

Legendre's

G e o m e t r i e.

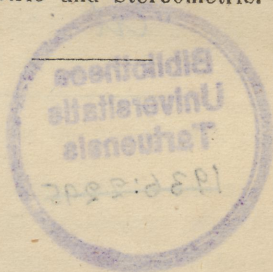
ESTICA

A-5747

Legendre's

G e o m e t r i e.

Ein Compendium für den Unterricht in der
Planimetrie und Stereometrie.



Zweiter Theil.

Stereometrie.

RIGA.

h. Schnakenburg's litho- & typograph. Anstalt.

1857.

Legendre's

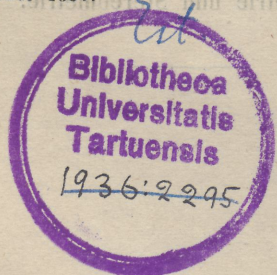
Geometrie

Der Druck wird gestattet unter der Bedingung, dass nach Vollendung desselben die gesetzlich bestimmte Anzahl von Exemplaren dem Rigaschen Censur-Comité vorgestellt werde.

Riga, den 15. October 1857.

Ed

Censor C. Kästner.



6157

Zweiter Theil

Geometrie

1857

B. Schönbauer's litho- & topograph. Anstalt

1857

I. Von den Ebenen und den Körper-

I n h a l t.

§ 155. *Klärungen.* 1) Eine gerade Linie ist auf einer Ebene, und diese auf jener senkrecht, wenn sie die Ebene in einem Punkte durchschneidet und auf allen durch ihren Durchschnitts- oder Fusspunkt in

I. Von den Ebenen und den Körperwinkeln . . . § 158 bis § 188.
II. Von den Polyedern . . . § 189 — § 213.
III. Von der Kugel . . . § 214 — § 238.
IV. Von den runden Körpern . . . § 239 — § 264.

§ 159. *Eine gerade Linie kann nicht von Theil zu und zum Theil ausser einer Ebene liegen.*

Denn, nach der Bestimmung der Ebene, befindet sich eine gerade Linie, sobald sie zwei Punkte mit ihr gemein hat, ganz in derselben.

§ 160. *Zwei sich schneidende Gerade AB und BC liegen in der nämlichen Ebene und bestimmen die Lage dieser Ebene.*

Stellt man sich eine Ebene vor, in welcher AB liegt, und zieht dieselbe an AK, bis sie durch den Punkt C geht, so werden die beiden Punkte B und C, also auch die Gerade BC in ihr liegen; also liegen AB und BC in der nämlichen Ebene, und bestimmen ihre Lage.

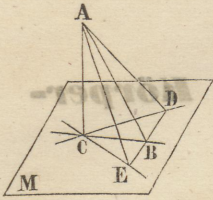
Zusatz. Ein Dreieck, oder drei Punkte welche nicht in gerader Linie liegen, oder auch zwei Parallellgerade bestimmen die Lage einer Ebene.

§ 161. *Der Durchschnitt zweier Ebenen ist eine gerade Linie.*

Denn, gäbe es unter den, von beiden Ebenen gemeinschaftlichen Punkten, mehr als zwei, die nicht in gerader Linie liegen, so wären die Ebenen zusammenfallen (§ 160), was der Voraussetzung widerspricht.

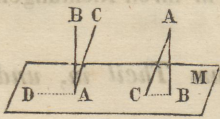
§ 162. *Eine gerade Linie AC, welche auf einer durch ihren Fusspunkt C in der Ebene A gezogenen Geraden CB und*

CE senkrecht steht, steht auch auf jeder andern in derselben Ebene durch C gezogenen Geraden CB, und mithin auf der Ebene M selbst, senkrecht.



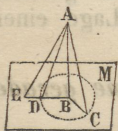
Durch einen beliebigen Punkt B von CB ziehe man DE so, dass $BD = BE$ ist (§ 123), ferner die Geraden AD, AB, AE, so ist in den Dreiecken DAE und DCE (§ 92) $AD^2 + AE^2 = 2AB^2 + 2BE^2$ und $CD^2 + CE^2 = 2BC^2 + 2BE^2$. Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, und erwägt, dass in den rechtwinkligen Dreiecken ACD und ACE (§ 90, 1) $AD^2 - CD^2 = AC^2$ und $AE^2 - CE^2 = AC^2$, so erhält man $AC^2 + AC^2 = 2AB^2 - 2BC^2$ oder $AC^2 = AB^2 - BC^2$, woraus folgt, dass $\sphericalangle ACB = R$, also $AC \perp BC$ ist.

§ 163. Durch einen Punkt A in oder ausserhalb einer Ebene M lässt sich nur eine einzige Senkrechte AB auf dieselbe ziehen.



Denn, wäre auch $AC \perp M$, so lege man durch AB und AC eine Ebene, welche die Ebene M schneide, und zwar im ersten Falle in AD, so dass also $\sphericalangle BAD = R = CAD$ wäre (§ 158, 1), im zweiten Falle in BC, so dass also $\triangle ABC$ zwei rechte Winkel enthielte. Da aber Beides unmöglich ist (§ 2, 2 § 25, 3), so kann nicht $CA \perp M$ sein.

§ 164. Wenn von einem Punkte A eine Senkrechte AB und verschiedene schräge Linien nach einer Ebene M gezogen werden, so ist 1) die Senkrechte die kürzeste von allen aus A nach M gezogenen Geraden; 2) sind die schrägen Linien, welche sich gleich weit von dem Fusspunkte B der Senkrechten entfernen, gleich; 3) ist die von der Senkrechten weiter entfernte schräge Linie die grössere.



1) Jede schiefe Linie, z. B. AC, bildet mit AB ein rechtwinkliges Dreieck, und ist als Hypotenuse grösser als die Kathete AB (§ 25, 4). 2) Wenn $BC = BD$ ist, so ist $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ (§ 9), also $AC = AD$. 3) Wenn BE grösser ist als BC oder als die gleiche BD, so ist (§ 21, 3) AE grösser als AD oder als die gleiche AC.

§ 165. Zusätze. 1) Da alle gleich langen schrägen Linien AC, AD... in einem Kreisumfange endigen, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt der Senkrechten AB ist, so lässt sich von einem ausserhalb der Ebene M gegebenen Punkte A auf dieselbe eine Senkrechte fallen, wenn man in der Ebene drei Punkte in gleicher Entfernung

von A nimmt, und den Mittelpunkt des durch diese drei Punkte gehenden Kreises bestimmt (§ 74) und mit A verbindet. 2) Die Senkrechte ist als kürzeste Linie zwischen einem Punkte und einer Ebene das wahre Mass der Entfernung des Punktes von dieser Ebene. 3) Der Winkel ACB wird der Neigungswinkel der Linie AB gegen die Ebene M genannt. Der Neigungswinkel aller schrägen Linien AC, AD..., welche sich gleich weit von der Senkrechten entfernen, ist gleich gross, weil die Dreiecke ABC, ABD... congruent sind.

§ 166. Zieht man aus dem Fusspunkte C der auf der Ebene M Senkrechten AC eine Senkrechte CB auf die in dieser Ebene liegenden Linie DE, so ist die Gerade AB senkrecht auf DE.

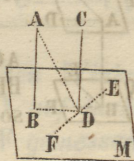
Macht man $BD = BE$, und zieht AD, AE, CD, CE, so ist (§ 21) $CD = CE$, also (§ 164) $AD = AE$, folglich (§ 17, 3) $AB \perp DE$.



Zusätze. 1) Die Linie DE steht auf der Ebene ABC senkrecht, da sie auf AB und BC senkrecht steht. 2) Die Linien AC und DE geben ein Beispiel von zwei Linien, welche sich nicht treffen, und doch nicht parallel sind. Die kürzeste Entfernung dieser Linien von einander ist BC, welche auf beiden zugleich senkrecht steht, denn, verbindet man zwei andere Punkte A und E, so ist (§ 25, 4) $AE > AB > BC$.

§ 167. Wenn von zwei parallelen Linien die eine AB senkrecht ist auf einer Ebene M, so ist es auch die andere CD.

Legt man durch die Parallelen AB und CD eine Ebene, welche die Ebene M in BD schneidet, und zieht in M die $EF \perp BD$, ferner AD, so ist $CD \perp BD$, weil $AB \perp BD$ und $CD \parallel AB$ ist; ferner ist $FE \perp ABDC$ (§ 166, Z.), also auch $FE \perp CD$. Da nun $CD \perp BD$ und $CD \perp FE$, so ist $CD \perp M$ (§ 162).



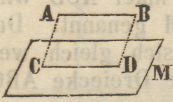
§ 168. (Fig. §167) Zwei Senkrechte AB und CD auf der nämlichen Ebene M sind parallel.

Wäre CD nicht parallel mit AB, so ziehe man durch D eine mit AB parallele Linie, welche auf M senkrecht sein wird (§ 167), und dann gäbe es in D zwei Senkrechte auf M, was nicht möglich ist (§ 163).

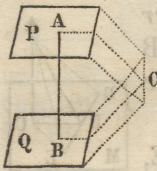
§ 169. Zwei Linien im Raume, welche einer dritten Linie parallel sind, sind auch einander parallel.

Da eine senkrechte Ebene auf der dritten Linie zugleich senkrecht auf den beiden andern ist (§ 167), so müssen diese als Senkrechte auf der nämlichen Ebene parallel sein (§ 168).

§ 170. Eine Linie AB ist einer Ebene M parallel, wenn sie einer in der Ebene liegenden Linie CD parallel ist.

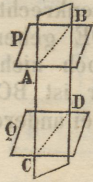


Denn, wenn die in der Ebene ABCD liegende AB die Ebene M schneiden sollte, so könnte es nur in der Durchschnittslinie CD beider Ebenen geschehen; da aber AB als Parallele die CD nicht schneidet, so kann sie auch die Ebene M nicht schneiden.



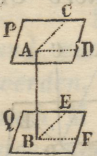
§ 171. Zwei Ebenen P und Q sind parallel, wenn sie auf der nämlichen Geraden AB senkrecht stehen.

Begegneten sich die Ebenen etwa im Punkte C, so ziehe man CA und CB, welche Linien ein $\triangle CAB$ bilden würden, in welchem $\sphericalangle CAB = R = CBA$ wäre, was nicht möglich ist; daher muss $P \parallel Q$ sein.



§ 172. Die Durchschnittslinien AB und CD zweier parallelen Ebenen P und Q mit einer dritten Ebene sind parallel.

Denn die in einer Ebene liegenden Linien AB und CD können sich nicht schneiden, weil sie sich zugleich in zwei parallelen Ebenen befinden; folglich sind sie parallel.



§ 173. Die auf der Ebene Q senkrechte Linie AB ist zugleich auf der mit Q parallelen Ebene P senkrecht.

Legt man durch AB zwei Ebenen, welche P und Q in AC und BE, AD und BF schneiden, so ist $AC \parallel BE$ und $AD \parallel BF$ (§ 172). Da nun aber $\sphericalangle ABE = R = ABF$ (§ 158, 1), so ist auch $\sphericalangle BAC = R = BAD$, folglich (§ 162) $AB \perp P$.



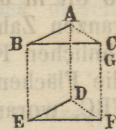
§ 174. Parallele Linien AB und CD zwischen parallelen Ebenen P und Q sind gleich.

Legt man durch AB und CD eine Ebene, so sind die Durchschnitte AC und BD parallel (§ 172), folglich ist ABDC ein Parallelogramm, mithin $AB = CD$.

Zusatz. Parallele Ebenen sind überall gleich weit von einander entfernt; denn, wenn AB und CD auf P und Q senkrecht stehen, so sind sie parallel (§ 168), und folglich einander gleich.

§ 175. Wenn die Schenkel zweier, nicht in der nämlichen Ebene liegender Winkel, ABC und DEF, nach derselben Seite hin parallel sind, so sind die Winkel gleich und ihre Ebenen parallel.

1) Man mache $BA = ED$, $BC = EF$, und ziehe AC , DF , BE ..., so ist $ABED$ ein Parallelogramm (§ 39, 2), also $AD \parallel BE$ und ebenso $CF \parallel BE$, folglich $AD \parallel CF$, also $ACFD$ ein Parallelogramm, mithin $AC = DF$. Da nun $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (§ 15), so ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$. 2) Wären die Ebenen ABC und DEF nicht parallel, und würde die durch B mit DEF parallele Ebene die Linie CF nicht in C , sondern in G schneiden, so wäre (§ 174) $GF = BE$; da aber auch $CF = BE$ ist, so wäre $GF = CF$, was ungerichtet ist; daher ist $ABC \parallel DEF$.

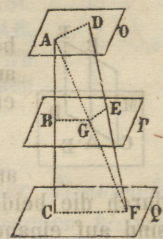


§ 176. (Fig. § 175). Wenn man die Endpunkte dreier gleicher und paralleler, nicht in derselben Ebene liegender Linien BE , AD , CF , verbindet, so entstehen congruente Dreiecke, deren Ebenen parallel sind.

Da $BE \parallel AD \parallel CF$, so ist auch (§ 38 und § 39) $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$, also $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Dass ferner $ABC \parallel DEF$ ist, wird wie in § 175 bewiesen.

§ 177. Zwei gerade Linien AC und DF werden von drei parallelen Ebenen O , P , Q , in proportionale Stücke geschnitten.

Man ziehe AF , welche P in G schneidet, und lege durch C , A , F , und eben so durch A , F , D Ebenen, welche die parallelen Durchschnitte BG und CF , GE und AD bilden (§ 172), dann ist (§ 94) $AB : BC (= AG : GF) = DE : EF$.



§ 178. Der Flächenwinkel $DABF$ wird durch den Winkel CBF zwischen zwei, in den beiden Ebenen AF und BD auf ihren Durchschnitten AB senkrecht gezogenen, Linien BC und BF gemessen.

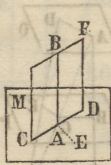
Zuvörderst ist klar, dass der $\sphericalangle CBF$ seine Grösse nicht ändert, in welchem Punkte des Durchschnitten man auch die Senkrechten ziehen mag. Denn, zieht man z. B. im Punkte A die Senkrechten AD und AE auf AB , so ist (§ 28) $AD \parallel BC$ und $AE \parallel BF$, folglich (§ 175) $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CBF$. Ferner ist leicht einzusehen, dass, wenn der Flächenwinkel $DABF$ in einem gewissen Verhältnisse zu- oder abnimmt, auch $\sphericalangle CBF$ in dem nämlichen Verhältnisse grösser oder kleiner wird. Beschreibt man nämlich in den Ebenen CBF und DAE aus B und A mit gleichem Radius die Bogen CF und DE , zieht BH willkürlich, und legt durch AB und BH eine Ebene, so ist $\sphericalangle FBH = \sphericalangle EAG$ (§ 175). Ist nun $\sphericalangle FBH = \sphericalangle HBC$, so ist klar, dass auch die Flächenwinkel $EABH$ und $HBAD$ gleich sind, weil sie in einander gelegt, vollkommen zusammenfallen müssen; wäre dagegen $\sphericalangle FBH$ gewisse Male genau in $\sphericalangle FBC$ enthalten, so würde sich der Flächenwinkel $EABH$ eben



so oft in dem Flächenwinkel DABF befinden. Nun ist man berechtigt, von ganzen Zahlen auf beliebige Zahlen zu schliessen, wie es für einen ganz ähnlichen Fall in § 57 bewiesen wurde; also werden sich in allen Fällen die Flächenwinkel EABH und DABF verhalten, wie die Winkel FBH und FBC, woraus folgt, dass der \sphericalangle CBF zum Masse des Flächenwinkels DABF genommen werden kann.

§ 179. Erklärungen. 1) Der Winkel CBF wird der Neigungswinkel der beiden Ebenen AF und BD genannt. 2) Wenn der Neigungswinkel ein rechter ist, so stehen die Ebenen auf einander senkrecht. 3) Es verhält sich mit den Flächenwinkeln eben so wie mit den Winkeln zwischen geraden Linien. So sind z. B. die an dem Durchschnitte zweier Ebenen einander entgegengesetzten Winkel gleich, ferner betragen an einander liegende Winkel zwei rechte, endlich finden beim Durchschneiden paralleler Ebenen mit einer dritten dieselben Eigenschaften statt, welche für den Durchschnittparalleler Linien mit einer dritten gelten (§ 28, § 34).

§ 180. Wenn eine Gerade AB auf einer Ebene M senkrecht steht, so steht jede Ebene CF durch AB ebenfalls auf M senkrecht.



Zieht man in M die AE senkrecht auf den Durchschnit CD beider Ebenen, so ist, weil AB als Senkrechte auf M sowohl auf CD als auf AE senkrecht steht, der Neigungswinkel BAE ein rechter, also $CF \perp M$.

Zusatz. Wenn drei Gerade AB, AC, AE auf einander senkrecht stehen, so ist jede von ihnen auf der Ebene durch die beiden andern senkrecht, und die drei Ebenen M, CF und BAE sind auf einander senkrecht.

§ 181. (Fig. § 180). Wenn zwei Ebene M und CF auf einander senkrecht stehen, so ist 1) die Gerade AB, welche in der einen Ebene CF senkrecht auf den Durchschnit CD gezogen wird, senkrecht auf der andern Ebenen M; 2) liegt die Gerade AB, welche man in einem Punkte des Durchschnit senkrecht auf die eine Ebene M errichtet, in der andern Ebene CF.

- 1) Wenn man in M die AE \perp CD zieht, so ist \sphericalangle BAE = R, weil $CF \perp M$ steht, und weil auch \sphericalangle BAC = R, so ist $AB \perp M$ (§ 162).
- 2) Würde AB nicht in CF liegen, so könnte man aus A in CF eine Senkrechte auf CD ziehen, mithin eine zweite Senkrechte auf M durch den nämlichen Punkt A errichten, was aber nicht möglich ist (§ 163).



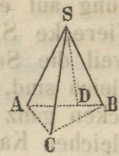
§ 182. Der Durchschnit AB zweier Ebenen P und Q, die auf einer dritten Ebene M senkrecht stehen, ist auf der letztern Ebene senkrecht.

