tuletame ringjoonest ühe uue joone.

Olgu koordinaatteljestikus antud ringjoon, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja raadius on r. Leiame joone, milleks teisendub see ringjoon, kui tasapind x-telje poole kokku suruda suhtes m, ja tuletame selle joone võrrandi.

Joonise tegemisel oletame, et $m=\frac{1}{2}$. Ringjoone teisendamiseks võtame sellel rea punkte ja vähendame iga punkti ordinaati 2 korda (joon. 68). Ringjoone punktide teisendid asetsevad ühel uuel joonel, mida nimetatakse **ellipsiks.**



Joon. 68.

Ellipsi võrrandi tuletamiseks kirjutame esmalt ringjoone võrrandi

$$x^2+y^2=r^2.$$

Nüüd avaldame punktis 1 saadud teisendusvalemitest (1) ja (2) x ja y teisendatud punkti koordinaatide x' ja y' kaudu:

$$x=x',$$

$$y=\frac{y'}{m}.$$

Asendades ringjoone võrrandis x ja y saadud avaldistega, saame seose ellipsi suvalise punkti koordinaatide x' ja y' vahel, s. t. ellipsi võrrandi:

$$(x')^2+\left(\frac{y'}{m}\right)^2=r^2.$$

Anname võrrandile esmalt kuju

$$\frac{(x')^2}{r^2}+\frac{(y')^2}{(mr)^2}=1.$$

Asendades selles r tähega a ja mr tähega b ning tähistades ellipsi suvalise punkti koordinaate nüüd tähtedega x ja y (kuna edasi vaatleme ainult seda joont), saame ellipsi võrrandi nn. k a n o o n i l i s e l kujul:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.}$$

Leiame saadud võrrandi põhjal, kus ellips lõikab koordinaattelgi. Lõikumisel x-teljega on punkti ordinaat $y=0$. Võrrandist järeldub siis, et

$$x^2 = a^2,$$

seega

$$x = \pm a.$$

Niisiis lõikab ellips x-telge punktides $(a;\ 0)$ ja $(-a;\ 0)$. Nende punktide vahelist lõiku (mille pikkus on $2a$) nimetatakse ellipsi pikemaks teljeks.

Lõikumisel y-teljega on punkti abstsiss $x=0$. Võrrandist järeldub siis, et

$$y^2 = b^2,$$

seega

$$y = \pm b.$$

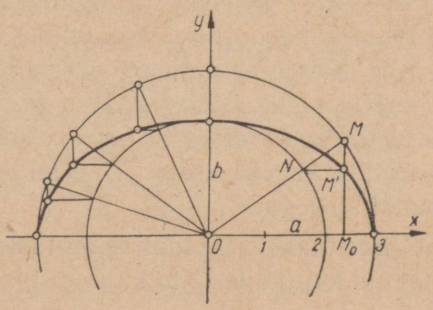
Niisiis, ellips lõikab y-telge punktides $(0;\ b)$ ja $(0;\ -b)$. Nende punktide vaheline lõik (mille pikkus on $2b$) on ellipsi lühem telg.

Ellipsi telgede lõikepunkti nimetatakse tema keskpunktiks ja telgede otspunkte tema haripunktideks. Lõik keskpunktist mingi haripunktini on ellipsi pooltelg.

Kui pooltelged on antud, siis ellips on määratud. Näiteks kui ellipsi pooltelged on $a=3$ ja $b=2$, siis tema võrrand on

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Antud ellipsi joonestamiseks joonestame koordinaatide algus-punkti ümber ringjoone raadiusega 3 ja vähendame ringjoone punktide ordinaate suhtes $m = \frac{2}{3}$.



Joon. 69.

Ringjoone punktide ordinaatide vähendamist saab teostada ilma mõõtmise ja arvutamiseta, nimelt üsna lihtsa konstruktsiooni abil. Selleks joonestame ümber ellipsi keskpunkti veel teise ringjoone, võttes viimase raadiuseks ellipsi lühema pooltelje (joon. 69). Välise ringjoone mingi punkti M teisendi saamiseks tõmbame selle punkti ordinaatlõigu MM_0 ja ühendame punkti M keskpunktiga O. Edasi joonestame punktist N, kus OM lõikab seesmist ringjoont, paralleeli x-teljega ja leiame selle paralleeli ja ordinaatlõigu MM_0 lõikepunkti. See lõikepunkt M' ongi punkti M otsitud teisend. Tõepoolest, M ja M' asetsevad x-teljest ühel ja samal pool ühel ja samal telje ristsirgel, kusjuures kiirteteoreemi põhjal nende punktide ordinaatide suhe võrdub pooltelgede b ja a suhtega:

$$M_0M' : M_0M = ON : OM = b : a = m.$$

Leides niiviisi küllaldase hulga ringjoone punktide teisendeid, saame nende ühendamisel ellipsi.

5.1.3. TASAPINNA TEISENDAMINE ISEENDAKS.

Kui teisendamisele võetakse kogu tasapinna punktid ja nende teisendid täidavad jällegi kogu tasapinna, siis kõneldakse t a s a p i n n a t e i s e n d a m i s e s t i s e e n d a k s. Järgnevatel lehekülgedel vaadeldakse ikka selliseid teisendusi. Selgema kujutluse saamiseks neist teisendustest on kasulik tasapinda mõelda kahekordsena: ühel kahest kokkulangevast tasapinnast asetsevad originaalkujundid, teisel nende teisendid.

Tasapinna teisendamisel iseendaks võib juhtuda, et mõni punkt (sirge) ühtib oma teisendiga. Selliseid punkte (sirgeid) nimetatakse vaadeldava teisenduse **püsipunktideks** (-sirgeteks) ehk **kahekordseteks** punktideks (sirgeteks). Näiteks tasapinna kokkusurumisel mingi sirge x poole on kahekordseteks punktideks kõik selle sirge punktid ja ainult need. Sama teisenduse juures on kahekordseteks sirgeteks sirge x ja kõik selle ristsirged, sest iga nimetatud sirge langeb ühte oma teisendiga. Seejuures sirge x koosneb ainult püsipunktidest, kuid teistel kahekordsetel sirgetel leidub ainult üks püsipunkt (lõikepunkt sirgega x).

Tasapinna teisendamisel iseendaks teisendub selle tasapinna iga kujund sama tasapinna teatud kujundiks. Kui kujundi iga kahe

punkti vaheline kaugus on võrdne tema teisendi vastavate punktide vahelise kaugusega, siis kujund ja tema teisend on võrdsed. Sellise omadusega teisendust nimetatakse **liikumisteisenduseks** ehk **liikumiseks.** Esimeses järjekorras ongi meie ülesandeks vaadelda liikumisteisendusi tasapinnal ja analüüsida liikumise liike. Teisenduste käsitlemisel lähtume lõikude, nurkade ja kolmnurkade võrdsuse mõistest, kasutamata liikumise mõistet, mis on meile veel tundmata, ja tuletame neist liikumise mõiste.

Ei tule arvata, et iga teisendus on liikumine. Näiteks tasapinna kokkusurumine mingi sirge poole pole liikumine, sest mõnede lõikude pikkused sel teisendusel muutuvad. Liikumisteisendused moodustavad kõige lihtsama (kuid väga tähtsa) geomeetriliste teisenduste rühma. Peale liikumisteisenduste vaatleme käesolevas peatükis veel **homoteetsust,** s. o. teisendust, mis võimaldab antud kujundist saada temaga sarnast kujundit.

ÜLESANDEID.

366. Arvtelje punktid $M(x)$ on teisendatud sama telje punktideks $M'(x')$ valemi järgi $x'=3-2x$. Leia:
1) punktide $x=-2$, 0 ja 3 teisendid;
2) punktid, mille teisenditeks on punktid $x'=9$, -5 ja 0;
3) antud teisenduse kahekordne punkt.

367. Abstsisstelje punktid on teisendatud ordinaattelje punktideks valemi järgi $y=0{,}5x^2$. Leia punktide $x=2$, -3 ja 4 teisendid. Missuguse punkti teisendiks on punkt $y=18$? Milliseks y-telje osaks teisendub kogu x-telg?
Kas see teisendus on üksühene?

368. On antud ringjoon ja selle mingi puutuja. Ühendame puutuja mingi punkti M ringjoone keskpunktiga O ning loeme punktile M vastavaks ringjoone selle punkti M', milles ringjoon ja lõik OM lõikuvad. Tee joonis ja selgita selle abil, mis kujund ringjoonel vastab
1) puutuja mingile lõigule AB;
2) puutepunktile;
3) kogu puutujale.

369. Kolmnurk, mille tipud on $A(-2;\ -3)$, $B(3;\ -1)$ ja $C(2;\ 3)$, projekteeritakse üks kord x-teljele, teine kord y-teljele.

Leia tippude projektsioonid ja külgede projektsioonide pikkused ühel ja teisel juhul.

370. Joonesta ellips, mille poolteljed on 4 ja 3, leides küllaldase hulga tema punkte.

371. Ellipsi võrrand on

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

Missugustes punktides see ellips lõikab koordinaattelgi? Kas ta läbib punkti $(-\sqrt{3};\ 0{,}5)$? Skitseeri see ellips.

372. Skitseeri ellips, mis saadakse ringjoonest $x^2+y^2=9$, kui tasapind y-telje poole kokku suruda nii, et kaugused sellest teljest väheneksid 3 korda. Leia saadud ellipsi poolteljed ja võrrand.

5.2. TELJELINE SÜMMEETRIA.

5.2.1. SIRGE SUHTES SÜMMEETRILISED PUNKTID.

Olgu antud mingi sirge t ja väljaspool seda punkt M (joon. 70). Leiame punkti M' nii, et sirge t jääb MM' keskristsirgeks. Selleks joonestame sirge $MM' \perp t$ ja võtame sellel punkti M' nii, et $M'M_0=MM_0$, kus M_0 on sirgete MM' ja t lõikepunkt. Niisuguse omadusega punkti M' nimetatakse antud punktiga M sirge t suhtes sümmeetriliseks punktiks.

Lauset «Punkt M' on sirge t suhtes sümmeetriline punktiga M» kirjutame lühidalt kujul:

$$M' \equiv t(M).$$

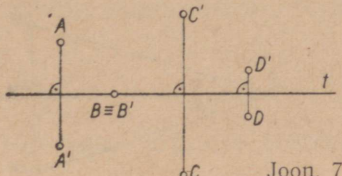
On selge, et kui $M' \equiv t(M)$, siis ka $M \equiv t(M')$; seega võime kõnelda kahest teineteisega (sirge t suhtes) sümmeetrilisest punktist. Sirget t nimetatakse nende punktide **sümmeetriateljeks.**

Niisiis:

tasapinna kaks punkti on sellel tasapinnal asetseva sirge suhtes sümmeetrilised, kui see sirge on nende punktide ühenduslõigu keskristsirgeks.



Joon. 70.



Joon. 71.

Kui punkt asetseb sümmeetriateljel, siis loeme ta sümmeetriliseks iseendaga; igal muul juhul on punkt ja tema teisend kaks erinevat punkti (joon. 71).

5.2.2. SÜMMEETRILISTE PUNKTIDE POHIOMADUS.

Sirge suhtes sümmeetriliste punktide põhiomadust väljendab järgmine teoreem:

lõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje punkti kahe selle telje suhtes sümmeetrilise punktiga, on omavahel võrdsed ning moodustavad teljega võrdsed nurgad.

Tõepoolest, kui sümmeetriatelje t mingi punkti A ühendame punktidega M ja $M' \equiv t(M)$ (joon. 72), siis saame kaks täisnurkset kolmnurka AM_0M ja AM_0M', mis on võrdsed tunnuse knk põhjal. Kolmnurkade võrdsusest järeldubki, et

$AM = AM'$ ja $\alpha = \alpha'$.

Kehtib ka pöördteoreem:

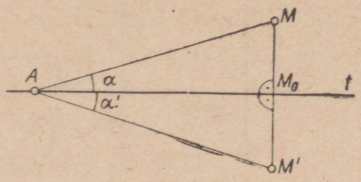
kui mingi punkt on kahest punktist võrdsetel kaugustel, siis asetseb ta nende punktide sümmeetriateljel.

Tõesti, kui $AM = AM'$ (joon. 72), siis kolmnurk AMM' on võrdhaarne ning järelikult tema kõrgussirge AM_0 poolitab aluse MM'_0, olles seega punktide M ja M' sümmeetriateljeks.

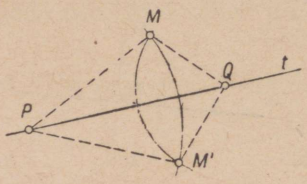
Vaadeldud teoreem võimaldab lahendada järgmise konstruktsioonülesande (kasutades ainuüksi sirklit):

leida antud punktiga antud telje suhtes sümmeetriline punkt.

Lahendus. Võtame teljel t vabalt kaks punkti (P ja Q) ning tõmbame kummagi ümber ringjoone, mis läbib antud punkti



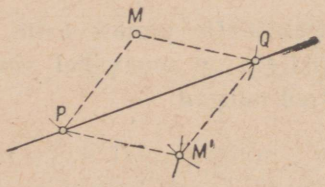
Joon. 72.



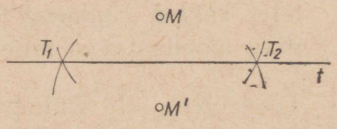
Joon. 73.

M (joon. 73). Otsitav punkt M' peab asetsema kummalgi ringjoonel, järelikult on ta nende teine lõikepunkt.

Kui keskpunktid P ja Q võtta teljel mitte vabalt (nagu joonisel 73), vaid võrdsetel kaugustel antud punktist M (nagu joonisel 74), siis punktide P, M, Q ja M' järjestikusel ühendamisel saadakse romb; igal muul juhul aga tekib r o m b o i d (joon. 73), s. o. nelinurk, mille kahe vastastipu lähisküljed on paariti võrdsed.



Joon. 74.



Joon. 75.

Pöördteoreemi alusel läheneb järgmine k o n s t r u k t s i o o n ü l e s a n n e:

leida kahe antud punkti sümmeetriatelg.

L a h e n d u s. Leiame kaks niisugust punkti T_1 ja T_2, mis asetsevad antud punktidest (M ja M') võrdsetel kaugustel (joonis 75). Neid läbiv sirge t ongi otsitav sümmeetriatelg.

5.2.3. SIRGE SUHTES SÜMMEETRILISED KUJUNDID.

Kahe kujundi teljelist sümmeetriat defineerime järgmiselt:

kujundid k ja k′ on telje t suhtes sümmeetrilised, kui kummagi kujundi iga punkt on selle telje suhtes sümmeetriline teise kujundi mingi punktiga.

Lauset «Kujund k' on telje t suhtes sümmeetriline kujundiga k» kirjutame edaspidi lühidalt nii:

$$k' \equiv t(k).$$

Antud definitsioonist lähtudes tõestame järgmise teoreemi:

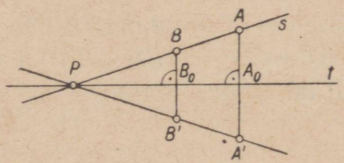
sirgega antud telje suhtes sümmeetriliseks kujundiks on sirge; mõlemad sirged lõikavad sümmeetriatelge ühes ja samas punktis või on teljega paralleelsed.

Tõestamisel eeldame esmalt, et antud sirge s lõikab telge t, näiteks punktis P (joon. 76). Võtame sirgel s mingi punkti A, leiame teisendi $A' \equiv t(A)$ ning veendume, et sirge $A'P$ ongi antud sirge s teisendiks. Selleks näitame, et kummagi sirge iga punkt on telje t suhtes sümmeetriline teise sirge mingi punktiga. Punkti P kohta on see ilmne: $P' \equiv P$. Võtame nüüd ühel sirgetest, näiteks sirgel s, mingi punkti B ning tõmbame $BB_0 \perp t$ kuni lõikumiseni sigega $A'P$ punktis B'. Siis

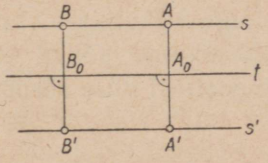
$$\triangle BPB_0 = \triangle B'PB_0,$$

sest neil on ühise külje PB_0 juures vastavalt võrdsed nurgad ($\angle BPB_0 = B'PB_0$ sümmeetriliste punktide põhiomaduse alusel). Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $BB_0 = B'B_0$. Et ühtlasi $BB' \perp t$, siis on tõestatud, et $B' \equiv t(B)$.

Niisamuti saab tõestada, et sirge $A'P$ iga punkt on sümmeetriline sirge s mingi punktiga.



Joon. 76.

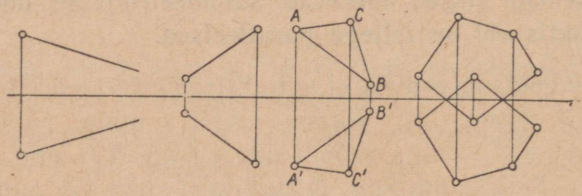


Joon. 77.

Kui sirge s on paralleelne teljega t (joon. 77), siis joonestame läbi punkti $A' \equiv t(A)$ sirge $s' \parallel s$ ning tõmbame sirge s mistahes punktist B sirge $BB_0 \perp t$ kuni lõikumiseni sirgega s' punktis B'. Siis $BB_0 = AA_0 = A'A_0 = B'B_0$ (miks?), millest järeldub, et punktid B ja B' on sümmeetrilised sirge t suhtes.

Tõestatud teoreemist järeldub (joon. 78), et

kiirega sümmeetriline kujund on kiir, lõiguga sümmeetriline kujund on lõik, kolmnurgaga sümmeetriline kujund on kolmnurk, hulknurgaga sümmeetriline kujund on antud hulknurgaga samanimeline hulknurk.



Joon. 78.

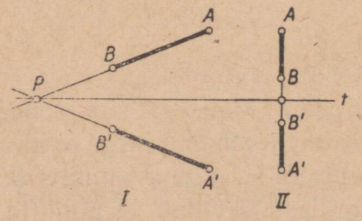
5.2.4. SÜMMEETRILISTE KUJUNDITE VÕRDSUS.

Näitame, et

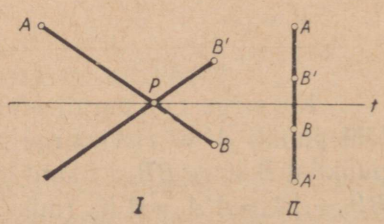
iga kaks teineteisega mingi telje suhtes sümmeetrilist kujundit on võrdsed.

Vaatleme esmalt lõikusid. Kui teineteisega sümmeetrilised lõigud on omavahel paralleelsed (joon. 77), siis nad on võrdsed kui ühe ja sama ristküliku vastasküljed.

Kui sümmeetrilised lõigud pole paralleelsed ega lõika telge (nagu AB ja $A'B'$ joonistel 79, I ja II), siis pikendame neid kuni teljega lõikumiseni mingis punktis P. Sümmeetriliste punktide põhiomaduse põhjal on siis $AP=A'P$ ja $BP=B'P$. Esimese võrduse pooltest teise võrduse pooli lahutades saame, et $AB=A'B'$.



Joon. 79.



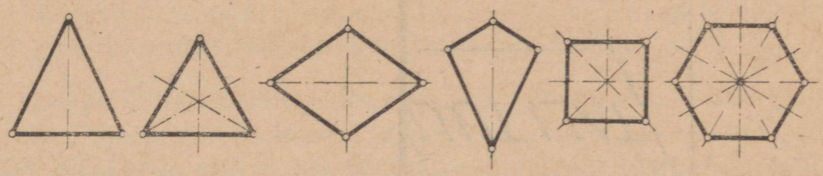
Joon. 80.

Lõpuks, kui kahel sümmeetrilisel lõigul AB ja $A'B'$ leidub teljega ühine punkt P (joon. 80, I ja II), siis saame endisel viisil võrdused $AP=A'P$ ja $BP=B'P$, mille vastavate poolte liitmine näitab, et $AB=A'B'$.

Sümmeetriliste lõikude võrdsusest järeldub (kolmnurkade võrdsuse kkk põhjal) kahe sümmeetrilise kolmnurga võrdsus ja kolmnurkade võrdsusest kahe sümmeetrilise nurga võrdsus. Sümmeetriliste lõikude ja nurkade võrdsusest aga saab juba järeldada iga kahe sümmeetrilise kujundi võrdsust.

5.2.5. ISEENDAGA SÜMMEETRILINE KUJUND.

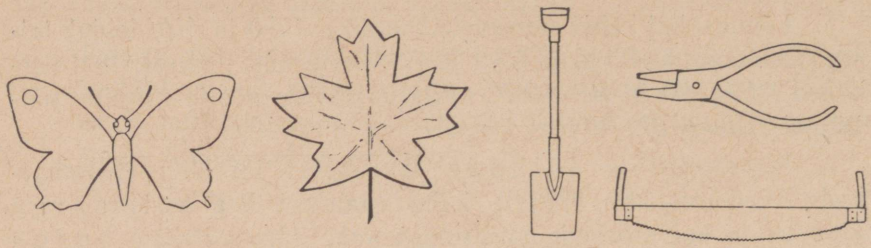
Leidub kujundeid, mis on mingi ühe (või mitme) sirge suhtes sümmeetrilised iseendaga. Iseendaga sümmeetrilised kujundid (joon. 81) on näiteks: võrdhaarne kolmnurk (üks sümmeetriatelg), võrdkülgne kolmnurk (kolm sümmeetriatelge), romb (kaks sümmeetriatelge), romboid (üks sümmeetriatelg), ruut (neli sümmeetriatelge), korrapärane kuusnurk (kuus sümmeetriatelge). Ringjoon aga on sümmeetriline iga sirge suhtes, mis läbib tema keskpunkti; seega



Joon. 81.

ringjoonel on lõpmata palju sümmeetriatelgi.

Iseendaga sümmeetrilise kujundi paljud omadused järelduvad kergesti tema sümmeetriast. Teades näiteks, et romb on sümmeetriline oma diagonaalsirge suhtes, järeldame kohe, et rombi diagonaal poolitab rombi nurga ning et rombi diagonaalid on omavahel risti ja poolitavad teineteist (põhjenda neid väiteid!).

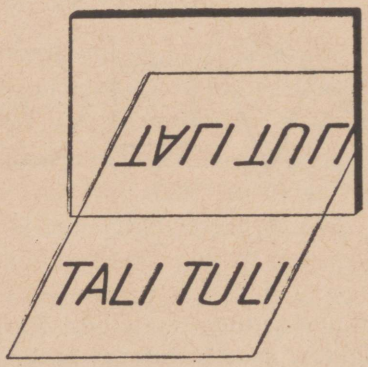


Joon. 82.

Iseendaga sümmeetrilised on ka paljud looduslikud vormid ja inimese poolt valmistatud esemed (joon. 82).

5.2.6. PEEGELDUS SÜMMEETRIATEISENDUSENA.

Üleminekut antud kujundilt temaga mingi sirge suhtes sümmeetrilisele kujundile nimetatakse antud kujundi **peegeldamiseks** (antud sirgest). Sirget nimetatakse siis **peegeldusteljeks**, peegeldamisel saadavat kujundit aga antud kujundi **peegelduseks**.



Joon. 83.

