V. Bradis

MATEMAATIKA ÕPETAMISE METOODIKA KESKKOOLIS

Eesti Riiklik Kirjastus

A-21586 II

V. BRADIS

MATEMAATIKA ÕPETAMISE METOODIKA KESKKOOLIS

A. MARKUŠEVITŠI toimetusel.

NSVL Kõrgema Hariduse Ministeeriumi poolt lubatud õpperaamatuna pedagoogilistele instituutidele ja riiklikele ülikoolidele.

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1957

Originaali tiitel:

В. Н. Брадис

Методика преподавания математики в средней школе

Москва 1954

Tõlkijad: E. Etverk ja A. Vihman

2

Tartu Riikliku Ülikooli Raamatukogu

41992

EESSÕNA.

Selle raamatu koostamisel pidas autor silmas kaht eesmärki. Esiteks oli tarvis esitada matemaatika õpetamise metoodika teaduse põhimised ideed, valgustades ta põhimõttelisi küsimusi, näidates ta mitmesuguseid voole, vajaduse korral puudutades ka matemaatikat ennast ja selle ajalugu. Määrates raamatu pedagoogiliste instituutide füüsika-matemaatika teaduskondade üliõpilastele, eeldas autor, et lugejal on teadmisi nendest matemaatilistest distsipliinidest, mida õpitakse I ja II kursusel, rääkimata keskkoolis õpitavast elementaarmatemaatika kursusest. Teiseks, raamatus, mis on määratud üliõpilastele, tulevastele matemaatika õpetajatele, ei saanud pühendamata jätta rohkesti ruumi niisuguseile küsimustele, mis paratamatult kerkivad esile noorel nõukogude õpetajal keskkoolis, kes peab matemaatikat õpetama meil praegusel ajal kehtiva õppeplaani, programmi ja õpikutega loodud tingimustes. Algajat õpetajat huvitab küsimus sellest, kuidas kõige paremini teostada õppetööd kehtiva programmi ja meie koolis tarvitusel olevate õpikute järgi, seetõttu autor arvab, et õpetajat peab selles suhtes abistama, et metoodika õpperaamat peab olema ka praktiliseks käsiraamatuks, kuigi varitseb oht, et säärane käsiraamat võib ruttu vananeda, sest meie kodumaal töötatakse intensiivselt nii programmide parandamise kui ka kasutusel olevate õpikute uuendamise alal. Arvestades töötamist praegu kehtiva keskkooli matemaatika programmi ja kasutusel olevate õpikute järgi, pidas autor siiski otstarbekohaseks osutada mõne säärase uuenduse sissetoomise võimalusele, mis õpetajate poolt on praktikas ära proovitud.

Seadnud endale need kaks eesmärki, möönab autor, et ta täielikult ei saavutanud ei üht ega teist, kuid ta loodab, et kõigist esinevaist puudustest hoolimata suudab see raamat siiski kergendada algava õpetaja esimesi samme ning aitab tal vältida mõned sageli esinevad vead.

Käesolev kolmas trükk on kahe eelmise trüki suhtes osaliselt ümber töötatud. Uuena on kirjutatud esimese jao § 13 «Kooli matemaatika polütehnilise õpetamise ülesannete valguses». On arvesse võetud suur hulk märkusi, mis on avaldatud raamatu üksikute osade kohta. Autor avaldab sügavat tänu kõigile seltsimeestele, kes on oma soove avaldanud paranduste kohta selles raamatus. Autor avaldab erilist tunnustust prof. J. Depman'ile ja N. Beskin'ile, kes kirjas-

tuse poolt organiseeritud arutusel esinesid suurte ning sisukate ettekannetega, ja ka Rostovi-D/ä riikliku pedagoogilise instituudi matemaatika kateedrile, S. Tšukantsov'ile (Kaluuga) ja N. Blagoveštšenski'le (Vladivostok), kelle poolt saadeti üksikasjalikud retsensioonid, millest üks avaldati ajakirjas «Математика в школе» (nr. 3, 1951). Rõhuv osa soovidest, mis ei nõudnud raamatu põhjalikku ümbertöötamist, on autori poolt täidetud. Autor peab vajalikuks raamatu põhjalikku ümbertöötamist, eriti geomeetria osas, kuid mitmesuguseil põhjustel peab selle edasi lükkama kuni uue trükini, kui säärane osutub tarvilikuks.

16. jaanuaril 1954. a.

V. Bradis,
Kalinini linn, M. I. Kalinini nimeline
Riiklik Pedagoogiline Instituut.

ÜLDINE MATEMAATIKA ÕPETAMISE METOODIKA

I peatükk

MATEMAATIKA TEADUSENA

§ 1. Matemaatika tekkimine. Matemaatika arenemise esimene põhietapp: matemaatika kui teadus arvudest, suurustest ja geomeetrilistest kujunditest.

Matemaatika sisu ja tekkimine on täpselt ja täielikult iseloomustatud Friedrich Engelsi sõnadega:

«Puhta matemaatika esemeks on tegeliku maailma ruumivormid ja kvantitatiivsed suhted, järelikult väga reaalne materjal. Et see materjal avaldub äärmiselt abstraktses vormis, siis see asjaolu suudab ainult pealiskaudselt varjata tema päritolu välismaailmast. Aga et neid vorme ja suhteid oleks võimalik uurida puhtal kujul, tuleb nad täielikult lahutada nende sisust, see kui tarbetu kõrvale heita; nõnda saadakse ilma ulatuseta punktid, paksuseta ja laiuseta jooned, mitmesugused a ja b, x ja y, konstantsed ja muutuvad suurused ning alles päris lõpul jõutakse intellekti oma vaba loomingu ja kujutlusvõime saadusteni, nimelt imaginaarsete suurusteni. Ka matemaatiliste suuruste üksteisest tuletamine, mis näib aprioorsena, ei tõesta nende aprioorset päritolu, vaid üksnes nende ratsionaalset vastastikust seost. Enne kui jõuti mõtteni tuletada silindri *vorm* ristküliku pöörlemisest ühe oma külje ümber, tuli uurida tervet hulka tõelisi, ehkki veel vormilt väga ebatäiuslikke ristkülikuid ja silindreid. Nagu kõik teised teadused, nii ka matemaatika on välja kasvanud inimeste *praktilistest vajadustest*: maatükkide suuruse ja anumate mahu mõõtmisest, ajaarvamisest ja mehhaanikast (*Friedrich Engels*, Anti-Dühring, 1951, lk. 35).

Järgides A. Kolmogorovi poolt tema artiklis «Математика» [I, 30] * esitatud skeemi, võib kogu matemaatika ajaloo jaotada kolmeks põhietapiks: esimesel etapil toimus reaalarvu, suuruse ja geomeetrilise kujundi mõistete arendamine ja läbitöötamine; teise etapi peamiseks sisuks oli suuruste muutumise ja geomeetriliste teisen-

* Viited nurgelistes sulgudes siin ja edaspidi käivad kirjanduse loetelu kohta iga osa lõpus. Rooma number tähistab osa numbrit, araabia number — teose numbrit loetelus.

duste uurimine; kolmas etapp: matemaatika kujunemine teaduseks reaalse maailma kvantitatiivseist suhetest ja ruumilistest vormidest kogu nende üldsuses. Vaatleme järgemööda neid kolme etappi.

Ürgaja inimene kaalutledes, näiteks seda, kas relvade tagavarast jätkub kõigile kavatsetud jahiretkest osavõtjaile, omamata veel loendamise oskust, sooritas juba lihtsaimat matemaatilist operatsiooni: ta seadis vastavusse kahe hulga — piikide hulga ja küttide hulga elemendid. Oma mitmesuguste vajaduste rahuldamiseks säärast operatsiooni korduvalt sooritades, märkas inimene midagi ühist kõigil neil hulkadel, millel see vastavus osutus üksüheseks. Inimeste elu ühiskondlik iseloom sundis sellele ühisele andma mingi nimetuse.

Niisiis, kõik hulgad, mille elemendid oli võimalik seada üksühesesse vastavusse käe sõrmede hulgaga (lühemalt — selle hulgaga ekvivalentsed ehk võrdvõimsad hulgad) iseloomustati sõnaga «viis». Jättes igal üksikjuhtumil vaadeldavaisse hulkadesse kuuluvate elementide omadused tähele panemata, s. o. abstraheerides need omadused, töötas inimene aegamööda välja mõisted arvudest 1, 2, 3, 4, 5 . . . , üldse mõiste naturaalarvust, mõiste sellest, mis on ühiseks iseloomustajaks kõigile võrdvõimsaile lõplikele hulkadele. Inimene õppis loendama.

Analoogiliselt tekkisid ka teised matemaatilised mõisted: tehetest naturaalarvudega, murdudest, sirgjoonest, sirglõigu pikkusest, pindalast, ruumalast jne. Matemaatika arenemise esimest põhietappi, mis hõlmas pika rea sajandeid, alates inimese esimestest sammudest matemaatilise abstraktsiooni teel kuni umbes XVII sajandi alguseni, võib üldjoontes iseloomustada sellega, et matemaatika kujundas naturaalarvu mõiste, seejärel ratsionaalarvu mõiste; õppis nimetama ja üles kirjutama kuitahes suuri arve; omandas aritmeetilised tehted; avastas sääraste suuruste, nagu pikkuse, nurga, pindala, ruumala, omadused ja mõõtmise viisid, tunnustades irratsionaalarvu olemasolu; tegi kindlaks lihtsaimate geomeetriliste kujundite ja kehade — hulknurkade, ringi, hulktahukate, silindri, koonuse, sfääri ja mõnede kõverate omadused. Selle esimese etapi kestel pidi matemaatika otseteed rahuldama neid vajadusi, mis tekkisid inimese majapidamises ja sõjalises tegevuses: kariloomade lihtne loendamine, mitmesugused jaotamised, mitmesuguste teede pikkuste võrdlemine, maatükkide tükeldamine ja nende pindalade mõõtmine, ruumalade määramine, mitmesugused rahalised arvestused jne. Väga suuri nõudeid esitas matemaatikale juba selle varasel arenemise astmel astronoomia, mis viis trigonomeetria, esijoonise sfäärilise trigonomeetria loomisele. Veelgi suuremad nõuded matemaatikale ilmusid märksa hiljem mehhaanika ja füüsika poolt. Erandiks on Archimedese tööd (III s. e. m. a.), mis ei mahu nende lihtsaimate matemaatiliste mõistete raamidesse ja mis, kaugelt ennetades oma epohhi, kuuluvad sisuliselt järgmisse matemaatika arenemise etappi.

Ajaloos ei ole säilinud teateid matemaatika arenemise esi-

mestest sammudest. Nende kohta võib ainult oletusi teha. Kuid on olemas väga kaugele sajandite sügavusse ulatuvaid usaldusväärseid andmeid matemaatilisest loomingust Egiptuses (II aastatuhandest e. m. a.) ja umbes samal muistsel ajal Mesopotaamias (keskus — Babüloonia). Meie ajani on säilinud hulgaliselt aritmeetilise, geomeetrilise ja algebralise sisuga ülesandeid, mida egiptlased ja babüloonlased lahendasid kindlate reeglite järgi, mõnikord spetsiaalsete tabelite abil; kuid üldisi teooriaid, millest need reeglid tulenesid, tol ajal veel ei olnud. Seepärast pole imestada, et nende reeglite hulgas oli sääraseid, mis teatavail tingimusil andsid häid tulemusi, teistel tingimustel aga vigaseid. Näiteks, võrdhaarse kolmnurga pindala leidmiseks võtsid egiptlased alüse ja haara, mitte aga aluse ja kõrguse poolkorrutist.

Hoopis teissuguse suuna sai matemaatika arenemine Kreekas, kus VII sajandist pärast e. m. a. algas matemaatilise teooria läbitöötamine, uurides esmalt Egiptusest ja Babüloniast saadud teadete alusel üksikuid, üksteisega mitte seotud küsimusi ning luues seejärel neist katkendeist süsteemi. E m p i i r i l i s e s t teadusest, mis oma resultaadid tuletab ainult kogemusest ja vaatlusest, muutus matemaatika Thalese, Pythagorase, Hüppokratese, Eudoxose, Eukleidese, Archimedese, Apolloniose ja paljude teiste kreeka teadlaste tööde tulemusel d e d u k t i i v s e k s teaduseks, mis oma resultaadid saab loogiliste järeldustena väikesest hulgast lähtelausetest (aksioomidest), mida võetakse tõdedena muidugi kogemuse põhjal. Kreeka matemaatika õitsengu tippsaavutuseks olid Eukleidese ja Apolloniose tööd geomeetria alal, Diofantose tööd aritmeetika ja algebra alal, Ptolemaiose tööd trigonomeetria alal, Archimedese tööd geomeetria ja mehhaanika alal. Väga paljud kreeka matemaatika hiilgavad saavutused ei ole oma tähtsust tänapäevani kaotanud, kuid oli ka puudusi, mis lõppude lõpuks olid tingitud orjapidamisühiskonna iseärasustest ning tunduvalt pidurdasid edasisi edusamme. Kõige esmalt oli selleks teooria eraldamine praktikast, veendumus, et tõeline teadus ei pea huvituma inimeste elulistest vajadustest, et rakendada teadust praktikas, tähendab teda alandada. Valitses Platoni idealistlik filosoofiline kool, mis matemaatikale seadis rea keelde ja piiramisi, millest mõned on säilitanud oma negatiivse mõju tänapäevani (näiteks kunstlik piirdumine sirkli ja joonlauaga geomeetriliste konstruktsioonide puhul). Üksnes vähesed teadlased, nagu Demokritos, Archimedes ja mõned teised mõistsid õigesti teooria ja praktika, kogemuse ja loogilise deduktsiooni vastastikust seost. Inseneri tegevus, mis sai selle ajani ennenägemata hoo Rooma impeeriumis, ei kasutanud kreeka matemaatikat kaugeltki täielikult ära. Näiteks rooma suurim arhitekt Vitruvius, kes elas I s. e. m. a., võttis ringi ümbermõõdu ja diameetri suhteks $3\frac{1}{8}$, kuigi Archimedes kakssada aastat enne teda andis selle suhte täpsema ja mitte vähem mugava väärtuse ($3\frac{1}{7}$).

Üheaegselt kreeka matemaatikaga, kuid põhimiselt sellest sõltumatult, arenes india matemaatika teadus. Indias ei olnud kreeka

matemaatikat iseloomustavat lõhet teooria ja praktika, loogika ja kogemuse vahel; kuigi india matemaatika ei saavutanud nii kõrget arenemise taset nagu kreeklaste matemaatika, lõi see siiski palju väärtuslikku, mis on säilinud meie ajani ning läinud kindlalt maailma teaduse varasalve. Siia kuulub üldiselt tarvitusele võetud numeratsiooni kümnendsüsteem ja sellele rajatud aritmeetiliste tehete tehnika, negatiivsete arvude ja radikaalide käsitlus, üldiste 1. ja 2. astme võrrandite lahendamise reeglid, siinuse mõiste tarvitusele võtmine jne. Kreeka ja india matemaatilise kultuuri pärijaiks said VII sajandil p. m. a. araabia kalifaadi poolt ühendatud rahvad. Nende hulgas etendasid kultuuri ajaloos väga tähtsat osa Kesk-Aasias ja Taga-Kaukaasias elunevad rahvad (horesmilased, usbekid, tadžikid, aserbaidžaanlased jt.), kes nüüd kuuluvad NSVL koosseisu. Teaduslikud tööd kirjutati tol ajal araabia keeles, mis oli Lähis- ja Kesk-Ida maade rahvusvaheliseks keeleks. Seepärast nimetatigi kõiki nende maade teadlasi «araablasteks». Nad talletasid ja täiendasid keskaja jooksul kreeka ja india matemaatikat, sellal kui euroopa teadus pärast teadusele vaenuliku ristiusu levimist elas üle pika languse perioodi. Alates VIII sajandist p. m. a. tõlgitakse india ja kreeka matemaatikute töid araabia keelde; hiljem eurooplased tutvusid paljude sääraste töödega alles araabia tõlgete kaudu.

Tolle aja originaalseist töödest kuuluvad tähtsaimate hulka IX sajandi kuulsa horesmi matemaatiku Mohammed-ibn-Musa-al-Hovaresmi (teisiti ka Muhammed-ben-Musa al-Horesmi, s. t. Muhammed Musa poeg Horesmist) tööd.

Tema töö «Aldžebr almukabala» järgi sai algebra teadusena oma nimetuse. Ladinakeelses tõlkes moonutatud nimi Alehovaresmi muutus sõnaks algoritm, mis tähendab antud üldise ülesande lahendamise skeemi.

Alles hiljuti said teatavaks XV sajandi tadžiki matemaatiku Gias-eddini tähelepanuväärsed saavutused, kes avastas ja kasutas järjekindlalt kümnendmurde 150 aastat enne seda, kui neile tuldi Lääne-Euroopas; tema andis esimesena, ammu enne Newtonit, binoomvalemi mis tahes naturaalarvulise astendaja puhul [I. 59]. Nimetame veel aserbaidžaani XIII s. matemaatiku Nassir-eddin Tusa nime, kes on palju teinud geomeetria ja trigonomeetria alal.

Aeg XII kuni XV sajandini on perioodiks, millal Euroopa omandas vana-aja matemaatika teaduse. Seda nõudsid arenevad suuremõõdulised kaubanduslikud operatsioonid, mis olid seotud rahaliste arvestustega, laevade ehitus, nende juhtimine üle merede, hiljem ka üle ookeanide, rikastuva kodanluse vajadused üldse, iseäranis Itaalias. Kõrvuti matemaatiliste teoste tõlkimisega araabia ja kreeka keelest ladina keelde, mis tol ajal oli rahvusvaheliseks keeleks, ilmusid ka mõned originaalsed, peamiselt õpikute iseloomuga matemaatilised tööd. Kõige paremad nendest olid Leonardo Fibonacci tööd, mis avaldati XIII s., nimelt: «Raamat abakusest» ja «Geomeetria praktika».

XV s. lõpul leiutati raamatu trükkimise kunst, mis märksa kiirendas matemaatika ja üldse teaduse arenemist. XVI sajandil tehti mitu suurt matemaatilist avastust: 3. ja 4. astme võrrandite lahendamine radikaalides, numbriliste kordajatega mis tahes astme võrrandite reaalarvuliste lahendite ligikaudsete väärtuste arvutamise meetodid, tehti esimesed sammud kompleksarvu mõiste arendamisel, suured edusammud algebralise sümboolika loomise alal jne.

Vanim meie ajani säilinud vene matemaatiline teos on kirjutatud 1134. a. See on «Кирика диакона и доместика новгородского Антьниева монастыря учение им же ведати человеку числа всех лет».

Ta on pühendatud peamiselt mitmesuguseile kalendrilistele arvutustele, eriti usuliste pühade kuupäevade määramisele. Rea teiste allikate (Jaroslav Targa «Vene Õigus», kroonikad, rahvusvahelised lepingud, arheoloogilised andmed) järgi võib otsustada, et vene inimeste matemaatiliste teadmiste üldine tase XII—XVI s. ei olnud madalam kui Lääne-Euroopas samal ajal, vaatamata tatari ikkele, mis kaua pidurdas vene kultuuri üldist arenemist.

Maailma matemaatika teaduse arenemise esimene põhietapp pakub keskkooli matemaatika õpetajale suurt huvi, sest siin on tegemist peamiselt matemaatika elementidega, matemaatika edasise arenemise selle baasiga, mis «elementaarmatemaatika» nime all ongi alg- ja keskkoolis õppimise objektiks. Lugejale, kes soovib matemaatika ajalooga nii selle esimesel kui ka järgnevail etappidel lähemalt tutvuda, soovitame eespool nimetatud akadeemik A. Kolmogorovi artiklit ja erikirjandust matemaatika ajaloo alal, millele on osutatud käesoleva esimese osa lõpus.

§ 2. Matemaatika arenemise teine põhietapp: matemaatika kui teadus suuruste muutumisest ja geomeetrilistest teisendustest.

Teaduslik looming elementaarmatemaatika alal jätkus ka pärast XVI sajandit. Piisab, kui meenutame logaritmide leiutamist, kooli algebrale ja trigonomeetriale nüüdisaegse kuju andmist, töid Eukleidese geomeetrilise süsteemi alal. Kuid matemaatika arenemise peajoone XVII ja XVIII sajandil ning XIX sajandi esimesel poolel määrasid kaks uut põhimist ideed: liikumine ja muutumine. «... kogu loodus», ütleb F. Engels, «alates liivaterast ja lõpetades päikesega, alates protistist ja lõpetades inimesega, on igaveses tekkimises ja hävimises, lakkamatus voolamises, väsimatus liikumises ja muutumises» (K. Marx ja F. Engles, XIV k., lk. 484 — vene keeles). Esimese etapi matemaatika, mis tegeles arvude, suuruste ja kujunditega, pööras tähelepanu ainult ühtede või teiste kehade või asjade eksisteerimise üksikuile hetkedele, peegeldas üksnes puudulikult reaalsuse kvantitatiivseid suhteid ja ruumivorme, esitades midagi momentülesvõtte taolist neist voolavaist, liikuvaist suhetest ja vormidest. Seoses tootlike jõudude ja ühiskondlike suhete arene-

misega, mis kutsus esile loodusteaduste tormilise kasvu, said XVII sajandil uurimise põhiliseks objektiks muutuvate suuruste vahelised seosed — teadus siirdus arvude uurimiselt funktsioonide uurimisele.

«Muutuvate suuruste ja funktsionaalsete seoste uurimine viib edaspidi matemaatilise analüüsi põhimõistetele, mis ilmsel kujul toob matemaatikasse lõpmatuse idee, piiri, tuletise, diferentsiaali ja integraali mõistetele. Tekib lõpmatult vähenevate analüüs, esijoones diferentsiaal- ja integraalarvutuse kujul, mis lubab muutuvate suuruste lõplikud muutused siduda nende käitumisega nende eriväärtuste lähedases ümbruses. Mehhaanika ja füüsika põhilised seadused kirjutatakse üles diferentsiaalvõrrandite kujul, ning nende võrrandite integreerimine saab matemaatika üheks tähtsamaks ülesandeks... Niiviisi, kõrvuti võrranditega, milles otsitavaiks on arvud, ilmuvad võrrandid, milles otsitavaiks, mis peab leidma, on funktsioonid. Kujundite liikumise ja teisendamise ideede tungimisega geomeetriasse, laieneb ka geomeetria uurimise aine. Üks ning sama liikumine ja üks ning sama teisendamine võib väga mitmesuguseid kujundeid ümber paigutada ja teisendada. Seepärast geomeetria hakkab uurima liikumist ja teisendamist iseendas» (akadeemik A. Kolmogorov, Suur Nõukogude Entsüklopeedia *), 38. k., lk. 368—369).

Matemaatika esimeselt etapilt tema teisele põhietapile, asjade olemise üksikute hetkede uurimiselt nende muutumise ja arenemise protsesside uurimisele ülemineku põhimõttelist tähtsust iseloomustavad hästi F. Engelsi järgmised sõnad: «Matemaatikas oli pöördepunktiks Descartes'i muutuv suurus. Tänu sellele ilmusid matemaatikasse liikumine ja dialektika ning tänu sellele sai viivitamatult vajalikuks diferentsiaal- ja integraalarvutus, mis ka kohe tärkab ja mis Newtoni ja Leibnizi poolt lõpule viidi. («Looduse dialektika», 1948, lk. 208, vene keeles).

XVII ja XVIII sajand on suurimate matemaatiliste saavutuste periood sellel tema uuel arenemise etapil, mis on seotud Descartes'i, Fermat', Newtoni, Leibnizi, Euleri, Lagrange'i, Laplace'i ja rea teiste uurijate nimedega. Need saavutused olid kogu eelneva matemaatika arenemisega ette valmistatud ning tingitud loodusteaduse (astronoomia, mehhaanika, füüsika) ja tehnika (masinate tarvitamise) nõuetega, mis matemaatikale esitati XVII sajandil seoses kodanliku ühiskonna kasvu ja kapitalismi arenemisega, millel oli siis progressiivne iseloom. «XVII sajandi autorid mõistavad ja armastavad alla kriipsutada matemaatika suurt praktilist tähtsust. XVII sajand oli ajajärk, kus kodanliku ühiskonna kasv lubas tal teadusele esitada ülesandeid mitu sajandit ette, olles täielikult teadlik nende praktilisest väärtusest. Tuginedes oma lähedale seosele matemaatilise loodusteadusega, võis XVII sajandi matemaatika tõusta uuele dialektilise arenemise etapile. Uued mõisted, mis ei mahtunud vanadesse formaal-loogilistesse matemaatika kategooriatesse, said oma esimese õigustuse reaalse maailma vastavais seoseis. Nii näiteks tuletise mõiste reaalsus tulenes kiiruse mõiste reaalsusest mehhaanikas. Seetõttu küsimus ei seisnud mitte selles, kas saab seda mõistet loogiliselt õigustada, vaid selles, kuidas seda teha (SNE, 38 k., lk. 370).

Funktsiooni mõiste, mis vaadeldaval etapil oli põhimiseks matemaatika mõisteks, on oma esmajärgulise tähtsuse täielikult säilitanud käesoleva ajani, kuid ta on möödunud aja jooksul tunduvalt evolutsioneerunud.

Esialgu käsitleti funktsiooni kui muutuvat suurust, mille väärtused on määratud sõltuvalt teise muutuva suuruse (rippumatu muutuja ehk argumendi)

*) Edaspidi SNE.

meelevaldselt valitud väärtustest mingi valemi põhjal, mida nimetatakse selle funktsiooni analüütiliseks avaldiseks. Näiteks L. Euler oma «Sissejuhatuses analüüsi» ütleb: «Muutuva suuruse funktsioon on analüütiline avaldis, mis teataval viisil on moodustatud sellest muutuvast suurusest ja arvudest ehk jäävaist suurustest» (E. Patsanovski tõlge ladina keelest, 1936, lk. 30 — vene keeles). Edasine matemaatika arenemine viis üldisemale arusaamisele funktsioonist, mis on rajatud hulga, hulga elemendi, kahe hulga elementide vastavuse mõistetele: kui hulga M igale elemendile x on vastavaks seatud hulga N mingi element y, siis kõneldakse, et hulgas M on määratud ühene funktsioon ning kirjutatakse $y = f(x)$. Seejuures hulga M elemente nimetatakse argumendi väärtusteks ja hulga N elemente funktsiooni väärtusteks. Hulkade M ja N elementideks võivad olla mis tahes laadi objektid, kuid tähtsaim on juhtum, kui need on arvud. Kui need ei ole arvud, vaid punktid, siis on meil tegemist lihtsaima geomeetrilise teisendamise (punktteisendamise) juhtumiga. Selle viimase juhtumi näiteks on mingi ehituse (hoone või masina) kujutamine joonisel, s. o. tasapinna tükil: ehituse igale punktile vastab sõltuvalt kujutamise mitmesuguseist meetodeist kindla seaduse järgi saadud punkt joonisel.

Matemaatika arenemist XVII ja XVIII sajandil Venemaal iseloomustavad järgmised faktid. Ilmub hulk matemaatilise sisuga käsikirju, mis on pühendatud osaliselt geomeetriale ja selle rakendustele maamõõtmise alal. Asutatakse koole: «Matemaatiliste ja meresõidusaladuste kool» Moskvas, mis 1715. a. viidi Peterburi ja muudeti ümber Mereväe Akadeemiaks («Mere Kaardiväe Akadeemia»); «arvutamise koolid» mitmes linnas, «garnisoni koolid» ja muud sõjakoolid. 1703. aastal ilmub L. Magnitski poolt koostatud suurepärane elementaarmatemaatika õpik «Aritmeetika» nime all; see sisaldas peale aritmeetika ka algebra, geomeetria ja trigonomeetria algeid. 1724. aastal asutati Peterburi teaduste akadeemia, milles kohe selle esimestest aastatest alates töötavad tolle aja suurimad matemaatikud: vennad Nikolai ja Daniel Bernoulli, Christian Goldbach ning 1727-st aastast kuulus Leonhard Euler, kes elas Peterburis ühtekokku 30 aastat ning suurema osa oma töödest avaldas Akadeemia väljaannetes (473 memuaari). 1755. a. asutati suurima vene teadlase Mihhail Lomonossovi hoolitsusel esimene vene ülikool (Moskvas). Ilmusid välismaa paremate matemaatika õpikute rohkearvulised venekeelsed tõlked, ilmus ka rida originaalseid aritmeetika, algebra, geomeetria, trigonomeetria ja analüüsi õpikuid, mis oma teadusliku taseme poolest ei jäänud maha tolle aja Lääne-Euroopa paremate õpikute tasemest. XVIII sajandi esimesel poolel ilmus vene keeles üldse 30 õpikut, mis olid terveni matemaatikale pühendatud või sisaldasid matemaatilisi eri osi, selle sajandi teisel poolel aga ilmus juba 98 säärast raamatut (vt. A. Juskevitši artikkel «Matemaatika ja selle õpetamine Venemaal XVIII—XIX s.» ajakirjas «Математика в школе» 1947.—1948. a.).

Kui matemaatika teaduse sisu tema arenemise esimesel põhietapil võib lühidalt, ehkki mitte päris täpselt, iseloomustada terminiga «elementaarmatemaatika», millega tavaliselt tähistatakse kogu seda materjali, mida õpitakse alg- ja keskkoolis, siis teise põhietapi matemaatikat (ka mitte päris täpselt) võib nimetada «klassikaliseks kõrgemaks matemaatikaks». Siia kuuluvad põhimiselt kõrgema algebra, matemaatilise analüüsi, analüütilise geomeetria ja diferent-

siaalgeomeetria kursused, mida õpitakse pedagoogilises instituudis I ja II õppeaastal.

Võrdlemisi hilise ajani ei läinud keskkooli matemaatika õpetus kuigi palju väljapoole neid raame, milleni matemaatika teadus jõudis XVII sajandi alguseni, ega kõrgemas koolis väljapoole neid raame, mis siia kuulus XIX sajandi keskpaigani. Praegusel ajal peetakse kõigi eesrindlike matemaatika õpetamise alal töötajate poolt üldtunnustatuks, et XVII ja XVIII sajandi matemaatika põhimõiste, nimelt funktsiooni mõiste, peab kindlasti kuuluma keskkoolis õpitavate küsimuste hulka. Kõrgem kool aga peab tutvustama tulevasi matemaatika õpetajaid tähtsaimate matemaatika teaduse saavutustega tema kolmandal, kaasaegsel arenemise põhietapil, mille vaatlemisele nüüd siirdumegi.

§ 3. Matemaatika arenemise kolmas põhietapp: matemaatika kui teadus reaalse maailma kvantitatiivseist suhetest ja ruumivormidest kogu nende üldsuses.

Alates XIX sajandist kuni tänapäevani jätkub klassikalise kõrgema matemaatika intensiivne edasiarendamine.

Kõige tihedamas seoses paljude hiilgavate saavutustega matemaatika arenemise vanadel teedel avanesid matemaatika ees uued perspektiivid: selgus, et matemaatika on neist raamidest üle kasvanud, mis teda piirasid arvude, suuruste ja nende protsesside muutumise, geomeetriliste kujundite ja nende teisendamise uurimisega; selgus, et matemaatika on teadus palju üldisemaist kvantitatiivseist suhetest, mille puhul arvud ja suurused osutuvad ainult erijuhtumeiks, on teadus palju üldisemaist ruumilistest vormidest, mille erijuhtumeiks on tavalised geomeetrilised ühe-, kahe- ja kolmemõõtelise ruumi kujud.

Selgitame paari näitega seda seika, millel on nüüdisaegse matemaatika õigeks mõistmiseks esmajärguline tähtsus.