Errichtet man in A eine Senkrechte auf M, so muss dieselbe in P und Q liegen (§ 181, 2), also in ihrem Durchschnitte AB.

§ 183: *Erklärungen.* Der Raum, welcher zwischen mehrern, in einem und demselben Punkte sich schneidenden Ebenen liegt, wird ein Körperwinkel oder eine Raumecke genannt. Der, allen Ebenen gemeinsame Punkt heisst die Spitze, die geraden Linien, in welchen die Ebenen einander durchschneiden, nennt man die Kanten, und die von diesen gebildeten ebenen Winkel die Kantenwinkel der Raumecke. Je zwei sich schneidende Ebenen (Seitenflächen) bilden einen Flächenwinkel. Nach der Anzahl der Seitenflächen oder Kanten unterscheidet man drei-, vier-, fünfseitige u. s. w. Raumecken.

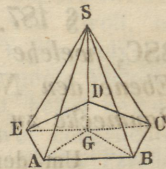
§ 184. *In jedem dreiseitigen Körperwinkel SABC ist die Summe von je zwei Kantenwinkeln grösser als der dritte.*

Es sei \sphericalangle ASB der grösste von den drei Kantenwinkeln. Man mache \sphericalangle ASD = ASC, ziehe die Gerade ADB willkürlich, mache SC = SD und ziehe AC und BC. Nun ist das \triangle ASC \cong ASD, (§ 9), also AC = AD, und weil AC + BC > AB, so ist BC > BD, folglich in den Dreiecken BSC und BSD, wo SC = SD, SB = SB ist, (§ 14) \sphericalangle BSC > BSD, also auch ASC + BSC > ASD + BSD, oder ASC + BSC > ASB.



§ 185. *Die Summe aller Kantenwinkel einer Raumecke (mit lauter auswärtsgelenden Flächenwinkeln) ist immer kleiner als vier Rechte.*

Man durchschneide die Raumecke mit einer Ebene ABCDE, und ziehe von einem Punkte G in dieser Ebene nach allen Ecken die Linien GA, GB..., so ist die Summe aller Winkel in den um S gebildeten Dreiecken SAB, SBC... gleich der Summe aller Winkel in den um G herumliegenden Dreiecken AGB, BGC... Nun ist aber \sphericalangle ABC < SBA + SBC (§ 184), ebenso \sphericalangle BCD < SCB + SCD u. s. w., also die Summe der Umfangswinkel ABC, BCD..., des Vielecks kleiner als die Summe der Winkel SBA, SBC, SCB..., woraus folgt, dass die Winkel um G, d. h. 4 R mehr betragen als die Winkel um S.



§ 186. *Wenn zwei Raumecken aus drei gegenseitig gleichen Kantenwinkeln gebildet werden, so machen die Ebenen, in welchen die gleichen Kantenwinkel liegen, mit einander gleiche Neigungswinkel.*

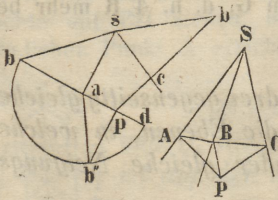


Es sei Winkel $ASC = asc$, $\sphericalangle ASB = asb$, $\sphericalangle BSC = bsc$. Um nun zu zeigen, dass die Neigungswinkel an AS und as gleich sind, ziehe man aus einem beliebigen Punkte B in SB die Linie $BP \perp$ auf die Ebene ASC, aus dem Fusspunkte P der Senkrechten ziehe man $PA \perp SA$, $PC \perp SC$, endlich AB und BC. Ferner mache man $sb = SB$, $bp \perp asc$, $pa \perp sa$, $pc \perp sc$ und ziehe ab und bc. Da nun $SB = sb$, $\sphericalangle ASB = asb$, $\sphericalangle BAS = R = bas$ (§ 166), so ist $\triangle ASB \cong asb$, also $SA = sa$, und $AB = ab$. Auf gleiche Weise ist $SC = sc$, $BC = bc$. Demnach ist das Viereck $SAPC \cong sabc$, wie beim Aufeinanderlegen sich sogleich ergibt, folglich $AP = ap$, und daher sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ABP$ und $\triangle abp$ congruent (§ 23), so dass also die Neigungswinkel BAP und bap gleich sind. Die Senkrechten BP und bp können auch ausserhalb der beiden Raumecken fallen; der Beweis wird sich aber immer auf dieselbe Art führen lassen.

Zusatz. Folgen die gleichen Kantenwinkeln in derselben Ordnung auf einander, wie in den Raumecken S und s, und legt man die Vierecke $SAPC$ und $sabc$ genau auf einander, so fällt Punkt P in p, und weil die Senkrechten BP und bp in congruenten Dreiecken liegen, also gleich sind, so fällt B in b, also SB auf sb, so dass mithin beide Raumecken ganz in einander fallen, d. h. congruent sind. Folgen aber die gleichen Kantenwinkel in umgekehrter Ordnung auf einander, oder, was dasselbe ist, haben die Senkrechten BP und bp gegen die Ebenen ASC und asc eine entgegengesetzte Richtung (d. h. muss man sich etwa SB über, dagegen sb unter der Ebene des Papiers denken), so können beide Raumecken nicht in einander fallen, obschon die Ebenen der gleichen Kantenwinkel eine gleiche Neigung gegen einander haben. Zwei Raumecken, deren Kantenwinkel und Neigungswinkel zwar einzeln gegenseitig gleich sind, aber in umgekehrter Ordnung auf einander folgen, werden symmetrische genannt.

§ 187. Aus den drei gegebenen Kantenwinkeln ASB , ASC , BSC , welche eine Raumecke bilden, durch eine Zeichnung in der Ebene den Neigungswinkel zwischen irgend zwei Seitenflächen der Raumecke zu finden.

Um den Neigungswinkel an der Kante AS zu finden, mache man an der Raumecke S dieselbe Construction, wie in § 186, so ist PAB der Winkel, der in der Ebene construiert werden soll. Zu diesem Zwecke mache man in einer Ebene $\sphericalangle bsa = BSA$, $\sphericalangle asc = ASC$, $\sphericalangle csb' = CSB$, ferner $bs = b's = BS$, ziehe aus b die $ba \perp sa$ und aus b' die $b'c \perp sc$, verlängere ba und b'c, bis sie sich in p schneiden, beschreibe aus a mit ab einen Halbkreis, ziehe aus p die $pb'' \perp ab$ und ziehe ab''; so ist pab'' der verlangte Winkel. Denn $\triangle bsa \cong BSA$ (da $bs = BS$, $\sphericalangle a = R = A$,



$\sphericalangle s = S$), also $sa = SA$ und $ab = AB$, folglich auch $ab' = AB$. Auf gleiche Weise wird bewiesen, dass $sc = SC$. Da nun hieraus hervorgeht, dass Viereck $sapc \cong SAPC$ und mithin $ap = AP$ ist, so sind die bei p und P rechtwinkligen Dreiecke apb' und APB congruent (§ 23), folglich $\sphericalangle pab' = PAB$. Fiele der Punkt p zwischen a und b , so wäre $\sphericalangle dab'$ stumpf, würde aber immer die Neigung der Ebenen ASB und ASC messen. Uebrigens ist zu bemerken, dass sich aus drei ebenen Winkeln nur dann eine Raumecke beschreiben lässt, wenn erstlich die Summe je zweier Winkel grösser als der dritte Winkel, und zweitens die Summe der drei Winkel kleiner als $4 R$ ist (§ 184, § 185).

§ 188. (Fig. § 187). Aus zwei gegebenen Kantenwinkeln ASB und ASC und dem Neigungswinkel BAP ihrer Ebenen den dritten Kantenwinkel einer dreiseitigen Raumecke zu finden.

Man mache $\sphericalangle bsa = BSA$, $\sphericalangle asc = ASC$, ziehe aus b die $bd \perp sa$, beschreibe aus a mit ab einen Halbkreis, mache $dab' = BAP$, ziehe $b'p \perp bd$, ferner $pc \perp sc$, beschreibe aus s mit sb einen Bogen, welcher die verlängerte pc in b' schneidet, und ziehe sb' ; so ist der $\sphericalangle csb'$ dem gesuchten dritten $\sphericalangle CSB$ der Raumecke S gleich, weil, wenn man mit den drei Kantenwinkeln asb , asc , csb' eine Raumecke bildet, die Ebenen der beiden ersten Kantenwinkel den Neigungswinkel $b'ap = BAP$ bilden müssen.

II. Von den Polyedern.

§ 189. Erklärungen. 1) Jeder von lauter Ebenen begränzte Körper heisst ein Polyeder. Die ein Polyeder begränzenden Ebenen heissen seine Seitenflächen, die geraden Linien, in welchen diese zusammenstossen, seine Kanten, und die Punkte, in welchen mehrte Kanten zusammenstossen, seine Ecken. Ein Tetraeder ist von vier, ein Hexaeder von sechs, ein Oktaeder von acht, ein Dodekaeder von zwölf, ein Ikosaeder von zwanzig Ebenen begränzt u. s. w. 2) Ein Polyeder, dessen Seitenflächen sämmtlich regelmässige, einander congruente Vielecke, und dessen Körperwinkel sämmtlich einander congruent sind, heisst regelmässig. 3) Das Prisma ist ein Körper, welcher von zwei congruenten und parallelen Vielecken als Grundflächen, und von so vielen Parallelogrammen, als eine der Grundflächen Seiten hat, als Seitenflächen eingeschlossen wird. Zieht man (Fig. § 192) in einer mit dem beliebigen Vieleck $ABCDE$ parallelen Ebene die Linie $FG \parallel AB$, $GH \parallel BC$, $HK \parallel CD \dots$, so dass das entstehende Vieleck $FGHKL \cong ABCDE$ ist, und verbindet man die ähnlich liegenden Winkelspitzen durch gerade Linien AF , $BG \dots$, so sind die Ebenen AG , $BH \dots$ Parallelogramme, und der Körper $ABCDEFGHKL$ ist ein Prisma. Nach der Anzahl der Seitenflächen heisst ein Prisma drei-, vier-, fünfseitig u. s. w. Die Höhe eines Prisma's ist die Senkrechte aus irgend einem Punkte der obern Grundfläche auf die untere oder deren Verlängerung. Ein Prisma heisst gerade, wenn die

Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen, und alsdann ist jede Seitenkante der Höhe des Prismas gleich. In jedem andern Falle ist das Prisma schief, und seine Höhe ist kleiner als eine der Seitenkanten. 4) Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heisst Parallelepipedon, und dieses wird ein rechtwinkliges genannt, wenn alle dasselbe begränzenden Ebenen Rechtecke sind. Der Würfel oder Cubus (das regelm. Hexaeder) ist ein rechtwinkliges Parallelepipedon, welches von (sechs) gleichen Quadraten eingeschlossen wird. Die Kante des Würfels wird seine Seite genannt. 5) Die Pyramide ist ein Körper, welcher von irgend einem Vieleck als Grundfläche, und so vielen in einem Punkte zusammenstossenden Dreiecken, als die Grundfläche Seiten hat, als Seitenflächen eingeschlossen wird. Nach der Anzahl der Seitenflächen heisst eine Pyramide drei-, vier-, fünfseitig u. s. w. Der Punkt, in welchem alle Seitenflächen zusammenstossen, heisst die Spitze der Pyramide, und die von derselben auf die Grundfläche oder deren Verlängerung gefällte Senkrechte ihre Höhe. Eine regelmässige Pyramide ist eine solche, deren Grundfläche ein regelmässiges Vieleck ist, und deren Höhe durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht. Die einfachste von allen Pyramiden ist die dreiseitige Pyramide oder das Tetraeder. Wenn eine Pyramide von einer mit der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so heisst das Stück, welches übrig bleibt, wenn man die kleine Pyramide wegnimmt, eine abgestumpfte Pyramide, oder ein Pyramiden-Stumpf. Die Senkrechte zwischen den beiden parallelen Grundflächen des Stumpfes heisst seine Höhe. 6) Jede gerade Linie, welche zwei Ecken eines Polyeders verbindet, ohne selbst eine Kante zu sein oder in einer Seitenfläche zu liegen, heisst eine Diagonale des Polyeders, so wie jede Ebene, welche durch zwei Kanten eines Polyeders gelegt ist, und nicht mit einer Seitenfläche desselben zusammenfällt, eine Diagonalebene genannt wird. 7) Zwei Körper heissen einander gleich, wenn sie, abgesehen von ihrer Gestalt, einen gleich grossen Raum einnehmen; sie heissen congruent, wenn sie in einander gelegt, in ihrer ganzen Ausdehnung genau zusammenfallen. Zwei Polyeder von gleichviel Seitenflächen sind ähnlich, wenn ihre übereinstimmig liegenden Seitenflächen ähnliche Vielecke bilden und ihre übereinstimmig liegenden Körperwinkel congruent sind. Zwei Polyeder heissen symmetrisch, wenn sie in eine solche Lage auf den beiden entgegengesetzten Seiten einer Ebene gebracht werden können, dass je zwei gleichliegende Ecken von dieser Ebene gleich weit entfernt sind, und in derselben Senkrechten auf diese Ebene liegen. 8) Es sollen im Folgenden nur convexe Polyeder betrachtet werden, d. h. solche, deren Oberfläche von einer geraden Linie in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann. In diesen Polyedern kann keine Seitenfläche, verlängert, den Körper schneiden; also kann das Polyeder nicht zum Theil über, und zum Theil unter der Ebene einer von seinen Seiten liegen.

§ 190. Zwei Polyeder können nicht die nämlichen und gleich viel Ecken haben, ohne ganz in einander zu fallen.

Denn, ist eins der beiden Polyeder gegeben, und könnte man ein anderes von ihm verschiedenes mit den nämlichen Ecken construiren, so

müssten nicht alle Seitenflächen des letztern mit denen des erstern durch die nämlichen Punkte gehen. Dann aber würden einige der neuen Seitenflächen das erste Polyeder schneiden, und es würden daher einige Ecken über und andere unter diesen Seitenflächen liegen, was aber bei einem convexen Polyeder nicht möglich ist.

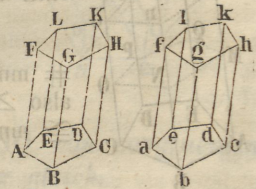
§ 191. Zwei symmetrische Polyeder sind ebenso wie zwei congruente Polyeder in allen einzelnen Stücken einander gleich, die gegenseitig gleichen Stücke liegen aber in umgekehrter Ordnung.

Es seien ABCD und abcd entsprechende Theile zweier beliebiger sym. Polyeder, M sei die Ebene, auf welcher die Geraden Aa und Bb senkrecht stehen, so dass $An = an$, $Bp = bp$ ist. Da das Trapez $ABpn \cong abpn$, wie sich durch Aufeinanderlegen sogleich zeigen lässt, so ist $AB = ab$. Da ebenso $AC = ac$, $AD = ad \dots$, so sind die entsprechenden Kanten in beiden Polyedern gegenseitig gleich. Hieraus folgt, dass die Dreiecke, welche entsprechende Seitenflächen beider Polyeder bilden, z. B. ABD und abd, ACD und acd u. s. w. congruent sind. Wenn aber zwei entsprechende Seitenflächen Vierecke oder Fünfecke u. s. w. bilden, so kann man sie durch Diagonalen in lauter Dreiecke zerlegt denken und ihre Congruenz aus der Congruenz der letztern folgern. Es sind somit alle entsprechenden Seitenflächen beider Polyeder ebenfalls gegenseitig congruent. Hieraus folgt von selbst, dass ferner die entsprechenden Kantenwinkel gegenseitig gleich sind. Endlich folgt aus der Gleichheit dieser die Gleichheit der Flächenwinkel für zwei entsprechende dreiseitige Körperwinkel beider Polyeder (§ 186), und wenn zwei Körperwinkel 4, 5, 6... seitig sein sollten, so kann man dieselben in lauter dreiseitige zerlegt denken, und aus der Gleichheit der einzelnen Flächenwinkel auf die Gleichheit der Flächenwinkel in den mehrseitigen Körperwinkeln einen Schluss machen. Man sieht auch, dass die entsprechend gleichen Stücke in umgekehrter Ordnung auf einander folgen, woher es nicht möglich ist, die Polyeder so in einander zu legen, dass sie vollständig zusammenfallen.

Zusätze. 1) Die entsprechenden Körperwinkel in zwei sym. Polyedern sind symmetrisch. 2) Zu jedem Polyeder ist nur ein einziges Polyeder symmetrisch, weil zwei Polyeder, welche einem dritten symmetrisch sind, unter einander congruent sein müssen.

§ 192. Zwei Prismen AK und ak sind congruent, wenn ein (dreiseitiger) Körperwinkel aus congruenten und ähnlich liegenden Figuren begränzt wird.

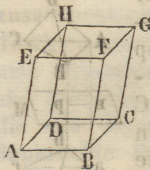
Es sei $ABCDE \cong abcde$, $AG \cong ag$, $BH \cong bh$. Legt man die (nach § 186, Z.) congruenten Körperwinkel B und b in einander, so dass die Ebenen AC und ac, AG und ag, BH und bh sich decken, so fällt die Kante FG auf fg, GH auf gh, also auch die Grundfläche FH in die Grundfläche fh. Da aber diese Grundflächen congruent sind, weil sie den untern



Grundflächen congruent sein müssen, so liegt HK auf hk, KL auf kl u. s. w. so dass also beide Prismen vollständig zusammenfallen.

Zusatz. Zwei Gerade Prismen mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind congruent. Denn, wenn ABCDE \cong abcde, BG \perp AC, bg \perp ac, und die Höhe BG = bg, so ist auch AG \cong ag und BH \cong bh.

§ 93. In einem Parallelepipedon AG sind die gegenüberliegenden Parallelogramme, z. B. AF und DG, congruent und parallel.