Sellist nimetust õigustab asjaolu, et kui asetada peegel joonise pinnaga risti (joon. 83), siis peeglist näeme antud joonisega sümmeetrilist joonist. Sümmeetriateljeks on peegli tasapinna ja joonise tasapinna lõikejoon.

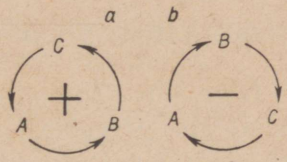
Kui peegeldatav objekt on ruumiline, siis ka peegeldus on ruumiline (joon. 84). Sel juhul on tegemist sümmeetriaga tasapinna suhtes.

Eespool nägime (vaata 5.2.4.), et kujund ja tema peegeldus on võrdsed, seega peegeldamine sirgest on üks liikumisteisendus. Seda liikumist iseloomustab kolmnurga (üldiselt hulknurga) **tippude ringjärjestuse** ehk **kolmnurga orientatsiooni** muutumine. Tõepoolest, näiteks joonisel 78 on kolmnurga ABC orientatsioon positiivne (nagu joonisel 85, *a*), kuid peegeldatud kolmnurgal $A'B'C'$ on negatiivne (joon. 85, *b*).



Joon. 84.

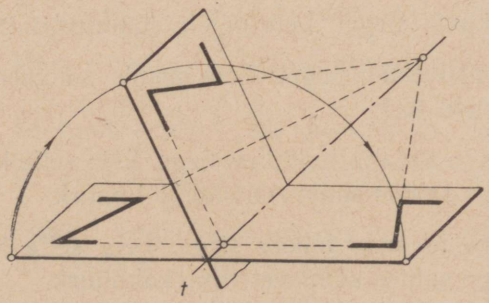
Joon. 85.



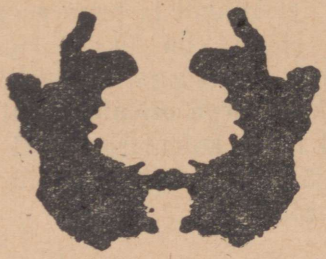
Kujund ja tema peegeldus on teineteisest saadavad tasapinna pööramise teel 180° võrra ümber peegeldustelje (joon. 86).

Seega sümmeetriateisendus ehk peegeldamine asendab geomeetrias tasapinna pööramist samal tasapinnal asetseva sirge ümber sirgnurga võrra. See tasapinna ümberpööramine kutsubki esile orientatsiooni muutumise.

Sellel seosel teljelise sümmeetria ja tasapinna pööramise vahel põhineb järgmine võte sümmeetriliste pildikeste saamiseks:



Joon. 86.



Joon. 87.

paberilehele kantakse mõned tinditilgakesed või tehakse mingi joonis ja murtakse leht kahekorra enne kui tint on kuivanud. Lehe avamisel näeme sellel murdejoone suhtes sümmeetrilist pilti (joon. 87).

5.2.7. SAMASUS KAHEKORDSE PEEGELDUSENA.

Olgu antud kujund k ja telg t. Leiame peegelduse $k' \equiv t(k)$. Nüüd võtame peegelduse k' lähtekujundiks ning endist telge kasutades leiame tema peegelduse k''. Ilmselt saame teise peegeldamise tulemusena tagasi lähtekujundi k; seega $k'' \equiv k$:

peegelduse peegeldamisel samast teljest saame tulemuseks lähtekujundi.

Teisendust, mis annab tulemuseks lähtekujundi, nimetatakse s a m a s u s e k s. Niisiis oleme leidnud, et

sama telje korral kahest sümmeetriateisendusest koosnev teisendus osutub samasuseks.

ÜLESANDEID.

373. Antud on kaks lõikuvat sirget. Leia nende sümmeetriateljed.

374. Antud on kaks paralleelset sirget. Leia nende sümmeetriateljed. Kui palju neid on?

375. Antud on kolmnurk ja seda mittelõikav sirge. Leia selle kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

376. Antud on kolmnurk ja seda lõikav sirge. Leia selle kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

377. Joonesta antud ringjoone mingi kõõlu suhtes sümmeetriline ringjoon. Mis tingimusel need kaks ringjoont ühtivad?

378. Kus asetsevad sümmeetriateisenduse kahekordsed punktid?

379. Missugused ringjooned vastavad sümmeetriateisenduses iseendale?

380. Missugused sirged vastavad sümmeetriateisenduses iseendale?

381. Lõika kahekorra murtud paberilehest mingi sümmeetriline puulehe kujutis.

382. Lõika paberist välja mingi teravnurkne kolmnurk ja leia kolmnurga voltimise teel selle ümberringjoone keskpunkt.

383. Lõika paberist välja mingi võrdhaarne kolmnurk ja leia kolmnurga voltimise teel selle siseringjoone keskpunkt.

384. Neljakordselt kokkumurtud paberilehe murdenurgast lõigatakse ära täisnurkne kolmnurk. Milline kuju on äralõigatud leheosal avatult?

385. Leia punktidega

$(0; 3)$, $(-2; 5)$, $(4; -1)$, $(-6; -4)$

x-telje suhtes sümmeetrilised punktid.

386. Leia punktidega

$(8; 0)$, $(2; 3)$, $(-6; 5)$, $(0; -3)$

y-telje suhtes sümmeetrilised punktid.

387. Leia punktiga $(2; 5)$ sümmeetriline punkt 1) x-telje suhtes, 2) y-telje suhtes ja 3) sirge $y=x$ suhtes.

388. Leia järgmiste sirgetega x-telje suhtes sümmeetrilised sirged:

1) $y=2x+1$; 2) $y=1{,}5$; 3) $y=1{,}5x$; 4) $x=3$;
5) $y=-x+a$.

389. Milline punkt on punktiga $(x; y)$ sümmeetriline x-telje suhtes, milline y-telje suhtes?

390. Kasutades ellipsi võrrandit ja eelmise ülesande tulemust, näita, et ellips on sümmeetriline nii x-telje kui ka y-telje suhtes.

391. Kasutades sümmeetriat tõesta, et kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu, sellele vastava kesknurga ja kaare.

392. Kasutades sümmeetriat tõesta, et kui kahel ringjoonel leidub ühine punkt väljaspool nende keskpunkte läbivat sirget, siis neil leidub veel teine ühine punkt.

393. Kasutades sümmeetriat tõesta, et võrdhaarse trapetsi haarade pikendused lõikuvad aluse keskristsirgel.

5.3. RÖÖPLÜKE.

5.3.1. KORDUV PEEGELDAMINE.

Olgu antud kujund k ning kaks telge t_1 ja t_2. Peegeldame kujundi k esmalt teljest t_1 ning siis saadud peegelduse teljest t_2. Esimene peegeldus olgu k' ja teine k''. Siis võime lühidalt kirjutada nii:

$$k' \equiv t_1(k); \quad k'' \equiv t_2(k').$$

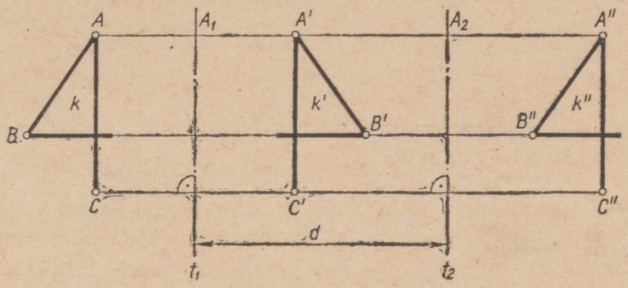
Analoogiliselt võiksime kolmanda peegelduse (kolmandast teljest t_3) sümboolselt avaldada kujul

$$k''' \equiv t_3(k'').$$

Mõttekäigu jätkamisel võime nii jõuda kuitahes suurele peegelduste kordusarvule.

Järgnevalt hakkame uurima kujundite k ja k'' (s. t. antud kujundi ja tema kahekordse peegelduse) vastastikust asendit sõltuvalt peegeldustelgede vastastikusest asendist. Et iga peegeldus muudab kujundi orientatsiooni vastupidiseks, siis kahekordne peegeldus on alati sama orientatsiooniga mis antud kujund.

Olgu peegeldusteljed t_1 ja t_2 omavahel paralleelsed (joon. 88). Kujundite k ja k'' vastastikuse asendi uurimiseks võtame kujundi k kolm punkti A, B ja C ning leiame neile vastavad kujundi k'' punktid A'', B'' ja C''. Et sirged t_1 ja t_2 on paralleelsed, siis nende ristsirged AA' ja $A'A''$ ühtivad; järelikult punktid A, A' ja A'' asetsevad ühel sirgel. Niisamuti asetsevad ühel sirgel punktid B, B' ja B'' ning ka punktid C, C' C''. Ühtlasi $AA'' \| BB'' \| CC''$ kui ühe ja sama sirge ristsirged.



Joon. 88.

Edasi näitame, et lõigud AA'', BB'' ja CC'' on võrdsed ja samasuunalised. Selleks avaldame need lõigud telgedevahelise kauguse d abil (joon. 88):

$$AA''=AA_1+A_1A'+A'A_2+A_2A''=2A_1A'+2A'A_2=2A_1A_2=2d.$$

Niisamuti saaksime, et $BB''=CC''=2d$. Et esitatud tuletus kehtiks antud kujundi ja telgede igasuguse vastastikuse asendi puhul, tuleks lõike AA_1, A_1A', ... vaadelda suunaga lõikudena. Meie juhul on võrdsete lõikude

$$AA''=BB''=CC''= \ldots$$

ühiseks suunaks suund telje t_1 poolt telje t_2 poole.

Nii on selgunud, et paralleelsete telgede korral kahe peegelduse järjestikune rakendamine annab teisenduse, milles vastavate punktide ühenduslõigud on paralleelsed, võrdsed ja samasuunalised.

Teisendust, milles vastavate punktide ühenduslõigud on paralleelsed, võrdsed ja samasuunalised, nimetatakse rööplükkeks (või lühemalt lihtsalt **lükkeks**).

Rööplükkel sirge teisendub temaga paralleelseks sirgeks või samaks sirgeks.

Tõepoolest, kui sirge on lükke sihiline (nagu sirge AA' joonisel 88), siis ta teisendub samaks sirgeks; kui ta pole lükke sihiline, siis ta teisendub temaga paralleelseks sirgeks (näiteks joonisel 88 $AB \| A''B''$, sest nelinurga $ABB''A''$ vastasküljed AA'' ja BB'' on paralleelsed ja võrdsed).

Et rööplüke koosneb kahest peegeldusest ja neist kumbki ei muuda kujundi suurust ega kuju, siis rööplükkel iga kujund teisendub temaga võrdseks kujundiks. Tähendab, rööplüke on liikumisteisendus.

5.3.3. RÖÖPLÜKKE VEKTOR.

Rööplükke kui teisenduse kirjeldamisel on otstarbekohane kasutada **vektori** mõistet.

Vektoriks nimetatakse suunaga lõiku, s. o. lõiku, mille üks otspunkt on loetud tema alguspunktiks ja teine lõpp-punktiks.

Vektori suunaks on suund tema alguspunkti poolt lõpppunkti poole. Kui alguspunkt ja lõpp-punkt ümber vahetada, siis vektori suund muutub vastupidiseks ja vektorist saab endise vektori vastandvektor. Peale suuna on vektoril kõik lõigu omadused, s. t. tal on kindel pikkus ja siht. Viimase määrab nurk, mille vektorit kandev sirge moodustab mingi kindla sirgega, näiteks x-teljega.

Kaks vektorit loetakse võrdseiks, kui neil on üks ja sama pikkus, siht ja suund.

Vektori alguspunkti asukoha ehk vektori rakenduspunkti võib vabalt valida. Vektorit kasutatakse nende suuruste iseloomustamiseks, millel peale arvulise väärtuse on neid iseloomustav siht ja suund. Neid suurusi nimetatakse vektoriaalseteks ja nende hulka kuuluvad näiteks jõud, kiirus, kiirendus jm. Ka punktide nihe rööplükkel on vektoriaalne suurus, sest tal on peale pikkuse oma siht ja suund.

Vektoreid märgitakse trükis rasvaselt trükitud väikeste tähtedega, kuna kirjas kasutatakse selleks noolekest tähe peal: **a**, **v**, $\vec{a}$, $\vec{v}$.

Vektorit, mis on paralleelne, samasuunaline ja pikkuselt võrdne punktide nihetega rööplükkel, nimetatakse lükke vektoriks.

Lükke vektorit tähistame tähega **v**. Tähistades telgedevahelist vektorit (s. t. vektorit, mis läheb teljelt t_1 risti teljeni t_2) sümboliga **d**, võime kirjutada:

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{d},$$

kus 2**d** tähendab vektorit, mis on vektoriga **d** samasuunaline, kuid temast 2 korda pikem. Niisiis võime öelda, et

paralleelsete telgede korral kahest peegeldusest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub peegeldustelgede vahelise vektori kahekordsega.

Rööplüke kui teisendus on määratud, kui tema vektor **v** on antud. Seepärast võib kujundi k rööplüket märkida lihtsalt sümboliga $\mathbf{v}(k)$, kus **v** tähendab lükke vektorit. Tähistades antud kujundist k rööplükkel saadava kujundi (ehk antud kujundi lükketeisendi) tähega k', võime lühidalt kirjutada:

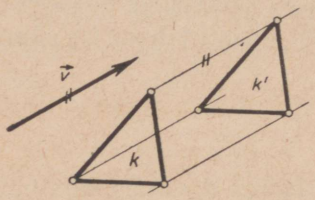
$$k' \equiv \mathbf{v}(k),$$

s. t. kujund k' on kujundi k rööplüke, kui lükke vektoriks on **v**.

Eespool arendatud mõttekäik on pööratav, s. t. iga rööplüke on vaadeldav peegelduse peegeldusena, kusjuures peegeldusteljed on omavahel paralleelsed ja sihilt risti lükke vektoriga. Vastavas konstruktsioonis võtame esimese peegeldustelje risti lükke vektoriga (kuid muidu vabalt); teise telje aga joonestame esimesega paralleelselt nii, et see paikneks esimesest teljest lükke vektoriga määratud suunas ja sellest kaugusel, mis võrdub poolega lükke vektori pikkusest.

5.3.4. RÖÖPLÜKKE KONSTRUKTSIOON.

Olgu antud kujund k ja lükke vektor $\mathbf{v}$ (joon. 89). Lükkekujundi $k' \equiv \mathbf{v}(k)$ saame järgmiselt. Kujundit k määravatest punktidest tõmbame lükke vektori $\mathbf{v}$ paralleelid ning kanname neile, alates kujundi punktidest, lükke vektori suunas lõigud, mis võrduvad selle vektori pikkusega. Nende lõikude lõpp-punktid määravad otsitava lükkekujundi $k' \equiv \mathbf{v}(k)$.



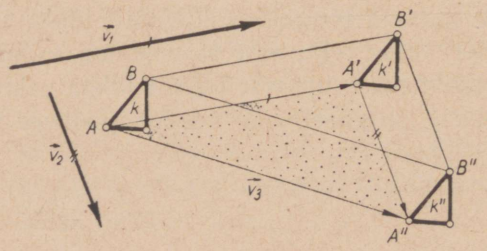
Joon. 89.

Rakendame nüüd antud kujundile k järjestikku kaks rööplüket vektoritega vastavalt $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$. Olgu esimene tulemus $k' \equiv \mathbf{v}_1(k)$ ja teine $k'' \equiv \mathbf{v}_2(k')$. Võrdleme teise lükke tulemust k'' lähtekujundiga k (joon. 90). Selleks vaatleme kujundi k mingit lõiku AB ja sellele kujundeis k' ja k'' vastavaid lõike $A'B'$ ja $A''B''$. Et rööplükkel lõik teisendub temaga paralleelseks (erijuhul samasihiliseks) ja võrdseks lõiguks, siis

$$AB \parallel A'B' \text{ ja } A'B' \parallel A''B''.$$

Kuid siis $AB \parallel A''B''$, mistõttu $ABB''A''$ on rööpkülik ja järelikult $AA'' \parallel BB''$. Nii selgub, et kujund k'' on saadav kujundist k ainsa rööplükkega, mille vektor $\mathbf{v}_3 = \overrightarrow{AA''}$. Viimase vektori loeme vektorite $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ summaks ning avaldame kujul:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$



Joon. 90.

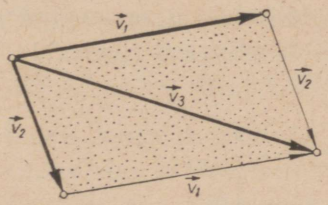
Jooniselt 90 nähtub, et kahe vektori $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ liitmiseks tuleb rööplükke abil teise liidetava alguspunkt teha ühtivaks esimese liidetava lõpp-punktiga (A') ning saadud murdjoone ($AA'A''$) alguspunkt lugeda vektorite summa alguspunktiks, murdjoone lõpp-punkt aga summa lõpp-punktiks. Niisiis on selgunud, et

kahest rööplükkest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub antud lükete vektorite summaga.

Nimetades antud lükked komponentideks ning neist saadava lükke resultandiks, tõestame lõpuks järgmise teoreemi:

resultantlüke ei sõltu komponentlükete järjekorrast.

Tõesti, liites vektoriga $\mathbf{v}_2$ vektori $\mathbf{v}_1$, saame summaks endise vektori $\mathbf{v}_3$ (joon. 91). Sellest järeldame, et vektorite liitmiseks eespool antud kolmnurga-reegli asemel võib kasutada ka järgmist nn. rööpkülikureeglit:



Joon. 91.

kui liidetavad vektorid on rööpküliku ühest tipust lähtuvateks külgvektoriteks, siis samast tipust lähtuv diagonaalvektor osutub nende liidetavate summaks.

ÜLESANDEID.

394. Antud on kaks paralleelset sirget ja nende vahel mingi kolmnurk. Joonesta kolmnurga peegeldus esmalt ühest sirgest, siis saadud peegelduse peegeldus teisest sirgest. Kas tulemus sõltub peegeldustelgede kasutamise järjekorrast?

395. Põhjenda väidet, et kolmnurk ja tema lüke on võrdsed.

396. Kas kolmnurga peegeldus ja lüke on võrdsed või mitte? Mille poolest nad siiski erinevad?

397. Liida kaks vabalt võetud vektorit.

398. On antud kahe vektori summa ja üks liidetav. Konstrueeri teine liidetav.

399. Põhjenda väidet, et rööplükkel kui teisendusel ei leidu kahekordseid punkte.

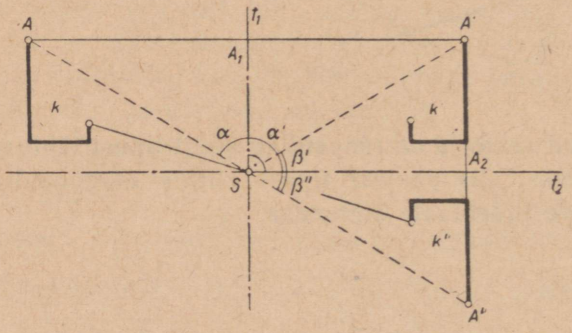
400. Milleks teisendub rööplükkel lükkevektori sihiline sirge ja milleks iga muu sirge?

401. Kolmnurgaga, mille tippudeks on punktid $A(4; -1)$, $B(5; 5)$ $C(2; 3)$, on teostatud rööplüke, mis viis tipu A koordinaatide alguspunkti. Leia tippude B ja C uued asukohad.

5.4. TSENTRAALSÜMMEETRIA.

5.4.1. TSENTRAALSÜMMEETRIA KAHE PEEGELDUSE TULEMUSENA.

Peegeldame antud kujundi k teljest t_1 ning saadud peegelduse k' omakorda teljest t_2, mis on risti teljega t_1 (joon. 92). Viimasel peegeldamisel saame kujundi k''.



Joon. 92.

Tõestame, et kujundite k ja k'' vastavaid punkte ühendavad lõigud läbivad telgede lõikepunkti S ning poolituvad selles punktis, s. t. neil lõikudel on üks ja sama keskpunkt.

Selleks ühendame kujundi k mingi punkti A, samuti tema teisendid A' ja A'' telgede lõikepunktiga S (joon. 92). Edasi näitame, et nurk ASA'' on sirgnurk. Tõesti:

$$\angle ASA'' = \alpha + \alpha' + \beta' + \beta'' = 2\alpha' + 2\beta' =$$
$$= 2(\alpha' + \beta') = 2 \cdot 90° = 180°.$$

Siin kasutasime tõsiasja, et nurgad, mis tekivad sümmeetriatelje punkti S ühendamisel kahe sümmeetrilise punktiga, on võrdsed ($\alpha=\alpha'$ ja $\beta'=\beta''$). Et nurk ASA'' on sirgnurk, siis punktid A, S ja A'' asetsevad ühel ja samal sirgel. Ühtlasi on punkt S lõigu AA'' keskpunktiks, sest sümmeetria tõttu $AS=A'S=A''S$. Analoogiliselt kehtib see kujundite k ja k'' iga kahe teineteisele vastava punkti kohta. Sellega on väide tõestatud.

Kaht kujundit, mille vastavate punktide ühenduslõikudel on üks ja sama keskpunkt S, nimetatakse selle punkti suhtes sümmeetrilisteks.

Sellise omadusega punkti S nimetatakse nende kujundite **sümmeetriakeskpunktiks.** Teljelisest sümmeetriast eristamiseks nimetatakse sümmeetriat punkti suhtes **tsentraalsümmeetriaks** ning selles teineteisele vastavaid kujundeid **tsentraalsümmeetrilisteks kujunditeks.** Kahest tsentraalsümmeetrilisest kujundist kumbagi võib nimetada ka teise **peegelduseks** (sümmeetriakeskpunktist). Sümmeetriakeskpunkti võib sel puhul nimetada ka **peegelduskeskpunktiks** ja kirjeldatud teisendust **tsentraalpeegelduseks.** Esitatud arutlusi kokku võttes ütleme, et

ristuvate peegeldustelgede korral kahest peegeldusest koosnev teisendus osutub tsentraalsümmeetriaks, mille keskpunktiks on telgede lõikepunkt.

Näitame ümberpöördult, kuidas tsentraalpeegeldust, mis on antud ühe paari vastavate punktidega A ja A'' (joon. 92), saab asendada kahe järjestikuse peegeldusega sirgest. Selleks leiame esmalt peegelduskeskpunkti, milleks on lõigu AA'' keskpunkt. Edasi võtame peegeldusteljed: esimeseks teljeks t_1 võtame mistahes sirge läbi punkti S, kuna teiseks teljeks t_2 tuleb võtta sirgega t_1 ristuv sirge läbi punkti S. Kui nüüd leida punkt $A'\equiv t_1(A)$, siis punktid A' ja A'' on sirge t_2 suhtes sümmeetrilised. Tõepoolest, kolmnurk $A'SA''$ on võrdhaarne, sest

$$A'S=AS=A''S,$$

ja sirge t_2 poolitab tema tipunurga S:

$$\beta'=90°-\alpha' \text{ ja } \beta''=180°-90°-\alpha=90°-\alpha'.$$

Kuid võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja poolitab aluse ja on sellega risti, s. t. $A''=t_2(A')$.