Uurides aritmeetikas ja algebras mitut liiki arve (täis-, ratsionaal-, reaal-, kompleks- ja hüperkompleksarve), me tegeleme hulkadega, mille elementidega sooritatakse teatavaid kindlaksmääratud operatsioone (liitmine, korrutamine jt.), millel on kindlad omadused. Osutus, et paljudes matemaatika, mehhaanika ja füüsika küsimustes esinevad hulgad, mille elementideks on teist laadi objektid (näiteks substitutsioonid algebras, geomeetrias liikumised ja teisendused jms.), mille puhul on olemas teatav operatsioon, mis lubab antud hulga mis tahes kahe elemendi järgi üheselt kindlaks määrata selle hulga kolmanda elemendi. Sel operatsioonil on ühiseid jooni arvude korrutamisega (või liitmisega), nimelt, kui elemendid tähistada tähtedega A, B, C, ..., ja mis tahes kahe elemendiga A ja B sooritatud operatsiooni tulemust tähistada sümboliga AB, siis selle operatsiooni põhiomadused väljenduvad järgmisel viisil:

1) $(AB)C = A(BC)$;

2) on olemas niisugune element E, et $AE = A$, milline element A ka oleks; 3) iga elemendi A puhul on olemas pöördelement A^{-1}, nõnda et $AA^{-1} = E$. Iga säärane elementide hulk, milles on olemas eespool kirjeldatud operatsioon, kannab rühma nime. Rühmade teooria, mis esialgu oli loodud algebra vajaduste tarvis, leidis varsti rakendamist kõige mitmekesisemais matemaatika ja loodusteaduse harudes (geomeetrias, analüüsis, füüsikas). Niisiis rühmade teoorias

vaadeldakse ühest ja samast seisukohast väga erinevat laadi objektide (arvude, funktsioonide, liikumiste, teisenduste) vahelisi kvantitatiivseid ja ruumilisi suhteid, kui aga nende puhul omab mõtet operatsioon, mis rahuldab ülemal kirjeldatud nõudeid.

Teise näitena peab tähelepanu juhtima pöördele teaduses, mille põhjustasid geniaalse vene matemaatiku N. Lobatševski avastused, mille tulemusel tehti kindlaks, et kõrvuti Eukleidese geomeetriaga on olemas veel teisi geomeetriaid, mis erinevad eukleidilisest geomeetriast ja ometi õpetavad tundma reaalse maailma ruumilisi suhteid samuti nagu eukleidiline geomeetria. Lobatševski uurimustes peitub matemaatika kogu edasise arenemise põhiline idee mitmesuguseist «ruumidest» kui matemaatilise uurimise objektidest. Kõige üldisemal kujul uuritakse «ruumi» mõistet nüüd topoloogias, topoloogilise ruumi nime all. Nõnda nimetatakse igasugust hulka, mille elementide jaoks on kindlaks määratud ümbruse mõiste, millel on ühiseid iseloomujooni punktide ümbrustega tasapinnal või harilikus (eukleidilises) ruumis, ja nimelt: antud elemendi ümbruseks peab olema antud hulga mingi elementide kogu, millel on järgmised omadused: 1) antud elemendi a ümbrus sisaldab elementi a; 2) ühe ja sama elemendi a kahes mis tahes ümbruses on kummaski selle sama elemendi mingi kolmas ümbrus; 3) kui elemendi a antud ümbruses on element b, siis selles ümbruses on ka mingi ümbrus b.

Topoloogilise ruumi elemente nimetatakse punktideks. «Ruumi» mõiste, mis esialgu oli loodud geomeetria huvides, omandas ülisuure tähtsuse ka teistes matemaatika ja loodusteaduse harudes (analüüsis, füüsikas, mehhaanikas).

Matemaatika arenemise kolmas põhietapp on suurimate avastuste poolest kõigil aladel niivõrd rikas, et me selle raamatu raamides ei saa katsetki teha neid iseloomustada kas või kõige kokkusurutumal kujul. Toome siin ainult revolutsioonieelsete ja nõukogude vene matemaatikute nimed.

Peale juba mainitud N. Lobatševski, piirdudes ainult kõige kuulsamate tegelastega, nimetame veel P. Tšebõševi (1821—1894), kes sai kuulsaks oma uurimustega analüüsi alal (parima lähendi teooria), arvuteooria alal (algarvude paigutuse seadus) ja tõenäosusteoorias; S. Kovalevskajat (1850—1891), kes üldist tunnustust mööda on kogu maailma naiste hulgast suurim matemaatik; A. Ljapunovi (1857—1918), kes lahendas nüüdisaegse mehhaanika raskeimad probleemid, nagu liikumise püsivuse teooria ja pöörlevate vedelate kehade tasakaalu kujude teooria; N. Žukovskit (1847—1921), nüüdisaegse aeromehhaanika rajajat ja nõukogude lennukikonstruktorite koolide loojat; sotsialistliku töö kangelast akadeemik A. Krõlovi (1863—1945), kes erakordse eduga lahendas rea matemaatilisi küsimusi, mis omavad esmajärgulist tähtsust laevaehitamisel; S. Tšaplõginit (1870—1942), kes jätkas ja arendas N. Žukovski uurimusi; N. Lusinit (1883—1950) — hulgateoreetilise moskva kooli rajajat.

Ruumipuudus ei luba siin peatuda käesoleval ajal töötavate nõukogude matemaatikute, esmajärjekorras J. Vinogradovi, S. Bernšteini, A. Kolmogorovi, P. Aleksandrovi, J. Petrovski, M. Keldõši, M. Lavrentjevi, N. Mushelišvili jt. hiiglasaavutustel.

Silmapaistvate vene matemaatikute uurimuste enamikule on iseloomustav loova mõtte sügavus ja julgus, millele kaasneb selge arusaamine praktilistest vajadustest. Teooria ja praktika teineteisele lähendamise tähtsus matemaatilises loomingus on suurepäraselt väljendatud P. Tšebõševi kuulsas kõnes «Geograafiliste kaartide joonestamine» (1856). «Teooria lähendamine praktikale annab kõige viljakamaid tulemusi, ja sellest ei võida mitte üksnes praktika, teadused ise arenevad selle mõjul, see annab uut ainet uurimiseks, või avab ammu tuntud asjade uued küljed. Vaatamata säärasele kõrgele arenemise astmele, millele matemaatilised teadused on viidud kolme viimase sajandi suurte geomeetrite poolt, näitab praktika mitmes suhtes nende mittetäiuslikkust; ta esitab küsimusi, mis teadusele on hoopis uued, ning ergutab sel kombel otsima täiesti uusi meetodeid. Kui teooria vana meetodi uutest rakendustest või vana meetodi uuest arenemisest võidab palju, siis omab ta veel rohkem uute meetodite avastamisega, ning sel juhtumil teadus leiab praktikas endale ustava juhendaja».

§ 4. Matemaatika ja teised teadused. Matemaatika rakendused. Idealism matemaatikas.

Kõigil teadustel, uurides reaalsuse mitmesuguseid külgi, on suuremal või vähemal määral tegemist kvantitatiivsete suhete ja ruumiliste vormidega, ja nad kasutavad seetõttu matemaatikat. «Matemaatiline meetod, rakendatuna ühe või teise (olgu see füüsikaliste, bioloogiliste või sotsiaalsete) nähtuste ringi uurimiseks, seisab ... uuritavate nähtuste vormi eraldamises ja selle vormi uurimises puhtal kujul» (A. Kolmogorov). Näiteks uurides võnkliikumist kõige mitmekesisemail juhtumeil (vedru otsa riputatud koorma võnkumine, või läbi lühikese jämeda toru ühest anumast teise voolava vee nivoo võnkumine, või kõrva poolt häälena tajutud õhu osakeste võnkumine, või raadios kasutatavad elektri võnkumised, jne.), eraldab füüsika nende kõige lihtsama vormi, nimelt liikuva punkti harmoonilise võnkumise, mida täiesti iseloomustavad diferentsiaalvõrrand

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$$

ja vastavad algtingimused. Niiviisi määratud funktsiooni y uurimine annab esimese lähendina võnkliikumise kõigi konkreetsete juhtumite abstraktse matemaatilise baasi.

«Matemaatilise meetodi täieliku domineerimise tüüpiliseks näiteks on taeva mehhaanika, eriti õpetus planeetide liikumisest.

Matemaatiliselt väga lihtsalt väljenduv kogumaailmse tõmbejõu seadus haarab peaaegu täielikult siin uuritavate nähtuste ringi. Meie poolt saavutatava vaatluste täpsuse piirides on lubatav taevakehade kuju ja mõõtmete mitte arvestamine, on seaduspärane nende asendamine «materiaalsete punktidega», välja arvatud Kuu liikumise teooria. Kuid siin tekkiv küsimus jõu mõjul materiaalsete punktide liikumisest esitab kolossaalseid raskusi juba juhtumil, kui $n = 3$. See-eest aga iga resultaat, mis saavutatakse tarvitusele võetud nähtuse skeemi matemaatilise analüüsimise teel, läheb tegelikkuses ülisuure täpsusega täide: loogiliselt väga lihtne skeem kajastab valitud nähtuste ringi hästi, kõik raskused seisavad ainult kord tarvitusele võetud skeemist matemaatiliste järelduste ammutamises» (akadeemik A. Kolmogorov, [I, 30 a]).

Kuid mida keerulisemad on nähtused kvalitatiivselt, mida rohkem uusi kvalitatiivseid külgi ilmub uurimise igal uuel sammul, seda raskem on eraldada puhtkvantitatiivseid vorme ja suhteid ning seda vähem olulistena nad näivad, seda piiratum on matemaatilise meetodi rakendamine. V. I. Lenin oma konspektis Hegeli «Loogika teadusest» iseloomustab kui «tabavat märkust» järgmist Hegeli mõtet: «Mida rikkamad määratuse poolest, seega ka suhete poolest, on mõtted, seda segasemad ühelt poolt, ning teiselt poolt seda meelevaldsemad ja mõtteta on nende kujutamine niisugustes vormides nagu arvud» (Lenin, Filosoofilised vihikud, Hegeli raamatu «Loogika teadus» konspekt, 1947, lk. 91, vene keeles). Seetõttu näiteks bioloogilistes teadustes rakendatakse matemaatikat võrra-

tult vähem kui mehhaanikas ja füüsikas, ja veel vähemal määral ühiskonna teadustes.

Matemaatika rakendamise küsimus on matemaatika õpetamisel esmajärgulise tähtsusega: ei ole võimalik viljakalt õppida matemaatikat, eraldades teooria tema praktilisest rakendamisest. On tähtis sidet «puhta» matemaatika ja tema rakenduste vahel õigesti mõista. Nagu eespool juba korduvalt tähendatud, tehti esimesed sammud matemaatika arenemises elutarbelise praktika nõuete survel. Edaspidi, sedamööda kuidas arenesid astronoomia, mehhaanika, füüsika, tehnika, tekkis elav ja väga viljakas koostöö nende teaduste ja matemaatika vahel. Matemaatika töötas täielikumalt, täpsemalt ja sügavamalt välja oma meetodid, mis leidsid kõige ulatuslikuma rakendamise teistes teadustes, kuid viimased omakorda esitasid uusi matemaatilisi probleeme, mis viisid sageli matemaatikat oluliselt edasi.

Siinkohal on vaja peatuda küsimusel sellest, kuidas matemaatikud ise eri ajajärkudel, lähtudes erinevailt ideoloogilistelt vaatekohtadelt, suhtusid küsimusse oma teaduse ja reaalsuse tunnetamise vahekorrast.

Ainus teaduslik vaade sellele küsimusele kuulub nõukogude teadusele, mis lähtub Marxi, Engelsi, Lenini ja Stalini poolt läbitöötatud dialektilise materialismi üldistest printsiipidest.

Ta rajaneb filosoofilise materialismi põhiteesile, mis väidab, et «... mateeria, loodus, olemine on objektiivne reaalsus, mis eksisteerib väljaspool teadvust ja teadvusest sõltumata; et mateeria on primaarne, sest ta on aistingute, kujutluste, teadvuse allikas, teadvus aga on sekundaarne, tuletatav, sest ta on mateeria peegeldus, olemise peegeldus...» (Üleliidulise Kommunistliku (bolševike) Partei ajalugu. Lühikursus, 1951, lk. 101). Matemaatika, nagu iga teadus, uurib objektiivset reaalsust. Tema erinevus teistest teadustest, tema spetsiifika seisab selles, nagu eespool juba öeldud, et uurides objektiivset reaalsust, abstraheerub matemaatika, loobub kõigest sellest, mis ei kuulu reaalse maailma kõige üldisemate külgede, tema kvantitatiivsete ja ruumiliste kujude ja suhete hulka. Niisugune äärmuseni viidud abstraktsioon ei ole matemaatilise meetodi puuduseks, mida tuleks nagu kuidagi parandada. Just vastupidi: selles abstraktsioonis peitubki matemaatika olemasolu peatingimus ja jõud. Kuid matemaatika abstraktne iseloom tekitab mõnede inimeste peas illusiooni, nagu oleks matemaatika tegelikkusest sõltumatu. Juba Platoni ajast alates püüdsid iga liiki idealistid, võideldes materialismi vastu, toetuda matemaatikale kui oma liitlasele. Kodanlike maade teaduses on idealistlikud vaated matemaatikale ka praegusel ajal väga levinud. Matemaatika aluste välismaiste uurimuste hiljutise ülevaate autor ütleb lausa, et «ühes suhtes on nad *) omavahel ühel nõul, ja seda võib praegu pidada kõigi matemaatikute peaaegu üksmeelseks arvamuseks, et puhta matemaatika

*) Kodanlikud filosoofid ja matemaatikud.

seadused ei räägi midagi tegelikkusest . . .» (A. Heiting, Matemaatika aluste uurimuste ülevaade. A. P. Juškevitši venekeelne tõlge saksa keelest, 1936, lk. 84). Nimetatud autor viitab seejuures tuntud prantsuse matemaatiku ja füüsiku Henri Poincaré autoriteedile, kes aitas säärase vaate «põhjendamisele» kaasa. «Suur füüsik ning väike filosoof» H. Poincaré oli V. I. Lenini väljenduse järgi omal ajal tõesti oma populaar-filosoofiliste raamatutega väga menukas: «Kõige reaktsioonilisem idealistlik filosoofia kindlate fideistlike järeldustega haaras tema teooriast kohe kinni». (V. I. Lenin, Materialism ja empiriokrititsism, 1946, lk. 275). Kuid V. I. Lenin oma kuulsas raamatus tõestas ümberlükkamatult, kui vähe originaalsed olid H. Poincaré filosoofilised vaated, kes kordas ainult idealistliku filosoofia kulunud, oma vahel halvasti sobitatud tõdesid. Järelikult, Heitingi poolt formuleeritud vaadete «filosoofiline baas» on väga ja väga vähese respektiga.

Idealismi nüüdisaegsete kodanlike epigoonide vaadete vastas seisavad teaduse klassikute materialistlikud vaated. Galilei kinnitas matemaatika objektiivset tähendust järgmistes kujukates sõnades: «filosoofia *) on kirjutatud kõige grandioossemas raamatus, mis alati on avatud kõigile ja igaühele, ma räägin maailmalaotusest, kuid temast ei või aru saada see, kes enne pole tundma õppinud seda keelt ja tähti, mille abil ta on kirjutatud. Aga ta on kirjutatud matemaatika keeles ja ta tähtedeks on kolmnurgad, ringid ja muud matemaatilised kujundid.»

Newton väidab aja ja ruumi objektiivset eksisteerimist («absoluutne» aeg ja «absoluutne» ruum), mille uurimine on matemaatika ja mehhaanika ülesandeks.

Euleri vaated on väga üksikasjalikult esitatud tema populaarteaduslikus töös «Kirjad ühele saksa printsessile füüsika ja filosoofia mitmesuguseist küsimustest». Ta rõhutab korduvalt, et «aistinguid kutsuvad meis esile ainult asjad, mis väljaspool meid on tõeliselt olemas». Tõsi, vaieldes idealistide ja «egoistidega» (nüüdisaegse terminoloogia järgi — solipsistidega), ründab Euler samaaegselt ka materialiste. Kuid see ei sega teda ennast põhiküsimustes seismast materialismi pinnal. Ta ütleb, et «hing **) omab talitlevat võimet, mida nimetatakse abstraktsiooniks, kuna hing fikseerib tähelepanu ainult asja kvantiteedile või kvaliteedile, mis tema poolt asjast eraldatakse, ja vaadeldakse nõnda, nagu poleks ta asjaga seotud». Just sel teel tekivad mõisted, eriti arvu ja kujundi mõisted. Teises, ruumile pühendatud kirjas, kirjutab Euler. «On teada, et ruum (ulatuvus) on tõeline geomeetria objekt, kus kehi vaadeldakse niivõrd, kuivõrd nad omavad ulatust, abstraheerudes läbitungimatusest ja inertsist . . .» Euler märgib edasi, et «on olemas filosoofe, ja nad on praegusel ajal isegi enamuses, kes avalikult eitavad, et ruumile vastavad omadused

*) Mõeldud on mehhaanika, füüsika ja astronoomia.
**) See on intellekt.

üldiselt, s. o. niisugusel kujul, nagu neid vaadeldakse geomeetrias, esinevad tegelikult olemasolevail kehadel. Nad ütlevad, et geomeetriline ruum on olemus, millel puuduvad omadused, millest ei saa midagi otsustada reaalsete asjade omaduste kohta...» Edaspidi Euler astub sääraste filosoofidega poleemikasse. Me näeme, et see, mida praegusaegsed kodanlikud teadlased esitavad viimase uudisena (vt. Heitingi avaldust ülemal), on Euleri poolt juba XVIII sajandil kummutatud.

Olles tutvunud kuulsa šveitslase vaadetega, kes valis Venemaa oma teiseks kodumaaks, pöördume nüüd kahe suurima XIX sajandi vene matemaatiku — Lobatševski ja Tšebõševi vaadete käsitlusele. Lobatševski avastus andis surmava hoobi Kanti filosoofiale, millel oli matemaatikute hulgas suur menu. Kant, väites et «ruum ei ole midagi objektiivset ja reaalset, ei substants, aktsidents ega suhe, kuid ta on subjektiivne ja ideaalne...» («De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis» — Tunnete ja mõistuse maailma vormist ja printsiipidest, 1770), lisas veel: «Sest kui kõik ruumi omadused on saadud ainult kaemuse teel välimistest suhetest, siis... võib arvata, nagu seda juhtub empiirilistes teadustes, et kunagi avastatakse teissuguste algomadustega ruum...» See Kanti poolt tagasitõrjumatu argumendina esitatud arutlus kõlab ennustusena kantiaanliku süsteemi hukkumisest, mille põhjustas Lobatševski. Lobatševski rikkaliku teadusliku pärandi uurimine tunnistab ümberlükkamatult, et see geniaalne mõtleja läks täiesti teadlikult võitlusse kantiaanluse vastu. Ning selles kui ka mitmes teises suhtes oli ta mõõtmatult üle sääraseist lääne teadlastest, nagu näiteks Helmholtz, kes mitte-eukleidiliste geomeetriate avastamisega tekkinud ideid edasi arendades püüdsid ühtlasi uuendada, parandada Kanti filosoofiat *).

Esitame siin mõned Lobatševski väljendused, mis iseloomustavad tema sügavaid materialistlikke vaateid. «Kõigile on teada, et paralleelide teooria geomeetrias on seni ajani jäänud puudulikuks. Asjatu püüdlus Eukleidese ajast peale kahe tuhande aasta jooksul pani mind kahtlema, et mõistetes enestes ei ole seda tõde, mida saab kontrollida samuti nagu muid füüsika seadusi, üksnes kogemuste teel, nagu seda on näiteks astronoomilised vaatlused («Geomeetria uued alused»), ning edasi:

«...ei või olla mingit vasturääkivust, kui oletame, et mõned jõud looduses toimivad ühe, teised oma eri geomeetria järgi...»

Teise geniaalse vene matemaatiku P. Tšebõševi kogu elu ja tegevus kujutab endast terviklikku, äärmiselt järjekindlat ja sügavat vastust küsimusele matemaatika ja materiaalse tegelikkuse vahekorrast. Tšebõšev ise resümeerib oma aruannet esimesest välismaa reisist, näiteks, järgmiste sõnadega: «Suurema tähtsusega asju olen uurinud üksikasjalikult, nagu mitut süsteemi auru-

*) Helmholtz, üks uuskantiaanluse peamehi, rõhutas, et ta ei lükka ümber Kanti vaateid ruumile kui transtsendentaalset käsitust.

masinate ehitus, nende masinate käik mitmesuguste tingimuste mõjul, vesirattad üldse ja eriti veeturbiinid, hollandi süsteemi tuuleveskite ehitus, mitmesugused liikumise ülekande mehhanismid ja ka mitmesugust tootmist, eriti kirjutuspaberi, lina ketramise ja raua ümbertöötlemise alal. Peale selle huvitas mind väga vabrikute eri osade paigutus, väga huvitav küsimus praktilises suhtes». Niisiis P. Tšebõšev, kes kogu oma elu pühendas üksnes matemaatikale ning seejuures selle väga abstraktsetele osadele, ammutas täiesti teadlikult matemaatilist inspiratsiooni materiaalsest tegelikkusest, oma aja eesrindlikust praktikast. Sellest samast aruandest on näha, kuidas mõtisklused tuuleveskite kõige kasulikumast kujust, kõige vähemast kõrvale kaldumisest sellest sirgjoonelisest liikumisest, mis aurumasinate ülekande mehhanismides muudetakse ringjooneliseks liikumiseks, viisid ta põhiülesannetele parima lähendi teoorias, mis tänapäeval moodustab matemaatilises analüüsis ühe tähtsama peatüki.

Eespool me juba tsiteerisime P. Tšebõševi sügavaid mõtteid teooria ja praktika vastastikusest suhtest, mis olid väljendatud kõnes «Geograafiliste kaartide joonestamine».

Piirdume ülaltoodud tsitaatidega, millest nähtub, et nüüdisaegsete kodanlike matemaatikute vaateid, mis toetuvad Poincaré'le (kui ka Weyl'ile, Brauerile jt.) on kahtlemata samm tagasi võrreldes niisuguste tõeliste teaduse korüfeede vaadetega nagu on Euleri, Lobatševski ja Tšebõševi omad.

Matemaatika on olnud ja jääb reaalse maailma tunnetamise võimsaimaks vahendiks, mis inimesele kõigil kultuuri astmeil on osutanud suurimat abi, alates ürginimesest, näiteks, nomaadist-karjakasvatajast, kes igal hommikul ja õhtul loendades loomi oma karjas veendus, et nii ja nii palju loomi on kaduma läinud ning neid on tarvis otsima minna, kuni nüüdisaegsete teadlasteni, kes arvutavad ette, näiteks, eelseisva päikese varjutuse kõik detailid. Matemaatikud-idealistid on jõuetud seletama säärast matemaatika võimsust, ning selles seisabki nende arutluste lihtsaim ümberlükkamine.

§ 5. Matemaatilised mõisted. Perekond ja liik. Definitsioonid ja kirjeldused. Klassifikatsioon.

Esimeseks põhinõudeks igale teadusele on määratuse (arusaadavuse, selguse) nõue kõigi nende mõistete puhul, millega antud teadus tegeleb: kasutades mõnd erilist oskussõna, mis väljendab mingit uut, varem käsitlemata mõistet, peab kindlustama sellest oskussõnast õige arusaamise, peab kindlaks tegema ta täpse tähenduse, peab avama, nagu öeldakse, vastava mõiste sisu.

Rõhuva enamiku matemaatiliste mõistete sisu avatakse definitsioonide kaudu: kasutades esimest korda uut matemaatilist oskussõna, peame teda defineerima, s. o. selgitama ta tähen-

dust, kasutades seejuures niinimetatud primaarseid termineid: «igaüks», «kõik», «on olemas», «ei ole», «jaa», «või», «kui..., siis», «siis ja ainult siis» jne., kui ka neid matemaatilisi mõisteid, mis varem on kindlaks tehtud. Näiteks, defineerides kordarvu niisuguse naturaalarvuna, millel on vähemalt üks pärisjagaja, me selgitame kordarvu mõistet naturaalarvu ja pärisjagaja mõistete põhjal, mis eeldatakse tuntuina.

Tavaliseks defineerimise vormiks on perekonna ja liigi tunnuse nimetamine, s. o. nimetatakse üldmõiste, mille erijuhtumiks on defineeritav, ning seejärel osutatakse mingile tunnusele, mille poolest uus mõiste erineb kõigist teistest, mis kuuluvad üldise mõiste alla. Eespool toodud kordarvu definitsiooni näites osutatud perekond on naturaalarv, ning liigi tunnuseks vähemalt ühe pärisjagaja olemasolu. Definitsiooni sõnastuses ei ole perekonna ja liigi tunnuse osutamine alati ilmselt väljendatud, kuid definitsiooni analüüsiga saab need alati kindlaks teha. Näiteks defineerides punkti ristprojektsiooni teljel sellest punktist teljele tõmmatud ristlõigu alusena, võime kergesti näha, et siin perekonnaks on punkt ja liigi tunnuseks on definitsioonis kirjeldatud side antud punktiga.

Jättes puutumata tähtsa ja huvitava küsimuse sellest, kuidas moodustuvad definitsioonid kujutluste põhjal, vaatleme nõudeid, mida definitsioonid peavad rahuldama.

Esiteks, definitsioonis ei tohi esineda viiteid uutele, alles defineerimata mõistetele. Ei tohi lubada, et tundmata oskussõna selgitamisel kasutataks oskussõnu, mis samuti on tundmata, või isegi veel võõramad kui defineeritav, s. o. ei tohi defineerida tumedat veel tumedama kaudu (*obscurum per obscurius*). See ei tähenda hoopiski seda, et ei tohiks kasutada algmõisteid, mille sisu avatakse teisel teel ja millest tuleb juttu allpool. Näiteks, katse defineerida nurka kui ühe sirge kalde mõõtu teise sirge suhtes ei anna midagi, sest kalde mõiste nõuab omakorda defineerimist ja ta sisu saab seletada ainult nurga mõiste abil: defineerimisel tekib nõiaring (circulus vitiosus).

Nõiaringi teine näide: küsimusele, mis on analüüsis laialt kasutatav arv $e = 2,\ 7182818\ldots$, ei saa vastata, et arv e on naturaallogaritmide alus, sest õigustatud ja vältimatule küsimusele, mida nimetatakse siis naturaallogaritmiks, peab vastama, et see on logaritm alusel e. Arvu e õige definitsiooni saab anda valemiga:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Et õigustada arvu e defineerimist naturaallogaritmide alusena, peab naturaallogaritmi kuidagi teisiti, arvust e sõltumatult, defineerima, näiteks

$$\ln x \text{ on } \int_1^N \frac{dx}{x}.$$

2. Teiseks, definitsioon peab olema defineeritava mõiste suhtes parajamõõduline, peab olema defineeritava mõistega adekvaatne, ta ei tohi olla liiga lai ega liiga kitsas. Näiteks, jämedaks veaks on irratsionaalarvu defineerimine ratsionaalarvu juurena, tingimusel, et täpset juurt ei saa võtta: on olemas lõpmatu hulk irratsionaalseid arve, mida ei saa esitada ratsionaalarvu juure kujul, nagu arvud π, e, lg2 jne. See definitsioon on lubamatult kitsas, ta ei hõlma kõiki irratsionaalarve. Aga on ka väär irratsionaalarvu defineerida lõpmatu kümnendmurruna: see definitsioon on liiga lai, sest kõik perioodilised kümnendmurrud on lõpmatud, kuid nad väljendavad ratsionaalarve. Irratsionaalarvu mitme õige definitsiooni hulgast kasutatakse keskkoolis ta definitsiooni lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna.

3. Kolmandaks, defineerimisel ei tohi nimetada defineeritavate mõistete niisuguseid omadusi, mis järelduvad neist definitsioonidest. Kuigi niisugused seletused ei tarvitse rikkuda definitsiooni adekvaatsust, ometi on nad üleliigsed. Näiteks, defineerides rööpkülikut kahe paari vastavalt võrdsete ja paralleelsete külgedega tasapinnalise nelinurgana, me segame rööpküliku definitsiooni ühe teoreemiga rööpkülikust: kui nelinurgal on kaks paari vastavalt paralleelseid külgi, siis need küljed on paariviisi võrdsed, milles on kerge veenduda, kui tõmbame diagonaali ja võrdleme kaht saadud kolmnurka. Järelikult, võrdsete külgede nimetamine tuleb ära jätta. Ära tuleb jätta ka termin «tasapinnaline», sest iga nelinurk, millel on kas või üks paar paralleelseid külgi (trapets), on alati tasapinnaline.

Üht ja sama mõistet võib sageli mitmel viisil defineerida, sest vaadeldavate objektide mis tahes iseloomustav omadus, s. o. omadus, mis on kõigil neil objektidel ja ainult neil, võib olla defineerimisel aluseks. Nii on võimalik rööpkülikut teisiti, täiesti õigesti defineerida kui kahe paari vastavalt võrdsete ja mittelõikuvate külgedega tasapinnalist nelinurka. On kerge näha, et ühel tasapinnal asetsemise ja mitte lõikumise nimetamist siin ei tohi ära jätta. Ühe ja sama mõiste erinevate definitsioonide kasutamine teeb vajalikuks nende samaväärsuse (ekvivalentsuse) kontrollimise: peab tõestama, et iga objekt, mis rahuldab esimest definitsiooni, rahuldab ka teist ja ümberpöördult. Näiteks, kui me sooviksime paralleelseid sirgeid defineerida kui võrdkaugeid sirgeid, s. o. sääraseid, et ühe sirge iga punkt on teisest sirgest ühel ja samal kaugusel, mis on võimalik, kui eelnevalt tõestame, et antud sirgest ühel pool ning ühel ja samal kaugusel asuvate tasapinna punktide hulk on sirgjoon, siis me peaksime veel tõestama, et iga kaks võrdkauget sirget asuvad ühel tasapinnal ega lõiku ja ümberpöördult, et hariliku definitsiooni mõttes paralleelsed sirged, s. o. sirged, mis asuvad ühel tasapinnal ega lõiku, on võrdkauged. Ilma niisuguse tõestamiseta ei ole meil õigust, lähtudes ühest definitsioonist, kasutada järeldusi, mis tulenevad teisest definitsioonist. Olgu märgitud, et äsja nimetatud kaks paralleelide definitsiooni on samaväärsed ainult Eukleidese geomeetrias. «Geomeetria aluste» kursuses selgitatakse, et Lobatševski geomeet-

rias niisuguste punktide hulk tasapinnal, mis asetsevad antud sirgest võrdsetel kaugustel ja ühel pool sellest sirgest, ei moodusta sirgjoont, vaid kõverjoone («hüpertsükkel»).

Kui oleme mingi termini täpse tähenduse selgitanud, siis peame teda ka edaspidi alati selles tähenduses kasutama. Sellele ei ole sugugi vasturääkiv see, kui kõrgemale astmele tõustes, mille suhtes eelmine on ainult erijuhtumiks, sageli endisi mõisteid üldistatakse ning antakse neile uued definitsioonid, säilitades seejuures mõiste endise nimetuse. Näiteks, naturaalarvude korrutamist defineeritakse võrdsete liidetavate liitmisena; kui aga naturaalarvude õppimiselt minnakse üle ratsionaalarvude õppimisele, siis on tarvis anda korrutise uus definitsioon, mis hõlmab endist kui erijuhtumit.

Olles väljendanud mingi definitsiooni, peab kindlaks tegema, et niisuguseid objekte, mis rahuldavad definitsiooni, on tõeliselt olemas, et see definitsioon ei ole sisuta. Näiteks, defineerides irratsionaalarvu kui lõpmatut mitteperioodilist kümnendmurdu, peame näitama, et niisugused murrud on tõesti olemas. Ühe või teise geomeetrilise kujundi defineerimisel peab saadud definitsiooni õigustama, tõestades selle kujundi reaalsust, mida tavaliselt tehakse nii, et näidatakse konstruktsioon, mis viib sellele kujundile. Nii näiteks, defineerides teataval viisil korrapärast hulknurka ja korrapärast hulktahukat, vaadeldakse kohe nende konstruktsioonide viise, mis hulknurga puhul on väga lihtsad (ringjoone n võrdseks osaks jaotamise kaudu), kuid hulktahuka puhul on tunduvalt keerulisemad.

