K. Ratassepp

TRIGONOMEETRIA

õpik gümnaasiumi III klassile

Tartu Eesti Kirjastus

K. RATASSEPP

TRIGONOMEETRIA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI III KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS

MATEMAATIKA ÕPIKUD GÜMNAASIUMILE.

PEATOIMETAJA: O. SILDE.

A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi I klassile.

E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile.

A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi II klassile.

E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile.

K. Maasik: Algebra õpik gümnaasiumi III klassile.

K. Ratassepp: Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.

K. Ratassepp: Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.

E. Etverk: Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.

G. Rägo: Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile.

L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu III ja IV klassile.

L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu V klassile.

K. Ratassepp: Matemaatilised tabelid.

II, muutmata trükk.

Korrektor M. Arro.

AfV I/0047. Trükiarv: 2150 eks. Paber: ETK paberivabrik, Tallinn; paberi kaust 56 × 79 cm. Trükk ja brošeerimine „Noor-Eesti“ trüki- ja köitekoda, Tartu. Ilmunud juulis 1943. Hind Rmk. 1.25.

SISUKORD.

Peatükk I.

Täisnurkse kolmnurga lahendamine.

§ 1. Trigonomeetria ülesanne.

On teada, et kolmnurga mõnede antud elementide järgi saab määrata teisi elemente, näiteks, kolmnurga kahe nurga järgi saab arvutada kolmandat nurka. See arvutamine on võimalik seetõttu, et on teada seos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$

mis valitseb kolmnurga nurkade α, β ja γ vahel.

Mitte alati ei toimu kolmnurga antud elementide järgi otsitavate elementide leidmine nii lihtsalt nagu eelmises näites. Kui on antud, näiteks kolmnurga kolm külge, siis on kolmnurk ja seega ka tema nurgad määratud, kuid arvutada neid nurki meie ei oska, sest me ei tunne seoseid kolmnurga külgede ja nurkade vahel. Nende seoste leidmisega ja rakendamisega tegeleb geomeetria osa, mille nimeks on trigonomeetria; seega

trigonomeetria ülesandeks on:

1. kolmnurga elementide vahel valitsevate seoste avastamine;

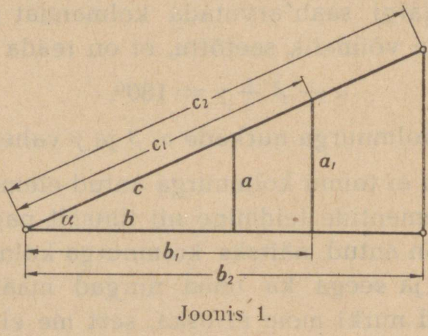
2. nende seoste rakendamine kolmnurga antud elementide järgi otsitavate elementide leidmiseks.

Kui oskame leida kolmnurga antud elementide järgi tema teisi elemente, siis oskame seda teha ka hulknurga puhul, sest hulknurga võib tükeldada kolmnurkadeks. Viimaste elemente arvutades leiame kõik hulknurga otsitavad elemendid.

Et kõrgus tükeldab kolmnurga kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, siis iga kolmnurga elementide arvutamist on võimalik rajada **täisnurkse kolmnurga** elementide arvutamisele.

§ 2. Teravnurga siinus.

Seoste leidmiseks täisnurkse kolmnurga nurkade ja külgede vahel vaatleme täisnurkseid kolmnurki, milledel on ühine teravnurk α (joonis 1). Need kolmnurgad on



Joonis 1.

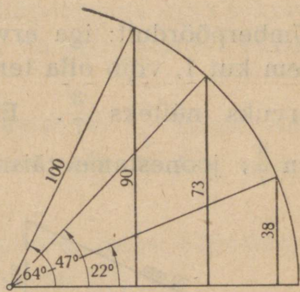
sarnased. Valime nende seast mingid kaks kolmnurka; olgu nende küljed vastavalt a, b, c ja a_1, b_1, c_1. Valitud kahe kolmnurga sarnasusest järeldame, et

$$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}.$$

Sellest näeme, et täisnurksetel kolmnurkadel, milledel üks teravnurk on ühine, on selle nurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhted võrdsed. Samuti saab nende kolmnurkade sarnasusest järeldada, et neis kolmnurkades on võrdsed mis tahes vastavate külgede suhted, näiteks

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}.$$

Seetõttu võime neid suhteid määrata mingi ühe kolmnurga abil. Kasutame selleks kolmnurka, mille hüpotenuusi pikkus on 100 mm. Joonisel 2 on kujutatud vähendatud mõõdus 3 niisugust kolmnurka. On näha, et mida suurem on teravnurk α, seda suurem on ka tema vastaskaatet a ja seega ka vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe $\frac{a}{c}$. Joonisest leiame, et kui α on 22^0, 47^0, 64^0, siis a on vastavalt 38 mm, 73 mm, 90 mm, ja seega $\frac{a}{c}$ on vastavalt 0,38, 0,73, 0,90.



Joonis 2.

Nii vastab teravnurga α igale väärtusele suhte $\frac{a}{c}$ üks väärtus. Seda suhet nimetatakse teravnurga α siinuseks ja tähistatakse sümboliga sin α. Seega täisnurkses kolmnurgas

teravnurga siinus on selle nurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe.

ehk sümbolites

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Et selles definitsioonis esinevad kaateti ja hüpotenuusi pikkused on mõlemad positiivsed suurused ja seejuures kaatet alati on lühem kui hüpotenuus, siis

$$0 < a < c.$$

Jagades iga arvu selles võrratuses arvuga c, saame:

$$0 < \frac{a}{c} < 1.$$

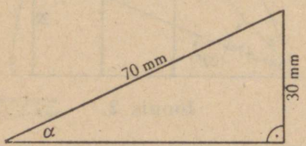
Asendades jagatise $\frac{a}{c}$ sümboliga sin α saame

$$0 < \sin\alpha < 1,$$

millega oleme tõestanud, et

teravnurga siinus on suurem kui 0 ja väiksem kui 1.

Ümberpöördult: iga arv, mis on suurem kui 0 ja väiksem kui 1, võib olla teravnurga siinuseks. Olgu selleks arvuks näiteks $\frac{3}{7}$. Et leida teravnurka, mille siinus on $\frac{3}{7}$, joonestame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuus on 70 mm ja üks kaatet 30 mm. Selle kolmnurga väiksema teravnurga siinus ongi $\frac{3}{7}$ (joonis 3). Nii võime alati joonestada nurga, mille siinus võrdub antud positiivse lihtmurruga.



Joonis 3.

Ülesanded.

1. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 24 cm ja üks kaatet on 16 cm. Kui suur on selle kaateti vastasnurga siinus?

2. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 42 m ja üks kaatet on 27 m. Kui suur on selle kaateti vastasnurga siinus?

3. Joonesta malli abil nurgad

$$20^0, \quad 35^0, \quad 48^0, \quad 62^0 \quad \text{ja} \quad 70^0$$

ning leia joonisel nende nurkade siinused.

4. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 3 cm ja 4 cm. Kui suur on suurema kaateti vastasnurga siinus?

5. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 5 m ja 12 m. Kui suured on selle kolmnurga teravnurkade siinused?

6. Ristküliku küljed on 40 cm ja 9 cm. Arvuta nende nurkade siinused, mis ristküliku diagonaal moodustab külgedega.

7. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 5 korda suurem kui üks kaatet. Kui suur on selle kaateti vastasnurga siinus?

8. Täisnurkse kolmnurga kaatet on $1\frac{1}{2}$ korda väiksem kui hüpotenuus. Kui suur on selle kaateti vastasnurga siinus?

9. Joonesta täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on 15 cm ja ühe teravnurga siinus on 0,2.

10. Joonesta teravnurk, mille siinus on 0,5.

11. Joonesta teravnurk, mille siinus on 0,8.

§ 3. Teravnurga siinuste tabel.

Nagu hiljemini näeme, on siinuste tabel hea vahend täisnurkse kolmnurga elementide arvutamiseks. Selle tabeli koostamiseks on vaja osata antud nurga järgi leida tema siinus. Mõnede nurkade puhul on siinuse leidmine eriti lihtne, näiteks nurkade puhul 45^0, 30^0 ja 60^0.

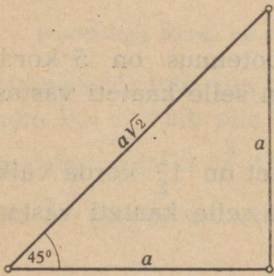
Et leida sin 45^0, võtame abiks võrdhaarse täisnurkse kolmnurga (joonis 4). Kui selle kolmnurga kaatetite pikkus on a mm, siis hüpotenuusi pikkus millimeetrites on

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Seega

$$\sin 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071.$$

Et leida $\sin 30^0$ ja $\sin 60^0$, võtame abiks võrdkülgse kolmnurga (joonis 5). Selle kolmnurga kõrgus poolitab kolmnurga kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, mille teravnurgad on 60^0 ja 30^0. Nagu joonisest näha, on



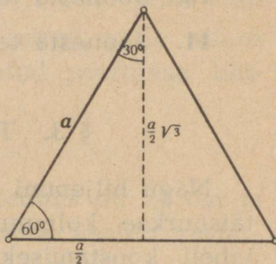
Joonis 4.

$$\sin 30^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

Et arvutada $\sin 60^0$, avaldame võrdkülgse kolmnurga kõrguse h kolmnurga külje kaudu:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$



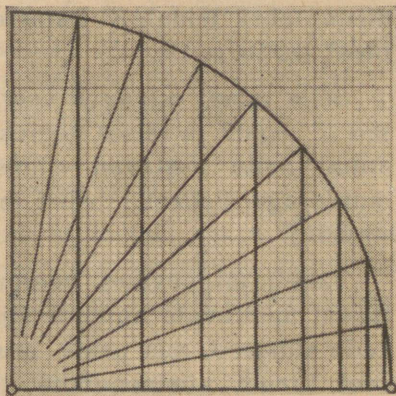
Joonis 5.

Nagu joonisest näha, on

$$\sin 60^0 = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}8660.$$

Need tulemused näitavad, et nurkade 45^0 ja 60^0 siinused on irratsionaalsed arvud. Irratsionaalsed on ka paljude teiste nurkade siinused. Siinuste tabeli kasutamise hõlbustamiseks antakse neis siinuste ligikaudsed väärtused, harilikult kas 3- või 4-kohalise murdosaga.

Lihtsa tabeli, mis sisaldab kahekohalise murdosaga siinuseid, saame koostada graafiliselt leitud andmeil. Selleks joonestame millimeeterpaberile 90^0-se kaare raadiusega 100 mm ja jaotame selle kaare üheksaks võrdseks osaks; jaotised järgnevad siis üksteisele iga 10^0 tagant. Kaare jaotamist saab teha kas malliga või proovimise teel sirkliga. Saadud jaotuspunktide ühendamisel ringjoone keskpunktiga saame nurgad 10^0, 20^0, 30^0, ... 80^0 (joonis 6, kaks korda vähendatud mõõdus). Nende nurkade siinuste leidmiseks joonestame kaare jaotuspunktidest ristlõigud rõhtraadiusele, mõõdame nende ristlõikude pikkused millimeetrites ja jagame tulemused raadiuse pikkusega, antud juhul 100-ga. Nii saame järgmise tabeli:



Joonis 6.

α	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0
$\sin \alpha$	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98

Selle tabeli vaatlemisel näeme, et

teravnurga kasvamisel tema siinus kasvab.

Nurga siinus ei kasva ühtlaselt, vaid väiksemate nurkade puhul kiiremini ja suuremate nurkade puhul aeglasemalt: nurga kasvamisel 10^0-st 20^0-ni kasvab siinus 0,17 võrra; nurga kasvamisel 70^0-st 80^0-ni kasvab siinus ainult 0,04 võrra.

Ülaltoodud siinuste tabel sisaldab nurga väärtusi, mis kasvavad 10^0 tagant, ja neile vastavaid siinuse väärtusi. Edaspidisteks ülesanneteks vajame aga siinuste tabelit, milles nurgad ja neile vastavad siinused on antud tihedamini, näiteks 1^0 või isegi $0{,}1^0$ tagant. Niisugune siinuste tabel leidub K. Ratassepa „Matemaatilistes tabelites" lk. 18 ja 19.

Selle tabeli esimeses veerus on antud nurga väärtused 1^0 tagant ja teises veerus (pealkirjaga $0'$ ehk $,0^0$) on antud neile vastavad siinuse väärtused neljakohalise murdosaga. Sellest tabelist leiame näiteks, et $\sin 38^0 = 0{,}6157$.

Tabeli järgnevates veergudes on antud $0{,}1^0$ ehk $6'$ tagant muutuvate nurkade siinused, s. o. niisuguste nurkade siinused, mis peale täisarvu kraadide sisaldavad veel kraadi kümnendikke. Tabel on koostatud nii, et niisuguse nurga siinuse (õigemini siinuse neljakohalise murdosa) leiame reast, mille ette on trükitud kraadide arvu täisosa, ja veerust, mille peale on trükitud kraadi kümnendike arv. Nii leiame näiteks $38{,}3^0$-se nurga siinuse kohast, kus lõikuvad rida, mille ette on trükitud 38^0, ja veerg, mille peale on trükitud $,3^0$ ehk $18'$. Nimelt leiame, et $\sin 38{,}3^0 = 0{,}6198$.

Siinuste tabeli vaatlemisel võime tähele panna, et nurga kasvades näiteks 24^0-st 25^0-ni järjest $6'$ võrra, nurga siinus kasvab enamasti ikka 0,0016 võrra ehk 16 viimase koha ühiku võrra, paiguti aga 15 viimase koha ühiku võrra; mõnes teises vahemikus, näiteks 60^0-st 63^0-ni, näeme, et nurga kasvades järjest $6'$ võrra nurga siinus kasvab paiguti 9, paiguti 8 viimase koha ühiku võrra. Sellest järeldame, et kuigi nurga siinus ei kasva ühtlaselt, siiski v ä i k e s t e s k a s v a m i s v a h e m i k k u d e s v õ r d s e t e l e n u r g a j u u r d e k a svudele vastavad ligikaudselt võrdsed siinuse juurdekasvud.

Seega, kui nurga kasvades $1'$ võrra siinus kasvab näiteks 4 viimase koha ühiku võrra, siis nurga kasvades $2'$ võrra siinus kasvab ligikaudu $2 \cdot 4$ ehk 8 viimase koha ühiku võrra ja nurga kasvades $3'$ võrra siinus kasvab ligikaudu $3 \cdot 4$ ehk 12 viimase koha ühiku võrra, jne.

Seda tähelepanekut võime sõnastada ka nii:

nurga väikestele juurdekasvudele vastavad siinuse juurdekasvud on ligikaudu võrdelised nurga juurdekasvudega.

Kirjeldatud siinuste tabel ei sisalda enam $1'$ tagant muutuvate nurkade siinuseid, kuid kasutades ülaltehtud tähelepanekut võime selle tabeli abil leida ka niisuguste nurkade siinused.

Näide 1. Leiame $\sin 38^0 26'$.

Tabelist näeme, et

$$\sin 38^0 24' = 0{,}6211$$

ja

$$\sin 38^0 30' = 0{,}6225.$$

Seega nurga kasvades $6'$ võrra nurga siinus selles vahemikus kasvab 14 viimase koha ühiku võrra. Järelikult nurga kasvades $1'$ võrra siinus kasvab $\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$ viimase koha ühiku võrra ja nurga kasvades $2'$ võrra siinus kasvab $2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3} \approx 5$ viimase koha ühiku võrra. Seega on $\sin 38^0 26' = 0{,}6211 + 0{,}0005 = 0{,}6216$.

Niisugust tabelis mitteesineva suuruse leidmist nimetatakse tabeli interpoleerimiseks ehk interpolatsiooniks.

„Matemaatilistes tabelites" toodud siinuste tabel võimaldab interpolatsiooni teostada ka väiksema vaeva ja ajakuluga: tabeli viimases viies veerus on antud iga rea (1^0-se kasvamisvahemiku) kohta nurga juurdekasvudele vastavad siinuse keskmised juurdekasvud. Nii leiame näiteks reas 38^0 ja veerus $2'$ arvu 5. See tähendab, et vahemikus 38^0 kuni 39^0 nurga kasvades $2'$ võrra siinus kasvab keskmiselt 5 viimase koha ühiku võrra — tulemus, mille ülaltoodud näites leidsime arvutamise teel. Et siinus isegi 1^0-ses vahemikus ei kasva päris ühtlaselt, siis tabelis antud keskmised juurdekasvud arusaadavalt ei ole alati võrdsed ülalantud viisil arvutatud juurdekasvudega. Kuid keskmiste juurdekasvude tabel on koostatud nii, et nende abil leitud siinuse väärtused ei erine õigetest rohkem kui 1 viimase koha ühiku võrra.

Kasutame nüüd siinuste tabelit vastupidise ülesande lahendamiseks: leida nurk, mille siinus on antud.

Näide 2. Leiame nurga, mille siinus on 0,7513.

Tabelist näeme, et niisugune siinus esineb reas 48^0 ja veerus $42'$. Seega nurk, mille siinus on 0,7513, on $48^0 42'$ ehk $0{,}7513 = \sin 48^0 42'$.

Näide 3. Leiame nurga, mille siinus on 0,8376.

Et antud siinus tabelis ei esine, siis peame nurga leidmiseks rakendama interpolatsioonivõtet. Tabelist näeme, et

$$\sin 56^0 48' = 0{,}8368$$

ja

$$\sin 56^0 54' = 0{,}8377.$$

Seega siinuse kasvades selles vahemikus 9 viimase koha ühiku võrra nurk kasvab $6'$ võrra. Järelikult siinuse kasvades 1 viimase koha ühiku võrra nurk kasvab $\frac{6'}{9}$ võrra. Et otsitava nurga siinus on 8 viimase koha ühiku võrra suurem kui $\sin 56^0 48'$, siis otsitav nurk on $8 \cdot \frac{6'}{9} \approx 5'$ võrra suurem kui $56^0 48'$. Seega otsitav nurk on $56^0 48' + 5' = 56^0 53'$ ehk $0{,}8376 = \sin 56^0 53'$.

Seegi ülesanne laheneb hõlpsamalt ja kiiremini, kui kasutame keskmisi juurdekasve: reas 56^0 otsime üles siinuse juurdekasvu 8; see asetseb veerus, mis kannab pealkirja $5'$. Seega oleme saanud sama tulemuse, mis varemini: otsitav nurk on $5'$ võrra suurem kui $56^0 48'$.

Ülesanded.