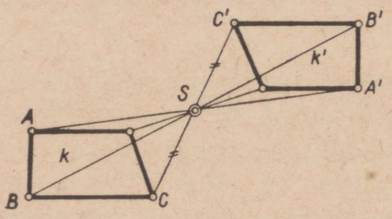
Kujundi k tsentraalsümmeetrilist teisendit ehk peegeldust punktist S märgitakse sümboliga $S(k)$; seega kirjutus $k' \equiv S(k)$ asendab lauset «Kujund k' on kujundi k peegeldus punktist S».

On kerge põhjendada, et kujund ja tema peegeldus mistahes punktist S on võrdsed: $k = S(k)$. See näitab, et ka peegeldus punktist on liikumisteisendus: ta on tasapinna pööramine peegelduskeskpunkti ümber sirgnurga võrra.

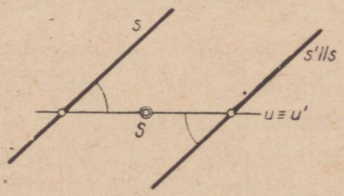
5.4.2. TSENTRAALPEEGELDUSE KONSTRUKTSIOON.

Kujundi tsentraalpeegeldus on määratud, kui peegelduskeskpunkt on antud. Kujundi k peegelduse konstrueerimiseks tõmbame antud kujundit määravatest punktidest $A, B, \ldots$ sirged läbi peegelduskeskpunkti S (joon. 93) ning märgime igal sirgel punkti, mis on punktist S sama kaugel kui kujundi vastav punkt. Saadud punktid $A', B', \ldots$ määravadki otsitava peegelduskujundi.

Kirjeldatud viisil saame igale peegelduskeskpunktist erinevale punktile vastavaks üheainsa punkti. Peegelduskeskpunkti loeme vastavaks iseendale, mistõttu see on vaadeldava teisenduse kahekordne punkt.



Joon. 93.



Joon. 94.

Iga sirge, mis läbib peegelduskeskpunkti, on tsentraalpeegelduse kahekordne sirge,

sest tema iga punkt teisendub sama sirge punktiks.

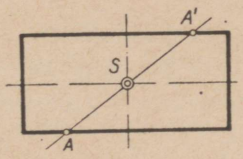
Iga sirge, mis ei läbi peegelduskeskpunkti, teisendub temaga paralleelseks sirgeks.

Tõepoolest, kui sirge s teisendub sirgeks s' (joon. 94), siis nende lõikamisel peegelduskeskpunkti S läbiva sirgega u tekib

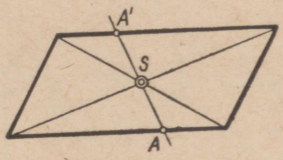
paar vastavaid punkte ja nende juurde paar vastavaid (seega võrdseid) nurki. Kuid need võrdsed nurgad on põiknurgad, mis tekivad kahe sirge s ja s' lõikamisel sirgega u. Järelikult on sirged s ja s' paralleelsed.

5.4.3. ISEENDAGA TSENTRAALSÜMMEETRILINE KUJUND.

Kujund võib olla mingi punkti suhtes sümmeetriline iseendaga. Sellise kujundi kohta öeldakse, et tal leidub sümmeetriakeskpunkt ehk et ta on tsentraalsümmeetriline. Kindlasti on tsentraalsümmeetriline iga kujund, millel leidub kaks teineteisega ristuvat sümmeetriatelge; säärase kujundi sümmeetriakeskpunktiks on telgede lõikepunkt. Näiteks ristküliku sümmeetriateljed (külgede keskristsirged) on teineteisega risti, mistõttu nende lõikepunkt S on ristküliku sümmeetriakeskpunktiks (joon. 95): iga sirge läbi selle punkti lõikab ristküliku külgi kahes punktis A ja A', mis on sümmeetrilised punkti S suhtes.



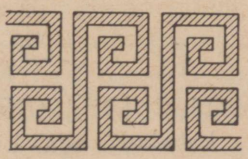
Joon. 95.



Joon. 96.

Kuid ristuvate sümmeetriatelgede olemasolu ei ole tarvilik sümmeetriakeskpunkti olemasoluks. Näiteks on rööpkülik tsentraalsümmeetriline oma diagonaalide lõikepunkti S suhtes, sest see punkt on vastastippude ühenduslõikude ühiseks keskpunktiks, kuid rööpkülikul ei leidu ühtki sümmeetriatelge (joon. 96).

Tsentraalsümmeetria leiab laialdast rakendamist tarbeesemete kujundamisel, eriti kaunistusmotiivides (joon. 97).



Joon. 97.

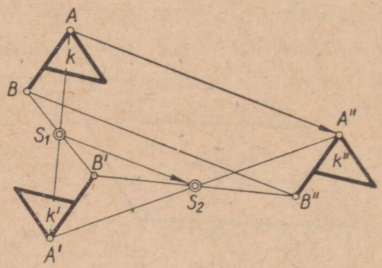
5.4.4. KAHEST TSENTRAALPEEGELDUSEST KOOSNEV TEISENDUS.

Kui peegeldame mingi kujundi esmalt punktist S ja siis saadud peegelduse veel kord samast punktist S, siis saame tulemuseks lähtekujundi. Niisiis:

sama keskpunkti korral kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus osutub samasuseks.

Edasi uurime teisendust, mis koosneb kahest tsentraalpeegeldusest, kusjuures peegelduskeskpunktid on erinevad. Selleks tõestame järgmise teoreemi:

erinevate keskpunktide korral kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub esimesest keskpunktist teise viiva vektori kahekordsega.



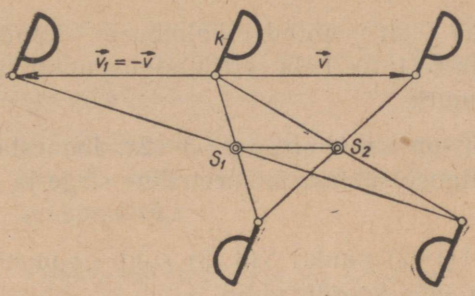
Joon. 98.

Tõestus. Peegeldame antud kujundi k esmalt keskpunktist S_1 ning saadud peegelduse $k' = S_1(k)$ omakorda teisest keskpunktist S_2 (joon. 98). Joonisel on vastavad teisenduskonstruktsioonid läbi viidud punktidega A ja B:

$$A' = S_1(A); \qquad B' = S_1(B);$$

$$A'' = S_2(A'); \qquad B'' = S_2(B').$$

Ühendades punkti A punktiga A'' ja punkti B punktiga B'', saame kaks kolmnurka $AA'A''$ ja $BB'B''$, millel on üks ja sama kesklõik S_1S_2. Tõesti, konstruktsiooni järgi $AS_1 = A'S_1$ ja $A'S_2 = A''S_2$ ning samuti $BS_1 = B'S_1$ ja $B'S_2 = B''S_2$. Kolmnurga kesklõigu omaduste tõttu kumbki lõikudest AA'' ja BB'' on paralleelne lõiguga S_1S_2 ning võrdub tema kahekordsega. Lisaks



Joon. 99.

sellele on lõigud AA'' ja BB'' samasuunalised, sest kumbki neist on samasuunaline lõiguga S_1S_2. Sellega ongi tõestatud, et vaadeldav liitteisendus osutub tõesti rööpplükkeks vektoriga.

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \ldots = 2\overrightarrow{S_1S_2}.$$

Teoreemist järeldame, et

kahe tsentraalpeegelduse tulemus sõltub peegeldamiste järjekorrast.

Tõesti, kui peegeldame enne punktist S_2 ja pärast punktist S_1, siis tulemuse kui rööplükke vektoriks saame endise vektori vastandvektori (joon. 99):

$$\mathbf{v}_1 = 2\overrightarrow{S_2S_1} = -2\overrightarrow{S_1S_2} = -\mathbf{v}.$$

Teiseks järeldame (joon. 98), et
rööplükkest (vektoriga AA'') **ja tsentraalpeegeldusest** (keskpunktiga S_2) **koosnev teisendus osutub tsentraalpeegelduseks** (meie joonisel keskpunktiga S_1).

ÜLESANDEID.

402. Näita joonise abil, et kahe peegelduse puhul, mille teljed on teineteisega risti, tulemus ei sõltu peegeldamiste järjekorrast.

403. Koordinaatteljestikus on antud punktid $A(3; 2)$, $B(-4; 3)$, $C(-1; -2)$ ja $D(5; -3)$. Leia neile koordinaatide alguse suhtes sümmeetrilised punktid.

404. Koordinaatteljestikus on antud kolmnurk tippudega $A(-2; 3)$, $B(2; 1)$ ja $C(4; 5)$. Leia sellele alguspunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk.

405. Koordinaatteljestikus on antud sirge $y=3-2x$. Joonesta sellele koordinaatide alguse suhtes sümmeetriline sirge ja anna viimase võrrand.

406. Joonesta punktiga $A(1; 2)$ punkti $S(4; 3)$ suhtes sümmeetriline punkt ja määra selle koordinaadid.

407. Missugusel korrapärasel hulknurgal leidub sümmeetriakeskpunkt ja missugusel ei leidu?

408. Veendu konstruktsiooni abil, et neljast tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus, milles keskpunktideks on ühe rööpküliku järjestikused tipud, on samasus.

409. Joonesta võrdkülgsele kolmnurgale tema keskpunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk. Mitu sümmeetriatelge on tekkinud tähtkuusnurgal?

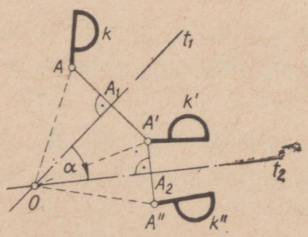
410. Mis on ringjoone sümmeetriakeskpunktiks?

411. Kasutades rööpküliku tsentraalsümmeetriat, tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

5.5. PÖÖRE.

5.5.1. PÖÖRE KAHE PEEGELDUSE TULEMUSENA.

Peegeldame kujundit k järjestikku kahest teljest t_1 ja t_2 (joon. 100), mille vaheline suunaga teravnurk on α (suunaga esimese telje poolt teise poole). Saadud kujundid olgu $k' = t_1(k)$ ja $k'' = t_2(k')$. Viimast kujundit k'' nimetatakse kujundi k **pöördeks**



Joon. 100.

ja üleminekut kujundilt k kujundile k'' kujundi k **pööramiseks** (lühemalt — pöördeks) punkti O ümber. Punkti O nimetatakse **pöördekeskpunktiks.** Seega

pööre on kahe peegelduse tulemus lõikuvate peegeldustelgede korral; seejuures peegeldustelgede lõikepunkt on pöördekeskpunktiks.

Vaadeldav teisendus on liikumine, sest lähtekujund ja tema teisend on võrdsed.

5.5.2. PÖÖRDE PÕHIOMADUS.

Pöörde põhiomadust väljendab järgmine teoreem:

kujundi punkti ja tema pöördeteisendit keskpunktiga ühendades saadakse võrdsed lõigud, mille vaheline nurk võrdub peegeldustelgede vahelise teravnurga kahekordsega.

Tõestuseks võtame kujundil k mingi punkti A (joon. 100) ja leiame tema teisendid $A' \equiv t_1(A)$ ja $A'' \equiv t_2(A')$. Siis on $OA = OA'$ kui lõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje t_1 punkti O telje suhtes kahe sümmeetrilise punktiga. Niisamuti $OA' = OA''$. Neist kahest võrdusest järeldub, et $OA = OA''$, millega väite esimene pool on tõestatud.

Edasi tuleb tõestada, et lõikude OA ja OA'' vaheline nurk AOA'', mis on väiksem kui sirgnurk, võrdub telgede t_1 ja t_2 vahelise teravnurga α kahekordsega (joon. 100). Et sümmeetrilised lõigud OA ja OA' ning OA' ja OA'' moodustavad oma sümmeetriatelgedega võrdsed nurgad, siis

$$\angle AOA' = 2 \cdot \angle A_1OA',$$

$$\angle A'OA'' = 2 \cdot \angle A'OA_2.$$

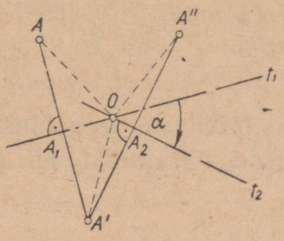
Nende võrduste vastavate poolte liitmisel ja paremal poolel ühise teguri 2 sulgude ette toomisel saame:

$$\angle AOA'' = 2(\angle A_1OA' + \angle A'OA_2) = 2 \cdot \angle A_1OA_2$$

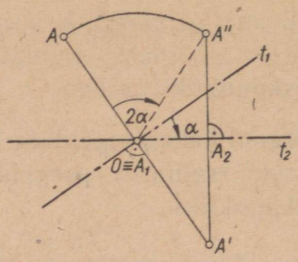
ehk

$$\angle AOA'' = 2\alpha.$$

Tõestamisel kasutasime siin joonist, kus punkti A peegeldus A' langes telgede t_1 ja t_2 vahelise teravnurga sisse. Saab tõestada, et



Joon. 101.



Joon. 102.

väide on õige ka punkti A teiste võimalike asendite puhul. Nii on võimalik näidata jooniste 101 ja 102 abil, et kui punkti A peegeldus A' langeb telgedevahelise nürinurga sisse, siis sirgnurgast suurem lõikude OA ja OA'' vaheline nurk võrdub telgedevahelise nürinurga kahekordsega. Nende nurkade lahutamisel täispöördest järeldub otsekohe, et sirgnurgast väiksem nurk AOA'' võrdub endiselt telgedevahelise teravnurga kahekordsega.

Sellekohase joonise abil on kerge veenduda, et kui antud peegeldustelgi rakendada teises järjekorras (enne telge t_2, siis telge t_1), siis kujund pöördub sama suure nurga võrra, kuid vastassuunas.

Tõestatud teoreemi võib kokkuvõtlikumalt sõnastada ka järgmiselt:

> **kujundi pööramisel tema tasapinna mingi punkti ümber pöördub kujundi iga punkt ühe ja sama nurga, nn. pöördenurga $\varphi = 2\alpha$ võrra,**

kus α on teravnurk nende telgede vahel, millest peegeldamine kutsub esile antud pöörde.

Kujundi k pööret, mille määravad keskpunkt O ja pöördenurk φ, märgime lühidalt kujul $O_\varphi\,(k)$.

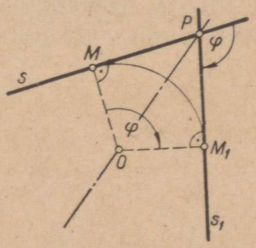
Kui pöördenurk $\varphi = 180°$, siis pööre osutub peegelduseks punktist O, sest peegeldusteljed on siis teineteisega risti.

5.5.3. JÄRELDUSI PÖÖRDE PÕHIOMADUSEST.

1) Kui kujundil k ja tema pöördel k' võtta mingid kaks teineteisele vastavat punkti, siis pöördekeskpunkt on neist punktidest võrdsetel kaugustel. Kuid kahest punktist võrdsetel kaugustel asetsev punkt on teatavasti nende punktide sümmeetriateljel. Järelikult

kujundi ja tema pöörde iga kahe teineteisele vastava punkti sümmeetriatelg läbib pöördekeskpunkti.

2) Pöördekeskpunktist O (joon. 103) sirgele s tõmmatud ristlõik OM teisendub pöördel keskpunktist O sirge teisendile tõmmatud ristlõiguks OM_1. Järelikult $OM = OM_1$, s. t. pöördekeskpunkt on sirgest ja tema teisendist võrdsetel kaugustel. Kuid kahest sirgest võrdsetel kaugustel olev punkt asetseb nendevahelise nurga poolitajal. Järelikult



Joon. 103.

sirgjoone ja tema pöörde vahelise nurga poolitaja läbib pöördekeskpunkti.

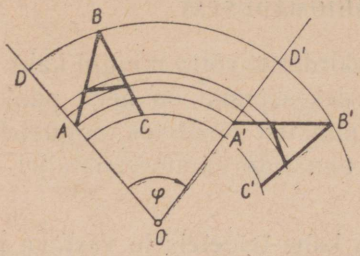
3) **Sirgjoone ja tema pöörde vaheline nurk, mille poolitaja ei läbi pöördekeskpunkti, võrdub pöördenurgaga,**

sest võrreldavaid nurki nurgaga MPM_1 liites saame sirgnurga (joon. 103).

5.5.4. PÖÖRDE KONSTRUKTSIOON.

Pöördekeskpunkti O ja pöördenurga φ andmisega on kujundi pööre kui teisendus üheselt määratud. Pöörde konstrueerimisel

1) tõmbame läbi kujundit määravate punktide A, B, C, ... kaared ümber pöördekeskpunkti O (joon. 104);



Joon. 104.

2) leiame iga nimetatud punkti uue asukoha (näiteks punkti B' leiame, kui sirkli abil teeme kaare BB' võrdseks kaarega DD' või kaare $D'B'$ võrdseks kaarega DB);

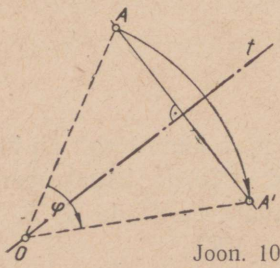
3) ühendame saadud punktid õiges järjekorras.

Iga pööret, mis on antud oma keskpunkti ja nurgaga, saab mitmeti esitada kahe peegelduse näol, kusjuures peegeldusteljed läbivad pöördekeskpunkti. Selleks võtame ühe telje (näiteks t_1) vabalt läbi keskpunkti, teise telje aga nii, et telgedevaheline teravnurk (suunaga esimese telje poolt teise poole) võrduks poolega antud pöördenurgast (joonised 100 ja 101).

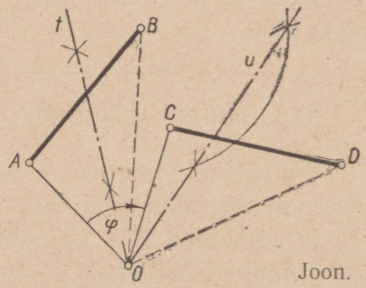
5.5.3. PÕHIÜLESANDED PÖÖRDEST.

Ülesanne 1. Antud on kaks punkti A ja A'. Leida mingi pööre, mis teeks ühe punkti teisega ühtivaks.

Lahendus. Otsitav pöördekeskpunkt peab asetsema punktide A ja A' sümmeetriateljel (5.4.3., järeldus 1). Selle sümmeetriatelje t iga punkt O kõlbab pöördekeskpunktiks, kui pöördenurgaks võetakse nurk $\varphi = \angle AOA'$ (joon. 105). Ülesandel on seega lõpmata palju lahendeid.



Joon. 105.



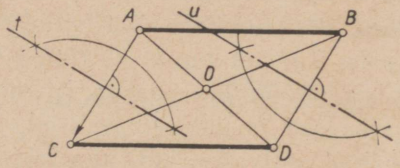
Joon. 106.

See lahendus näitab, et kahe punkti sümmeetriatelg on joon, millel asetsevad üht punkti teiseks teisendava pöörde keskpunktid.

Ülesanne 2. Antud on kaks võrdset lõiku. Leida pööre, mis teeb ühe lõigu teisega ühtivaks.

Lahendus. Olgu esimene lõik AB, teine CD (joon. 106). Leiame punktide A ja C sümmeetriatelje t ning punktide B ja D sümmeetriatelje u. Kui teljed t ja u lõikuvad, siis otsitavaks pöördekeskpunktiks on nende telgede lõikepunkt O ning pöördenurgaks $\varphi = \angle AOC$. Selle nurgaga võrdub nurk BOD, sest kumbki neist koosneb nurgast BOC ja veel võrdsete kolmnurkade AOB ja COD ühest nurgast (põhjenda nende kolmnurkade võrdsust, kasutades tunnust *kkk*).

Teise võimaliku lahenduse puhul saaksime keskpunktiks punkti, milles punktide A ja D sümmeetriatelg lõikab punktide B ja C sümmeetriatelge. Seega on sel ülesandel üldiselt kaks lahendust. Neist ühe puhul langeb punkt A ühte punktiga C, teise puhul punktiga D.

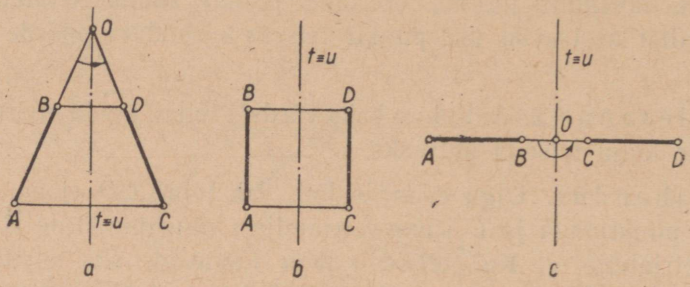


Joon. 107.

Kui punktipaaride A ja C ning B ja D (või A ja D ning B ja C) sümmeetriateljed ei lõiku, siis nad on paralleelsed või ühtivad.

Saab tõestada, et kui üks paar neist sümmeetriatelgedest on paralleelsed (näiteks $t \parallel u$, joon. 107), siis vastav pööre asendub rööplükkega (mille vektor joonisel 107 on $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$).

Kui üks paar neist sümmeetriatelgedest ühtib (näiteks $t \equiv u$, joon. 108—110), siis lõigud AB ja CD on sümmeetrilised selle ühise sümmeetriatelje suhtes. Kui lõigud AB ja CD ei ole paralleelsed selle teljega, siis nende lõikepunkt teljega on üheks pöördekeskpunktiks (joon. 108 ja 110). Kui aga AB ja CD on paralleelsed teljega, siis pööre asendub jällegi rööplükkega, mille vektor on $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (joon. 109).

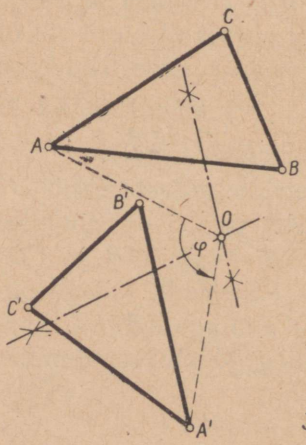


Joon. 108. Joon. 109. Joon. 110.

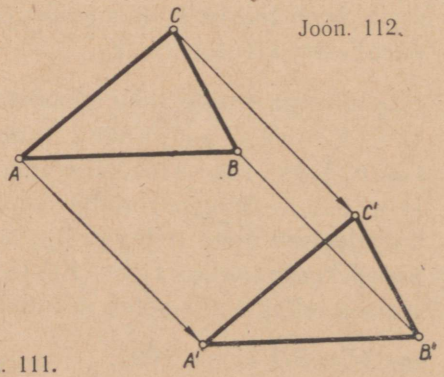
Ülesanne 3. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka. Leida pööre, mis teeb ühe kolmnurga teisega ühtivaks.

Lahendus. Antud võrdsed ja sama orientatsiooniga kolmnurgad olgu ABC ja $A'B'C'$ (joon. 111). Kolmnurkade vastavad küljed AB ja $A'B'$ on võrdsed. Kui need küljed pole paralleelsed, siis leiame eelmise ülesande eeskujul pöörde, mis teeb punkti A ühtivaks punktiga A' ja punkti B ühtivaks punktiga B'. Et kolmnurgad on sama orientatsiooniga, siis punkt C satub leitud pöörde puhul sirgest $A'B'$ samale poole, kus on punkt C', ning kolmnurkade võrdsuse tõttu üks kolmnurk ühtibki teisega (joon. 111).