On selge, et mitmesugustel põhjustel on eelistatavam ümberpöördud järjekord: selgitada enne teatavate kindlate omadustega objektide olemasolu, põhjendada nende õppimise tähtsust, siis anda nende objektide nimi ja täpne definitsioon.

Iga definitsioon avab uue mõiste sisu, selgitades selle seost varem defineeritud mõistetega. Kuid millestki tuleb ju alata: ühegi teaduse kõiki mõisteid ei ole võimalik defineerida. Siit tuleneb vajadus eraldada antud teaduse p õ h i - ehk a l g m õ i s t e d, mõisted, mille sisu ei selgitata definitsioonide kaudu, mis toimub perekonna ja liigi tunnuse nimetamise teel, vaid teiste võtetega, millest nimetame siin kolm tähtsamat: 1) kirjeldamine, 2) kaudne defineerimine aksioomide kaudu, 3) kaudne defineerimine abstraktsiooni teel. Näiteks, kõik katsed defineerida perekonna ja liigi tunnuse näitamise teel sääraseid geomeetrilisi mõisteid, nagu punkt, sirgjoon, tasapind jmt., jäävad tagajärjetuks. Jäädes matemaatika arenemise esimese etapi raamidesse, s. o. tegeldes geomeetrias kujundite õppimisega, selgitame nende terminite teaduses üldkasutatavat täpset tähendust sel teel, et näitame objekte, mis (abstraktsiooni resultaadina) on enam-vähem lähedased täpsetele geomeetrilistele kujunditele (nõela teravik, pingule tõmmatud niit, vaikne veepind väikeses nõus jne.), ning selgitame, mis peab tegema nende enam-vähem jämedate mudelitega, et nad üha rohkem ja rohkem vastaksid neile kujundeile (üleminek piirile). Matemaatika koolikursuses on säärased kirjeldused esimese järgu tähtsusega. On parem, kui

need kirjeldused on konstruktiivsed, s. o. kui neist nähtub vastavate objektide saamise viis. Veel parem on, kui õpilased mitte ainult ei tutvu selliste konstruktiivsete kirjeldustega, vaid juhendudes neist, esitavad ise enam-vähem täieliku mudeli. Näiteks, tasapinna mõistet võib selgitada, kirjeldades tema saamise viisi ühe sirgjoone (liistu) liikumise teel kaht lõikuvat sirget (liistu) mööda.

Palju vähema tähtsusega koolis, kuid seda suurema tähtsusega teaduses on algmõistete kaudne defineerimine aksioomide kaudu.

Kõik geomeetria teoreemid tuletatakse siin loogiliselt aksioomidest, kuid aksioomides kõneldakse ainult vähestest põhiliste geomeetriliste kujundite omadustest. Näiteks punktide ja sirgjoonte õppimisel me lähtume sääraseist faktidest, nagu punkti ja sirgjoone vastastikuse asetsemise kahe ja ainult kahe juhtumi võimalikkus (punkt kas asetseb sirgel, on temaga «intsidentne», või ei asetse, ei ole temaga «intsidentne»), või nagu ühe ja ainult ühe sirgjoone olemasolu, mis on intsidentne kahe mis tahes antud punktiga jne. Kõik need faktid formuleeritakse aksioomide näol, mis ühes koos annavad geomeetria ülesehitamiseks kõik vajalikud punktide ja sirgjoonte omadused, ilma et neid mõisteid otseselt defineeritaks. Aksioomides ei kõnelda midagi niisuguseist, võiks nagu arvata, olulistest asjadest, nagu sirgjoone jämedus, sirglõigu omadus olla kõige lühemaks teeks, mis ühendab ta otspunkte, ja paljudest teistest omadustest, millel on esmajärguline tähtsus geomeetriliste kujundite näitlikul ettekujutamisel. Siit järeldub paratamatult, et algmõisted, millega tegeleb antud matemaatiline distsipliin, käivad mis tahes objektide kohta, mis vastavad antud aksioomidele, sõltumata nende objektide konkreetseist iseärasustest. Siin esitatud algmõistete sisu avamise viis, mis harukordselt laiendab iga matemaatilise distsipliini rakendamise valdkonda, ei ole keskkoolis kuigi järjekindlalt ega täielikult rakendatav.

Sama tähtsad teadusele on definitsioonid abstraktsiooni teel, mis määravad uue mõiste sisuks selle üldise, mis on olemas väga erinevat laadi esemeil, mis mingi tunnuse järgi ühendatakse üheks klassiks. Loobudes (abstraheerudes) nende esemete kõigist omadustest, mille poolest nad üksteisest erinevad, jõuame lõppude lõpuks niisuguse omaduseni, mis on kõigile ühine (see on omadus kuuluda antud klassi), see ongi vastava mõiste sisu. Nii võib näiteks iga naturaalarvu vaadelda selle ühise väljendajana, mis on olemas kõigil võrdvõimsail lõplikel hulkadel (s. o. niisuguseil hulkadel, mille elemente saab kas või ühel ainsal viisil seada üksühesesse vastavusse). Kuid peab märkima, et naturaalarvu mõiste kujuneb igal normaalsel lapsel juba koolieelses eas, ning keskkool võib arvestada, et igal õpilasel on see mõiste olemas. Piisab, kui selguse pärast ütelda, et naturaalarvudeks nimetatakse arve

$$1, 2, 3, 4, \ldots,$$

mille rida võib piiramatult jätkata. Definitsioone abstraktsiooni teel kasutatakse kõige üldisemate, sügavama uurimisega seotud algmõistete seletamiseks, keskkoolis ei tule neid kasutada.

Sõltuvalt teadusliku või õppetöö eesmärkidest ja tingimustest lahendatakse küsimus defineeritavaist ja algmõisteist erinevalt. Näiteks, elementaargeomeetria teaduslikul esitamisel defineeritakse mõisted «seespool», «väljaspool», kuid keskkoolis neid definitsioone ei anta; arvestatakse seda, et igaühel on selge ettekujutus nende terminite tähendusest, vajaduse korral selgitatakse neid konkreetseil näidetel. Neid definitsioone ei ole raske anda, vähemalt niisuguseil kõige lihtsamail juhtumeil, nagu ringjoone, kolmnurga ja kumera hulknurga puhul, kuid keskkoolis ei ole nende järgi tarvidust. Nende ja nende taoliste definitsioonide kogu tähtsus seisab selles, et vähendada kaudselt aksioomide kaudu defineeritavate algmõistete arvu, aga algajale matemaatika õppijale ei ole nad jõukohased; siin piisab täiesti vastavaist kirjeldustest.

Klassifikatsioon. Matemaatilises teaduses kui ka selle praktilise rakendamise paljudel juhtumitel tekib vajadus mõiste

liigitamiseks: terve kogu (hulk) asju, mis kuuluvad antud mõistesse, on tarvis jaotada (klassifitseerida) kaheks või mitmeks klassiks. Klassifikatsioon ehk «disjunktsioon» peab olema täielik, ammendav: iga vaadeldav objekt peab kuuluma ühte ja ainult ühte klassi. Näiteks, kõigi naturaalarvude hulga võib liigitada algarvude hulgaks, millest igaühel on kaks ja ainult kaks jagajat, ning kordarvude hulgaks, millest igaühel on vähemalt kolm jagajat. Kuid säärane klassifikatsioon ei ole täielik, ei hõlma ta kogu naturaalarvude hulka, kui unustame arvu 1, millel on ainult üks jagaja, ja seetõttu ei ole algarv ega kordarv. Täielikul naturaalarvude liigitamisel saame jagajate arvu järgi kolm klassi: algarvud, kordarvud ja arv üks.

Iseenesest mõistagi, peale selle naturaalarvude liigitamise on võimalikud mitu teist loogiliselt õiget liigitust. Näiteks arvuteoorias kasutatakse naturaalarvude liigitamist mingi kindla arvuga ehk mooduliga jagamisel tekkivate jääkide järgi. Niisiis mooduli 5 järgi kõik naturaalarvud jagunevad 5 klassi, mida väljendavad avaldised

$$5a,\ 5a+1,\ 5a+2,\ 5a+3,\ 5a+4,$$

kus a tähendab mittenegatiivset täisarvu.

Ammendavuse nõue on ka siis rikutud, kui kolmnurki liigitame täisnurkseiks ja võrdhaarseiks, sest siinjuures kaldnurksed isekülgsed kolmnurgad ei kuulu ühtegi klassi, ning iga kolmnurk külgedega a, a ja $a\sqrt{2}$ kuulub mõlemasse klassi. Reaalarve ei tohi liigitada täisarvudeks ja ratsionaalarvudeks, sest iga täisarv on ühtlasi ka ratsionaalarv, ja peale selle on olemas irratsionaalsed reaalarvud. Sageli vastandatakse ekslikult reaalarvud kompleksarvudele. Kompleksarvude hulk, s. o. arvud kujuga $a+bi$, kus a ja b on mis tahes reaalarvud ja i on imaginaarne ühik, jagunevad kahte klassi: reaalarvudeks ($b=0$ puhul) ja imaginaararvudeks (juhtumil, kui $b\neq 0$). Seepärast peab rääkima mitte reaalarvudest ja kompleksarvudest, vaid kompleks-reaalarvudest ja kompleks-imaginaararvudest.

Paljude matemaatiliste ülesannete lahendamine nõuab kõigi võimalike juhtumite klassifitseerimise oskust. Näiteks uurides kolmnurga ABC konstrueerimist antud aluse AB, kõrguse h_a ja tipu C juures oleva nurga $\alpha(0<\alpha<180°)$ järgi, me peame eristama kolm võimalikku ja ainuvõimalikku juhtumit: lõigule AB ehitatud ringi segmendil, mille kaare igast punktist lõik AB paistab nurgas α, võib kõrgus olla vähem kui h_a, võrdne h_a-ga, suurem kui h_a. Esimesel puhul lahendit ei ole; teisel puhul on üks lahend, kolmandal kaks lahendit, mis on sümmeetrilised lõigu AB keskristsirge suhtes.

Klassifikatsioon peab toimuma antud küsimuse suhtes peamise tunnuse järgi. Näiteks, antud juhtumil oleks kasutu olnud klassifitseerimist teostada nurga α suuruse järgi. Kui siiski oletada, et nurk α on antud meelevaldselt, siis oleks tulnud eristada kaks juhtumit: esiteks, kui $0<\alpha<180°$, ning järelikult, kolmnurgad nur-

gaga α on olemas, ja teiseks, kui $\alpha \leqslant 0$ ja $\alpha \geqslant 180°$, mil sääraseid kolmnurki üldse pole olemas; esimesel puhul tuleb vaadelda ülal esitatud kolme «alajuhtumit».

Klassifikatsioon läheb raskemaks, kui tunnuste arv, mille järgi see toimub, kasvab. Kui tunnuse I järgi saame a klassi ja tunnuse II järgi sama objektide hulk jaguneb b klassi, siis arvestades mõlemat tunnust korraga, saame üldiselt ab klassi (erijuhtumeil on võimalik selle arvu vähenemine). Näiteks, klassifitseerides kolmnurki nurkade suuruse järgi teravnurkseiks (mil kõik kolm nurka on teravad), täisnurkseiks (mil üks nurk on täisnurk) ja nürinurkseiks (üks nurk on nüri), ning külgede omavahelise suuruse järgi võrdkülgseiks, võrdhaarseiks ja isekülgseiks (lugedes kolmnurga võrdhaarseks, kui ta küljed on a, a, b ja $a \neq b$), siis arvestades mõlemat tunnust korraga, saaksime kokku $3 \cdot 3 = 9$ klassi, kuid kaks neist osutuvad tühjadeks, sest ei ole olemas võrdkülgseid täisnurkseid kolmnurki ega võrdkülgseid nürinurkseid kolmnurki.

Raskemal ja keerulisemal liigitamise puhul on väga mugav «dihhotoomia», s. o. kogu vaadeldava hulga alaliigitamine järkjärgult kaheks klassiks, kusjuures ühte klassi kuuluvad kõik mingisuguse tunnusega objektid, teise klassi kõik muud objektid, teine klass liigitatakse uuesti kaheks klassiks. Näiteks, uurides kõiki võimalikke juhtumeid, mis võivad esineda süsteemi

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

lahendamisel, kui peab arvestama determinantide

$$\begin{aligned} D &= ab_1 - ba_1, \\ D_1 &= cb_1 - bc_1, \\ D_2 &= ac_1 - ca_1, \end{aligned}$$

kordajate a, b, a_1, b_1 ja lõpuks vabaliikmete c ja c_1 erinevaid väärtusi, on kasulik esmalt vaadelda juhtumit, kui $D \neq 0$ ja juhtumit, kui $D = 0$. Konstateerides, et juhtumil, kui $D \neq 0$, süsteemil on alati ühene lahend, vaatleme edasi juhtumit $D = 0$ ning teostame uue dihhotoomia: kui $D = 0$ juhul $D_1 \neq 0$ või kui $D = 0$, $D_1 = 0$ ja $D_2 \neq 0$, siis süsteem on vasturääkiv. Kui aga $D = 0$, $D_1 = 0$ ja $D_2 = 0$, siis teeme järgmise dihhotoomia: esiteks vaatleme juhtumit, kui koefitsientidest a, b, a_1, b_1 vähemalt üks on nullist erinev, ning süsteem taandub ühele võrrandile, mis on ühe vaba tundmatuga (ühe otsitavaist võib võtta vabalt) määramatu võrrand, teiseks vaatleme juhtumit, kui $a = b = a_1 = b_1 = 0$. See viimane juhtum võetakse jälle dihhotoomia alla: kui $c \neq 0$ või $c = 0$, $c_1 \neq 0$, siis süsteem on vasturääkiv, ja kui $c = c_1 = 0$, siis süsteem on määramatu, sisaldades kaks vaba tundmatut.

Klassifitseerimise oskus on väga oluline nii matemaatika kursuse teoreetilise külje omandamise suhtes kui ka ülesannete edukaks lahendamiseks, kui on tarvis lahendeid uurida.

§ 6. Matemaatilised laused (teoreemid ja aksioomid). Pöördteoreemid, vastandteoreemid, vastandteoreemide pöördteoreemid. Tarvilikud ja piisavad tingimused.

Kui teaduse käsutuses on üks hulk mõisteid, siis teadus teeb nende suhtes mitmesugused otsustused, mis moodustavad ta peamise sisu.

«Otsustuseks nimetatakse mõtet, mis asjade ja nende tunnuste kohta midagi kinnitab või eitab. Nii näiteks otsustuses «NSVL on tööliste ja talupoegade nõukogude sotsialistlik riik» me kinnitame, et Nõukogude Liit on tööliste ja talupoegade nõukogude sotsialistlik riik. Otsustuses «nõukogude inimesed ei taha sõda» me eitame seda, et nõukogude inimesed taotlevad sõda» (S. Vinogradov ja A. Kuzmin, Loogika. Keskkooli õpik. 1949).

Matemaatilisi otsustusi nimetatakse tavaliselt lauseteks. Kui lause õigsust eeldatakse, kuid ei tõestata teiste lausete põhjal, siis teda nimetatakse aksioomiks (kreekakeelsest *αξιωμα* — tunnustamine, austus, üldtunnustatud seadus), või postulaadiks (ladinakeelsest «postulare» — nõudma; postulaat on lause, mille õigeks tunnistamine antud arutlusel on nõutav). Kui antud lause õigsus tõestatakse, s. o. tehakse kindlaks kui loogiline järeldus teistest õigetest lausetest, siis teda nimetatakse teoreemiks (kreekakeelsest *θεωρεω* — kaema, vaatlema). Teoreemi, mida kergesti saab tõestada teise teoreemi abil, nimetatakse selle teise järelduseks; järeldus sageli märgib lihtsalt ära vastava teoreemi erijuhtumi (näiteks teoreemist, et iga kolmnurga sisenurkade summa võrdub kahe täisnurgaga, järeldub, et täisnurkse kolmnurga kahe teravnurga summa võrdub täisnurgaga). Teoreemi, mis omab tähtsust ainult mõne teise teoreemi tõestamiseks, nimetatakse lemmaks (kreekakeelne sõna *λημμα* tähendab sõna-sõnalt pistist, tulu).

Hoolimata matemaatiliste lausete kõige mitmekesisemast sõnastusest, neid võib alati väljendada järgmisel standardkujul: «Kui teatud hulga mingil elemendil on omadus *A*, siis on tal ka omadus *B*», ehk lühemalt:

«Kui on *A*, siis on ka *B*». Siin on selgesti väljendatud kaks osa: esimene («kui on A»), mida nimetatakse eelduseks, ja teine («siis on ka *B*») — väide. Näiteks, teoreem võrdhaarse kolmnurga alusnurkade võrdsusest väljendub selles standardkujus nii:

«Kui kolmnurga kaks nurka asetsevad ta võrdsete külgede vastas, siis need nurgad on võrdsed». Sageli teoreem sisaldab rohkem kui ühe, kaks või enam eeldust. Võtame, näiteks, teoreemi: «Kui ringjoone raadius on risti antud kõõluga, siis ta poolitab selle kõõlu». Siin on kõne sirgest, mis, esiteks, asetseb antud ringjoone tasapinnal, teiseks, läbib keskpunkti, ja kolmandaks, on risti antud kõõluga. On olemas kolm eeldust, millest esimest planimeetria õppimisel ainult mõeldakse, ilma teda sõnastamata. Kui teoreemis on kaks või rohkem väidet, siis on parem teda vaadelda kui vasta-

vat hulka üksikuid teoreeme, mis on kokku võetud üheks teoreemiks. Niisiis teoreem «Kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav lõik on võrdne poolega kolmandast küljest ja on sellega paralleelne» on ühe ja sama eeldusega kahe teoreemi ühendus.

Iga teoreemi suhtes võib moodustada niinimetatud «pöördteoreemi», mis saadakse eelduse ja väite ümberpaigutamisel. Teoreemi «Kui on *A*, siis on ka *B*» pöördteoreemiks on: «Kui on *B*, siis on ka *A*». On selge, et viimase pööramine viib jälle esimese'e teoreemile: need kaks teoreemi on teineteise pöördteoreemid. Mingi teoreemi õigsus ei ütle veel midagi pöördteoreemi õigsuse ega mitteõigsuse kohta. Teoreemi puhul «Kui kolmnurga kaks nurka on võrdsed, siis nende nurkade vastasküljed on ka võrdsed» on õige ka pöördteoreem: «Kui kolmnurga kaks külge on võrdsed, siis nende külgede vastasnurgad on ka võrdsed». Kuid teoreemi «Kui inimene elab Kalinini linnas, siis ta elab Kalinini oblastis» pöördteoreem: «Kui inimene elab Kalinini oblastis, siis ta elab Kalinini linnas» on ilmselt vale. Seetõttu tuleb iga kord selgitada, kas pöördteoreem on õige või mitte.

Iga jaatava teoreemi võib esitada eitavas vormis: teoreem «Kui on *A*, siis on *B*» on täiesti samaväärne teoreemiga «Kui ei ole *B*, siis ei ole ka *A*». Tõepoolest, kui esimene on õige, siis on ka teine õige: kui ei ole *B*, siis ei saa olla *A*, sest *A* olemasolu esimese teoreemi põhjal kindlustab *B* olemasolu. Teiselt poolt, kui teine on õige, siis on ka esimene õige: niipea kui on *A*, peab olema ka *B*, sest teise teoreemi põhjal *B* puudumine põhjustab ka *A* puudumise. Järelikult, need kaks teoreemi on kas mõlemad õiged või mõlemad valed: sisuliselt need ei ole kaks erinevat teoreemi, vaid ühe ja sama teoreemi kaks eri vormi. Mis tahes teoreemi eitava vormi saamiseks tuleb eitada nii eeldust kui ka väidet ja nende kohad vahetada. Võtame, näiteks, teoreemi: kolmnurga sisenurkade summa on võrdne kahe täisnurgaga. Standardkujul see teoreem sõnastatakse järgmiselt: kui kolm nurka on kolmnurga sisenurkadeks, siis nende summa võrdub kahe täisnurgaga. Esitades selle eitavas vormis, saame teoreemi: kui kolme nurga summa ei ole võrdne kahe täisnurgaga, siis need kolm nurka ei ole kolmnurga sisenurgad.

Antud teoreemi eeldust ja väidet eitades, seejuures neid mitte ümber paigutades, saame uue teoreemi, mida nimetatakse antud teoreemi v a s t a n d t e o r e e m i k s. Vastandteoreem on mõnikord õige, mõnikord vale. Näiteks teoreemi «Kui inimene elab Kalinini linnas, siis ta elab Kalinini oblastis» vastandteoreem («Kui inimene ei ela Kalinini linnas, siis ta ei ela Kalinini oblastis») ei ole õige, kuid teoreemi «Kui naturaalarvu ristsumma jagub 9-ga, siis see arv jagub 9-ga» vastandteoreem («Kui naturaalarvu ristsumma ei jagu 9-ga, siis see arv ei jagu 9-ga») on õige.

Kergesti on näha, et antud teoreemi vastandteoreem pole muud kui antud teoreemi pöördteoreemi eitav vorm. Tõesti, teoreemile «Kui on *A*, siis on *B*» on pöördteoreemiks: «Kui on *B*, siis on *A*». Esitades selle eitavas vormis, s. o. eitades eeldust ja väidet ning

vahetades nende kohad, saame teoreemi «Kui ei ole A, siis ei ole B», mis ongi antud teoreemi vastandteoreem. Siit järeldub, et vastandteoreem ja pöördteoreem on kas mõlemad korraga õiged, või mõlemad korraga valed. Me näeme ka, et antud teoreemi eitavat vormi («Kui ei ole B, siis ei ole A») võib vaadelda kui pöördteoreemi vastandteoreemi, sest ta saadakse teoreemi «Kui on B, siis on A» eelduse ja väite eitamise teel, ja samuti ka kui vastandteoreemi pöördteoreemi, sest teda võib saada teoreemist «Kui ei ole A, siis ei ole B», kui selles eelduse ja väite kohad vahetame. Sel viisil on meil neli teoreemi:

I Kui on A, siis on B.
II Kui on B, siis on A (pöördteoreem).
III Kui ei ole A, siis ei ole B (vastandteoreem).
IV Kui ei ole B, siis ei ole A (vastandteoreemi pöördteoreem).

Sisuliselt ei ole siin nelja teoreemi, vaid ainult kaks, ja nimelt: I ja II. Teoreem IV ei ole muud kui teoreemi I eitav vorm ja teoreem III pole muud kui teoreem II eitavas vormis.

Küsimus pöördteoreemi õigsusest ja mitteõigsusest on kõige tihedamas seoses küsimusega *tarvilikkudest ja piisavatest tingimustest.*

Oletame, et oleme selgitanud, missugusel tingimusel U esineb fakt V. Kui tingimuse U rahuldamine kindlustab sündmuse V esinemise, siis öeldakse, et tingimus U on V jaoks piisav. Kui U puudumine põhjustab V puudumise, siis öeldakse, et tingimus U on V jaoks tarvilik. Niisiis, teoreemi «Kui on U, siis on V» õigsus osutab, et U on V jaoks piisav, ja eelmise teoreemi vastandteoreemi «Kui ei ole U, siis ei ole V» õigsus ütleb, et U on V jaoks tarvilik tingimus. Kuid antud teoreemi vastandteoreem, nagu nägime, on samaväärne antud teoreemi pöördteoreemiga (sest vastandteoreem on sama pöördteoreemi eitav vorm), seepärast iga piisav tingimus on ühtlasi ka tarvilikuks tingimuseks siis ja ainult siis, kui piisavat tingimust väljendava lause pööre on ka õige. Samal viisil veendume, et iga tarvilik tingimus on ühtlasi ka piisavaks tingimuseks siis ja ainult siis, kui tingimuse tarvilikkust väljendava lause pööre on ka õige.

Niisiis tuleb vahet teha kolme liiki tingimuste vahel:
1) piisav, kuid mitte tarvilik tingimus, siis kui teoreem «Kui on U, siis on V» on õige, aga teoreem «Kui ei ole U, siis ei ole V» on vale;
2) tarvilik, aga mitte piisav tingimus, siis kui lause «Kui ei ole U, siis ei ole V» on õige, kuid lause «Kui on U, siis on V» on vale;
3) tarvilik ja piisav tingimus, siis kui mõlemad laused on õiged.

Näiteks, kujundite võrdpindsuse piisavaks tingimuseks on nende võrdsus, kuid see tingimus ei ole tarvilik, sest kaks kujundit võivad olla võrdpindsed, olles seejuures mittevõrdsed. Kahe kolmnurga võrdsuse tarvilikuks tingimuseks on esimese kolmnurga ühe külje võrdsus teise kolmnurga ühe küljega, kuid see tingimus ei ole veel piisav. Kümnendsüsteemis kirjutatud naturaalarvu 9-ga jaguvuse tingimuseks on tema ristsumma jaguvus 9-ga; see on tarvilik ja piisav tingimus. Teine näide: selleks et võrrandil $x^2 + px + q = 0$, kus p ja q on

reaalarvud, mõlemad lahendid oleksid positiivsed, on tarvilikud kolm tingimust, nimelt:

$p < 0$, $q > 0$, $p^2 - q \geqslant 0$; igaüks neist tingimustest on tarvilik, sest kui neist kasvõi üks ainuski ei oleks täidetud, siis mõlemad lahendid ei saa olla positiivsed, kuid ükski neist eraldi ei ole piisav; kõik need kolm tingimust koos on piisavaks tingimuseks.

§ 7. Induktsioon ja deduktsioon. Intuitsioon. Analoogia. Analüüs ja süntees. Vastuväiteline tõestusviis. Tõestus täieliku induktsiooni meetodiga.

Nagu iga üksiku inimese elus nii ka kogu inimkonna elus on matemaatilise arenemise esimesel astmel matemaatiliste tõdede ainsaks tunnetuse allikaks vaatlus ja kogemus, mis ühendatakse üheks üldiseks induktsiooni mõisteks (ladinakeelne *inductio* — juhtimine, suunamine); üksnes vaatluse teel veendub inimene, et kaks ja kolm on viis, ainult kogemuse teel tunnetatakse, et kaht punkti ühendavaist teedest sirge tee on kõige lühem. Miljoneid kordi kordunud kogemus on kujundanud inimestel erilise mõttelise vaatlusvõime, niinimetatud intuitsiooni; paljudel lihtsatel juhtumitel on inimene suuteline kindlaks tegema matemaatilisi tõdesid ainuüksi asjade tõelise olukorra kujutluse abil, seejuures otseseid meelelisi tajumisi kasutamata. Nii näiteks, teades, et sirge a ja kolm punkti A, B, C asetsevad ühel tasapinnal ning seejuures punktid A ja B sirgest a ühel pool, punkt C aga teisel pool, inimene ei vaja välismeelelisi vaatlusi selleks, et täieliku veendumusega otsustada, et sirglõik AB ei lõiku sirgega a, kuid lõigud AC ja BC lõikuvad sirgega a. Niisugune otsustus tehakse intuitsiooni põhjal, kuid kunagi ei pea unustama, et kõigi sääraste intuitiivsel teel tunnetatud tõdede allikaks on lõppude lõpuks induktsioon, s. o. vaatlus ja kogemus.

Peab vahet tegema täieliku induktsiooni (siis kui järeldus tehakse eranditult kõigi erijuhtumite vaatlemisel, nii et selle õigsuses ei jää mingit kahtlust) ja mittetäieliku induktsiooni vahel (siis kui säärast täielikku hõlmavust ei ole ning järelduse õigsus jääb küsitavaks). Näiteks, tähele pannud, et

$$4 = 2 + 2, \qquad 14 = 3 + 11 = 7 + 7,$$
$$6 = 3 + 3, \qquad 16 = 3 + 13 = 5 + 11,$$
$$8 = 3 + 5, \qquad 18 = 5 + 13 = 7 + 11,$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5, \qquad 20 = 3 + 17 = 7 + 13,$$
$$12 = 5 + 7,$$

väidame täie kindlusega, et 2-st suurema ja 20 mitteületava paarisarvu saab vähemalt ühel viisil esitada kahe algarvu summana. See on täieliku induktsiooni näide. Kuid nende samade vaatluste põhjal tehtud otsustus, et igal paarisarvul, mis on suurem kui 2, on eespool nimetatud omadus, jääb ainult enam-vähem tõenäoliseks hüpoteesiks. See on näide mittetäielikust induktsioonist, mis

lubab teha ainult oletusi. Olgu märgitud, et küsimus mis tahes paarisarvu esitamisest vähemalt ühel viisil kahe algarvu summana moodustab kuulsa «Goldbachi probleemi» sisu, mis tõsteti esile enam kui 200 aasta eest, kuid on tänapäevani lõpuni lahendamata. Lähemale kui teised on selle lahendusele jõudnud akadeemik J. Vinogradov, kes 1937. a. tõestas, et iga paarituarvu, mis ületab mingi kindla väga suure arvu, saab esitada kolme algarvu summana. Siit järeldub, et alates mingist kohast saab iga paarisarvu väljendada nelja algarvu summana.

Induktsiooni meetod on esmane. Ta on algajaile matemaatika mis tahes haru õppimisel jõukohaseim ja arusaadavaim. Selle meetodiga võib läheneda kõigile keskkoolis õpitavaile teoreemidele, saades nad seega kui enam-vähem tõenäosed oletused, hüpoteesid, kui tõed, mille üldine kehtivus jääb küsitavaks. Näiteks, tõmmates kolmnurgas kolm mediaani, veendub õpilane, et nad lõikuvad ühes punktis või peaaegu ühes punktis, viimasel juhtumil kolm lõikepunkti asuvad üksteisele seda lähemal, mida hoolsamalt on joonis tehtud. Tähele pannes, et see on niiviisi igas meelevaldselt võetud kolmnurgas, kaldub õpilane «analoogia põhjal» otsustama, et nõnda on alati igas kolmnurgas. Kuid individuaalne kogemus ei saa anda täielikku veendumust: oletus, hüpotees sellest, et ideaalselt täpse joonise puhul iga kolmnurga kolm mediaani lõikuvad ühes punktis, vajab veel kontrollimist. On tarvis veenduda ka selles, et nii ei ole alati, või tõestada varem kindlaks tehtud tõdede põhjal, et ideaalselt täpse joonise korral on alati nii.

Induktiivsel teel kindlaks tehtud matemaatiliste tõdede hulga kasvamisel selguvad järk-järgult mitmesugused nende vahelised seosed: kui mingid laused on õiged, siis mõned teised, neist tuletatud laused ei saa väärad olla. Näiteks, toetudes sellele, et läbi kahe punkti läheb üks ja ainult üks sirge, peab tunnistama, et ei saa olla kaht sirget, mis teineteisega lõikuvad kahes punktis Kui iga kolmnurga sisenurkade summa võrdub kahe täisnurgaga, siis iga kumera n-nurga sisenurkade summa on $2d\ (n-2)$. Sääraste mitmesuguste lausete vaheliste seoste uurimine mitte ainult ei veena meid ühtede tõdede kehtivuses teiste tõdede õigsuse korral, vaid viib meid ka uutele tõdedele, ilma et vajaksime induktsiooni. Nii näiteks teades, et kahe kõrvunurga summa võrdub kahe täisnurgaga ja et sama suur on ka iga kolmnurga sisenurkade summa, võime kergesti otsustada, et kolmnurga välisnurkade summa, see on nende nurkade summa, mis saame, kui kolmnurga iga külge ühes suunas pikendame, võrdub $2d \times 3 - 2d = 4d$. Niisiis kõrvuti induktsiooniga on uueks matemaatiliste tõdede tunnetamise allikaks «d e d u k t s i o o n» (ladinakeelsest sõnast *deductio* — järeldamine). Arutlust, mis näitab mingi lause õigsust tingimusel, et mõned teised laused, mida kasutatakse selles arutluses, on õiged, nimetatakse matemaatikas d e d u k t i i v s e k s t õ e s t u s e k s, või lihtsalt t õ e s t u s e k s, ja selleks kasutatud lauseid — e e l d u s t e k s.