12. Leia siinuste tabelist järgmiste nurkade siinused:

8^0 15^0 24^0 38^0 42^0
50^0 66^0 78^0 84^0 89^0.

13. Leia siinuste tabelist nurgad, mille siinused on:

0,0698 0,2924 0,5299 0,6561
0,6947 0,7986 0,9135 0,9903.

14. Leia siinuste tabeli abil järgmiste nurkade siinused:

$15^0 30'$ $25^0 42'$ $39^0 06'$ $64^0 12'$ $76^0 54'$
$10{,}6^0$ $5{,}1^0$ $24{,}9^0$ $48{,}3^0$ $80{,}4^0$.

15. Leia siinuste tabeli abil nurgad, mille siinused on:

0,2857 0,5934 0,9516 0,9992 0,0993
0,8300 0,6909 0,0035 0,9999 0,8111.

16. Leia siinuste tabeli abil järgmiste nurkade siinused:

$23^0 10'$ $48^0 27'$ $69^0 50'$ $51^0 07'$ $4^0 46'$
$1^0 39'$ $14^0 40'$ $77^0 22'$ $85^0 20'$ $48^0 08'$.

17. Leia siinuste tabeli abil nurgad, mille siinused on:

0,5035 0,7698 0,8000 0,4488 0,5600
0,6918 0,1190 0,9691 0,9948 0,3000.

18. Leia siinuste tabeli abil nurgad, mille siinused on:

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{10}{11}.$$

§ 4. Täisnurkse kolmnurga elementide arvutamine nurga siinuse abil.

Võrduses

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

on seotud täisnurkse kolmnurga kolm elementi: teravnurk, vastaskaatet ja hüpotenuus. Kui neist suurustest mingid kaks on antud, siis siinuste tabeli kasutamisel saame leida kolmanda suuruse. Näidetena lahendame järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Kivi veeretatakse maast vankrile plangu abil, mille pikkus on 2,43 m. Leia plangu kaldenurk maapinna suhtes, kui vankri kõrgus on 0,95 m.

Lahendus. Tähistame plangu kaldenurga tähega α. Siis

$$\sin \alpha = \frac{0,95}{2,43}$$

ehk

$$\sin \alpha = 0,391.$$

Siinuste tabelist leiame, et

$$\alpha \approx 23^0.$$

Vastus. Plank moodustab maapinnaga nurga 23^0.

Ülesanne 2. Laev väljub sadamast suunas, mis meridiaaniga moodustab 38^0-se nurga. Kui kaugel on laev sadama meridiaanist, kui ta on jõudnud 24 meremiili kaugusele sadamast?

Lahendus. Laeva kulgetud tee, laeva kaugus sadama meridiaanist ja selle meridiaani lõik moodustavad täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on laeva kulgetud tee. Laeva kaugus sadama meridiaanist on kaatetiks, mille vastas asetseb 38^0-ne nurk. Tähistanud selle kauguse tähega k, võime siinuse definitsiooni põhjal kirjutada, et

$$\frac{k}{24} = \sin 38^0.$$

Siit leiame, et

$$k = 24 \,.\, \sin 38^0$$

ehk

$$k = 24 \cdot 0{,}616 \approx 14{,}8.$$

V a s t u s. Laeva kaugus sadama meridiaanist on 14,8 meremiili.

Ü l e s a n n e 3. Kui pikk tuleb võtta telefoniposti tugitraat, et traadi kinnituskoht asetseks 2,4 m kõrgusel maapinnast ja traat moodustaks maapinnaga 60^0-se nurga?

L a h e n d u s. Olgu traadi pikkus x m. Siis

$$\frac{2{,}4}{x} = \sin 60^0,$$

millest

$$x = \frac{2{,}4}{\sin 60^0}$$

ehk

$$x = \frac{2{,}4}{0{,}866}$$

ehk

$$x \approx 2{,}8.$$

V a s t u s. Tugitraadi pikkus peab olema 2,8 m.

Sagedasti kasutatakse teravnurga siinust selle nurga vastaskaateti arvutamiseks. Sellekohase valemi saame siinuse definitsioonivõrdusest

$$\sin \alpha = \frac{a}{c},$$

määrates temast kaateti a:

$$a = c \,.\, \sin \alpha.$$

Analoogiliselt avaldub kolmnurga teine kaatet:

$$b = c \cdot \sin \beta.$$

Neid valemeid võime sõnastada järgmiselt:

täisnurkse kolmnurga kaatet võrdub hüpotenuusi ja selle kaateti vastasnurga siinuse korrutisega.

Kui võrduse

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

lahendame hüpotenuusi c suhtes, siis saame valemi hüpotenuusi arvutamiseks:

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Analoogiliselt avaldub hüpotenuus ka teise kaateti ja teise teravnurga kaudu:

$$c = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Neid valemeid võime sõnastada järgmiselt:

täisnurkse kolmnurga hüpotenuus võrdub ühe kaateti ja selle kaateti vastasnurga siinuse jagatisega.

Ülesanded.

19. Kuivatusrehte viiv sild on 16,5 m pikk ja tõuseb rõhtsalt maapinnalt 4,1 m kõrgusele. Missuguse nurga moodustab sild rõhttasapinnaga?

20. Loodimine näitab, et sirgjooneline maantee kohast A kohani B tõuseb 18 m võrra; A ja B vaheline tee pikkus on 300 m. Kui suure nurga moodustab maantee rõhttasapinnaga?

21. Antenni juhe on 24 m pikk; juhtme üks ots on kinnitatud vardale 8,8 m kõrgusel, teine ots maja seinale 5,2 m kõrgusel. Missuguse nurga moodustab juhe rõhttasapinnaga?

22. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 104 cm ja ühe teravnurga siinus on $\frac{9}{13}$. Kui suur on selle nurga vastaskaatet?

23. Lohenöör on 152 m pikk ja moodustab rõhtsa maapinnaga nurga 54^0. Kui kõrgel asetseb lohe maapinnast?

24. Sirge autotee moodustab sirge raudteega $76{,}8^0$-se nurga. Kui kaugel on auto raudteest, kui ta on jõudnud 16 km kaugusele teede ristlemiskohast?

25. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 35 cm ja selle kaateti vastasnurga siinus on $\frac{7}{12}$. Kui suur on hüpotenuus?

26. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 54 cm ja selle kaateti vastasnurk on $34{,}5^0$. Kui suur on selle kolmnurga hüpotenuus?

27. Raadiomast hoitakse püsti terasköite abil, mis on kinnitatud masti külge 8,2 m kõrgusel ja moodustavad rõhttasapinnaga 62^0-sed nurgad. Arvuta terasköite pikkus.

§ 5. Teravnurga koosinus.

Eespool leidsime seose täisnurkse kolmnurga teravnurga, selle vastaskaateti ja hüpotenuusi vahel. Et leida seost täisnurkse kolmnurga teravnurga, selle l ä h i s - kaateti ja hüpotenuusi vahel, selleks kasutame teravnurga α lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet, mida nimetatakse nurga α koosinuseks. Seega täisnurkses kolmnurgas

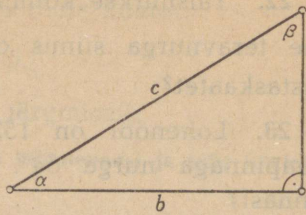
teravnurga koosinus on selle nurga lähiskaateti ja hüpotenuusi suhe

ehk sümbolites

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

ja

$$\cos\beta = \frac{a}{c}.$$



Joonis 7.

Et täisnurkse kolmnurga kaatet alati on väiksem hüpotenuusist, siis on murrud $\frac{b}{c}$ ja $\frac{a}{c}$ lihtmurrud ja seejuures positiivsed. Sellest järeldub, et

teravnurga koosinus on suurem kui 0 ja väiksem kui 1.

Ülesanded.

28. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 36 m ja üks kaatet on 27 m. Kui suur on nende külgede vahelise nurga koosinus?

29. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 33 cm ja üks kaatet on 21 cm. Arvuta selle kaateti lähisnurga koosinus.

30. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 5 cm ja 12 cm. Arvuta suurema teravnurga koosinus.

31. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 4 korda väiksem kui hüpotenuus. Kui suur on selle kaateti lähisnurga koosinus?

32. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 2 korda suurem ühest kaatetist. Kui suur on hüpotenuusi ja selle kaateti vahelise nurga koosinus?

Võrreldes nurga koosinuse ja siinuse definitsioone näeme, et

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

ja samuti

$$\sin \beta = \frac{b}{c}.$$

Sellest järeldub, et

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

ja seega

täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga koosinus võrdub teise teravnurga siinusega.

Et täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa on 90^0, siis

$$\beta = 90^0 - \alpha;$$

järelikult

$$\cos \alpha = \sin (90^0 - \alpha).$$

Nurka $90^0 - \alpha$ nimetatakse nurga α täiendusnurgaks; seepärast võime eelneva seose sõnastada ka nii:

teravnurga koosinus võrdub täiendusnurga siinusega. [1]

Selle seose põhjal on näiteks

$$\cos 30^0 = \sin (90^0 - 30^0) = \sin 60^0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}8660;$$

$$\cos 45^0 = \sin (90^0 - 45^0) = \sin 45^0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}7071;$$

$$\cos 60^0 = \sin (90^0 - 60^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2} = 0{,}5000.$$

---

[1] Oskussõna koosinus ja sümbol cos on tekkinud lühenditena ladinakeelsest oskussõnast *complementi sinus*, mis tähendab täiendusnurga siinust.

33. Määra nurk, mille koosinus on niisama suur kui

$\sin 64^0$	$\sin 43^0$	$\sin 76^0$	$\sin 2^0$
$\sin 59^040'$	$\sin 80^010'$	$\sin 11^019'$	$\sin 29^001'$.

34. Määra nurk, mille siinus on niisama suur kui

$\cos 63^0$	$\cos 25^0$	$\cos 45^0$	$\cos 9^0$
$\cos 48^020'$	$\cos 74^030'$	$\cos 68^012'$	$\cos 88^046'$.

35. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

$$2 \sin 30^0 \cdot \cos 30^0$$
$$\sin 60^0 \cos 30^0 - \sin 30^0 \cos 60^0$$
$$(\sin 60^0 + \sin 45^0)(\cos 30^0 - \cos 45^0)$$
$$(\sin 30^0)^2 + (\cos 30^0)^2$$
$$(\sin 45^0)^2 + (\cos 45^0)^2.$$

36. Lihtsusta järgmised avaldised ja arvuta nende väärtused, kasutades siinuste tabelit:

$$5 \sin 46^0 + 4 \cos 44^0$$
$$10 \cos 12^0 - 2 \sin 78^0$$
$$6 \sin 44^010' - 4 \cos 45^050'$$
$$\sin 20^048' \cdot \cos 69^012'$$
$$\cos 25^056' : \sin 64^004'.$$

§ 6. Teravnurga koosinuste tabel.

Nurga koosinuse kasutamiseks täisnurkse kolmnurga elementide arvutamisel on vajalik koosinuste tabel. Selle koostame siinuste tabeli põhjal, kasutades seost

$$\cos \alpha = \sin (90^0 - \alpha).$$

Nii saame eespool-toodud siinuste tabelist järgmise koosinuste tabeli:

α	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0
$\cos\alpha$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17

Sellest tabelist on näha, et

teravnurga kasvamisel tema koosinus kahaneb.

„Matemaatilistes tabelites" lk. 18 ja 19 leiduva siinuste tabeli iga rea lõppu (enne keskmiste juurdekasvude veerge) on trükitud kraadide arv, mis rea algusse trükitud kraadide arvu täiendab 89^0-ni, ja iga veeru alla on trükitud kraadi kümnendike (ja vastav minutite) arv, mis sama veeru peale trükitud kümnendike (või minutite) arvu täiendab 1^0-ni. Seega on mingi rea algusest ja mingi veeru pealt võetud arvude ning sama rea lõpust ja sama veeru alt võetud arvude summa ikka $89^0 + 1^0$ ehk 90^0. Järelikult on vasemalt ja ülalt loetud nurk ning vastav paremalt ja alt loetud nurk teineteise täiendusnurgad. Seetõttu iga vasemalt ja ülalt loetud nurga siinus on ühtlasi vastava paremalt ja alt loetud nurga koosinuseks. Niiviisi täiendatud siinuste tabel on ühtlasi ka koosinuste tabeliks.

Antud nurga koosinuse leiame reast, mille lõppu on trükitud selle nurga kraadide arvu täisosa, ja veerust, mille alla on trükitud selle nurga kraadi kümnendike arv. Nii leiame näiteks, et $\cos 28{,}3^0 = 0{,}8805$.

Kui antud nurka tabelis ei esine, siis tuleb tema koosinuse leidmiseks kasutada interpolatsioonivõtet. Seejuures peab alati silmas pidama, et nurga kasvades tema koosinus kahaneb.

N ä i d e 1. Leiame $\cos 28^0 22'$.

Tabelist leiame, et

$$\cos 28^0 18' = 0{,}8805$$

ja

$$\cos 28^0 24' = 0{,}8796.$$

Seega nurga kasvades 6′ võrra tema koosinus selles vahemikus kahaneb 9 viimase koha ühiku võrra. Järelikult nurga kasvades 4′ võrra koosinus kahaneb $\frac{4 \cdot 9}{6} = 6$ viimase koha ühiku võrra. Seega on $\cos 28^0 22' = 0{,}8805 - 0{,}0006 = 0{,}8799$.

Ka koosinuse leidmisel võib kasutada keskmiste juurdekasvude veerge. Nii leiame reas 28^0 ja veerus 4′ juurdekasvu 6. Koosinuse leidmisel on soovitav kasutada keskmiste juurdekasvude veergude peale trükitud minutite arvude asemel nende alla trükitud negatiivseid arve, mis meenutavad, et nurga kasvades koosinus kahaneb ja nurga kahanedes koosinus kasvab.

Ülesanded.

37. Leia koosinuste tabelist järgmiste nurkade koosinused:

3^0	7^0	16^0	29^0	43^0
55^0	74^0	82^0	85^0	89^0.

38. Leia koosinuste tabelist nurgad, mille koosinused on:

0,9986	0,9744	0,8090	0,7071
0,5878	0,3090	0,1564	0,0349.

39. Leia koosinuste tabeli abil järgmiste nurkade koosinused:

$38^0 06'$	$47^0 36'$	$76^0 48'$	$13^0 12'$	$50^0 24'$
$25^0 49'$	$25^0 50'$	$37^0 39'$	$85^0 55'$	$66^0 29'$.

40. Leia koosinuste tabeli abil nurgad, mille koosinused on:

0,9542	0,3371	0,8131	0,9810	0,0488
0,8867	0,7919	0,4000	0,2600	0,4142.

§ 7. Täisnurkse kolmnurga elementide arvutamine nurga koosinuse abil.

Nurga koosinuse kasutamist täisnurkse kolmnurga elementide arvutamisel selgitame järgmiste ülesannetega.

Ülesanne 1. Avalda täisnurkse kolmnurga kaatet hüpotenuusi ja nende kahe külje vahelise teravnurga abil.

Lahendus. Koosinuse definitsiooni järgi on

$$\cos \alpha = \frac{b}{c},$$

seega

$$b = c \cdot \cos \alpha.$$

Analoogiliselt on

$$a = c \cdot \cos \beta.$$

Tulemuse sõnastame järgmiselt:

täisnurkse kolmnurga kaatet võrdub hüpotenuusi ja selle kaateti lähisnurga koosinuse korrutisega.

Ülesanne 2. Avalda täisnurkse kolmnurga hüpotenuus ühe kaateti ja selle kaateti lähisnurga kaudu.

Lahendus. Lahendades võrduse

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

hüpotenuusi c suhtes, saame

$$c = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

Analoogiliselt leiame, et

$$c = \frac{a}{\cos \beta}.$$

Tulemuse sõnastame nii:

täisnurkse kolmnurga hüpotenuus võrdub ühe kaateti ja selle kaateti lähisnurga koosinuse jagatisega.

41. Kuulus Pisa torn on 54 m kõrge. Vajumise tõttu on torni tipp nihkunud oma algasendist kõrvale 4,5 m võrra. Määra vähendatud mõõdus tehtud joonise abil nurk, mille torn moodustab rõhttasapinnaga. Määra sama nurk koosinuste tabeli abil.

42. Telefoniposti tugi on 3,8 m pikk; toe alumine ots asetseb 2,6 m kaugusel telefonipostist. Missuguse nurga moodustab tugi rõhttasapinnaga?

43. 4,6 m pikk redel tugineb ülemise otsaga seinakarniisile, mille kõrgus üle maapinna on 3,4 m. Missuguse nurga moodustab redel seinaga?

44. Kui suur on lõigu ja projektsioontelje vaheline nurk, kui lõigu pikkus on 54 cm ja ta projektsiooni pikkus on 38 cm?

45. Võrdhaarse kolmnurga alus on 22 cm ja haar on 25 cm. Kui suur on selle kolmnurga alusnurk?

46. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 86 m ja üks teravnurk on $30{,}8^0$. Arvuta selle nurga lähiskaatet.

47. Leia 5,6 meetri pikkuse lõigu projektsiooni pikkus, kui lõik moodustab projektsioonteljega nurga 68^0.

48. Mere sügavuse mõõtmiseks lastakse laevalt merre nööri otsas tükk tina, mis laeva sõites libiseb mööda merepõhja. Merre lastud nööri pikkus on 50 m ja nöör moodustab püstsihiga nurga 28^0. Kui sügav on meri laeva kohal?

49. Kui suur on täisnurkse kolmnurga pindala, kui hüpotenuus on 17 cm ja üks teravnurk on $58^0 26'$?

50. Täisnurkses kolmnurgas on kaatet $a = 12{,}8$ m ja $\cos \beta = 0{,}7$. Arvuta hüpotenuusi pikkus c.

51. Laev sõidab suunas, mis meridiaaniga moodustab nurga $52{,}4^0$. Kui pika tee on laev kulgenud, kui ta tee projektsioon meridiaanile on 18 meremiili?

52. Mäenõlv moodustab rõhtsa maapinnaga 24^0-se nurga. Tee äärde, mis viib otse mäkke, tahetakse istutada puid nii, et kahe kõrvuti oleva puu tüvede vaheline kaugus oleks 4 m. Kui kaugele üksteisest tuleb kaevata augud puude jaoks?

§ 8. Seos ühe ja sama nurga siinuse ja koosinuse vahel.

Ühe ja sama teravnurga siinuse ja koosinuse vahel kehtib järgmine seos:

teravnurga siinuse ja koosinuse ruutude summa on 1.