Kui AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja samasuunalised, siis ei leidu pööret, mis teeks kolmnurgad ühtivaiks, küll aga leidub selleks sobiv rööplüke (joon. 112).



Joon. 111.



Joon. 112.

Kui AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja vastassuunalised, siis ülesanne lahendub tsentraalpeegelduse abil.

Esitatud ülesannetest järeldame, et ka kaht võrdset ja sama orientatsiooniga hulknurka saab pöörde (või erijuhtumil rööplükke) abil teha ühtivaiks.

ÜLESANDEID.

412. Antud on võrdkülgne kolmnurk ja väljaspool seda N-tähe kujuline kujund. Peegelda kujundit järjestikku kolmnurga kahest küljest ja määra saadud pöörde keskpunkt ja pöördenurk.

413. Joonesta mingi ruut ja selle pööre ruudu keskpunkti ümber 45° võrra.

414. Mingisuguste nurkade võrra (vahemikust 0° kuni 360°) saab iga järgnevat kujundit pöörata tema keskpunkti ümber nii, et pööratud kujund ühtiks antud kujundiga: a) võrdkülgne kolmnurk, b) ruut, c) korrapärane kuusnurk, d) korrapärane viisnurk?

415. Antud on kaks lõikuvat sirget ja kummalgi üks punkt. Leia pööre, mis teeb ühe sirge ja sellel antud punkti vastavalt ühtivaks teise sirge ja sellel antud punktiga.

Näpunäide. Pöördekeskpunktiks on punkt, kus lõikuvad antud punktide sümmeetriatelg ja antud sirgete (üks) sümmeetriatelg. Ülesandel on kaks lahendust.

416. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka ABC ja $A'B'C'$, mille vastavad küljed AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja vastassuunalised. Leia pööre, mis viib kolmnurga ABC kolmnurga $A'B'C'$ asendisse.

417. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka ABC ja $A'B'C'$ nii, et nende tipud B ja C' ühtivad. Leia pööre, mis viib kolmnurga ABC kolmnurga $A'B'C'$ asendisse.

418. Leia pöörded, millega võrdhaarse kolmnurga ühe haara saab teha teisega ühtivaks (kaks lahendust).

419. Leia pöörded, millega võrdhaarse trapetsi ühe haara saab teha teisega ühtivaks (kaks lahendust).

420. Antud on kaks võrdset nurka. Leia pööre, millega neid saab teha ühtivaiks.

421. Antud on võrdhaarne kolmnurk. Leia pööre, mis teeb ühe alusnurga teisega ühtivaks.

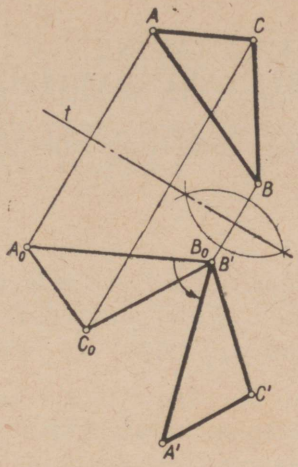
5.6. LIIKUMINE TASAPINNAL.

Eespool tutvusime lihtsamate liikumistega tasapinnal, nimelt peegeldusega sirgest, rööplükkega, peegeldusega punktist ja pöördega. Seejuures liikumiseks tasapinnal nimetasime niisugust selle tasapinna teisendamist iseendaks, mille puhul selle tasapinna mistahes kujund teisendub temaga võrdseks kujundiks. Et kõige lihtsam kujund, mille abil saab määrata teiste kujundite võrdsust, on kolmnurk, siis võime liikumiseks nimetada ka niisugust tasapinna teisendust iseendaks, mille puhul mistahes kolmnurk teisendub temaga võrdseks kolmnurgaks. Seega iga paar võrdseid kolmnurki määrab ühe liikumise tasapinnal. Ühenduses sellega tekib küsimus, kas ülalnimetatud liikumistega on ammendatud kõik liikumise liigid tasapinnal või mitte. Vastuse annab järgmine teoreem:

iga liikumist tasapinnal saab vaadelda koosnevana ülimalt kolmest peegeldusest.

Eespool nägime, et antud võrdseid ja sama orientatsiooniga kolmnurki saab viia ühtivusse kas rööplükke või pöörde abil (5.4.5., ülesanne 3). Et mõlemad nimetatud teisendused koosnevad vaid kahest peegeldusest, siis on väide tõestatud kõigi niisuguste liikumiste kohta, mis on määratud kahe sama orientatsiooniga kolmnurga abil.

Eeldame nüüd, et antud võrdsetel kolmnurkadel ABC ja $A'B'C'$ on orientatsioonid vastandlikud (joon. 113). Peegeldame üht neist, näiteks kolmnurka ABC, sirgest t, mis on ühe paari vastavate tippude, näiteks B ja B' sümmeetriateljeks. Siis kolmnurga tipu B peegelduseks on tipp B', aga tippude A ja C peegeldused olgu vastavalt A_0 ja C_0. Kolmnurk $A_0B'C_0$ on võrdne kolmnur-



Joon. 113.

gaga ABC, kuid vastandorientatsiooniga, s. t. ta on võrdne kolmnurgaga $A'B'C'$, millel on temaga ühine orientatsioon. Seetõttu võib juhtuda, et kolmnurgad $A_0B'C_0$ ja $A'B'C'$ ühtivad. Sel juhul oleks väide tõestatud, sest liikumine, mis teeks antud kolmnurgad ühtivaiks, oleks peegeldus sirgest t. Kui aga kolmnurgad $A_0B'C_0$ ja $A'B'C'$ ei ühti, siis saab neid panna ühtima pöörde abil ümber tipu B', sest nad on võrdsed ja sama orientatsiooniga. Et pööre koosneb kahest peegeldusest, siis kuluks nüüd antud kolmnurkade ühteviimiseks kokku kolm peegeldust. Sellega on väide täielikult tõestatud.

ÜLESANDEID.

422. Antud on kaks sama orientatsiooniga võrdset kolmnurka. Leia kaks järjestikust peegeldust, mis teevad need kolmnurgad ühtivaiks.

423. Antud on kaks erineva orientatsiooniga võrdset kolmnurka, mis pole sümmeetrilised sirge suhtes. Leia kolm järjestikust peegeldust, mis teevad need kolmnurgad ühtivaiks.

424. Leia, missuguse lihtsama liikumisega saab asendada
a) kaht rööplüket;
b) rööplüket koos tsentraalpeegeldusega;
c) kaht tsentraalpeegeldust;
d) nelja peegeldust, kui peegeldustelgedeks on vaheldumisi kaks ristuvat sirget.

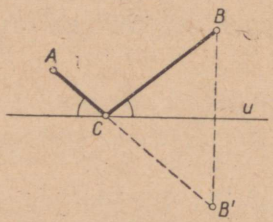
5.7. LIIKUMISTEISENDUSTE KASUTAMINE KONSTRUKTSIOONÜLESANNETE LAHENDAMISEL.

Liikumisteisendusi saab kasutada paljude teoreemide tõestamisel ja konstruktsioonülesannete lahendamisel. Vaatleme mõnda näidet viimaselt alalt.

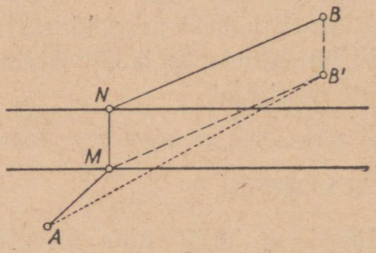
Teisenduste kasutamise meetod konstruktsioonülesannete lahendamisel seisneb selles, et vaadeldav kujund või selle mingi osa teisendatakse nii, et otsitav lahend (või lahendusviis) muutuks hõlpsamalt leitavaks. Selle meetodi sisu selgitavad lähemalt järgmised näited.

Näide 1. Ühel pool sirget u on antud kaks punkti A ja B. Leida sirgel u punkt C nii, et lõikude summa (tee pikkus) $AC+CB$ oleks minimaalne (võimalikult väike).

Lahendus. Olgu ACB otsitav murdjoon (joon. 114). Tema pikkus ei muutu, kui lõik CB asendada sirge u suhtes sümmeetrilise lõiguga CB'. Nüüd peaks lühima pikkusega olema murdjoon ACB'. Ta on seda siis, kui punkt C asetseb sirgel AB'. Siit selgub, et otsitav punkt on sirgete u ja AB' lõikepunkt, kus $B' = u(B)$.



Joon. 114.



Joon. 115.

Märkus. Jooniselt selgub, et leitud punkti C puhul on võrdsed need teravnurgad, mis AC ja CB moodustavad sirgega u, s. t. lühim tee on see, mida mööda liigub valgus punktist A punktini B, peegeldudes sirgest u.

Näide 2. Ühel pool paralleelsete kallastega kanalit on küla A, teisel pool küla B. Üle kanali tuleb ehitada sild niisuguses kohas, et tee ühest külast teise oleks minimaalse pikkusega.

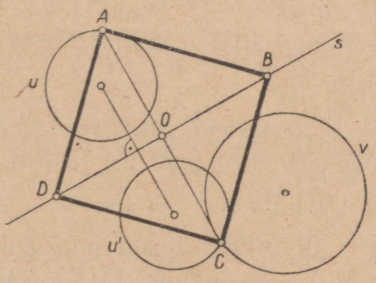
Lahendus. Oletame, et MN on nõutud silla asukoht, nii et murdjoon $AMNB$ on võimalik lühim tee, mis külasid ühendab

(joon. 115). Anname teeosale BN rööplükke, mille vektor on $\overrightarrow{NM}$, ning vaatleme uut murdjoont $AMB'B$, mille pikkus on võrdne endise murdjoone pikkusega. Et see pikkus oleks minimaalne, peaksid punktid A, M ja B' asetsema ühel sirgel. Siit selgub, et punkt M peab asetsema kohal, kus punkti A poolne kanali kallas lõikab sirget AB'.

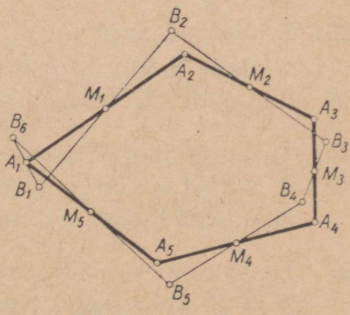
Näide 3. Konstrueerida ruut, mille kaks vastastippu asetsevad antud sirgel ja ülejäänud tippudest üks asetseb ühel ja teine teisel antud ringjoonel.

Lahendus. Olgu antud sirgjoon s ja ringjooned u ja v (joon. 116). Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et $ABCD$ on otsitav ruut, mille tipud B ja D asetsevad antud sirgel s, tipp A ringjoonel u ja tipp C ringjoonel v. Siis punktid A ja C on sümmeetrilised sirge s suhtes, sest ruudu diagonaalid ristuvad ja poolitavad teineteist. Et punkt A asetseb ringjoonel u, siis temaga sirge s suhtes sümmeetriline punkt C asetseb ringjoonega u sirge s suhtes sümmeetrilisel ringjoonel u'. Siit selgub järgmine konstruktsioon: 1) leiame ringjoone $u' \equiv s(u)$; 2) märgime, kui see on olemas, punkti, näiteks C, milles lõikuvad ringjooned v ja u'; 3) leiame punkti $A \equiv s(C)$; 4) joonestame ruudu, mille diagonaaliks on lõik AC, järelikult on ruudu keskpunktiks sirgete s ja AC lõikepunkt O. Selle ruudu tipud B ja D satuvad sirgele s, sest nad on punktidest A ja C võrdsetel kaugustel. Ruut $ABCD$ rahuldabki ülesande kõiki nõudeid.

Ülesande lahendite arv on võrdne ringjoonte u' ja v ühiste punktide arvuga. Kui need ringjooned ei lõiku, siis ülesandel pole lahendit; kui ringjooned puudutavad või lõikavad teineteist, siis



Joon. 116.



Joon. 117.

ülesandel on vastavalt üks lahend või kaks lahendit; kui ringjooned v ja u' langevad ühte, siis on lahendeid lõpmata palju.

Näide 4. Konstrueerida viisnurk külgede antud keskpunktide järgi.

Lahendus. Olgu antud viisnurga külgede keskpunktid M_1, M_2, M_3, M_4 ja M_5 (joon. 117). Kui otsitava viisnurga esimest tippu A_1 peegeldada punktist M_1, siis saadakse teine tipp A_2, seda peegeldades punktist M_2 saadakse kolmas tipp A_3 jne.; lõpuks tipu A_5 peegeldamisel punktist M_5 saadakse uuesti tipp A_1. Nii selgub, et punkt A_1 on viiest tsentraalpeegeldusest koosneva teisenduse kahekordne punkt, kui peegelduskeskpunktideks on punktid $M_1, \ldots, M_5$. Et kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus on rööplüke, rööplükkest ja tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus aga jälle tsentraalpeegeldus (5.3.4.), siis neljast tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus on taas rööplüke, viiest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus aga — tsentraalpeegeldus. Viimase teisenduse ainus kahekordne punkt on peegelduskeskpunkt. Tähendab, punkt A_1 on viiekordsel tsentraalpeegeldusel saadava tsentraalpeegelduse keskpunkt. Tema leidmiseks võtame tasapinna mistahes punkti B_1, peegeldame seda punktist M_1, saadud peegeldust B_2 uuesti punktist M_2 jne., kuni saame punkti B_6. Et punktid B_1 ja B_6 on peegelduses teineteisele vastavad punktid, siis lõigu B_1B_6 keskpunkt ongi selle peegelduse keskpunkt, ühtlasi otsitav punkt A_1. Viisnurga ülejäänud tipud leiame peegeldamise teel antud punktidest.

ÜLESANDEID.

425. Tasapinnal on antud kolm sirgel: s, t ja u. Leia sirgel s punkt S, kui on teada, et sellega sirge t suhtes sümmeetriline punkt S' asetseb sirgel u.

426. Tasapinnal on antud sirge s ja sellest ühel pool punktid A ja B. Leia sirgel s punkt M nii, et sirged AM ja BM moodustaksid sirgega s võrdsed nurgad.

427. Tasapinnal on antud sirge s ja sellest teisel pool punktid A ja B. Leia sirgel s punkt M nii, et lõikude AM ja BM pikkuste vahe oleks võimalikult suur.

428. Tasapinnal on antud nurk tipuga A ja sirge t. Ehita ruut, mille kaks vastastippu asetsevad sirgel t ja ülejäänud tipud antud nurga haaradel või nende pikendustel üle tipu A.

429. Tasapinnal on antud nurk tipuga A ja selle sees punkt S. Joonesta läbi punkti S sirge nii, et tema lõik nurga haarade vahel poolituks punktis S.

430. Tasapinnal on antud sirgjoon, ringjoon ja punkt. Joonesta läbi antud punkti sirge, mille lõik antud sirgjoone ja ringjoone vahel poolituks antud punktis.

431. Joonesta tasapinnaline seitsenurk külgede antud keskpunktide järgi.

432. Joonesta läbi kahe antud ringjoone lõikepunkti sirge, mis ei läbi ringjoonte teist lõikepunkti ja millest need ringjooned lõikavad välja võrdsed kõõlud.

5.8. HOMOTEETSUS TASAPINNAL.

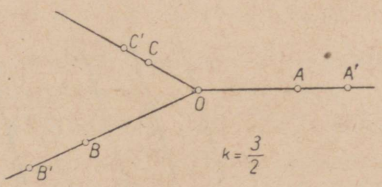
5.8.1. HOMOTEETSUSE MÕISTE.

Homoteetsuseks tasapinnal nimetatakse järgmiste omadustega vastavust tasapinna punktide vahel:

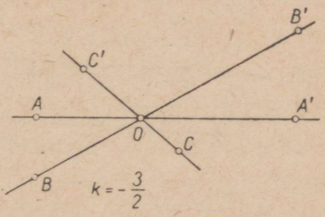
1) iga punkti ja sellele vastava punkti ühendussirge läbib üht ja sama punkti O, mida nimetatakse **homoteetsuskeskpunktiks.**

2) iga kaks teineteisele vastavat punkti asetsevad homoteetsuskeskpunktist kas ühel pool (**päripidine homoteetsus,** joon. 118) või teine teisel pool (**vastupidine homoteetsus,** joon. 119);

$$OA' : OA = OB' : OB = OC' : OC = \ldots = k$$



Joon. 118.



Joon. 119.

3) kui M ja M' on kaks teineteisele vastavat punkti, siis lõikude suhe $OM' : OM = k$ on jääv tasapinna kõigi punktide puhul. See jääv suhe, mida nimetatakse **homoteetsusteguriks,** on päripidise homoteetsuse korral positiivne ja vastupidise homoteetsuse korral negatiivne, sest esimesel juhtumil on lõigud OM ja OM' samasuunalised, teisel juhtumil aga vastassuunalised.

Homoteetsusteguri definitsioonist järeldub, et

$$OM' = k \cdot OM,$$

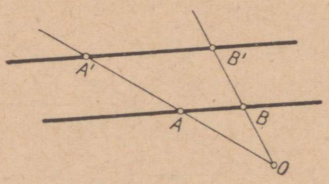
millest nähtub, et keskpunkti O ja teguri k andmisega on homoteetsus määratud, sest nende andmete korral saab igale punktile M leida temale vastavat punkti M'. Kui punkt M ühtib keskpunktiga O, siis ühtib viimasega ka teisend M'; järelikult on keskpunkt homoteetsuse kahekordne punkt. Saab tõestada, et ta on homoteetsuse ainus kahekordne punkt.

5.8.2. HOMOTEETSUSE TÄHTSAMAD OMADUSED.

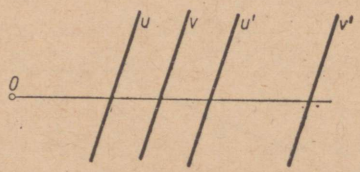
1) Homoteetsuskeskpunkti läbiva sirge teisendiks on seesama sirge, iga muu sirge teisendiks aga tema paralleel.

Homoteetsuskeskpunkti läbiva sirge kohta on väide ilmselt õige, sest homoteetsuse definitsiooni järgi on selle sirge punktide teisenditeks sellesama sirge punktid. Väite tõestamiseks homoteetsuskeskpunkti mitteläbiva sirge AB kohta eeldame, et homoteetsus on antud keskpunktiga O ja teguriga k (joon. 120). Leiame sirgel AB asetseva punkti, näiteks punkti A teisendi A', ning joonestame temast läbi sirge, mis on paralleelne sirgega AB. Lõigaku sirge OB joonestatud sirget punktis B'. Siis kiirteteoreemi põhjal

$$OB' : OB = OA' : OA.$$



Joon. 120.



Joon. 121.

Et viimane suhe väljendab homoteetsustegurit, siis teeb sedasama ka esimene: $OB' : OB = k$. See näitab, et sirgel AB asetseva punkti B homoteetseks teisendiks on punkt B' sirgel $A'B'$. Ilmselt kehtib see nende sirgete kõigi punktide kohta.

2) Paralleelsetele sirgetele vastavad parelleelsed sirged,

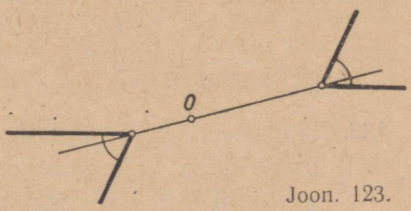
sest kui kaks sirget on paralleelsed, siis ka ühega ja teisega vastavalt paralleelsed sirged on omavahel paralleelsed (joon. 121), kui $u \parallel v$ ja $u' \parallel u$, $v' \parallel v$, siis $u' \parallel v'$.

3) Iga nurk teisendub temaga võrdseks nurgaks,

sest teisendatud nurga haarad on antud nurga haaradega vastavalt paralleelsed ja samasuunalised (joon. 122) või vastavalt paralleelsed ja vastassuunalised (joon. 123).



Joon. 122.



Joon. 123.

4) Iga kahe teineteisele vastava lõigu suhe võrdub homoteetsusteguriga,

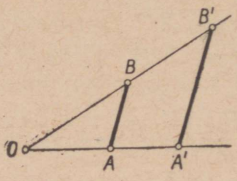
sest kolmnurkade OAB ja $OA'B'$ sarnasuse tõttu (põhjenda seda, joon. 124) võime kirjutada:

$A'B' : AB = OA' : OA = k$.

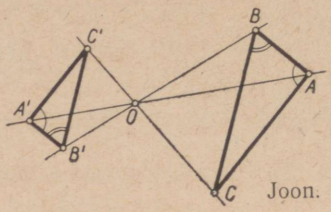
5) Iga kolmnurk (üldiselt iga kujund) **teisendub temaga sarnaseks kolmnurgaks** (kujundiks),

sest viimase kahe omaduse järgi nende nurgad on vastavalt võrdsed ja kõik vastavad lõigud on võrdelised (joon. 125).

Viimase omaduse tõttu nimetatakse homoteetsust ka **sarnasusteisenduseks** ning kaht homoteetset kujundit **perspektiivsarnasteks kujunditeks** (ehk sarnasteks kujunditeks sarnasusasendis). Kui ühega kahest perspektiivsarnasest kujundist teostada mingi liikumisteisendus, siis nende eriline vastastikune asend kaob ja me saame lihtsalt kaks sarnast kujundit. Seega võime öelda, et



Joon. 124.



Joon. 125.

kujundite sarnasus on homoteetsuse ja liikumisteisenduse järjestikusel rakendamisel püsima jääv kujundite omadus.

Lõpuks olgu märgitud, et kui homoteetsustegur $k=1$, siis homoteetsus osutub samasuseks (sest igale punktile vastavaks on siis see punkt ise); kui aga $k=-1$, siis homoteetsus osutub peegelduseks homoteetsuskeskpunktist.

ÜLESANDEID.

433. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Leia mõõtmise teel homoteetsustegur. Vaatle kaht juhtumit: kui homoteetsus on päripidine ja kui ta on vastupidine.

434. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Leia konstruktsiooni teel mingile punktile vastav punkt.

435. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Konstrueeri vabalt võetud kolmnurgale vastav kolmnurk.

436. Põhjenda väidet, et ringjoonega, mille raadius on r, homoteetseks kujundiks on ringjoon raadiusega kr, kus k on homoteetsustegur. (Kasuta omadust 4!)

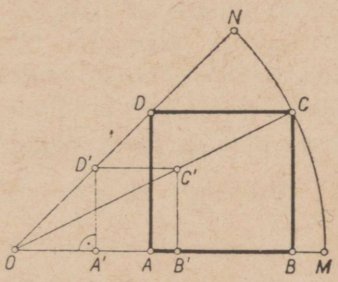
437. Põhjenda väidet, et vastupidine homoteetsus koosneb päripidisest homoteetsusest ja tsentraalpeegeldusest.

5.9. HOMOTEETSUSE KASUTAMINE KONSTRUKTSIOONÜLESANNETE LAHENDAMISEL.

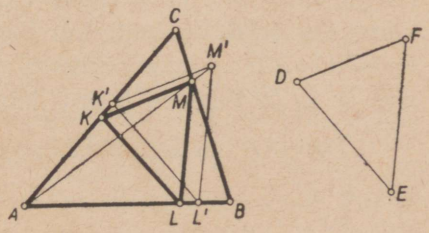
Nagu liikumisteisendusi, nii ka homoteetsust saab kasutada konstruktsioonülesannete lahendamisel. Vastav nn. s a r n a s u s m e e t o d seisneb selles, et esmalt konstrueeritakse otsitava kujundiga sarnane kujund ja siis homoteetsust kasutades otsitav kujund. Vaatleme selle meetodi rakendamist mõnede näidisülesannete lahendamisel.