Es ist (§ 1, 7 und § 38) AB \parallel DC, AE \parallel DH, EF \parallel HG u. s. w., also sind auch die Winkel der Parallelogramme gegenseitig gleich (§ 175, 1). Hieraus folgt, dass AF und DG sowol congruent als parallel sind (§ 175, 2).

Zusätze. 1) Als Grundflächen eines Parallelepipedons kann man jede Seitenfläche mit der ihr gegenüberliegenden betrachten. 2) Wenn drei gerade Linien AB, AD, AE gegeben sind, welche durch den nämlichen Punkt A gehen, und mit einander beliebige Winkel bilden, so kann man mit denselben ein Parallelepipedon construiren, indem man durch den Endpunkt jeder der drei Linien eine Ebene mit der Ebene der beiden andern Linien parallel legt.

§ 194. (Fig. § 193). In einem Parallelepipedon sind die gegenüberliegenden Körperwinkel symmetrisch, und die Diagonalen, welche die Spitzen dieser Winkel verbinden, schneiden und halbiren einander.

1) Es ist \sphericalangle BAE = BFE = CGH, \sphericalangle BAD = BCD = FGH, \sphericalangle DAE = DHE = CGF, und weil die gleichen Winkel in umgekehrter Ordnung in beiden Körperwinkeln A und G auf einander folgen, so sind diese symmetrisch (§ 186). 2) Denkt man sich die Diagonalen AG und BH gezogen, so müssen sich dieselben, weil die Diagonalebene ABGH ein Parallelogramm ist, schneiden und halbiren (§ 40). Eben so schneiden und halbiren sich die Diagonalen AG und EC, woraus folgt, dass sich die vier Diagonalen in dem nämlichen Punkte schneiden und halbiren, welchen man als den Mittelpunkt des Parallelepipedons ansehen kann.



§ 195. Wenn zwei parallele Ebenen alle Seitenkanten eines Prismas AJ durchschneiden, so sind die Schnitte MO und mo congruente Vielecke.

Denn MN \parallel mn (§ 172) und Mm \parallel Nn, also MN \cong mn (§ 38, Z.). Eben so ist NO \cong no, OP \cong op u. s. w. also \sphericalangle M = m, \sphericalangle N = n... (§ 175), folglich MNOPO \cong mnopq.

Zusatz. Jeder mit der Grundfläche eines Prismas parallele Schnitt ist der Grundfläche congruent.

§ 196. Die beiden dreiseitigen Prismen $ABCabc$ und $ADCadc$, in welche ein Parallelepipedon $ABCDCabc$ durch eine Diagonalebene getheilt wird, sind einander symmetrisch und gleich.

1) Es ist $AB = DC = dc$ (§ 38); ebenso $AD = bc$, $Dd = Bb$ u. s. w., also sind die Kanten in beiden Prismen gegenseitig gleich. Ferner ist $\triangle ABC \cong cda$, $\triangle abc \cong CDA$ (§ 15), $Parall. ABba \cong cdDC$ (§ 193) u. s. w., also sind auch alle Gränzflächen beider Prismen gegenseitig congruent. Hieraus folgt die Gleichheit aller Kanterwinkel, woraus wiederum die Gleichheit aller Flächenwinkel sich ergibt (§ 186), und weil endlich die gegenseitig gleichen Stücke in umgekehrter Ordnung in beiden Prismen auf einander folgen, so sind diese symmetrisch (§ 191).

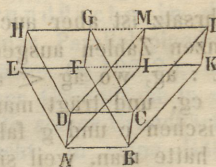
2) Legt man durch A und a zwei Ebenen senkrecht auf die Kante Aa , so sind die Vierecke $AFGE$ und $afge$ congruent (§ 171, § 195) und zwar Parallelogramme (§ 172, § 1, 7) und ebenso sind die Seitenflächen $AFfa$, $AEea$... des Polyeders $AFGEafge$ Parallelogramme, so dass also dieser ein gerades Parallelepipedon bildet. Nun sind die Körper $ABCGF$ und $abcgf$ congruent, wie sich beim Ineinanderlegen derselben wegen der gegenseitigen Gleichheit aller ihrer Stücke sogleich ergibt, und wenn man diese Körper nach einander von dem Körper $AFGbc$ wegnimmt, so erhält man als gleiche Reste die Prismen $ABCabc$ und $ADCadc$. Auf dieselbe Weise ist $Prisma ADCadc = AEGaeg$, und weil $Prisma AFGafg \cong AEGaeg$ (§ 192, Z), so ist $ABCabc = ADCadc$.



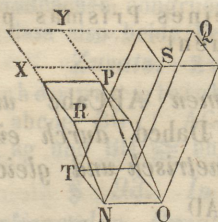
Zusatz. Jedes dreiseitige Prisma $ABCabc$ ist die Hälfte eines Parallelepipedons Ac , welches den nämlichen Körperwinkel B , und die nämlichen Kanten BA , BC , Bb hat.

§ 197. Zwei Parallelepipedona AG und AL , welche auf derselben Grundfläche stehen, und deren obere Grundflächen in einer und derselben Ebene zwischen den nämlichen Parallelen liegen, sind gleich.

Es sind die dreiseitigen Prismen $AEIDHM$ und $BFKCGL$ congruent (§ 192), indem $\triangle AEI \cong BFK$ (§ 9), $Parall. AH \cong BG$, $Parall. AM \cong BL$ ist (§ 193). Zieht man nun von dem ganzen Körper $AECL$ nach einander diese Prismen ab, so müssen die nachbleibenden Parallelepipedona AG und AL gleich sein.

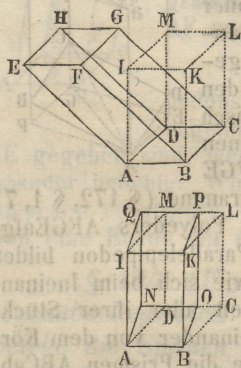


§ 198. Zwei Parallelepipedona NP und NQ von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.



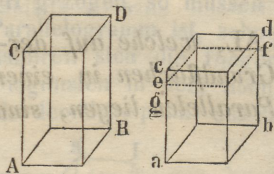
Wegen der gleichen Höhe beider Parallelepipeda liegen ihre obern Grundflächen RP und SQ in der nämlichen Ebene, und erweitert man die Ebenen OS, TQ, TR, OP, QS, RP, um ein drittes Parallelepipeton NY zuzubilden, dessen Grundflächen TO und XY sind, so ist NY jedem der beiden Parallelepipeda NP und NQ gleich (§ 197), folglich ist auch $NP = NQ$.

§ 199. Jedes Parallelepipeton CE lässt sich in ein rechtwinkliges Parallelepipeton von gleicher Grundfläche und Höhe verwandeln.



Legt man durch AB, BC, CD, AD senkrechte Ebenen auf AC, und erweitert die Ebene EG hinreichend, so hat das dadurch entstandene Parallelepipeton AL mit CE gleichen Inhalt (§ 198), so wie gleiche Grundfläche und Höhe, und ist AC ein Rechteck, so ist AL rechtwinklig. Ist aber AC kein Rechteck, so lege man, wie die zweite Figur zeigt, durch AJ und BK senkrechte Ebenen auf die Ebene AK, wodurch man das rechth. Parallelepipeton ABPQ erhält, welches gleich ABML ist (§ 197), weil beide als auf einerlei Grundfläche AK stehend betrachtet werden können. Da nun $ABON = ABCD$ (§ 81), so haben ABPQ und ABML auch gleiche Grundfläche und gleiche Höhe, folglich hat auch CE mit ABPQ gleichen Inhalt, gleiche Grundfläche und gleiche Höhe.

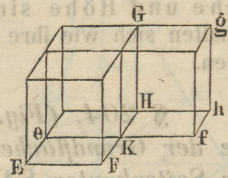
§ 200. Zwei rechtwinklige Parallelepipeda AD und ad von congruenten Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.



Verhalten sich die Höhen AC und ac z. B. wie 7 zu 5, so theile man AC in 7 und ac in 5 gleiche Theile, und lege in beiden Parallelepipeda durch alle Theilungspunkte parallele Ebenen zu den Grundflächen, dann zerfällt AD in 7 und ad in 5 einander gleiche Parallelepipeda (§ 195, § 198), so dass also $AD : ad = 7 : 5 = AC : ac$. Der Lehrsatz ist aber auch wahr, wenn das Verhältniss von AC zu ac nicht in ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann. Denn verhielte sich $AD : ad = AC : ag$, wo $ag < ac$ ist, so theile man AC in gleiche Theile, jeden kleiner als cg, und trägt man dieselben auf ac auf, so wird ein Theilungspunkt e zwischen c und g fallen. Legt man durch e eine zu ab parallele Ebene, so hätte man, weil sich AC und ae wie zwei ganze Zahlen verhalten, $AD : af = AC : ae$. Aus beiden Proportionen erhalte man $ad : af = ag : ae$, was aber nicht möglich ist, indem $ad > af$, dagegen $ag < ae$ ist. Da sich nun ebenso zeigen lässt, dass das vierte Glied der Proportion nicht grösser als ac sein könne, so muss sich verhalten $AD : ad = AC : ac$.

§ 201. Zwei rechtwinklige Parallelepipeda EG und eg von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Denkt man sich die Parall. EG und eg so in einander geschoben, wie die Figur zeigt, so entsteht ein drittes Parall. eG, welches mit jedem der beiden gegebenen eine Grundfläche gemein hat. Folglich hat man (§ 200) $eg : eG = ef : eK$ und $eG : EG = KH : FH$, also durch Multiplication beider Proportionen mit einander $eg : EG = ef \cdot KH : eK \cdot FH = ef \cdot fh : EF \cdot FH$, d. h. $eg : EG = \text{Grundfl. eh} : \text{Grundfl. EH}$.



§ 202. Zwei rechtwinklige Parallelepipeda verhalten sich allgemein, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

Es seien P und p zwei rechth. Parallelepipeda, G und g ihre Grundflächen, H und h ihre Höhen. Denkt man sich nun ein drittes rechth. Parallelepipeton Q, welches mit dem ersten congruente Grundfläche G und mit dem zweiten gleiche Höhe h hat, so ist (§ 200, § 201) $P : Q = H : h$ und $Q : p = G : g$, also $P : p = GH : gh$.

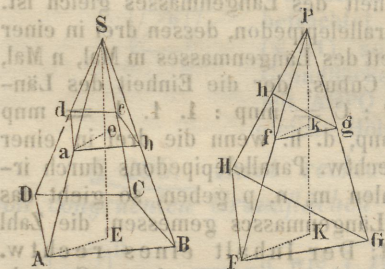
§ 203. Zusätze. 1) Zur Einheit des Körpermasses nimmt man immer den Cubus, dessen Seite der Einheit des Längenmasses gleich ist. Bezeichnet man nun mit P ein rechth. Parallelepipeton, dessen drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten die Einheit des Längenmasses m Mal, n Mal, p Mal enthalten; bedeutet ferner C einen Cubus, der die Einheit des Längenmasses zur Seite hat, so ist (§ 202) $P : C = mnp : 1 \cdot 1 \cdot 1 = mnp : 1$, also $P = mnp \cdot C$ oder $P/C = mnp$, d. h. wenn die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten eines rechth. Parallelepipedons durch irgend ein Längenmass gemessen, die Zahlen m, n, p geben, so giebt das Parallelepipeton durch den Cubus jenes Längenmasses gemessen, die Zahl mnp, was man gewöhnlich kurz so ausdrückt: Der Inhalt eines rechth. Parallelepipedons ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche in die Höhe. 2) Der Inhalt eines jeden Parallelepipedons ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche in die Höhe, da jedes Parallelepipeton gleich ist einem rechtwinkligen von gleicher Grundfläche und Höhe (§ 199). 3) Der Inhalt eines dreiseitigen Prismas ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche in die Höhe. Denn ein dreiseitiges Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedons von der nämlichen Höhe und der doppelten Grundfläche (§ 196, 2), und weil das Parallelepipeton gleich ist dem Produkte seiner Grundfläche in die Höhe, so ist das dreiseitige Prisma gleich dem Produkte seiner Grundfläche, welche die Hälfte der Grundfläche des Parall. ausmacht, in seine Höhe. 4) Der Inhalt eines jeden Prismas ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche in die Höhe. Ein mehrseitiges Prisma nämlich kann in lauter dreiseitige von gleicher Höhe zerlegt werden, woraus folgt, dass die Summe aller dreiseitigen Prismen, d. h. der Inhalt des mehrsei-

tigen, gleich ist dem Produkte aus der gemeinschaftlichen Höhe in die Summe der Grundflächen aller dreiseitigen Prismen, d. h. in die Grundfläche des mehrseitigen Prismas. 5) Zwei Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich. 6) Zwei Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen, und von gleicher Grundfläche wie ihre Höhen.

§ 204. (Fig. § 205) Wird eine Pyramide $SABCD$ durch eine der Grundfläche parallele Ebene $abcd$ geschnitten, so werden ihre Seitenkanten SA, SB, \dots und ihre Höhe SE in proportionale Theile getheilt, und der Schnitt ist ein der Grundfläche ähnliches Vieleck.

Da $AB \parallel ab, AE \parallel ae, AD \parallel ad, \dots$ (§ 172), so ist $SE : Se = SA : Sa = SB : Sb$ u. s. w. (§ 94). Ferner ist $\sphericalangle DAB = \sphericalangle dab, \sphericalangle ABC = \sphericalangle abc, \dots$ (§ 175), und weil $AD : ad (= AS : aS) = AB : ab, \dots$, so ist $abcd \sim ABCD$.

§ 205. In zwei Pyramiden, $SABCD$ und $PFGH$, von gleichen Grundflächen und Höhen sind alle in beiden gleich weit von den Spitzen entfernten, der Grundfläche parallelen Schnitte, z. B. $abcd$ und fg , einander gleich.

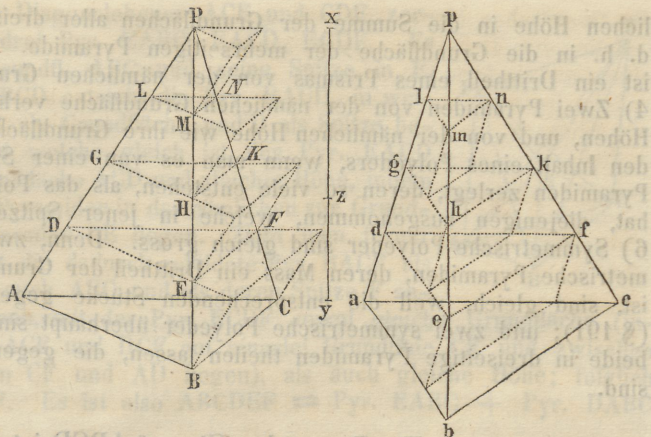


Sind SE und Se, PK und Pk die Höhen der Pyramiden, so hat man (§ 204, § 111) $ABCD : abcd = AB^2 : ab^2 = SE^2 : Se^2$, und $FGH : fgh = FG^2 : fg^2 = PK^2 : Pk^2$. Da nun aber nach der Voraussetzung $ABCD = FGH, SE = PK, Se = Pk$, also auch $SE^2 = PK^2$ und $Se^2 = Pk^2$, so muss $abcd = fgh$ sein.

§ 206. Zwei dreiseitige Pyramiden $PABC$ und $pabc$ von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe xy sind einander gleich.

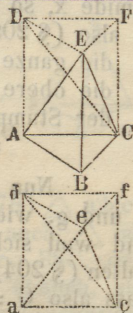
Wäre $PABC$ nicht gleich $pabc$, so sei $PABC > pabc$ und zwar $PABC - pabc = Q$, wo Q ein Prisma von der Grundfläche ABC und der Höhe yz vorstellt. Theilt man nun die gemeinschaftliche Höhe xy in gleiche Theile, welche kleiner sind als yz , und legt durch alle Theilungspunkte derselben Ebenen mit den Grundflächen ABC und abc parallel, welche wir als in einer und derselben Ebene liegend annehmen, so ist der Schnitt $DEF = def, GHK = ghk$ u. s. w. (§ 205). Construiert man ferner über ABC, DEF, \dots die äussern Prismen $ABCD, DEFG, \dots$, dagegen unter def, ghk, \dots die innern Prismen $defa, ghkd, \dots$, so ist das zweite äussere Prisma $DEFG$ dem ersten innern $defa$, das dritte äussere $GHLK$ dem zweiten innern $ghkd$ u. s. w. gleich (§ 203, 5), so dass das unterste äussere Prisma $ABCD$

die Differenz zwischen der Prismen-Summe in der Pyr. PABC, und der Prismen-Summe in der Pyr. pabc bildet. Da nun die Prismen-Summe in PABC grösser ist als die Pyramide selbst, hingegen die Prismen-Summe in pabc kleiner ist als diese Pyramide, so muss die Differenz der beiden Prismen-Summen grösser sein als die Differenz der beiden Pyramiden, d. h. es ist Prisma ABCD > Prisma Q. Es muss aber im Gegentheil sein ABCD < Q, indem beide Prismen zwar gleiche Grundflächen haben, aber die Höhe des erstern kleiner ist als die Höhe yz des andern; folglich ist die Annahme, dass PABC > pabc sei, nicht richtig; also sind die Pyramiden PABC und pabc einander gleich.



§ 207. Jede dreiseitige Pyramide EABC ist der dritte Theil eines Prismas ABCDEF von einerlei Grundfläche und Höhe.

Ex. M. v. T. 1.



Män nehme die Pyr. EABC von dem Prisma ABCDEF weg, so bleibt die vierseitige Pyr. EACFD nach, welche in der zweiten Figur besonders dargestellt ist, und legt man durch E, C, D eine Ebene, so zertfällt dieselbe in die beiden dreiseitigen Pyramiden EACD und ECDF, welche wegen gleicher Höhe und gleicher Grundfläche (§ 82) gleich sind (§ 206). Da ferner die Pyramiden ECDF und EABC die gleichen Grundflächen DEF und ABC, und einerlei Höhe haben, also ebenfalls gleich sind, so sind die drei Pyramiden EACD, ECDF, EABC einander gleich, und weil sie zusammen das Prisma bilden, so ist EABC der dritte Theil desselben.