Deduktiivne tõestus on raskemini arusaadav kui katseline proovimine, kuid tal on viimasega võrreldes kaks nii tähtsat eelist, et sellele taandubki iga matemaatilise distsipliini põhiline sisu: esiteks, deduktsioon lubab teha täpsed otsustused (oletusel, et säärased on ka eeldused); teiseks, ta järeldused on üldised, mis hõlmavad kõigi võimalike juhtumite hulga, sellal kui induktsioon kõneleb ainult neist erijuhtumeist, mida vaadeldi.

Uute matemaatiliste tõdede avastamine toimub tavaliselt induktiiv-deduktiivsel teel suurel määral intuitsiooni osavõtul, mis võimaldab teha oletusi (hüpoteese), mida edaspidi kontrollitakse kas katse või arutluse teel, ning kontrollimise tulemusel kas jäetakse kõrvale kui ekslikud või säilitatakse, omistades neile juba suurema, kuigi mitte alati täiemõõdulise, usaldusväärsuse. Näiteks, kui soovitakse selgitada, missugused arvudest kujuga $2^x - 1$ on algarvud ja missugused on kordarvud, antakse astendajale x rida järjestikuseid naturaalarvulisi väärtusi ning vaadeldakse saadud arvutustulemusi:

$x = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^x - 1 = 1$	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Kergesti näeme, et avaldise $2^x - 1$ kõik väärtused, mis teostatud katse piirides vastavad x algarvulistele väärtustele (2, 3, 5, 7), on algarvud, ja x kordarvulistele väärtustele (4, 6, 8, 9, 10) vastavad avaldise väärtused on kordarvud. Edaspidine kontroll näitab, et esialgu loomulikult tekkiv hüpotees, nimelt, et iga arv kujuga $2^x - 1$ astendaja x algarvulise väärtuse korral on algarv, on väär, sest juba $x = 11$ korral saadakse kordarv $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$; kuid teine hüpotees, nimelt et säärase kujuga arv astendaja x kordarvulise väärtuse korral on kordarv, osutub astendajate 12 ja 14 puhul õigeks. Et küsimus lõplikult otsustada, on tarvis leida selle hüpoteesi õigsuse deduktiivne, (loogiline) tõestus, mis ei ole raske, kui kasutada keskkooli lõpuklassi algebra kursusest tuntud Bezout' teoreemi üht järeldust: kahe ühesuguse astendajaga astme vahe jagub alati samade arvude esimeste astmete vahega. Tõepoolest, kui astendaja x on kordarvuline naturaalarv, siis võib võtta $x = uv$, kus u ja v on ühest erinevad naturaalarvud, ja seega $2^x - 1 = 2^{uv} - 1 = (2^u)^v - 1$ jagub jäägita vahega $2^u - 1$, mis on naturaalarv, ja seejuures mitte vähem kui $2^2 - 1 = 3$, sest u kõige vähemaks väärtuseks võib olla 2. Seega on meil nüüd teoreem: «Iga arv kujuga $2^x - 1$, kus astendaja x on kordarv, on ise ka kordarv».

Küsimus sellest, missugused arvudest kujuga $2^x - 1$ algarvulise x korral on algarvud, missugused kordarvud, on tänapäevani üldkujul lahendamata. Ei ole isegi teada, kas säärase kujuga algarve («Mersenne'i arve») on olemas lõplik või lõpmatu hulk.

Hüpoteeside püstitamisel inimene kasutab eelkõige *analoogiat*, s. o. otsustust sarnasuse järgi: on täiesti loomulik oletada, et sarnaste tingimuste puhul saadakse ühesugused tulemused. Kuid tulemus tekib terve hulga tingimuste tõttu, otsustamisel analoogia põhjal peetakse aga silmas ainult mõnd neist, seepärast ei saa otsustust analoogia järgi kunagi pidada tõestuseks. Selle põhjal, et viis päeva järgemööda oli ilus ilm, võib oletada, et ka kuuendal päeval tuleb ilus ilm, kuid nagu teada, säärane oletus on sagedasti ekslik.

Mistahes lause deduktiivne tõestus seisab selles, et tehakse kindlaks seosed selle uue lause ja varem tuntud lause või lausete vahel, mille õigsus oli kas loogiliselt tõestatud (teoreemid), või oli postuleeritud, s. o. õigeks tunnistatud tõestuseta (aksioomid). On

olemas loogilise tõestamise kaks meetodit: a n a l ü ü s ja s ü n t e e s.

Analüüsi puhul me läheme tundmatult tuntule, otsitavalt andmeile, sünteesi puhul ümberpöördult: tuntult tundmatule, andmeilt otsitavale. Oletame, et vaadeldes rida erijuhtumeid, oleme induktiivsel teel märganud, et kahe mis tahes teineteisest erineva positiivse arvu aritmeetiline keskmine on suurem kui geomeetriline keskmine, s. o. et

$$\tfrac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}, \text{ kui } a>0,\ b>0,\ a \neq b.$$

Selle võrratuse tõestuse otsimisel asendame ta järjest uute, lihtsamate võrratustega, millest igaüks on eelmisega samaväärne, s. t. on eelmisega kahtpidi seotud: iga järgmine on eelmise järeldus ja ümberpöördult: iga eelmine on järgmise järeldus. See võrratuste rida lõpeb võrratusega $(a-b)^2>0$, mille õigsus on ilmne. Järelikult, kõik eelmised võrratused on ka õiged, nende hulgas siis ka esimene võrratus, mida oli tarvis tõestada. See arutlusviis, mille üleskirjutus on allpool esitatud vasakus veerus, on analüütilise meetodi rakendamise näide. Teostades arutluse ümberpöördud järjekorras, saame sünteetilise tõestuse, mis on üles kirjutatud paremas veerus.

$\tfrac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$ (?)
$(a+b) > 2\sqrt{ab}$ (?)
$(a+b)^2 > 4ab$ (?)
$a^2+2ab+b^2 > 4ab$ (?)
$a^2-2ab+b^2 > 0$ (?)
$(a-b)^2 > 0$

$(a-b)^2 > 0$
$a^2-2ab+b^2 > 0$
$a^2+2ab+b^2 > 4ab$
$(a+b)^2 > 4ab$
$a+b > 2\sqrt{ab}$
$\tfrac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$

Analüütilise meetodi rakendamisel me ei väida, et vaadeldavad järjestikused abivõrratused on õiged: kindlustatakse ainult nende samaväärsus tõestatava võrratusega. Seda tähtsat asjaolu meenutavad üleskirjutuses küsimusmärgid iga rea lõpus, välja arvatud viimane rida. Alles siis, kui oleme viimaseni jõudnud, veendume kõikide eelmiste õigsuses. Paneme tähele, et võrratused

$$(a+b)^2 > 4ab \text{ ja } a+b > 2\sqrt{ab}$$

on samaväärsed ainult sel juhtumil, kui arvud a ja b on teineteisest erinevad positiivsed arvud ning ruutjuure väärtustest vaadeldakse ainult aritmeetilisi (positiivseid) väärtusi.

Teine lugu on sünteetilise meetodi kasutamisel: valides õigesti lähtevõrratuse, mille õigsus on vaieldamatu, tuletame sellest rea vaieldamatuid võrratusi, millest viimane ongi see, mida oli tarvis tõestada.

Analüütiline meetod on loomulikum ja ta prevaleerib arutlustel siis, kui on tarvis kindlaks teha mingi uus, tundmatu resultaat.

Teda kasutatakse enamasti siis, kui tõde ei ole teada ja seda alles otsitakse. See meetod on eriti sobiv uurimisel. Sünteetiline meetod näib harmoonilisem ja terviklikum. Inimene tarvitab teda siis, kui ta tõde teab ning tahab seda teistele näidata, tahab teisi selles veenda. See meetod on eriti sobiv tõestamisel. Selleks et teda kasutada, peab õigesti leidma lähtepunkti, peab nagu aimama, millest alata. Kõige sagedamini talitatakse nii, et uue küsimuse lahendamisele asumisel otsitakse lahendust analüütilise meetodiga, ning seejärele esitatakse leitud lahendus sünteetilise meetodiga.

Matemaatikas kasutatakse rohkesti vastuväiteliist tõestust (vastuolule viimist, *reductio ad absurdum*), siis kui paljastatakse niisuguse oletuse ekslikkus, mis on tõestatavale teoreemile vasturääkiv. Soovides tõestada teoreemi õigsust «Kui on A, siis on B», oletatakse, et see teoreem on väär, ja järelikult õige on, et «Kui on A, siis võib B ka mitte olla», ja siis näidatakse, et see oletus viib vastuolule. Siis selle oletuse võimatusest, et B puudumisel on A, järeldub, et A olemasolek põhjustab B olemasoleku, ning antud teoreem on tõestatud. Näiteks, kui eelnevalt on kindlaks tehtud, et iga kolmnurga välisnurk on suurem igast sisenurgast, mis ei ole selle välisnurga kõrvunurgaks, siis teoreemi kahe sirge paralleelsusest kahe sisemise põiknurga võrdsuse korral, mis tekivad kolmanda sirgega lõikamisel, saab kergesti tõestada vastuväiteliselt: oletades, et need kaks antud sirget lõikuvad, peame tunnustama, et need kaks sirget koos kolmandaga moodustavad kolmnurga, millel on välisnurk, mis on võrdne ühe sisenurgaga, mis ei ole selle välisnurga kõrvunurgaks, mis on võimatu. Seega ei saa oletada, et need kaks antud sirget lõikuvad; nad ei lõiku iialgi, aga et nad on ühel tasapinnal, siis nad on paralleelsed.

Märgime, et vastuväiteline tõestus põhineb «kolmanda võimaluse puudumise» (*tertiam non datur*) seadusel, mis ütleb, et kahe otsustuse korral: «A on B» ja «A ei ole B» ei ole olemas mingisugust kolmandat ja et üks neist on õige ning teine on vale.

Seda induktsiooni meetodit, millest eespool oli juttu, ei tohi segada täieliku induktsiooni meetodiga, mida nimetatakse ka matemaatiliseks induktsiooniks ja mis on deduktiivse meetodi tähtis eriliik. Täieliku induktsiooni meetodi aluseks on aksioom («täieliku induktsiooni printsiip»): kui mingite naturaalarvude hulgas M on arv 1 ja samas hulgas koos naturaalarvuga n, on sellele järgnev arv $n' = n + 1$, siis see hulk M on kõigi naturaalarvude hulk. Keskkoolis piirdub täieliku induktsiooni meetodi rakendamine tavaliselt Newtoni binoomvalemi tõestamisega astendaja n mis tahes naturaalarvulise väärtuse korral, kusjuures esiteks lihtsa induktsiooni abil, s. o. valemite

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3 \cdot (a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^3$$

jne.

lihtsa vaatlemise teel jõutakse hüpoteesile, et

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, a^{n-k} b^k,$$

seejärel, oletades, et see valem on õige mingi astendaja n korral, tõestatakse ta õigsus ka astendaja $n' = n+1$ korral; et $n = 1$ korral tõestatav valem annab:

$$(a+b)^1 = a^1 + C_1^1\, a^0 b^1 = a + b,$$

ja seega on õige, siis täieliku induktsiooni printsiibi põhjal võime väita, et ta on alati õige. Selles näites hulk M koosneb kõigi nendest naturaalarvulistest astendajatest, mille puhul Newtoni binoomvalem on õige.

On palju teisi täieliku induktsiooni meetodi rakendamise võimalusi, mis on keskkooli õpilastele jõukohased.

Vaatleme üht näidet. Võttes

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = S_n,$$

tõestame, et

$$S_n = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1).$$

Juhtumil, kui $n = 1$, annab see valem

$$S_1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1,$$

nagu peabki olema. Oletades, et ta on õige mingi n korral, näitame, et ta on õige ka $n' = n+1$ korral:

$$S'_n = S_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{1}{6}\,(n'-1)n'(2n'-1) + n'^2 = \frac{1}{6}\, n'[2n'^2 + 3n' + 1] =$$
$$= \frac{1}{6}\, n'(n'+1)(2n'+1).$$

Järelikult, valem

$$S_n = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$$

on õige mis tahes n korral.

Täieliku induktsiooni meetodiga saab kergesti tõestada ka valemi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = [1/2 n(n+1)]^2$$

kehtivust ja teoreemi mis tahes kordarvu esitamise võimalusest algarvuliste tegurite korrutisena (vt. [II, 36]), ning kuulsa Euleri teoreemi mis tahes nulljärku hulktahuka tippude, servade ja tahkude arvude vahelisest seosest (vt. [IV, 1]), ja palju teisi.

Õpetades õpilasi iseseisvalt kasutama seda meetodit, anname neile matemaatilise tõestamise võimsa vahendi, mis on aluseks arutlustele naturaalarvude hulga omadustest, kuid peab silmas pidama, et matemaatilise induktsiooni meetod on ainult niisuguste teoreemide tõestamise meetodiks, mis on tõenäolike hüpoteesidena juba leitud, tavaliselt proovimise teel mõnede väikeste naturaalarvuliste väärtuste puhul, s. o. mittetäieliku induktsiooni teel.

Deduktsiooni ülekaal induktsiooniga võrreldes on matemaatika kõige iseloomustavamaks jooneks, mille poolest ta teravalt erineb kõigist teistest teadustest. Siiski oleks jäme viga loobuda matemaatilistel uurimustel kui ka matemaatika õpetamisel lihtsa induktsiooni kasutamisest. Erijuhtumite vaatlemine peab eelnema üldisele otsustusele. Mitmesugused arvutused, mõõtmised, konstruktsioonid peavad deduktiivseid tõestusi ette valmistama.

§ 8. Matemaatiline süsteem. Rangus defineerimisel ja tõestamisel.

Matemaatilised laused, mis moodustavad iga matemaatilise teaduse sisu, ei ole isoleeritud, vaid on üksteisega kõige tihedamalt seotud, esitades harmoonilise süsteemi. Kõige täielikumal ülesehitusel, mille ideaal oli üldjoontes püstitatud juba Vana-Kreekas, mille täielik mõistmine aga saavutati alles XX sajandil, võetakse teaduse vundamendiks mingi hulk põhimõisteid ja aksioome; viimased avavad põhimõistete sisu, nad on põhimõistete kaudseiks definitsioonideks. Kui antud matemaatilise distsipliini need elemendid, s. o. põhimõisted ja aksioomid, on püstitatud, siis kogu edasine ülesehitamine toimub deduktiivselt. Iga uus mõiste teaduses defineeritakse põhimõistete ja varem defineeritud mõistete kaudu. Iga uus teoreem tõestatakse, s. o. tuletatakse aksioomidest ja varem tõestatud teoreemidest. Niisiis iga mõiste antud teaduses kas kuulub põhimõistete hulka, mida defineeritakse kaudselt aksioomide kaudu, või defineeritakse, mingit kolmandat ei saa olla. Iga lause kas kuulub aksioomide hulka või ta tõestatakse, s. o. tunnistatakse teoreemiks. Ka siin ei saa mingit kolmandat olla, ei mingeid viiteid «ilmseile» faktidele. Nagu eespool (§ 3) selgitatud, kindlustab teaduse niisugune esitamisviis reaalse maailma kõige suurema hulga objektide hõlmamise. Algmõisted saavad väga laiaulatusliku tähenduse: nad hakkavad tähistama mitte ainult seda, mis me oleme harjunud nendega siduma tavaliste kirjelduste põhjal, vaid kõike, mis aga rahuldab aksioome.

Aksioomide süsteemile esitatakse kolm nõudmist: esiteks, aksioomid peavad olema ühtsed (vasturääkivuseta); nad ei tohi mitte ainult üksteisele vasturääkivad olla, vaid ka kõikide teoreemide hulgas, mis neist võidakse tuletada, ei tohi olla kaht niisugust, mis teineteist eitavad, s. o. kui üks teoreem ütleb, et «*A* on *B*», siis teine teoreem ei või väita, et «*A* ei ole *B*». Teiseks, aksioomid peavad olema üksteisest sõltumatud, s. t. mitte ükski neist ei või olla teiste järelduseks, ei või olla teistest tuletatav, sest sel puhul ta ei oleks aksioom, vaid teoreem. Kolmandaks, aksioo-

mide süsteem peab olema a m m e n d a v, s. o. aksioome peab olema küllaldaselt selleks, et tõestada antud distsipliini kõiki teoreeme; täpsemalt: igast kahest antud matemaatilise distsipliini terminitega formuleeritud teineteist eitavast lausest peab üks olema tuletatav antud aksioomide süsteemist, teine peab sellele süsteemile vasturääkiv olema. Tavaliselt seletatakse aksioomide süsteemi ammendavust pisut teisiti, kasutades kahe süsteemi objektide «isomorfismi» mõistet ja objektide vahelisi seoseid.

Ühegi matemaatilise distsipliini säärane aksiomaatiline käsitlus ei ole keskkoolis jõukohane. Peale selle, ja see on veel tähtsam, on põhjendatud kaalutlusi selle poolt, et teaduse aksiomaatilist käsitlust üldse mitte lugeda ideaaliks, nagu seda traditsiooni järgi Eukleidese ajast peale tehakse. Õpitava matemaatilise distsipliini kõigi mõistete selge arusaamise nõue, mis kindlustatakse põhimõistete puhul vastavate definitsioonidega, jääb jõusse õppimise kõigil astmeil, kuid aksioomide eraldamine pole kaugeltki alati võimalik. Kui koolis aksioome püstitatakse, siis peavad nad ühtsed olema, kuid ei saa nõuda, et nende süsteem oleks sõltumatu: koolis tuleb lugeda aksioomideks kõik laused, mille õigsus terve mõistuse seisukohalt ei ärata kahtlust, kuigi nad oleksid tõestatavad teiste aksioomide põhjal. Aksioomide süsteemi ammendavuse järjekindel nõue teeks samuti kooli matemaatika kursuse iga osa käsitluse liiga kohmakaks. Raskemaid ja tähtsamaid aksioome sõnastades tuleb paljusid muid aksioome iseenesest mõistetavaks pidada, tegelikult kasutades neid vajadust mööda tõestamisel.

Jääb veel lisada, et aritmeetika aksioomide süsteemi vasturääkimatus pole seni ajani kindlaks tehtud. Selles suunas teevad uurimistööd nõukogude matemaatikud P. Novikov ja D. Botšvar. Märgime veel, et tänapäeval on tõestatud kõigi teada olevate aritmeetika aksioomide süsteemide ammendamatus.

Niisiis, eespool nimetatud nõudeid matemaatiliste distsipliinide käsitlemisel, mis võib kokku võtta käsitluse «ranguse» mõisteks, saab koolis (mitte ainult keskkoolis, vaid ka kõrgemas koolis) ainult osaliselt realiseerida, seda paremini, mida vanemad on õpilased ja mida kõrgem on nende arengu tase, siinjuures ei ole kahtlust, et olemasolev koolipraktika võib siin mitmes suhtes paraneda. Igatahes tuleb igal matemaatilisel arutlusel (tõestamisel) nõuda, et esiteks, tõestamisel kasutatava iga mõiste sisu oleks lahti mõtestatud kas defineerimisel või kirjeldamisel; teiseks, peab olema täpselt kindlaks tehtud, milliste matemaatiliste lausete õigsust kasutatakse selle tõestamisel, kas seetõttu, et nende õigsus oli varem tõestatud, või seetõttu, et nende õigsuses oleme veendunud kogemuse põhjal.

II peatükk.

MATEMAATIKA ÕPPEAINENA.

§ 9. Matemaatika õpetamise kaks eesmärki koolis.

Matemaatika nagu iga teisegi nõukogude kooli õppeaine õpetamise põhiliseks eesmärgiks on igakülgselt arenenud inimese, kommunistliku ühiskonna ehitaja kasvatamine, ning taotleb selleks kaht eesmärki: esiteks, kindla hulga süstematiseeritud teadmiste ja oskuste omandamine, teiseks, kindlate mõistuse, tahte ja iseloomu omaduste kasvatamine.

Inimese igapäevane elu nõuab kõrvuti üldise kirjaoskusega ka elementaarset matemaatilist kirjaoskust: aritmeetiliste tehete oskust

arvutamisel täis- ja murdarvudega, tutvust mõõtudega, tutvust kõige lihtsamate geomeetriliste vormidega, arvuliste vahekordade näitliku kujutamise oskust mitmesugusel viisil (diagrammid ja graafikud) jne. Paljud massilised elukutsed esitavad väga kindlaid ja üldiselt kaunis kõrgeid nõudeid matemaatilise ettevalmistuse suhtes, need nõuded on seda suuremad, mida kõrgem on üldine kultuuri tase, mida täielikum on tootmise tehnika. Nii on autojuhile ja kolhoosi juhatuse liikmele matemaatika palju suuremal määral vajalik, kui näiteks tallimehele või üksiktalupojale. Teised õppeained, mida õpetatakse nii keskkoolis kui ka mitmesuguseis kesk- ja kõrgemais kutsekoolides (füüsika, keemia, astronoomia, joonestamine jt.), eriti tehnilised distsipliinid, esitavad matemaatika suhtes veelgi suuremaid nõudeid. Nõukogude rahva hariduse süsteemis avab seitsmeklassiline kool noorsoole tee tehnikumidesse ja kümneklassiline kool kõrgemaisse õppeasutustesse, ning tehnikumide ja kõrgemate õppeasutuste nõuded sisseastujaile matemaatilise ettevalmistuse suhtes on esmajärgulise tähtsusega nende teadmiste ja oskuste hulga ja iseloomu määramisel, mida peavad kindlustama seitsmeklassiline kool ja keskkool.

Igal matemaatika õpetajal peab olema täiesti selge, milliseile nõudeile vastavad teadmised ja oskused matemaatilise ettevalmistuse alal peab ta oma õpilastele kindlustama. Praegu kehtiv, Vene NFSV Haridusministeeriumi poolt kinnitatud keskkooli matemaatika programm määrab matemaatiliste distsipliinide õpetamise konkreetsed eesmärgid keskkoolis järgmiselt:

«A r i t m e e t i k a õpetamise eesmärgiks on õpetada õpilasi teostama teadlikult, kiiresti, kindlalt ja kõige ratsionaalsemalt tehteid täis- ja murdarvudega, rakendama omandatud teadmisi ülesannete lahendamisel ja lihtsamate, praktilise iseloomuga arvutuste teostamisel».

«A l g e b r a õpetamise eesmärgiks on laiendada õpilastel kujutlust arvust, õpetada neid teadlikult, kiiresti ja kõige ratsionaalsemalt teostama algebraliste avaldiste teisendamisi, arendada funktsionaalse sõltuvuse ideed ja selle graafilist kujutamist, õpetada võrrandite koostamise võtteid ja nende lahendamise meetodeid, samuti ka oma teadmiste rakendamist lihtsamate ülesannete lahendamisel füüsika, keemia, astronoomia, tehnika ja põllumajanduse alal.»

«G e o m e e t r i a õpetamise eesmärgiks on arendada õpilastes ruumilist kujutlusvõimet tasapinnaliste ja ruumiliste kujundite omaduste süstemaatilise tundmaõppimisega ja nende omaduste kasutamisega arvutusliku ja konstruktiivse iseloomuga ülesannete lahendamisel, arendada õpilastes loogilist mõtlemist ja oskust rakendada omandatud teadmisi praktiliste tööde täitmisel: mõõtmised maastikul, mitmesuguste ehituste pindalade ja ruumalade määramine, topograafias kasutatavad lihtsamad mõõtmised jne.»

«T r i g o n o m e e t r i a õpetamise eesmärk seisab trigonomeetriliste funktsioonide ja nende omaduste tundmaõppimises, täisnurksete ja kaldnurksete kolmnurkade lahendamises ja trigonomeetria

tegelikus rakendamises geomeetria, füüsika jne. küsimustes.» (Keskkooli programmid, «Matemaatika», 1952)

Igasugune programm, mis määrab õpitava aine, annab vajadust mööda ainult kõige lühemad näpunäited küsimuste tsüklist, mida peab enam-vähem sügavamalt puudutama. Üksikasjalisema määratuse kindlustavad soovitatud õpperaamatud, käsiraamatud ja ülesannete kogud. Kuid hea matemaatika õpetaja, oma ala tõeline meister, juhendub peale selle veel neist nõudeist tema õpilaste matemaatilise ettevalmistuse kohta, mida esitavad neile teised õppeained, mis neilt küsitakse tehnikumidesse ja kõrgemaisse õppeasutustesse sisseastumise eksamitel, missugused teadmised ja oskused on neil vajalikud praktilises tegevuses. Ei ole lubatav, et õpetaja ütleks (või mõtleks): «Mina täidan programmi nõudeid, ja mis sellest tuleb, see ei puutu minusse.»

Kuid selle puhthariduslikku küljega, s. o. teatava teadmiste ja oskuste hulgaga matemaatika õpetamise ülesanded üldhariduslikus keskkoolis ei ole veel ammendatud: iga aine, nii ka matemaatika õpetamisel peab kool kasvatama, peab välja arendama õpilaste kindlad meelte, tahte ja iseloomu omadused. Õige arusaamine matemaatika filosoofilisest küljest kui teadusest reaalse maailma teatavate omaduste kohta soodustab üldiselt teaduslikku materialistlikku maailmavaate kujundamist. Matemaatika õpetamine aitab suurel määral kaasa loogiliste vilumuste, s. o. õige mõtlemise oskuse omandamisel ja kindlustamisel. Matemaatiliste ülesannete lahendamine kasvatab tahet, harjutab süstemaatiliseks vaimseks tööks, arendab enese kontrolli ja taipu. Sobiv ülesannete valik, eriti aritmeetika alal, võimaldab ühtlasi tutvuda paljude kasulike ja meeldejäävate andmetega sotsialistlikust ülesehitustööst ja soodustab seega nõukogude patriotismi kasvatamist.

Mõned mõtted sellest, missugust poliitilis-kasvatuslikku tööd saab teha ja peab tegema matemaatika tundides, leiab lugeja tagapool paragrahvis 16.

Matemaatika õpetaja kogu töö peab olema nii korraldatud, et need kaks matemaatika õpetamise eesmärki — nii hariduslik kui ka kasvatuslik oleksid harmooniliselt ühendatud: peab õpetades kasvatama.

§ 10. Matemaatika õpetamine pärast ÜK(b)P Keskkomitee otsuseid kooli kohta. Matemaatika metoodika sisu ja ülesanded.

Maailmas ei ole teist maad, kus inimesed nii palju õpivad kui NSV Liidus. «Õppijate arv NSV Liidus on praegusel ajal 57 miljonit», märkis G. Malenkov oma aruandekõnes NLKP XIX kongressil 5. novembril 1952. a. Peaaegu kõik nad õpivad ka matemaatikat.

Säärase ulatuse korral saab küsimus matemaatika õpetamise parimast korraldusest suure, riikliku tähtsuse.

Kõigepealt tõuseb küsimus nende matemaatiliste teadmiste ja oskuste hulgast, mida peab omandama, s. o. küsimus õppeplaani-

dest ja programmidest. Kool saab nüüdisaegse matemaatika valdkonna kolossaalsest teadmiste hulgast võtta ainult väga väikese osa. On tarvis, et see väike osa sisaldaks tõeliselt tähtsaimad selle teaduse elemendid, tema tõelised alused. Peab olema kindlaks määratud õppetöö organiseerimise printsiibid, mis erinevais õppeasutustes ja erinevail vanuse astmeil on lahkuminevad nagu seda on õppeplaanid ja programmid. Algkooli ja üldhariduslikku keskkooli suhtes on mõlemad need küsimused käesoleval ajal lahendatud ÜK(b)P Keskkomitee ajalooliste otsustega «Alg- ja keskkooli kohta» 5. septembrist 1931 ja «Õppeprogrammidest ja režiimist alg- ja keskkoolis» 25. augustist 1932. Eelnevail aastail oli matemaatika õpetamises palju väära, mida põhjustas kooli ülesannetest vale arusaamine, pedoloogia väärõpetuse järeldused, ekslikud kujutlused matemaatika ja teiste õppeainete vahelisest seosest. Keskkomitee otsused konstateerivad, et «kooli põhimine puudus antud silmapilgul seisab selles, et kooli õpetus ei anna küllaldast hulka üldhariduslikke teadmisi ega lahenda rahuldavalt tehnikumide ja kõrgemate õppeasutuste jaoks täiesti kirjaoskajate inimeste ettevalmistamise küsimusi, kes hästi valdaksid teaduse aluseid» ja näitavad täpselt kätte teed sellest põhimisest puudusest vabanemiseks, märkides mitmel puhul eriti matemaatika õpetamise olukorda. Edaspidi töötati nende otsuste alusel välja õppeplaanid, mis jaotasid õppeaja üksikute õppeainete vahel, koostati kõigi õppeainete programmid, mis täpselt piiritlesid süstemaatiliste teadmiste ringi, mis iga õpilane peab omandama, vaadati uuesti läbi ja parandati kooli õpperaamatud, mis kindlustavad õpilaste töö produktiivsuse ja iseseisvuse, kõrvaldati igasugused kahtlused õppetöö vormide suhtes («alg- ja keskkoolis õppetöö põhivormiks peab olema kindla tunniplaaniga ja kindla õpilaste koosseisuga õppetund»). On iseendast mõistetav, et ei õppeplaanid, ei programmid ega stabiilsed õpikud ei saa olla jäädavalt kindlaks määratud, liikumatud, tardunud. Kooli järkjärguline arenemine teeb vajalikuks kõigi nende dokumentide ja vahendite perioodilise revideerimise, mis toimubki Haridusministeeriumi poolt koolitöö kogemuste alusel.

Praegusel ajal (1954. a.) teostub niisugune revideerimine NLKP XIX kongressi direktiivide täitmiseks polütehnilisele õpetusele ülemineku ettevalmistamisel. Selle käigust antakse mõned andmed §-s 13.

Matemaatika metoodika tegeleb kõigepealt matemaatika õpetamise mitmesuguste meetodite ja vormide uurimisega, läbitöötamise ja täiendamisega, samuti ka mitmesuguste organisatsiooniliste küsimustega, mis tekivad nende meetodite ja vormide rakendamisel praktikas. See distsipliin selgitab, kuidas kindlustada programmidega kindlaks määratud püsivad süstematiseeritud teadmised ja oskused, kulutades selleks miinimumi aega ja jõudu, ja kuidas kindlustada nende kasvatuslike eesmärkide saavutamine, mida matemaatika õpetamine taotleb. Matemaatika metoodika uurib ja süstematiseerib paremate õpetajate kogemusi ja annab võimaluse algajal õpetajal

vältida hulga vigu, mis esialgu võivad kergesti tekkida ning toovad õpilastele suurt kahju. Lähtudes konkreetseist ülesandeist, mis seisavad matemaatika õpetaja ees, kes tegeleb klassiga, mis kindel oma õpilaste koosseisult, kindlate õpikutega, jääva tunniplaaniga, määrab metoodika kõigi nende konkreetsete tingimuste parimad kasutamise viisid seatud eesmärkide saavutamiseks. Ta kogub ka õpetajate kogemusi, millest nähtuvad soovid teha ühe- või teissuguseid muudatusi õppeplaanides, programmides, õpikuis.

Sageli tekib küsimus, kas matemaatika kui ka iga teise õppeaine õpetamise metoodika on teadus või kunst. Iga teadus, uurides mingit nähtuste ringi, teeb kindlaks seaduspärasusi ja töötab välja neist tulenevad praktilised juhised, mida seejärel kasutatakse, mõnd vähem, teisi rohkem laabuvalt: teaduse alusel areneb kunst. Säärane olukord on näiteks meditsiinilises teaduses ja arstimiskunstis. Samuti on lugu metoodikaga, sealhulgas ka matemaatika metoodikaga; ta on teadus, mille tulemusi viivitamatult ja kõige laiemas ulatuses kasutatakse praktikas, ja on seega õpetamiskunstile baasiks. Kuid peab tunnistama, et metoodika teadusena ei ole veel saavutanud säärast kõrget täiuslikkuse astet, mis iseloomustab matemaatilisi distsipliine endid; temas on palju puhtempiirilisi järeldusi, mis sageli põhinevad piiratud vaatluste hulgal. Nagu iga õppeaine nii ka matemaatika õpetamise metoodika käsitlus sisaldab kõrvuti üldtunnustatud järeldustega mõningal määral autori isiklikke vaateid, mis teiste poolt lükatakse mõnikord ümber. Siit tuleneb vajadus igakülgselt valgustada tähtsamaid vaieldavaid küsimusi, vajadus kriitiliselt suhtuda ta järeldustesse, vajadus kogemuse teel kontrollida kõiki ta väiteid.