Tõestus. Kui a, b ja c on täisnurkse kolmnurga kaatetid ja hüpotenuus, siis Pythagorase teoreemi järgi on

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled arvuga c^2, saame:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

ehk

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Et $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ ja $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, siis

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1,$$

m. o. t. t.

Harilikult kirjutatakse $(\sin\alpha)^2$ asemel $\sin^2\alpha$ ja $(\cos\alpha)^2$ asemel $\cos^2\alpha$. Nii omandab äsjatuletatud võrdus kuju:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

See võrdus võimaldab arvutada nurga koosinust, kui on teada nurga siinus — ja ümberpöördult — nurga siinust, kui on teada nurga koosinus. Lahendades võrduse kord sin α, kord cos α suhtes, saame:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}\,,$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

N ä i d e. Rakendame viimase valemi cos 18^0 arvutamiseks, teades, et sin $18^0 = 0{,}31$. Nii leiame, et

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - \sin^2 18^0} = \sqrt{1 - 0{,}31^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 0{,}0961} = \sqrt{0{,}9039} = 0{,}95.$$

Kasutades varemini leitud valemit

$$\sin (90^0 - \alpha) = \cos \alpha$$

koos valemiga

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}\,,$$

saame valemi

$$\sin (90^0 - \alpha) = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

mis võimaldab antud nurga siinuse järgi arvutada täiendusnurga siinust. Teades 0^0 ja 45^0 vaheliste nurkade siinuseid saame viimase valemi põhjal arvutada kõigi 45^0 ja 90^0 vaheliste nurkade siinuseid, sest kui nurk $\alpha < 45^0$, siis täiendusnurk $90^0 - \alpha > 45^0$.

N ä i d e. Olgu teada, et sin $25^0 = 0{,}423$. Arvutame nurga 25^0 täiendusnurga siinuse ehk sin 65^0:

$$\sin 65^0 = \sin (90^0 - 25^0) = \cos 25^0 = \sqrt{1 - \sin^2 25^0} =$$

$$= \sqrt{1 - 0{,}423^2} = \sqrt{1 - 0{,}178929} = \sqrt{0{,}821071} = 0{,}906.$$

53. Arvuta teravnurga α koosinus, kui $\sin \alpha = 0{,}6$.

54. Teravnurga β siinus on $\frac{12}{13}$. Arvuta $\cos \beta$. Kontrolli tulemust siinuste ja koosinuste tabeli abil.

55. Teravnurga γ koosinus on $\frac{2}{3}$. Arvuta $\sin \gamma$. Kontrolli tulemust tabeli abil.

56. Teravnurga δ koosinus on $\frac{20}{29}$. Arvuta $\sin \delta$. Kontrolli tulemust tabeli abil.

57. Arvuta 27^0-se nurga koosinus, võttes tabelist selle nurga siinuse. Kontrolli tulemust koosinuste tabeli abil.

58. Arvuta nurga $53^0 54'$ koosinus, võttes tabelist selle nurga siinuse. Kontrolli tulemust koosinuste tabeli abil.

59. Nurga φ siinus on võrdne sama nurga koosinusega. Kui suur on nurk φ?

60. Nurga β koosinuse ja siinuse jagatis on 3. Kui suur on nurk β?

61. Nurga γ siinuse ja koosinuse jagatis on 3. Kui suur on nurk γ?

62. Taanda järgmised murrud:

1. $\frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ 3. $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$ 5. $\frac{\cos^3\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^3\alpha \cos\alpha}$

2. $\frac{1 - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ 4. $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - 1}$ 6. $\frac{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha}{2 \sin\alpha \cos\alpha}$

63. Näita, et on kehtivad järgmised samasused:

1. $2 - 3\cos^2\alpha = 3\sin^2\alpha - 1$
2. $(1 + \cos\alpha)^2 + (1 - \cos\alpha)^2 = 2(2 - \sin^2\alpha)$
3. $\cos^3\alpha \sin\alpha + \sin^3\alpha \cos\alpha = \sin\alpha \cos\alpha$
4. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$
5. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

§ 9. Teravnurga tangens.

Täisnurkses kolmnurgas (joonis 8)

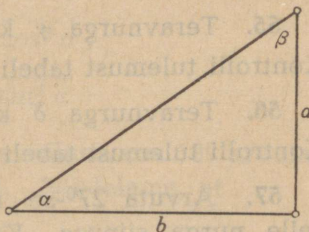
teravnurga tangens on selle nurga vastaskaateti ja lähiskaateti suhe.

Selle suhte tähistamiseks kasutatakse sümbolit tan. Seega

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

ja

$$\tan \beta = \frac{b}{a}.$$



Joonis 8.

Et täisnurkse kolmnurga üks kaatet võrreldes teise kaatetiga võib olla kuitahes suur, siis kaatetite suhted $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$ võivad omandada igasuguseid positiivseid väärtusi. Seega võib teravnurga tangens vastandina teravnurga siinusele ja koosinusele omandada igasuguseid positiivseid väärtusi. Ümberpöördult: iga positiivse arvu järgi saab konstrueerida nurka, mille tangens võrdub selle arvuga.

N ä i d e. Et konstrueerida nurka, mille tangens on 4,7, joonestame täisnurkse kolmnurga, mille kaatetid on näiteks 10 mm ja 47 mm. Selle kolmnurga suurema kaateti vastasnurga tangens on 4,7.

Samuti nagu arvutasime sin 45^0, sin 30^0 ja sin 60^0, saame arvutada ka tan 45^0, tan 30^0 ja tan 60^0. Nii leiame võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast (joonis 6), et

$$\tan 45^0 = \frac{a}{a} = 1.$$

Võrdkülgsest kolmnurgast, mis on kõrgusega poolitatud kaheks täisnurkseks kolmnurgaks (joonis 5), saame:

$$\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774; \qquad \tan 60^0 = \sqrt{3} \approx 1{,}732.$$

64. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 16 cm ja 30 cm. Kui suur on väiksema kaateti vastasnurga tangens?

65. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 24 cm ja 32 cm. Kui suur on suurema teravnurga tangens? Kui suur on väiksema teravnurga tangens?

66. Täisnurkse kolmnurga kaatet a on 5 korda suurem kaatetist b. Kui suur on kaateti a vastasnurga tangens? Kui suur on kaateti b vastasnurga tangens?

67. Täisnurkse kolmnurga teravnurga α tangens on $\frac{4}{7}$. Missuguse osa nurga α lähiskaatetist moodustab selle nurga vastaskaatet?

68. Täisnurkse kolmnurga teravnurga β tangens on 2,6. Kumb kaatetitest on suurem teisest ja mitu korda?

69. Joonesta nurk, mille tangens on 2.

70. Joonesta nurk, mille tangens on $\frac{1}{5}$.

71. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on c. Kaatet a on 0,6 c. Kui suur on selle kaateti vastasnurga tangens?

72. Täisnurkse kolmnurga kaatet on a, hüpotenuus on c. Avalda nurga α tangens andmete kaudu.

73. Võrdhaarse kolmnurga haar on 15 cm ja alus 18 cm. Kui suur on alusnurga tangens?

74. Ristküliku diagonaal on 13 cm ja üks külg 5 cm. Kui suur on diagonaali ja pikema külje vahelise nurga tangens?

75. Ühenda ruudu ühe külje keskpunkt kahe vastasoleva tipuga ja arvuta kõigi joonisel tekkinud nurkade tangensid.

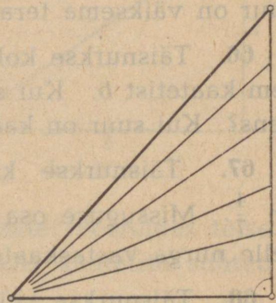
§ 10. Teravnurga tangensite tabel.

Eespool selgus, et nurkade 30^0 ja 60^0 tangensid on irratsionaalsed arvud. Irratsionaalsed on ka paljude teiste nurkade tangensid. Seepärast tabelites antakse ka tangensid ligikaudsetena, harilikult kas 3- või 4-kohalise murdosaga.

Nagu siinuste tabeli, nii saame ka tangensite tabeli koostada graafiliselt leitud andmeil. Selleks joonestame millimeeterpaberile täisnurksed kolmnurgad, milledes esinevad nurgad

$$10^0, 20^0, 30^0, \ldots 80^0,$$

mõõdame nende kolmnurkade kaatetid ja leiame vajalikud suhted.



Joonis 9.

Töö kergendamiseks on kasulik neid kolmnurki joonestada ühe ühise kaatetiga ja võtta selle kaateti pikkuseks 100 mm (joonis 9, vähendatud mõõdus). Töö tulemusena saame järgmise tabeli:

α	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0
tan α	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67

Joonis, mille tegime tangensi väärtuse määramiseks, näitab, et nurga α kasvades ja lähiskaateti muutumatuks jäädes kasvab vastaskaatet ning seega ka vastaskaateti ja lähiskaateti suhe ehk nurga α tangens; seega

teravnurga kasvamisel tema tangens kasvab.

„Matemaatilistes tabelites" lk. 20 ja 21 leidub tangensite tabel, milles nurgad ja nende tangensid on antud $0{,}1^0$ tagant. Oma ehituselt see tabel sarnaneb samas raamatus leiduva siinuste tabeliga, mistõttu tangensite tabeli kasutamine ei vaja erilist selgitust. Märkida tuleb vaid seda, et ruumi säästmise otstarbel, alates tabeli kolmandast veerust, on ära trükitud ainult tangensite murdosad. Kui tangensi murdosa on trükitud tavalise kirjaga, siis täisosa tuleb võtta sama rea teisest veerust; kui murdosa on trükitud jämeda kirjaga, siis täisosa tuleb võtta järgneva rea teisest veerust. Nii on näiteks tan $63^0 42' = 2{,}0233$.

Ka selle tabeli vaatlemisel võime tähele panna, et küllalt väikestes vahemikkudes võrdsetele nurga juurdekasvudele vastavad ligikaudselt võrdsed tangensi juurdekasvud. Nii näeme näiteks, et vahemikus 26^0 kuni 27^0 nurga kasvades järjest $6'$ võrra tangens kasvab paiguti 21, paiguti 22 viimase koha ühiku võrra ja et vahemikus 49^0 kuni 50^0 nurga kasvades järjest $6'$ võrra tangens kasvab paiguti 40, paiguti 41, paiguti aga ka 42 viimase koha ühiku võrra. Seega võime ka tangensi kohta nentida, et

nurga väikestele juurdekasvudele vastavad tangensi juurdekasvud on ligikaudu võrdelised nurga juurdekasvudega.

Selle tõsiasja tõttu on võimalik leida ka tabelis mitteesinevate nurkade tangenseid.

Näide. Leiame tan $63^0 26'$.

Tabelist leiame, et

$$\tan 63^0 24' = 1{,}9970$$

ja

$$\tan 63^0 30' = 2{,}0057.$$

Seega nurga kasvades $6'$ võrra tangens kasvab selles vahemikus 87 viimase koha ühiku võrra. Järelikult nurga kasvades $2'$ võrra tangens kasvab $\frac{2 \cdot 87}{6} = 29$ viimase koha ühiku võrra. Seega on tan $63^0 26' = 1{,}9970 + 0{,}0029 = 1{,}9999$.

Sama tulemuse oleksime saanud, kui tangensi juurdekasvu oleksime võtnud keskmiste juurdekasvude veerust — seal vastab $2'$-sele nurga juurdekasvule tangensi juurdekasv 29.

Alates 75^0-sest nurgast hakkab tangensi juurdekasv nii kiiresti muutuma, et kasutades interpolatsiooniks keskmisi juurdekasve võime saada tulemusi, mis õigetest erinevad juba enam kui 1 viimase koha ühiku võrra. Seepärast tuleb pidada ebasoovitavaks keskmiste juurdekasvude kasutamist tabeli selles osas, mistõttu siit alates keskmised juurdekasvud ongi jäetud andmata.

Vaadeldes edasi tangensite tabelit näeme, et täisnurga lähedaste nurkade puhul nurga $6'$-stele juurdekasvudele ei vasta kaugeltki enam võrdsed tangensi juurdekasvud. Nii on näiteks vahemikus 88^0 kuni 99^0 tangensi järjestikused juurdekasvud 150, 168, 187, 211 jne. viimase koha ühikut. Seega ei ole siin kehtiv eeldus, mis lubas rakendada interpolatsioonivõtet. Rakendades siingi interpolatsiooni võime saada tangensi väärtusi, mis tunduvalt erinevad õigetest. Nii leiame interpolatsiooni abil, et $\tan 89^0 39' = 143{,}2 + \frac{3 \cdot 47{,}8}{6} = 143{,}2 + 23{,}9 = 167{,}1$, kuna detailsematest tabelitest leiame, et $\tan 89^0 39' = 163{,}7$. Seega oleme interpolatsiooni abil saanud tangensi väärtuse, mis õigest erineb 34 viimase koha ühiku võrra. Seepärast ei ole soovitav kasutada interpolatsiooni vahemikus 88^0 kuni 90^0.

Ülesanded.

76. Leia tangensite tabelist järgmiste nurkade tangensid:

7^0	26^0	47^0	72^0	89^0
$10{,}3^0$	$32{,}7^0$	$56{,}5^0$	$63{,}6^0$	$78{,}9^0$.

77. Leia tangensite tabelist nurgad, mille tangensid on:

0,1051	0,3443	0,6745	1,2799	19,08
0,2053	0,7212	2,0323	3,0595	44,07.

78. Leia tangensite tabeli abil järgmiste nurkade tangensid:

$15^0 30'$	$24^0 18'$	$58^0 42'$	$78^0 42'$	$60^0 06'$
$21^0 15'$	$17^0 45'$	$59^0 10'$	$63^0 27'$	$78^0 39'$.

79. Leia tangensite tabeli abil nurgad, mille tangensid on:

0,3679 0,4010 1,7000 2,0300 5,0000.

80. Leia tangensite tabeli abil nurgad, mille tangensid on:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{13}{12}.$$

81. Mäenõlvaku kallakust mõõdetakse nõlvaku kaldenurga tangensi abil. Missuguse nurga moodustab nõlvak rõhttasapinnaga, kui nõlvaku kallakus on 31 : 72 ?

82. Liikumisel mööda liumäge vastab 1-meetrisele tõusule 1,7-meetrine edasinihkumine rõhtsuunas. Kui suure nurga liumägi moodustab rõhttasapinnaga?

§ 11. Täisnurkse kolmnurga elementide arvutamine nurga tangensi abil.

Kui täisnurkse kolmnurga kolmest elemendist, mis esinevad võrduses

$$\tan \alpha = \frac{a}{b},$$

on mingid kaks elementi antud, siis tangensite tabeli abil saame arvutada kolmanda elemendi. Nii saab leida

1. teravnurga, kui on antud kaatetid a ja b, sest

$$\tan \alpha = \frac{a}{b};$$

2. teravnurga vastaskaateti, kui on antud nurk ja selle lähiskaatet, sest

$$a = b \cdot \tan \alpha;$$

3. teravnurga lähiskaateti, kui on antud nurk ja vastaskaatet, sest

$$b = \frac{a}{\tan \alpha}.$$

Et viimasel juhul toimub kaateti arvutamine jagamise teel mitmekohalise arvuga, siis ei ole see arvutamisviis soovitav. Seepärast 3. juhul arvutame enne nurga β valemi järgi

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

ja kasutame siis kaateti arvutamiseks võrdust

$$b = a \cdot \tan \beta.$$

Nii ühe kui ka teise kaateti arvutamine toimub seega järgmise eeskirja järgi:

täisnurkse kolmnurga kaatet võrdub teise kaateti ja selle juures oleva teravnurga tangensi korrutisega.

Ülesanded.

83. Missuguse nurga moodustavad päikese kiired maapinnaga, kui ühe meetri pikkune kepp heidab 1,35 meetri pikkuse varju?

84. Ristküliku küljed on 4 dm ja 5,6 dm. Määra nurgad, mis ristküliku diagonaal moodustab külgedega.

85. Redeli ülemine ots tugineb akna veelauale 4,6 m kõrgusel; redeli alumine ots on 2,7 m seinast eemal. Missuguse nurga moodustab redel maapinnaga?

86. Trepi astmed on 21 cm laiad ja 13 cm kõrged. Missuguse nurga moodustab trepi käsipuu rõhttasapinnaga?

87. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 42 cm. Kui suur on selle kolmnurga teine kaatet, kui ta vastasnurga tangens on $\frac{11}{14}$?

88. Päikese kõrgus on 36^0. Lipuvarras heidab varju, mille pikkus on 8,6 m. Kui kõrge on lipuvarras?

89. Tuletorni tipus vilkuv tuli asetseb 84 m kõrgusel merepinnast. Laevalt paistab tuli 8^0 üle silmapiiri. Kui kaugel on laev tuletornist?

90. Kaugusel 35 m torni jalast ja 1,7 m üle selle jala taseme asetseb nurgamõõtmise riist. Selle abil leitakse torni tipu kõrgusnurk $\alpha = 64^0 20'$. Kui kõrge on torn?

91. Punktist A paistab õhulaev parajasti pea kohal; samal ajal seda õhulaeva punktist B vaadeldes leitakse tema kõrgusnurk olevat 48^0. Kaugus AB on kaardi järgi 472 m. Kui kõrgel maapinnast on õhulaev vaatlusajal?

92. Kui kaugele silmast peab asetama 25-millimeetrise läbimõõduga mündi, et ta paistaks niisama suures nurgas kui kuu? Kuud näeme nurgas $31'$.

93. Täisnurkse kolmnurga üks kaateteist on 17 m; kolmnurga pindala on 134 m^2. Kui suured on kolmnurga teravnurgad?

§ 12. Teravnurga kootangens.

Eespool selgus, et nurga tangensi abil ei ole sobiv arvutada selle nurga lähiskaatetit. Viimase leidmiseks on kasulik tarvitada nurga kootangensit. Täisnurkses kolmnurgas

teravnurga kootangens on selle nurga lähiskaateti ja vastaskaateti suhe.

Selle suhte tähistamiseks kasutatakse sümbolit cot.

Kasutades täisnurkse kolmnurga elementide tähistamiseks normaaltähistust (joonis 8), saame antud definitsiooni järgi, et

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

ja

$$\cot \beta = \frac{a}{b}.$$

Nurga kootangensi ja tangensi definitsioonide võrdlemisel selgub, et üks ja sama suhe, näiteks $\frac{a}{b}$, on täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga kootangens ja teise teravnurga tangens:

$$\frac{b}{a} = \cot \alpha$$

ja

$$\frac{b}{a} = \tan \beta,$$

järelikult

$$\cot \alpha = \tan \beta.$$

Nurk β on nurga α täiendusnurk; seega

teravnurga kootangens võrdub täiendusnurga tangensiga [1]

ehk sümbolites

$$\cot \alpha = \tan (90^0 - \alpha).$$

Et teravnurga tangens võib omandada igasuguse positiivse väärtuse, siis järeldub viimasest võrdusest seesama omadus ka teravnurga kootangensi kohta.