§ 208. Zusätze. 1) Der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Theil des Produkts ihrer Grundfläche in ihre Höhe. 2) Der Inhalt einer jeden Pyramide ist gleich dem dritten Theil des Produkts aus ihrer Grundfläche in ihre Höhe. Denn, eine mehrseitige Pyramide kann durch Diagonalebene, welche sämmtlich durch ihre Spitze gehen, in lauter dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe zerlegt werden, woraus folgt, dass die Summe aller dreiseitigen Pyramiden, d. h. der Inhalt der mehrseitigen Pyramide, gleich ist dem dritten Theil des Produkts aus der gemeinschaft-

lichen Höhe in die Summe der Grundflächen aller dreiseitigen Pyramiden, d. h. in die Grundfläche der mehrseitigen Pyramide. 3) Jede Pyramide ist ein Drittheil eines Prismas von der nämlichen Grundfläche und Höhe. 4) Zwei Pyramiden von der nämlichen Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen, und von der nämlichen Höhe wie ihre Grundflächen. 5) Man findet den Inhalt eines Polyeders, wenn man es von einer Spitze aus in lauter Pyramiden zerlegt, deren so viele entstehen, als das Polyeder Seitenflächen hat, diejenigen ausgenommen, welche in jener Spitze zusammenstossen. 6) Symmetrische Polyeder sind gleich gross. Denn, zwei dreiseitige symmetrische Pyramiden, deren Mass ein Drittheil der Grundfläche in die Höhe ist, sind gleich, weil die entsprechenden Stücke gegenseitig gleich sind (§ 191); und zwei symmetrische Polyeder überhaupt sind gleich, weil sich beide in dreiseitige Pyramiden theilen lassen, die gegenseitig symmetrisch sind.

§ 209. Ein Pyramiden-Stumpf ABCD ist gleich der Summe dreier Pyramiden, deren Höhe der Höhe h des Stumpfes gleich ist, und deren Grundflächen die beiden Grundflächen G und g des Stumpfes, und die mittlere Proportionalfläche, \sqrt{Gg} , zwischen diesen Grundflächen sind.

Es sei die Höhe der oben abgeschnittenen Pyramide x , so ist die Höhe der ganzen Pyramide $h + x$, also (§ 208, 2)

die ganze Pyramide = $\frac{1}{3}G(h + x)$,

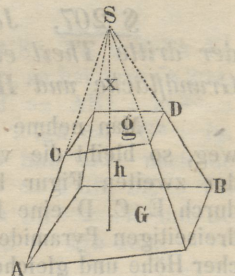
die obere Pyramide = $\frac{1}{3}gx$, folglich

der Stumpf ABCD = $\frac{1}{3}G(h + x) - \frac{1}{3}gx$
 = $\frac{1}{3}x(G - g) + \frac{1}{3}Gh$.

Nun verhalten sich die ähnlichen Grundflächen G und g , wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten, und weil sich diese wie die Höhen $h + x$ und x verhalten (§ 204), auch wie die Quadrate der letztern, so dass also $G : g = (h + x)^2 : x^2$, folglich

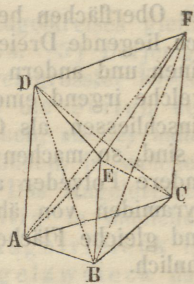
$$(h + x) \sqrt{g} = x \sqrt{G} \text{ oder } h \sqrt{g} = x (\sqrt{G} - \sqrt{g}).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\sqrt{G} + \sqrt{g}$, so ist $h \sqrt{Gg} + gh = x(G - g)$ also $\frac{1}{3}x(G - g) = \frac{1}{3}h \sqrt{Gg} + \frac{1}{3}gh$. Folglich ist der Stumpf ABCD = $\frac{1}{3}Gh + \frac{1}{3}gh + \frac{1}{3}h \sqrt{Gg} = \frac{1}{3}h(G + g + \sqrt{Gg})$.



§ 210. Wird ein dreiseitiges Prisma durch eine gegen die Grundfläche ABC geneigte Ebene DEF geschnitten, so ist der dadurch entstehende Körper ABCDEF dreien Pyramiden gleich, deren Spitzen D, E, F sind, und deren gemeinschaftliche Grundfläche ABC ist.

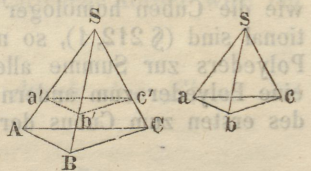
Durch die Diagonalebene ACE und CDE zerfällt ABCDEF in drei Pyr. EABC, EACD, ECDF. Es hat EABC zur Grundfl. ABC und seine Spitze in E. Durch die Ebene BCD entsteht die Pyr. BACD, in welcher man auf ABC als Grundfläche und D als Spitze betrachten kann, und welche gleich ist der Pyr. EACD wegen einerlei Grundfläche ACD und gleicher Höhe, indem die Spitzen beider Pyramiden in der nämlichen zur Grundfläche parallelen Geraden BE liegen. Zieht man ferner AF und BF, so hat die dadurch gebildete Pyr. BACF, als deren Grundfläche auch ABC und als deren Spitze F angesehen werden kann, mit der Pyr. ECDF sowol gleiche Grundfläche (indem die Dreiecke ACF und DCF auf einerlei Grundlinie CF und zwischen denselben Parallelen CF und AD liegen), als auch gleiche Höhe; folglich ist $BACF = ECDF$. Es ist also $ABCDEF = \text{Pyr. EABC} + \text{Pyr. DABC} + \text{Pyr. FABC}$.



Zusatz. Wenn die Kanten AD, BE, CF auf ABC senkrecht stehen, so ist $ABCDEF = \frac{1}{3}ABC (AD + BE + CF)$.

§ 211. Zwei dreiseitige Pyramiden SABC und sabc sind ähnlich, wenn in ihnen zwei übereinstimmig liegende Gränzflächen gegenseitig ähnlich sind und gleiche Flächenwinkel bilden.

Es sei $\triangle ASB \sim \triangle asb$, $\triangle ASC \sim \triangle asc$, Flächenwinkel $BASC = basc$. Macht man $Sa' = sa$, $Sb' = sb$, $Ss' = sc$, und zieht $a'c'$, $a'b'$, $b'c'$, so ist Pyr. $Sa'b'c' \cong sabc$, wie sich beim Ineinanderlegen dieser Pyramiden sogleich ergibt. Nun ist $\triangle a'Sb' \cong \triangle asb$, und weil $\triangle asb \sim \triangle ASB$, so ist auch $\triangle a'Sb' \sim \triangle ASB$; ebenso ist $\triangle a'Sc' \sim \triangle ASC$, also (§ 96) $a'b' \parallel AB$, $a'c' \parallel AC$, folglich (§ 175) $\triangle a'b'c' \parallel \triangle ABC$. Hieraus folgt erstlich, dass $a'b'c' \sim \triangle ABC$ (§ 204), also auch $\triangle abc \sim \triangle ABC$, ferner, dass $b'c' \parallel BC$ (§ 172) und daher $\triangle b'Sc' \sim \triangle BSC$, oder $\triangle bsc \sim \triangle BSC$. Da nun alle Gränzflächen der Pyramiden ähnlich, also auch alle Kantenwinkel gleich, und folglich alle Körperwinkel congruent sind (§ 186, Z.), so ist $SABC \sim sabc$ (§ 189, 7.).



§ 212. Zusätze. 1) Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke in den Pyramiden SABC und sabc folgt, dass $AB : ab = AC : ac = BC : bc = BS : bs = AS : as$ u. s. w. d.h., in ähnlichen dreiseitigen Pyramiden sind die homologen Kanten proportional. 2) Wird eine Pyramide SABC (Fig. § 205) durch eine der Grundfläche parallele Ebene abcd geschnitten, so ist die partielle Pyramide Sabcd der ganzen Pyramide SABC ähnlich. Denn es sind alle Gränzflächen in beiden Pyramiden gegenseitig ähnlich, daher alle Kantenwinkel gegenseitig gleich, und folglich auch alle Körperwinkel gegenseitig congruent. 3) Zwei ähnliche Polyeder lassen sich in gleich viele ähnliche und übereinstimmig liegende dreiseitige Pyramiden zerlegen. Denn

die Oberflächen beider Polyeder können in gleich viele ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke getheilt werden (§ 109), und betrachtet man in dem einen und andern Polyeder alle diese Dreiecke, mit Ausnahme derjenigen, welche irgend einen übereinstimmig liegenden Körperwinkel z. B. A und a einschliessen, als Grundflächen dreiseitiger Pyramiden, deren Spitzen A und a sind, so machen diese Pyramiden in gleicher Anzahl das eine und das andere Polyeder aus. Da sich nun leicht zeigen lässt, dass in je zwei Pyramiden von ähnlicher Lage zwei Gränzflächen gegenseitig ähnlich sind und gleiche Flächenwinkel bilden, so sind je zwei Pyramiden gegenseitig ähnlich.

§ 213. *Zwei ähnliche Polyeder verhalten sich, wie die Cuben ihrer homologen Kanten.*

Von zwei ähnlichen Pyramiden SABCD und Sabcd (Fig. § 205) kann die kleinere so in die grössere gelegt werden, dass beide die Spitze S gemein haben, und weil wegen Aehnlichkeit der homologen Seitenflächen $\sphericalangle SAB = \sphericalangle Sab$, $\sphericalangle SBC = \sphericalangle Sbc$, so ist Ebene AC \parallel ac, folglich (§ 204) AC : ac = AB² : ab² = AS² : aS², ferner SE : Se = AS : aS, also durch Multiplication beider Proportionen mit einander AC \times SE : ac \times Se = AS³ : aS³ oder $\frac{1}{3}AC \times SE : \frac{1}{3}ac \times Se = AS^3 : aS^3$, d. h. die ähnlichen Pyramiden SABCD und Sabcd verhalten sich, wie die Cuben zweier homologen Kanten. Zwei ähnliche Polyeder können in gleich viele, ähnliche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden (§ 212, 3), und weil sich diese wie die Cuben homologer Kanten verhalten, und letztere wiederum proportional sind (§ 212, 1), so muss sich die Summe aller Pyramiden des einen Polyeders zur Summe aller Pyramiden des andern Polyeders, d. h., das eine Polyeder zum andern verhalten, wie der Cubus einer beliebigen Kante des ersten zum Cubus der homologen Kante des andern.

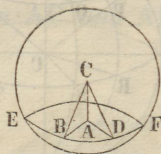
III. Von der Kugel.

§ 214. *Erklärungen.* 1) Die Kugel ist ein Körper, welcher von einer krummen Fläche so begränzt wird, dass alle Punkte derselben von einem innerhalb dieses Körpers liegenden Punkte, welcher Mittelpunkt heisst, gleich weit entfernt sind. Eine Kugel wird durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser beschrieben. Jede gerade Linie vom Mittelpunkte bis zu irgend einem Punkte der Oberfläche heisst Radius oder Halbmesser, sowie jede durch den Mittelpunkt gehende und an beiden Enden von der Kugelfläche begränzte gerade Linie ein Durchmesser der Kugel genannt wird. Alle Radien einer Kugel sind gleich, und ebenso sind alle Durchmesser einer Kugel als doppelte Halbmesser einander gleich. 2) Es wird (§ 215) bewiesen werden, dass jeder Schnitt der Kugel mit einer Ebene ein Kreis ist. Wenn ein solcher Schnitt durch den Mittelpunkt geht, so heisst er ein grösster Kreis, sonst aber ein kleiner Kreis. 3) Eine Ebene berührt die Kugel, wenn sie nur einen Punkt mit ihr gemein hat. 4) Derjenige Punkt der Kugel-

fläche, welcher von allen Punkten des Umfanges eines Kugelkreises gleich weit entfernt ist, heisst der Pol dieses Kugelkreises. 5) Derjenige Theil der Kugelfläche, welcher zwischen den Bogen drei grösster Kreise liegt, heisst ein Kugeldreieck. Diese Bogen, welche die Seiten des Dreiecks heissen, werden hier immer kleiner angenommen, als der halbe Umfang. Die Winkel, welche die Ebenen mit einander bilden, in welchen die Bogen liegen, heissen Winkel des Kugeldreiecks. Das Kugeldreieck heisst rechtwinklig, gleichschenkelig, gleichseitig in ähnlichen Fällen, wie das gradlinige Dreieck (§ 1, 6). 6) Das Kugelvieleck ist ein von mehr als drei Bogen grösster Kreise, das Kugelzweieck dagegen ein von zwei halben Peripherien zweier grössten Kreise begränkter Theil der Kugelfläche. 7) Derjenige Theil der Kugel, welcher von den Ebenen zweier grösster Kreise und dem durch diese gebildeten Zweieck begränzt wird, heisst ein Kugelkeil. 8) Unter einer Kugelpyramide versteht man den Theil der Kugel, welcher von einem Kugelvieleck als Grundfläche und den Ebenen der dieses Vieleck bildenden grössten Kreise begränzt wird. 9) Der zwischen zwei parallelen Ebenen liegende Theil der Kugelfläche heisst eine Zone, und das dazwischen liegende Stück der Kugel selbst ein Kugelabschnitt. Die Ebenen sind die Grundflächen des Abschnittes. Eine von beiden Ebenen kann die Kugel berühren, und in diesem Falle hat der Abschnitt nur eine Grundfläche. Die Senkrechte zwischen beiden Parallelebenen ist die Höhe der Zone sowohl als des Kugelabschnittes. 10) Der durch die Umdrehung eines Kreisausschnittes (DCF in Fig. § 218) um einen seiner Radien (DC) beschriebene Körper wird ein Kugelausschnitt genannt.

§ 215. *Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis.*

Aus dem Mittelpunkte C der Kugel ziehe man CA auf den Schnitt CBDF senkrecht und mehre Linien CB, CD nach beliebigen Punkten des Umfanges des Schnittes. Da nun CB und CD als Radien gleich sind, So ist $AB = AD$ (§ 164), folglich ist der Schnitt ein Kreis, der zum Mittelpunkte A hat.



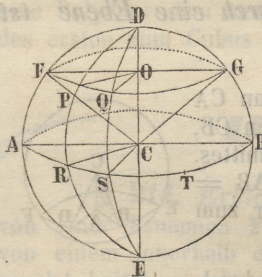
§ 216. *Zusätze.* 1) Geht der Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist sein Radius dem der Kugel gleich. Alle grössten Kreise einer Kugel sind daher gleich. 2) Zwei grösste Kreise halbiren einander; denn ihr Durchschnitt ist, weil er durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser. 3) Jeder grösste Kreis theilt die Kugel und ihre Oberfläche in zwei gleiche Theile, wie durch Ineinanderlegen leicht gezeigt werden kann. 4) Die gerade Linie durch die Mittelpunkte der Kugel und eines kleinen Kreises steht auf der Ebene des letztern senkrecht. 5) Die kleinen Kreise werden um so kleiner, je weiter sie sich vom Mittelpunkte der Kugel entfernen. Denn je grösser der Abstand CA ist, desto kleiner muss die Sehne CAF, d. h., der Durchmesser

des kleinen Kreises sein. 6) Durch zwei gegebene Punkte auf der Oberfläche einer Kugel kann man immer einen grössten Kreis legen, da diese zwei Punkte mit dem Mittelpunkte der Kugel die Lage einer Ebene bestimmen. Befinden sich die beiden Punkte in den Endpunkten eines Durchmessers, so liegen sie mit dem Mittelpunkte der Kugel in gerader Linie, so dass also durch die gegebenen Punkte unendlich viele grösste Kreise sich legen lassen.

§ 217. 1) In jedem Kugeldreieck ist die Summe je zweier Seiten grösser als die dritte Seite. 2) In jedem Kugelvieleck ist die Summe aller Seiten kleiner als der Umfang eines grössten Kreises.

Denkt man sich das Dreieck oder Vieleck als Grundfläche der zugehörigen Kugelpyramide, so sind die Seiten desselben die Masse der Kantenwinkel, welche die in dem Mittelpunkte der Kugel liegende Spitze der Kugelpyramide bilden. Da nun in einem dreiseitigen Körperwinkel die Summe von je zwei Kantenwinkeln grösser ist als der dritte Kantenwinkel (§ 184), und die Summe aller Kantenwinkel eines Körperwinkels kleiner als vier rechte ist (§ 185), so sind auch in einem Kugeldreieck zwei Seiten grösser als die dritte Seite, und in einem Kugelvieleck alle Seiten zusammen kleiner als der Umfang eines grössten Kreises.

§ 218. Steht ein Durchmesser DE senkrecht auf einem grössten Kreise ARB, so sind seine Endpunkte die Pole dieses Kreises und aller seiner Parallelkreise, wie FPG.



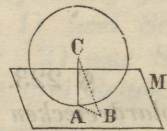
Da DE auf CA, CR, CS... senkrecht steht (§ 158, 1), so sind die Bogen DA, DR, DS, EA, ER... Viertelkreise oder Quadranten, also einander gleich, woraus folgt, dass D und E Pole des Kreises sind. Ferner ist $DE \perp FPG$, weil $DE \perp ARB$ und $ARB \parallel FPG$ ist, und weil DE durch den Mittelpunkt O des Kreises FPG geht, wie aus § 215 folgt, so ist $OF = OP = OQ \dots$, also (§ 164) sind die Sehnen DF, DP... unter sich, und folglich auch die Bogen DF, DP... unter sich gleich, so dass mithin D ein Pol des Kreises FPG ist. Aus den nämlichen Gründen ist E ein Pol des Kreises FPG.