N ä i d e 1. Antud sektorisse MON joonestada ruut, mille kaks tippu asetsevad sektori raadiusel OM, kolmas tipp raadiusel ON ja neljas tipp kaarel MN (joon. 126).

L a h e n d u s. Joonestame algul m i n g i ruudu $A'B'C'D'$ (joon. 126), mille tipud A' ja B' asetsevad antud sektori raadiusel OM ja tipp D' sektori raadiusel ON (kuidas seda teha?). Pikendame lõiku OC' kuni lõikumiseni sektori kaarega punktis C, kui ta juba ei lõika seda kaart. Teisendame ruutu $A'B'C'D'$ homoteetselt, võttes keskpunktiks punkti O ja üheks paariks vastavateks punktideks punktid C' ja C $(k=OC:OC')$. Teisendamisel saame ruudu $ABCD$, mis täidab ülesande tingimusi. Lahend on ühene.



Joon. 126.



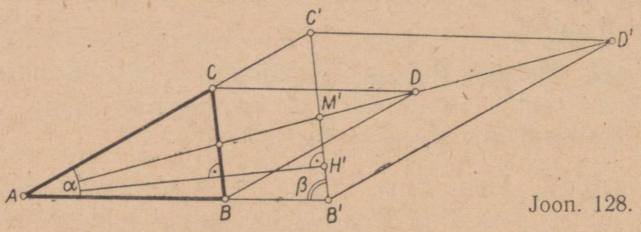
Joon. 127.

N ä i d e 2. Joonestada kolmnurk, mille tipud asetsevad antud kolmnurga ABC külgedel ja küljed on vastavalt paralleelsed teise antud kolmnurga DEF külgedega.

L a h e n d u s. Võtame küljel AC vabalt punkti K' ja joonestame esmalt otsitava kolmnurgaga KLM sarnase kolmnurga $K'L'M'$, mille tipp L' asetseb küljel AB ja mille küljed on vasta-

valt paralleelsed kolmnurga DEF külgedega (joon. 127). Kolmnurka $K'L'M'$ teisendame homoteetselt, võttes homoteetsuskeskpunktiks punkti A ja üheks vastavate punktide paariks punktid M' ja M, kus M on sirgete AM' ja BC lõikepunkt.

Näide 3. Konstrueerida kolmnurk, mille kaks nurka α ja β ning nurga α tipust tõmmatud mediaani ja kõrguse summa on antud.



Joon. 128.

Lahendus. Konstrueerime otsitavaga sarnase kolmnurga $AB'C'$ (joon. 128), milles $\angle A=\alpha$, $\angle B'=\beta$ ja külg AB' on vabalt võetud. Edasi leiame tipust A tõmmatud mediaani AM' ja kõrguse AH' ning kanname kõrguse mediaani pikendusele. Nii saame tipust A tõmmatud mediaani ja kõrguse summaks lõigu AD'.

Samale sirgele AD' kanname alates punktist A otsitava kolmnurga mediaani ja kõrguse summa, saades lõigu AD. Otsitava kolmnurga ABC saame, kui kolmnurga $AB'C'$ teisendame homoteetselt, võttes keskpunktiks A ja üheks vastavate punktide paariks D' ja D. Punktid B ja C leiame paralleelide joonestamise teel:

$DB \parallel D'B'$ ja $DC \parallel D'C'$.

ÜLESANDEID.

438. Joonesta antud kolmnurka ruut, mille kaks tippu asetsevad kolmnurga ühel küljel, kolmas tipp teisel küljel ja neljas tipp kolmandal küljel.

439. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja kolmanda nurga tipust tõmmatud mediaan.

440. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja nende nurkade tippudest tõmmatud mediaanide summa.

441. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja kolmanda nurga tipust tõmmatud kõrguse ja bisektori summa.

442. Antud on kaks lõikuvat sirget ja väljaspool neid punkt. Joonesta ringjoon, mis läbib antud punkti ja puudutab antud sirgeid.

443. Joonesta antud kolmnurka ristkülik, mille kaks tippu asetsevad kolmnurga ühel küljel, kolmas tipp teisel küljel ja neljas tipp kolmandal küljel, kui ristküliku küljed suhtuvad nagu 3 : 2.

444. Antud on ringjoon ja sellel punkt A. Leia punktist A väljuva antud ringjoone kõõlu keskpunkti geomeetriline koht.

445. Joonesta antud segmenti ruut, mille kaks tippu asetsevad segmendi alusel ja kaks segmendi kaarel.

KORDAMISKÜSIMUSI.

446. Mida nimetatakse peegelduseks sirgest? Mida võib öelda kolmnurga ja tema peegelduse orientatsiooni kohta?

447. Mida nimetatakse rööplükkeks? Kuidas rööplüke avaldub peegelduste kaudu?

448. Mida nimetatakse peegelduseks punktist? Kuidas peegeldus punktist avaldub teljelise sümmeetria kaudu?

449. Missugust teisendust nimetatakse pöördeks punkti ümber? Missuguste andmetega on pööre määratud?

450. Missugust teisendust nimetatakse homoteetsuseks? Missugune seos on homoteetsuse ja sarnasuse vahel?

451. Nimeta homoteetsuse tähtsamaid omadusi.

452. Kuidas teisendub täisnurkne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt ühest kaatetist ja siis saadud peegeldust peegeldada teisest kaatetist?

453. Kuidas teisendub täisnurkne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt ühe teravnurga poolitajast ja siis saadud peegeldust peegeldada teise teravnurga poolitajast?

454. Kuidas teisendub võrdkülgne kolmnurk, kui teda peegeldada esmalt kolmnurga ühest küljest ja siis saadud peegeldust peegeldada teisest küljest?

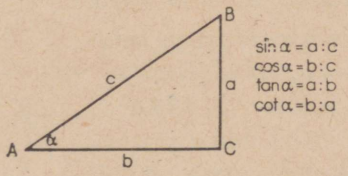
455. Joonesta vabalt võetud isekülgse kolmnurga peegeldus esmalt ühe nurga poolitajast, siis saadud peegelduse peegeldus teise nurga poolitajast ja lõpuks viimase peegeldus kolmanda nurga poolitajast.

456. Missuguse kujundi moodustab täisnurkne kolmnurk koos
a) tema peegeldusega ühe kaateti suhtes;
b) tema peegeldusega hüpotenuusi keskpunkti suhtes?

6. TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

6.1. TERAVNURGA ÜHE TRIGONOMEETRILISE FUNKTSIOONI VÄÄRTUSE JÄRGI SAMA NURGA TEISTE FUNKTSIOONIDE VÄÄRTUSTE LEIDMINE.

Teravnurga iga trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse järgi saab ehitada selle nurga, kui ehitada täisnurkne kolmnurk, mille vastavate külgede suhe on võrdne antud funktsiooni väärtusega. Saadud kolmnurgast võib nüüd leida vaadeldava nurga ülejäänud kolme funktsiooni väärtused (joon. 129).



Joon. 129.

Lahendame näitena ülesande:

$\sin \alpha = 0{,}45$. Leia $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$.

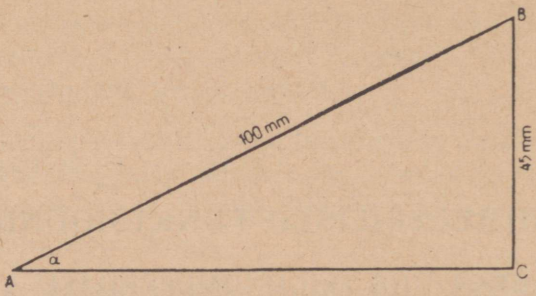
Lahendus. $\sin \alpha = 0{,}45 = 45 : 100$.

Ehitame täisnurkse kolmnurga, mille üks kaatet on 45 mm ja hüpotenuus 100 mm (joon. 130).

Mõõtmisel leiame, et teine kaatet on 89 mm (olgu märgitud, et teise kaateti suuruse võib leida ka arvutamise teel, rakendades Pütagorase teoreemi). Edasi saame, et

$\cos \alpha = 89 : 100 = 0{,}89$;
$\tan \alpha = 45 : 89 = 0{,}51$;
$\cot \alpha = 89 : 45 = 1{,}98$.

Sellest näitest näeme, et kui teravnurga trigonomeetrilistest funktsioonidest üks on antud, siis kõigi teiste funktsioonide väärtusi saab selle antud väärtuse järgi leida.



Joon. 130.

Kui on kasutada nurgafunktsioonide tabelid, siis saab antud nurgafunktsiooni väärtuste järgi leida sama nurga ülejäänud kolm funktsiooni ka tabelite abil, leides esmalt antud funktsiooni väärtuse järgi nurga suuruse.

ÜLESANDEID.

457. $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. Leia graafiliselt $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$.
458. $\cos\alpha=0{,}75$. Leia graafiliselt $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$.
459. $\tan\alpha=1{,}5$. Leia graafiliselt $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$.
460. $\cot\alpha=2$. Leia graafiliselt $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$.
461. $\sin\alpha=0{,}53$. Leia tabelite abil $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$.
462. $\cos\alpha=0{,}07$. Leia tabelite abil $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$.
463. $\tan\alpha=0{,}344$. Leia tabelite abil $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$.
464. $\cot\alpha=11{,}4$. Leia tabelite abil $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$.

6.2. TERAVNURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE VAHELISED SEOSED.

1. Nurgafunktsiooni antud väärtuse järgi saab sama nurga ülejäänud kolme funktsiooni väärtust leida ka arvutamise teel, kasutades valemeid, mis väljendavad nurgafunktsioonidevahelisi seoseid.

Ühe ja sama teravnurga siinuse ja koosinuse vahelist seost väljendava valemi saame tuletada Pütagorase teoreemi abil (joon. 129):

$$a^2+b^2=c^2.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled c^2-ga, saame

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

ehk

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Siit

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1,$$

mida kirjutatakse tavaliselt nõnda:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

Ühe ja sama nurga siinuse ja koosinuse ruutude summa võrdub 1-ga.

See seos võimaldab $\sin \alpha$ väljendada $\cos \alpha$ kaudu ja ümberpöördult:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

2. Tuletame seose ühe ja sama nurga siinuse, koosinuse ja tangensi vahel:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

ja

$$\cos \alpha = \frac{b}{c},$$

seega

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ ehk } \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

millest

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

Teravnurga tangens võrdub selle nurga siinuse ja koosinuse jagatisega.

3. Ühe ja sama nurga tangensi ja kootangensi vahelise seose tuletamiseks paneme tähele, et

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

ja

$$\cot \alpha = \frac{b}{a},$$

seega

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Ühe ja sama nurga tangensi ja kootangensi korrutis võrdub 1-ga.

Võrdusest $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ saame

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

ja

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

Seega,

nurga kootangens ja tangens on teineteise pöördväärtused.

Seoseid

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1,$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide vahelisteks **põhiseosteks.** Need põhiseosed võimaldavad nurga ühe funktsiooni järgi arvutada ülejäänud kolme funktsiooni.

Seda selgitavad järgmised näited.

Näide 1. On teada, et $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Arvuta

1) $\cos \alpha$; 2) $\tan \alpha$; 3) $\cot \alpha$.

Lahendus. 1) Asendades võrduses

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$\sin\alpha$ antud väärtusega, saame

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}.$$

2) Kasutades võrdust

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ning asendades seal $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ nende väärtustega, saame

$$\tan\alpha=\frac{5}{13}:\frac{12}{13}=\frac{5}{12}.$$

3) Et nurga kootangens on sama nurga tangensi pöördväärtus, siis

$$\cot\alpha=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}.$$

Näide 2. Avalda $\tan\alpha$ kaudu 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$.

Lahendus. 1) Jagades võrduse

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

mõlemad pooled $\sin^2\alpha$-ga, saame

$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

ehk

$$1+\frac{1}{\tan^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ \text{ehk}\ \frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

millest

$$\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$$

Siit saame

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

2) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$

Sellest

$$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}.$$

Arvestades, et $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$,

saame

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

Näide 3. Avalda $\cot\alpha$ kaudu 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$.

Lahendus. 1) $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\cot\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cot^2\alpha+1}};$$

seega

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}.$$

2) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$.

Näide 4. Avalda murd

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$\tan\alpha$ kaudu.

Lahendus. Jagades antud murru lugeja ja nimetaja avaldisega $\cos^2\alpha$, saame

$$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

ÜLESANDEID.

465. Avalda murd $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ funktsiooni $\tan\alpha$ kaudu.

466. Väljenda vahe $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$ funktsiooni $\sin\alpha$ kaudu.

467. Avalda summa $\tan\alpha+\cot\alpha$ funktsioonide $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ kaudu.

468. Väljenda $\tan\alpha$ kaudu avaldis

$$\frac{1}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}.$$

Näide 5. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$$

väärtus, teades, et $\tan\alpha=1\frac{1}{2}$.

Lahendus. Jagades antud avaldise lugeja ja nimetaja arvuga $\cos\alpha$ ning asendades seejärel saadud avaldises $\tan\alpha$ antud väärtusega $1\frac{1}{2}$, saame:

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{1\frac{1}{2}+1}{1\frac{1}{2}-1}=\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=5.$$

ÜLESANDEID.

469. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

väärtus, teades, et $\tan\alpha=\frac{5}{4}$.

470. Arvuta avaldise

$$\frac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$$

väärtus, teades, et $\tan\alpha=2$.

471. On teada, et $\tan\alpha+\cot\alpha=10$. Arvuta avaldise $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$ väärtus.

472. Arvuta $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ väärtus, kui on teada, et $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}2$.

Näide 6. Lihtsusta avaldist

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

Lahendus.

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha.$$

Eespool saadud valemid nurga ühe funktsiooni avaldamiseks sama nurga teise funktsiooni kaudu on kokkuvõtlikult esitatud järgmises tabelis.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha=$	—	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha=$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha=$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha=$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	—

Need valemid hõlbustavad arvutusi ning kergendavad avaldiste lihtsustamist ja samasuste tõestamist.

ÜLESANDEID.

473. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

2) $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

3) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cot^2\alpha$

4) $\cot\alpha\cdot\sin\alpha$

5) $\frac{1}{\cos\alpha}:\tan\alpha$

6) $1-\sin\alpha\cdot\cot\alpha\cdot\cos\alpha$

7) $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cot\alpha}$

8) $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\tan^2\alpha}{1:\cos\alpha}$

9) $\sin^2 52°+\sin^2 38°$

10) $\tan 41°\cdot\tan 45°\cdot\tan 49°$

11) $\frac{\cos 31°}{\cos 59°}\cdot\frac{\sin 31°}{\sin 59°}$

12) $\frac{\cos 23°}{\sin 67°}:\frac{\sin 23°}{\cos 67°}$

474. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin\alpha\cot\alpha+\cos\alpha$
2) $1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
3) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$
4) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$
5) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

6) $\cos\alpha \cdot \tan\alpha$

7) $\cot\alpha \cdot \sin\alpha$

8) $\sin\alpha : \tan\alpha$

9) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$

10) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

11) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

12) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha.$

Näide 7. Tõesta, et

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cot^2\alpha}=1.$$

Lahendus. Tõestamiseks teisendame antud võrduse vasakut poolt.

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cot^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1.$$

Näide 8. Tõesta samasus

$$\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha.$$

Lahendus.

$$\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Märkus. Mõnikord osutub samasuse tõestamisel otstarbekaks teisendada võrduse mõlemat poolt.

ÜLESANDEID.

475. Tõesta järgmised samasused:

1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

2) $\dfrac{4-5\cos\alpha}{3-5\sin\alpha}+\dfrac{3+5\sin\alpha}{4+5\cos\alpha}=0$

3) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{1+\cot^2\alpha}{1-\cot^2\alpha}$

4) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}$

5) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

6) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = 1-\cos\alpha$

7) $\frac{1}{1+\tan^2\alpha} + \frac{1}{1+\cot^2\alpha} = 1$

8) $\cot\alpha + \cos\alpha = \frac{\cot^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cot\alpha - \cos\alpha}$

9) $1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\tan\alpha = \cos^2\alpha$

10) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^4\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$

11) $\sin^2\alpha(1+\cot^2\alpha) = 1$

12) $\tan\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sin\alpha$

KORDAMISÜLESANDEID.

476. Esita vahe $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

a) kahe nurga siinuste vahena;

b) kahe nurga koosinuste vahena.

477. Esita summana $1+\sqrt{3}$

a) kahe nurga tangensite summana;

b) kahe nurga kootangensite summana.

478. Esita summa $1+\frac{1}{2}$

a) kahe nurga siinuste summana;

b) kahe nurga koosinuste summana.

479. Arvuta peast

a) $\tan 57° \cdot \tan 33°$;

b) $\frac{\sin 36°}{\cos 54°}$.

480. Arvuta:

1) $\sin 45° - \cos 60°$
2) $\sin 60° - \cos 45°$
3) $\cos 30° - \cos 45°$
4) $\tan 45° - \cot 45°$
5) $\tan 45° - \cos 0°$
6) $\sin 0° - \tan 0°$
7) $\sin 30° + \tan 45°$
8) $\cos 60° - \cot 45°$
9) $\cos 0° - \sin 0°$
10) $\sin 90° - \cos 0°$

481. Arvuta 60°-se nurga ja 30°-se nurga siinuste suhe.

482. Leia 45°-se nurga ja 60°-se nurga koosinuste suhe.

483. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin(75°-\alpha)}$$

väärtus, teades, et $\alpha=45°$.

484. Mast on toestatud vaieritega, mille pikkused on 10 m ja mis maapinnaga moodustavad nurga 60°. Kui kõrgel maapinnast on vaierid kinnitatud masti külge?

485. Jõud 10 kg on lahutatud kaheks komponentjõuks, mille suunad on teineteisega risti, kusjuures ühe komponendi suund moodustab antud jõu suunaga nurga 30°. Arvuta komponentide suurused.

486. Päike on silmapiiril 30° kõrgusel. Kase varju pikkus on sel ajal 50 m. Kui kõrge on kask?

487. Maasse püstilöödud teiba kõrgus maapinnast on 3 m ja ta varju pikkus 5 m. Leia päikese kõrgusnurk.

488. Lihtsusta avaldised:

1) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$

2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3) $\sin\alpha\cos\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)$

489. Tõesta samasused:

1) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ 2) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

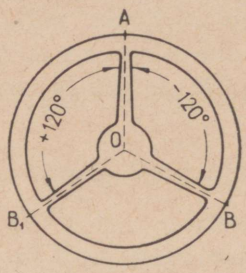
6.3. NEGATIIVNE NURK.

Auto rooliratast saab pöörata kahes teineteisele vastupidises suunas. Kui rooliratast pööratakse kellaosuti liikumise suunas, näiteks nii, et kodar OA läheb asendisse OB (joon. 131), siis auto esirattad pöörduvad paremale. Rooliratta pööramisel kellaosuti liikumisele vastupidises suunas, näiteks nii, et kodar OA läheb

asendisse OB_1, pöörduvad esirattad vasakule. Loeme ühe pööramise suuna positiivseks, teise negatiivseks.

Positiivseks pöörlemise suunaks loetakse seda suunda, mis on vastupidine kellaosutite pöörlemise suunale.

Vankri vasakpoolsete rataste mutrid keeratakse kinni, kui pöörata neid positiivses suunas, parempoolsete rataste mutrite kinnikeeramiseks tuleb neid pöörata negatiivses suunas. Kellaosutid pöörlevad negatiivses suunas.



Joon. 131.

Igapäevases kõnekeeles nimetatakse pöörlemist positiivses suunas pöörlemiseks vastupäeva ning pöörlemist negatiivses suunas pöörlemiseks päripäeva.

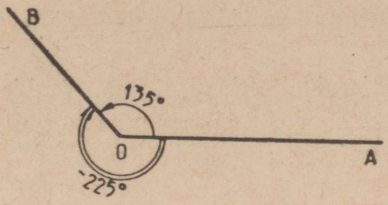
Kui on teada, et auto rooliratast pöörati nurga võrra 120°, siis pole teada, kas kodar OA (joon. 131) läks asendisse OB või asendisse OB_1, s. t. pole teada, kas sellel pöörlemisel tekkis nurk AOB või nurk AOB_1.

Pöörlemisel tekkiv nurk on määratud siis, kui on antud pöörde suurus ja pöörlemise suund.

Pöörlemisel tekkiva nurga loeme positiivseks, kui pöörlemine toimub positiivses suunas, ja negatiivseks, kui pöörlemine toimub negatiivses suunas.

Negatiivse nurga mõõtarvu kirjutame märgiga miinus. Näiteks, kui kodar OA (joon. 131) on jõudnud negatiivses suunas pööreldes asendisse OB, siis on tekkinud nurk $-120°$. Kella minutiosuti pöördub veerand tunniga $-90°$, poole tunniga $-180°$, kolmveerand tunniga $-270°$.

Vaatleme nurka, mis tekib kiire pöörlemisel tasapinnal oma otspunkti O ümber (joon. 132).



Joon. 132.

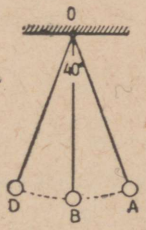
Kui kiir on pöörlemisel jõudnud asendist OA asendisse OB, siis on tekkinud nurk AOB. *Nurga haara OA, millest kiir alustas pöörlemist, nimetatakse* **alghaaraks** *ja haara OB, millel kiire pöörlemine lõppes, nimetatakse* **lõpphaaraks.** Nurga tähistamisel kolme tähe abil kirjutatakse esikohale täht, mis asub alghaara juures. Joonisel 132 kujutatud nurka AOB võib mõista kahel viisil: kas positiivse nurgana 135° või negatiivse nurgana −225°. Nagu näeme, on nende nurkade absoluutväärtuste summa 360°. Kahesuse vältimiseks on lepitud kokku, et sümbolid

$$\angle AOB,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots$$

tähendavad positiivseid nurki, kui teisiti pole öeldud.

ÜLESANDEID.

490. Millise nurga teeb pendel (joon. 133) võnkumisel
a) asendist OD asendisse OA?
b) asendist OA asendisse OD?



Joon. 133.

491. Missuguse nurga võrra pöördub kella minutiosuti 5 minutiga? 20 minutiga? 45 minutiga?

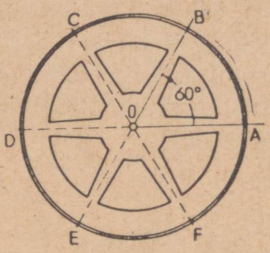
492. Missuguse nurga võrra peab pöörama kella minutiosutit, et lükata kella tagasi 10 minuti võrra? 15 minuti võrra? 30 minuti võrra? 45 minuti võrra?

493. Kummalt pooluselt vaadatuna on Maa pöörlemise suund positiivne?

494. Kummal juhul, kas õmblemisel edaspidi või õmblemisel tagaspidi, on õmblusmasina hooratta pöörlemise suund negatiivne, kui masinale vaadata hoorattapoolsest otsast?