Nurga kootangensi leidmiseks kasutame täiendusnurga tangensit. Nii leiame näiteks, et

$$\cot 10^0 = \tan (90^0 - 10^0) = \tan 80^0 = 5{,}67.$$

---

[1] Sümboli cot tekkimine on analoogiline koosinuse sümboli cos tekkimisega; sümbol cot on ladinakeelse oskussõna *complementi tangens* lühend.

Selsamal viisil võime leida ka teiste nurkade kootangensid ja koostada kootangensite tabeli:

α	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	70^0	80^0
cot α	5,67	2,75	1,73	1,19	0,84	0,58	0,36	0,18

Saadud tabelist on näha, et

teravnurga kasvamisel tema kootangens kahaneb.

Täiendades tangensite tabelit täiendusnurkade veeruga saame seda kasutada ka kootangensite tabelina. Antud nurga kootangensi leidmine ja nurga leidmine antud kootangensi järgi „Matemaatilistes tabelites" lk. 20 ja 21 toodud tabeli abil toimub analoogiliselt koosinuste tabeli kasutamisega.

Võrdusest

$$\frac{b}{a} = \cot \alpha$$

leiame, et

$$b = a \cot \alpha.$$

Analoogiliselt on ka

$$a = b \cot \beta.$$

Nii saame täisnurkse kolmnurga kaateti arvutamiseks veel ühe eeskirja:

täisnurkse kolmnurga kaatet võrdub teise kaateti ja selle vastas asetseva nurga kootangensi korrutisega.

Ülesanded.

94. Täisnurkses kolmnurgas on kaatet $a = 12$ ja kaatet $b = 15$. Arvuta cot α ja cot β.

95. Võrdhaarse kolmnurga alus on 1,8 m ja kõrgus on 1,4 m. Arvuta aluse lähisnurga kootangens.

96. Joonesta nurk, mille kootangens on 2.

97. Joonesta nurk, mille kootangens on $\frac{1}{3}$.

98. Määra nurk, mille kootangens on niisama suur kui tan 58^0, tan 1^0, tan $14^0\,10'$, tan $0^0\,36'$, tan $41^0\,41'$.

99. Määra nurk, mille tangens on niisama suur kui cot 18^0, cot 55^0, cot $24^0\,40'$, cot $2^0\,05'$, cot $12^0\,19'$.

100. Leia kootangensite tabeli abil järgmiste nurkade kootangensid:

10^0	65^0	26^0	18^0	46^0
$53^0 54'$	$69^0 18'$	$11^0 12'$	$26^0 30'$	$89^0 42'$

101. Leia kootangensite tabeli abil nurgad, mille kootangensid on:

9,5144	3,4874	2,0503	5,1446	1,1106
0,9358	0,7454	3,0061	2,0145	5,0504

102. Leia kootangensite tabeli abil järgmiste nurkade kootangensid:

$24^0 50'$	$58^0 40'$	$18^0 21'$	$11^0 29'$	$26^0 22'$

103. Leia kootangensite tabeli abil nurgad, mille kootangensid on:

1,2291	1,4478	2,0189	3,0177	0,8921

104. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 96 cm; selle kaateti vastasnurga kootangens on $\frac{15}{8}$. Kui pikk on teine kaatet?

105. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 22 cm ja 28 cm. Arvuta kummagi teravnurga kootangens 4 kümnendkohaga ja leia tabelist kummagi nurga suurus. Kuidas saab kõige hõlpsamini tulemust kontrollida?

106. Täisnurkse kolmnurga teravnurk on 23^0. Selle nurga vastaskaatet on 11,5 m. Arvuta nurga lähiskaatet.

107. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 0,587 m. Selle kaateti vastasnurk on $40^0 18'$. Arvuta teine kaatet.

108. Ontika 40 m kõrge paekallas paistab merel olevast paadist 5^0-ses kõrgusnurgas. Kui kaugel on paat kaldalt?

109. Rõhtsalt maapinnalt mõõtes leiame kirikutorni tipu kõrgusnurga suuruse olevat φ; tõustes h meetrit üle eelmise vaatekoha, leiame torni aluse alangunurga suuruse olevat ψ. Näita, et torni kõrgus on $h \cdot \tan \varphi \cdot \cot \psi$.

110. Kui suur on täisnurkse kolmnurga pindala, kui üks kaatet on 15,2 cm ja selle kaateti vastasnurk on $21^0 18'$?

§ 13. Seos ühe ja sama nurga tangensi ja kootangensi vahel.

Nurga tangensi ja kootangensi definitsioonide järgi on

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

ja

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}.$$

Korrutades nende võrduste vastavaid pooli saame

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$$

ehk

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

Tulemuse võime sõnastada järgmiselt:

ühe ja sama teravnurga tangensi ja kootangensi korrutis on 1.

Lahendades saadud võrduse $\cot \alpha$ suhtes saame

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha},$$

mis tähendab, et

teravnurga kootangens on sama nurga tangensi pöördarv.

Samuti on ka nurga tangens sama nurga kootangensi pöördarv.

Näited.

$$\cot 30^0 = \frac{1}{\tan 30^0} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\cot 45^0 = \frac{1}{\tan 45^0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\cot 60^0 = \frac{1}{\tan 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Ülesanded.

111. Nurga tangens on 0,75. Kui suur on sama nurga kootangens? Kontrolli tulemust tabelite järgi.

112. Nurga tangens on 5. Kui suur on sama nurga kootangens? Kontrolli tulemust tabelite järgi.

113. Nurga kootangens on $1\frac{2}{3}$. Kui suur on sama nurga tangens?

114. Nurga ω kootangens on kaks korda suurem kui sama nurga tangens. Kui suur on nurk ω?

115. Nurga φ tangens on võrdne sama nurga kootangensiga. Kui suur on nurk φ?

§ 14. Teravnurga funktsioonide vahelised põhiseosed.

Nagu eespool nägime, vastab teravnurga α igale väärtusele kindel sin α väärtus, näiteks kui α on

$$20^0, \quad 45^0, \quad 70^0,$$

siis sin α on vastavalt

$$0{,}34, \quad 0{,}71, \quad 0{,}94.$$

Me ütleme, et sin α oleneb nurgast α ehk

sin α on nurga α funktsioon.

Samuti on $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$ nurga α funktsioonid. Kõiki neid nelja funktsiooni me nimetame nurgafunktsioonideks ehk trigonomeetrilisteks funktsioonideks. Seejuures funktsioone $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ nimetatakse teineteise kaasfunktsioonideks; samuti on $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$ teineteise kaasfunktsioonid.

Vaatleme nüüd, kuidas saab nurga ühe funktsiooni järgi, näiteks nurga siinuse järgi, arvutada teisi nurgafunktsioone.

Võrdused

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

ja

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

võimaldavad leida nurga ühe funktsiooni järgi selle kaasfunktsiooni. Selleks et oleks võimalik ühe funktsiooni järgi leida kõik ülejäänud funktsioonid, on vaja võrdust, mis seob kaht esimest funktsiooni kahe viimasega.

Selle võrduse leiame järgmiselt: et

$$\tan \alpha = \frac{a}{b},$$

ning

$$a = c \sin \alpha,$$

ja

$$b = c \cos \alpha,$$

siis

$$\tan \alpha = \frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha}$$

ehk

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Tulemuse sõnastame järgmiselt:

teravnurga tangens võrdub nurga siinuse ja koosinuse jagatisega.

Samal viisil saame näidata, et

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

see tähendab:

teravnurga kootangens võrdub nurga koosinuse ja siinuse jagatisega.

Võrdustega

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

avalduvaid seoseid nimetatakse nurgafunktsioonide vahelisteks põhiseosteks. Need seosed võimaldavad ühe nurgafunktsiooni järgi arvutada ülejäänud kolm funktsiooni.

Ülesanne 1. Arvuta $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$, kui $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

Lahendus. a) Asendades võrduses

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$\sin \alpha$ tema väärtusega $\frac{3}{5}$, leiame, et

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

b) Asendades võrduses

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ nende väärtustega, saame

$$\tan \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$$

ehk

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

c) Asendades võrduses

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$\cos \alpha$ ja $\sin \alpha$ nende väärtustega, saame

$$\cot \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

ehk

$$\cot \alpha = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \cdot$$

Ülesanne 2. Arvuta $\sin \alpha$; $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$, kui $\cot \alpha = 1\frac{3}{4} \cdot$

Lahendus. a) Asendades võrduses

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$\cot \alpha$ tema väärtusega $1\frac{3}{4}$, saame

$$\tan \alpha = \frac{1}{1\frac{3}{4}}$$

ehk

$$\tan \alpha = \frac{4}{7} \cdot$$

b) Võrdusest

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

järeldame, et

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Asendades viimases võrduses $\tan \alpha$ tema väärtusega $\frac{4}{7}$, saame

$$\sin \alpha = \frac{4}{7} \cdot \cos \alpha.$$

Asendades võrduses

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$\sin \alpha$ avaldisega $\frac{4}{7} \cos \alpha$, saame

$$\frac{16}{49} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

ehk

$$\frac{65}{49} \cos^2 \alpha = 1.$$

Siit leiame, et

$$\cos^2 \alpha = \frac{49}{65}$$

ja

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{49}{65}}$$

ehk

$$\cos \alpha = \frac{7}{65} \sqrt{65}.$$

c) Asendades varemleitud võrduses

$$\sin \alpha = \frac{4}{7} \cos \alpha$$

$\cos \alpha$ tema leitud väärtusega, saame

$$\sin \alpha = \frac{4}{65} \sqrt{65}.$$

Ülesanded.

116. Nurga siinus on 0,2. Arvuta sama nurga tangens. Kontrolli tulemust tabelite järgi.

117. Nurga koosinus on 0,7. Arvuta sama nurga tangens ja kootangens.

118. Nurga tangens on 2. Arvuta sama nurga siinus ja koosinus.

119. Nurga kootangens on 3. Arvuta sama nurga siinus ja koosinus.

120. Olgu teada, et $\cos \varphi = c$. Avalda $\sin \varphi$, $\tan \varphi$ ja $\cot \varphi$ suuruse c kaudu.

121. Näita, et on kehtivad järgmised samasused:

1. $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

2. $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}=1-\cos\alpha$

3. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{\cot^2\alpha}=1$

4. $\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}=1$

5. $\sin\alpha=\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

6. $\cot\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cot\alpha-\cos\alpha}$

7. $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

122. Avalda murd $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ funktsiooni $\tan\alpha$ kaudu.

123. Avalda vahe $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$ funktsiooni $\sin\alpha$ kaudu.

124. Avalda summa $\tan\alpha+\cot\alpha$ funktsioonide $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ kaudu.

125. Olgu $\tan\alpha=\frac{5}{4}$. Arvuta avaldise $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ väärtus.

126. Lihtsusta järgmised avaldised:

1. $\cos\alpha\cdot\tan\alpha$
2. $\cot\alpha\cdot\sin\alpha$
3. $\tan\alpha:\cot\alpha$
4. $\sin\alpha:\tan\alpha$
5. $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$
6. $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$
7. $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$
8. $\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$
9. $\sqrt{1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\tan\alpha}$
10. $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

§ 15. Täisnurkse kolmnurga lahendamine.

Lahendada kolmnurk tähendab leida selle antud elementide põhjal kõik teised elemendid. Et kolmnurk oleks lahenduv, selleks peavad olema antud niisugused elemendid, millega see kolmnurk on määratud. Täisnurkne kolmnurk on määratud, kui sellest on teada kaks elementi, millede hulgas peab olema vähemalt üks külg. Seega on täisnurkse kolmnurga lahendamine võimalik, kui on antud:

1. teravnurk ja hüpotenuus;
2. teravnurk ja üks kaatet;
3. kaks kaatetit;
4. kaatet ja hüpotenuus.

Igal juhul toimub kolmnurga lahendamine nurgafunktsioonide definitsioonide või neist järelduvate seoste põhjal; nii esimesed kui teised on käsiteldud eelmistel lehekülgedel. Lahendamisel püüame

1. iga otsitava elemendi arvutada andmete põhjal,
2. kontrollida lahendeid, määrates neid andmeist mõnel teisel arvutusteel.

Ülesanne 1. Täisnurkse kolmnurga üks nurk on 57^0 ja hüpotenuus on 9,5 cm. Arvuta teine teravnurk ja kaatetid.

Lahendus. Arvutamiseks kasutame neljakohalisi tabeleid. Arvutussammud nummerdame järjest 1., 2., 3. jne. Tähistame antud nurga tähega α ja hüpotenuusi tähega c. Siis otsitavad on: nurk β ning kaatetid a ja b.

1. $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 57^0 = 33^0.$
2. $a = c \sin \alpha = 9{,}5 \cdot \sin 57^0 = 9{,}5 \cdot 0{,}8387 = 7{,}968.$
3. $b = c \cos \alpha = 9{,}5 \cdot \cos 57^0 = 9{,}5 \cdot 0{,}5446 = 5{,}174.$

K o n t r o l l i k s kasutame Pythagorase lauset:

$$\begin{array}{r} a^2 = 7{,}968^2 = 63{,}49 \\ b^2 = 5{,}174^2 = 26{,}77 \\ \hline a^2 + b^2 = 90{,}26 \\ c^2 = 9{,}5^2 = 90{,}25 \\ \hline \text{Vahe} = 0{,}01 \end{array}$$

Vahe $a^2 + b^2$ ja c^2 vahel on seletatav tabelite andmete ligikaudsusega ja lahendamisel tehtud ümmardamistega.

V a s t u s. Kolmnurga kaatetid on 7,968 cm ja 5,174 cm ning teine teravnurk on 33^0.

Ü l e s a n n e 2. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 52,3 m ja tema vastasnurk on $68{,}4^0$. Arvuta teine teravnurk, teine kaatet ja hüpotenuus.

L a h e n d u s. Tähistame antud kaateti tähega a ja tema vastasnurga tähega α. Siis on otsitavad: nurk β, kaatet b ja hüpotenuus c.

1. $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 68{,}4^0 = 21{,}6^0$.
2. $b = a \tan \beta = 52{,}3 \cdot \tan 21{,}6^0 = 52{,}3 \cdot 0{,}3959 = 20{,}71$.
3. $c = a : \sin \alpha = 52{,}3 : \sin 68{,}4^0 = 52{,}3 : 0{,}9298 = 56{,}25$.

K o n t r o l l i k s kasutame näiteks seost

$$b = c \sin \beta.$$

Selle abil leiame, et

$$b = 56{,}25 \cdot \sin 21{,}6^0 = 56{,}25 \cdot 0{,}3681 = 20{,}71.$$

Seega kontroll osutab, et ülesanne on õieti lahendatud.

V a s t u s. Kolmnurga teine teravnurk on $21{,}6^0$, teine kaatet on 20,71 m ja hüpotenuus on 56,25 m.

Ü l e s a n n e 3. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 19 cm ja 27 cm. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad ja hüpotenuus?

L a h e n d u s. Tähistame väiksema kaateti tähega a ja suurema tähega b. Otsitavad on: nurgad α ja β ning hüpotenuus c.

1. $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{19}{27} = 0{,}7037,$

$\alpha = 35^0 08'.$

2. $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 35^0 08' = 54^0 52'.$

3. $c^2 = a^2 + b^2 = 19^2 + 27^2 = 1090,$

$c = \sqrt{1090} = 33{,}02.$

K o n t r o l l i k s kasutame näiteks seost

$$b = c \cos \alpha,$$

mille abil leiame, et

$$b = 33{,}02 \cdot \cos 35^0 08' = 33{,}02 \cdot 0{,}8178 = 27{,}00.$$

Seega ülesande lahendus osutub õigeks.

V a s t u s. Kolmnurga teravnurgad on $35^0 08'$ ja $54^0 52'$ ning hüpotenuus on 33,02 cm.

Ü l e s a n n e 4. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 0,14 m ja üks kaatet on 0,093 m. Kui suured on kolmnurga teravnurgad ja teine kaatet?

L a h e n d u s. Tähistame antud kaateti tähega b ja hüpotenuusi tähega c. Otsitavad on siis nurgad α ja β ning kaatet a.

1. $\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{0{,}093}{0{,}14} = 0{,}6643,$

$\beta = 41^0 38'.$

2. $\alpha = 90^0 - \beta = 90^0 - 41^0 38' = 48^0 22'.$

3. $a = c \sin \alpha = 0{,}14 \cdot \sin 48^0 22' =$

$= 0{,}14 \cdot 0{,}7474 = 0{,}1046.$

K o n t r o l l i k s kasutame Pythagorase lauset:

$$a^2 = 0{,}1046^2 = 0{,}01095$$
$$b^2 = 0{,}093^2 \quad = 0{,}00865$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$a^2 + b^2 \quad = 0{,}01960$$
$$c^2 = 0{,}14^2 = 0{,}0196.$$

Seega osutub ülesande lahendus õigeks.

V a s t u s. Kolmnurga teravnurgad on $41^0 38'$ ja $48^0 22'$ ning teine kaatet on 0,1046 m.

Ülesanded.

127. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 8,5 m ja üks teravnurk on 32^0. Arvuta selle kolmnurga teine teravnurk, mõlemad kaatetid ja pindala.

128. Ristküliku diagonaal on 7,56 m ja moodustab ühe küljega nurga $25^0 48'$. Arvuta ristküliku ümbermõõt.

129. Ristküliku diagonaal on 6,28 cm ja moodustab ühe küljega nurga $38^0 20'$. Arvuta ristküliku pindala.

130. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 0,486 m ja selle lähisnurk on $28{,}7^0$. Arvuta kolmnurga teine teravnurk, teine kaatet, hüpotenuus ja pindala.

131. Kirikutorni vari rõhtsale kirikuesisele platsile on 36 m pikk. Päikesekiired moodustavad maapinnaga 42^0-se nurga. Kui kõrge on kirikutorn? Missuguse nurga päikesekiired moodustavad püstsihiga?

132. Vabrikukorstna kõrguse määramiseks asetati teodoliit korstnast 56 m kaugusel asetsevale 1,8 m kõrgele kivisambale ja mõõdeti korstna tipu kõrgusnurk. Mõõtmine andis 36^0. Arvuta korstna kõrgus.

133. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 160 cm ja selle vastasnurk on 70^0. Arvuta kolmnurga teine teravnurk, teine kaatet, hüpotenuus ja pindala.

134. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 0,084 m ja 0,176 m. Arvuta selle kolmnurga hüpotenuus, teravnurgad ja pindala.

135. Täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused meetrites on $a = 0{,}934$ ja $b = 1{,}340$. Määra nurk α üks kord tan α, teine kord sin α kaudu.

136. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 12,75 m ja hüpotenuus on 20,58 m. Arvuta selle kolmnurga teine kaatet, mõlemad teravnurgad ja pindala.

137. Lahenda täisnurkne kolmnurk, teades, et üks tema kaateteist on b ja täisnurga tipust hüpotenuusile joonestatud kõrgus on h.

Näide. $b = 35{,}47$; $h = 14{,}29$. Arvuta kolmnurga elemendid.

138. Ümber punkti O on joonestatud ringjoon raadiusega 3 cm. Kaugusel 10 cm punktist O on võetud punkt P ning sellest on joonestatud puutujad PA ja PB ringjoonele. Määra nurga OAB siinus ja leia punkti O kaugus lõigust AB.

139. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 32{,}46$ cm, kaatet $b = 18{,}40$ cm. Määra nurk α tema koosinuse kaudu.

140. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 4{,}56$, kaatet $a = 2{,}88$. Määra nurk α üks kord tan α, teine kord sin α kaudu.

141. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 32,54 m ja teravnurk on $26^0 42'$. Arvuta kolmnurga pindala.

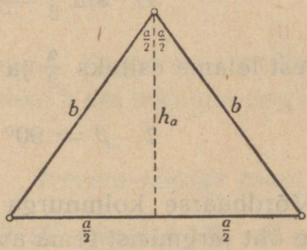
142. Lahenda järgmised täisnurksed kolmnurgad:

	a	b	c	α	β	S
1.			12		42^0	
2.			10	25^0		
3.	20				66^0	
4.	70			32^0		
5.	32		40			
6.		10	26			
7.	6	9				
8.	7	24				
9.						100
10.		15		78^0		125

§ 16. Võrdhaarse kolmnurga lahendamine.

Tähistame võrdhaarse kolmnurga aluse tähega a, haara tähega b, tipunurga tähega α ja alusnurga tähega β (joonis 10). See kolmnurk on määratud, kui on antud:

1. üks nurk ja haar,
2. üks nurk ja alus,
3. haar ja alus.



Joonis 10.

Võrdhaarse kolmnurga lahendamiseks tükeldame ta kõrgusega h_a kaheks täisnurkseks kolmnurgaks ja lahendame viimased.

1. juhtum. Kui on antud haar b ja tipunurk α, siis

$$1.\quad \beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2};$$

$$2.\quad \frac{a}{2} = b \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$

seega

$$a = 2b \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

2. juhtum. Kui on antud alus a ja alusnurk β, siis

$$1. \quad \frac{\alpha}{2} = 90^0 - \beta,$$

seega

$$\alpha = 180^0 - 2\beta;$$

$$2. \quad \cos \beta = \frac{\frac{a}{2}}{b},$$

seega

$$b = \frac{\frac{a}{2}}{\cos \beta} = \frac{a}{2 \cos \beta}.$$

3. juhtum. Kui on antud alus a ja haar b, siis

$$1. \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b},$$

millest leiame esiteks $\frac{\alpha}{2}$ ja siis α;

$$2. \quad \beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

Võrdhaarse kolmnurga kõrguse arvutamiseks kasutame üht järgmisist tema avaldisist:

$$h_a = \frac{a}{2} \cdot \tan \beta = b \cdot \sin \beta = b \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Ülesanded.

143. Võrdhaarse kolmnurga haarad on 7,2 cm ja moodustavad teineteisega nurga 66^0. Arvuta kolmnurga alus ja pindala.

144. Võrdhaarse kolmnurga haarad on 19,2 cm, alusnurk on $37^0 42'$. Arvuta kolmnurga alus, tipunurk ja pindala.

145. Võrdhaarse kolmnurga alus on 41 mm ja tipunurk $114{,}2^0$. Leia teised kolmnurga elemendid.

146. Võrdhaarse kolmnurga haarad on 7,5 dm, alus on 6 dm. Lahenda kolmnurk.

147. Kui pikk kõõl vastab kesknurgale $33^0 24'$ ringis, mille raadius on 6 cm?

148. Kreissae läbimõõt on 54 cm; sael on 128 hammast. Kui suur on kahe teineteisele järgneva hamba teravikkude vahe?

149. Olgu ringjoone raadius r cm. Kui pikk on selle ringjoone kõõl, mis vastab kesknurgale φ^0?

Näide. $r = 100$; $\varphi = 20, 40, 60, 100, 130, 150$. Arvuta nõutavad kõõlu pikkused.

150. Kui pikk peaks olema ringjoone raadius, et φ-kraadisele kesknurgale vastaks k cm pikkune ringjoone kõõl?

Näide. $\varphi = 50$, $k = 1$. Arvuta nõutav raadius.

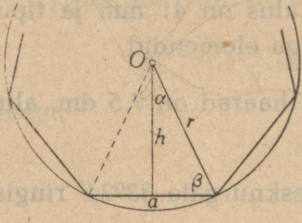
151. Ringi kesknurgale $57^0 18'$ vastab kõõl, mille pikkus on 8 cm. Kui pikk on ringi raadius?

152. On antud ringjoone raadius 0,0178 ja selle ringjoone kõõl 0,0094. Leia kesknurk, mis vastab sellele kõõlule.

153. Kui suur kesknurk vastab 8,7 cm pikkusele kõõlule ringis, mille raadius on 9,2 cm?

§ 17. Korrapärase hulknurga lahendamine.

Tähistame korrapärase n-nurga külje sümboliga a, ümberjoonestatud ringjoone raadiuse sümboliga r ja apoteemi sümboliga h (joonis 11). Kui peale n on antud üks elementidest a, h, r, siis on korrapärane hulknurk määratud ja järelikult ka lahenduv. Lahendamine toimub täisnurkse kolmnurga abil, mille tippudeks on hulknurga keskpunkt, külje otspunkt ja külje keskpunkt (joonis 11). Keskpunkti juures olev selle kolmnurga nurk



Joonis 11.

$$\alpha = \frac{360^0}{2\,n} = \frac{180^0}{n},$$

sest keskpunkti O ühendamisel kõikide külgede otspunktidega ja nende külgede keskpunktidega jaguneb täispööre punkti O ümber $2n$ võrdseks osaks.

Ülesanded.

154. Avalda korrapärase viisnurga apoteem, ümberjoonestatud ringjoone raadius ja pindala selle hulknurga külje kaudu.

155. Arvuta korrapärase üheksanurga apoteem, külg ja pindala, kui selle üheksanurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 4,5 cm.

156. Ringisse, mille raadius on 8,4 cm, on kujutatud korrapärane 15-nurk. Leia selle hulknurga külg ja pindala.

157. Ringisse, mille raadius on 6 cm, on kujutatud korrapärane seitsenurk. Leia selle hulknurga külg ja pindala.

158. Korrapärase viisnurga külg on 20 cm. Arvuta viisnurga sisse ja ümber joonestatud ringjoonte raadiused.

159. Korrapärase kaheksanurga külg on 32 cm. Arvuta sisse- ja ümberjoonestatud ringjoonte raadiused.

160. Korrapärase viisnurga apoteem on 8 cm. Arvuta viisnurga külg.

161. Korrapärase kümnenurga pindala on 96 cm^2. Arvuta kümnenurga ümber joonestatud ringjoone raadius.

162^1. Ringisse, mille läbimõõt on *d*, on joonestatud korrapärane 60-nurk. Arvuta selle hulknurga ümbermõõt. Mitme protsendi võrra erineb see ümbermõõt ringjoone pikkusest?

162^2. Ringi ümber, mille läbimõõt on *d*, on joonestatud korrapärane 60-nurk. Arvuta selle hulknurga ümbermõõt. Mitme protsendi võrra erineb see ümbermõõt ringjoone pikkusest?

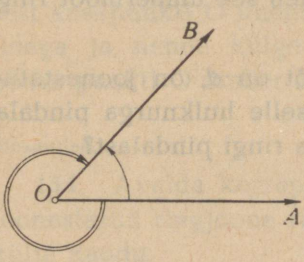
162^3. Ringisse, mille läbimõõt on *d*, on joonestatud korrapärane 96-nurk. Arvuta selle hulknurga pindala. Mitme protsendi võrra erineb see ringi pindalast?

Peatükk II.

Nurgafunktsioonide muutumine.

§ 18. Positiivne nurk ja negatiivne nurk.

Algebra kursusest teame, et paljude küsimuste lahendamisel osutub vajalikuks laiendada lõigu mõistet ja vaadelda kõrvuti suunata lõikudega ka suunatud lõike. Analoogiliselt sellega on trigonomeetrias tulus laiendada nurga mõistet ja vaadelda ka nurki relatiivsete suurustena.



Joonis 12.

Nurga mõiste laiendamiseks vaatleme tasapinnal oma otspunkti ümber pöörlevat kiirt. Kui selle pöörlemise juures kiir on jõudnud asendist OA asendisse OB (joonis 12), siis on ta pöörelnud kas ühe noolega tähistatud suunas või kahe noolega tähistatud suunas. Loeme esimese pöörlemise suuna p o s i t i i v s e k s, teise n e g a t i i v s e k s. Negatiivses suunas pöörlevad näiteks kellaosutid. Seega

positiivseks pöörlemise suunaks loeme joonisel seda suunda, mis on vastupidine kellaosutite pöörlemise suunaga.

Pöörde suurust mõõdetakse pöördenurga abil. Et nurga kirjutusest oleks näha ka pöörlemise suund, lepime kokku järgmiselt:

pöörlemisel tekkiva nurga suurust loeme positiivseks, kui pöörlemine toimub positiivses suunas, ja negatiivseks, kui pöörlemine toimub negatiivses suunas.

Negatiivseid nurki märgime, samuti kui negatiivseid arve, miinusmärgiga nurga kraadide arvu ees; seega kella suur osuti pöördub veerand tunniga nurga võrra, mille suurus on -90^0, ja poole tunniga nurga võrra, mille suurus on -180^0.

Nurga haaradest nimetame e s i m e s e k s haaraks selle haara, millest kiir alustab oma pöörlemist, ja t e i s e k s haaraks selle haara, millel kiire pöörlemine lõpeb. Nurga tähistamisel kolme tähe abil kirjutame esikohale tähe, mis asetseb nurga esimesel haaral. Joonisel 12 on üks nurk märgitud ühe, teine nurk kahe noolega. Nii üht kui teist nurka tuleks kolme tähega kirjutada kujul $\widehat{AOB}$. Seega sümbol $\widehat{AOB}$ märgib üldiselt kaht nurka, milledest üks on positiivne, teine negatiivne ja mille absoluutväärtuste summa on 360^0. Et vältida kahtlust selle kohta, kumba kahest nimetatud nurgast sümbol $\widehat{AOB}$ tähendab, lepime kokku nii, et sümbol $\widehat{AOB}$ ja samuti sümbolid α, β, γ, . . . tähendavad ikka positiivseid nurki, kui teisiti pole öeldud.

Ülesanded.

163. Kummalt pooluselt vaadatuna on maakera ümber telje pöörlemise suund positiivne?

164. Missuguses suunas näeb vaatleja pöörlevat paremalt vasakule mööduva sõiduki rattaid?

165. Missuunalist pöörlemist kujutab pöörangu välisel rajal liiklemismääruste kohaselt sõitva sõiduki liikumine?

§ 19. Nurgad kuni 360^0 ja üle selle.

Olgu *OA* pöörleva kiire lähteasend ja *OB* see asend, millesse ta jõuab peale pöördumist positiivses suunas 45^0 võrra (joonis 13). Kui kiir pöörleb edasi positiivses suunas ja läbib järjekorras asendid

$$OC \qquad OD \qquad OA,$$

siis ütleme, et ta on pöördunud nurga võrra, mille suurus on vastavalt

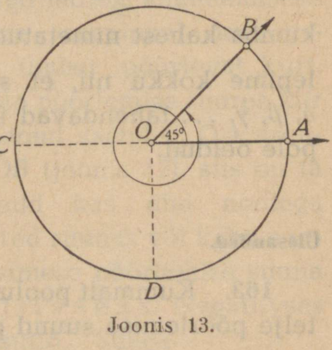
$$180^0 \qquad 270^0 \qquad 360^0.$$

Jätkaku kiir samas suunas pöörlemist ja jõudku uuesti asendisse *OB*. Nurk, mille võrra ta nüüd on pöördunud, on suurem kui 360^0: me ütleme, et see nurk on

$$360^0 + 45^0 \text{ ehk } 405^0.$$

Kui kiir jätkab samas suunas pöörlemist, läbib teiskordselt oma esialgse asendi ja jõuab kolmandat korda asendisse *OB*, siis ütleme, et on tekkinud nurk, mille suurus on

$$2 \cdot 360^0 + 45^0 \text{ ehk } 765^0.$$



Joonis 13.

Nii nurga mõistet laiendades saab kõnelda kuitahes suurtest positiivsetest nurkadest. Kuid samuti võib ka negatiivse nurga absoluutväärtus olla kuitahes suur: kui kiir *OA* pöörleb negatiivses suunas ja läbib järjekorras punktid (joonis 13)

$$D, \qquad C, \qquad B, \qquad A, \qquad D, \qquad C,$$

siis on tekkinud nurk, mille suurus on vastavalt

$$-90^0, \quad -180^0, \quad -315^0, \quad -360^0, \quad -450^0, \quad -540^0.$$

Ülesanded.

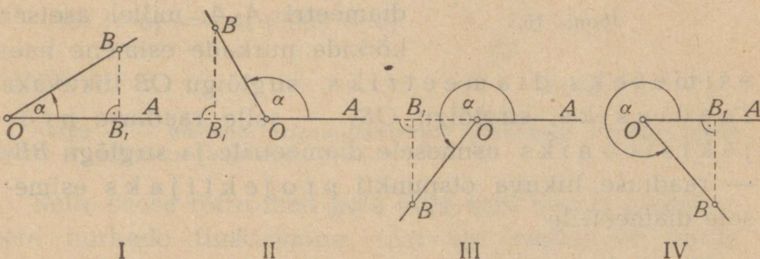
166. Kui suur on põhjapooluselt vaadatuna nurk, mille võrra pöördub maakera ekvaatori raadius $2\frac{1}{2}$ ööpäeva vältel? Kui suur on see nurk lõuna pooluselt vaadatuna?

167. Kui suure nurga võrra pöördub minutiosuti $1\frac{3}{4}$ tunni vältel?

168. Kui suure nurga võrra pöördub tunniosuti 7 tunni vältel?

§ 20. Nurgafunktsioonide definitsioonid mistahes nurga jaoks.

Eespool-antud nurgafunktsioonide definitsioonid on kehtivad ainult teravnurkade jaoks, sest täisnurkses kolmnurgas, mille abil need definitsioonid anti, esinevad (peale täisnurga) ainult teravnurgad. Et defineerida nurgafunktsioone mistahes nurga puhul, selleks toimime järgmiselt:



Joonis 14.

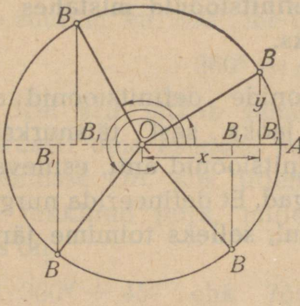
Joonestame mistahes positiivse nurga AOB (joonis 14 I, II, III, IV), valime selle nurga teisel haaral mingi punkti B ja ehitame sellest punktist ristlõigu BB_1 nurga esimesele haarale või selle pikendusele üle tipu O. Varemini antud trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide kohaselt saame juhul I, et

$$\sin \alpha = \frac{BB_1}{OB} \qquad \cos \alpha = \frac{OB_1}{OB}$$

$$\tan \alpha = \frac{BB_1}{OB_1} \qquad \cot \alpha = \frac{OB_1}{BB_1}.$$

Nendesamade võrdustega defineerime trigonomeetrilised funktsioonid ka juhtudel II, III, IV.

Sirglõigud BB_1 ja OB_1 on juhul I nurga α vastaskaatetiks ja lähiskaatetiks, ei ole seda aga enam juhtudel II, III ja IV. Leiame neile uued sobivad nimetused. Selleks esitame nurgad joonisest 14 kõik ühisel joonisel, võttes OA ühiseks haaraks ja OB pikkused üksteisega võrdseiks (joonis 15). Kõigi nelja nurga puhul punkt B asetseb siis ringjoonel raadiusega OB. Nimetame nüüd diameetri A_1A, millel asetseb kõikide nurkade esimene haar esimeseks diameetriks, sirglõigu OB liikuvaks raadiuseks, sirglõigu OB_1 — selle raadiuse projektsiooniks esimesele diameetrile ja sirglõgu BB_1 — raadiuse liikuva otspunkti projektijaks esimesele diameetrile.



Joonis 15.

Kasutades neid nimetusi saame järgmised üldised trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid:

nurga siinus on projektija ja raadiuse suhe;
nurga koosinus on projektsiooni ja raadiuse suhe;
nurga tangens on projektija ja projektsiooni suhe;
nurga kootangens on projektsiooni ja projektija suhe.

Tähistades raadiust tähega r, selle projektsiooni esimesele diameetrile tähega x ja raadiuse otspunkti projektijat tähega y, võime kirjutada:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}, \qquad \cot \alpha = \frac{x}{y}.$$

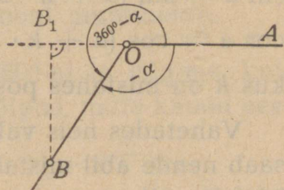
Kui vaadeldav nurk on negatiivne, siis defineerime selle nurga funktsioone täpselt samuti nagu positiivse nurga puhul (joonis 16):

$$\sin(-\alpha) = \frac{BB_1}{OB}, \qquad \cos(-\alpha) = \frac{OB_1}{OB}$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{BB_1}{OB_1}, \qquad \cot(-\alpha) = \frac{OB_1}{BB_1}$$

Needsamad jagatised on aga ühtlasi positiivse nurga $360^0 - \alpha$ funktsioonid (joonis 16); järelikult

$$\sin(-\alpha) = \sin(360^0 - \alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(360^0 - \alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = \tan(360^0 - \alpha)$$
$$\cot(-\alpha) = \cot(360^0 - \alpha).$$



Joonis 16.