§ 219. Zusätze. 1) Jeder Bogen DR, von einem Punkte des Umfanges eines grössten Kreises ARB nach seinem Pole, ist ein Quadrant, und bildet mit dem Bogen AR einen rechten Winkel. Denn weil $DE \perp ARB$, so ist die Ebene $DER \perp ARB$ (§ 180), folglich ist der Winkel zwischen diesen Ebenen, den wir durch ARD bezeichnen, ein rechter. 2) Um den Pol eines Bogens AR zu finden, ziehe man den unbestimmten Bogen RD auf AR senkrecht, und mache RD einem Quadranten gleich, so ist dessen Endpunkt D einer der Pole des Bogens. Oder, man ziehe in den beiden Punkten A und R die Bogen AD und RD auf AR senkrecht, so ist der

Durchschnittspunkt D dieser beiden Bogen der gesuchte Pol. 3) Wenn D von A und von R um einen Quadranten absteht, so ist D ein Pol des Bogens AR. 4) Vermittels der Eigenschaften der Pole ist man im Stande auf der Kugelfläche eben so leicht Kreisbogen zu ziehen, als auf einer Ebene. Dreht man den Bogen DF um den Punkt D, so beschreibt F einen kleinen Kreis FPG; der Quadrant DA würde einen grössten Kreis beschreiben. 5) Soll man den Bogen AR verlängern, oder soll man durch die Punkte A und R den Bogen eines grössten Kreises ziehen, so beschreibe man aus A und R mit einem Quadranten zwei Bogen, welche sich in D schneiden; man wird nun aus D als Pol mit dem Quadranten DA den Bogen AR beschreiben und verlängern können. 6) Soll man aus einem gegebenen Punkte P einen Bogen senkrecht auf den Bogen AR ziehen, so verlängere man AR bis T so weit, bis der Bogen PT einem Quadranten gleich ist. Beschreibt man nun aus T als Pol mit demselben Quadranten PT den Bogen PR, so ist $PR \perp AR$.

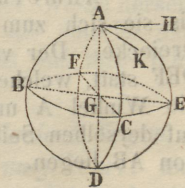
§ 220. Jede Ebene M, welche im Endpunkte eines Radius CA senkrecht auf ihm steht, berührt die Kugel.

Nimmt man in M einen beliebigen Punkt B an, und zieht CB und AB, so ist $CB > CA$ (§ 164, 1), also liegt B ausserhalb der Kugel, und folglich hat M nur einen einzigen Punkt A mit der Kugel gemein.



§ 221. Der von zwei Bogen grösster Kreise gebildete Winkel CAE ist gleich dem Winkel HAK zwischen den Tangenten dieser Bogen im Scheitelpunkte A, und hat zum Masse den Bogen CE, welcher aus dem Scheitelpunkte A als Pol mit dem Quadranten beschrieben wird und zwischen den Schenkeln AC und AE liegt.

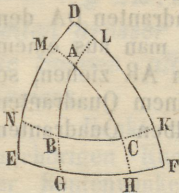
1) Da HA und KA als Tangenten in den Ebenen der Bogen AE und AC senkrecht auf AD, dem Durchschnitte beider Ebenen stehen, so ist HAK gleich dem Winkel zwischen diesen Ebenen (§ 178), welcher auch der Winkel zwischen den Bogen CA und EA ist. 2) Weil AC und AE Quadranten sind, so ist $\sphericalangle AGC = \sphericalangle AGE = R$, also $\sphericalangle CGE = \sphericalangle KAH = \sphericalangle CAE$ (§ 175). Da nun Bogen CE das Mass des $\sphericalangle CGE$ ist, so ist er auch das Mass des $\sphericalangle CAE$.



Zusätze. 1) Die Winkel der Kugeldreiecke lassen sich unter einander mittels Bogen grösster Kreise vergleichen, welche aus ihren Scheiteln als Polen beschrieben, und von den Seiten der Dreiecke begränzt werden. Auf diese Weise lässt sich auch ein Winkel einem gegebenen Winkel gleich machen. 2) Die am Scheitel einander entgegengesetzten

Winkel CAE und FAB sind gleich, weil die entsprechenden Flächenwinkel gleich sind (§ 179, 3). Ebenso betragen die an einander liegenden Winkel BAC und CAE zusammen zwei Rechte.

§ 222. Beschreibt man aus den Scheitelpunkten A, B, C eines Kugeldreiecks ABC als Polen drei Bogen grösster Kreise, EF, DF, DE, so sind die Scheitelpunkte D, E, F des hierdurch gebildeten Dreiecks die Pole der Seiten des ersten Dreiecks.



Da A der Pol von EF, und C der Pol von DE ist, so ist Punkt E um einen Quadranten von jedem der Punkte A und C entfernt (§ 219, 1), folglich ist E der Pol des Bogens AC (§ 219, 3). Eben so ist D der Pol von BC und F der Pol von AB.

Zusatz. Das $\triangle ABC$ kann eben so mittels des $\triangle DEF$ beschrieben werden, wie DEF mittels ABC. Jedes der beiden Dreiecke ABC und DEF heisst Polardreieck des andern.

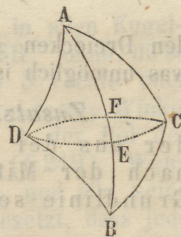
§ 223. (Fig. § 222). Jeder Winkel des einen von zwei Polardreiecken ABC und DEF hat zum Masse den halben Kreisumfang, weniger der gegenüber liegenden Seite des andern Dreiecks.

Verlängert man die Seiten AB und AC bis G und H, so hat $\sphericalangle A$, da A der Pol von GH ist, zum Masse den Bogen GH (§ 221); da aber EH und FG Quadranten sind, indem E der Pol von AH und F der Pol von AG ist, so ist $EH + FG$ ein halber Umfang, und weil $EH + FG = EF + GH$, so ist der Bogen GH, welcher den $\sphericalangle A$ misst, gleich einem halben Umfang, weniger der Seite EF. Eben so ist $\sphericalangle B = \frac{1}{2}$ Umf. — DF, und $\sphericalangle C = \frac{1}{2}$ Umf. — DE. Ferner hat der $\sphericalangle D$ den Bogen NK zum Masse, und weil $NK + BC = NC + BK = \frac{1}{2}$ Umf., so ist $\sphericalangle D = \frac{1}{2}$ Umf. — BC. Ebenso ist $\sphericalangle E = \frac{1}{2}$ Umf. — AC und $\sphericalangle F = \frac{1}{2}$ Umf. — AB.

Anmerk. Verlängert man die Bogen DE, DF, EF, zu beiden Seiten bis sie sich zum zweiten Male durchschneiden, so entstehen noch drei Dreiecke. Der vorstehende Satz findet aber nur bei dem Centraldreieck DEF statt, welches sich von den drei andern dadurch unterscheidet, dass die Winkel A und D auf derselben Seite von BC, die Winkel B und E auf derselben Seite von AC, und die Winkel C und F auf derselben Seite von AB liegen.

§ 224. Beschreibt man aus den Scheitelpunkten A und B eines gegebenen Kugeldreiecks ABC mit den Seiten AC und BC zwei Bogen CED und CFD, und verbindet den Durchschnittspunkt D mit den Scheitelpunkten A und B durch die Bogen grösster Kreise AD und BD; so sind in dem dadurch gebildeten Dreiecke ADB alle Stücke denen des gegebenen Dreiecks ABC gleich.

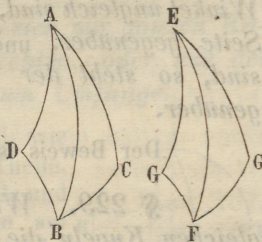
Nach der Construction ist $AD = AC$, $BD = BC$, BA gemeinschaftlich, also sind die drei Seiten in beiden Dreiecken gegenseitig gleich. Denkt man sich nun aus den Punkten A , C , B , D nach dem Mittelpunkte der Kugel, den wir durch O bezeichnen wollen, Radien gezogen, so entstehen bei O zwei dreiseitige Körperwinkel $OABC$ und $OABD$, und weil die Kantenwinkel derselben von den Seiten der Dreiecke ABC und ADB gemessen werden, diese Seiten aber gleich sind, so müssen auch jene Kantenwinkel folglich auch (§ 186) ihre Neigungswinkel gegenseitig gleich sein, so dass also die Winkel der Dreiecke ABC und ADB gleich sind.



Anmerk. Ungeachtet der Gleichheit der einzelnen Stücke sind die Dreiecke ABC und ADB nicht congruent, sobald sie nicht gleichschenkelig sind. Sie heissen daher symmetrische Dreiecke.

§ 225. In zwei Dreiecken ABC und EGF auf derselben oder auf gleichen Kugelflächen sind alle Stücke gegenseitig gleich, wenn in ihnen gegenseitig gleich sind entweder 1) zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder 2) eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, oder 3) alle drei Seiten.

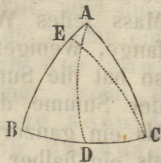
1) Es sei $AB = EF$, $AC = EG$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle FEG$. Legt man $\triangle EFG$ so auf ABC , dass E auf A , F auf B zu liegen kommt, und fällt nun die Seite EG rechts von AB , so muss sie auf AC , und zwar G auf C fallen, so dass also $BC = FG$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFG$, $\sphericalangle C = \sphericalangle G$ ist. Fällt aber EG links von AB , etwa wie AD , so muss FG wie BD fallen, und weil alsdann $\triangle ADB$ oder EGF mit $\triangle ABC$ symmetrisch ist, so müssen alle Stücke in beiden Dreiecken gegenseitig gleich sein (§ 224).



2) Der zweite Theil des Satzes wird auf eine ganz ähnliche Weise bewiesen. 3) Da man mit den drei Seiten AB , AC , BC nur zwei Dreiecke ACB und ABC beschreiben kann, die in Rücksicht der Lage ihrer Stücke verschieden, in Rücksicht der Grösse derselben aber gleich sind (§ 224), so müssen zwei Dreiecke mit einerlei Seiten entweder congruent oder symmetrisch, also in Rücksicht auf ihre Winkel in jedem Falle einander gleich sein.

§ 226. In einem gleichschenkligen Kugeldreieck liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber; und umgekehrt: wenn ein Kugeldreieck zwei gleiche Winkel hat, so ist es gleichschenkelig.

1) Wenn $AB = AC$ ist, und man zieht aus A nach der Mitte D der Grundlinie den Bogen AD , so haben die Dreiecke ABD und ACD gleiche Seiten, also ist $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ (§ 225, 3). 2) Ist $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, so muss $AB = AC$ sein. Denn wäre $AB > AC$, so mache man $BE = AC$, und ziehe den Bogen CE . Da nun $BE = AC$, $BC = BC$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$, so ist in



den Dreiecken ABC und EBC der Winkel $ECB = B = ACB$ (§ 225, 1), was unmöglich ist; mithin kann AB von AC nicht verschieden sein.

Zusatz. Da $\sphericalangle BAD = CAD$ und $\sphericalangle BDA = CDA$, so ist der aus der Spitze eines gleichschenkligen Kugeldreiecks nach der Mitte der Grundlinie gezogene Bogen auf der Grundlinie senkrecht, und halbirt den Winkel an der Spitze.

§ 227. (Fig. § 226). *In einem Kugeldreieck liegt dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber; und umgekehrt: der grössern Seite liegt der grössere Winkel gegenüber.*

1) Wenn $\sphericalangle BAC > B$ ist, so mache man $\sphericalangle BAD = B$, und dann ist $AD = BD$ (§ 226, 2). Da aber $AD + DC > AC$, so ist auch $BD + DC$ oder $BC > AC$. 2) Wenn $BC > AC$, so muss $\sphericalangle BAC > B$ sein; denn, wäre $\sphericalangle BAC = B$, so müsste $BC = AC$ sein, und wäre $\sphericalangle BAC < B$, so würde $BC < AC$ sein, welches beides gegen die Voraussetzung ist.

§ 228. *Wenn in zwei Dreiecken auf der nämlichen Kugel zwei Seiten gegenseitig gleich, aber die von ihnen eingeschlossenen Winkel ungleich sind, so steht dem grössern Winkel auch die grössere Seite gegenüber, und umgekehrt: wenn die dritten Seiten ungleich sind, so steht der grössern Seite auch der grössere Winkel gegenüber.*

Der Beweis ist dem in § 13 und § 14 vollkommen ähnlich.

§ 229. *Wenn in zwei Dreiecken auf derselben oder auf gleichen Kugeln die Winkel gegenseitig gleich sind, so sind auch ihre Seiten gegenseitig gleich.*

Die gegebenen Dreiecke seien A und B, ihre Polardreiecke P und Q. Da nun letztere gegenseitig gleiche Seiten haben müssen (§ 223), so haben sie auch gleiche Winkel (§ 225, 3), woraus wiederum folgt, dass ihre Polardreiecke A und B gleiche Seiten haben.

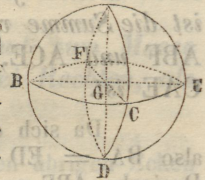
§ 230. *Die Summe der Winkel eines Kugeldreiecks ist immer kleiner als sechs, und grösser als zwei rechte Winkel.*

Da jeder einzelne Winkel eines Kugeldreiecks kleiner als $2R$ ist, so muss die Summe aller drei Winkel kleiner als $6R$ sein. Da ferner das Mass jedes Winkels eines Kugeldreiecks gleich ist dem halben Kreisumfang, weniger der gegenüber liegenden Seite des Polardreiecks (§ 223), so hat die Summe der drei Winkel zum Masse drei halbe Umfänge, weniger der Summe der Seiten des Polardreiecks. Diese letztere ist aber kleiner als ein ganzer Umfang (§ 217, 2), also muss die genannte Differenz grösser als ein halber Umfang, d. h. grösser als $2R$ sein.

Zusätze. 1) die Summe der Winkel ist nicht in allen Kugeldreiecken die nämliche, sondern wechselt von $2R$ bis $6R$, ohne diese Gränzen zu erreichen. 2) Ein Kugeldreieck kann 1 bis 3 rechte oder stumpfe Winkel haben. Wenn (Fig. § 226) das $\triangle ABC$ zwei rechte Winkel B und C hat, d. h. zweirechtwinklig ist, so ist die Spitze A der Pol der Grundlinie BC, und die Seiten AB und AC sind Quadranten (§ 219). Wenn auch A ein rechter \sphericalangle ist, so ist $\triangle ABC$ dreirechtwinklig, und alle seine Seiten sind Quadranten. 3) Es wird hier stets vorausgesetzt, dass jede Seite eines Kugeldreiecks kleiner ist, als der halbe Umfang, woraus folgt, dass jeder Winkel kleiner ist als $2R$. Wenn nämlich (Fig. § 231) die Seiten BC und BA kleiner sind, als halbe Umfänge, so schneiden sich die Verlängerungen dieser Seiten in E, und weil $\sphericalangle BCA + ACE = 2R$, so ist $\sphericalangle BCA < 2R$. Es giebt indessen Kugeldreiecke, deren Seiten grösser als halbe Umfänge, und deren Winkel grösser als $2R$ sind. Zieht man $\triangle ABC$ von der Oberfläche der Halbkugel ab, so ist der Rest ein neues Dreieck ABC, dessen Seiten BC, AC, BDEA sind. Hier ist BDEA grösser als der halbe Umfang, und der Winkel bei C um ACE grösser als $2R$. Kennt man die Winkel und Seiten des $\triangle ABC$, so sind auch die Winkel und Seiten des andern $\triangle ABC$, welches von der Halbkugel übrig bleibt, bekannt, und daher können solche Dreiecke, deren Seiten und Winkel grösser als $2R$ sind, von der Betrachtung ausgeschlossen werden.

§ 231. Ein Zweieck ABDCA verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie sein Winkel BAC zu vier Rechten, oder wie der diesen Winkel messende Bogen BC (§ 221) zum Umfange.

Verhält sich BC zum Umfange BCEFB, z. B. wie 5 zu 21, so theile man den Umfang in 21 gleiche Theile, von welchen fünf auf BC gehen, und ziehe durch A und alle Theilungspunkte Quadranten; alsdann entstehen auf der obern Halbkugel 21 Dreiecke, welche wegen Gleichheit ihrer Seiten congruent sind. Da nun die ganze Kugelfläche 42, und das Zweieck 10 solcher Dreiecke enthält, so verhält sich das Zweieck zur Kugelfläche, wie 10 zu 42, oder wie 5 zu 21, d. h. wie BC zum Umfange. Wenn BC mit dem Umfange incommensurabel ist, so lässt sich, wie in mehren ähnlichen Fällen geschah, beweisen, dass das Verhältniss des Zweiecks zur Kugelfläche weder kleiner, noch grösser sein kann, als das des Bogens BC zum ganzen Umfange.

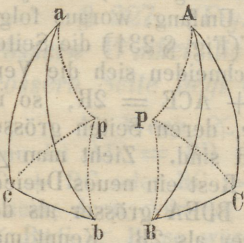


§ 232. **Zusätze.** 1) Zweiecke auf derselben oder auf gleichen Kugeln verhalten sich wie ihre Winkel. 2) Wenn die Bogen AB, AC, BC Quadranten sind, so bilden sie ein dreirechtwinkliges $\triangle ABC$, und dieses ist in der ganzen Kugelfläche 8 Mal enthalten. Wird also die Fläche eines dieser Dreiecke zur Einheit angenommen, so lässt sich die ganze Kugelfläche durch die Zahl 8 ausdrücken. Ferner, wenn der rechte Winkel die Einheit des Winkels eines Zweiecks ist, so kann die Fläche des Zweiecks, dessen Winkel A ist, durch $2A$ ausge-

drückt werden, weil $2A : 8 = A : 4$. 3) Der Kugelkeil $ABCA$ verhält sich zur ganzen Kugel, wie der $\sphericalangle A$ zu vier Rechten. Denn, sind zwei Zweiecke congruent, so sind es auch die zugehörigen Kugelkeile, folglich verhalten sich diese, wie die ersteren.

§ 233. *Symmetrische Kugeldreiecke sind inhaltsgleich.*

Wenn also $AB = ab$, $AC = ac$, $BC = bc$, so ist $\triangle ABC = abc$.