6.4. NURK, MILLE ABSOLUUTVÄÄRTUS ÜLETAB TÄISPÖÖRDE.

Paistku meile diiselmootori hooratta pöörlemine positiivses suunas ja toimugu see kiirusega 1 täispööre sekundis (joon. 134).



Joon. 134.

Olgu kodarat tähistava kiire lähteasend OA, $\frac{1}{6}$ sekundi pärast on kiir pöördunud 60° võrra, jõudes asendisse OB. Kui hooratas pöörleb positiivses suunas edasi ja kiir OA läbib järjekorras asendid

$OC, OD, OE, OF, OA,$

siis öeldakse, et hooratas on pöördunud nurga võrra, mille suurus on vastavalt

120°, 180°, 240°, 300°, 360°.

Hooratta edasisel samasuunalisel pöörlemisel jõuab kiir OA teist korda asendisse OB. Nüüd on nurk, mille võrra hooratas on pöördunud, suurem kui 360°. Öeldakse, et see nurk on

$360° + 60°$ ehk 420°.

Kui hooratas pöörleb samas suunas edasi, läbib kiir OA teist korda oma lähteasendi ning jõuab kolmandat korda asendisse OB. Sel korral öeldakse, et tekkinud nurga suurus on

$60° + 2 \cdot 360°$ ehk 780°.

Hooratta edasisel pöörlemisel jõuab kiir OA asendisse OB

3, 4, 5, ..., k

korda. Tekkinud nurkade suurused on siis vastavalt

$60°+3\cdot360°, 60°+4\cdot360°, 60°+5\cdot360°,$
$\ldots, 60°+k\cdot360°,$

kus k tähendab positiivset täisarvu.

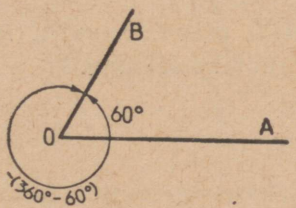
Nurga mõistet sel viisil laiendades, s. o. kasutades nurka pöörde mõõduna, võib kõnelda kuitahes suurtest positiivsetest nurkadest.

Kui hooratas pöörleb aga näiteks negatiivses suunas, nii et kiir OA läbib järjekorras asendid

$OF, OE, OD, OC, OB, OA, OF, OE,$

siis tekkinud nurga suurus on vastavalt:

$-60°, -120°, -180°, -240°, -300°, -360°, -420°, -480°.$



Joon. 135.

Kui kiir OA (joon. 135) pöörleb negatiivses suunas ja jõuab esimest korda asendisse OB, siis tekib negatiivne nurk, mille absoluutväärtus on $360°-60°$; seega selle nurga suurus on

$-(360°-60°)=60°-360°.$

Kui kiir OA läbib pöörlemisel samas suunas asendi OB

2, 3, 4, ..., k

korda, siis vastavad nurgad on

$60°-2\cdot360°, 60°-3\cdot360°, 60°-4\cdot360°, \ldots, 60°-k\cdot360°.$

Seega kõik positiivsed ja negatiivsed nurgad, mille alghaaraks on kiir OA ja lõpphaaraks kiir OB, on väljendatavad ühise valemiga

$60°+k\cdot360°,$

kus k on mistahes täisarv.

Üldiselt,

iga nurga x saab avaldada kujul

$x=\alpha+k\cdot 360°$,

kus k on täisarv ja α on 360°-st väiksem positiivne nurk.

Näiteid.

1. $5764°=4°+16\cdot 360°$
2. $6038°=278°+16\cdot 360°$ ehk
   $6038°=-82°+17\cdot 360°$
3. $-1000°=80°-3\cdot 360°$

ÜLESANDEID.

495. Lihvimisketta äärel asuv punkt liigub kiirusega 900 $\frac{m}{s}$. Ketta läbimõõt on 4 dm. Kui suure nurga võrra pöördub ketta raadius sekundis?

496. Elektrimootori rihmaratas teeb 900 pööret minutis. Mitme kraadi võrra pöördub rihmaratta raadius sekundis?

497. Väljenda järgmised nurgad kujul

$\alpha+n\cdot 360°$,

kus $0<\alpha<360°$.

1) 1117°; 2) 1940°; 3) 2720°; 4) 1030°.

498. Väljenda järgmised nurgad kujul

$\alpha+n\cdot 360°$,

kus $-180°<\alpha<180°$ ehk $|\alpha|<180°$.

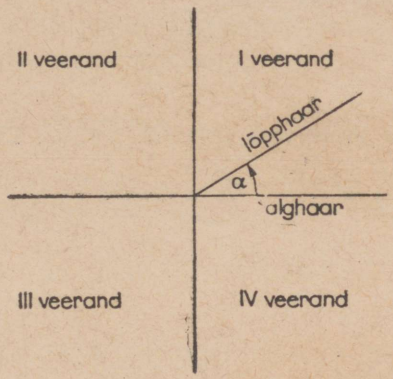
1) 1420°; 2) 1770°; 3) 2020°; 4) $-2400°$.

Jaotame tasapinna koordinaattelgedega neljaks **veerandiks,** mida nimetatakse positiivse pöörlemise suuna järjekorras esimeseks, teiseks, kolmandaks ja neljandaks veerandiks.

Paigutame mingi nurga teljestikku nõnda, et ta tipp asub nullpunktis ja alghaar asub abstsisside positiivsel poolteljel. Nurga lõpphaar asub siis sõltuvalt nurga suurusest kas mõnel poolteljel või tasapinna esimeses, teises, kolmandas või neljandas veerandis (joon. 136).

Nurkasid nimetatakse esimese, teise, kolmanda ja neljanda veerandi nurkadeks vastavalt sellele, mitmendas veerandis asetseb nurga lõpphaar, sõltumata sellest, mis suunas pööreldes ta sellesse asendisse on jõudnud.

Seega, positiivsed teravnurgad on esimese veerandi nurgad; positiivsed nürinurgad on teise veerandi nurgad; nurk, mis on suurem kui 180° ja väiksem kui 270°, on kolmanda veerandi nurk; nurk, mis on suurem kui 270° ja väiksem kui 360°, on neljanda veerandi nurk.



Joon. 136.

Negatiivne teravnurk on neljanda veerandi nurk, negatiivne nürinurk on kolmanda veerandi nurk jne.

On ilmne, et kui α on esimese, teise, kolmanda või neljanda veerandi nurk, siis on seda ka nurk

$$\alpha + n \cdot 360°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Veeranditesse kuuluvateks ei loeta nurki, mis on täisnurga kordsed:

$$0°,\ \pm 90°,\ \pm 180°,\ \pm 270°,\ \ldots,$$

sest nende lõpphaarad asetsevad telgedel, mis jaotavad tasapinna veeranditeks.

Et leida, mitmendas veerandis antud nurk lõpeb, selleks tuleb ta avaldada kujul

$$\alpha + n \cdot 360°, \text{ kus } |\alpha| < 360°.$$

Antud nurk lõpeb samas veerandis, kus nurk α.

Näide 1. Mitmendas veerandis lõpeb nurk 1500°?

Lahendus. $1500:360=4$, jääk 60.

$1500°=60°+4\cdot 360°$.

Nurk 1500° on esimese veerandi nurk.

Näide 2. Mitmendas veerandis lõpeb nurk $-800°$?

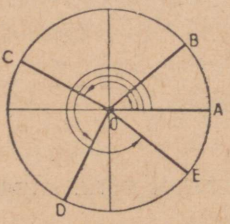
Lahendus. $-800°=-80°-2\cdot 360°$.

Nurk $-800°$ lõpeb neljandas veerandis.

ÜLESANDEID.

499. Mitmendasse veerandisse kuuluvad nurgad joonisel 137:

1) $\angle AOB$; 2) $\angle AOC$; 3) $\angle AOD$; 4) $\angle AOE$?



Joon. 137.

500. Mitmendasse veerandisse kuuluvad järgmised nurgad:

1)	2)	3)	4)
405°	200°	−30°	−370°
600°	300°	−100°	−500°
840°	700°	−170°	−600°
250°	950°	−400°	−800°

501. Ehita sirkli ja joonlaua abil nurgad

1) 300°; 2) −150°; 3) −135°; 4) 840°.

502. Ehita malli ja joonlaua abil nurgad

1) 1000°; 2) −1000°; 3) 500°; 4) −500°.

6.5. NURGA MÕÕDUÜHIKUD.

6.5.1. KRAAD.

Kõige rohkem levinud nurga mõõduühik on nurgakraad.

Nurgakraad on $\frac{1}{90}$ täisnurgast ehk $\frac{1}{360}$ täispöördest.

Nurgakraadi sümboliks on 1°.

$1° = 60'$, $1' = 60''$.

Maamõõtjad kasutavad praktilistel nurga mõõtmistel peaaegu eranditult kraadimõõtu.

6.5.2. RADIAAN.

Radiaan on kesknurk, millele vastava kaare pikkus on võrdne raadiuse pikkusega (joon. 138).

Sellest definitsioonist järeldub, et täispööre on 2π radiaani, s. o.

$360° = 2\pi$ radiaani.

Siit

$$1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ radiaani}$$

ehk

$1° = 0{,}0175$ radiaani.

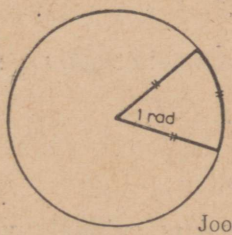
Et

2π radiaani $= 360°$,

siis

$$1 \text{ radiaan} = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} \text{ kraadi}$$

ehk



Joon. 138.

$$1 \text{ radiaan} = 180° \cdot \frac{1}{\pi} = 180° \cdot 0{,}3185 = 57{,}2958°$$

ehk

1 radiaan $= 57°17'45''$.

Üldiselt, kui mingi nurga suurus kraadimõõdus on n ja radiaanmõõdus x, siis

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{n}{360} \text{ ehk } \frac{x}{\pi} = \frac{n}{180},$$

millest

$$x = \frac{\pi n}{180}$$

ja

$$n = \frac{180x}{\pi}.$$

Kraadimõõdus antud nurga suuruse ümberarvutamiseks radiaanideks ja ümberpöördult kasutatakse sellekohaseid tabeleid (V. M. Bradis, Neljakohalised matemaatilised tabelid, lk. 59—61).

Asendades n-kraadise kaare pikkuse arvutamisel valemis

$$s = \frac{\pi r}{180} \cdot n$$

arvu n avaldisega $\frac{180x}{\pi}$, saame

$$s = \frac{\pi r}{180} \cdot \frac{180x}{\pi} = rx,$$

s. t.

kesknurgale vastava kaare pikkus võrdub kaare raadiuse ja kesknurga radiaanmõõdu korrutisega.

Asendades ringi sektori pindala valemis

$$S = \frac{s \cdot r}{2}$$

arvu s avaldisega rx, saame

$$S = \frac{r^2 x}{2}.$$

Seega,

sektori pindala võrdub tema nurga radiaanmõõdu ja raadiuse ruudu poole korrutisega.

Märkus. Nimetuse radiaan lühendiks on rad, kuid see nimetus jäetakse tavaliselt kirjutamata.

Nurga mõõtarv radiaanmõõdus antakse sageli arvu π abil. Näiteks selle asemel, et ütelda «nurk, mille suurus on 1,2 radiaani» või «... $\frac{\pi}{2}$ radiaani», öeldakse «nurk 1,2» või «nurk $\frac{\pi}{2}$ ».

Näiteid.

1. Mitu radiaani on 40°?

Lahendus. $x=\frac{\pi \cdot 40}{180}=\frac{2\pi}{9} \approx 0{,}6981$.

Vastus. 40° on $\frac{2\pi}{9}$ ehk 0,6981 radiaani.

2. Avalda võrdkülgse kolmnurga nurga suurus radiaanides.

Lahendus. $x=\frac{\pi \cdot 60}{180}=\frac{\pi}{3}$.

Vastus. Võrdkülgse kolmnurga nurk on $\frac{\pi}{3}$ radiaani.

3. Avalda 1,5 rad kraadimõõdus.

Lahendus. $n=\frac{180 \cdot 1{,}5}{\pi}=\frac{270}{\pi}=270 \cdot \frac{1}{\pi}=270 \cdot 0{,}3185=$
$=89{,}13°=89°7'48''$.

Vastus. 1,5 rad on 89°7′48″.

4. Avalda kraadimõõdus järgmised radiaanmõõdus antud nurgad:

$\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$, 2π.

Anna vastus tabeli kujul.

Lahendus. $n=\frac{180 \cdot \frac{\pi}{4}}{\pi}=\frac{180}{4}=45$ (kraadi), jne.

$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°

ÜLESANDEID.

503. Avalda radiaanmõõdus:

1) 50°; 2) 32,56°; 3) 114°36′.

504. Avalda 1 radiaan

1) minutites; 2) sekundites.

505. Avalda kraadimõõdus:

1) 2 rad; 2) 3 rad; 3) 1,7 rad; 4) 2,15 rad.

506. Avalda radiaanmõõdus alljärgnevad kraadimõõdus antud nurgad:

30°, 60°, 120°, 150°, 210°, 240°.

Anna vastus tabeli kujul. Radiaanmõõdud kirjuta π abil.

507. Millega võrdub iga alljärgneva funktsiooni väärtus:

1)	2)	3)	4)
$\sin 0$	$\tan \frac{\pi}{6}$	$\tan \frac{\pi}{4}$	$\tan \frac{\pi}{3}$
$\cos 0$	$\cot \frac{\pi}{6}$	$\cot \frac{\pi}{4}$	$\cot \frac{\pi}{3}$
$\sin \frac{\pi}{6}$	$\sin \frac{\pi}{4}$	$\sin \frac{\pi}{3}$	$\sin \frac{\pi}{2}$
$\cos \frac{\pi}{6}$	$\cos \frac{\pi}{4}$	$\cos \frac{\pi}{3}$	$\cos \frac{\pi}{2}$

508. Ülivõimsa elektrimootori ajamiratas teeb 12 000 pööret minutis. Väljenda selle ratta nurkkiirus ühikutes $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

509. Lihvimisketta nurkkiirus on 4500 radiaani sekundis. Mitu pööret teeb lihvimisketas minutis?

510. Elektrigeneraatori ankru nurkkiirus on 50 radiaani sekundis. Mitu pööret teeb ankur minutis?

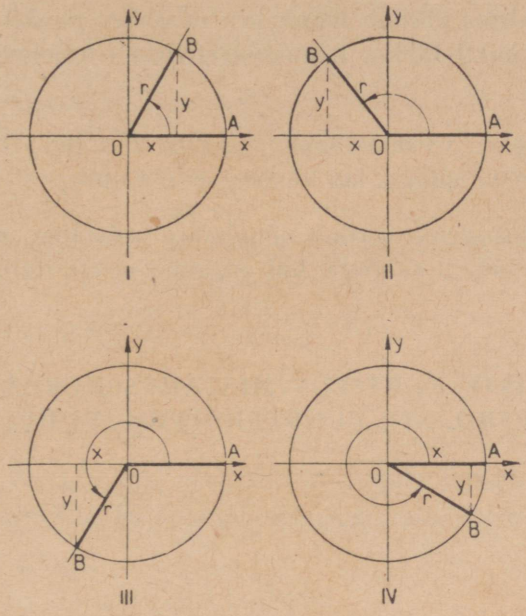
6.6. MISTAHES SUURUSEGA NURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

Trigonomeetriliste funktsioonide defineerimiseks mistahes nurga puhul toimime järgmiselt.

Olgu antud mistahes positiivne kesknurk $AOB = \alpha$, mis ei ole täisnurga kordne. Selle nurga lõpphaar võib asetseda kas esimeses, teises, kolmandas või neljandas veerandis.

Joonestame nurga AOB kõigil neljal juhul, võttes alghaaraks abstsisside positiivse pooltelje (joon. 139, I, II, III, IV).

Valime nurga AOB lõpphaaral mingi punkti B. Tähistame



Joon. 139.

selle punkti koordinaate tähtedega x ja y ning lõiku OB tähega r, kusjuures $r>0$.

Lõpphaara pöörlemisel joonestab punkt B ringjoone, mille keskpunktiks on nurga tipp O ja raadius on r. Nimetame seda ringjoont trigonomeetriliseks ringjooneks. Olgu nurga α alghaaral asetsev raadius OA. Nüüd võime nurka vaadelda trigonomeetrilise ringjoone raadiuste OA ja OB vahelise kesknurgana.

Täisnurkse kolmnurga abil antud trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide kohaselt saame juhtumil I, et

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r};\quad \tan\alpha=\frac{y}{x};\quad \cot\alpha=\frac{x}{y}.$$

Ülejäänud juhtumitel defineerime trigonomeetrilised funktsioonid nendesamade võrdustega.

Nende mõistete abil saame järgmised üldised trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid:

kesknurga siinus võrdub lõpphaara mistahes punkti ordinaadi ja seda punkti läbiva trigonomeetrilise ringjoone raadiuse suhtega;

kesknurga koosinus võrdub lõpphaara mistahes punkti abstsissi ja seda punkti läbiva trigonomeetrilise ringjoone raadiuse suhtega;

kesknurga tangens võrdub lõpphaara mistahes punkti ordinaadi ja abstsissi suhtega, kui abstsiss ei ole null;

kesknurga kootangens võrdub lõpphaara mistahes punkti abstsissi ja ordinaadi suhtega, kui ordinaat ei ole null.

6.7. PÕHISEOSTE KEHTIVUS MISTAHES NURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PUHUL.

Kui trigonomeetrilise ringjoone mistahes punktiks on punkt $B(x; y)$, siis trigonomeetrilise ringjoone võrrand on $x^2+y^2=r^2$.

Siit

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=1.$$

Et $\frac{y}{r}=\sin\alpha$ ja $\frac{x}{r}=\cos\alpha$, kus α on mistahes kesknurk, siis kehtib iga kesknurga puhul seos

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

Et

$$\frac{y}{x}=\tan\alpha,$$

siis

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha}$$

nagu on teravnurga korralgi.

Mistahes nurga α tangensi ja kootangensi definitsiooni järgi

$$\tan\alpha=\frac{y}{x},$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}.$$

Korrutades viimaste võrduste vastavad pooled, saame

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Seega kõik kolm põhiseost jäävad kehtima mistahes nurga puhul, välja arvatud see juhtum, mil nurk α on täisnurga kordne.

Ilmselt jäävad siis kehtima mistahes nurga puhul ka kõik need seosed, mis järelduvad põhiseostest.

ÜLESANDEID.

511. Arvuta peast:

1) $\sin^2 500° + \cos^2 500°$
2) $\sin^2 400° + \sin 300° + \cos^2 400°$
3) $\tan 700° \cdot \cot 700°$
4) $\tan 850° \cdot \cot 850° - \cos 60°$
5) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1$
6) $2 - \sin^2 210° - \cos^2 210°$

Nurga kootangens on tangensi pöördväärtus:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Nurga siinuse pöördväärtust nimetatakse **koosekansiks** *ja tähistatakse sümboliga* $\operatorname{cosec} \alpha$.

Seega

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Nurga koosinuse pöördväärtust nimetatakse **seekansiks** *ja tähistatakse sümboliga* $\sec \alpha$.

Seega

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

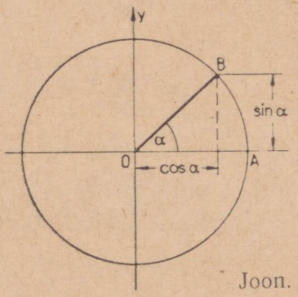
Õppides tundma nurga siinust, koosinust ja tangensit, ei ole vajadust eraldi uurida nende pöördväärtusi, seepärast me edaspidi sellest loobume.

6.8. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE VÄÄRTUSED LÕIKUDE PIKKUSTENA.

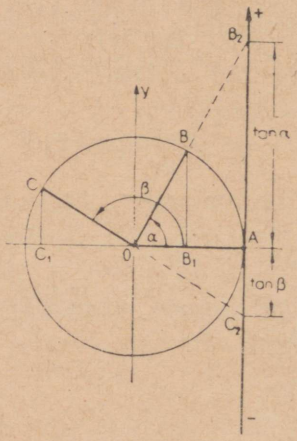
Trigonomeetrilist ringi, mille raadius on võrdne ühe pikkusühikuga, nimetatakse ühikringiks. Jooniselt 140 näeme, et

ühikringis nurga siinus võrdub lõpphaara ja ringjoone lõikepunkti ordinaadiga ja koosinus selle punkti abstsissiga.

Sõltuvalt sellest, missuguse märgiga on nimetatud punkti abstsiss ja ordinaat, on nurga vastav trigonomeetriline funktsioon kas positiivne või negatiivne (kui ta nullist erineb). Nii on nurga siinus I ja II veerandis positiivne, III ja IV veerandis negatiivne; koosinus I ja IV veerandis positiivne, II ja III veerandis aga negatiivne.



Joon. 140.



Joon. 141.

Et saada lõiku, mille mõõtarv võrdub nurga tangensiga, selleks kasutame tangenstelge, s. o. *ühikringi puutujat, mis on risti nurga alghaaraga punktis A* (joon. 141). Tangenstelje positiivseks suunaks loeme y-telje positiivse suuna.

Näitame nüüd, et nurga haarade vaheline tangenstelje lõik kujutabki nii suuruselt kui märgilt nurga tangensit.

Vaatleme esmalt esimese veerandi nurka α (joon. 141). Kolmnurgast AOB_2 näeme, et

$$\tan \alpha = \frac{AB_2}{AO}.$$

Et ühikringis

$$OA = 1,$$

siis

$$\frac{AB_2}{OA}=\frac{AB_2}{1}=AB_2.$$

Seega

$$\tan\alpha=AB_2.$$

Juhul, kui nurk lõpeb teises veerandis, nagu nurk β joonisel 141, siis

$$\tan\beta=\frac{y}{x}=\frac{C_1C}{OC_1}.$$

Et kolmnurgad OC_1C ja OAC_2 on sarnased, siis

$$\frac{C_1C}{OC_1}=\frac{AC_2}{OA}=\frac{AC_2}{1}=AC_2 \text{ ja}$$

$$\tan\beta=AC_2.$$

Et punkt C asub teises veerandis, siis jagatis $\frac{y}{x}$ on negatiivne ja seega ka $\tan\beta$ on negatiivne. Kooskõlas sellega on lõik AC_2 suunatud x-teljest a l l a p o o l e ja seega negatiivne.

Kui nurk lõpeks kolmandas või neljandas veerandis, siis jõuaksime samasuguse arutlusega tulemusele, et

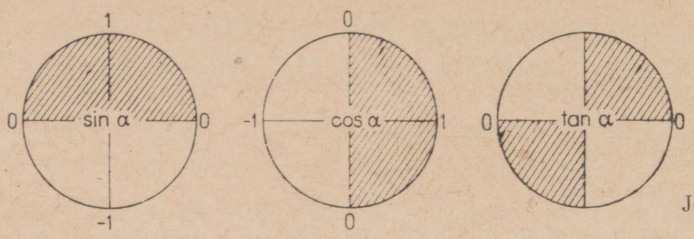
ühikringis nurga tangens võrdub kas nurga haarade vahelise tangenstelje lõigu või alghaara ja lõpphaara (üle keskpunkti võetud) pikenduse vahelise tangenstelje lõigu mõõtarvuga.