Seega:

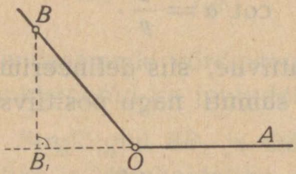
nurga $-\alpha$ mistahes trigonomeetriline funktsioon võrdub nurga $360^0 - \alpha$ sellesama funktsiooniga.

Selle seose tõttu meil pole vaja eriti uurida negatiivsete nurkade funktsioone, sest iga negatiivse nurga funktsiooni saame avaldada positiivse nurga funktsioonina.

N ä i t e d.

1. $\tan(-213^0) = \tan(360^0 - 213^0) = \tan 147^0$.
2. $\cos(-316^0) = \cos(360^0 - 316^0) = \cos 44^0$.

Ka siis, kui nurk ületab 360^0, jätame kehtima funktsioonide $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$ jaoks antud definitsioonid. Seejuures saab kõikide nende nurkade funktsioone avaldada 360^0-st väiksemate nurkade funktsioonide abil. Olgu AOB kas positiivne või negatiivne nurk, mille absoluutväärtus on väiksem 360^0-st (joonis 17). Kui selle nurga haara OB lasta pöörelda kas positiivses või negatiivses suunas 360^0 või selle kordse võrra, siis haar OB jõuab endisse asendisse tagasi. Sellest järeldame, et



Joonis 17.

nurgafunktsiooni väärtus ei muutu nurga kasvamisel või kahanemisel 360^0 või selle kordse võrra.

Seda tõde võime sümbolites kirjutada järgmiselt:

$$\sin \alpha = \sin (\alpha + k \cdot 360^0), \quad \tan \alpha = \tan (\alpha + k \cdot 360^0),$$

$$\cos \alpha = \cos (\alpha + k \cdot 360^0), \quad \cot \alpha = \cot (\alpha + k \cdot 360^0),$$

kus k on mistahes positiivne või negatiivne täisarv.

Vahetades neis valemeis paremad pooled vasematega, saab nende abil mistahes nurga funktsiooni taandada 360^0-st väiksema nurga funktsiooniks. Selleks tuleb antud nurk avaldada kujul

$$k \cdot 360^0 + \alpha,$$

kus k on positiivne või negatiivne täisarv ja α on 360^0-st väiksem positiivne nurk, ning rakendada taandamiseks varemini leitud valemeid.

Näited.

1. $\cos 1715^0 = \cos (4 \cdot 360^0 + 275^0) = \cos 275^0.$
2. $\tan (-2538^0) = \tan (-8 \cdot 360^0 + 342^0) =$
$= \tan 342^0.$

Funktsioonide taandamise võimalus vabastab meid vajadusest eriti uurida nurki üle 360^0 ja nende funktsioone; seepärast piirdume järgmistel lehekülgedel ainult 360^0-st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonide uurimisega.

Ülesanded.

169. Taanda järgmised funktsioonid positiivsete nurkade funktsioonideks:

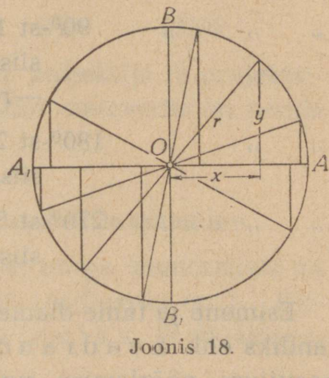
$\sin(-20^0)$	$\cos(-100^0)$	$\tan(-180^0)$	$\cot(-250^0)$
$\sin(-73^0)$	$\cos(-219^0)$	$\tan(-324^0)$	$\cot(-47^0)$.

170. Taanda järgmised funktsioonid 360^0-st väiksemate nurkade funktsioonideks:

$\sin 750^0$	$\cos 1100^0$	$\tan 1560^0$	$\cot 2342^0$
$\sin(-800^0)$	$\cos(-935^0)$	$\tan(-3240^0)$	$\cot(-1650^0)$.

§ 21. Projektija ja projektsiooni muutumine.

Laseme nurga kasvada 0^0-st 360^0-ni ja jälgime, kuidas seejuures muutuvad need sirglõigud, mille kaudu eespool defineerisime nurgafunktsioone. On selge, et üks neist sirglõikudest, nimelt raadius, oma pikkuselt ei muutu. Raadiuse loeme ikka positiivseks. Joonisest selgub, et projektija y pikkus muutub 0-st r-ni, kusjuures ta asetseb kord ülalpool esimest diameetrit A_1A, kord allpool seda (joonis 18).



Joonis 18.

Projektija loeme positiivseks, kui ta asetseb ülalpool esimest diameetrit, ja negatiivseks, kui ta asetseb allpool esimest diameetrit.

Projektija muutub seega järgmiselt:

kui nurk kasvab 0^0-st 90^0-ni,
siis projektija kasvab 0-st r-ni;

" " " 90^0-st 180^0-ni,
siis projektija kahaneb r-st 0-ni;

" " " 180^0-st 270^0-ni,
siis projektija kahaneb 0-st $-r$-ni;

" " " 270^0-st 360^0-ni,
siis projektija kasvab $-r$-st 0-ni.

Joonisest selgub, et ka projektsiooni pikkus on muutuv, kusjuures projektsioon kord asetseb paremal pool teisest diameetrist B_1B ja kord vasakul pool sellest.

Projektsiooni loeme positiivseks, kui ta asetseb paremal pool teisest diameetrist, ja negatiivseks, kui ta asetseb vasakul pool teisest diameetrist.

Joonisest 18 näeme, et projektsioon muutub järgmiselt:

kui nurk kasvab 0^0-st 90^0-ni,
siis projektsioon kahaneb r-st 0^0-ni;

" " " 90^0-st 180^0-ni,
siis projektsioon kahaneb 0-st $-r$-ni;

" " " 180^0-st 270^0-ni,
siis projektsioon kasvab $-r$-st 0-ni;

" " " 270^0-st 360^0-ni,
siis projektsioon kasvab 0-st r-ni.

Esimene ja teine diameeter jaotavad ringi neljaks veerandiks ehk k v a d r a n d i k s. Veerandeid nimetatakse positiivse pöörlemise suuna järjekorras esimeseks, teiseks, kolmandaks ja neljandaks veerandiks. Nurga kohta, mille teine haar asetseb mingis veerandis, ütleme, et ta lõpeb selles veerandis. Näiteks 245^0-se nurga kohta ütleme, et ta lõpeb kolmandas veerandis.

Projektijat ja projektsiooni vaadeldes näeme, et kui nurk lõpeb

I veerandis, siis on projektija ja projektsioon mõlemad positiivsed;

II veerandis, siis on projektija positiivne ja projektsioon negatiivne;

III veerandis, siis on projektija ja projektsioon mõlemad negatiivsed;

IV veerandis, siis on projektija negatiivne ja projektsioon positiivne.

Ülesanded.

171. Mitmendas veerandis lõpevad nurgad:

$120^0 \quad 300^0 \quad 200^0 \quad 24^0 \quad 193^0 \quad 177^0 \quad 275^0$?

172. Missugused on projektija ja projektsiooni märgid järgmiste nurkade puhul:

$160^0 \quad 190^0 \quad 292^0 \quad 348^0 \quad 172^0$?

173. Mitmendas veerandis on projektija ja projektsiooni jagatis positiivne? Mitmendas veerandis on nende jagatis negatiivne?

§ 22. Nurga siinuse ja koosinuse muutumine.

Siinuse ja koosinuse muutumist nurga muutumisel on kõige lihtsam jälgida ringis, mille raadiuseks on 1. Niisugust ringi nimetatakse ühikringiks. Et ühikringis $r = 1$, siis

$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \text{ja} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x.$$

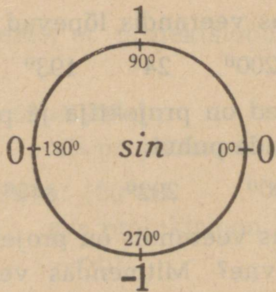
Seega:

ühikringis nurga siinus võrdub projektija mõõtarvuga ja koosinus võrdub projektsiooni mõõtarvuga.

Lugedes nüüd projektija muutumise kirjelduses projektija asemel sin α ja raadiuse r asemel arvu 1, saame järgmise siinuse muutumise kirjelduse:

Kui nurk α kasvab 0^0-st 90^0-ni,
siis sin α kasvab 0-st 1-ni;
" " " " 90^0-st 180^0-ni,
siis sin α kahaneb 1-st 0-ni;
" " " " 180^0-st 270^0-ni,
siis sin α kahaneb 0-st —1-ni;
" " " " 270^0-st 360^0-ni,
siis sin α kasvab —1-st 0-ni.

Seda kirjeldust kujutab skemaatiliselt joonis 19.



Joonis 19.

Lugedes projektsiooni muutumise kirjelduses projektsiooni asemel cos α ja raadiuse r asemel arvu 1, saame järgmise koosinuse muutumise kirjelduse:

Kui nurk α kasvab 0^0-st 90^0-ni,
siis cos α kahaneb 1-st 0-ni;
" " " " 90^0-st 180^0-ni,
siis cos α kahaneb 0-st —1-ni;

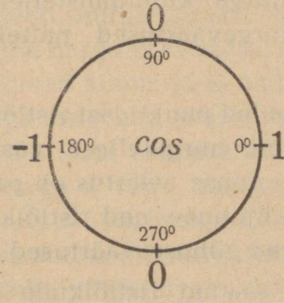
Kui nurk α kasvab 180^0-st 270^0-ni,

siis $\cos \alpha$ kasvab —1-st 0-ni;

" " " " 270^0-st 380^0-ni,

siis $\cos \alpha$ kasvab 0-st 1-ni.

Seda kirjeldust kujutab skemaatiliselt joonis 20.



Joonis 20.

Nagu sin α ja cos α muutumise kirjeldusest selgub, on nende funktsioonide kõige suuremaks väärtuseks 1 ja kõige väiksemaks väärtuseks —1.

Ülesanded.

174. Kui suured on järgmiste sümbolite väärtused:

$\sin 0^0 \quad \sin 90^0 \quad \sin 180^0 \quad \sin 270^0 \quad \sin 360^0$

$\cos 0^0 \quad \cos 90^0 \quad \cos 180^0 \quad \cos 270^0 \quad \cos 360^0$?

175. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

$$3 \cos 0^0 - 4 \sin 270^0 + 5 \cos 180^0$$

$$\cos 90^0 \cos 270^0 - \sin 90^0 \sin 270^0.$$

176. Lihtsusta järgmised avaldised:

$$a \sin 0^0 + b \cos 180^0 + c \sin 360^0$$

$$\frac{a^2}{\cos 0^0} + \frac{2ab}{\cos 180^0} + \frac{b^2}{\cos 360^0}$$

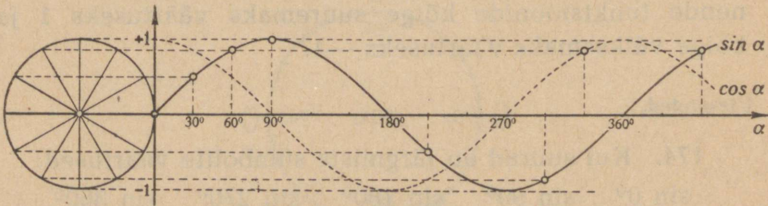
$$\frac{x^2}{\sin^2 90^0} - \frac{2xy}{\cos^2 180^0} + \frac{y^2}{\sin^2 270^0}.$$

§ 23. Nurga siinuse ja koosinuse graafik.

Hea ülevaate nurgafunktsioonide muutumisest saame nende funktsioonide graafikutest.

Nurga siinuse graafiku joonestamiseks

1. märgime nurga kujutamisteljel kohaselt valitud mõõdus nurgaväärtused näiteks iga 30^0 järel (joonis 21);
2. ehitame saadud punktidest ristlõigud kas ülespoole või allapoole nurgateljest, vastavalt sellele, kas kujutatav siinuse väärtus on positiivne või negatiivne, ja kujutame neil ristlõikudel sobivas mõõdus vastavad siinuse väärtused;
3. ühendame saadud ristlõikude otspunktid kõverjoone abil. See kõver näitab meile siinuse muutumist; teda nimetatakse s i i n u s k õ v e r a k s.



Joonis 21.

Selleks et graafiku valmistamiseks vajalikke siinuse väärtusi leida graafiliselt, joonestame ringjoone, mille raadius võrdub siinuse kujutamiseks valitud ühikuga. Sel juhul projektija pikkus ongi sin α ja siinuse graafiku joonestamiseks tarvitseb vaid need projektijad üle kanda nurgatelje vastava punkti juurde ning ühendada nende sirglõikude teised otspunktid kõvera abil.

Selsamal viisil, nagu ülal kirjeldatud, saame joonestada ka koosinuse graafiku; et ühikringis cos α väärtus võrdub projektsiooni pikkusega, siis koosinusgraafiku joonestamisel kanname nurgatelje vastavate punktide juurde projektsioonide pikkused.

§ 24. Nurga tangensi ja kootangensi muutumine.

Ülal nägime, et ühikringis projektija ja projektsioon kujutavad vastavalt nurga siinust ja koosinust. Nende lõikude muutumine nurga kasvamisel näitab, kuidas nurga kasvamisel muutuvad siinus ja koosinus.

Et saada nurga tangensit kujutavat lõiku, joonestame ühikringile puutuja tema esimese diameetri otspunktis A ja pikendame nurga α teise haara selle puutujani (joonis 22). Siis puutuja lõik nurga haarade vahel kujutab nii märgilt kui ka suuruselt nurga tangensit. Kui nurga α teine haar ei lõika puutujat, siis joonestame selle haara pikenduse üle nurga tipu. Nüüd kujutab nurga α tangensit puutuja lõik nurga esimese haara ja teise haara pikenduse vahel. Tõepoolest, kui nurk lõpeb esimeses veerandis, nagu α_1 joonisel 22, siis

$$\tan \alpha_1 = \frac{BB_1}{OB_1} = \frac{B_2A}{OA},$$

sest

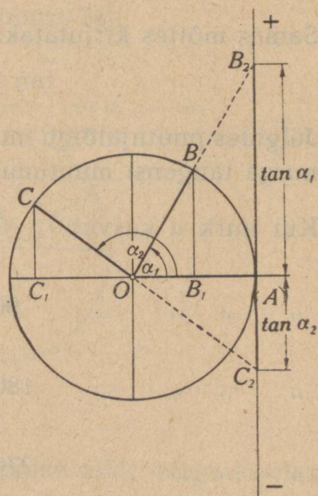
$$\triangle OBB_1 \sim \triangle OB_2A;$$

kuid antud juhul

$$OA = 1$$

ja seega

$$\tan \alpha_1 = B_2A.$$



Joonis 22.

Kui nurk lõpeb teises veerandis, nagu α_2 joonisel 22, siis

$$\tan \alpha_2 = \frac{CC_1}{OC_1} = \frac{C_2A}{OA} = C_2A.$$

Kõnesoleval juhul on tan α_2 negatiivne ja kokkukõlas sellega C_2A asetseb esimesest diameetrist allpool.

Samal viisil arutaksime ka siis, kui nurk α lõpeks kolmandas või neljandas veerandis.

Ülalseletatud viisil ei saa leida nurga 90^0 tangensit, sest siis nurga teine haar pikendamisel ei lõika puutujat, vaid on sellega paralleelne. Küll on aga sellest joonisest näha, missugune on nurga tangens siis, kui nurk vähe erineb 90^0-st: kui nurk on veidi väiksem 90^0-st, siis nurga tangens on väga suur positiivne arv; nurga lähenemisel 90^0-le kasvab tangens suuremaks igast etteantud arvust. Kui nurk on veidi suurem 90^0-st, siis nurga tangens on väga suure absoluutväärtusega negatiivne arv; nurga lähenemisel 90^0-le tangens jääb negatiivseks ja tema absoluutväärtus kasvab suuremaks igast etteantud arvust. Seepärast öeldakse, et tan 90^0 on pluss või miinus lõpmatus, ja kirjutatakse

$$\tan 90^0 = \pm \infty.$$

Samas mõttes kirjutatakse ka, et

$$\tan 270^0 = \pm \infty.$$

Jälgides puutujalõigu muutumist nurga kasvamisel võime nurga tangensi muutumist kirjeldada järgmiselt.

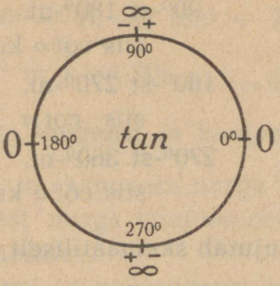
Kui nurk α kasvab 0^0-st 90^0-ni,
siis $\tan \alpha$ kasvab 0-st ∞-ni;

" " " " 90^0-st 180^0-ni,
siis $\tan \alpha$ kasvab $-\infty$-st 0-ni;

" " " " 180^0-st 270^0-ni,
siis $\tan \alpha$ kasvab 0-st ∞-ni;

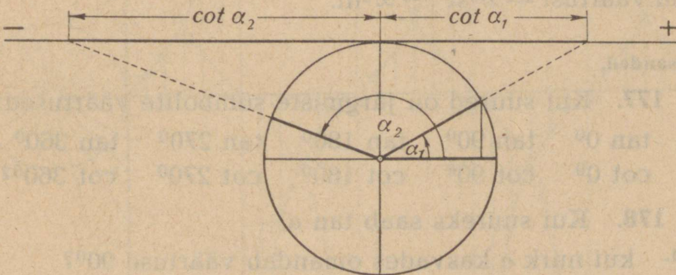
" " " " 270^0-st 360^0-ni,
siis $\tan \alpha$ kasvab $-\infty$-st 0-ni.

Seda kirjeldust kujutab skemaatiliselt joonis 23.



Joonis 23.

Nurga kootangensi väärtuste kujutamine sirglõikudena toimub analoogiliselt tangensi väärtuste kujutamisega, kuid selle erinevusega, et puutuja tuleb joonestada teise diameetri otspunktist, kusjuures paremale suunduvad puutuja lõigud kujutavad positiivseid kootangensi väärtusi ja vasakule suunduvad puutuja lõigud — negatiivseid kootangensi väärtusi (joonis 24).



Joonis 24.

Selle joonise abil saame järgmise pildi nurga kootangensi muutumisest.

Kui nurk α kasvab 0^0-st 90^0-ni,

siis cot α kahaneb ∞-st 0-ni;

" " " " 90^0-st 180^0-ni,

siis cot α kahaneb 0-st $-\infty$-ni;

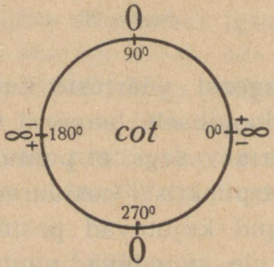
" " " " 180^0-st 270^0-ni,

siis cot α kahaneb ∞-st 0-ni;

" " " " 270^0-st 360^0-ni,

siis cot α kahaneb 0-st $-\infty$-ni.