Käesolev matemaatika õpetamise metoodika käsiraamat seab endale ülesandeks valgustada matemaatika õpetamise küsimusi nõukogude üldhariduslikku keskkooli V—X klassides, silmas pidades kõigepealt üliõpilase ja algaja õpetaja vajadusi, kes hakkab matemaatikat õpetama kehtivate riiklike programmide järgi, kasutades koolis tarvitusel olevaid õpikuid.

Käesolevas esimeses osas vaadeldakse üldise matemaatika metoodika küsimusi, s. o. sääraseid küsimusi, mis vähemal või suuremal määral puudutavad kooli kursuse kõiki osasid. Järgnevad osad on pühendatud eri metoodikaile: aritmeetika, algebra, geomeetria ja trigonomeetria õpetamise metoodikale.

§ 11. Tähtsaimad vene ja välismaa matemaatikud-metoodikud.

Iga matemaatika õpetaja peab olema huvitatud sellest, kuidas matemaatika õpetamise nüüdisaegsed meetodid on järk-järgult kujunenud. Peaaegu iga õpetlane, kes on teinud mingi tähelepandava panuse matemaatilise teaduse edendamiseks, on sellega ühtlasi kaasa aidanud ka matemaatika õpetamise edule, kuid on terve hulk teadlasi, kellele matemaatiliste teadmiste levitamise probleemiga seotud küsimused olid nende tegevuse põhilisteks küsimusteks ja kes iseäranis palju on teinud võrsuva noorpõlve poolt matemaatika omandamise parandamise heaks. Et siin ei ole võimalik üksikasjaliselt vaadelda matemaa-

tilise hariduse ajalugu, siis piirdume ainult lühiülevaatega kõige tähtsamaist nii vene kui ka välismaa matemaatikuist-metoodikuist, kelle tööd kuuluvad XIX sajandisse ja XX sajandi algusse. Varemast ajast võtame ainult kolm nime: L. Magnitski, L. Euleri ja S. Gurjevi oma.

Leonti Filipovitš Magnitski (1669—1739) sündis talupoja perekonnas Ostaškovo maakonnas (nüüdses Kalinini oblastis) ning õppis Moskva slaavi-kreeka-ladina akadeemias, kus matemaatikat üldse ei õpetatud. Ta õppis seda iseseisvalt, kasutades vene matemaatilisi käsikirju ja ka võõrkeelset matemaatilist kirjandust (ta valdas saksa, itaalia, hollandi, ladina ja kreeka keelt). Bojaar Golovin, kes tol ajal juhatas Moskva matemaatika-navigatsiooni kooli, kus matemaatika õpetamine oli Peetri poolt Venemaale kutsutud inglaste käes, kutsus sinna tööle ka noore vene iseõppinud matemaatiku, esitades ta tsaarile. On andmeid, et Peeter, olles vaimustatud ta matemaatilistest teadmistest, võrdles teda magnetiga ning käskis anda talle nimeks Magnitski.

Töötades navigatsiooni koolis, osutus, et Magnitski oli väga hea matemaatika õpetaja ja noorsoo kasvataja. Kooli ülema abi Kurbatov kirjutas kooli ülemale: «Kuni 16. juulini on vastu võetud ja nüüd õppimas 200 inimest. Inglased õpetavad neid bürokraatlikult, aeg-ajalt puuduvad nad ning oma harjumuse tõttu jäävad sagedasti kauaks magama. Sinu armastusväärsuse käskkirjaga on määratud neile abiliseks Leonti Magnitski, kes järjest viibib meie koolis ning alati hoolitseb õpilaste eest mitte üksnes nende teadmiste omandamise pärast, vaid ka nende heade kommete pärast, mistõttu inglased nähes, et tema töö tähtsus koolis ei ole mitte viimasel kohal, vihkavad Leontit».

Navigatsiooni kooli õpilaste jaoks Magnitski koostas matemaatika õpperaamatu, mis ilmus trükist 1703. aastal tiitliga «Aritmeetika ehk arvutamise teadus», mis kujutas endast tervet elementaarmatemaatika entsüklopeediat. Selle raamatu järgi õppisid matemaatikat XVIII sajandi esimesel poolel vene noorsoo mitu põlve, lülitudes tolle aja eesrindlikku matemaatika kultuuri. See 600-leheküljeline raamat, suurekaustaline köide, sisaldas hulga teateid aritmeetikast, algebrast, geomeetriast ja trigonomeetriast. Kogu esitus oli hoolikait läbi mõeldud ja algajaile arusaadavaks tehtud. Oli toodud palju näiteid. Kõik, mis oli tarvis pähe õppida, oli antud värssides. Näiteks ühekohaliste arvude liitmistabeli all oli lugeda:

«Kaks ja kaks on neli,
Pea meeles, armas veli!
Kui õpid, peast siis tead
Siit tabelist kõik read.»

Magnitski omistab suurt tähelepanu õpilaste teadmiste kinnistamisele. Näiteks, ära seletanud murdude korrutamise reegli, toob ta umbes 60 ülesannet selle reegli kasutamise kohta, soovitades need lugejal endal lahendada ning andes nende vastused.

Magnitski «Aritmeetika» annab ereda tunnistuse vene matemaatiku-autodidakti andekusest ning sisaldab suure hulga matemaatika õpetamise küsimuste suurepärast metoodilist läbitöötamist [I, 46].

Aritmeetika ja algebra alal avaldasid suurt mõju kogu maailma õppekirjandusele Leonhard Euleri õpperaamatud, mis esmakordselt trükiti Peterburis vene ja saksa keeles: «Aritmeetika käsiraamat» (I j. 1740, II j. 1760) ja kaheköiteline «Universaalne aritmeetika» (1768—1769), tõsine ja originaalne algebra kursus. Viimast raamatut trükiti mitu korda ja tõlgiti teistesse keeltesse.

XVIII sajandi teisel poolel ja XIX sajandi alguses vene keeles ilmunud suurest hulgast matemaatika õpikuist on vajalik eriti ära märkida Peterburi teaduste akadeemia liikme Semjon Gurjevi (1760—1813) tööd, mis tõhusalt aitasid parandada matemaatika õpetamist. Mereväe kadetikorpuse matemaatika õpetamise reformi projekti läbitöötamisel S. Gurjev jaotas kogu selle kursuse kolmeks osaks: 1) «Laste aritmeetika ja geomeetria», 2) «Päris geomeetria» ja «Arvutamise teadus», mis hõlmas aritmeetikat ja algebrat, 3) «Kõrgem matemaatika». S. Gurjevi töödes püstitatakse ja lahendatakse hulk matemaatika õpetamise metoodika üldisi küsimusi esmakordselt.

Alates XIX s. kolmekümnendaist aastaist hakkasid ilmuma Pjotr Gurjevi, S. Gurjevi poja tööd matemaatika õpetamise metoodika alal. Esimene nendest oli raamat «Aritmeetilised lehed, järjestatud kõige kergemast kõige raskemani, milles on 2523 ülesannet koos nende lahendustega ja lühike arvutamise õpetus, kokku seatud P. Gurjevi poolt» (1832).

P. Gurjevi tähtsaimaks metoodiliseks tööks on «Käsiraamat aritmeetika õpetamisest väikelastele» (1839—1842).

Suur tähtsus aritmeetika õpetamise korraldamise jaoks vene koolis oli Vassili Jevtuševski (1836—1883) töödel. V. Jevtuševski tegi palju ära algkoolide ja sõjaväe õppeasutuste õpetajate ettevalmistamise parandamiseks Venemaal. 1872. aastal ilmus trükist tema «Aritmeetiliste ülesannete kogu», millel oli tohutu levik (1902. aastal ilmus ta 76. trükina) ja tema «Aritmeetika metoodika». Mõlemad raamatud on üles ehitatud esimese saja arvu «monograafilise õppimise» meetodil: esimese saja iga arv õpitakse eraldi ja mitmekülgselt, kusjuures õpitakse tundma ta koostis teiste varem õpitud arvude summana ja korrutisena. Selle meetodi põhiidee väärib tähelepanu: peab aitama lapsel omandada selged ning täielikud ettekujutused mitmesuguseist erijuhtumeist, et nendele toetudes saaks õppida üldisi omadusi ja reegleid; kuid selle meetodi pedantne teostamine kutsus esile lapse mõtlemise kunstliku pidurduse.

Vene matemaatika metoodika arenemise järgmine etapp on seotud Aleksandr Goldenbergi (1837—1902) nimega, kes on kirjutanud mitu raamatut matemaatika alal nii õpetajaile kui ka õpilastele («Aritmeetika ülesannete kogu algkoolile», «Aritmeetiliste harjutuste kogu gümnaasiumide ja reaalkoolide jaoks», «Aritmeetika algõpetuse metoodika», «Vestlused arvutamisest» j. m.), tegeles praktiliselt õpetajate ettevalmistamise alal. Vastukaaluks arvude õppimise monograafilisele meetodile propageeris A. Goldenberg tuliselt «tehete õppimise» meetodit. Oma «Aritmeetika algõpetuse metoodika» eessõnas kirjutab ta: «Arvutusvõtete teadlik omandamine, aritmeetiliste tehete läbimõeldud kasutamine, olgugi mitte keeruliste, ülesannete lahendamisel, endausaldus vahendite suhtes, mis viivad alati eesmärgile, nende vahendite vajalik hindamine ning lõpuks, vääramatu usaldus nende vastu — kõik see on meie ülima arusaamise järgi väärtuslikemaiks külgedeks arvutamistarkuse õpetamisel lastele.»

Revolutsioonieelse Venemaa suurimaks matemaatika metoodikuks oli Semjon Sohhor-Trotski (1853—1923). Tema tähtsamad tööd on: «Aritmeetika ülesannete kogu algkooli õpetajaile», «Aritmeetika algkoolidele», «Geomeetria ülesannetes alg- ja keskkooli õpilastele», «Geomeetria ülesannetes, raamat õpetajaile», «Aritmeetika ülesannete kogu keskõppeasutuste õpetajaile», «Aritmeetika metoodika keskkoolide õpetajaile», «Näitlikkus ja näitlikud õppevahendid aritmeetika õpetamisel». S. Sohhor-Trotski töötas läbi «otstarbekohaste ülesannete meetodi». Tema arvamuse järgi sundida last alustama reeglitest ja alles siis esitada talle ülesanded, tähendab minna vastupidi inimese vaimu arenemise loomulikule käigule. Igal õpetamise momendil peavad õpetaja töö lähtepunktiks olema otstarbekohaselt valitud ülesanded. S. Sohhor-Trotski kõigis metoodilistes töödes on näha kõigepealt hoolitsust õpilase eest. «Neid töid lugedes», kirjutab J. Kavun S. Sohhor-Trotski ühe töö eessõnas, «paistab silma üks, peaaegu nende kõige tähtsam omadus, mis tõstab nad kõigest kõrgemale, mis meil on kirjutatud matemaatika metoodika alal. See on — tähelepanu osutamine lapsele. Temal ei olnud esiplaanil tehniline väljaõpetamine, vaid kasvatamine. Seepärast läheneb ta sellele vaimsele põhivarale, mis lastel on olemas, äärmiselt ettevaatlikult, hoolikalt. Tema õpetamise meetodid arvestavadki seda, et säästa lapse jõudu, äratada temas huvi ja teadmise himu, toetada ta isetegevust ja iseseisvust». S. Sohhor-Trotski oli eesrindlik pedagoog-ühiskonnategelane. Tema töö ei piirdunud õpetamise ja kirjandusliku tegevusega, vaid ta oli ka alati aktiivne osavõtja seltsidest, kongressidest, õpetaja kursustest. Revolutsioonilisest tegevusest osavõtmise pärast tabasid teda 1905. aastal repressioonid: ta eemaldati õppetöölt mõnedes õppeasutustes.

Moskva ülikooli matemaatika professor Avgust Davidov (1823—1885), kes 1860. aastal oli inspektoriks Moskva linna era-õppeasutuste järelevalve alal, kirjutas hulga elementaarmatemaatika õpperaamatuid, millest kaks said erakordse leviku osalisteks, kujunedes põhilisteks kooli õpperaamatuteks mitte ainult

autori eluajal, vaid ka palju aastaid pärast ta surma, nimelt: «Elementaargeomeetria gümnaasiumi kursuse ulatuses», mille esimene trükk ilmus 1863. aastal, ja «Elementaaralgebra», mis ilmus varsti pärast eelmist õpikut (nende mõlema uued trükid ilmusid isegi pärast Oktoobrirevolutsiooni). Peale nende kahe õpiku on A. Davidov koostanud veel «Aritmeetika käsiraamatu», «Geomeetria kreiskoolidele», «Trigonomeetria algõpetuse». Kõik need õpikud on silmapaistvad kõrge teadusliku taseme ja kogu esitatud materjali hoolsa läbitöötamise poolest, selguse, jõukohasuse ja mitmekesiste matemaatika rakenduste poolest. Geomeetria õpiku ülesehitus on väga lähedane Eukleidese «Elementidele», eviides selle kuulsa raamatu paljusid häid omadusi, kuid olles seejuures vaba selle mitmest puudusest. A. Davidovi kaks tähtsamat õpikut ei ole matemaatika õpetajate huvi tänaseni kaotanud.

Praegusel ajal on nõukogude keskkoolides suurima levikuga Andrei Kisseljovi (1852—1940) poolt koostatud aritmeetika, algebra ja geomeetria õpperaamatud. Tema «Süstemaatiline aritmeetika kursus keskõppeasutustele» ilmus esimeses trükis juba 1884. a. Hiljem, 1888. a. ilmub tema «Elementaaralgebra» ja 1892. a. «Elementaargeomeetria». Nende kolme õpperaamatu väärtuslikud omadused, nende täpsus, lihtsus, tihedus osutusid niivõrd oluliseks, et nad järk-järgult võitsid vene keskkoolis kõigi elementaarmatemaatika õpikute hulgas XIX sajandi lõpul ja XX sajandi algul esimese koha ning osutusid teiste õpikutega võrreldes kõige vastuvõetavamaiks ka nõukogude keskkoolile. Nende kolme õpiku igaühe üldtiraaž oli enne Oktoobrirevolutsiooni umbes miljon eksemplari, kuid pärast seda üle kümne miljoni. Peale nende kolme raamatu koostas A. Kisseljov veel mitu raamatut, millel oli ka suur levik. Igas uues trükis tegi ta neis parandusi ja täiendusi, arvestades töö kogemusi ning püüdes omandada kõik parima ja eesrindlikuma; viimaseil aastail on neid õpikuid ümber töötatud teiste autorite poolt. 1934. aastal Nõukogude valitsus märkis A. Kisseljovi silmapaistvaid teeneid matemaatilise hariduse alal, autasustades teda Töö Punalipu Ordeniga.

XIX ja XX sajandi künnisel rida vene metoodikuid-matemaatikuid, enne kõike aga V. Seremetjevski, kes oli laialt tuntud oma töödega matemaatika ajaloo alal, esitasid matemaatika õpetamise alal kaugeleulatuva reformi projekti, lähtudes täiesti õigest mõttest, et keskkooli on tarvilik sisse tuua mõned kaasaegse matemaatika põhimõisted, eriti funktsiooni mõiste. Selles suhtes vene teadus ennetas lääne-euroopa matemaatika metoodika terve aastakümne võrra.

Suurest hulgast teistest metoodikuist-matemaatikuist nimetame ruumi puuduse tõttu ainult järgmised nimed: professor Joassaf Tšistjakov, kes jättis vene matemaatilise hariduse ajaloos sügava jälje ajakirjaga «Matemaatiline haridus», mida ta juhtis 1912. kuni 1917. aastani ja 1928. aastast kuni 1930. aastani, ja professor Ivan Kavun, hulga õpikute ja metoodiliste käsiraamatute autor aritmeetika ja geomeetria alal.

Ülevaade vene matemaatika õpetamise metoodika arenemise ajaloost leidub raamatus [I, 33 b]. Eri tegelastele on pühendatud rida artikleid, mis on avaldatud viimaseil aastail ajakirjas «Математика в школе».

Nõukogude võimu 38 aasta kestel on Nõukogude Liidus arenenud laialdane töö matemaatika õpetamise metoodika küsimuste uurimise alal, töö, millest võtavad osa hulk matemaatika õpetajaid kui ka mitmed silmapaistvad teadlased, nagu näiteks akadeemikud A. Kolmogorov, P. Aleksandrov, prof. A. Hintšin jt. Matemaatika õpetamise metoodika küsimustele on pühendatud ajakiri «Математика в школе», mida kirjastab VNFSV Haridusministeerium. Teiseks matemaatika õpetamise metoodika küsimuste uurimise keskuseks on Suure Isamaasõja ajal loodud VNFSV Pedagoogiliste Teaduste Akadeemia, milles on olemas õpetamise meetodite Instituut, kus palju tähelepanu pööratakse matemaatikale. PTA tööd õpetamise metoodika küsimuste alal avaldatakse ajakirjas «Известия Академии педагогических наук», ja eri raamatuis, mis ilmuvad seerias «Õpetaja pedagoogiline raamatukogu». Artikleid matemaatika õpetamise metoodika alal ilmub ka pedagoogiliste instituutide poolt väljaantavais trükistes. Märgime ära veel Leningradi oblasti õpetajate täiendusinstituudi poolt väljaantud kaks köidet «Математика в школе» (1. ja 2., 1947).

Uuema aja välismaa metoodikuist-matemaatikuist tuleb esikohale seada Felix Klein (1849—1925). See suur teadlane, kes oma uurimustega mitmes matemaatika harus, eriti geomeetrias, on andnud matemaatika teadusele suure panuse, juhtis XX sajandi algul võitlust matemaatilise hariduse reformi eest. F. Kleini metoodiliste ideedega, millel põhiliselt on kahtlemata progressiivne iseloom, võib tutvuda tema suure töö [I, 28] järgi, kuid peab märkima, et tema tööde tähtsust matemaatika õpetamise reformi suhtes hinnatakse sagedasti üle ja et ta süstemaatiliselt vaikis surnuks vene matemaatilise teaduse saavutused.

Mainime veel teist liikumist kaasaja matemaatika õpetamise reformi eest, mis XIX s. lõpul ja XX s. algul mõningal määral levis Inglismaal «Perry liikumise» nime all. Inglise insener John Perry esitas nõudmise õpetada koolis ainult «rakenduslikku matemaatikat», s. o. ainult neid osi matemaatika teadusest, mida tegelikult kasutatakse praktilises elus, peamiselt tehnikas. Kujutades endast loomulikku reaktsiooni selle hoolimatusele matemaatika praktiliste rakenduste küsimuste suhtes, mis sageli leidis aset välismaa koolides, alahindas Perry liikumine teooria tähtsust, ilma milleta ei saa olla head praktikat.

§ 12. Matemaatika õpetamise põhiprintsiibid.

Nõukogude pedagoogika on välja töötanud mõned printsiibid, millele rajatakse koolis õpetatava iga aine õpetamine. Need on: teadlikkuse, näitlikkuse, süstemaatilisuse, jõukohasuse ja püsivuse printsiibid. Vaatleme mõnd detaili nende printsiipide teostamisel matemaatika õpetamisel.

a) Teadlikkuse printsiip.

Õpetaja esimeseks mureks peab olema hoolitsus selle eest, et õpilased saaksid täielikult ja selgesti aru kõigest sellest, mida nad õpivad. Igal tingimusel peab olema kindlustatud õpilaste poolt kasutatava iga oskussõna täpse mõtte mõistmine, õige arusaamine igast teoreemist, igast reeglist. Reeglite teadlikule omandamisele on vastandiks ilma arusaamiseta päheõppimine — tuupimine. Matemaatika koolikursuses on palju asju, mida tuleb meeles pidada, kuid nende õppimine peab algama täieliku selgitusega, peab alustama niisugusest käsitlusest, et õpilastele saaks täiesti arusaadavaks nende mõte ja tähtsus, ja alles pärast seda, kui säärane arusaamine on saavutatud, algab kinnistamise töö, mälu töö. Enne kui nõuda õpilaselt meelespidamist, et 7 korrutamine 8-ga annab 56, peab kindlustama selge arusaamise sellest, mis tähendab 7 korrutada 8-ga, mis jaoks ja millal on seda tarvis teha, kuidas seda teha. Täie teadlikkuse kindlustamine on matemaatika õpetamisel kergem kui iga teise aine õpetamisel, kuid see ei tule iseenesest, vaid saavutatakse õpetaja visa, süstemaatilise ja oskusliku töö tulemusena.

Vastandiks teadlikkuse printsiibile rajatud õpetamisele on «dogmaatiline õpetamine», kus õpetaja nõuab mehhaanilist omandamist ja meelespidamist, ei kõrvalda õpilastel loomulikult tekkinud kahtlusi, ei vasta õpilaste õigustatud küsimustele. Sääraselt õpetajalt kuuleb õpilane aina nõudmist: «Tee, nagu öeldud, ja ära

aruta nii palju». Vastupidi sellele: õpetaja, kes õpetab teadlikkust kindlustades, küsib igal sammul «mispärast?», nõuab näiteid, mis osutavad arusaamist, nõuab põhjendamist, s. o. seletusi, mis õigustavad antud sammu. Olgu näiteks jutt kolmnurga pindala mõõtmisest, ja õpilane räägib õigesti, et see pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega. Aga kas tal on selge, mis on kolmnurga kõrgus, eriti, kas ta oskab leida kolmnurga kõik kolm kõrgust ka täisnurkses ja nürinurkses kolmnurgas? Kas talle on arusaadav, et selle teoreemi lühikeses sõnastuses kõneldakse arvude korrutisest, mis väljendavad aluse ja kõrguse pikkusi ühtedes ja samades ühikutes, et tulemusena saadakse arv, mis väljendab otsitavat pindala vastavais ruutühikuis? Kas ta on selle reegli õppinud mehhaaniliselt pähe või tuletanud selle, vaadeldes näiteks kolmnurga teisendamist võrdpindseks ristkülikuks, millel on sama alus ning kõrgus pool kolmnurga kõrgusest?

Mehhaaniliselt, ilma arusaamiseta omandatud teadmine on võrratult vähem väärtuslik kui teadlikult omandatud teadmine, kõigepealt sellepärast, et säärast teadmist kas üldse ei kasutata või tema kasutamisel tekivad jämedaimad vead (näiteks kolmnurga pindala, mille alus on 5 cm ja kõrgus on 2 dm, leitakse olevat 5 cm^2), peale selle on niisugune teadmine alati vähem püsiv.

b) Näitlikkuse printsiip.

Nagu teada, näitlikuks nimetatakse niisugust õpetamist, mis on rajatud õpilaste otseselt tajutavaile konkreetseile kujutlustele, mitte aga abstraktseile mõisteile. Näitlikkuse printsiibi pidev taotlemine on matemaatika õpetamisel kergemini saavutatav kui iga teise aine õpetamisel, sest konkreetsed kujud, mille kaudu realiseeruvad abstraktsed matemaatilised mõisted, ümbritsevad meid igal pool. Kahjuks rikutakse näitlikkuse printsiipi matemaatika õpetajate poolt väga sageli.

Näitlikkuse kindlustamise vahendite küsimust matemaatika õpetamisel vaatleme allpool (§ 21).

c) Süstemaatilisuse printsiip.

Seoseid, mis igas teaduses on olemas eri lausete vahel ning tingivad selle teaduse esitamise korrapärase süsteemi kujul, nii et iga järgnev samm on rajatud eelmistele, seoseid, mis matemaatikas on palju kindlamad kui üheski teises teaduses (neist oli juttu juba eespool, § 8), ei saa arvestamata jätta teaduse esitamisel koolis. Nõukogude pedagoogika ajaloos oli periood, kus süstemaatilisuse nõuet õpetamisel alahinnati, kus muuseas pandi ette korraldada matemaatika õpetamine, lähtudes üksnes neist praktilistest vajadustest, mida esitab ümbritsev tegelikkus («projektide mee-

tod»). Matemaatiline süsteem taastati oma õigustes pärast ÜK(b)P Keskkomitee otsust kooli kohta 5. septembrist 1931. a. ja 25. augustist 1932. a., kus on öeldud, et «õpetaja peab õpetatavat distsipliini esitama süstemaatiliselt ja järjekindlalt.» Matemaatika kooli kursust esitatakse säärases süsteemis, mis reprodutseerib põhimiselt teaduse ajaloos kujunenud süsteemi. Lubatavaiks mõistlikeks kõrvalekaldumisteks on eriliste propedeutiliste kursuste sissetoomine, millest tuleb kõnet edaspidi (§ 14); kuid ka need propedeutilised kursused tuleb esitada süstemaatiliselt, teatavas korrapärases, läbimõeldud järjestuses ega tohi olla juhuslike, üksteisega sidumata episoodide kuhjamine.

d) Jõukohasuse printsiip.

Keskkoolis tuleb meil tegelda õpilaste mitmesuguste vanuserühmadega, alates 11—12 aastast kuni 16—18 aastani, mis üksteisest väga erinevad nii vastuvõtlikkuse, abstraktsiooni võime, prevaleerivate huvide kui ka oskuse poolest iseseisvalt töötada. Isegi ühe vanuserühma piirides esinevad märgatavad individuaalsed erinevused. Õpetaja peab oma õpilasi õpetades valima tema käsutuses olevast suurest tööviiside hulgast säärased, mis antud tingimustes osutuvad parimaiks. Siin on väga raske anda üldisi juhendeid peale kahe järgmise: 1) peab alati meeles pidama, et üldine ja abstraktne on alati raskem omandada kui erijuhtum ja näitlik, see üldine ja abstraktne tuleb esitada järk-järgult, ettevaatlikult, õpilasi ülejõukäiva materjaliga mitte koormates; 2) tuleb alati teraselt jälgida, kuidas esitatud materjal jõuab iga õpilaseni, et õigeaegselt teha märgitud plaanis vajalikud parandused, katsetada mitmesuguseid viise ning leida kõige paremad. Ka kogenud õpetajal on töös uue koosseisuga klassis ajutisi ebaõnnestumisi, muidugi harvem kui algajal õpetajal, ning need on kiiremini ületatavad. Vastava ea psühholoogia tundmine, iga klassi õpilaste poolt matemaatilise abstraktsiooni tajumise iseärasustest arusaamine, hoolas, kõigis üksikasjades läbimõeldud töö planeerimine, individuaalne lähenemine õpilastele ning oskus kiiresti teha parandusi oma töös — kõik see on esmajoones vajalik, et kindlustada edu matemaatika õpetamisel.

e) Püsivuse printsiip.

Kasulikud teadmised ja oskused, mis õpilane saab matemaatika õppimisel, peavad tema püsivaks omandiks saama: vähe tulu on niisuguseist teadmistest ja oskustest, mis haihtuvad varsti pärast eksamit, kus neid oli tarvis demonstreerida, — ja seda juhtub kahjuks sageli. Teadmised on seda püsivamad, mida teadlikumalt töötas õpilane neid omandades, mida rikkalikum ja mitmekesisem oli näitlike kujude, nendega seotud eredate näidete tagavara, mida

rohkem seoseid oli vaadeldud üksikute faktide ja reeglite vahel, s. o. mida täielikum oli süsteem, milles õpiti, mida rohkem õpetamisviisid vastasid õpilaste arengule ja huvidele. Nelja eespool nimetatud printsiibi teostamine õpetamisprotsessis teataval määral kindlustabki õppetöös saavutatud resultaatide püsivuse, kuid tuleb arvestada veel rida asjaolusid, millest teadmiste püsivus oluliselt sõltub. Liigne tõttamine uue materjali õppimisel mõjub ilmselt negatiivselt omandamise püsivusele: uuele peab andma aega seltida püsivaks ning mitmekülgseks seostumiseks kõigega, mis varem õpitud. Aga ka liiga aeglane töö tempo, kus ühe ning sama küsimuste tsükli õppimisel kahe järjestikuse sammu vahel möödub nii palju aega, et eelmisel sammul õpitu juba ununeb, mõjub samuti kahjustavalt omandamise püsivusele. Kõige tähtsam on kordamise õige organiseerimine.

Omandamise püsivus kindlustatakse tunduvalt paremini, kui teadmiste ja oskuste passiivse omandamise asemel kasutatakse aktiivseid töömeetodeid. Asi seisab selles, et on olemas kaks teed õpilastele matemaatiliste teadmiste ja oskuste edasiandmiseks. Esimest iseloomustab valmismaterjali passiivne tajumine: õpilane saab õpetajalt või õpikust valmis teoreemid, definitsioonid ja reeglid ning peab neist aru saama ja meeles pidama. Teine eeldab iseseisvat, loovat omandamist: valmis kujul antakse ainult osa materjalist, ning õpilane, omandanud selle osa, astub järgmised sammud iseseisvalt, kontrollides oma tulemuste õigsust õpetaja abil või õpiku järgi ning tehes tarbe korral vajalikud õiendused. Rääkimatagi on selge, kuivõrd teine tee on esimesest parem, kuidas see arendab initsiatiivi ja mõtlemisvõimet, kuidas tõuseb omandamise püsivus ja selgus, kuidas see väldib mehhaanilist meelespidamist, kuidas tõuseb õpilaste huvi aine vastu.

Õpilastele antud ülesannete iseseisev lahendamine on lihtsaimaks teisel teel liikumise vormiks.

Õpilaste *aktiivsuse ja iseseisvuse* igakülgne arendamine, mis saavutatakse ettevaatlikult ja hästi läbimõeldud, järkjärgult kasvava raskusega, kuid neile jõukohaste õppeülesannete andmisega, — see on veel üks printsiip matemaatika õpetamisel, millest õpetaja peab juhenduma kogu oma töös.

Nimetame veel kolm printsiipi, mida peab alati arvestama, et matemaatika õpetamine oleks täisväärtuslik.

f) *Geneetiline esitusviis.*

Õpetamise kogemus rõhutab täie kindlusega, et matemaatilise materjali omandamise kvaliteet võidab tunduvalt, kui iga uus mõiste, iga uus teoreem esitada nii, et selle side õpilastele teadaolevate asjadega oleks nähtav ja et oleks arusaadav selle õppimise otstarve. Õpilastele on kõige veenvam, kui iga uut mõistet põhjendada kaalutlustega, mis puudutavad nendele kõige lähedasemat

praktilist tegevust. Näiteks täisarvude jagamise õppimist algkoolis on kasulik siduda mingite õpilaste huvi äratavate asjade jaotamisega, võrrandite koostamist ja lahendamist algebra õppimise esimestel sammudel siduda raskemate aritmeetiliste ülesannete lahendamisega, mille lahendamiseks V klassis tuli leida erilised võtted, mis aga nüüd lahenduvad ühe üldise võttega, mitmeid geomeetria teoreeme — kõige lihtsamate maamõõtmise ja joonestamise ülesannetega jne. Geneetiline esitusviis annab eriti häid tulemusi nooremais klassides, kuid ka töötamisel vanemate klassidega tuleb seda igapidi soovitada. Sageli juhtub, et mõni abstraktselt esitatud küsimus hakkab paistma nagu uues valguses, kui õpetaja näitab selle seost teiste küsimustega ja selle tekkimist.