Es sei P der Pol des kleinen Kreises durch die Punkte A, B, C. Aus diesen Punkten und durch P ziehe man die Bogen grösster Kreise AP, BP, CP, mache $\sphericalangle ap = \sphericalangle ACP$, $cp = CP$, und ziehe ap und bp, so sind die gleichschenkligen Dreiecke ACP und apc congruent (§ 225, 1). Da $\sphericalangle ACB = \sphericalangle acb$, $\sphericalangle ACP = \sphericalangle apc$, so ist auch $\sphericalangle BCP = \sphericalangle bcp$, und weil ausserdem $CP = cp$, $BC = bc$, so sind die gleichschenkligen Dreiecke BCP und bcp ebenfalls congruent. Ebenso sind die gleichschenkligen Dreiecke ABP und abp wegen Gleichheit aller Seiten congruent; folglich ist $\sphericalangle ACP + \sphericalangle BCP - \sphericalangle ABP$, d. h. $\triangle ABC$ gleich $\sphericalangle apc + \sphericalangle bcp - \sphericalangle abp = \triangle abc$. Wenn die Pole P und p innerhalb der Dreiecke ABC und abc liegen, so müsste man durch Addition der Dreiecke ACP, BCP, ABP das $\triangle ABC$ zusammensetzen u. s. w.

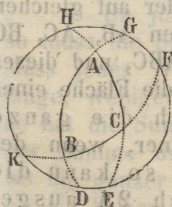
§ 234. (Fig. § 231). Werden zwei Zweiecke $ABDA$ und $ACDEA$, welche durch zwei grösste Kreise gebildet werden, durch einen dritten grössten Kreis, $BCEF$ in vier Dreiecke getheilt, so ist die Summe von zwei im Scheitel zusammenstossenden Dreiecken, ABF und ACE , einem der Zweiecke $ACDEA$ gleich, dessen Winkel CAE ist.

Da sich die grössten Kreise halbiren, so ist Bogen $BAE = AED$, also $BA = ED$ und ebenso $AF = CD$, $BF = CE$, folglich haben die Dreiecke ABF und CDE einerlei Seiten, und sind als symmetrische Dreiecke inhaltsgleich (§ 233). Es ist daher $\triangle ABF + \triangle ACE = \triangle ACDEA$.

Zusatz. Die beiden Kugelpyramiden $GABF$ und $GACE$ zusammen sind dem Kugelkeil $GACDEA$ gleich.

§ 235. Die Fläche eines Kugeldreiecks ABC hat zum Masse den Überschuss seiner drei Winkel über zwei Rechte.

Verlängert man die Seiten des $\triangle ABC$, bis sie den ausserhalb desselben beliebig gezogenen grössten Kreis $DEFGHK$ treffen, so ist $\triangle ADE + \triangle AGH$ gleich dem Zweiecke, dessen Winkel A, und dessen Masse $2A$ ist (§ 234, § 232, 2), so dass also $\triangle ADE + \triangle AGH = 2A$ ist. Ebenso ist $BGF + \triangle BDK = 2B$, und $\triangle CHK + \triangle CEF = 2C$. Weil nun die Summe dieser sechs Dreiecke die Halbkugel, welche durch die Zahl 4 ausgedrückt wird



(§ 232, 2), um $2 \times \triangle ABC$ übertrifft, so ist $2 \cdot ABC = 2A + 2B + 2C - 4$, folglich $ABC = A + B + C - 2$.

§ 236. *Zusätze.* 1) So viel rechte Winkel in $A + B + C - 2$ enthalten sind, so viel dreieckwinkliger Dreiecke, oder Achtel der Kugel- fläche enthält das $\triangle ABC$. Ist z. B. jeder Winkel $= \frac{1}{3}R$, so ist die Summe der drei Winkel $= 4R$, also das Dreieck gleich 2 dreieckwinkligen Dreiecken, oder einem Viertel der Kugel- fläche. 2) Das Kugeldreieck ABC ist einem Zweiecke gleich, dessen Winkel $\frac{1}{2}(A + B + C) - 1$ ist. Eben so ist die Kugel- pyramide mit der Grundfläche ABC gleich einem Kugelkeile mit dem Winkel $\frac{1}{2}(A + B + C) - 1$. 3) Da aus der Congruenz zweier Kugeldreiecke auf derselben oder auf gleichen Kugeln die Congruenz der zugehörigen Kugel- pyramiden, so wie der Körperwinkel an deren Spitzen folgt, und da sich jedes Kugel- vieleck in lauter Dreiecke zerlegen lässt, so verhalten sich zwei Kugel- pyramiden oder zwei Körperwinkel, wie ihre zugehörigen Grundflächen. Um also zwei Körperwinkel mit einander zu vergleichen, lege man ihre Spitzen in die Mittelpunkte zweier gleichen Kugeln, da sich alsdann diese Körperwinkel verhalten, wie die Kugel- vielecke zwischen ihren Seiten. 4) Der Körperwinkel an der Spitze der dreieckwinkligen Pyramide wird von drei auf einander senkrechten Ebenen gebildet, und kann ein rechter Körperwinkel heißen und als Mass für andere Körperwinkel dienen. Auf diese Weise giebt die nämliche Zahl, welche die Fläche eines Kugel- vielecks ausdrückt, das Mass des zugehörigen Körperwinkels an. Ist z. B. die Fläche eines Vielecks $\frac{3}{4}$, d. h. ist die Fläche $\frac{3}{4}$ vom dreieckwinkligen Dreieck, so ist auch der zugehörige Körperwinkel $\frac{3}{4}$ vom rechten Körperwinkel.

§ 237. *Die Fläche eines Kugel- vielecks hat zum Masse die Summe seiner Winkel, weniger so viel Mal zwei Rechten, als es Seiten hat weniger zwei.*

Zieht man aus einer Ecke des Vielecks nach allen übrigen Ecken Diagonalen, so wird das Vieleck in so viele Dreiecke getheilt, als es Seiten hat, weniger zwei (§ 26). Jedes Dreieck hat zum Masse die Summe seiner Winkel, weniger zwei Rechte (§ 235), und weil die Summe aller Winkel der Dreiecke gleich ist der Summe der Winkel des Vielecks, so ist die Fläche des Vielecks gleich der Summe seiner Winkel, weniger so viel Mal zwei Rechten, als es Seiten hat, weniger zwei. Die Fläche eines n ecks, dessen Winkelsumme s bedeutet, ist gleich $s - 2(n - 2) = s - 2n + 4$.

§ 238. *An jedem Polyeder ist die Anzahl der Kanten (K) um zwei vermehrt, der Anzahl der Seitenflächen (F) und der Ecken (E) zusammen genommen gleich, also $F + E = K + 2$.*

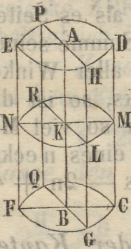
Aus einem beliebigen Punkte innerhalb des Polyeders ziehe man nach allen Ecken desselben gerade Linien, und denke sich aus dem nämlichen Punkte eine Kugel- fläche beschrieben, welche von allen Linien ge-

schnitten wird. Legt man nun durch alle diese Durchschnittspunkte Bogen grösster Kreise, so entstehen auf der Kugelfläche Vielecke, welche den Seitenflächen des Polyeders in gleicher Anzahl entsprechen. In einem neck, dessen Winkelsumme s beträgt, ist die Fläche gleich $s - 2n + 4$ (§ 237); folglich ist die Summe aller Vielecke, welche zugleich die Kugelfläche ausmacht, und daher 8 beträgt (§ 232), gleich der Summe aller Winkel der Vielecke, weniger 2 Mal der Anzahl ihrer Seiten, und plus 4 Mal der Anzahl der Flächen. Weil aber alle Winkel um einen Punkt herum 4 Rechte betragen, so ist die Summe aller Winkel der Vielecke so viel Mal 4 Rechte, als das Polyeder Ecken hat, also gleich $4E$. Weil ferner jeder Bogen eines grössten Kreises zu zwei an einander stossenden Vielecken gehört, und einer Kante entspricht, so ist das Zweifache der Anzahl der Vieleckseiten gleich dem Vierfachen der Anzahl der Kanten, also gleich $4K$. Man hat demnach $4E - 4K + 4F = 8$, folglich $F + E = K + 2$.

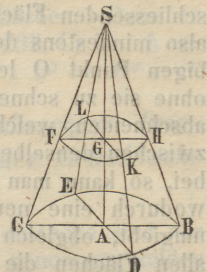
Zusatz. Die Summe aller Kantenwinkel eines Polyeders ist gleich so viel Mal 4 Rechten, als die um 2 verminderte Eckenzahl Einheiten hat. Denn ein neck hat $2n - 4$ rechte Winkel (§ 26), und weil das Zweifache der Anzahl der Vieleckseiten $= 4K$, ferner die Zahl 4 , so oft genommen als Seitenflächen da sind, gleich $4E$ ist, so ist die Summe aller Kantenwinkel $= 4K - 4E$. Da aber $F + E = K + 2$, also $K - F = E - 2$, folglich $4K - 4E = 4(E - 2)$ ist, so beträgt die Summe aller Kantenwinkel $4(E - 2)$ Rechte.

IV. Von den runden Körpern.

§ 239. *Erklärungen.* 1) Die runden Körper, mit welchen sich die Elementargeometrie beschäftigt, sind der Cylinder, der Kegel und die Kugel. 2) Der durch Umdrehung eines Rechtecks $ABCD$ um eine seiner Seiten AB als um eine feste Axe entstehende Körper heisst Cylinder. Die der Seite AB gegenüber liegende Seite CD beschreibt die Cylinderfläche, und die beiden andern Seiten AD und BC , welche bei der Erzeugung des Cylinders immer senkrecht auf AB bleiben, beschreiben zwei gleiche, einander parallele Kreise DHP und CGQ , welche Grundflächen des Cylinders genannt werden. Die unbewegliche Linie AB heisst die Axe des Cylinders und steht auf den Grundflächen senkrecht. Die senkrechte Entfernung beider Grundflächen von einander wird die Höhe des Cylinders genannt. Jeder auf der Axe AB senkrechte Cylinderschnitt MLR ist ein den Grundflächen gleicher und paralleler Kreis, da in dem Rechteck $ADMK$ die Seite $KM = AD$ ist, und sowol DHP als MLR auf AB senkrecht steht. Jeder Schnitt $GHPQ$, in welchem die Axe AB liegt, ist ein Rechteck, welches doppelt so gross ist, als das den Cylinder beschrei-



bende Rechteck ABCD. 3) Der durch Umdrehung eines rechtwinkligen Dreiecks SAB um eine seiner Katheten SA entstehende Körper heisst Kegel. Die andere Kathete AB beschreibt einen Kreis, welcher die Grundfläche des Kegels heisst, und die Hypotenuse SB beschreibt die Kegelfläche. Der Punkt S heisst die Spitze, die Kathete SA die Axe oder Höhe, und SB die Seite des Kegels. Jeder auf der Axe senkrechte Kegelschnitt HKL ist ein der Grundfläche paralleler Kreis, und jeder Schnitt SDE, in welchem die Axe liegt, ist ein gleichschenkliges Dreieck, welches doppelt so gross ist, als das den Kegel beschreibende rechtwinklige Dreieck SAB. Schneidet man von dem Kegel SCDB durch einen mit der Grundfläche parallelen Schnitt den Kegel SFKH ab, so heisst der übrig bleibende Körper ein Kegel-Stumpf. Dieser kann so entstanden gedacht werden, dass sich ein Trapez GABH, dessen Winkel A und G rechte sind, um die Seite AG dreht. Die Linie AG heisst die Axe oder Höhe, und BH die Seite des Stumpfes, sowie die Kreise BDC und HKF seine Grundflächen genannt werden. 4) Zwei Cylinder oder Kegel heissen ähnlich, wenn sich ihre Axen so wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten. 5) Wenn man in die Grundfläche eines Cylinders ein Vieleck einschreibt, und auf diesem als Grundfläche ein senkrecht Prisma von der Höhe des Cylinders errichtet, so heisst das Prisma in den Cylinder eingeschrieben, oder der Cylinder um das Prisma beschrieben. Errichtet man dagegen auf einem, um die Grundfläche des Cylinders beschriebenen Vielecke ein senkrecht Prisma von der Höhe des Cylinders, so heisst das Prisma um den Cylinder beschrieben, und dieser in das Prisma eingeschrieben. 6) Unter einer convexen Fläche versteht man eine solche, welche von einer geraden Linie in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann, obgleich eine gerade Linie in gewissen Fällen, z. B. beim Cylinder und Kegel, ganz in die convexe Flächen fallen kann. Zu den convexen Flächen gehören sowol krumme, als aus mehren Ebenen zusammengesetzte Flächen, desgleichen Flächen, die aus diesen beiden Arten bestehen.



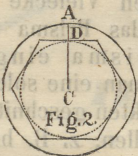
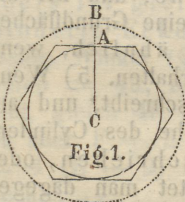
§ 240. *Eine Fläche ist kleiner als jede sie umschliessende Fläche zwischen denselben Gränzen.*

Es sei erstlich die umschlossene Fläche ABCD eine Ebene. Eine Fläche ist offenbar kleiner als eine andere, wenn ihre Abmessungen in allen Richtungen kleiner sind, als die entsprechenden Abmessungen der andern Fläche. In welcher Richtung man nun auch mit einer Ebene die Ebene ABCD und die umschliessende Fläche PABCD schneiden mag, immer wird die Durchschnittslinie BD in der erstern kürzer sein als die Durchschnittslinie BPD in der andern, woraus folgt, dass $ABCD < PABCD$ ist. Zweitens sei die umschlossene Fläche eine convexe



Fläche OABCD. Wäre nun OABCD nicht kleiner, als alle andern sie umschliessenden Flächen, so sei unter den letztern PABCD die kleinste, welche also mindestens der Fläche OABCD gleich sein muss. Durch einen beliebigen Punkt O lege man eine Ebene, welche die Fläche OABCD berührt, ohne sie zu schneiden; diese Ebene wird einen Theil von der Fläche PABCD abschneiden, welcher nach dem Vorhergehenden grösser ist, als die Ebene zwischen denselben Gränzen. Behält man also den Rest der Fläche PABCD bei, so kann man die Ebene an die Stelle der abgeschnittenen Fläche setzen, wodurch eine neue Fläche entsteht, die ebenfalls noch die Fläche OABCD umgibt, obgleich sie $<$ PABCD ist. Die Annahme, dass PABCD unter allen Flächen die kleinste sei, ist also nicht möglich, und daher ist die krumme Fläche OABCD kleiner als jede andere sie umgebende Fläche zwischen denselben Gränzen.

§ 241. *Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkte seiner Grundfläche in seine Höhe.*



Wenn der Radius der Grundfläche des gegebenen Cylinders CA ist, und H seine Höhe vorstellt, so ist der Cylinder = Kreisfl. CA \times H. Denn, wäre Kreisfl. CA \times H nicht das Mass des gegebenen Cylinders, sondern eines grössern, z. B. eines Cylinders, dessen Höhe H, und von dessen Grundfläche CB der Radius ist, so beschreibe man um den Kreis CA ein regelm. Vieleck, dessen Seiten den Kreis CB nicht erreichen (§ 149), und stelle sich ein senkrecht. Prisma vor, welches dieses Vieleck zur Grundfläche und H zur Höhe hat. Das Prisma hat zum Masse das Produkt aus dem umgeschriebenen Vieleck in die Höhe H (§ 203, 4), das Vieleck aber ist grösser als die Kreisfl. CA; folglich ist das Prisma grösser, als Kreisfl. CA \times H. Da nun nach der Annahme Kreisfl. CA \times H das Mass eines Cylinders ist, dessen

Höhe H und dessen Grundfläche die Kreisfl. CB ist, so müsste das Prisma grösser sein, als dieser Cylinder. Das Prisma ist aber im Gegentheil kleiner, als der Cylinder, weil dieser es umgibt; also ist es unmöglich, dass das Produkt der Grundfläche eines Cylinders in seine Höhe das Mass eines grössern Cylinders sei. Wäre zweitens Kreisfl. CA \times H das Mass eines kleinern Cylinders, dessen Höhe H, und von dessen Grundfläche CD der Radius ist, so ist das, auf dieselbe Weise wie im ersten Falle, über dem um den Kreis CD beschriebenen Vieleck, construirte Prisma von der Höhe H, kleiner als Kreisfl. CA \times H, also auch kleiner als der von demselben umgebene Cylinder; da aber gerade das Gegentheil stattfindet, so ist es unmöglich, dass das Produkt der Grundfläche eines Cylinders in seine Höhe das Mass eines kleinern Cylinders sei. Folglich ist der Inhalt eines Cylinders gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe.

§ 242. *Zusätze.* 1) Wenn H die Höhe, und R den Radius der Grundfläche eines Cylinders vorstellt, so ist die Grundfl. = πR^2 (§ 154), also der Cylinder = $\pi R^2 H$. 2) Cylinder von der nämlichen Höhe verhalten

sich wie ihre Grundflächen, und von der nämlichen Grundfläche, wie ihre Höhen. 3) Aehnliche Cylinder C und c verhalten sich, wie die Cuben ihrer Höhen H und h, oder der Radien R und r ihrer Grundflächen. Denn es ist $C : c = \pi R^2 H : \pi r^2 h = R^2 H : r^2 h$, und weil (§ 239, 4) $H : h = R : r$, also auch $H^2 : h^2 = R^2 : r^2$, so ist $C : c = H^3 : h^3 = R^3 : r^3$.

§ 243. *Die convexe Seitenfläche eines senkrechten Prismas ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche in die Höhe des Prismas.*

Die Höhen aller einzelnen Seitenflächen oder Rechtecke sind der Höhe des Prismas gleich, und ihre Grundlinien zusammen genommen bilden den Umfang seiner Grundfläche, woraus die Richtigkeit des Lehrsatzes ohne Weiteres sich ergibt.