On kerge näha, et I ja III veerandi nurga tangens on positiivne, II ja IV veerandi nurga tangens aga negatiivne.

Joonis 142 annab ülevaate sellest, missugune märk on trigonomeetrilistel funktsioonidel igas veerandis ja missugused on funktsioonide väärtused nurkade 0°, 90°, 180°, 270° ja 360° korral. Joonisel on viirutatud need veerandid, milles nurga trigonomeetriline funktsioon on positiivne.

Tangenstelje lõiku ei ole olemas, kui nurk on 90° või 270°, sest neil juhtudel nurga lõpphaara pikendus ei lõika puutujat, vaid on sellega paralleelne.

Kuigi nurkadel 90° ja 270° tangens puudub, võime siiski jooniselt 141 näha, missugune on nurga tangens siis, kui nurk veidi erineb 90°-st ja kui ta veidi erineb 270°-st.



Joon. 142.

Kui nurk on veidi väiksem 90°-st, siis nurga tangens on väga suur positiivne arv. Kui nurk on veidi suurem 90°-st, siis nurga tangens on väga suure absoluutväärtusega negatiivne arv.

Milline on nurga tangens, kui nurk on veidi väiksem (suurem) 270°-st?

ÜLESANDEID.

512. Ehita sirkli ja joonlaua abil nurk α ning seejärel lõikudena $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$. Leia saadud jooniselt nende funktsioonide väärtused.

1) $\alpha=135°$; 2) $\alpha=210°$; 3) $\alpha=285°$.

513. Leia alljärgnevate trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

1) $\sin 180°$	2) $\cos\pi$	3) $\tan 0°$
$\sin\frac{3\pi}{2}$	$\cos 270°$	$\tan\pi$
$\sin 2\pi$	$\cos 2\pi$	$\tan 2\pi$

514. Selgita nurga 90° tangensi puudumist, vaadeldes tangensit siinuse ja koosinuse jagatisena.

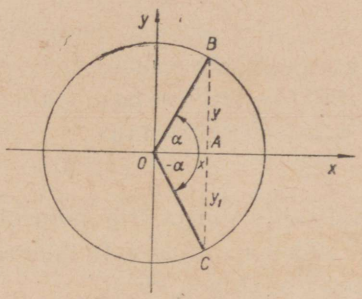
515. Selgita nurga 0° kootangensi puudumist, vaadeldes kootangensit tangensi pöördväärtusena.

6.9. TAANDAMISVALEMID.

6.9.1. TAANDAMINE POSITIIVSELE NURGALE.

Olgu α positiivne nurk, siis $-\alpha$ on negatiivne nurk. Joonisel 143 näeme, et $\sin\alpha = y$ ja $\sin(-\alpha) = y_1$. Kolmnurkade OAB ja OAC võrdsuse tõttu on nende vastavad küljed võrdsed. Et y_1 on negatiivne, siis $y_1 = -y$, seega

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha. \tag{1}$$



Joon. 143.

Et $\cos\alpha$ ja $\cos(-\alpha)$ suurust väljendab üks ja sama lõik OA, siis

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha. \tag{2}$$

Jagades võrduse (1) pooled võrduse (2) vastavate pooltega, saame

$$\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{ehk} \quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}}$$

Näide. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

6.9.2. TAANDAMINE 360°-st VÄIKSEMALE NURGALE.

Trigonomeetriliste funktsioonide üldistest definitsioonidest järeldub, et nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtused on määratud vastava nurga lõpphaara asendiga, sõltumata sellest, mitme täispöörde järel või mis suunas pöörlemisel ta sellesse asendisse jõudis. Kui nurk kasvab või kahaneb täispöörde või täispöörde kordse võrra, siis lõpphaar tuleb endisse asendisse. Seega,

trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu nurga kasvamisel või kahanemisel täispöörde või selle kordse võrra.

Sümbolites:

$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin\alpha$ ehk $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$,
$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos\alpha$ ehk $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$,
$\tan(\alpha + k \cdot 360°) = \tan\alpha$ ehk $\tan(\alpha + 2\pi k) = \tan\alpha$,

kus k on mistahes täisarv.

Need valemid võimaldavad mistahes nurga trigonomeetrilise funktsiooni t a a n d a d a 360°-st väiksema nurga funktsiooniks: selleks tarvitseb meil vaid antud nurk avaldada kujul

$$k \cdot 360° + \alpha,$$

kus α on antud nurga 360-ga jagamisel tekkiv jääk.

N ä i t e i d.

1) $\sin 2530° = \sin(7 \cdot 360° + 10°) = \sin 10°$;
2) $\tan(-1095°) = \tan(-4 \cdot 360° + 345°) = \tan 345°$.

ÜLESANDEID.

516. Avalda alljärgnevad funktsioonid 360°-st väiksema nurga funktsioonidena:

1) $\sin 395°$; 2) $\cos 695°$; 3) $\tan 1956°$; 4) $\sin(-2783°)$;
5) $\cos(-730°)$.

517. Avalda $\sin 900°$ 360°-st väiksema nurga koosinuse kaudu.

518. Avalda $\cos 1000°$ 360°-st väiksema nurga siinuse kaudu.

519. Avalda $\tan 400°$ 360°-st väiksema nurga siinuse kaudu.

520. Avalda $\tan 600°$ 360°-st väiksema nurga koosinuse kaudu.

521. Lihtsusta avaldised:

1) $\frac{1-\sin^2 200°}{1-\cos^2 200°}$ 2) $\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$

3) $\sin 210° \cdot \cot 210°$ 4) $\cos 370° \cdot \tan 370°$

Võimalus mistahes nurga funktsiooni taandada 360°-st väiksema nurga funktsiooniks vabastab meid 360°-st suuremate nurkade funktsioonide uurimisest.

6.9.3. TAANDAMINE TERAVNURGALE.

Eespool nägime, et kõikide negatiivsete nurkade ja kõikide 360°-st suuremate nurkade funktsioone saab avaldada 360°-st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonide kaudu ehk, nagu öeldakse, saab taandada 360°st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonideks. Nüüd näitame, et viimaseid saab taandada positiivsete teravnurkade funktsioonideks.

Paneme tähele, et kui α on teravnurk, siis teise veerandi nurga võib kirjutada kujul $180°-\alpha$, kolmanda veerandi nurga kujul $180°+\alpha$ ja neljanda veerandi nurga kujul $360°-\alpha$.

Näiteks,

teise veerandi nurk $160°=180°-20°$;
kolmanda veerandi nurk $240°=180°+60°$;
neljanda veerandi nurk $345°=360°-15°$.

Seetõttu esimesse veerandisse mittekuuluva nurga funktsiooni taandamiseks teravnurga funktsioonile piisab, kui leiame taandamisvalemid nurkade $180°-\alpha$, $180°+\alpha$ ja $360°-\alpha$ funktsioonide jaoks.

Nurga $180°-\alpha$ funktsioonide taandamisvalemite leidmiseks ehitame ühikringis teravnurga α ja nurga $180°-\alpha$ (joon. 144).

Trigonomeetrilised funktsioonid on defineeritud lõpphaara mistahes punkti koordinaatide kaudu. Edaspidi kasutame lõpphaara seda punkti, mis asub ühikringjoonel.

Jooniselt näeme, et siis

$$\sin\alpha=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1 \text{ ja } \sin(180°-\alpha)=y_2,$$

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{r}=\frac{x_1}{1}=x_1 \text{ ja } \cos(180°-\alpha)=x_2.$$

Täisnurksetes kolmnurkades B_1OB ja C_1OC on

$OB = OC$,

$\angle B_1OB = \angle C_1OC$.

Seega

$\triangle B_1OB = \triangle C_1OC$,

millest järeldub, et

$y_2 = y_1$

ja

$x_2 = -x_1$,

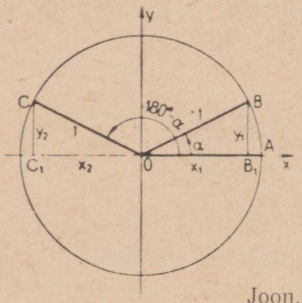
sest x_1 ja x_2 on vastassuunalised.

Nüüd saame, et

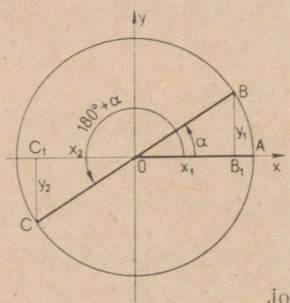
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha.$$



Joon. 144.



Joon. 145.

Niisiis, teise veerandi nurkade trigonomeetriliste funktsioonide taandamisel rakendame valemeid:

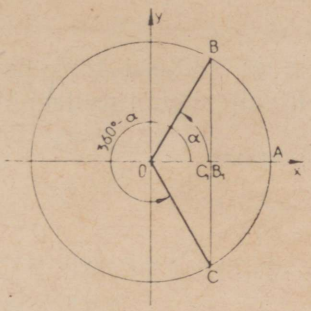
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\qquad \tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$.

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;

Nurga $180° + \alpha$ funktsioonide taandamisvalemite saamiseks ehitame ühikringis nurgad α ja $180° + \alpha$ (joon. 145). Arutledes samal viisil nagu eelmisel korral, saame:

$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$; $\qquad \tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$.

$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$;



Joon. 146.

Analoogiliselt saame neljanda veerandi nurga $360°-\alpha$ (joon. 146) funktsioonide jaoks järgmised taandamisvalemid:

$$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha; \qquad \tan(360°-\alpha)=-\tan\alpha.$$
$$\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha;$$

Taandamisvalemeid on kerge meeles pidada, pannes tähele, et

nurga $180°-\alpha$, $180°+\alpha$ kui ka $360°-\alpha$ funktsioon taandub nurga α samanimeliseks funktsiooniks: märk sõltub sellest, mis veerandis nurk lõpeb.

Näiteid.

1. $\cos 300°=\cos(360°-60°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$.
2. $\sin 243°=\sin(180°+63°)=-\sin 63°=-0{,}8910$.
3. $\sin 560°=\sin(360°+200°)=\sin 200°=\sin(180°+20°)=$
   $=-\sin 20°=-0{,}3420$.
4. $\tan 275°24'=\tan(360°-84°36')=-\tan 84°36'=-10{,}58$.
5. $\tan(-2094°)=\tan(-6\cdot 360°+66°)=\tan 66°=2{,}2460$.
6. $\tan(5\pi+\alpha)=\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$.
7. Leia nurk α, teades, et $\tan\alpha=-1{,}9970$ ja $90°<\alpha<180°$.

Lahendus. Kasutades valemit

$$\tan(180°-\alpha)=-\tan\alpha,$$

saame

$$\tan(180°-\alpha)=1{,}9970.$$

Tabelist leiame

$$180°-\alpha=63°24',$$
$$\alpha=180°-63°24'=116°36'.$$

522. Kirjuta nurkade $90°-\alpha$, $180°-\alpha$ ja $180°+\alpha$ funktsioonide taandamisvalemid, kui nurgad on väljendatud radiaanides.

523. Avalda positiivse nurga funktsioonina:

1) $\sin(-300°)$ 2) $\cos(-300°)$
3) $\sin(-330°)$ 4) $\cos(-315°)$
5) $\tan(-315°)$ 6) $\tan(-340°)$

524. Arvuta peast.

1) $\sin 120°$, $\sin 210°$, $\sin 315°$ 2) $\cos 315°$, $\cos 225°$, $\cos 150°$ 3) $\tan 135°$, $\tan 225°$, $\tan 330°$

525. Leia tabelite abil järgmiste nurkade siinused:

1) 112°; 164°36′; 178°18′; 115°30′.
2) 196°; 212°; 200°24′; 308°12′.

526. Leia tabelite abil järgmiste nurkade koosinused:

1) 99°; 152°; 170°42′; 100°50′.
2) 112°; 315°; 200°24′; 308°12′.

527. Leia tabelite abil järgmiste nurkade tangensid:

1) 114°; 152°; 160°06′; 259°18′.
2) 196°; 293°; 272°18′; 342°40′.

528. Taanda järgmised funktsioonid positiivse teravnurga funktsioonideks.

1) $\sin 200°$, $\sin 115°$, $\sin(-15°)$ 2) $\cos 310°$, $\cos 164°$, $\cos(-60°)$ 3) $\tan 192°$, $\tan(-200°)$, $\tan(-282°)$
4) $\sin 460°$, $\sin 693°$, $\sin 850°$ 5) $\cos 540°$, $\cos 982°$, $\cos 754°$ 6) $\tan 499°$, $\tan 654°$, $\tan 815°$

529. Leia nurk α, teades, et

1) $\cos\alpha=-0{,}9311$ ja $90°<\alpha<180°$;
2) $\sin\alpha=0{,}5000$ ja $90°<\alpha<180°$;
3) $\tan\alpha=1$ ja $180°<\alpha<270°$.

530. Taanda järgmised funktsioonid nurga α funktsioonideks:

1) $\sin(\pi+\alpha)$, $\sin(2\pi-\alpha)$, $\sin(3\pi+\alpha)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

2) $\tan(\pi-\alpha)$, $\tan(2\pi-\alpha)$, $\tan(2\pi+\alpha)$, $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

Näide. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$
$=-\cos\alpha.$

531. Arvuta:

1) $\sin\frac{5\pi}{6}$ 2) $\tan\frac{5\pi}{6}$

Näide. $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

532. Kontrolli järgmiste võrduste õigsust:

1) $\frac{\sin(180°+\alpha)}{\cos(360°+\alpha)}+\frac{\sin(360°-\alpha)}{\cos(180°-\alpha)}=0$

2) $\frac{\sin(540°-x)\cos(x-180°)}{\tan(900°-x)}=\cos^2 x$

3) $\sin(\alpha-30°)+\sin(\alpha+15°)=0$

4) $\tan(45°+\alpha)=\cot(45°-\alpha)$

5) $\cos(45°-\alpha)=\sin(45°+\alpha)$

6) $\cos(45°+\alpha)=\sin(45°-\alpha)$

533. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 49°+\sin(-49°)+\cos 25°-\cos(-25°)$

2) $\cos 33°-\cos 17°-\cos(-33°)-\sin 40°+$
$+\cos(-17°)-\sin(-40°)$

3) $\sin(\pi-\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)-\tan(\alpha-\pi)-\tan(2\pi-\alpha)$

6.10. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE GRAAFIKUD.

Kujutame funktsiooni

$$y = \sin x$$

graafiliselt vahemikus

$$0 \leqslant x \leqslant 3\pi.$$

Selleks joonestame koordinaatteljestiku ja ühikringi, mille keskpunkti võtame x-teljel, nii nagu on tehtud joonisel 147.

Jaotades nüüd ühikringi näiteks 16-ks võrdseks osaks, saame nurgad suurusega $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \ldots$. Iga nurga lõppraadiuse otspunktist joonestame lõigu, mille pikkus kujutab vastava nurga siinust, mõõdetud ühikringi raadiusega. Täispööret, s. o. nurka 360° ehk 2π radiaani kujutab siis abstsissteljel lõik pikkusega 6,28 ühikut ja nurka $\frac{\pi}{8}$ lõik, mille pikkus on ligikaudu 0,4 ühikut. Seejärel ehitame teljestikus üksteise järele punktid, mille abstsissiks on vastava nurga mõõtarv radiaanides ja ordinaadiks vastava nurga siinus. Joonisel on nurkade lõppraadiuste otspunktid ja nendele nurkadele vastavad graafiku punktid märgitud numbritega 1, 2, 3, ...

Nurga siinuse graafikut võime jätkata nii positiivsete kui ka negatiivsete nurkade suunas kuitahes kaugele, saades lõpmatu lainelise kõverjoone, mida nimetatakse **sinusoidiks.**

Funktsiooni

$$y = \cos x$$

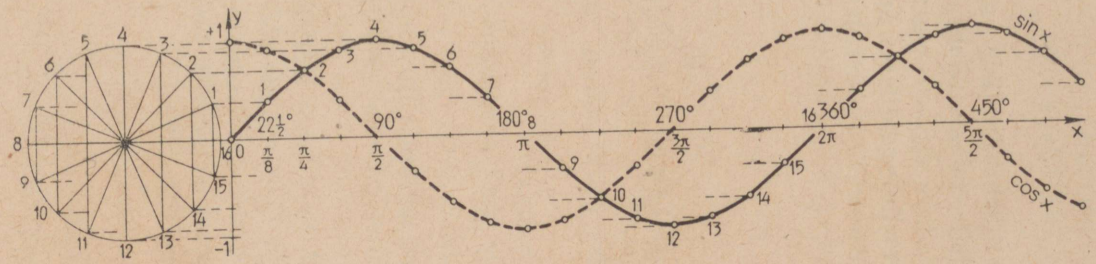
graafiku võib ehitada samal viisil nagu siinuse graafiku, võttes nüüd graafiku punkti ehitamisel ordinaadiks lõigu, mille mõõtarv on võrdne vastava nurga koosinusega.

Nurga koosinuse graafiku võime aga ehitada ka järgmiselt. Arvestades valemeid

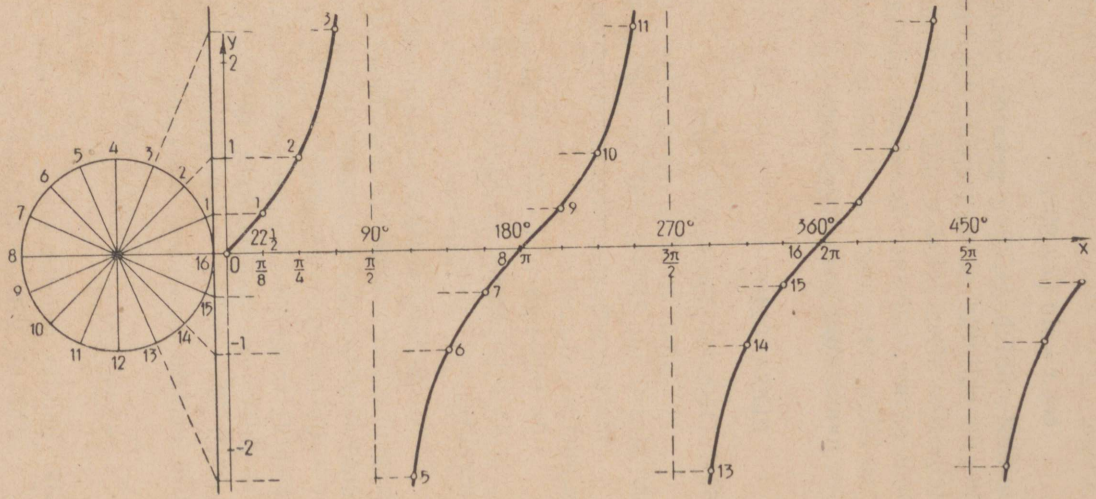
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) \text{ ja } \sin\alpha = \sin(180° - \alpha),$$

saame:

$$\cos x = \sin(90° - x) = \sin[180° - (90° + x)] = \sin(x + 90°).$$



Joon. 147.



Joon. 148.

Seega,

$$\cos x = \sin(x+90°),$$

millest nähtub, et $\cos x$ graafiku saamiseks tuleb teljestikku, milles on ehitatud $\sin x$ graafik, nihutada x-telje suunas nõnda, et teljestiku algus läheb punkti $x=90°$ ehk, teisiti öeldes, $\cos x$ graafiku saame, kui $\sin x$ graafikut nihutame x-telje negatiivses suunas lõigu võrra, mis vastab 90°-le. Joonisel 147 on koosinuse graafik joonistatud punktiirjoonega.

ÜLESANDEID.

534. Otsusta joonise 147 abil:

1) kuidas muutub nurga siinus, kui nurk kasvab 0°-st 90°-ni; 90°-st 270°-ni; 270°-st 450°-ni; 450°-st 540°-ni?

2) missugustes argumendivahemikkudes $\cos x$ kasvab, missugustes kahaneb?

3) missuguste x väärtuste korral $\sin x = \cos x$?

4) missugused on funktsioonide $\sin x$ ja $\cos x$ positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad?

Nurga tangensi graafiku ehitamisel toimime samal viisil nagu eespool siinuse graafiku ehitamiselgi. Joonisel 148 on näidatud funktsiooni $y=\tan x$ graafiku ehitamine.

Et nurkadel 90°, 270°, ..., $(2k+1)90°$ (kus k on mistahes täisarv) tangensi väärtus puudub, siis nurga tangensi graafik ei ole pidev joon, nagu seda on siinuse ja koosinuse graafikud, vaid katkeb 90°, 270°, ... , $(2k+1)90°$ kohal. Tangensi graafik koosneb seetõttu üksikutest üksteisest lahusolevatest harudest.

ÜLESANDEID.

535. Kuidas muutub $\tan x$, kui nurk x kasvab 0°-st 90°-ni; 90°-st 270°-ni; 270°-st 450°-ni?

536. Kas leidub niisugune vahemik, milles nurga kasvamisel tangens kahaneb?

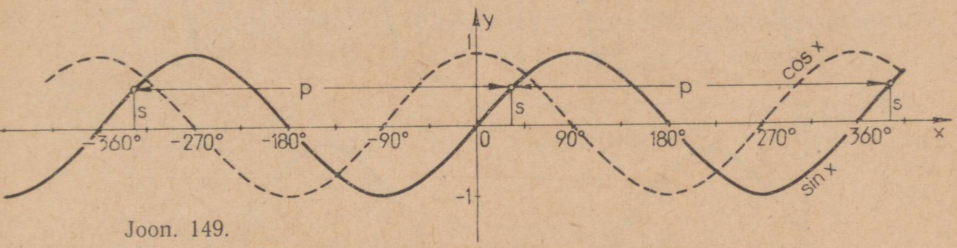
537. Nimeta funktsiooni $\tan x$ positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

538. Missuguste x väärtuste korral

$\tan x = 0$?

6.11. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PERIOODILISUS.

On nähtusi, mis korduvad iga ühe ja sama ajavahemiku tagant, näiteks aurumasina töötamisel auru jaotuskarbi klapi avanemine ja sulgumine, kella pendli võnkumine, tõukuri liikumine automootoris, planeedi tiirlemine ümber Päikese, öö ja päeva vaheldumine, aastaaegade vaheldumine, mere mõõnad ja tõusud, pulsilöögid jne. Sääraseid nähtusi nimetatakse **perioodilisteks.**



Joon. 149.

On funktsioone, mille muutumine toimub perioodiliselt. Kõige lihtsamate perioodiliste funktsioonide näideteks on trigonomeetrilised funktsioonid. Me nägime eespool, et ühegi trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu, kui nurka muudetakse 360° või selle kordse võrra. Otsime nüüd iga trigonomeetrilise funktsiooni jaoks niisugust väiksemat positiivset nurka p, mille puhul nurga x iga väärtuse korral nurga $x+p$ funktsioon on võrdne nurga x samanimelise funktsiooniga. Niisugust nurka p nimetatakse uuritava funktsiooni perioodiks.

Jooniselt 149 näeme, et

nurga siinuse ja koosinuse periood on 360°.