Oskussõna «geneetiline» tuleneb kreekakeelsest sõnast *γένησις* — tekkimine. Geneetiline esitusviis on vastandiks aksiomaatilisele esitusviisile, kus teadus esitatakse tema täiuslikumal, viimistletud kujul. Esitusviisi geneetilist iseloomu on hõlpsaim tagada teaduse antud osa ajaloo põhjal, seetõttu on ajalooline element õpetamistöös väga väärtuslik. Ega muidu kõnelda, et iga teoreetilise küsimuse täielik mõistmine saavutatakse alles siis, kui saab selgeks selle ajalugu. Kuipalju tund sellest võidab, kui seal tehakse kas või lühikesigi viiteid mitmesuguseile asjaoludele, mis on seotud vaadeldava küsimuse ajalooga, viiteid, mida üksikasjalikumalt võib arendada matemaatika ringi töös! Kirjandust matemaatika ajaloo alal on palju. Mõned õpetajale eriti tähtsad tööd on osutatud «Esimesse jaosse kuuluvate dokumentide, artiklite ja raamatute nimestikus».

g) Teooria ja praktika ühtsus.

Mitte ükski omandatud teadmine ei tohi jääda surnud kapitaliks: teda on vaja kasutada mõneks kasulikuks eesmärgiks, ning mida rutem, seda parem. Rakendades teooriat praktikas, me kõigepealt kontrollime tema õigsust, sest siis selgub, kas selle teooria põhjal tehtud otsused on paikapidavad. Koolitöös on peale selle veel väga tähtis see asjaolu, et teooria, mida õpilased oskavad kasutada, saab neile võrratult selgemaks ja jääb püsivamalt meelde. Üleminek teoorialt praktikale toimub matemaatikas lihtsamalt kui üheski teises teaduses, seega kõige mitmekesisemate ülesannete lahendamine, alates kõige lihtsamaist harjutusülesandeist, mis illustreerivad iga uut definitsiooni ja teoreemi, ning järk-järgult suureneva keerulisuse ja raskusastmega ülesannete lahendamine peab olema iga matemaatika tunni orgaaniliseks koostisosaks. Teooria õppimine ja selle rakendamine peab toimuma kooskõlastatult, harmooniliselt. Kuhugi ei kõlba säärane olukord, kus õpetaja, olles haaratud teooriast, üldse ei leia aega ülesannete lahendamiseks, nagu seda pahatihti tuleb ette geomeetria õpetamisel. Sel puhul on teooria omandamise kvaliteet alati väga madal. Niisama halb on, kui aine õppimine taandub ainult ülesannete lahendamisele, nagu seda kahjuks sagedasti esineb algebra õpetamisel, kus õpilased teevad mehhaaniliselt ettenäidatud arvutusi, endale aru andmata nende tähendusest ja põhjendamisest.

Kuid sidet teooria ja praktika vahel tuleb mõista laiemalt, mitte aga ainult kui ülesannete lahendamist ülesannete kogust: on tarvis õpilasi harjutada omandatud matemaatilisi teadmisi otseselt rakendama elus esinevate mitmesuguste praktiliste küsimuste lahendamiseks.

Vaatleme lõpuks teaduslikkuse printsiipi. Seda võib formuleerida kategoorilise nõudena — mitte midagi esitada õpilastele säärast, mida kaasaja teadus eitab, mitte midagi säärast, millest pärast küsimuse sügavamat tundmaõppimist tuleb loobuda. Teaduslikkuse printsiibi rikkumine on sageli tingitud õpetaja puudulikest teadmistest antud küsimuse suhtes. Näiteks, õpetaja nimetab mõnikord funktsiooni analüütilist avaldist «analüütiliseks funktsiooniks», vastandades seda tabeli või graafikuga antud funktsioonile («empiirilisele funktsioonile»), mitte teades, et nüüdisaegses analüüsis nimetatakse analüütilisteks funktsioonideks astmeridadena väljendatavaid funktsioone. Õpetaja, kes on halvasti orienteerunud algebra teoreemis vähemalt ühe kompleksarvulise lahendi olemasolust igal esimese või kõrgema astme täisratsionaalsel ühe tundmatuga võrrandil, viib õpilased eksitusse, üteldes, et igal võrrandil on vähemalt üks lahend, kas reaalne või imaginaarne, ning satub täbarasse olukorda, näiteks võrrandi $|x| = -1$ puhul, millel ei ole mingit lahendit, ei reaalset ega imaginaarset. Soovides tõestada mingi lause, mõtleb õpetaja selle teostada nii, et tõestab tõestatava lause mingi järelduse õigsuse, unustades, et väärast lausest saab tuletada mõnikord õiged järeldused. Näiteks väär võrdus $+5 = -5$ pärast poolte ruutu tõstmist annab õige tulemuse $(+5)^2 = (-5)^2$. Niisiis ei ole õige mõtelda, et valemi $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ õigsust saab tõestada lihtsalt mõlema poole ruutu tõstmisega ning näidata, et saadud võrdus on õige.

Muidugi mõista, ei tohi lugeda teaduslikkuse printsiibi rikkumiseks säärased juhtumeid, kus õpetaja ei tee mõne üldise lause sõnastamisel reservatsioone, kui need reservatsioonid antud õpetamise astmel ei ole vajalikud, vaid tehakse omal ajal, üleminekul uuele astmele. Näiteks õpetades V klassis ning öeldes, et lahutamine on ainult siis võimalik, kui vähendatav on lahutatavast suurem, talitab õpetaja täiesti õigesti, kui ta mingeid reservatsioone ei tee, sest õpilased tunnevad selles klassis ainult positiivseid arve. Tutvudes VI klassis negatiivsete arvudega, peab õpetaja selle küsimuse juurde tagasi tulema ja andma uue sõnastuse

Vaieldav on küsimus sellest, kas tuleb lugeda teaduslikkuse printsiibi rikkumiseks säärased juhtumid, kui mõnedel põhjustel õpilastele ei teatata täit tõde. Näiteks trigonomeetria õppimisel X klassis õpilastele tõestatakse, et $\alpha - \frac{1}{4}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha$, kus α on esimese veerandi kaare radiaanmõõt, ega öelda, et on õige ka rangem võrratus

$$\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha,$$

millest arvuliste kordajate muutmise kaudu enam rangemat võrratust ei saa. Näib, et kuigi ei ole võimalust seda viimast võrratust tõestada, peaks teda siiski puudutama, et vältida õpilaste õigustatud arusaamatust, kui nad sellega puutuvad oma edaspidises töös kokku.

§ 13. Kooli matemaatika polütehnilise õpetuse ülesannete valgusel.

Edusammud rahva hariduse alal meie maal on üldtuntud.

Nõukogude rahva kultuurielu taseme edasise tõstmise eesmärgil andis NLKP XIX kongress rahva hariduse alal järgmised direktiivid.

«Teostada viisaastaku lõpuks üleminek seitsmeklassiliselt hariduselt üldisele keskharidusele (10 aastat) vabariikide pealinnades, vabariikliku alluvusega linnades, oblastite ja kraide keskustes ning suuremais tööstuskeskustes. Ette valmistada tingimused järgmisel viisaastakul üldisele keskharidusele (10 aastat) täielikuks üleminekuks teistes linnades ja maal.»

«Üldharidusliku kooli sotsialistliku kasvatusliku tähtsuse edasise tõstmise eesmärgil ja keskkooli lõpetavaile õpilastele kutseala vabaks valimiseks tingimuste kindlustamise eesmärgil asuda teostama polütehnilist õpetamist keskkoolis ja tarvitusele võtta abinõud, mis on vajalikud üleminekuks üldisele polütehnilisele õpetamisele» (Partei XIX kongressi direktiivid NSV Liidu arendamise viienda viisaastaku plaani kohta aastaiks 1951—1955, Eesti Riiklik Kirjastus, 1952, lk. 24).

Polütehnilise õpetamise täielik teostamine võtab konkreetse kuju, kui VNFSV Haridusministeeriumi poolt antakse koolidele uued programmid ja õpikud. Kuid eesrindlikud koolid ja õpetajad on juba nüüd alustanud õpetamisse polütehnilise õpetuse elementide sissetoomist.

Mida peab siis matemaatika õpetamisel esmajärjekorras tegema partei XIX kongressi otsuste täitmiseks polütehnilise õpetamise kohta? Selle küsimuse kohta on mitmesuguseid arvamusi avaldatud nii kirjalikult kui suuliselt, kuid ühes punktis on need olnud kõik üksmeelsed: matemaatikateaduse nende aluste sisu ja õpetamise metoodika, mida «elementaarmatemaatika» nime all õpitakse nõukogude keskkoolis, on põhiliselt kujunenud püsivaiks ega saa neid praegusel ajal polütehnilisele õpetamisele üleminekul kuigi suurel määral muuta. Kuid programmi ja õpetamise meetodite mõned osalised muudatused on juba küpseks saanud ning teostatavad juba kõige lähemal ajal, kusjuures mõned küllaltki olulised parandused sõltuvad tervenisti matemaatika õpetaja heast tahtest ja heasoovlikkusest ning võivad teostuda enne igasuguseid muudatusi kehtivas programmis ja koolis kasutatavais õpikuis.

Väga oluline ja järsk muudatus peab toimuma üleminekul polütehnilisele õpetusele matemaatika koolikursuse kogu rakenduslikus osas, s. o. ülesannetes, mille lahendamine peab kaasnema selle kursuse teoreetilise osa õppimisel. Ilma kindlate kogemuste omandamiseta ülesannete lahendamiseks ei saa olla teadlikku ja püsivat teooria valdamist, kusjuures ülesannete sisu ei või olla kaugeltki missugune tahes. Kõrvuti ülesannetega, mil treenimisiseloom, peavad õpilased lahendama mitmesuguseid ülesandeid, mida tege-

likus elus tuleb tõeliselt lahendada, mõistes seda kõige laiemas mõttes: ülesandeid igapäevasest elust, ülesandeid tehnika mitmesuguseist harudest, ülesandeid, mida esitavad kooli teised õppeained, nagu füüsika, keemia, geograafia, astronoomia, joonestamine.

Elulisi ülesandeid esineb muidugi ka praeguses matemaatika koolikursuses, kuid aritmeetika kursuses on neid väga vähe, algebra, geomeetria ja trigonomeetria kursuses aga esineb neid harvade eranditena. Treenimislaadi ülesandeist matemaatika kursuses ei saa päriselt loobuda, ei saa nõuda, et iga ülesanne, mis õpilastele antakse lahendamiseks, oleks eluline, praktilise väärtusega, kuid treenimisülesannete ja eluliste ülesannete vahekord peab olema teissugune kui praegu.

Puudused matemaatika õpetamisel ilmnevad eriti teravalt selles, et õpilastel puudub arvutamisoskus. Matemaatika koolikursuses ignoreeritakse täielikult nüüdisaegset arvutamise tehnikat, meie hoiame õpilasi XVIII sajandi tehnika tasemel, kus arvutuste eesrindlikuks abinõuks olid logaritmid. Vanemais klassides peab laialt ja teadlikult kasutama mitmesuguseid matemaatilisi tabeleid, mille hulgas logaritmide tabelitele jäägu väga tagasihoidlik koht, ning logaritmilist arvutuslükatit, nooremates klassides aga harilikku arvelauda. Tänapäeva tehnikas kasutatakse üha enam ja enam «arvutusjooniseid», niinimetatud nomogramme, mille kasutamine hõlbustab mitmesuguseid arvutusi, sealhulgas päris keerulisi. Paljude nomogrammide koostamise ja kasutamise õppimine on täiesti jõukohane neile õpilastele, kes õpivad geomeetriat ja algebrat, seega nomograafia elementide võtmine programmi on kahtlemata lähema tuleviku küsimus. Kuid nüüdki võib soovitada ülesannete lahendamise korras tutvuda lihtsaimate nomogrammidega.

Matemaatika koolikursuses lahendatavate ülesannete elulisuse nõue viib vajadusele võidelda «vastutustundeta» arvutuste vastu, mille tulemuseks on säärased arvud, mis ei vääri mingit usaldust ja mille kohta üldse ei ole teada, missugused neist on õiged, missugused valed. Seda vastutustundetust saab välja juurida ainult sel teel, et aritmeetika kursuse teoreetilisse osasse võetakse väike peatükk, mida võiks nimetada «ligikaudsete arvudega arvutustulemuste ümardamise reegliteks» (vt. allpool esimese osa peatükk V), ning samuti «ligikaudse arvutustulemuse ülem- ja alamtõke ja nende arvutamine.»

Rõhuv enamus andmeist, millega tegeleme elulistes ülesannetes, on mõõtmise tulemused, seepärast mitmesuguste suuruste mõõtmisega peab tegelema mitte üksnes füüsika õpetaja, vaid ka matemaatika õpetaja. Ei saa leppida näiteks sellega, et õpilased, läbi võtnud geomeetria kursuse, ei tea, kuidas mõõta põllu pindala, puulehe pindala, keha ruumala, tema lineaarsete mõõtude järgi. Õpilased peavad oskama endale aru anda iga arvu tekkimisest ja täpsusest, millega neil tuleb ülesannetes tegelda, peavad arvudesse kriitiliselt suhtuma. Kogu raskus, mis siin tuleb ületada, seisab selles,

et õpetajad ise tunnustaksid mõõtmistulemustesse kriitilise suhtumise vajadust ja seda alati ka ise ilmutaksid. Näiteks koolimall võimaldab nurki mõõta poolekraadise täpsusega, väga hoolsal mõõtmisel kuni kümnendikukraadi täpsusega (6 minutit), hea tehniline riist aga 2-minutilise täpsusega. Milleks siis just nagu praktilist laadi ülesannetes anda nurki sekundilise täpsusega, nagu seda on tehtud Rõbkini trigonomeetria ülesannete kogus, selgitamata, missugused erakorralised tingimused õigustavad nii suure täpsusega nurkade väärtuste andmist. Sageli esineb juhtumeid, kus ühes ja samas ülesandes mõned andmed antakse väga suure täpsusega, mõned jälle väga väikese täpsusega, mis ei ole muud kui arusaamatus, mis põhjustab terve hulga halbu tagajärgi.

Erilist tähelepanu peab pöörama nimega arvude õppimisele. Matemaatika õpetab tehteid sooritama abstraktsete arvudega, kuid kõigis rakendustes me tegeleme abstraktsete arvude mitmesuguste füüsikaliste tõlgendustega, seepärast peab õpilastelt alati nõudma selget arusaamist sellest, missuguste füüsikaliste suuruste väärtused ta võtab ja missugused ta saab. Selles suhtes on kooli matemaatikal palju laenata füüsika kursusest, kus dimensioonide teooria on põhjalikult läbi töötatud.

Koolis peab õppima mitte üksnes sama liiki suuruste vahelisi seoseid, nagu see toimub aritmeetika kursuses, vaid ka eri liiki suuruste vahelisi seoseid, nagu näiteks pikkuse ja aja väärtuste suhe, s. o. kiirus, aga ka eri liiki nimega arvude korrutisi, nagu näiteks tööliste arvu ja päevade arvu korrutis, mis annab tööhulga, tööpäevade arvu.

Polütehnilisel õpetamisel peab kasvama joonestamise tähtsus. Joonised on tehnika keel, ning polütehnilise õpetusega koolis peab joonestamise paigutama palju kõrgemale kui see on praegu. Kuid matemaatika peab heaks joonestamiseks andma teoreetilise baasi ning peab alati toetama neid oskusi, mis õpilastel kujunevad joonestamisega tegelemise tulemusena. Nõuded joonise suhtes matemaatika tunnis ja joonestamise tunnis peavad olema kooskõlastatud. Erilist tähelepanu peab matemaatika osutama projektsioonjoonestamisele, millel on suur tähtsus kõigis matemaatika tehnilistes rakendustes ning nii võimsalt arendab õpilaste ruumi kujutlust.

Matemaatika nagu iga tõelise teaduse eesmärgiks on materiaalse maailma teatavate kindlate külgede uurimine. Kooliõpetuses see matemaatika õpetamise tähtis külg jääb sageli varju, ei jõua õpilaste teadvuseni, kellele see teadus, vähemalt mõnes osas, paistab mingi meelevaldselt kindlaksmääratud reeglitega mänguna: tee reeglite järgi ja kõik läheb hästi, kõrge hinne on kindlustatud, s. o. võidad mängu. Eredaks näiteks on see udu, mis jääb kõigi keskkooli lõppklassi õpilaste peasse pärast kompleksarvude peatüki läbivõtmist.

Et seda olukorda parandada, selleks on tarvis näidata, kuidas matemaatika võimaldab tunnetada tegelikkust, eriti, kuidas mate-

TRÜ Raamatukogu

maatika abil saab kaudsel teel mõõta seda, mida otseselt on raske mõõta või isegi võimatu, kuidas matemaatika hõlbustab nende eesmärkide saavutamist, mis inimesed seavad endale praktikas. Peab andma ülesandeid, milles matemaatilise arvutuse teel nõutakse leida mõne suuruse väärtus, kusjuures on soovitav viia asi leitud tulemuse õigsuse ühel või teisel viisil eksperimentaalse kontrollimiseni. Sellega seoses omavad erilist tähtsust mõõtmised maastikul, mis juba ammu on võetud matemaatika kursuses soovitatud tööde hulka, kuid harva, kus neid on teostatud õpetaja enda puuduliku ettevalmistamise ja organisatsiooniliste raskuste tõttu.

Mitte vähema tähtsusega pole ekskursioonid tootmiskohtadele, kuid tingimusel, et sääraste ekskursioonide matemaatiline külg varakult valmistatakse ette: õpetaja koos tootmisala töötajaga selgitab, missuguseile matemaatikaga seotud tootmisprotsessi külgedele tuleb õpilaste tähelepanu juhtida. Peamine mõte: matemaatika ei ole jõudeinimeste tühine väljamõeldis, vaid võimas vahend võitluses materiaalse maailma tunnetamise ja alistamise, s. o. inimeste heaoluks kasutamise eest.

Otsustavat hukkamõistmist nõuab matemaatika säärase esitamise praktika, mis õpilaste silmis annab sellele teadusele subjektiivse iseloomu: «on kokku lepitud, et...», nii alustab matemaatika õpetaja sageli uue küsimuse esitamist. Vastupidi: on tarvis rõhutada, et ükski matemaatika mõiste ja lause ei ole hoopiski subjektiivseist soovidest ja maitsest tingitud kokkuleppe tulemus, vaid on objektiivselt olemasolevate asjade ja asjade-vaheliste suhete peegeldus. Matemaatilise teooria ja tema praktiliste rakenduste objektiivset iseloomu on kõige parem näidata vastavalt valitud ülesannete lahendamisel ühes kohustusliku selle abil saadud tulemuste õigsuse kontrollimisega. See on pandiks, et õpilased tunnevad huvi matemaatika õppimise vastu ning, järelikult, võimsaimaks abinõuks õppeedukuse tõstmiseks. On vajalik kõrge matemaatiline kultuur, mis keskkooli õpilaste poolt harva saavutatakse, et hinnata matemaatikateaduse sääraseid tähtsaid külgi, nagu harmoonilisus, loogiline laitmatus, saadud lahendite ammendav iseloom, üldse kõik see, mis moodustab matemaatikateaduse ilu, sõltumata tema rakendustest. Nimelt praktilisi rakendusi hindavad keskkooli õpilaste laiad massid esmajärjekorras.

Et hävitada matemaatika kooliõpetuses tema esitamise igasugused subjektiivsed jäljed, on vaja õpetajal endal kindlustada õige arusaamine matemaatikast kui teadusest, mis peegeldab reaalse maailma ruumivorme ja kvantitatiivseid suhteid. Õpetaja peab teadma, et mis tahes matemaatilise distsipliini esitamiseks on kaks teed: geneetiline, mis näitab, kuidas teaduse abstraktsed mõisted ja laused inimeste ette tõusnud mitmesuguste praktiliste ülesannete lahendamise protsessis on ajalooliselt kujunenud, ning aksiomaatiline, mis annab teaduse süsteemi selle enamvähem lõpuleviidud kujul, kus ta esitus algab algmõistete loeteluga ja nende aksioomide loeteluga, mis on nende mõistete kaudseiks

definitsioonideks, kuid kõik järgnev saadakse deduktsiooni teel nendest teaduse elementidest. Polütehnilise õpetusega peab keskkooli matemaatika õpetaja esmajoones tundma ja hindama oma aine geneetilist esitamist. On soovitav, et iga matemaatilise distsipliini õppimine l õ p e t a t a k s aksiomaatilise esitamisega õpetaja poolt, kuid et ta mingil juhtumil e i a s e n d a k s geneetilist esitamist. Polütehnilise õpetusega kool ei vaja säärast matemaatika õpetamist, kus see esitatakse endasse suletud loogilise süsteemina, millel materiaalse maailmaga ei ole ühtki sidet, mis tervenisti on inimese mõistuse sünnitus, vaid säärast, milles igal sammul on näha side materiaalse maailmaga, milles kõigi abstraktsete mõistete ja lausete õppimine algab konkreetsete ülesannete uurimisest, mis tekivad inimestel nende praktilises tegevuses, ning lõpeb juhatusega nende mõistete ja lausete kasutamiseks sama liiki raskemate ülesannete parima lahenduse leidmisel.

Mõned muudatused on vajalikud ka praegusel ajal kasutatavais matemaatika õpetamise meetodeis keskkoolis. Kõige olulisem on õpilastele pakutava valmismaterjali hulga vähendamine sel eesmärgil, et õpilased saaksid sellest hästi aru ning peaksid püsivalt meeles. On tarvis suurendada õpilaste aktiivsust uue materjaliga tutvumisel; paljud õpilaste jaoks uued teoreemid võivad vastavalt valitud ülesannete lahendamise teel õpilaste eneste poolt taasavastatud saada, mille tulemusel tekib vajadus neid üldistada ja tõestada. Suur tähtsus on saadud tulemuste õigsuse säärasel katse teel kontrollimisel, millest oli juttu eespool.

Suure hulga sellest, millest on eespool kõneldud, võib matemaatika õpetaja teostada praegu kehtiva programmi raamides ning praegu olemasolevate õpikute kasutamisega. Kuid on aeg ka mõnedeks muudatusteks programmis, on soovitav selle teatav ümberkorraldamine. On tarvis suurendada neid osi, mis puudutavad arvutuste tehnikat, kõigepealt vaja tähelepanu pöörata ligikaudsete arvudega arvutustulemuste ümardamise reeglitele, arvutustele tõkete meetodiga, tehnikas ja füüsikas kasutatavaile ligikaudsete arvude täpsuse hindamise võtteile, mitmesuguseile arvutusriistadele, tabeleile, nomogrammidele, ligikaudseile valemeile jne. Peab tihendama sidet geomeetria ja joonestamise vahel, eriti stereomeetrias (projektsioonjoonised). Programmist tuleb kõrvaldada säärased ilmselt iganenud osad, nagu ühendite teooria, üksikasjalik kompleksarvude käsitlus, mis keskkoolis jäävad kasutamata, liig detailne trigonomeetriliste pöördfunktsioonide käsitlus ja veel mõned muud osad, millel pole ei teoreetilist ega praktilist tähtsust, selle asemel aga lisada mõned uued osad. Nii näiteks on vaja täiendada piiride teooriat, mis seni ajani on jäänud peaaegu kasutamata, funktsiooni tuletise mõiste käsitlusega, mis tunduvalt võimaldab tõsta algebra ja geomeetria kursuses vajalike elementaarfunktsioonide käsitluse ideelis-teoreetilist taset.

Praegusel ajal toimub intensiivne töö matemaatika koolikursuse programmi revideerimise alal polütehniseerimise suunas. Pedagoo-

giliste teaduste akadeemia on välja töötanud programmi projekti, see projekt on trükitud ja laiali saadetud õpetajaile arutamiseks, mis on kujunenud väga laiaulatuslikuks.

Programmi muudatusele peab järgnema ka olemasolevate õpperaamatute, nii õpikute kui ka ülesannete kogude vähemalt osaline asendamine uutega. Pärast N. Šapošnikovi ja N. Valtsovi poolt juba XIX sajandi viimasel veerandil koostatud algebra ülesannete kogu asendamist P. Laritševi ülesannete koguga on järjekorras E. Berezanskaja aritmeetika ülesannete kogu asendamine S. Ponomarjovi ja N. Sõrnevi poolt V ja VI klassile koostatud uue ülesannete koguga, mis on VNFSV Haridusministeeriumi poolt juba kinnitatud. Edaspidi on oodata veel teiste praegu kehtivate stabiilsete õpikute asendamist uutega.

Käesolevat paragrahvi lõpetades nimetame mõned artiklid ja raamatud, mis käsitlevad matemaatika õpetamise küsimusi üleminekul polütehnilisele õpetamisele.

1. Мельников М., Маркушевич А., Леонтьев А., Скаткин М., Малышев М., Политехническое обучение в средней школе, «Учительская газета», № 88 от 1 ноября 1952 г.

2. Андронов И., Требования жизни, «Учительская газета», № 102 от 24 декабря 1952 г.

3. Калашников А. Г., редактор, Вопросы политехнического обучения в школе. Сборник статей, в том числе статьи по вопросам преподавания математики Н. Н. Никитина, П. Я. Дорфа, В. П. Анисимова, П. И. Сорокина, С. Н. Андреева.

4. Фетисов А. И., Шевченко И. Н., Гончаров В. Л., Гибш И. А., Преподавание математики в школе в свете задач политехнического обучения. Материалы в помощь учителю, Изд. Академии педагогических наук, 1953.

5. Пономарёв С. А., К вопросу о политехническом обучении в преподавании математики, «Математика в школе», 1953, № 3, стр. 1—10.

6. Задачи с практическим содержанием, «Математика в школе», 1953, № 6, стр. 81—83.

7. Азия А. П., К вопросу об элементах политехнизма на уроках математики, «Математика в школе», 1954, № 1, стр. 54—57.

Varasema aja töödest saab kasulikke materjale matemaatika õpetamise polütehniseerimiseks S. Tšukantšovi artikleist (tähtsamad nendest on nimetatud raamatu lõpus).

§ 14. Propedeutiline ehk algkursus ja süstemaatiline ehk põhikursus.

Võttes matemaatika kursusest mingi küsimuse, võime seda käsitleda kindlaksmääratud programmi raamides täielikult, tervikuna, kaasa arvatud ka kõik programmis ettenähtud rakendused ning seejärel üle minna järgmisele küsimusele, mida käsitletakse ka täielikult, jne. Vastandiks säärasele «lineaarsele» ehk «translatoorsele» käsitlusviisile on olemas teine käsitlusviis, mida nimetatakse «kontsentriliseks», mille rakendamisel üht ning sama küsimust vaadeldakse kaks või rohkem korda, esmalt vaadeldakse ta kergemaid osi, rakendades jõukohasemat, seejuures vähem täiuslikku meetodit, ning viiakse asi väheste omandatud teadmiste praktilise rakendamiseni,

siis jäetakse see küsimus teatavaks ajaks kõrvale, selleks et hiljem selle juurde tagasi tulla ning võtta ta sügavamale ja põhjalikumale arutlusele. Säärased kontsentrid kujunevad loomulikul teel näiteks murdude õppimisel: algkoolis õpilased tutvuvad esmakordselt poolega, veerandiga, kümnendikuga ja mõne teise osaga, omandavad nendega seotud piltlikud kujutlused, lahendavad kõige lihtsamaid ülesandeid nende kohta, kuid edaspidi V klassis hakatakse uuesti murde õppima, käsitledes nüüd mis tahes nimetajatega murde, millega ei saa tehteid sooritada «vaba arutluse» põhjal, vaid omandatakse vastav teooria.

Kui säärane kontsentriteks jaotamine hõlmab terve rea üksteisega seotud küsimusi, siis kõneldakse «algkursusest» ehk «propedeutilisest» (ettevalmistavast) kursusest ja põhi- ehk süstemaatilisest kursusest. Viimast terminit ei saa õnnestunuks pidada, ei saa propedeutilisele kursusele vastandada süstemaatilist kursust, sest ka propedeutilist kursust tuleb käsitleda teatavas süsteemis. Algkoolis õpilased võtavad läbi murdude algkursuse, V klassis põhikursuse. VIII klassis õpitakse trigonomeetria algkursust, kus käsitletakse ainult teravnurga funktsioone, IX ja X klassis aga põhikursust, kus vaadeldakse mis tahes nurga funktsioone. On erinevaid vaateid geomeetria algkursuse sisseseadmise otstarbekuse kohta keskkoolis, millest kõneldakse selle raamatu IV osas, kuid minimaalsete teadmiste vajalikkus geomeetriast algkoolis, mis kindlustavad pikkuse, pindala ja ruumala mõõtude teadlikku kasutamist, on üldtunnustatud.

Kontsentrilisel käsitlemisel:

1) on võimalik rohkem arvestada õpilaste vanuseastme iseärasusi, valides igas klassis ainult jõukohase materjali;

2) saab varem hakata kasutama õpitud teooria rakendamist praktikas kõige lihtsamate ülesannete lahendamisel; 3) saab kindlustada programmi materjali püsivama omandamise, sest ühtede ja samade küsimuste juurde tullakse mitu korda tagasi. Säärased on kontsentrilise käsitlemise positiivsed küljed. Ta negatiivseiks külgedeks on: 1) suur ajakulu; 2) antud õppeainest tervikliku ülevaate kadumise oht selle osade viisi õppimise tagajärjel tunduvate ajavahemike tagant; 3) vassingu võimalus õpilaste peas, kui erikontsentrite käsitlemine ei ole hästi läbi mõeldud ega kooskõlastatud. Töö õigel planeerimisel kontsentrilise käsitluse negatiivsed küljed taanduvad miinimumini, kuid sellest hoolimata keskkooli matemaatika kursuse mõnede osade lineaarse või kontsentrilise käsitlemisviisi eelistamise küsimus on väga keeruline ning lahendatakse eri metoodikute poolt iseviisi. Me vaatleme edaspidi seda küsimust mõne konkreetse juhtumi puhul erimetoodikais. Märgime siin vaid ühe kategoorilise nõude igasuguse esimese kontsentri suhtes: kui lihtsalt teda ka käsitletaks, teaduslikkuse printsiibi rikkumine on lubamatu. Käsitluse jõukohasuse peab tagama vastava aine valikuga, sageli loogilise tõestuse asendamisega katselise kontrollimisega, kuid ei mingil juhtumil tohi asja tuuma moonutada.

Esimese kontsentri õppimisel õpilased ei saa täielikke teadmisi, kuid neile ei tohi õpetada midagi niisugust, millest edaspidi tuleks loobuda.

§ 15. Matemaatika õppeplaan ja programm keskkoolis.

Nõukogude keskkoolis on matemaatika õppimisele väga palju aega antud, nimelt üle 1200 tunni, s. o. ligikaudu 20% õppeplaanis ettenähtud kõigi tundide arvust (kõigi õppeainete kohta kokku). Kui siia lisada aeg, mis iga õpilase poolt kulutatakse matemaatikas koduse töö täitmiseks, mis iga tunni kohta teeb keskmiselt välja pool tundi, seega kokku 600 tundi, ja veel eksamiteks ettevalmistamiseks ja eksamite sooritamiseks kuluv aeg, siis selgub, et iga keskkooli õpilane kulutab 6 aasta jooksul (V kuni X klassini) tööks matemaatika alal ligikaudu 2000 tundi. Õige töö korraldamise puhul võib selle aja jooksul väga palju ära teha ning õpetajate kaebused ajapuuduse kohta on enamail juhtumeil aluseta. Need kaebused on ainult siis õigustatud, kui klass mingisuguseil põhjustel, näiteks matemaatika õpetamise katkestamise pärast pikema ajavahemiku jooksul, on väga palju maha jäänud, nii et tuleb tõsiselt töötada eelmistel aastatel tekkinud lünkade parandamiseks, mõnikord alates väga kaugelt.

V klassi astuvad õpilased (peavad astuma) kindlate teadmistega täisarvude aritmeetikast, kaasa arvatud numeratsioon, 4 tehet kui tahes suurte naturaalarvudega, meetrimõõdustik, lihtsamate tekstülesannete lahendamise oskus, esialgsed teadmised murdudest ja mõned teadmised geomeetriast.