§ 244. *Die krumme Oberfläche eines Cylinders ist grösser, als die convexe Seitenfläche eines eingeschriebenen, aber kleiner, als die eines umschriebenen Prismas.*

Die in Rede stehenden Flächen des Cylinders und des eingeschriebenen Prismas haben einerlei Länge, welche der Höhe des Cylinders gleich ist. Schneidet man nun, um die Breite der Flächen zu finden, dieselben mit einer der Grundfläche parallelen Ebene, so ist die eine Durchschnittsline der Peripherie der Grundfläche des Cylinders, die andere dem Umfange der Grundfläche des Prismas gleich; da nun dieser Umfang kleiner ist als der Kreisumfang, also die Breite der Cylinderfläche, bei gleicher Länge, grösser ist als die Breite der prismatischen Fläche, so ist die erste Fläche grösser als die zweite. Auf ähnliche Weise wird bewiesen, dass die Cylinderfläche kleiner ist als die Seitenfläche eines umschriebenen Prismas.

§ 245. (Fig. § 241). *Die krumme Oberfläche eines Cylinders ist gleich der Peripherie seiner Grundfläche, multiplicirt mit seiner Höhe.*

Wenn CA der Radius der Grundfläche des gegebenen Cylinders ist, und H seine Höhe vorstellt, so ist die Cylinderfläche = Per. CA \times H. Denn, wäre Per. CA \times H die krumme Oberfläche eines grössern Cylinders, z. B. eines solchen, dessen Höhe H, und von dessen Grundfläche der Radius CB ist, so stelle man sich ein senkrechtes Prisma vor, welches zur Höhe H und zur Grundfläche das regelmässige Vieleck hat, welches um den Kreis CA so beschrieben worden, dass seine Seiten die Peripherie CB nicht erreichen (§ 149). Die convexe Seitenfläche dieses Prismas ist gleich dem Umfange jenes Vielecks, multiplicirt mit H (§ 243), also grösser als Per. CA \times H (indem der Umfang des Vielecks grösser ist als Per. CA), folglich auch grösser als die krumme Oberfläche des Cylinders von der Grundfläche CB und der Höhe H. Aber, wäre selbst das Prisma in diesen Cylinder eingeschrieben, so würde seine convexe Seitenfläche dennoch kleiner sein als die Cylinderfläche (§ 244), also ist sie um so mehr kleiner, wenn

das Prisma nicht einmal den Cylinder erreicht; folglich kann Per. $CA \times H$ nicht das Mass der krummen Oberfläche eines grössern Cylinders, als des gegebenen sein. Da sich nun auf ähnliche Weise zeigen lässt (§ 241), dass Per. $CA \times H$ auch nicht die krumme Oberfläche eines kleinern Cylinders ausdrücken kann, so muss es das Mass der krummen Oberfläche des gegebenen Cylinders sein.

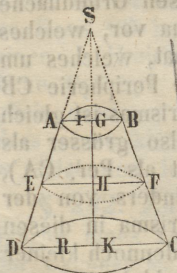
Zusatz. Wenn H die Höhe, und R den Radius der Grundfläche eines Cylinders vorstellt, so ist die Peripherie der Grundfläche $= 2R\pi$ (§ 153), also die Cylinderfläche $= 2R\pi H$.

§ 246. (Fig. § 241). Der körperliche Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Theil des Produkts aus seiner Grundfläche in seine Höhe.

Es sei CA der Radius der Grundfläche des gegebenen Kegels, und H bedeute dessen Höhe; so ist der Kegel $= \frac{1}{3}$ Kreisfl. $CA \times H$. Denn, käme dieses Produkt einem grössern Kegel zu, dessen Höhe H ist, und dessen Grundfläche CB zum Radius hat, so beschreibe man um den Kreis CA ein regelm. Vieleck, welches die Peripherie CB nicht erreicht (§ 149), und stelle sich eine Pyramide vor, welche jenes Vieleck zur Grundfläche hat, und deren Spitze in der des gegebenen Kegels liegt. Die Pyramide ist gleich dem dritten Theil des Produkts aus der Höhe H in den Flächeninhalt des Vielecks (§ 208, 2), also grösser als $\frac{1}{3}$ Kreisfl. $CA \times H$, folglich auch grösser als der Kegel, dessen Höhe H , und von dessen Grundfläche CB der Radius ist. Im Gegentheil aber ist die Pyramide kleiner, als der Kegel, weil sie innerhalb desselben liegt; also kann $\frac{1}{3}$ Kreisfl. $CA \times H$ keinem Kegel zukommen, der grösser als der gegebene Kegel ist. Eben so wie in den frühern Sätzen beweist man, dass $\frac{1}{3}$ Kreisfl. $CA \times H$ nicht das Mass eines kleinern Kegels sein könne; folglich ist es das Mass des gegebenen Kegels.

§ 247. Zusätze. 1) Bedeutet H die Höhe eines Kegels, und R den Radius seiner Grundfläche, so ist letztere gleich πR^2 , also der Kegel gleich $\frac{1}{3} \pi R^2 H$. 2) Ein Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders von der nämlichen Grundfläche und Höhe. 3) Kegel von gleichen Höhen verhalten sich, wie ihre Grundflächen, und von gleichen Grundflächen, wie ihre Höhen. 4) Aus § 242, 3 folgt, dass ähnliche Kegel sich verhalten, wie die Cuben ihrer Höhen oder der Radien ihrer Grundflächen.

§ 248. Der körperliche Inhalt eines Kegel-Stumpfes $ABCD$, dessen Grundflächen R und r zu Radien haben, und dessen Höhe $GK = h$ ist, ist gleich $\frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2)$.



Denkt man sich den Stumpf zu einem ganzen Kegel vollendet, und bezeichnet mit x die Höhe SG des hinzugekommenen Kegels, also mit $h + x$ die Höhe SK des ganzen Kegels, so ist (§ 247, 1) der ganze Kegel $= \frac{1}{3}\pi R^2(h + x)$, der obere kleinere Kegel $= \frac{1}{3}\pi r^2 x$, also

der Stumpf = $\frac{1}{3}\pi R^2(h + x) - \frac{1}{3}\pi r^2x = \frac{1}{3}\pi[R^2h + (R^2 - r^2)x]$.

Weil aber $R : r = h + x : x$, also $x = \frac{rh}{R - r}$, so ist der Stumpf =

$$\frac{1}{3}\pi \left[R^2h + (R^2 - r^2) \frac{rh}{R - r} \right] = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

§ 249. (Fig. § 241). Die krumme Oberfläche eines Kegels ist gleich dem halben Produkte aus der Peripherie seiner Grundfläche in seine Seite.

Wenn der Radius der Grundfläche des gegebenen Kegels CA ist, und S seine Seite vorstellt, so ist seine krumme Oberfl. = $\frac{1}{2}$ Per. CA \times S. Wäre nämlich dieser Ausdruck die krumme Oberfläche eines grössern Kegels, dessen Spitze in der des gegebenen Kegels liegt, und von dessen Grundfläche der Radius CB ist, so denke man sich über dem, um den Kreis CA nach § 149 beschriebenen regelm. Vieleck eine Pyramide construiert, deren Spitze mit der des Kegels zusammenfällt. Das Höhenperpendikel in allen Dreiecken, welche die Seitenflächen der Pyramide sind, trifft den Umfang ihrer Grundfläche in den Berührungspunkten mit dem Kreise CA, und ist daher gleich S, so dass also die convexe Seitenfläche der Pyramide gleich ist dem Umfange des um den Kreis CA beschriebenen Vielecks, multiplicirt mit $\frac{1}{2}$ S, folglich grösser ist als $\frac{1}{2}$ Per. CA \times S, d. h. grösser, als die krumme Oberfl. des Kegels, welcher dieselbe Spitze wie die Pyramide, und zum Radius seiner Grundfläche CB hat. Es ist aber im Gegentheil die krumme Oberfläche des Kegels grösser, als die convexe Seitenfläche der Pyramide; denn legt man die Pyramide in der Grundfläche mit einer congruenten Pyramide zusammen, und ebenso den Kegel mit einem congruenten Kegel, so umgiebt die Oberfläche der beiden Kegel von allen Seiten die Oberfläche der beiden Pyramiden, woraus folgt, dass die krumme Oberfl. des Kegels grösser ist, als die convexe Seitenfläche der innerhalb des Kegels liegenden Pyramide. Folglich ist die Annahme, dass $\frac{1}{2}$ Per. CA \times S der krummen Oberfl. eines grössern Kegels als des gegebenen zukomme, nicht statthaft, und weil eben so gezeigt werden kann, dass $\frac{1}{2}$ Per. CA \times S auch nicht die krumme Oberfl. eines kleinern Kegels sein könne, so muss $\frac{1}{2}$ Per. CA \times S die krumme Oberfl. des gegebenen Kegels ausdrücken.

Zusatz. Bedeutet S die Seite eines Kegels, und R den Radius seiner Grundfläche, so ist die Kegelfläche = πRS .

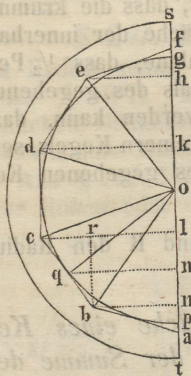
§ 250. (Fig. § 248). Die krumme Oberfläche eines Kegel-Stumpfes ist gleich dem halben Produkte aus der Summe der Peripherien seiner beiden Grundflächen in seine Seite.

Denkt man sich den Stumpf ABCD zu einem ganzen Kegel ergänzt, und bezeichnet die Seite AS des kleinen Kegels mit x, die Seite AD des Stumpfes mit s, also die Seite DS des ganzen Kegels mit s + x, ferner die Radien der Grundflächen mit R und r, so ist (§ 249) die krumme Oberfl.

des ganzen Kegels = $\pi(s + x)R$, die krumme Oberfl. des kleinen Kegels = πxr , also die krumme Oberfl. des Stumpfes = $\pi(s + x)R - \pi xr = \pi[Rs + (R - r)x]$. Da aber $R : r = s + x : x$, also $x = \frac{rs}{R - r}$, so

ist die krumme Oberfl. des Stumpfes = $\pi \left[Rs + \frac{(R - r)rs}{R - r} \right] = (R + r)\pi s$, in welchem Ausdruck $(R + r)\pi$ oder $R\pi + r\pi$ die halbe Summe der Peripherien beider Grundflächen bezeichnet, indem die Peripherien gleich $2R\pi$ und $2r\pi$ sind (§ 153).

§ 251. *Zusätze.* 1) Legt man durch die Mitte E der Seite AD parallel mit den Grundflächen eine Ebene, so ist (§ 103, Z.) der Radius des dadurch entstehenden Kreises $EH = \frac{1}{2}(R + r)$, also seine Peripherie $2 \times \frac{1}{2}(R + r)\pi = (R + r)\pi$. Der vorhin gefundene Ausdruck $(R + r)\pi s$ zeigt also, dass die krumme Oberfläche eines Kegel-Stumpfes gleich ist dem Produkte seiner Seite in die Peripherie eines mitten zwischen den Grundflächen und parallel mit denselben gelegten Schnittes. 2) Wenn eine Linie AD, die ganz an der nämlichen Seite der Linie GK und mit dieser in derselben Ebene liegt, eine Umdrehung um GK macht, so hat die von AD beschriebene krumme Fläche zum Masse $\frac{1}{2}(\text{Per. DK} + \text{Per. AG}) \times AD$ oder $\text{Per. EH} \times AD$, wo die Linien DK, AG, EH die aus den Endpunkten und aus der Mitte der Linie AD auf die Axe GK gefällten Perpendikel sind. Dieses Mass findet auch dann statt, wenn der Punkt A in S liegt, oder wenn $AD \parallel GK$ ist. Im ersten Falle wäre AG gleich Null und AD würde einen ganzen Kegel beschreiben, im andern Falle wäre AG gleich DK, so dass also AD einen Cylinder beschreibt.



§ 252. *Ist abcd ein Theil des Umfangs eines regelm. Vielecks, af der Durchmesser des umschriebenen Kreises, bn und dk senkrecht auf af, o der Mittelpunkt, und oq der Radius des eingeschriebenen Kreises, und dreht sich abcd um af, wie um eine feste Axe, so hat die von abcd beschriebene Fläche zum Masse $ak \times \text{Per. oq}$.*

Zieht man qm und $cl \perp af$, so hat die von bc beschriebene Fläche zum Masse $bc \times \text{Per. qm}$ (§ 251, 2), und zieht man $br \perp cl$, so ist $\triangle bcr \sim \triangle oqm$ (§ 102), also $bc : br = oq : qm = \text{Per. oq} : \text{Per. qm}$, und weil $br = nl$, so hat man $bc \times \text{Per. qm} = nl \times \text{Per. oq}$. Da man eben so beweisen kann, dass die von ab beschriebene Fläche = $an \times \text{Per. oq}$, und die von cd beschriebene Fläche = $lk \times \text{Per. oq}$ ist, so ist die von abcd beschriebene Fläche = $(an + nl + lk) \times \text{Per. oq}$, d. h. gleich dem Produkte ihrer Höhe in die Peripherie des eingeschriebenen Kreises.

Zusatz. Ist die Seitenzahl des Vielecks gerade, und geht die Axe af durch zwei gegenüberliegende Scheitel, so ist die von dem halben Vieleck auf beschriebene Fläche gleich dem Produkte der Axe af in die Peripherie des eingeschriebenen Kreises.

§ 253. (Fig. § 252). Die Kugelfläche ist gleich dem Produkte des Durchmessers in die Peripherie eines grössten Kreises.

Wäre nämlich $pg \times \text{Per.}$ op nicht das Mass der Kugelfläche vom Radius op, sondern der Kugelfläche vom Radius ot, so beschreibe man um den Kreis op ein regelm. Vieleck abc... von einer geraden Seitenzahl, welches die Peripherie ot nicht erreicht. Wenn nun a und f zwei gegenüber liegende Scheitel dieses Vielecks sind, und sich abc... um st dreht, so ist die vom Vieleck beschriebene Fläche $= af \times \text{Per. op}$, und weil $af > pg$, so wäre $af \times \text{Per. op} > pg \times \text{Per. op}$, folglich grösser als die Kugelfläche vom Radius ot. Da aber im Gegentheil die Kugelfläche grösser ist, als die vom Vieleck beschriebene Fläche, weil sie diese von allen Seiten umgiebt, so kann das Produkt des Durchmessers einer Kugel in die Per. eines grössten Kreises nicht das Mass der Oberfläche einer grössern Kugel sein. Wäre ferner $st \times \text{Per. ot}$ gleich der Kugelfläche vom Radius op, und construirt man wie vorhin, so ist die vom Vieleck beschriebene Fläche, oder $af \times \text{Per. op} < st \times \text{Per. ot}$, also kleiner als die Kugelfläche vom Radius op. Weil aber gerade das Gegentheil stattfindet, so kann das Produkt des Durchmessers einer Kugel in die Peripherie ihres grössten Kreises auch nicht die Oberfläche einer kleinern Kugel messen, und muss daher der Oberfl. der gegebenen Kugel zukommen.

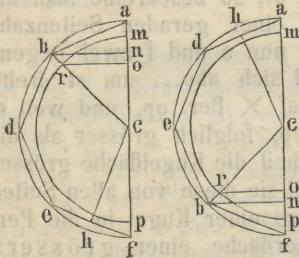
§ 254. **Zusätze.** 1) Ist der Radius einer Kugel gleich R, also der Durchmesser gleich 2R, so ist die Peripherie des grössten Kreises gleich $2R\pi$, folglich die Kugelfläche gleich $4R^2\pi$. Da $R^2\pi$ den Inhalt des grössten Kreises ausdrückt, so ist die Kugelfläche vier Mal so gross, als der grösste Kreis. 2) Bezeichnet man mit O und o die Oberflächen zweier Kugeln, und ihre Radien mit R und r, so ist $O : o = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2$, d. h. die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien. 3) Bezeichnet K die Kugelfläche, D ihren Durchmesser, P die Peripherie des grössten Kreises, Z ein Zweieck, und B einen Bogen, der seinen Winkel misst, so ist (§ 231) $Z : K = B : P$, und weil $K = DP$, so ist $Z = BD$, d. h. ein Zweieck ist gleich dem Produkte des Bogens, welcher seinen Winkel misst, in den Durchmesser der Kugel. 4) Wenn die drei Bogen grösster Kreise A, B, C, die Winkel eines Kugeldreiecks messen, und P die Peripherie eines grössten Kreises vom Durchmesser D bedeutet, so ist (§ 236, 2) das Dreieck einem Zweiecke gleich, dessen Winkel $\frac{A + B + C}{2} - \frac{1}{4}P$ zum

Masse hat, also hat das Dreieck zum Masse $\left[\frac{A+B+C}{2} - \frac{1}{4}P \right] D$.

Im dreieckwinkligen \triangle ist die Summe der drei Seiten $= \frac{3}{4}P$ (§ 230, Z. 2), also sein Inhalt $= (\frac{3}{8}P - \frac{1}{4}P)D = \frac{1}{8}PD$, d. h. gleich dem achten Theile

der Kugelfläche. 5) Die Fläche eines Kugelvielecks, in welchem n die Zahl der Seiten und die Summe der Winkel bedeutet, hat zum Masse $s - 2n + 4$ (§ 237). So viel rechte Winkel in diesem Ausdrucke enthalten sind, so vielen dreieckigen Dreiecken ist das Vieleck gleich.

§ 255. Der Flächeninhalt einer Kugelzone ist gleich dem Produkte ihrer Höhe in die Peripherie des grössten Kreises.