Seda kirjeldust kujutab skemaatiliselt joonis 25.



Joonis 25.

Seega võib nii tan α kui ka cot α omandada igasuguseid väärtusi $-\infty$-st $+\infty$-ni.

Ülesanded.

177. Kui suured on järgmiste sümbolite väärtused:

tan 0^0 tan 90^0 tan 180^0 tan 270^0 tan 360^0
cot 0^0 cot 90^0 cot 180^0 cot 270^0 cot 360^0?

178. Kui suureks saab tan α,

1. kui nurk α kasvades omandab väärtuse 90^0?
2. kui nurk α kahanedes omandab väärtuse 90^0?

179. Kui suureks saab tan α,

1. kui nurk α kasvades omandab väärtuse 270^0?
2. kui nurk α kahanedes omandab väärtuse 270^0?

180. Lihtsusta jägmised avaldised:

$$2 \sin 90^0 - 4 \tan 0^0$$

$$5 \cos 90^0 - 18 \cos 180^0 + 7 \cot 90^0$$

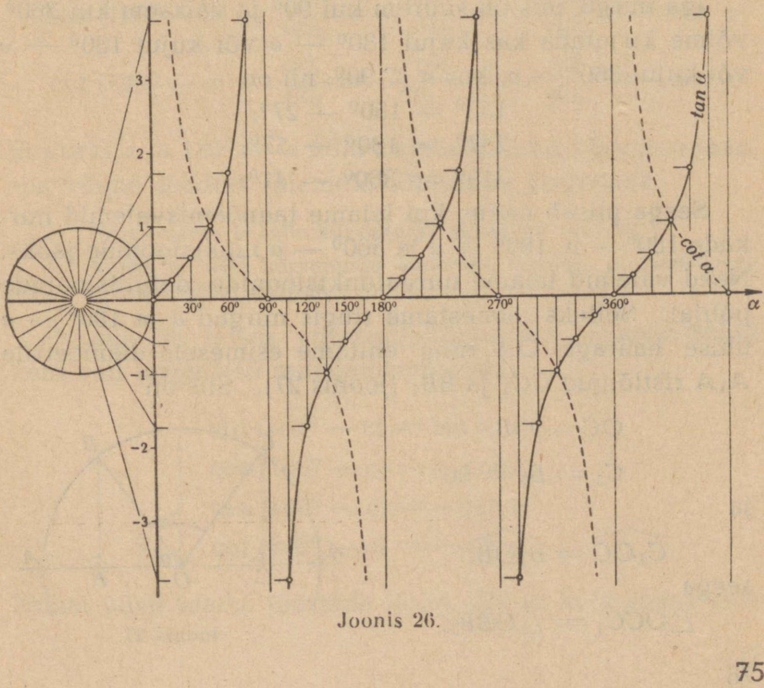
$$f \tan 0^0 + g \cot 90^0 + \frac{h}{\cos 0^0}.$$

§ 25. Nurga tangensi ja kootangensi graafik.

Parema ülevaate saamiseks nurga tangensi ja kootangensi muutumisest nurga muutumisel joonestame nende funktsioonide graafikud.

Valime tangensi ja kootangensi kujutamisel ühikuks 10 mm (joonis 26). Nurgad, mille tangenseid kasutame graafiku joonestamiseks, võtame iga 15^0 tagant.

Tangensi graafiku saamiseks kujutame esiteks kõikide valitud nurkade tangensid puutuja lõikudena ja kanname



Joonis 26.

sealt tangenslõigud nurgatelje vastava punkti juurde. Et 90^0 ja 270^0 juures tangensil lõplikku väärtust ei ole, siis ei ole tangensigraafik pidev joon, nagu siinuse- ja koosinusegraafik, vaid ta katkeb 90^0 ja 270^0 juures.

Kootangensi graafik joonestatakse samuti, nagu tangensi graafik. Ka siin saame kõvera joonestamisel katkeva joone, kuid katkemiskohad on nüüd 0^0, 180^0 ja 360^0 juures.

§ 26. Nurgafunktsioonide taandamine.

Varemini leidsime, et kõikide negatiivsete nurkade ja kõikide 360^0-st suuremate positiivsete nurkade funktsioone saame kergesti avaldada 360^0-st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonide abil. Nüüd näitame, kuidas viimaseid saab avaldada teravnurkade funktsioonide abil.

Iga nurga, mis on suurem kui 90^0 ja väiksem kui 360^0, võime kirjutada kas kujul $180^0 - \alpha$ või kujul $180^0 + \alpha$ või kujul $360^0 - \alpha$, kus $\alpha < 90^0$; nii on

$$153^0 = 180^0 - 27^0;$$
$$237^0 = 180^0 + 57^0;$$
$$319^0 = 360^0 - 41^0.$$

Seega piisab meile, kui leiame taandamisvalemid nurkade $180^0 - \alpha$, $180^0 + \alpha$ ja $360^0 - \alpha$ funktsioonide jaoks. Need valemid leiame nurgafunktsioonide definitsioonide põhjal. Selleks joonestame ringis nurgad α ja $180^0 - \alpha$ ühise haaraga OA ning ehitame esimesele diameetrile A_1A ristlõigud CC_1 ja BB_1 (joonis 27). Siis on

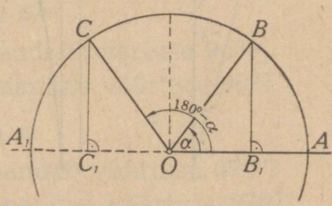
$$OC = OB,$$
$$\hat{C}_1 = \hat{B}_1 = 90^0$$

ja

$$\widehat{C_1OC} = \widehat{B_1OB},$$

seega

$$\triangle OCC_1 = \triangle OBB_1.$$



Joonis 27.

Kolmnurkade OCC_1 ja OBB_1 võrdusest järeldub, et

$$CC_1 = BB_1,$$

kuid

$$OC_1 = -OB_1,$$

sest projektsioon OC_1 on negatiivne.

Kasutades kaht viimast võrdust ja võrdust

$$OC = OB$$

saame nurgafunktsioonide definitsioonide põhjal, et

$$\sin (180^0 - \alpha) = \frac{CC_1}{OC} = \frac{BB_1}{OB} = \sin \alpha;$$

$$\cos (180^0 - \alpha) = \frac{OC_1}{OC} = \frac{-OB_1}{OB} = -\frac{OB_1}{OB} = -\cos \alpha;$$

$$\tan (180^0 - \alpha) = \frac{CC_1}{OC_1} = \frac{BB_1}{-OB_1} = -\frac{BB_1}{OB_1} = -\tan \alpha;$$

$$\cot (180^0 - \alpha) = \frac{OC_1}{CC_1} = \frac{-OB_1}{BB_1} = -\frac{OB_1}{BB_1} = -\cot \alpha.$$

Et nurki α ja $180^0 - \alpha$ võib kujutada kahe kõrvunurgana, siis võime saadud valemeid sõnastada järgmiselt:

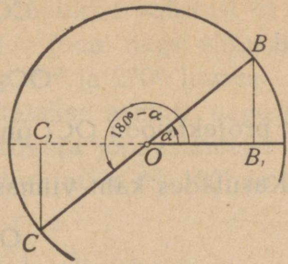
1. **Nurga siinus ja selle kõrvunurga siinus on võrdsed.**
2. **Nurga ja selle kõrvunurga koosinus, tangens ja kootangens erinevad ainult märgi poolest.**

Niisiis on teises veerandis lõppevate nurkade puhul kehtivad järgmised taandamisvalemid:

$$\sin (180^0 - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos (180^0 - \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\tan (180^0 - \alpha) = -\tan \alpha$$
$$\cot (180^0 - \alpha) = -\cot \alpha.$$

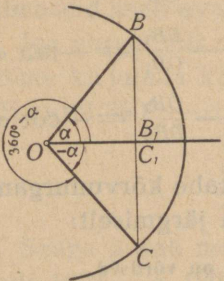
Samal viisil saame tõestada (joon. 28), et kolmandas veerandis lõppevate nurkade puhul on kehtivad järgmised taandamisvalemid:

$$\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180^0 + \alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(180^0 + \alpha) = \cot\alpha.$$



Joonis 28.

Analoogiliselt eelmisega näitame (joon. 29), et neljandas veerandis lõppevate nurkade puhul on kehtivad järgmised taandamisvalemid:



Joonis 29.

$$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360^0 - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(360^0 - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(360^0 - \alpha) = -\cot\alpha.$$

Varemini nägime, et nurga $-\alpha$ funktsioonid on samased nurga $360^0 - \alpha$ funktsioonidega. Kasutades nüüd viimaseid taandamisvalemeid saame

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

Taandamisvalemite meelespidamiseks paneme tähele, et

iga nurga $180^0 - \alpha$, $180^0 + \alpha$ ja $360^0 - \alpha$ funktsioon avaldub nurga α samanimelise funktsioonina; märgi määrab veerand, milles nurk lõpeb.

Kasutades nurgafunktsioonide taandamisvalemeid võime teravnurga funktsioonide tabelite abil leida iga nurga funktsiooni.

Näiteid.

1. $\sin 243^0 = \sin (180^0 + 63^0) = -\sin 63^0 = -0{,}8910.$

2. $\cos 318{,}4^0 = \cos (360^0 - 41{,}6^0) = \cos 41{,}6^0 = 0{,}7478.$

3. $\tan 275^0 24' = \tan (360^0 - 84^0 36') = -\tan 84^0 36' = -10{,}58.$

4. $\cot 119^0 52' = \cot (180^0 - 60^0 08') = -\cot 60^0 08' = -0{,}5742.$

5. $\sin 2387^0 = \sin (6 \cdot 360^0 + 227^0) = \sin 227^0 = \sin (180^0 + 47^0) = -\sin 47^0 = -0{,}7314.$

6. $\cot (-2094^0) = \cot (-6 \cdot 360^0 + 66^0) = \cot 66^0 = 0{,}4452.$

Ülesanded.

181. Taanda järgmised nürinurkade funktsioonid:

1. $\sin 170^0$	2. $\cos 150^0$	3. $\tan 100^0$	4. $\cot 120^0$
$\sin 156^0$	$\cos 144^0$	$\tan 137^0$	$\cot 96^0$
$\sin 93^0 45'$	$\cos 101^0 32'$	$\tan 162^0 07'$	$\cot 174^0 58'$
$\sin 108{,}3^0$	$\cos 124{,}8^0$	$\tan 149{,}4^0$	$\cot 111{,}1^0$

182. Lihtsusta avaldised:

$$\sin(180^0 - \alpha) + \cos(180^0 - \alpha)$$
$$\cos(180^0 - \beta) - \sin(180^0 - \beta)$$
$$a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(180^0 - \gamma)$$
$$\tan\alpha - \tan(180^0 - \alpha)$$
$$\cot\alpha + \cot(180^0 - \alpha)$$

183. Tabeleid kasutamata leia nurkade

$$120^0 \qquad 135^0 \qquad 150^0$$

siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi väärtused.

184. Leia järgmiste nurkade siinused:

1. 107^0	2. 115^0	3. $128{,}4^0$	4. $134{,}6^0$
$142{,}5^0$	$159{,}1^0$	$164{,}2^0$	$175{,}6^0$
$112^0 30'$	$125^0 42'$	$149^0 55'$	$169^0 21'$

185. Leia järgmiste nurkade koosinused:

$$99{,}1^0 \qquad 128{,}7^0 \qquad 143^0 45' \qquad 170^0 38'$$

186. Leia järgmiste nurkade tangensid:

$$98{,}7^0 \qquad 108{,}6^0 \qquad 152^0 44' \qquad 169^0 05'$$

187. Leia järgmiste nurkade kootangensid:

$$114{,}4^0 \qquad 162{,}8^0 \qquad 125^0 20' \qquad 170^0 48'$$

188. Taanda järgmised funktsioonid:

1. $\sin 200^0$	2. $\cos 190^0$	3. $\tan 250^0$	4. $\cot 240^0$
$\sin 183^0$	$\cos 257^0$	$\tan 236^0$	$\cot 269^0$
$\sin 196^0 14'$	$\cos 209^0 06'$	$\tan 263^0 53'$	$\cot 278^0$…
$\sin 230{,}7^0$	$\cos 197{,}9^0$	$\tan 224{,}5^0$	$\cot 200{,}2$…

189. Taanda järgmised funktsioonid:

1. $\sin 300^0$	2. $\cos 280^0$	3. $\tan 320^0$	4. $\cot 350^0$
$\sin 283^0$	$\cos 315^0$	$\tan 348^0$	$\cot 322^0$
$\sin 332^0 12'$	$\cos 299^0 41'$	$\tan 306^0 02'$	$\cot 336^0$…
$\sin 310{,}4^0$	$\cos 328{,}9^0$	$\tan 284{,}4^0$	$\cot 347{,}3$…

190. Tabeleid kasutamata leia nurkade

$$210^0 \quad 225^0 \quad 300^0 \quad 330^0$$

siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi väärtused.

191. Tabeleid kasutades leia sümbolite

$\sin 219^0 48'$ $\quad \cos 253^0 06'$ $\quad \tan 294^0 36'$ $\quad \cot 321^0 54'$

väärtused.

192. Taanda järgmised funktsioonid:

1.	2.	3.	4.
$\sin 460^0$	$\cos 540^0$	$\tan 499^0$	$\cot 370^0$
$\sin 693^0$	$\cos 982^0$	$\tan 654^0$	$\cot 518^0$
$\sin 850^0$	$\cos 754^0$	$\tan 815^0$	$\cot 710^0$

193. Tabeleid kasutades leia järgmiste sümbolite väärtused:

$$\sin 778^0 \quad \cos 678^0 \quad \tan 892^0 \quad \cot 1000^0$$

194. Leia tabelite abil järgmiste sümbolite väärtused:

1.	2.	3.	4.
$\sin 138{,}4^0$	$\cos 255{,}3^0$	$\tan 319{,}5^0$	$\cot 190{,}7^0$
$\sin 432{,}1^0$	$\cos 764{,}0^0$	$\tan 1092^0$	$\cot 310^0$
$\sin 2641{,}2^0$	$\cos 1980^0$	$\tan 4700^0$	$\cot 2630^0$

195. Taanda järgmised negatiivsete nurkade funktsioonid positiivsete teravnurkade funktsioonideks ja leia nende väärtused:

1.	2.	3.
$\sin(-28^0)$	$\cos(-85^0)$	$\tan(-166^0)$
$\sin(-134^0 15')$	$\cos(-235^0 28')$	$\tan(-320{,}4^0)$
$\sin(-156{,}3^0)$	$\cos(-91{,}4^0)$	$\cot(-120^0)$
$\sin(-240{,}8^0)$	$\cos(-300{,}1^0)$	$\cot(-18{,}8^0)$

196. Leia avaldise

$$\sin 855^0 + \cos 1125^0 - \tan 1575^0 + \cot 990^0$$

väärtus.

197. Leia avaldise

$$\sin 870^0 + \cos 1230^0 + \cos(-630^0) - \sin(-540^0)$$

väärtus.

198. Missugused on 2 kõige väiksemat nurka, mille siinus on $\frac{4}{7}$? Ehita need nurgad nii, et neil oleks ühine tipp ja ühine haar.

199. Missugused on 2 kõige väiksemat nurka, mille koosinus on —0,9500?

200. Missugused on 2 kõige väiksemat nurka, mille tangens on 3,0061?

201. Ehita nurgad järgmiste nurgafunktsioonide väärtuste järgi:

1. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$
2. $\cos \alpha = -0{,}8$
3. $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$
4. $\cot \alpha = -2{,}4$

202. Leia tabelite abil nurk φ, teades, et

1. $\cos \varphi = -0{,}9310$ ja $90^0 < \varphi < 180^0$
2. $\tan \varphi = -2{,}345$ ja $90^0 < \varphi < 180^0$
3. $\sin^2 \varphi = 0{,}6250$ ja $180^0 < \varphi < 270^0$
4. $\tan^2 \varphi = 2{,}325$ ja $270^0 < \varphi < 360^0$
5. $\cos^2 \varphi = 0{,}4972$ ja $270^0 < \varphi < 360^0$

203. Leia nurgad 0^0 ja 360^0 vahelt, mis rahuldavad järgmisi võrrandeid:

1. $4 \sin^2\alpha = 3$
2. $\cot \beta = 3 \tan \beta$
3. $2(1 + \sin \gamma) = 3(1 - \sin \gamma)$
4. $2 \sin^2 \delta + 3 \cos \delta = 0$

204. Taanda järgmiste nurkade siinused teravnurkade koosinusteks:

120^0	145^0	231^0	347^0	-70^0
400^0	560^0	886^0	1623^0	2435^0

205. Taanda järgmiste nurkade koosinused teravnurkade siinusteks:

92^0	284^0	203^0	-56^0	-112^0
$385{,}5^0$	712^0	-987^0	-1234^0	-1736^0

206. Taanda järgmiste nurkade tangensid teravnurkade kootangensiteks:

130^0	168^0	199^0	245^0	356^0
500^0	622^0	-12^0	-91^0	-265^0

207. Taanda järgmiste nurkade kootangensid teravnurkade tangensiteks:

99^0	186^0	242^0	300^0	264^0
-23^0	-123^0	495^0	-495^0	2340^0

208. Teisenda iga järgmine avaldis, kui võimalik, positiivse teravnurga üheainsa funktsiooni avaldiseks ja leia viimase numbriline väärtus:

1. $\cot 222^0 - \tan 213^0$
   $\sin 97^0 + \cos 187^0$
   $\cos 253^0 + \sin 343^0$

2. $\sin 396^0 + \cos 414^0$
   $\tan 740^0 + \cot 610^0$
   $\tan 513^0 - \cos 594^0$

209. Näita, et võrdus $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ on kehtiv ka siis, kui $\varphi > 90^0$.

210. Näita, et võrdus $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ on kehtiv ka siis, kui $\varphi > 90^0$.

211. Näita, et võrdus $\tan \varphi \cdot \cot \varphi = 1$ on kehtiv ka siis, kui $\varphi > 90^0$.

212. Näita, et võrdused

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \qquad \text{ja} \qquad \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

on kehtivad ka siis, kui $\varphi < 0^0$.

213. Olgu $\cos \lambda = \frac{35}{37}$. Määra $\sin \lambda$ ja $\tan \lambda$, teades, et $270^0 < \lambda < 360^0$.

214. Olgu $\sin \alpha = -\frac{9}{41}$. Määra $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$, teades, et $180^0 < \alpha < 270^0$.