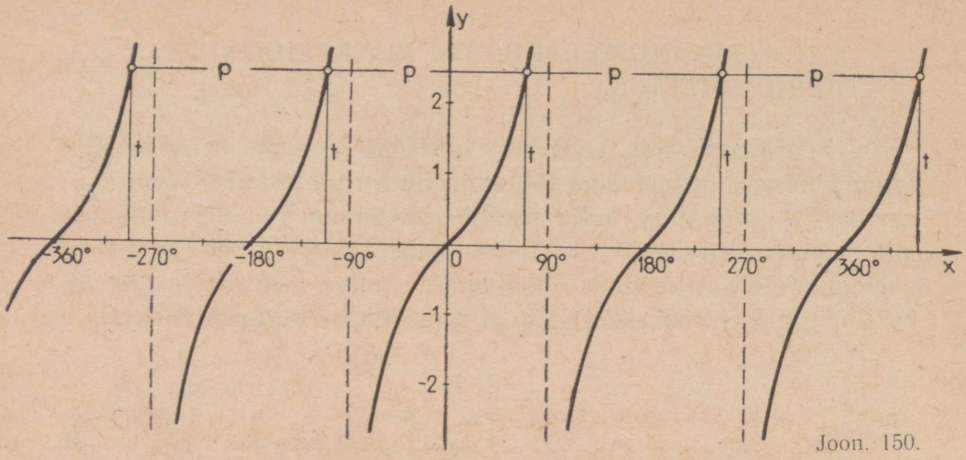
Taandamisvalemitest on teada, et

$$\tan(x+180°) = \tan x.$$

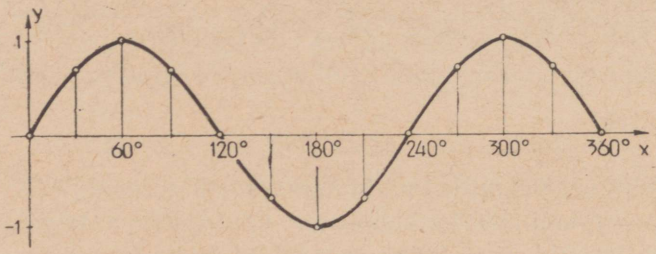
Vaadeldes tangensi graafikut (joon. 150), näeme, et tõepoolest kordub tangensi väärtus t iga kord siis, kui nurk suureneb või väheneb 180° võrra ja et pole 180°-st väiksemat nurka p, mille korral $\tan(x+p) = \tan x$.

Seega,

nurga tangensi periood on 180°.



Joon. 150.



Joon. 151.

Et trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu, kui nurka suurendatakse või vähendatakse perioodi võrra, siis

$$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos\alpha,$$
$$\tan(\alpha + k \cdot 180°) = \tan\alpha,$$

kus k on mistahes täisarv.

N ä i d e. Kujuta funktsioon $y = \sin 1{,}5x$ graafiliselt ja selgita saadud joonise abil funktsiooni perioodilisust. Kui pikk on periood?

L a h e n d u s. Koostame x ja y vastavate väärtuste tabeli, võttes x väärtused vahemikust $0° \leqslant x \leqslant 360°$ iga 30° tagant.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$1{,}5x$	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°	405°	450°	495°	540°
y	0°	0,70	1	0,70	0	−0,70	−1	−0,70	0	0,70	1	0,70	0

Valime telgedel ühikuks lõigu pikkusega 2 cm. Kujutagu ühiklõik nurgateljel nurka 1 radiaan, s. o. ligikaudu 60° (joon. 151).

Jooniselt näeme, et antud funktsioon on perioodiline, perioodiga 240° ehk $\frac{4\pi}{3}$ radiaani.

ÜLESANDEID

539. Joonisel 152 on kujutatud kõõlu pikkuse muutumine, kui kõõlu üks otspunkt A seisab paigal, teine otspunkt aga liigub ringjoonel, tehes ühe tiiru sekundiga. Kas kõõlu pikkuse muutumine on perioodiline? Kui on, siis kui pikk on periood?

540. Kujuta alljärgnevad funktsioonid graafiliselt ja selgita siis graafiku abil funktsioonide perioodilisust. Kui pikk on periood?

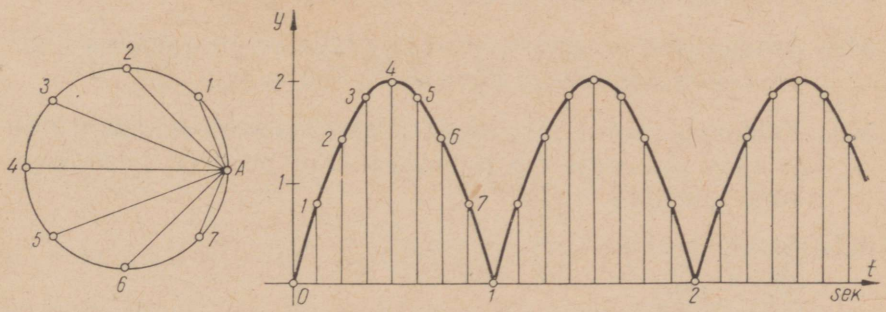
1) $y=\sin 2x$ 2) $y=\sin 3x$

3) $y=\sin \frac{x}{2}$ 4) $y=\sin \frac{x}{3}$

541. Kujuta funktsioon graafiliselt ja selgita graafiku abil, kas funktsioon on perioodiline. Kui on, siis kui pikk on periood?

1) $y=1+\sin x$ 2) $y=\sin x+\cos x$

3) $y=2\sin x$ 4) $y=3\cos x$



Joon. 152.

542. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y=2x+9$ 3) $y=-\frac{1}{3}x+1$ 5) $y=\sin 2x$

2) $y=-x^2+x-12$ 4) $y=12-x-6x^2$ 6) $y=\cos\frac{1}{3}x$

543. Leia järgmiste funktsioonide positiivsuspiirkonnad:

1) $y=3x-6$ 3) $y=24-17x-20x^2$

2) $y=x^2+5x-14$ 4) $y=\sin x$, kui $0\leqslant x\leqslant 4\pi$

544. Leia järgmiste funktsioonide negatiivsuspiirkonnad:

1) $y=-0{,}3x+1{,}5$ 3) $y=2x^2+3x-2$

2) $y=-x^2-6x+16$ 4) $y=\cos x$, kui $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$

545. Leia järgmiste funktsioonide kasvamispiirkonnad:

1) $y=x^2+3x+22$ 3) $y=\tan x$, kui $0\leqslant x\leqslant 2\pi$

2) $y=-x^2-x+2$ 4) $y=x^4$

546. Leia järgmiste funktsioonide kahanemispiirkonnad:

1) $y=x^2+3x-10$ 3) $y=x^3$

2) $y=2x^2-13x+15$ 4) $y=\sin x$, kui $0\leqslant x\leqslant 3\pi$

547. Leia kõigi kahekohaliste paarisarvude summa.

548. Leia kõigi paaritute arvude summa 1-st 99-ni.

549. Aritmeetilise progressiooni neljas liige on 10, seitsmes liige 19. Leia progressiooni esimene liige ja vahe.

550. Kaldpinda mööda liikuv kera läbib esimeses sekundis 0,5 m ja igas järgnevas 0,8 m rohkem. Kui pika tee läbib kera 10 sekundiga?

551. Arvuta avaldise

$$\frac{(x^2yz)^3-(8yz)^2}{4x^3y^2-3x^5z^2}$$

väärtus, kui $x=-2$, $y=5$ ja $z=-3$.

552. Leia lükati abil järgmiste arvude kuubid:

1) 15,4; 154; 288; 92,5; 0,0444; 0,007; 1729.

2) 2760; 17,85; 2970; 0,955; 0,3; 0,03; 1040.

553. Leia lükatil kuupjuured järgmistest arvudest:

1) 4320; 43200; 0,432; 0,22; 0,2; 100000; 0,01.
2) 0,0008; 72000000; 40500; 0,067; 0,129; 0,0125.

554. Arvuta:

1) $\sqrt[3]{14{,}8^2+6{,}7^3}$ 2) $\sqrt[3]{328^2-260^2}$

3) $0{,}47^3-0{,}38^3$ 4) $\sqrt[3]{7600000}$

5) $\sqrt[3]{56^2}$; $\sqrt[3]{455^2}$; $\sqrt[3]{0{,}79^2}$; $\sqrt[3]{0{,}006^2}$.

6) $6{,}8^3$; $\sqrt{380^3}$; $\sqrt{0{,}157^3}$; $\sqrt{0{,}026^3}$.

555. Kuubi ruumala on 85 cm^3. Leia kuubi ühe tahu pindala.

556. Kui suur on kuubi ruumala, kui tahu pindala on 4,26 m^2?

557. Lahenda proovimise teel võrrandid:

1) $4x^3-108=0$
2) $3x^4-48=0$

558. Järjesta suuruse järgi:

1) 3^9; $2{,}1^9$; 10^9; $(-9)^9$; $0{,}2^9$; $0{,}9^9$; $(-0{,}2)^9$; $(-31)^9$; $(-5)^9$.
2) 3^{10}; $2{,}1^{10}$; 10^{10}; $(-9)^{10}$; $0{,}2^{10}$; $0{,}9^{10}$; $(-0{,}2)^{10}$; $(-31)^{10}$; $(-5)^{10}$.

559. Lihtsusta avaldisi:

1) $(-2x\cdot 4yz^2)^3$

2) $\frac{4^3a^4b^5c^2}{4^2a^7b^3c^3}$ 3) $3x^2y^5\cdot 2x^4y^3-(2x^3y^4)^2+\frac{12x^9y^{10}}{3x^3y^2}$

560. Järjesta suuruse järgi:

1) 2^8; 2^{-8}; $(-2)^8$; $(-2)^{-8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$

2) 3^7; 3^{-7}; $(-3)^7$; $(-3)^{-7}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-7}$

3) 5^9; 5^{10}; $(-5)^9$; $(-5)^{10}$; 5^{-9}; 5^{-10}; $(-5)^{-9}$; $(-5)^{-10}$; $(-5)^0$; 5^0.

561. Lihtsusta avaldisi:

1) $3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ 2) $x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}}:x^{-2\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{4}}$

3) $\left(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{5}{6}}\right)^2 \cdot \left(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

4) $(a^4b^6c)^{\frac{1}{2}} : \left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c\right)^2$

5) $\left[\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^4$

6) $\left\{\frac{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}\right\}^{-3}$

7) $\sqrt{a^2b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b}$

8) $\sqrt[3]{x^2y^4z} : \sqrt[4]{x^3y^2z^3}$

9) $(\sqrt[3]{x^2y})^4 \cdot (\sqrt{xy})^3$

10) $\left[(\sqrt{ab^3} \cdot \sqrt[2]{a^2b})^2\right]^{\frac{1}{3}}$

562. Järjesta suuruse järgi:

1) $52^{\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{1}{2}}$; $52^{-\frac{1}{2}}$; $2^{-\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

2) $3^{\frac{1}{3}}$; $(-3)^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $3^{-\frac{1}{3}}$; $(-3)^{-\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

3) 10^2; $10^{\frac{1}{2}}$; 10^{-2}; $10^{-\frac{1}{2}}$; 10^0; 10^3; 10^{-3}; $10^{\frac{1}{3}}$; $10^{-\frac{1}{3}}$.

563. Kirjuta järgmised murrud kujul, kus nimetaja on ratsionaalne:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2y}}$

2) $\frac{1}{1-\sqrt{14}}$

3) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

4) $\frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}$

5) $\frac{xy}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$

6) $\frac{(2-a)^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-(2-a)^{\frac{1}{2}}}$

564. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $3\sqrt{x}-75=0$

2) $(2-x)^{\frac{1}{2}}-7=0$

3) $(2y-1)^{\frac{1}{2}}-y=0$

4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}=0$

5) $(x+2)^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}=0$

565. Sarika pikkus maja seina kohalt katuse harjani on 3,8 m ja katuse kaldenurk on 35°. Leia aampalgi pikkus.

566. On antud lõik a ja nurk α. Konstrueeri sirkli ja joonlaua abil lõik:

1) $a \sin \alpha$; 2) $a \cos \alpha$.

567. Äratuskella kõlisti osuti on 6 peal. Kui suure nurga võrra peab seda osutit pöörama, et äratuskell kõliseks kell 8, kui kõlisti osutit saab pöörata tunniosuti pööramisele vastupidises suunas?

568. Hammasrattal on 72 hammast. Kui suure nurga võrra pöördub hammasratas, kui ta pöördub:

1) kellaosuti pöörlemisele vastupidises suunas 42; 300 hamba võrra?

2) kellaosuti pöörlemise suunas 24; 144 hamba võrra?

569. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 49° + \sin(-49°) + \cos 25° - \cos(-25°)$

2) $\cos 33° - \cos 17° - \cos(-33°) - \sin 40° + \cos(-17°) - -\sin(-40°)$

3) $\sin(\pi - 1) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha)$

570. 1) Arvuta maakera ruumala, kui maakera raadius on 6371 km. Kui pikk oleks sama suure ruumalaga kuubi serv?

2) Kui pika tee läbib Maa aastas, tehes täistiiru ümber Päikese? (Maa kaugus Päikesest on 149 700 000 km.)

3) Rauast kuup kaaluga 82,7 kg on asetatud rõhtsale lauale. Kui suurt rõhku avaldab kuup lauale? (Raua erikaal on $7{,}8 \frac{G}{cm^3}$.)

4) Vasktraadi kera kaalub 24,67 kG. Mitu meetrit traati on keras, kui traadi läbimõõt on 1,5 mm? (Vase erikaal on $8{,}9 \frac{G}{cm^3}$.)

571. Lahenda arvutuslükati abil järgmised ülesanded:

1) 0,722 · 268	2) 56,6 · 125,5
14,9 : 0,066	6200 : 19,8
0,0304 : 9,23	0,87 : 52,3
3,14 · 2030	942 : 40,7

3) $0{,}0288^2$ 4) $\sqrt{108000}$

137^3 $\sqrt[3]{0{,}01}$

8530^2 $\sqrt[3]{675000}$

$0{,}046^3$ $\sqrt{0{,}00007}$

5) $\sqrt[4]{28000}$; $\sqrt[6]{0{,}003}$

6) Leia x:

a) $x : 232 = 15{,}6 : 8{,}7$; $59{,}3 : x = 692 : 7{,}4$.

b) $19{,}9 : 0{,}79 = x : 36{,}5$; $0{,}0405 : 0{,}97 = 16{,}4 : x$.

7) $\frac{31{,}7 \cdot 9{,}25}{17{,}2}$ $\frac{0{,}281 \cdot 4{,}76 \cdot 18{,}9}{11{,}8 \cdot 0{,}647}$

$\frac{91{,}5 \cdot 107 \cdot 3{,}90}{16{,}4 \cdot 0{,}54 \cdot 522}$ $\frac{5200 \cdot 249}{3140 \cdot 178}$

8) Silikaatkivi standardmõõtmed on $6 \times 12 \times 25$ cm. Arvuta ühe kivi kaal, kui silikaatkivi erikaal on 2,1 $\frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.

9) Ristkülik, mille mõõtmed on 87,5 m ja 17,2 m, tuleb jaotada sirgetega, mis on paralleelsed lühema küljega, osadeks, mille pindalad suhtuvad nagu 7 : 12 : 17. Leia osade pindalad ja mõõtmed.

10) Toa põranda mõõtmed on 4,26 m ja 3,72 m. Mitu 15 cm laiust ja 3,5 m pikkust lauda kulub selle põranda katmiseks, kui arvestada, et laudade parajaks saagimisel läheb kaduma 6% kogu materjalist.

11) Risttahuka mõõtmed on 56,7 cm, 67,5 cm ja 31,6 cm. Arvuta risttahuka tahkude diagonaalide pikkused.

12) Lahenda võrrandid:

a) $2{,}1x^2 - 4{,}7x - 5{,}85 = 0$

b) $0{,}2x^2 + 1{,}82x - 7{,}87 = 0$

572. Kumb on suurem, kas sin 1 või sin 1°?

573. Missugustel x väärtustel funktsioon

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

on määratud?

574. Leia niisugused x väärtused, mille puhul avaldise $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}$ väärtus on suurem kui 1?

575. Lahenda võrratus:

$$\tan \frac{\pi x}{4(x+1)} > 1.$$

576. Lahenda võrrandid:

1) $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$

2) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$

3) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$

4) $x+x^{\frac{1}{2}}=6$

577. Lihtsusta avaldised:

1) $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

2) $\left[a+\left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[a-\left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$

578. Arvuta avaldise $\sin\alpha\cos\alpha$ väärtus, teades, et α ja β on täisnurkse kolmnurga teravnurgad ja et $\sin\alpha+\sin\beta=1{,}4$.

579. Arvuta murru $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ väärtus, teades, et $\tan\alpha=2{,}7$.

580. Kas on olemas niisugune nurk, mille puhul

1) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ja $\cos\alpha=\frac{1}{2}$?

2) $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$ ja $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{2}{3}}$?

581. Arvuta $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$, teades, et $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ja $\sin\alpha<0$.

582. Arvuta kolmnurga nurga α funktsioonide väärtused, teades, et $\cos\alpha=-0{,}4$.

583. Mida nimetatakse geomeetriliseks teisenduseks tasapinnal? Missugust teisendust nimetatakse liikumiseks?

584. Milliste andmetega on määratud 1) peegeldus sirgest, 2) peegeldus punktist, 3) rööplüke, 4) pööre, 5) homoteetsus? Mitu paari teineteisele vastavaid punkte on vaja teada, et iga nimetatud teisendus oleks üheselt määratud?

585. Leia punktiga $(a; b)$ sümmeetriline punkt 1) x-telje suhtes, 2) y-telje suhtes, 3) koordinaatide alguspunkti suhtes, 4) sirge $y=x$ suhtes, 5) sirge $y=-x$ suhtes, 6) sirge $x=\frac{a}{2}$ suhtes.

586. Millal nimetatakse kaht vektorit võrdseiks? Esita joonisel vektoriga AB võrdne vektor CD, kui on antud punktid $A(-1; 2)$, $B(5; 4)$ ja $C(2; -1)$. Leia punkti D koordinaadid.

587. Millist vektorit nimetatakse antud vektori vastandvektoriks? Olgu vektori ja tema vastandvektori ühiseks alguspunktiks koordinaatide alguspunkt O. Leia vastandvektori lõpp-punkt ja esita need vektorid joonisel, kui antud vektori lõpp-punkt on

1) $A(5; 2)$, 2) $B(0; -3)$, 3) $C(-3; 4)$.

588. Leia vektori pikkus ja nurgad, mis ta moodustab koordinaattelgedega, kui vektori alguspunktiks on koordinaatide alguspunkt ja lõpp-punktiks on $M(-5; 12)$.

589. Antud on romb $ABCD$, mille diagonaalide lõikepunkt on O. Leia, millised järgmistest võrdustest on õiged, millised mitte. Põhjenda oma väiteid.

1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$, 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}$, 5) $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DO}$,

2) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, 4) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BO}$, 6) $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{CO}$.

590. Kolmnurk $A'B'C'$ on punkti O suhtes homoteetne kolmnurgaga ABC, kusjuures homoteetsustegur on $\frac{5}{3}$. Kolmnurkade $A'B'C'$ ja ABC ümbermõõtude vahe on 8 cm ja pindalade vahe on $12\frac{2}{3}$ cm^2. Leia kummagi kolmnurga ümbermõõt ja pindala.

591. Missuguse reegli järgi on kirjutatud võrdused

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$; $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$; ...?

Kontrolli nende õigsust.

Kirjuta leitud reegli järgi veel kolm võrdust.

592. Arvuta korrutised:

$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)$;

$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$;

$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)$.

$(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{99}\right)$.

Arvuta 99 teguri korrutis.

593. Arvuta korrutised:

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$;

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)$;

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$.

594. Arvuta summad:

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}$;

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$;

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}$;

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$;

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

595. Arvuta summad:

$1+3$;
$1+3+5$;
$1+3+5+7$;
$1+3+5+7+9$;
$1+3+5+7+9+\ldots+199$;
$1+3+5+\ldots+(2n-1)$.

SISUKORD

1. Funktsionaalne sõltuvus.

1.1. Jäävad ja muutuvad suurused 3
1.2. Funktsionaalne sõltuvus 5
1.3. Funktsiooni esitusviisid 7
1.4. Joone võrrand 15
1.5. Joone võrrandi näiteid 16

2. Lineaarfunktsioon.

2.1. Lineaarfunktsioon ja selle põhiomadus 26
2.2. Lineaarfunktsiooni graafik 28
2.3. Lineaarfunktsiooni uurimine 34
2.4. Lineaarne võrratus 37
2.5. Aritmeetiline progressioon 47
2.6. Lineaarne interpolatsioon 56

3. Ruutfunktsioon.

3.1. Ruutfunktsiooni uurimine 65
3.2. Ruutvõrratuse lahendamine 74

4. Tehted astmete ja juurtega. Astmefunktsioonid.

4.1. Tehted astmetega naturaalarvuliste astendajate korral 81
4.2. Kuupfunktsioon 87
4.3. Kuubi ja kuupjuure leidmine lükati abil 92
4.4. Arvu n-es juur 104
4.5. Ratsionaalarvud 107
4.6. Irratsionaalarvud 110
4.7. Reaalarvud 115
4.8. Juurte omadus 117
4.9. Teoreemid tehetest juurtega 118
4.10. Juuravaldiste teisendamisi 133
4.11. Juurvõrrandite lahendamise näiteid 140
4.12. Astendaja 0 145

4.13. Negatiivne astendaja 146
4.14. Funktsioonid $y=x^{-1}$ ja $y=x^{-2}$ 151
4.15. Murrulise astendajaga aste 153

5. Geomeetrilised teisendused tasapinnal.

5.1. Geomeetrilise teisenduse mõiste 161
5.2. Teljeline sümmeetria 170
5.3. Rööplüke 180
5.4. Tsentraalsümmeetria 186
5.5. Pööre 192
5.6. Liikumine tasapinnal 200
5.7. Liikumisteisenduste kasutamine konstruktsioonülesannete lahendamisel 202
5.8. Homoteetsus tasapinnal 205
5.9. Homoteetsuse kasutamine konstruktsioonülesannete lahendamisel . 209

6. Trigonomeetrilised funktsioonid.

6.1. Teravnurga ühe trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse järgi sama nurga teiste funktsioonide väärtuste leidmine 213
6.2. Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed . . . 214
6.3. Negatiivne nurk 223
6.4. Nurk, mille absoluutväärtus ületab täispöörde 226
6.5. Nurga mõõduühikud 231
6.6. Mistahes suurusega nurga trigonomeetrilised funktsioonid 234
6.7. Põhiseoste kehtivus mistahes nurga trigonomeetriliste funktsioonide puhul 236
6.8. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused lõikude pikkustena . . 238
6.9. Taandamisvalemid 241
6.10. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud 248
6.11. Trigonomeetriliste funktsioonide perioodilisus 251

Ülesandeid IX klassi kursuse kordamiseks 254

Эльмар Этверк, Олаф Принитс, Арнольд Вихман. МАТЕМАТИКА ДЛЯ IX КЛАССА. На эстонском языке. Издательство «Валгус», Таллин, Пярнуское шоссе, 10
Toimetaja K. Kallaste. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja T. Liivand. Korrektor E. Bitter. Laduda antud 31. I 1967. Trükkida antud 9. VI 1967. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 16,5. Arvestuspoognaid 11,10. Trükiarv 9500. Tellimise nr. 1079. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli tn. 17/19. I.
Hind 22 kop.

22 kop.

A-28631

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00446901 3