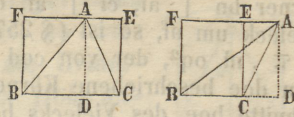
Wenn ab ein beliebiger Bogen, grösser oder kleiner als der Quadrant, und $bn \perp af$ ist, so hat die durch Umdrehung von ab um af beschriebene Zone mit einer Grundfläche zum Masse $an \times \text{Per. } ac$. Denn, hätte diese Zone ein kleineres Mass $an \times \text{Per. } mc$, so beschreibe man im Bogen ab einen Theil eines regelm. Vielecks, welches die $\text{Per. } mc$ nicht erreicht, und ziehe ch auf eine Seite des Vielecks senkrecht. Die durch Umdrehung des Vielecks um af beschriebene Fläche ist gleich $an \times \text{Per. } ch$ (§ 252), also grösser als $an \times \text{Per. } mc$, und folglich grösser als die von dem umschriebenen Bogen ab erzeugte Fläche. Da aber im Gegentheil diese letztere grösser ist, so kann jene Kugelzone kein kleineres Mass als $an \times \text{Per. } ac$ haben. Gesetzt ferner, dass die vom Bogen mr beschriebene Zone grösser als $mo \times \text{Per. } mc$ sei. Die ganze Kugelfläche, welche aus den beiden Zonen mr und rp besteht, hat zum Masse $mp \times \text{Per. } mc$ (§ 253), oder $mo \times \text{Per. } mc + op \times \text{Per. } mc$. Wäre also die Zone $mr > mo \times \text{Per. } mc$, so müsste die Zone $rp < op \times \text{Per. } mc$ sein, was aber dem vorhin Bewiesenen widerspricht. Also kann zweitens eine Kugelzone nicht grösser sein, als das Produkt aus ihrer Höhe in die Per. des grössten Kreises, und muss daher diesem Produkte gleich sein.

(Fig. § 218.) Die vom Bogen AF beschriebene Zone mit zwei Grundflächen ist der Unterschied der beiden Zonen AD und FD , welche zum Masse haben $CD \times \text{Per. } CD$ und $OD \times \text{Per. } CD$, also ist die Zone $AF = (CD - OD) \times \text{Per. } CD = CO \times \text{Per. } CD$. Es ist also jede Kugelzone, mit einer oder zwei Grundflächen, gleich dem Produkte ihrer Höhe in die Per. des grössten Kreises.

Zusatz. Zonen auf derselben Kugel verhalten sich wie ihre Höhen, und eine Zone verhält sich zur Kugelfläche, wie ihre Höhe zum Durchmesser.

§ 256. Wenn sich ein Dreieck ABC und ein Rechteck $BCEF$ von gleicher Höhe und gemeinschaftlicher Grundlinie BC um die Grundlinie drehen, so ist der durch die Umdrehung des Dreiecks beschriebene Körper gleich dem dritten Theil des durch die Umdrehung des Rechtecks entstandenen Cylinders.

Zieht man $AD \perp BC$, so ist der beschriebene Kegel $ABD = \frac{1}{3}$ Cylinder $AFBD$, und Kegel $ADC = \frac{1}{3}$ Cylinder $ADCE$ (§ 247, 2), also $\frac{1}{3}$ Cyl. $AFBD \pm \frac{1}{3}$ Cyl. $ADCE =$ Kegel $ABD \pm$ Kegel $ADC.$



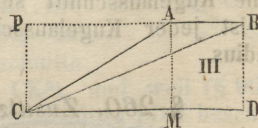
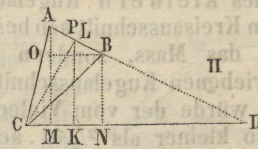
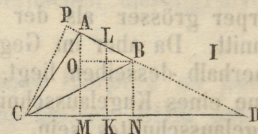
Zusatz. Es ist Cylinder $BCEF = \pi \cdot AD^2 \cdot BC$ (§ 242, 1), also der vom $\triangle ABC$ beschriebene Körper $= \frac{1}{3} \pi \cdot AD^2 \cdot BC.$

§ 257. Aufgabe. Den Inhalt des Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung eines Dreiecks ABC um eine gerade Linie CD entsteht, welche mit dem Dreieck nur den Scheitelpunkt C gemein hat.

1) Es seien die Seiten CA und CB ungleich, und AB sei nicht parallel mit CD . Man verlängere AB , bis sie die CD in D trifft, ziehe $AM \perp CD$, $BN \perp CD$, $BO \parallel DC$, $CP \perp AB$, und aus der Mitte L von AB die $LK \perp CD$. Es ist (§ 256) der von $\triangle CAD$ beschriebene Körper $= \frac{1}{3} \pi \cdot AM^2 \cdot CD$, und ebenso der von $\triangle CBD$ beschriebene Körper $= \frac{1}{3} \pi \cdot BN^2 \cdot CD$, also der von ABC beschriebene Körper $= \frac{1}{3} \pi (AM^2 - BN^2) \cdot CD$. Nun ist $AM + BN = 2KL$ (§ 103. Z.) und $AM - BN = AO$, also $(AM + BN)(AM - BN) = AM^2 - BN^2 = 2KL \cdot AO$, folglich der von ABC beschriebene Körper $= \frac{2}{3} \pi \cdot KL \cdot AO \cdot CD$. Ferner ist $\triangle ABO \sim DCP$, also $AO : CP = AB : CD$, oder $AO \cdot CD = CP \cdot AB$, und weil $CP \cdot AB = 2 \cdot ABC$, so ist auch $AO \cdot CD = 2 \cdot ABC$, also der von ABC beschriebene Körper $= \frac{4}{3} \pi \cdot ABC \cdot KL.$

2) Es sei $CA = CB$, und AB nicht parallel mit CD , so findet man, wenn die vorige Construction und der Beweis unverändert auf die zweite Figur angewendet werden, dass der von ABC beschriebene Körper $= \frac{4}{3} \pi \cdot ABC \cdot KL = \frac{2}{3} \pi \cdot AB \cdot KL \cdot CL$ ist, indem $ABC = \frac{1}{2}(AB \cdot CL)$ ist. Nun ist aber $\triangle ABO \sim CLK$, also $AB : BO$ (oder $MN) = CL : KL$, oder $AB \cdot KL = MN \cdot CL$, folglich ist der von ABC beschriebene Körper $= \frac{2}{3} \pi \cdot MN \cdot CL^2.$

3) Es sei $AB \parallel CD$, so ist Cylinder $AMDB = \pi \cdot AM^2 \cdot MD$; Kegel $ACM = \frac{1}{3} \pi \cdot AM^2 \cdot CM$ und Kegel $BCD = \frac{1}{3} \pi \cdot AM^2 \cdot CD$. Nimmt man von der Summe der beiden ersten Körper den dritten weg, so ist der von ABC beschriebene Körper $= \pi \cdot AM^2 (MD + \frac{1}{3} CM - \frac{1}{3} CD) = \frac{2}{3} \pi MD \cdot AM^2$, indem $\frac{1}{3} CM - \frac{1}{3} CD = \frac{1}{3}(CM - CD) = -\frac{1}{3} MD$ ist.



§ 258. Zusatz. (Fig. § 252). Es sei $abcdef$ der halbe Umfang eines regelm. Vielecks, af der Durchmesser des umschriebenen, oq der Radius des eingeschriebenen Kreises, O der gemeinschaftliche Mittelpunkt,

ferner $bn \perp af$, $cl \perp af$, $dk \perp af$, $eh \perp af$. Dreht sich nun das halbe Vieleck um af , so ist (§ 257, 2) der vom \triangle hoc beschriebene Körper $= \frac{2}{3}\pi \cdot nl \cdot oq^2$, der von cod beschriebene Körper $= \frac{2}{3}\pi \cdot lk \cdot oq^2$, und der von doe beschriebene Körper $= \frac{2}{3}\pi \cdot kh \cdot oq^2$, folglich der von dem Ausschnitte boe des Vielecks beschriebene Körper $= \frac{2}{3}\pi \cdot oq^2(nl + lk + kh) = \frac{2}{3}\pi \cdot oq^2 \cdot nh$.

§ 259. (Fig. § 255). *Der körperliche Inhalt eines Kugelausschnittes ist gleich dem dritten Theil des Produkts der Zone, welche ihm als Grundfläche dient, in den Radius der Kugel.*

Es ist der vom Kreis ausschnitte mcr beschriebene Kugelausschnitt gleich der von mr beschriebenen Zone $2\pi \cdot mc \cdot mo$ (§ 255), multiplicirt mit $\frac{1}{3}mc$, also $= \frac{2}{3}\pi \cdot mc^2 \cdot mo$. Denn, wäre erstlich dieser Ausdruck das Mass eines grössern, z. B. vom Kreis ausschnitte acb beschriebenen Kugelausschnittes, so beschreibe man in dem Bog. ab einen Theil eines regelm. Vielecks, dessen Seiten den Bog. mr nicht erreichen, ziehe den Radius ch des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises, ferner $bn \perp af$, und denke sich die ganze Figur um af herumdreht. Es ist der vom Vieleck ausschnitte acb beschriebene Körper $= \frac{2}{3}\pi \cdot ch^2 \cdot an$ (§ 258), also grösser als $\frac{2}{3}\pi \cdot mc^2 \cdot mo$, indem $ch > mc$ und $an > mo$ (denn, denkt man sich mr und ab gezogen, so ist $\triangle abn \infty mro$, also $an : mo = bn : ro = cb : cr$, also $an > mo$). Folglich wäre der vom Vieleck ausschnitte acb beschriebene Körper grösser als der vom Kreis ausschnitte acb beschriebene Kugelausschnitt. Da aber im Gegentheil ersterer kleiner als letzterer ist, weil er innerhalb desselben liegt, so kann der dritte Theil des Produkts aus der Zone eines Kugelausschnittes in den Radius nicht das Mass eines grössern Kugelausschnittes sein. Dieses Produkt kann zweitens nicht das Mass eines kleinern Kugelausschnittes sein. Denn wäre nicht für den, durch den Kreis ausschnitt acb beschriebenen Kugelausschnitt der Ausdruck $\frac{2}{3}\pi \cdot ac^2 \cdot an$ das Mass, sondern das Mass für den kleinern, z. B. durch mcr beschriebenen Kugelausschnitt, und macht man dieselbe Construction wie vorhin, so würde der vom Vieleck ausschnitte beschriebene Körper $= \frac{2}{3}\pi \cdot ch^2 \cdot an$, also kleiner als $\frac{2}{3}\pi \cdot ac^2 \cdot an$, und somit kleiner als der von mcr beschriebene Kugelausschnitt sein. Da aber gerade das Gegentheil stattfindet, so ist jeder Kugelausschnitt gleich $\frac{1}{3}$ seiner Zone, multiplicirt mit dem Radius.

§ 260. *Zusätze.* 1) Wenn ein Kreis ausschnitt acb bis zum Halbkreise zunimmt, so ist der von ihm beschriebene Kugelausschnitt die ganze Kugel. Also ist der körperliche Inhalt einer Kugel gleich dem dritten Theile des Produkts der Kugelfläche in den Radius. 2) Wenn R den Radius und D den Durchmesser einer Kugel bezeichnet, so ist die Kugelfläche $= 4\pi R^2$ (§ 254, 1), also die Kugel $= \frac{4}{3}\pi R^3$ oder $= \frac{1}{6}\pi D^3$. 3) Zwei Kugeln K und k verhalten sich zu einander, wie die Cuben ihrer Radien R und r . Denn es ist $K : k = \frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 = R^3 : r^3$.

§ 261. Beschreibt man um eine Kugel einen Cylinder, und in den Cylinder einen Kegel, so dass Cylinder und Kegel den grössten Kugelkreis zur Grundfläche, und den Durchmesser der Kugel zur Höhe haben, so verhält sich



Kegel : Kugel : Cylinder = 1 : 2 : 3,

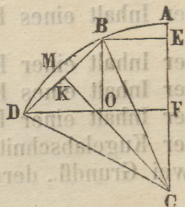
Kugelfläche : Gesamtoberfl. des Cylinders = 2 : 3.

Wenn r den Radius der Kugel bezeichnet, so ist Kegel = $\frac{2}{3}\pi r^3$, Kugel = $\frac{4}{3}\pi r^3$, Cylinder = $2\pi r^3$, Kugelfläche = $4\pi r^2$, Gesamtoberfl. des Cyl. = $6\pi r^2$, also Kegel : Kugel : Cylinder = $\frac{2}{3}\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3 = 1 : 2 : 3$, und Kugelfläche : Gesamtoberfl. des Cyl. = $4\pi r^2 : 6\pi r^2 = 2 : 3$.

§ 262. Zusätze. 1) Die Gesamtoberfl. des Cylinders ist = $4\pi r^2$, also gleich der Oberfl. der dem Cylinder eingeschriebenen Kugel. 2) Ein Polyeder, dessen sämtliche Seitenflächen die Kugelfl. berühren, kann man aus lauter Pyramiden zusammengesetzt betrachten, deren Spitzen im Mittelpunkte der Kugel liegen, und deren Grundflächen die Seitenflächen des Polyeders sind. Da nun die Höhe jeder dieser Pyramiden gleich dem Radius der Kugel ist, so ist der körperliche Inhalt eines solchen Polyeders gleich dem dritten Theile des Produkts aus seiner ganzen Oberfläche in den Radius der Kugel. Daraus folgt, dass sich die Inhalte der um die nämliche Kugel beschriebenen Polyeder, wie die Oberflächen dieser Polyeder verhalten.

§ 263. Aufgabe. Den Inhalt desjenigen Körpers zu finden, welcher durch die Umdrehung eines Kreisabschnittes BDM um einen ausserhalb desselben liegenden Radius AC entsteht.

Zieht man BE und DF \perp AC, ferner CK \perp BD, endlich die Radien CB und CD, so ist (§ 259) der von ACB beschriebene Kugelausschnitt = $\frac{2}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot AE$, und der von ACD beschriebene Kugelausschnitt = $\frac{2}{3}\pi \cdot CD^2 \cdot AF$, also der vom Kreisabschnitte BCD beschriebene Kugelausschnitt = $\frac{2}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot (AF - AE) = \frac{2}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot EF$. Da aber der vom $\triangle DCB$ beschriebene Körper = $\frac{2}{3}\pi \cdot CK^2 \cdot EF$ ist (§ 257, 2), so ist der vom Kreisabschnitte BDM beschriebene Körper = $\frac{2}{3}\pi \cdot EF (CB^2 - CK^2)$, und weil (§ 90, 1) $CB^2 - CK^2 = BK^2 = \frac{1}{4}BD^2$, so ist der vom Kreisabschnitte BDM beschriebene Körper = $\frac{2}{3}\pi \cdot EF \cdot \frac{1}{4}BD^2 = \frac{1}{6}\pi \cdot BD^2 \cdot EF$.



§ 264. Aufgabe. (Fig. § 263). Den Inhalt eines Kugelabschnittes zu finden.

Es sei BE und DF \perp AC, so dass die Figur EBDMF bei ihrer Umdrehung um AC einen Kugelabschnitt mit zwei Grundflächen beschreibt, und seine Höhe EF ist. Es ist (§ 263) der vom Kreisabschnitte BDM be-

schriebene Körper = $\frac{1}{6}\pi \cdot BD^2 \cdot EF$, ferner (§ 248) der vom Trapeze BDFE beschriebene Kegelstumpf = $\frac{1}{3}\pi \cdot EF (BE^2 + DF^2 + BE \cdot DF)$, also die Summe beider Körper, d. h. der Kugelabschnitt = $\frac{1}{6}\pi \cdot EF (2BE^2 + 2DF^2 + 2BE \cdot DF + BD^2)$. Zieht man nun $BO \parallel AC$, so ist $DO = DF - BE$, also $DO^2 = DF^2 - 2DF \cdot BE + BE^2$ (§ 87), folglich $BD^2 = BO^2 + DO^2 = EF^2 + DF^2 - 2DF \cdot BE + BE^2$, und daher der Kugelabschnitt = $\frac{1}{6}\pi \cdot EF (3BE^2 + 3DF^2 + EF^2)$.

Für den durch ABDF beschriebenen Kugelabschnitt mit einer Grundfläche findet man, wenn in dem letzten Ausdrucke $BE = 0$ gesetzt wird, als Inhalt $\frac{1}{6}\pi \cdot AF (3DF^2 + AF^2)$ oder $\frac{1}{2}\pi \cdot DF^2 \cdot AF + \frac{1}{6}\pi \cdot AF^3$.

§ 265. *Es folgt hier eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln der Geometrie, für welche sich die Bedeutung der gebrauchten Buchstaben aus den citirten Paragraphen ergibt.*

Die Summe der Winkel eines n ecks	= $(n - 2)2R$.	(§ 26)
Jeder Winkel eines regelm. n ecks	= $(2 - \frac{2}{n})R$.	(§ 138)
Der Flächeninhalt eines Kreises	= $r^2\pi$.	(§ 154)
Der Kreisumfang	= $2r\pi$.	(§ 153)
Der Inhalt eines Prismas	= GH .	(§ 203)
Der Inhalt einer Pyramide	= $\frac{1}{3}GH$.	(§ 208)
Der Inhalt eines Pyramiden-Stumpfs	= $\frac{1}{3}h(G + g + \sqrt{Gg})$.	(§ 209)
Der Inhalt eines Cylinders	= πR^2H .	(§ 242)
Die Cylinderfläche	= $2\pi RH$.	(§ 245)
Der Inhalt eines Kegels	= $\frac{1}{3}\pi R^2H$.	(§ 247)
Der Inhalt eines Kegelstumpfs	= $\frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.	(§ 248)
Die Kegelfläche	= πRS .	(§ 249)
Die krumme Oberfl. eines Kegelstumpfs	= $(R + r)\pi s$.	(§ 250)
Die Kugelfläche	= $4\pi R^2$.	(§ 254)
Der Inhalt eines Kugeldreiecks	= $\left(\frac{A + B + C}{2} - \frac{1}{4}P\right)D$.	(§ 254)
Der Inhalt einer Kugelzone	= $2\pi RH$.	(§ 255)
Der Inhalt eines Kugelausschnittes	= $\frac{2}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$.	(§ 259)
Der Inhalt einer Kugel	= $\frac{4}{3}\pi R^3$.	(§ 260)
Der Kugelabschnitt von der Höhe H mit zwei Grundfl., deren Radien R und r sind,	= $\frac{1}{6}\pi h(3R^2 + 3r^2 + H^2)$.	(§ 264)