215. Määra $\cos \varphi$ ja $\tan \varphi$, kui $\sin \varphi = -0{,}4$ ja $270^0 < \varphi < 360^0$.

216. Määra $\tan \psi$, kui $\cos \psi = \frac{1}{2}$ ja $180^0 < \psi < 360^0$.

217. Arvuta $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$, teades, et $\tan \alpha = -\sqrt{2}$ ja $0^0 < \alpha < 180^0$.

218. Arvuta $\sin \varepsilon$ ja $\cos \varepsilon$, teades, et $\tan \varepsilon = 2$ ja $180^0 < \varepsilon < 360^0$.

219. Olgu $\cot \omega = \frac{60}{11}$. Määra $\sin \omega$ ja $\cos \omega$, kui $180^0 < \omega < 360^0$.

220. Olgu $7 \sin \varphi = 3 \cos \varphi$. Määra nurk φ.

221. Määra kõik nurgad 0^0 ja 360^0 vahelt, mille siinus on 0,6, ja arvuta nende nurkade koosinused, tangensid ja kootangensid.

222. Määra kõik nurgad 0^0 ja 720^0 vahelt, mille koosinus on $\frac{12}{13}$, ja arvuta nende nurkade siinused, tangensid ja kootangensid.

223. Määra kõik nurgad vahemikus 0^0 ja 360^0, mille tangens on 2, ja arvuta nende nurkade siinused, koosinused ja kootangensid.

224. Määra kõik nurgad vahemikus 0^0 ja 720^0, mille tangens on —4, ja arvuta nende nurkade siinused, koosinused ja kootangensid.

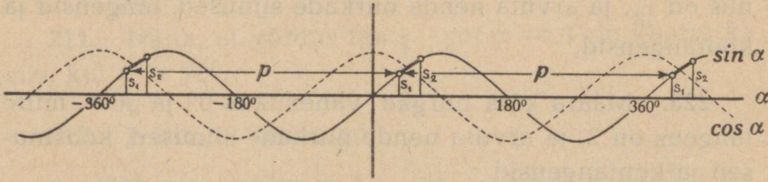
§ 27. Nurgafunktsioonide perioodsus.

Eespool leidsime, et ühegi nurgafunktsiooni väärtus ei muutu nurga suuruse muutumisel 360^0 mõne kordse võrra. Vaatame nüüd, missugune on v ä i k e s i m nurk p, mille lisandamisel nurgale α nurgafunktsioonid omandavad endisi väärtusi. Me otsime seega iga nurgafunktsiooni jaoks seda väikesimat nurka p, mille puhul nurga α iga väärtuse juures nurga $\alpha + p$ funktsioon on võrdne samanimelise nurga α funktsiooniga, sümbolites:

1. $\sin(\alpha + p) = \sin \alpha$
2. $\cos(\alpha + p) = \cos \alpha$
3. $\tan(\alpha + p) = \tan \alpha$
4. $\cot(\alpha + p) = \cot \alpha.$

Seda nurka nimetatakse uuritava funktsiooni p e r i o o d i k s.

Vaadeldes siinuse graafikut näeme, et selles nurga muutumisel siinuse väärtused $s_1, s_2 \ldots$ korduvad iga kord siis, kui nurk suureneb või väheneb 360^0 võrra (joonis 30). Seega siinuse puhul $p = 360^0$.

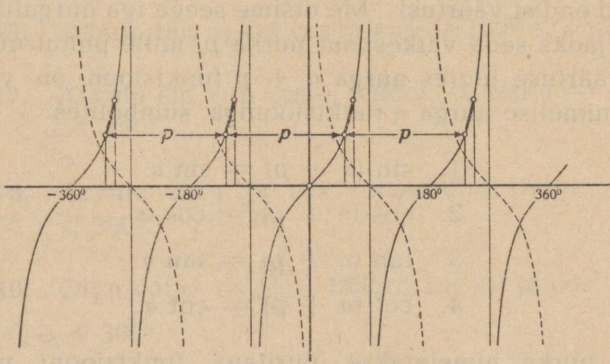


Joonis 30.

Samuti näeme koosinuse graafikust (joonis 30), et ka koosinuse puhul $p = 360^0$. Seega:

nurga siinuse ja koosinuse periood on 360^0.

Vaadeldes tangensi graafikut näeme, et selles nurga muutumisel tangensi väärtused $t_1, t_2, \ldots$ korduvad iga kord siis, kui nurk suureneb või väheneb 180^0 võrra (joonis 31). Seega on tangensi puhul $p = 180^0$.



Joonis 31.

Samuti näeme kootangensi graafikust (joonis 31), et ka kootangensi puhul $p = 180^0$. Seega

nurga tangensi ja kootangensi periood on 180^0.

Et nurgafunktsioon omandab korduvalt endisi väärtusi, kui nurk suureneb või väheneb perioodi võrra, siis

$$\sin \alpha = \sin (\alpha + k \cdot 360^0)$$
$$\cos \alpha = \cos (\alpha + k \cdot 360^0)$$
$$\tan \alpha = \tan (\alpha + k \cdot 180^0)$$
$$\cot \alpha = \cot (\alpha + k \cdot 180^0),$$

kus k on mistahes positiivne või negatiivne täisarv.

§ 28. Ülesandeid kordamiseks.

225. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 14 cm ja 48 cm. Arvuta kummagi teravnurga funktsioonid. Leia teravnurgad.

226. Täisnurkse kolmnurga teravnurga α siinus on $\frac{1}{3}$. Missuguse osa hüpotenuusist moodustab kaatet a?

227. Täisnurkse kolmnurga teravnurga β koosinus on $\frac{5}{8}$. Mitu protsenti hüpotenuusist on nurga β lähiskaatet?

228. Missuguse teravnurga koosinus on võrdne 45^0-se nurga tangensiga?

229. Missuguse teravnurga tangens on võrdne 30^0-se nurga siinusega?

230. Raudtee tõus on 1 : 250. Kui suur on raudtee tõusunurk?

231. Kui kõrgel oli päike, kui 8,5 m kõrgune telefonipost heitis 13,6 m pikkuse varju? Kuidas muutus päikese kõrgus, kui posti vari pikenes 0,8 m võrra?

232. Õhupalli, mille kõrgus koos korviga on 12 m, nähti maapinnalt 1°-ses nurgas. Kui kõrgel oli õhupall, kui korvi põhja kõrgusnurk oli samal hetkel 48°?

Õhupalli liikudes oli teiseks vaatlushetkeks vaatenurk vähenenud 12′ võrra ja korvi põhja kõrgusnurk vähenenud 2° võrra. Mille võrra oli muutunud õhupalli kõrgus?

233. Peegli ees asetseb kaks punkti, mille kaugused peegli tasapinnast on 2 cm ja 10 cm. Punktide kaugus teineteisest on 17 cm. Kui suur on niisuguse valguskiire langemisnurk, mis väljudes ühest punktist pärast peegeldumist läbib teist punkti? Kuidas muutub langemisnurk, kui peegli kaugust mõlemast punktist suurendada 2 cm võrra?

234. Anna järgmiste sümbolite väärtused:

1. $\sin 270^0$	2. $\sin(-180^0)$	3. $\sin(-270^0)$	4. $\sin 630^0$
$\cos 180^0$	$\cos 270^0$	$\cos(-90^0)$	$\cos 990^0$
$\tan 180^0$	$\tan 270^0$	$\tan(-180^0)$	$\tan 450^0$
$\cot 180^0$	$\cot 270^0$	$\cot(-90^0)$	$\cot(-360^0)$

235. Arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sin 90^0 \cdot \cos 90^0 + \sin 0^0 \cdot \cos 0^0$	2. $\sin^2 60^0 - \cos^2 60^0$
$\sin 45^0 \cdot \cos 45^0 + \tan 45^0$	$\tan^2 30^0 + \cot^2 30^0$
$(\sin 30^0 + \cos 30^0)^2$	$\cot^2 60^0 - \tan^2 60^0$

236. Lahenda täisnurksed kolmnurgad järgmisil andmeil:

1. $c = 23$	$\beta = 28^004'$	3. $b = 40$	$\alpha = 42^041'$
2. $a = 2{,}1$	$\alpha = 46^024'$	4. $c = 53$	$a = 28$

237. Lahenda võrdhaarsed kolmnurgad järgmisil andmeil:

1. $b = 15$	$a = 16$	3. $b = 5{,}8$	$\alpha = 87^012'$
2. $a = 14$	$\alpha = 32^030'$	4. $b = 3{,}4$	$\beta = 61^056'$

238. Rombi külje pikkus on 14,2 cm; ühe diagonaali pikkus on 19,8 cm. Kui pikk on teine diagonaal? Kui suured on rombi nurgad?

239. Kui suured on täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui kolmnurga külgede pikkused on järjestikused täisarvud?

240. Kaldpind moodustab rõhttasapinnaga 32^0-se nurga. Kui suure tungiga saab tasakaalustada kaldpinnal asetsevat 56,4-kilogrammist koormat?

241. Täisnurkse kolmnurga pindala on 12,34 m^2 ja üks nurk on $36,4^0$. Leia kolmnurga hüpotenuus.

242. Täisnurkse kolmnurga pindala on 256 cm^2 ja üks kaatet on 32 cm. Leia kolmnurga teravnurgad.

243. Leia korrapärase kümnenurga ümber kujutatud ringi raadius, kui kümnenurga apoteem on 26,8 cm.

244. Kui suur on piirdenurk, mis toetub 17,26-meetrisele kõõlule, kui ringi raadius on 59,09 m?

245. Ringi raadius on 36,45 m. Kui pikk kõõl vastab 35^0-sele piirdenurgale?

246. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 681 m ja üks nurkadest on $71,1^0$. Leia kolmnurga küljed.

247. Täisnurkse kolmnurga pindala on 4 m^2 ja hüpotenuus on 4 m. Leia kolmnurga teravnurgad.

248. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 39,36 m ja tipunurk on $26,6^0$. Leia kolmnurga küljed.

249. Täisnurkse kolmnurga pindala on 819 cm^2 ja üks nurkadest on $32^0 45'$. Leia kolmnurga küljed.

250. Täisnurkse kolmnurga teravnurk on $24^0 15'$. Selle nurga vastaskaatet on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud vastasnurga tipuga. Kui suurteks osadeks jaotub nurk?

251. Ringis, mille raadius on 5 cm, on joonestatud 8 cm ja 4 cm pikkusega kõõlud. Mitu korda on esimesele kõõlule vastav kesknurk suurem teisele kõõlule vastavast kesknurgast?

252. Kahe võrdsete kõrgustega võrdhaarse kolmnurga tipunurgad on 20^0 ja 60^0. Mitu korda on teise kolmnurga pindala suurem esimese kolmnurga pindalast?

253. Kolmnurga kaks külge on $a = 32$ cm ja $b = 18$ cm. Nende külgede projektsioonid kolmandale küljele on vastavalt $a' = 14$ cm ja $b' = 8$cm. Kui suured on nende külgede lähisnurgad β ja α?

254. Korrapärase viisnurga pindala on 36 cm^2. Kui suur on viisnurga külg?

255. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 258,4 cm^2 ja üks nurk on 113^0. Leia kolmnurga küljed.

256. Võrdhaarse kolmnurga alus on 59,18 m ja alusnurk on $61{,}7^0$. Leia kolmnurga ümbermõõt.

257. Võrdhaarse kolmnurga haar on 146 cm ja tipunurk on $58^0 32'$. Leia kolmnurga pindala.

258. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 636 cm^2 ja kolmnurga suurim nurk on $92^0 42'$. Leia kolmnurga haar.

259. Maja 2. korra aknast, a m kõrguselt üle maapinna, leiame raadiomasti tipu kõrgusnurgana α; maja 3. korra aknast, mis eelmise akna kohal, kuid temast b m kõrgemal, leiame sama masti tipu kõrgusnurgana β. Avalda raadiomasti kõrgus.

N ä i d e. $a = 5{,}7$, $b = 4{,}2$, $\alpha = 27{,}7^0$, $\beta = 24{,}2^0$. Arvuta raadiomasti kõrgus.

260. Kui pikk on ringjoone kaar, mis vastab kesknurgale φ^0, kui ringjoone raadius on r cm?

N ä i d e. $r = 10$; $\varphi = 30, 45, 90, 120, 180$. Arvuta kaarte pikkused.

261. Mitu kraadi sisaldab s cm pikkune ringjoone kaar, kui ringjoone raadius on r cm?

262. Kui pikk peaks olema ringjoone raadius, et φ-kraadisele kesknurgale vastaks s cm pikkune ringjoone kaar?

N ä i d e. $\varphi = 48$, $s = 10$. Arvuta ringjoone raadius.

263. Kõõl, mis ringist eraldab segmendi, on 18,5 mm pikk; segmendi kõrgus on 3,2 mm. Missugune kesknurk vastab segmendi kaarele? Kui suur on ringi läbimõõt?

264. 38^0-se piirdenurga üheks haaraks on ringi läbimõõt ja teiseks haaraks on kõõl, mille pikkus on 24 cm. Kui pikk on kaar, millele toetub piirdenurk?

265. Ringi raadius on 12 cm. Arvuta selle ringi 50^0-se sektori pindala.

266. Ringi raadius on 28 cm. Arvuta selle ringi 72^0-se segmendi pindala.

267. Arvuta segmendi pindala, kui ringi raadius on 3,4 m ja segmendi kõõl on 2,6 m.

268. Olgu teatavas kohas põlevkivikihi kaldenurk rõhttasapinna suhtes 20^0. Esinegu vertikaalses puuraugus põlevkivi 4 m pikkuselt. Kui paks on põlevkivikiht?

269. Lõik, mille pikkus on 18 cm, on projektitud mingile sirgele. Kui suur on lõigu ja sirge vaheline nurk, kui projektsiooni pikkus on 14 cm?

270. Murdjoone lõikude projektsioonid mingile sirgele on 10 cm, 15 cm, 12 cm ja 22 cm. Lõigud moodustavad selle sirgega nurgad 40^0, 20^0, -10^0 ja -30^0. Kui pikk on murdjoon?

271. Murdjoon koosneb lõikudest, mille pikkused on 6 cm, 8 cm, 7 cm, 10 cm ja 4 cm ja mis projektsioonteljega moodustavad nurgad 70^0, 35^0, 0^0, -45^0 ja -80^0. Arvuta murdjoone projektsiooni pikkus.

272. Sirged s ja t on risti teineteisega. Lõik a moodustab sirgega s nurga 26^0. Tema projektsioon sirgele s on 125 cm pikk. Kui pikk on lõigu a projektsioon sirgele t? Kui pikk on lõik a?

273. Arvuta teravnurga α funktsioonid, kui $\cos \alpha = \frac{12}{37}$.

274. Arvuta nürinurga β funktsioonid, kui $\tan \beta = -\frac{63}{16}$.

275. Leia nurk, mille siinus on 3 korda suurem selle nurga koosinusest.

276. Leia nurk, mille tangens on 2 korda suurem selle nurga siinusest.

277. Leia nurk, mille siinus on $\frac{1}{2}$ selle nurga koosinusest.

278. Lihtsusta avaldised:

1. $(1 - \cos^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha)$ 2. $\dfrac{\tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}$

$\sin^2 \alpha \cdot (1 + \cot^2 \alpha)$ $\dfrac{\tan^2 \delta}{1 - \cos^2 \delta}$

$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)$ $\dfrac{\tan \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha + \tan \beta}$

$(\sin \beta - \cos \beta)^2 + \dfrac{2 \sin^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta}$ $a(\tan^2 \varphi - \dfrac{1}{\cos^2 \varphi})$

279. Leia nurk, mille siinuse ja koosinuse summa on $\sqrt{2}$.

280. Kas on võimalik, et mingi nurga siinuse ja koosinuse summa on $\sqrt{3}$?

281. Jaota täisnurk kahte ossa nii, et ühe osa siinus oleks 2 korda suurem teise osa siinusest.

282. Jaota täisnurk kahte ossa nii, et ühe osa tangens oleks 4 korda suurem teise osa siinusest.

283. Täisnurkse kolmnurga pindala on 441 cm^2 ja hüpotenuus on 84 cm. Leia kolmnurga teravnurgad.

284. Jaota sirgenurk kahte ossa nii, et ühe osa siinus võrduks teise osa kolmekordse koosinusega.

285. Lihtsusta avaldised:

$\sin (180^0 + \alpha) \cos (180^0 - \alpha) + \cos (180^0 + \alpha) \sin (180^0 - \alpha)$

$\cos (180^0 + \alpha) \cos (90^0 + \alpha) + \sin (180^0 + \alpha) \sin (90^0 + \alpha)$

$\sin (\beta + 90^0) - \sin (\beta - 90^0) + 3 \cos \beta - 3 \cos (360^0 - \beta)$

$$\frac{\sin (-\varphi)}{\sin (180^0 + \varphi)} - \frac{\tan (90^0 + \varphi)}{\cot \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin (90^0 + \varphi)}$$

$$\frac{\sin (360^0 - \psi) \cos (180^0 + \psi)}{\tan (270^0 + \psi)}$$

286. Taanda avaldised:

1. $\sin(90^0 - \alpha) + \cos(180^0 + \alpha) + \tan(270^0 - \alpha)$
2. $\sin^2(270^0 + \alpha) + \sin^2(360^0 - \alpha)$
3. $a^2 + b^2 + 2ab\cos(180^0 - \alpha)$
4. $\tan(270^0 + \alpha) \cdot \tan(360^0 - \alpha)$

287. Taanda järgmised nurgafunktsioonid positiivse teravnurga funktsioonideks:

1. $\tan 126^0$	2. $\cot 310^0$	3. $\sin 930^0$
$\sin 139^0 15'$	$\sin 352^0 36'$	$\cos 3529^0$
$\cos(-84^0)$	$\tan(-200^0)$	$\tan(-800^0)$

288. 120^0-ne kaar on projektitud läbimõõdule, mis läbib kaare üht otsapunkti. Kui pikk on kaare projektsioon?

289. Leia nurgafunktsioonide väärtused, mis rahuldavad järgmisi võrrandeid; leia saadud funktsioonide väärtustele vastavad nurgad vahemikus 0^0 kuni 360^0.

1. $\sin^2\alpha - 3 = 2\sin\alpha$
2. $\cos^2\beta + \cos\beta = 1$
3. $\sin^2\gamma = 2\sin\gamma$
4. $(\cos\delta - 2)(2\cos\delta + 1) = 0$
5. $\tan x - \cot x = \frac{3}{2}$