Materjali ulatus, mida peab keskkooli V—X klassis matemaatika alal õppima, on ametliku programmiga täpselt kindlaks määratud, mis õpetajale on seaduseks. Programmis on ära näidatud õppeplaaniga matemaatika jaoks määratud tundide arv nädalas, on antud teemade loetelu lühikeste näpunäidetega igaühe kohta, on näidatud tundide arv, mis kulub igale teemale nii klassis kui ka kodus. Üldised seisukohad materjali käsitlemise iseloomu kohta igas klassis on antud seletuskirjas, mis on paigutatud programmi ette.

Haridusministeerium annab programmi igal aastal uuesti välja, tehes seal töökogemuste põhjal mõned (väga väikesed) muudatused, seepärast peab algaja õpetaja kõige esmalt endale hankima jooksva aasta programmi eksemplari.

§ 16. Poliitilis-kasvatuse töö matemaatika tundides.

V. I. Lenin ütles, et kommunismiks peab õppima, «ainult kooli töö iga sammu, kasvatuse, hariduse ja õppimise iga sammu siduides kõikide töötajate pideva võitlusega ekspluataatorite vastu» (V. I. Lenin, Teosed, 31. k.).

Järelikult, põhiprintsiibiks, millest õpetajal tuleb juhenduda

kommunistliku kasvatuse meetodite valikul, on noorsoo kasvatamine nõukogude rahva huvide teenindamise ja piiritu ustavuse vaimus, kasvatuse tihe side töötajate igapäevase võitlusega kommunismi eest.

Võitlus hea õppeedukuse eest, teaduse aluste omandamise eest — see on õpilaste kommunistliku kasvatuse otsustav lüli.

Kooliõpilase esimeseks kohustuseks on väga hästi õppida. I. V. Stalin ÜLKNÜ VIII kongressil peetud kõnes 16. mail 1928. a. ütles: «... Et ehitada, on tarvis teada, on tarvis vallutada teadus. Et aga teada, on tarvis õppida. Õppida visalt, kannatlikult» (J. V. Stalin, Teosed, 11. k., lk. 75).

Peamine osa õpilaste kommunistliku kasvatuse ürituses kuulub õpetajale. Võitluses teaduse aluste püsiva valdamise eest peab matemaatika õpetaja õpetamist nii teostama, et õpilastel:

1) areneks materialistlik maailmavaade;
2) areneks nõukogude patriotismi ja rahvusliku uhkuse tunne;
3) areneks loogiline mõtlemine;
4) areneksid tahte omadused (julgus, visadus, iseseisvus, vastutustunne, täpsus jne.).

Matemaatiliste mõistete arenemise kogu ajalugu näitab idealistliku arusaamise valelikkust matemaatikast kui matemaatikute mõtlemise vaba loomingu produktist. Eriteemade käsitlemisel matemaatika tundides peab õpetaja näitama tingimusi ja põhjusi, mis kutsusid esile ühed või teised mõisted või andsid tõuke ühe või teise osa arenemiseks. Sääraseid näiteid võib õpetaja matemaatika ajaloost alati tuua. Õpilased peavad aru saama, et matemaatika nagu iga teisegi teaduse uurimise objektiks on objektiivne reaalsus. Matemaatika erinevus teistest teadustest seisab selles, et ta uurib üksnes reaalse maailma kvantitatiivseid ja ruumi vorme, abstraheerudes nende materiaalsest sisust.

Me teame, et iga õpilase esimeseks ülesandeks rahva ees, esimeseks patriootiliseks kohustuseks kodumaa ees on koolis väga hästi õppida.

Kui meie kõneleme matemaatika õppimisest, siis nüüdisaegseis tingimustes on selle õppimine, nagu osutas M. Kalinin, nõukogude õppiva noorsoo jaoks tingimata vajalik. Tingimata vajalik sellepärast, et: «Esiteks matemaatika distsiplineerib mõistust, õpetab loogiliselt mõtlema. ... Teiseks, ... matemaatika praktilise rakendamise ulatus on väga suur. Missugust teadust teie ka õpiksite, missugusesse kõrgemasse õppeasutusse teie ka astuksite, millisel alal teie ka töötaksite, aga kui te tahate seal jätta mingisuguse jälje, siis on selleks igal pool vaja matemaatika tundmist ... Ja seepärast, kui te tahate osa võtta suurest elust, siis täitke oma pea matemaatikaga, kuni selleks on võimalust. See on teile hiljem kogu teie töös väga suureks abiks», kõneles Mihhail Ivanovitš Kalinin Moskva Lenini rajooni keskkoolide kaheksandate, üheksandate ja kümnendate klasside õpilastele 17. aprillil 1941. a.*)

*) M. I. Kalinin, Kommunistlikust kasvatusest, 1947, lk. 101—102.

Erilist tähelepanu tuleb pöörata õpilaste saadud teadmiste praktilise rakendamise oskuste ja harjumuste väljatöötamise küsimusele, sest teadmistest üksi ei piisa veel selleks, et alati valmis olla täitma oma patriootilist kohust nõukogude kodumaa ees. Peab ka oskama saadud teadmisi kasutada, aga teada ja osata ei ole üks ja seesama. Õpetaja peab mitte ainult ühe või teise matemaatika osa rakendamisest kõnelema ja jutustama, vaid peab oma õpilasi õpetama saadud teadmisi kasutama, — seda peab matemaatika õpetaja alati silmas pidama ja on kohustatud seda tegema. Õpilastesse peab sisendama kriitilist suhtumist saadud vastustesse, s. o. peab sisendama veendumust lahenduste õigsuses.

Kahjuks peab ütlema, et kõik õpetajad ei osuta sellele küsimusele küllaldast tähelepanu, ja eriti vähe initsiatiivi ilmutavad selles suhtes matemaatika õpetajad. Kõiki matemaatika osasid ei kasutata matemaatika õpetajate poolt sel eesmärgil, et õpilastesse sisendada oskusi ja harjumusi saadud teadmisi kasutada aktiivses tegevuses ja praktilises töös. Olgu toodud paar näidet.

Mõned VII klassi õpilased seadsid Pioneeride palees näärikuuske püsti. «Seitseteist meetrit kõrge,» arvab üks õpilane. «Noo, ei või olla.» vaidlevad teised vastu, «saali ei saa seitsmeteistkümne meetri pikkust kuuske püsti panna.» «No kui mitte seitseteist, siis viisteist on kindlasti,» vastab veendunult teine.

See kõneleb sellest, et nendel õpilastel ei olnud konkreetset ettekujutust ei meetrist ega sellest, milline on klassitoa keskmine kõrgus (saal läbistas kaks korrust, seega ta oli ligikaudu kaks korda kõrgem).

Teine näide. Korrutades rahasummat 23 rbl. 5 kop. 26-ga, said ühe keskkooli V klassi 14 õpilasest 11 õpilast vastuseks 74 rbl. 10 kop. 729 rbl. 30 kop. asemel. Siin ei seisa asi mitte selles, et õpilased tegid arvutuses vea. Palju kurvem on see fakt, et õpilased ei kontrollinud saadud vastust, et nad pidasid võimalikuks õpetajale ära anda töö niisuguse «vastusega». Ometi on kerge juba peast teha ligikaudne arvutus: 20 rbl. × 20 annab juba 400 rbl., järelikult korrutades 28 rbl. 5 kop. 26-ga peame saama igal juhtumil rohkem kui 400 rbl., ja mitte kuidagi 74 rbl. On ilmne, et nendest 11 õpilasest, kes antud juhtumil tegid arvutuses vea, mitte keegi ei teinud ligikaudsetki kontrolli (silma järgi).

Teadmiste formalism, reeglite mehhaaniline omandamine, matemaatika õpetamise irdumine kommunistliku ühiskonna aktiivsete ehitajate kasvatamise ülesannetest — selles on sääraste lünkade põhjus õpilaste teadmistes. Kõigile sääraseile õpilaste saadud teadmiste praktilise rakendamise küsimustele on matemaatika õpetajal vaja pöörata tõsist tähelepanu.

Oleks muidugi ebaõiglane siin toodud juhtumite ja neile sarnaste põhjal teha järeldus, et meie õpilased üldse oskavad matemaatikat halvasti: siin märgitud puudused puudutavad üksikuid klasse ja koguni üksikuid õpilasi.

Siirdume nüüd poliit-kasvatuse eespool nimetatud teise osa — nõukogude patriotismi ja rahvusliku uhkustunnete — kasvatamise vaatlemisele. «Nõukogude patriotismi propageerimine ei saa olla lahutatud meie rahva möödunud ajaloost, vaid peab olema seotud selle ajaloo juurtega ... On ju nõukogude patriotism meie rahva arenemist edasiviinud esivanemate loovate tegude otsene järeltulija».*) Just sellepärast, hoolitsedes noorpõlve bolševistliku ideoloogia kujundamise eest, peab kool näitama meie maa suuri saavutusi, meie rahva saavutusi minevikus ja eriti käesoleval ajal, selgitama õpilastele meie matemaatikateaduse parimate tegelaste tee-

*) M. I. Kalinin, Kommunistlikust kasvatusest, 1947, lk. 85.

neid, kes minevikus andsid maailma teadusele nii suure panuse, kes meie ajal annavad veelgi suuremaid panuseid. Täiesti õigesti talitavad need õpetajad, kes tundides või matemaatika ringis tutvustavad noorsugu L. Magnitski «Aritmeetikaga», raamatuga, mida M. Lomonossov pidas «oma teadmiste väravaks», N. Lobatševski elu ja tööga, kes julges purustada sajandite pikkused traditsioonid geomeetrias ja välja astuda Kanti idealistliku filosoofia vastu. Seda võis teha ainult eesrindliku materialistliku maailmavaatega inimene, inimene, kel materialism oli tõe otsimise relvaks. Mõnes koolis on saanud heaks traditsiooniks 8. märtsil teha ettekandeid S. Kovalevskaja elust ja tööst, näidates noorsoole ereda näite varal erinevust naiste olukorras tsaari-Venemaal ja nüüd.

Matemaatika õpetaja ei või oma õpilasi tutvustamata jätta vene matemaatilise kooli rajaja P. Tšebõševi töödega, kes nii palju on ära teinud matemaatikateaduses endas kui ka selle rakendustes praktikas.

Ruumi puuduse pärast ei saa siin isegi nimetada esmaklassilisi vene matemaatikuid, kelle arv on nõukogude ajal suureks kasvanud ja keda võib kooliõpilastele tutvustada, märgime vaid mõned artiklid ja raamatud, mida õpetajal tuleb ringi liikmeile soovitada niisuguseks ettevalmistustööks.

1. Член-корреспондент АН СССР Делоне Б. Н., Математика и ее развитие в России, изд. «Правда», 1948.

2. Леонард Эйлер, Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти, изд. АН СССР, 1938.

3. Профессор Кузнецов Б. Г., Ломоносов, Лобачевский, Менделеев, изд. АН СССР, 1945.

4. Александров П. С., Н. И. Лобачевский — великий русский математик, изд. «Молодая гвардия», 1946.

5. Молодший В. Н., Новые книги о Николае Ивановиче Лобачевском, «Математика в школе», 1946, № 1.

6. Член корреспондент АН СССР Делоне Б. Н., Петербурская школа теории чисел, изд. АН СССР, 1947.

7. Молодший В. Н., Пафнутий Львович Чебышев, «Математика в школе», 1946, № 3.

8. Ковалевская С. В., Воспоминания детства и автобиографические очерки, изд. АН СССР, 1945.

9. Люди русской науки. Очерки о выдающихся деятелях естествознания и техники. С предисловием и вступительной статьей акад. С. И. Вавилова, т. I и II, Огиз, Гостехиздат, 1948.

10. Математика в СССР за 30 лет (1917—1947). Сборник статей под редакцией А. Г. Куроша, А. И. Маркушевича, П. К. Рашевского, Огиз, Гостехиздат, 1948 *).

11. Вопросы истории отечественной науки (общее собрание Академии наук СССР 5 I. 1949), изд. АН СССР, 1949, Статьи П. С. Александрова, В. И. Смирнова, Б. Н. Делоне и др.

12. Иосифу Виссарионовичу Сталину Академия наук СССР. Изд. АН СССР, 1949. Статьи И. М. Виноградова, Н. М. Мусхелишвили др.

Sellesse loetelusse ei ole võetud teoseid, mis on näidatud käesoleva raamatu lõpus toodud nimestikus.

Üheks alatiseks õpilaste kommunistliku kasvatuse vormiks on

*) Raamat on arvestatud matemaatikule teaduslikule töötajale. Tema lugemine eeldab matemaatilisi eriteadmisi.

nende kasvatamine niisuguste ülesannete sisu kaudu, mis näitavad meie maa hiiglasaavutusi.

Ülesannete lahendamisel võib matemaatika õpetaja näidata meie sotsialistliku ülesehitustöö grandioosseid temposid, fašistlike värdjate sissetungi tagajärjel laastatud rajoonide ja oblastite rahvamajanduse taastamistööde kolossaalset hoogu ja edasist arendamist neil aladel kui ka kogu rahvamajanduse arendamist kogu maal, nõukogude inimeste entusiasmi ning kõrvutada seda selle langusega, mida elavad praegu kapitalistlikud maad üle, jne. Toome mõne säärase ülesande näite.

Ülesanne 1. NSV Liidu rahvamajanduse taastamise ja arendamise viisaastaku plaani seadusega aastaiks 1946—1950 oli määratud taastatava ja uuesti ehitatava riikliku elamufondi viisaastaku plaaniks 72,4 miljonit ruutmeetrit elamispinda. Kui arvestada, et iga inimese jaoks nõutakse 9 ruutmeetrit elamispinda, siis mitu NSVL kodanikku saavad viisaastaku jooksul elamispinda? Mitu nii suurt uut linna nagu Kaluuga, kus 1939. a. oli 89,4 tuhat elanikku (vt. Suur Nõukogude Entsüklopeedia, 2. trükk, 19. k.) võiks ehitada selle uue elamispinna arvel?

Vastus: 8,05 miljonit inimest, 90 linna.

Ülesanne 2. 1914. aastal õppis Venemaa alg- ja keskkoolides 8025 tuhat inimest, kuid 1940. aastal ulatus NSVL alg- ja keskkoolides õpilaste arv 34 800 tuhandeni. Mitme protsendi võrra suurenes õpilaste arv?

Vastus: 334% võrra.

Ülesanne 3. NSVL Ülemnõukogu Presiidiumi 7. jaanuari 1948. a. seadlusega omistati sotsialistliku töökangelase aunimetused Krasnojarski krai põllumajanduse 85 eesrindlikule töötajale, sealhulgas kolhoosi «Lenini Pärand» kolhoosnikule S. Beloussovile, kes kogus 32 hektariliselt pindalalt 31,1 ts nisu igalt hektarilt, ja Idrinski rajooni Idrinski MTJ vanemagronoomile D. Bondarile, kes saavutas teenindatavais kolhoosides nisusaagi 22,52 ts hektarilt 612 hektarilisel pindalal. Võttes keskmiseks nisusaagiks 20 ts hektarilt, leida, kui palju nisu üle selle keskmise normi sai kumbki autasustatu oma külvipinnal?

Vastus: esimene 355,2 ts, teine 1542 ts.

Ajalehed ja ajakirjad, kolhoosi, rajooni, oblasti igapäevane tootmiselu annab iga päev meile rikkalikku materjali sääraste konkreetse sisuga ülesannete koostamiseks, mille lahendamine aitab õpilasel ümbritsevaid nähtusi, meie igapäevaste ürituste heroilisust, tööliste ja talupoegade ehitustöö paatost sügavamini mõista, võrrelda seda sellega, mis toimub välismaal, kapitalistlikes maades. Kuid edu kindlustamiseks oma töös peab õpetaja ise olema oma kodumaa sügav patrioot, peab jõudu säästmata anduma võrsuva põlve kommunistliku kasvatuse üritusele.

III peatükk.

MATEMAATIKA ÕPETAMISE MEETODID JA VORMID.

§ 17. Materjali süstemaatiline käsitlus. Loeng ja tund.

Nõukogude alg- ja keskkoolis on õppetöö põhivormiks tund, milles kasutatakse mitmesuguseid õpetamise meetodeid. Peamiseks neist on materjali süstemaatiline käsitlus õpetaja poolt. Kui kogu

töö on rajatud niisugusele käsitlusele, siis on meil tegemist loengumeetodiga, mida laialt kasutatakse kõrgemais koolides ja mis eeldab õpilaste (kuulajate) võimet pikemaaegseks keskendatud tähelepanuks, oskust loengust fikseerida kõik oluline konspekti näol, mis saab aluseks edaspidises töös. Vanemate klasside õpilased õpivad vähehaaval kuulama loenguid, mida neile esitatakse õige harva nii programmi kuuluvate küsimuste kohta kui ka klassivälises töös. Loengumeetodi kasutamine on eriti kohane ülevaate tegemisel läbivõetu kordamise eesmärgil. Kui keskkool on oma lõpetajaid harjutanud loenguid kuulama (see aga ei tule iseenesest, vaid nõuab õpetajalt ettevaatlikku ja hästi läbimõeldud tööd), siis on ta nende ettevalmistamise alal kõrgemas koolis õppimiseks suure töö ära teinud.

Loengumeetodi vastandiks on uue materjali raamatute järgi iseseisva õppimise meetod, mille puhul juhendaja näitab ainult, mis tarvis teha, abistab raskuste korral, kontrollib tulemusi. Väga väikesel määral on uue materjali iseseisva õppimise meetod ka keskkoolis rakendatav, millest tuleb juttu § 20.

Uut materjali esitatakse tunnis mitte üksnes niisuguses vormis, mis läheneb loengule, kus õpetaja jutustab, õpilased aga kuulavad ja kirjutavad üles, vaid ka elava vestluse vormis, kus õpetaja ja klassi vahel toimub dialoog ning uued teadmised omandatakse vastustena küsimustele, mida vestluses käsitleti. See on «katehheetiline» meetod, mida kasutatakse seda ulatuslikumalt, mida nooremad on õpilased. Seda meetodit vaatleme järgmises paragrahvis.

Peale uute teadmiste andmise on tunnil veel järgmised eesmärgid:

1) õpilaste iseseisva töö kontrollimine;

2) õpitud uue aine kinnistamine vestluse abil, õpetaja seletuste kordamise abil õpilaste poolt, harjutusülesannete lahendamise abil uue aine rakendamise kohta jne.;

3) harjutused ülesannete lahendamises, mille eesmärgiks on mitte üksnes äsja omandatud teadmiste kinnistamine, vaid oskused ja vilumused kõigi olemasolevate teadmiste kasutamiseks nii teoreetilist kui ka praktilist laadi uute küsimuste lahendamisel;

4) õpilaste edaspidise iseseisva töö planeerimine (kõige sagedamini järjekordse koduse töö andmise kujul);

5) varem (enam-vähem pikemal ajavahemikul) õpitud aine kordamine.

Mõnikord pühendatakse terve tund ühele neist eesmärkidest: uue aine õppimise tund, ülesannete lahendamise tund, küsimistund, kontrolltöö tund, kordamistund. Kuid enamasti ehitatakse tund üles segatüübi järgi, kus alguses pühendatakse mõned minutid koduse töö kontrollimisele, edasi seletatakse uut ainet, siis see kinnistatakse ja lõpuks antakse ülesanded koduseks tööks.

Õpetaja peamiseks ülesandeks on tund nõnda üles ehitada, et sellest ühelgi õpilasel ükski minut ei läheks kasutult kaduma, et klass töötaks intensiivselt, kasutades õpetaja seletused ära mak-

simaalselt. Algaja õpetaja tunnid kannatavad kõige sagedamini järgmiste puuduste all: kas kõik õpilased ei tööta tunni aine kallal, või nad töötavad tunni aine kallal nii, nagu nad võiksid töötada kodus, ilma õpetajata.

Pedagoogilise meisterlikkuse üheks tähtsamaks koostisosaks on täisväärtuslike tundide planeerimise ja teostamise kunst. Säärased tunnid peavad haarama kõiki õpilasi, ühendama neid ühiseks tööks, organiseerima neid edaspidi iseseisvalt töötama.

§ 18. Heuristiline meetod. Katehheetiline meetod.

Heuristiliseks meetodiks (kreekakeelsest sõnast εὕρηκα — leidsin) nimetatakse niisugust õpetamise meetodit, kui õpetaja ei anna õpilastele omandamiseks valmisteadmisi, vaid juhib õpilased vastavate lausete ja reeglite iseseisvale taasavastamisele. Näiteks selle asemel, et õpilastele anda ristküliku pindala arvutamise juhis valmiskujul («Et leida ristküliku pindala teatavais ruutühikuis, tuleb selle ristküliku aluse ja kõrguse pikkusi vastavais pikkusühikuis väljendavad arvud korrutada»), võib õpetaja anda niisuguse ülesande: «Antud on ristkülik alusega 6 cm ja kõrgusega 5 cm; kui ta lõigata ruudukesteks, millel iga külg on 1 cm, siis mitu ruudukest saab?» Antakse näpunäide — joonestada see ristkülik, näidatakse lahtilõikamise jooned, nõutakse leida kõige lühem tee lahendamiseks. Tavaliselt juba algkooli III klassi õpilased taipavad, et ei ole tarvidust ükshaaval loendada kõiki saadud ruudukesi, vaid et piisab, kui korrutada arv 6 arvuga 5. Kui kõik on aru saanud, et see on tõesti nõnda, siis on tarvis saavutada selge kirjeldus sellest, mis siin toimub: ristkülik lõigatakse esmalt ristküliku kujulisteks ribadeks, millest igaüks on 6 cm pikk ja 1 cm lai, seejärel iga riba lõigatakse ruudukesteks, saab 6 ruutu. Kõik ribad on ühesugused, seepärast vastuse saamiseks on tarvis arv 6 võtta niimitu korda, kuimitu riba oli, s. o. 5 korda. Siis ülesanne üldistatakse külgede igasuguste täisarvuliste väärtuste puhuks ja moodustatakse juhise lühike sõnastus, mis kuulub päheõppimisele.

Heuristilise meetodi eeliseks võrreldes valmisteadmiste andmise meetodiga on selgema arusaamise kindlustamine (siin on täiesti eemaldatud fraaside mehhaanilise meelespidamise võimalus ilma kõnes olevaist faktidest aru saamata), omandamise suurem püsivus, suurem huvi õpitava aine vastu ja usk oma võimeisse. Heuristiline meetod arendab taibukust, algatusvõimet, endakontrollimise harjumust, see on teadmiste aktiivse, mitte aga passiivse omandamise meetod. Tema puuduseks on ajakulu võtete ja otsustuste otsingul, mis eesmärgile viivad, ja teiseks võimaluse puudumine asja nõnda korraldada, et kõik õpilased saaksid korraga õiged tulemused. Tema rakendamisel õpilaste individuaalsed erinevused väljenduvad eriti teravalt: sellega, mida üks taipab kohe, ei saa teine kuidagi hakkama, hoolimata hulgast täiendavaist näpunäiteist. Heuristilise meetodi ettevaatamatu kasutamine, kui mitte ükski või peaaegu

mitte ükski klassist ei ole suuteline juhiseid täitma, mõjub väga negatiivselt: kulutatakse asjata aega, kaob usk edusse. Kuid läbimõeldud, ettevaatlik heuristilise meetodi kasutamine koos teiste meetoditega sobib matemaatika õpetamise igal astmel.

Mida rohkem on tööplaanis sobivalt ettenähtud jõukohast heuristikat, seda parem. Peab ainult silmas pidama, et õpilaste iseseisva tööga saadud resultaadid oleks hoolsasti kontrollitud ja vajaduse korral klassis parandatud, seejuures viivitamatult, muidu õpilaste mälus kinnistuvad väärad tulemused.

Katehheetiliseks ehk küsimis-vastamise meetodiks nimetatakse niisugust meetodit, mille rakendamisel õpilased jõuavad uutele järeldustele õpetaja poolt vastavalt valitud küsimustele vastamise teel. See on sama heuristiline meetod, kuid ta teostub ilma õpilaste kestvama iseseisva tööta. Selle meetodi rakendamisel peab silmas pidama järgmist:

1. Küsimis-vastamise meetodil ei ole kaugeltki alati ja igal pool edu. Ta on sobiv siis, kui vajalike järelduste saamine on kindlustatud õpilaste tähelepanu kontsentreerimisega niisuguseile faktidele, mis õpilastele on juba tuttavad, ning niisuguste faktide kõrvutamisega. Tunni planeerimisel peab hästi läbi mõtlema, missugused osad sellest on parem üles ehitada õpetaja küsimustele ning milliseid on parem õpetajal endal seletada.

2. Mõnikord esineb küsimis-vastamise meetodi äbarikke moonutusi, kui õpetaja praagib õpilaste vastuseid, kuigi need on õiged, aga ei ole niisugused, nagu õpetaja on planeerinud. Klass jääb nõutuks, tüdineb, püüdes hoolikalt mõistatada, mida õpetaja siis tahab. Sisuliselt õiget vastust ei tohi iialgi tagasi lükata, kui ta kallutab õpilasi mitte soovitavasse suunda, siis tuleb neid täiendavate küsimustega õigele teele juhtida.

3. Küsimis-vastamise meetodi peaväärtus seisab selles, et ta aktiviseerib õpilaste mõtlemist, ning tööd peab nii korraldama, et sellest võtaks osa terve klass. Õpetaja teeb vea, kui ta enne nimetab õpilase, kes peab vastama, ja siis esitab küsimuse. Kui toimida ümberpöördult, siis kõik õpilased mõtlevad rohkem küsimusele. Kui küsimus on esitatud, peab ära ootama, kuni tõuseb mõni käsi, kuid küsima ei pea mitte ainult neid, kes on vastamiseks valmis, vaid ka teisi, igapidi neid ühisesse töösse kaasa tõmmates. Saades mõned vastused, nii õiged kui ka väärad, peab taotlema, et õpilased ise neis orienteeruksid, et nad igal juhtumil hästi saaksid aru, milles on viga. Küsimis-vastamise meetodi väära kasutamise eredad näited on kirjeldatud L. Tolstoi pedagoogilistes artiklites.

§ 19. Ülesannete lahendamine.

Kõigepealt selgitame termini «matemaatiline ülesanne» täpse mõtte. Täiesti kõrvale jättes suure metodoloogilise küsimuse matemaatilise teooria ja matemaatilise praktika vastastikustest seostest,

millest oli juttu § 4, piirdume matemaatika õpetamise metoodika raamidega kõige kitsamas mõttes: mis on «ülesanne» õpilasele, kes on õppinud või õpib matemaatika koolikursuse teatavat osa?

Prof. S. Šatunovski sissejuhatuses A. Adleri raamatu «Geomeetriliste konstruktsioonide teooria» tõlkele (1940) ütleb järgmist: «Ülesanne on nõue «leida» «antud» asjade järgi teised, «otsitavad» asjad, mis on üksteisega ja antud asjadega näidatud seostes». Sellele definitsioonile ei allu siiski paljud tõestamisülesanded.

Õigem on järgmine vastus: «ülesandeks» tuleb nimetada iga matemaatilist küsimust, millele vastuse saamiseks ei piisa õpitud kursusest kas mõne definitsiooni, teoreemi teksti või tõestuse, aksioomi või juhise teksti lihtsast reprodutseerimisest.

Kui tunnustada seda definitsiooni, s. o. kui terminid «tekstülesanne» ja «harjutusülesanne» lugeda ühetähenduslikeks, siis näiteks küsimus sellest, kuidas sirkli ja joonlauaga antud sirglõik pooleks jaotada, ei ole «ülesanne» niisuguse õpilase jaoks, kes on õppinud õpikust jagu «Põhilised konstruktsioonülesanded». Kuid küsimus sellest, näiteks, kuidas tõestada, et kahe kõrvunurga poolitajad on teineteisega risti, on ülesanne, ja nimelt tõestamisülesanne. Kõige lihtsamaid ülesandeid, mille lahendamine seisab ainult kursuse teoreetilises osas õpitud lause (reegli, valemi, teoreemi) kasutamises antud erijuhtumi puhul, nimetame «harjutusülesandeiks», sõltumata sellest, kas ülesande tingimus on väljendatud valemiga või sõnalise tekstiga, kusjuures on oluline, et kasutatud lause valik sisendaks vastust ega teeks raskusi. Kõiki ülesandeid, mis ei kuulu harjutusülesannete hulka, võiks nimetada «pärisülesanneteks». Niisiis harjutusülesandeid me vaatleme kui kõige lihtsamaid ülesandeid, kuid ei vastanda neid pärisülesannetele.

On olemas ülesandeid, mille lahendamine nõuab olemasoleva teooria laiendamist, kuid kooli ülesanded lahenduvad tavaliselt kursuse teoreetilisest osast teadaolevate lausete alusel. Siin seisab kogu raskus nende lausete sobivas valikus, nende kombineerimises, mitmesuguseis täiendavais teisendustes, kujundi täiendavate elementide sissetoomises, mis teevad võimalikuks selle või teise lause kasutamise. Mõnikord kogu raskus taandub ülesande tingimuste matemaatilisele väljendamisele, nende tõlkimisele, nii-ütelda, üldtunnustatud matemaatilisse keelde (ülesannete lahendamine võrrandite koostamise abil). Sellal kui harjutusülesannete lahendamise eesmärgiks on kas kaasaaitamine teooria paremaks omandamiseks või ühe või teise võtte tehnika treening, on pärisülesannete lahendamise eesmärgiks matemaatilise mõtlemise arendamine ning on seepärast loova uurimistöö esmaseks vormiks. Selles seisabki ülesannete tähtsus matemaatika kooli kursuses.

Ülesande võib lahendatuks lugeda siis ja ainult siis, kui leitud lahend on: 1) õige, 2) põhjendatud, 3) ammendav. Kui need kolm nõuet ei ole täidetud, siis leitud lahend kas üldse ei kõlba (kui ta on vale), või ta ei ole täisväärtuslik (kui ta on õige, kuid põhjendamata, või ta on õige ja põhjendatud, kuid ei ole täielik).

Peale nende kolme kohustusliku nõude võib nimetada veel neli mittekohustuslikku, kuid väga soovitavat nõuet: 4) lahend peab olema võimalikult lihtne, 5) ta peab olema sobival viisil vormistatud (lahenduse üleskirjutus), 6) on soovitav, et lahendusele viiv tee oleks selge, 7) mõnikord on soovitav lahendatud ülesande üldistamine.

Vaatleme üksikasjalikult igaüht neist seitsmest nõudest.

1. Lahenduse õigsus.

Kõigepealt tõuseb küsimus, kuidas veenduda, et leitud lahend on õige. Enamuse kooliõpilaste silmis on kahjuks ainsaks viisiks end kontrollides ära vaadata raamatu lõpus antud vastus. Ülesannete kogudes antud vastused on muidugi väga kasulik asi, mis võimaldab kokkuhoidu ajas ja jõukulus ning neid tuleb kasutada. Kuid ometi on tarvis õpilasi harjutada ise end kontrollima: elus esinev ülesanne ei anna tavaliselt mingit valmisvastust, ja ka ülesannete kogudes ei ole alati vastuseid. On eriti tähtis, et õpilane oskaks auga üle saada sellisest raskusest, millesse ta satub raamatus antud väära vastuse puhul (trükiviga, viga vastuses või ülesande tekstis). Õpilasi peab tutvustama kontrollimisvõtetega (kontrollimisvalemid, leitud lahendi asetamine antud võrrandisse, lahendi kontrollimine korrektse joonise abil, teiskordne lahendamine võimalikult teisel viisil jne.) ning aeg-ajalt harjutama nende tarvitamist. Väga kasulik on otsitava suuruse esialgne ligikaudne hindamine, mis paljudel juhtumitel aitab vastuse vea korraga avastada. Enda kontrollimist peab harjutama juba aritmeetika õpetamisel, kus see on eriti lihtne, kuid praktikas kasutatakse seda kahjuks võrdlemisi harva.

Millest tekivad vead ülesannete lahendamisel ja kuidas nendega võidelda? Sagedaimaks vea põhjuseks on lihtne tähelepanematus, mille vastu võitlus on võitlus tähelepaneliku, hoolsa suhtumise eest kõigesse, mis õpilane kõneleb ja kirjutab. Edasi tulevad vead mitmesuguste reeglite ja teoreemide tarvitamises, mille põhjuseks on nende mitteküllaldane omandamine. Nad esinevad seda harvemini, mida paremini on õpitud teooria. Palju vigu on loogilise iseloomuga: teoreem segatakse ära pöördteoreemiga, ei mõisteta sidet teoreemi ja pöördteoreemi ning vastandteoreemi vahel, võetakse erijuhtum ja tehakse sellest väär üldine järeldus jne. Õpilaste poolt tehtud vigade analüüs, nende avastamise võtetele juhatamine, näpunäited nende parandamiseks, vältimiseks — see on üks väga tähtsaist ülesandeist matemaatika õpetaja ees. Teatavat tähtsust omavad ka vigade vältimise abinõud: tüüpiliste levinud vigade arutlus, eriti matemaatiliste sofismide (väärade tõestuste) arutlus.

Põhilist tähtsust omab õpilastes vastutustunde kasvatamine. Saadud tulemuste usaldatavus on matemaatika üks karakteerseid iseärasusi, ning peab taotlema, et õpilane tõesti garanteeriks oma

väidete õigsust, või vähemalt, et ta teeks selgesti vahet, mis tema poolt on tingimata kindlaks tehtud ja mis on enam-vähem tõenäoline oletus. Kui kõrgemasse kooli vastuvõtu eksamil eksaminaator esitab nõude selgitada, kas arv 899 on algarv või kordarv, siis 9 juhtumil 10-st eksaminand, veendunud, et antud arv ei jagu 2-ga, 3-ga, 5-ga, 7-ga, 11-ga, väidab, et see on algarv. Küsimusele, kas ta vastutab oma väite õigsuse eest, saadakse tavaliselt jaatav vastus, millele järgneb eksaminaatori ettepanek kujutada antud arv vahena $30^2 - 1^2$, ning selgub, et $899 = 31 \cdot 29$. Niisugust olukorda ei saa nimetada teisiti, kui vastaja vastutustunde puudumiseks oma väljendite eest.

2. Lahenduse põhjendamine.

Ülesande õige vastuse saamine ei ole veel piisav: on tarvis tõestada, et ta on õige, sest seni kuni ei ole tõestust, ei saa olla kindlust selles, et ta on õige. Sageli kuuldub õpilastelt ja isegi õpetajailt: «Mul on ülesanne lahendatud, kuid ma ei suuda tõestada, et see lahendus on õige». Iseloomustav näide: nõutakse kindlaks teha, missuguste x väärtuste korral kolmliige $y = 2x^2 - 8x + 8{,}5$ omab positiivsed väärtused. Pärast mõnd proovimist asendamise teel õpilane teeb otsuse, et $y > 0$ x igasuguse reaalarvulise väärtuse puhul. Õpetaja ettepanekule tõestada, et see tõesti on nii, vastab õpilane vastuettepanekuga: «ei, tõestage teie, et see ei ole nii, ma tean, et see teil ei õnnestu». Resultaadiks on õpetlik vestlus, mis lõpeb tõestamise vajalikkuse tunnustamisega väite puhul, et $y > 0$ igasuguse x korral, ning selle tõestuse otsimisega: $y = 2x^2 - 8x + 8{,}5 = 2(x-2)^2 + 0{,}5 \geqslant 0{,}5$. Heaks argumendiks tõestamise vajalikkuse kasuks on antud juhtumil sama ülesande vaatlemine kolmliikme $y = 8x^2 - 166x + 861$ korral, mille puhul kogemuse poolt dikteeritud otsus, et $y > 0$ iga x puhul, osutub valeks, sest et $y = 8x^2 - 166x + 861 = 8(x - 10{,}25)(x - 10{,}5)$, $y < 0$ arvude 10,25 ja 10,5 vahelt võetud x väärtuste korral, $y = 0$, kui $x = 10{,}25$ ja kui $x = 10{,}5$.

Geomeetriliste konstruktsioonülesannete lahendamisel on tavaks saanud eraldada tõestus lahenduse eri osaks. Ei ole mingit vajadust nõuda säärast eraldamist iga ülesande lahendamisel, kuid tingimata on vajalik võimalikult tihti küsida «mispärast?» Vastuseks võib olla kas lihtne, kuid täpne viide mõnele varem tõestatud teoreemile, või enam-vähem pikem arutlus. Ülesande lahendamine ei pea olema lahus teooriast, vaid peab kõigis oma osades sellel põhinema.

Ometi on siin vajalik hoiatada liigse tõttamise eest põhjendamise nõudmises. Lahenduse otsimisel mõtted ei valgu kohe selgetesse vormidesse, siin omab ülisuurt tähtsust intuitsioon, otsustus analoogia põhjal, oletused, olgugi mõnikord ekslikud. Selgust peab taotlema arutluse lõplikul vormistamisel, pidades lahendamist mitte lõpetatuks seni, kuni ei ole kaalutlusi, mis tõestavad iga sammu.

3. Lahenduse ammendavus.

Kui ülesande lahendamisel on üks vastus leitud, siis ei saa ülesannet veel täielikult lahendatuks lugeda: tarvis on leida ka kõik teised vastused, kui nad on olemas, või tõestada, et neid ei ole; peab vaatlema kõiki erijuhtumeid, mis ülesande lahendamisel võivad esineda. Seda nõuet peetakse mõnes kursuse osas silmas, kuid mitte kõikjal. Näiteks lahendades kolmanda astme võrrandit ning leidnud ühe lahendi, lõppklassi õpilased teavad, et nad peavad leidma ka teised kaks lahendit, mida ka tehakse. Kui aga neile anda lahendada süsteem $ax + by = a^2 + b^2$, $x + y = a + b$, siis saades lahendi $x = a$ ja $y = b$ ning tehes kontrolli, loevad nad oma töö lõpetatuks. Kuid see lahend osutub üheseks ainult juhtumil, kui $a \neq b$. Kui aga $a = b$, siis antud süsteemil on lõpmatu hulk lahendeid, mis väljenduvad valemitena $x = t$, $y = 2a - t$, kus t on mis tahes arv. Kui õpetaja ei taha antud süsteemi lahendamist komplitseerida selle väikese uurimisega, siis ta peab seda süsteemi andes ütlema, et $a \neq b$. Teine näide: üles kirjutades valemi $+\sqrt{a^2} = a$, peab tegema reservatsiooni, et ta on õige ainult siis, kui $a \geqslant 0$; kui $a < 0$, see valem asendub teisega, nimelt: $+\sqrt{a^2} = |a|$. Analoogilised komplikatsioonid tekivad geomeetriliste konstruktsioonide puhul igal sammul.

Geomeetriliste konstruktsioonülesannete lahendamisel on tavaks saanud lahendite olemasolu tingimuste vaatlemine kui ka nende arvu ja erijuhtumite selgitamine eraldada lahenduse eriliseks lõpuosaks, mis teostatakse pärast analüüsi, konstruktsiooni ja tõestust nimetuse all «uurimine». Mitmesuguste juhtumite vaatlemine, mis võivad esineda võrrandite lahendamisel, teostatakse lõppklassis programmi eriosa («Võrrandite uurimine») õppimisel. Lõpptulemusena viivad õpilased koolist kaasa väära kujutluse, et ainult siinkohal on tarvis tegelda võrrandite uurimisega. On tingimata vajalik, et õpilased teostaksid uurimise (s. o. seaksid küsimuse lahendite olemasolust, lahendite arvust ning erijuhtumeist, mis võivad esineda) iga ülesande lahendamisel. Näiteks, võrrandi $ax = b$ lahendamise puhul peab õpilane kindlasti teadma, et lahendamine on teostatav ning annab ühese tulemuse ainult sel tingimusel, et $a \neq 0$ ja et juhtumil, kui $a = 0$, ta kas üldse ei ole lahendatav (kui $b \neq 0$), või on lahendatav, kuid omab lõpmatu hulga lahendeid (kui $b = 0$).

4. Lahenduse lihtsus.

Enamikul juhtumeist on antud ülesannet võimalik lahendada mitte ühel, vaid mitmel erineval viisil. Siit tuleneb loomulikult nõue — mitme võimaliku lahenduse hulgast valida see, mis kiiremini ja lihtsamalt viib eesmärgile. Eriti väärtuslikud on niinimetatud «elegantsed» lahendused, s. o. keerukamate ülesannete lahendused erakordselt lihtsate võtetega.

Õpilaste tähelepanu on vaja juhtida ühe ja sama ülesande lahenduste mitmesuguseile võimalikele variantidele, tegelda nende võrdlemise ja hindamisega, peatuda parimail. Ülesannete lahendamise üldised meetodid peavad õpilaste poolt kindlalt omandatud olema, kuid kõrvuti sellega peab omama oskust ära kasutada iga eri ülesande iseärasused, mis võimaldavad teda lihtsamalt lahendada. Sageli lihtsustab ülesande lahendamist tunduvalt ainuüksi selle tundmatu suuruse õnnelik valik, mille kaudu avaldatakse teised tundmatud. Näiteks, et leida neli järjestikust täisarvu, mille korrutis a on antud, võib tähega x tähistada kõige vähema arvu, ning ülesande lahendamiseks tuleb lahendada võrrand:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=a,$$

milles pärast sulgude avamist esineb x, x^2, x^3, x^4. Kui aga tähega x tähistada otsitavate arvude keskmine aritmeetiline, siis saame võrrandi:

$$(x-1{,}5)(x-0{,}5)(x+0{,}5)(x+1{,}5)=a,$$

milles esineb ainult x^2 ja x^4. Mõnikord saavutatakse säärane lihtsustus mõne, ülesandes mitte meenutatud, abisuuruse tarvituselevõtmisega. Näiteks, täisnurkse kolmnurga lahendamisel tema kaatetite summa s ja hüpotenuusile tõmmatud kõrguse h järgi on kasulik võtta selle kolmnurga pindala. Tähistades kaatetid tähtedega x ja y, hüpotenuusi tähega z, saame kolme võrrandi süsteemi:

$$\begin{aligned} x+y&=s,\\ xy&=hz,\\ x^2+y^2&=z^2, \end{aligned}$$

millest on kerge eemaldada x ja y. Andmete ja otsitavate sobivale teisendamisele on rajatud mõned geomeetriliste konstruktsioonülesannete lahendamise meetodid.

Toome siin näitena ülesande, mida IX klassi õpilane hakkab lahendama geomeetrilise progressiooni kasutamisega, aga V klassi õpilane hakkab seda lahendama palju lihtsamalt: punktidest A ja B, mille vahemaa on 36 km, väljuvad üheaegselt kaks jalakäijat, liikudes teineteisele vastu ühtlase kiirusega 4 ja 5 km tunnis; nendega üheaegselt algab liikumist jalgrattur, kes väljudes punktist A liigub ühtlase kiirusega 10 km tunnis kuni kohtumiseni teise jalakäijaga, pöördub siis tagasi ja liigub kuni kohtumiseni esimese jalakäijaga, siis tagasi kuni kohtumiseni teise jalakäijaga jne. seni, kuni jalakäijad kohtuvad. Nõutakse leida, kui pika tee jalgrattur sõitis ära kogu selle aja jooksul. Ülesanne lahendub selle põhjal, et jalakäijate kohtumiseni möödub $36:(4+5)=4$ tundi, seetõttu jalgrattur sõidab ära üldse $10\cdot 4=40$ km. Kui õpetlik on seda lahendust võrrelda eelmisega (milles kasutatakse geomeetrilist progressiooni), viies selle täielikult läbi!

Palju variante, mille vaatlemine on väga kasulik, esitavad juba kõige lihtsamad aritmeetilised harjutusülesanded. Näiteks summa

$$13\frac{3}{4}+7\frac{8}{15}+8\frac{7}{15}+21\frac{1}{2}$$

saamiseks võib kõik neli liidetavat teisendada ühenimelisteks nimetajaga 60, võib aga ka liita eraldi kaks keskmist liidetavat, saame 16, ja kaks äärmist liidetavat, saame $35\frac{1}{4}$; sel viisil saame lõpptulemuse $51\frac{1}{4}$ palju lihtsamalt.

Kõneldes keerukate ülesannete «elegantsete» lahenduste erilisest väärtusest, peab õpetajat siiski hoiatama nende liialdatud veetlevuse eest, mis viib selleni, et õpilane hakkab sääraseid ülesandeid kartma, nende puhul «käsi rüppe panema», sest «elegantset» lahendust ta ei näe, kuid «mitte elegantne» ei leia õpetaja heakskiitu. Õpilasi peab harjutama ülesandeid lahendama mis tahes temale jõukohase õige lahendusviisiga, olgu see elegantsusest kas või väga kaugel, ja alles siis, kui lahendus on leitud, katsuda seda lihtsustada.

5. Lahenduse ratsionaalne üleskirjutus.

Ülesande lahendus nõuab mitmesuguste kirjalike arvutuste teostamist, mõnikord ka joonise valmistamist, välja arvatud eriti lihtsad ülesanded, mida saab lahendada ilma igasuguste üleskirjutusteta. Rõhuval enamikul juhtumeist olemasolev praktika, mida ei saa heaks kiita, on säärane: õpilane lahendab ülesande «mustandis», kirjutab arvutused kuidagi viisi korrapäratult üles, sama hoolimatult teeb joonise; teisel isikul on mustandis millestki võimatu aru saada, ka autor ise loeb seda vaevaliselt, seejärel tuleb ümberkirjutamine «puhtasse», kusjuures arvutustele kaasnevad enamvähem pikad seletused, sageli liiga paljusõnalised, joonised tehakse korrektsemalt.

Lahenduse üleskirjutuse suhtes võib väljendada järgmised üldised soovid:

a) Lahenduse üleskirjutus peab olema korrektne, ükskõik kus see teostatakse, kas mustandis või puhtas: numbrid ja muud märgid peab kirjutama õigesti ja selgesti, read peavad olema paralleelsed üksteisega ja lehe servaga, kõik vale ja mittevajalik kriipsutatakse nägusalt läbi, lahenduse erinevad osad tuleb üksteisest eraldada.

b) Tuleb vahet teha kaht liiki üleskirjutuste vahel: lühike üleskirjutus, kus fikseeritakse ainult see, mida ei suuda meeles pidada ja mis edasisel lahenduse arendamisel on vajalik, ja täielikum üleskirjutus, üleskirjutus seletustega. Lühikese üleskirjutuse puhul inimene mõtleb ainult sellele, kuidas lahendus teostada ja vastus saada, täieliku üleskirjutuse puhul aga — kuidas lahendus säilitada järgnevaks kasutamiseks, kuidas see teistele arusaadavaks

teha. Kuigi lühike üleskirjutus on tehtud enamasti ainult enda jaoks, peab ta endastmõistetavalt olema nii korrektne ja korralik, et tema järgi saaks taastada kogu lahenduse käigu, näiteks kontrollimise ja vea avastamise eesmärgil.

c) Täielik üleskirjutus nõuab palju rohkem aega kui lühike, kuid ta on väga kasulik nii teostatava arutluse selge vormistamise harjumuse kujundamise vahendina kui ka lahenduse teadlikkuse kontrollimise vahendina. Aritmeetika õpetamisel nõutakse õpilastelt tavaliselt panna küsimused iga teostatava tehte korral. See on hea, kuid mitte ainus aritmeetilise ülesande lahenduse täielikku üleskirjutuse võimalik vorm. Kursuses edasiminekul võib täielikku üleskirjutust aja kokkuhoiu pärast ikka harvemini ja harvemini kasutada, kuid aeg-ajalt tuleb ikkagi kõigis koolis õpitavais matemaatika osades seda rakendada.

d) Tuleb igapidi võidelda niisuguse mustandi eest, et selle ümberkirjutamine puhtasse saab üleliigseks. See on täiesti võimalik sel puhul, kui ei nõuta täielikku üleskirjutust, ning see tuleb iseenesest, kui järjekindlalt nõuda korrektsust iga üleskirjutuse korral; sel viisil hoitakse palju aega kokku.

On kasulik õpilastele näidata mõnd hästi läbimõeldud lühikese ja täieliku lahenduse üleskirjutuse eeskuju mitmesuguste ülesannete puhul, kuid on väär nõuda õpilastelt kõrvalekaldumatult matkida mingit kohustuslikku vormi. Esitagu igaüks omapoolseid täiendusi lahenduse üleskirjutuses, taotledes täielikku selgust, ülevaatlikkust ja aja säästmist. Mida vanem on õpilane, seda iseseisvam peab ta olema üleskirjutuse vormi valikul, kuid igasuguse üleskirjutuse korralikkuse nõuded peavad alati jõusse jääma.

6. Lahenduskäigu selgus.

Ülesande lahendus on mõnikord väga kunstlik, on rajatud erilistele võtetele, mis viivad hästi eesmärgile, kuid on ootamatud ega ole seotud mingi üldise teooriaga. Mingeid vastuväiteid sääraste võtete kasutamise puhul ei tule teha; võib koguni ütelda, et neis just peitubki matemaatiline looming. Kuid õpilased, tutvudes sääraste kunstlike võtetega, esitavad tavaliselt küsimuse: «Aga kuidas sellele tulla, et siin peab kasutama just säärast võtet, mitte aga mõnd muud?» On arusaadav, et oskus leida sääraseid võtteid saavutatakse pikaajalise praktikaga, kuid ometi tuleb avaldada soovi, et ülesande lahendamisel selgitataks mõttekäiku, mis teel autor jõudis tema poolt näidatud lahendusele. Geomeetriliste konstruktsioonülesannete lahendamisel mõttekäik, mis viib nõutavale tulemusele, selgitatakse analüüsis, kus, oletades et ülesanne on lahendatud, otsime seoseid andmete ja otsitavate elementide vahel. Samalaadne analüüs on teostatav ka paljudel muudel juhtumitel. Väga sageli üldise lahenduse käik selgub hulga erijuhtumite vaatlemisel. Toome näite: nõutakse leida kõik algarvud, mis

pärast suurendamist nii 10 võrra kui ka 14 võrra annavad ka algarvud. Lahendamiseks vaatleme eraldi 3-ga jaguvaid arve, siis arve kujuga $3n+1$, lõpuks arve kujuga $3n+2$. Kolmega jaguvate arvude hulgas on üksainus algarv, nimelt arv 3 ise, mis rahuldab ka ülesande kaht ülejäänud tingimust, sest $3+10=13$ ja $3+14=17$ on algarvud. Kõik arvud kujuga $3n+1$ annavad pärast 14 võrra suurendamist arvud kujuga $3n+15$, mis jaguvad 3-ga, ning kõik arvud kujuga $3n+2$ pärast 10 võrra suurendamist annavad arvud kujuga $3n+12$, mis ka jaguvad 3-ga. Seega ülesande nõudeid rahuldab üksainus arv 3. Et sellele lihtsale lahendusele jõuda, nimelt, et tulla sellele, et vaadelda eraldi arve kujuga $3n$, $3n+1$, $3n+2$, selleks piisab, kui tähelepanelikult vaadelda mõnd arvupaari, mis saame mõne väikese algarvuga proovimise tulemusena, näiteks $5+10=15$, $5+14=19$, siis $7+10=17$, $7+14=21$ jne. Kerge on märgata, et igas paaris üks arv on 3-ga jaguv, seepärast saadaksegi eespool toodud lahendus.

7. Lahendatud ülesannete üldistamine.

Mõnikord on kasulik lahendatud ülesandeid üldistada. Näiteks pärast mis tahes numbriliste andmetega ülesande lahendamist on kasulik vaadelda sama ülesannet, milles andmed on antud üldkujul. Näiteks võrrandi $5x+6=2x+18$ lahendamiselt on loomulik üle minna võrrandi $ax+b=cx+d$ lahendamisele, vaadeldes eraldi juhtumeid, kui $a\neq c$ (on olemas üksainus lahend), kui $a=c$, $b\neq d$ (lahendit ei ole), kui $a=c$, $b=d$ (lahendiks on mis tahes arv). Õppinud tegureiks lahutama sääraseid kolmliikmeid, nagu $x^2+8x+24$ või $x^2+8x-20$, võib seada küsimuse nende üldkujust ning jõuda kasulikele valemitele:

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

ja

$$x^2+(a-b)x-ab=(x+a)(x-b).$$

Arvutanud silindri ruumala V tema põhja raadiuse r ja kõrguse h antud numbriliste väärtuste järgi, seame küsimuse teistest ülesannetest, milles kolmest suurusest V, r, h kaks on antud ja kolmas nõutakse leida. Silmas pidades mõõdutunnet, arvestades õpilaste üldist matemaatilise arengu taset, võib õpetaja teha täiesti loomulikuks mitmesuguste teoreetiliste küsimuste seadmise, minnes lahendatavate ülesannete üldistamise teel edasi; just seda teed mööda on teaduse enda arenemine kulgenud.

Kui matemaatilist teooriat õpitakse ilma ülesannete lahendamise praktikata, siis saadud teadmine ei ole aktiivne ega püsiv. Kuid et sellest praktikast saada täit kasu, mis ta võib anda ning peab andma, selleks peab ülesannete lahendamise kohta esitama äsja vaadeldud seitse nõuet. Õpilane, kes mõistlikult ja harjumus-

likult peab neid silmas, omab mitte ainult teatavat matemaatiliste teadmiste summat, vaid tõuseb ka vajalikule kõrgusele matemaatilise kultuuri astmel.

Arutanud tähtsa küsimuse nõuetest, mis tuleb matemaatiliste ülesannete lahendamisel esitada, vaatleme, kuidas kujunevad kogemused ülesannete lahendamise alal klassiga töötamise tingimustes.

Esimeseks sammuks selles suunas on loomulikult õpetaja poolt tüüpiliste ülesannete lahendamise eeskujude n ä i t a m i n e. Säärane näitamine teostatakse küsimis-vastamise meetodi mõistliku rakendamise teel, kuid peamiseks selles on ikkagi õpetaja enda seletus: ta esineb siin nagu meister, kes demonstreerib oma kunsti selleks, et seda oma õpilastele edasi anda. Sõnastades selgesti ja arusaadavalt nii ülesande tingimuse kui ka küsimuse, peab veenduma, et ülesande sisu on kõigile selge, selleks on kasulik praktiseerida kogu ülesande teksti kordamist mõne õpilase poolt. Kogu ülesande teksti dikteerimiseks ei ole vaja aega kulutada: piisab täiesti arvuliste andmete lühikesest üleskirjutusest. Edasi järgneb ülesande lahendamine, mis algab arutlustega lahendamise plaanist, mille järgi üritatakse seda plaani teostada. Ei ole hoopiski vajalik, et need katsed viiksid korraga soovitavale tulemusele. On väga kasulik vaadelda mitmesuguseid lahendamise võimalusi, valida parim neist, millele järgneb kontroll ning vastav lahenduse vormistamine.

Ülesande lahenduse näitamisele järgneb töö lahenduse omandamiseks õpilaste poolt. Keerukama ja raskema ülesande puhul on kasulik õpetaja poolt antud lahenduse kordamine mõne õpilase poolt, kuid enamail juhtumeil võib kohe siirduda analoogiliste ülesannete lahendamisele: tahvli juures on nüüd õpilane, mitte enam õpetaja, lahenduse iga sammu arutatakse kogu klassi aktiivsel osavõtul.

Siis tuleb koduse töö andmine eesmärgiga kinnistada ja arendada omandatud lahendamise võtet. Väga kasulik on anda koduseks tööks lahendada klassis lahendatud ülesannetega analoogilisi ülesandeid. Järk-järgult ning ettevaatlikult antakse uut materjali, mis sunnib iseseisvalt otsima teid raskustest ülesaamiseks. Iga kodus lahendamiseks antud ülesanne peab õpetaja poolt hästi läbi mõeldud olema. Ta peab õpilaste enamikule olema jõukohane, kuid mitte liiga lihtne. Kõige parem on, kui koduste ülesannete hulgas on osa sääraseid, mis kõigile on jõukohased ja mille mittelahendamine annab lihtsalt tunnistust sellest, et õpilane ei ole töötanud, ning osa raskemaid, mille lahendamisega saavad hakkama ainult tugevamad, nende lahendamine ei ole kõigile kohustuslik, kuid peetakse silmas, et järgmises tunnis koduse töö kontrollimise ajal nende lahendamise omandaksid kõik.

Vaadeldud tüüpi ülesannete ja nendega lähedaste ülesannete lahendamise treenimiseks tuleb sageli pühendada terved tunnid. Neid võib kahtviisi üles ehitada: kas õpilaste jutustuse alusel selle

töö üle, mis nad tegid kodus, seda jutustust arutades, kontrollides, selgitades vigu, ning neid parandades, tarvitades lahendamisel teisi võtteid, või uute ülesannete lahendamise alusel. Esimene tee on üldiselt eelistatavam, kuid ka teine on kasutatav. Peaasi, et kogu klass võtaks lahendamisest osa, et igaüks saaks säärasest tunnist mingisugust kasu. Halb on, kui klassis on õpilasi, kes ei saa aru sellest, mis nende tugevam kaaslane teeb tahvli juures; halb on ka, kui osa klassist tunneb igavust, sest tahvlil tehakse seda, mis neile hästi tuttav ega ole huvitav. Nende kahe äärmuse vältimine peab olema õpetaja suurimaks mureks. Märgime, et mida vanem on klass, seda paremini kulgevad need tunnid, mille peamiseks sisuks on õpilaste poolt iseseisvalt leitud lahenduste esitamise arutlus. Lahendajad esinevad ettekandjaina, teised kritiseerivad, täiendavad, parandavad. Lõppude lõpuks tehakse iga ülesande kohta üldised järeldused. Programmi iga läbivõetud osa kohta ülesannete lahendamise lõpetamisel kasutatakse kontrollimisabinõusid, kõige parem — kirjalikke kontrolltöid, nii koduseid kui ka klassitöid.

Märgime veel kergemate ülesannete peast lahendamise oskuse arendamise tähtsust, s. o. lahendamine ilma üleskirjutusteta, kus ei kirjutata üles kas mitte midagi (ei ülesande tingimust, ei arvutusi ega tulemust, õpilastel ei ole käes mingit kirjutusvahendit), või kirjutatakse üles ainult tingimused ja tulemused, aga kõik operatsioonid (tehted) sooritatakse peast (mõnikord neid kaht töö liiki eristatakse teineteisest, nimetades viimast «poolkirjalikuks»). Peastlahendamisel on alati tagatud suurem teadlikkus, seepärast on säärast lahendamist kasulik praktiseerida matemaatika õpetamise igal astmel, mitte aga üksnes aritmeetika õpetamisel, nagu seda tavaliselt tehakse.

§ 20. Õpilaste iseseisev töö.

Õpilaste iseseisev töö, s. o. nende töö ilma õpetaja juuresolekuta või vähemalt õpetaja poole abi saamiseks pöördumata mõnesuguse ajavahemiku kestel, on tähtsaimaks osaks kogu tööst matemaatika õppimisel. Iseseisva töö õige organiseerimise puudumisel ka kõige huvitavamad ja haaravamad tunnid toovad võrdlemisi vähe kasu.

Iga õpilane omandab vilumusi iseseisvaks tööks kogemuse teel, järk-järgult kujundades selle ratsionaalseimad vormid, mis on lahkuminevad erisuguste mälu ja tähelepanu tüüpide jaoks ning väga sõltuvad õpilaste east. Kuid õpetajast oleneb nende vilumuste omandamise vähem või suurem edukus: p e a b õ p e t a m a õ p p i m a. Enne kõike peab õpetaja hoolitsema selle eest, et kõigil õpilastel oleks iseseisvat tööd, mida tuleb teha nii klassis kui ka kodus. Ülesanded iseseisvaks tööks klassis antakse päris lühikesed, 10—15 minutiks, et samas tunnis saaks tulemusi kontrollida, selgitada raskusi, anda täiendavaid seletusi. Neid praktiseeritakse laialdaselt

nooremais klassides, kuid neist ei tule loobuda ka vanemais klassides. Pärast mõne uue raske küsimuse läbivõtmist on mõnikord kasulik kohe kontrollida, kuivõrd see on omandatud, tehes klassis väikese iseseisva töö, mis seisab kas teoreetilist laadi küsimustele vastamises või lihtsate ülesannete lahendamises kas kirjalikult või isegi peast. Töö ajal õpetajal on võimalus selgitada, kuidas üksikud õpilased tulevad sellega toime. Järgnevat kontrolli ja paranduste tegemist hõlbustab tunduvalt see, kui paar-kolm õpilast teostavad lahenduse klassi tahvlil. Muidugi peab abinõud tarvitusele võtma, et niisugune iseseisev töö ei muutuks tahvlile ilmuva valmislahenduse lihtsaks ärakirjutamiseks.

Iseseisev töö nii klassis kui ka kodus seisab kindlaksmääratud materjali äraõppimises, kus õpilase ülesandeks on sellest materjalist aru saada ja meeles pidada ning vastustest antud küsimustele õpilaste jaoks uute tulemuste saamises.

Õpetaja poolt klassis seletatud uue aine õppimisel ja omandamisel peab õpilane kõigepealt raamatu ja tunnis tehtud oma üleskirjutuste järgi sellest ainest väga täpselt aru saama. Säärased üleskirjutused ei ole iialgi täielikud ning töö nende järgi on seda viljakam, mida värskemad nad on: üleskirjutustest arusaamine samal päeval, millal nad on tehtud, on palju lihtsam kui mõne päeva pärast. Uurides oma üleskirjutusi, tehakse seal parandusi ja täiendusi, soovitav on teha need äärtel, mis selleks otstarbeks tuleb jätta küllalt laiad. Veel soovitavam on kogu üleskirjutus vajalike täienduste ja parandustega puhtalt ümber kirjutada. Väga tähtis on selgitada definitsioonide ja teoreemide täpsed sõnastused, taastada tõestuste mõttekäik, kindlaks tehes iga sammu põhjendamise viidete näol varem õpitud definitsioonidele, teoreemidele, reeglitele, püüdes endale aru anda, miks on tehtud just niisugune, mitte aga teissugune samm. Äärmiselt kahjulik on pinnapealsus, kui inimene ei võta vaevaks täielikult selgeks teha iga üksikasja, ometi ei tule ka liiga kaua peatuda igal üksikul punktil. Ära märkides, et nii- ja niisugune punkt nii- ja niisuguses suhtes ei ole selge, minnakse edasi, et edaspidi selle punkti juurde tagasi tulla ja kõrvaldada segadus. Väga kasulik on ise näiteid leida.

Kui kogu aine on läbi arutatud, siis tuleb see omandada, s. o. niivõrd meelde jätta, et olla võimeline reprodutseerima ta seotud kujul, ilma juhtivate küsimuste abita. Peab endale kujutlema kuulajat, kes oma ettevalmistuselt on täiesti suuteline sellest ainest aru saama, kuid ei ole sellega tuttav, ja kes on häälestatud väga kriitilises vaimus ning kuulab seletust väga tähelepanelikult, — säärasele kuulajale tuleb see materjal ette kanda, vastates kõigile küsimustele, mis ta võiks esitada.

Tavaliselt mõne esimese sammu järel tuleb peatus: pole selge, mis edasi teha, tekib vajadus õienduse järele allikast (raamatust või vihikust). Enne kui jõutakse seletusega lõpuni, võib mitu niisugust õiendust vaja tulla. Seletamist korrates õpilane veendub, et peatusi tekkis vähem. Lõppude lõpuks saavutatakse aine täielik val-

damine, selle esitamisel ei olnud ühtki õiendust vaja. Omades nii üleskirjutusi kui ka raamatut, tuleb neid mõlemaid kasutada, sest üleskirjutustes on sageli vigu, mis avastuvad alles raamatuga võrdlemisel, kuid seal on ka selliseid õpetaja näpunäiteid, mida raamatus üldse ei ole. Töö võib lugeda lõpetatuks, kui kogu seletamine läheb ladusalt, kui kõigile tumedaile kohtadele on leitud seletused, kui kõigi definitsioonide ja teoreemide kohta on leitud näited.

Väga kasulik on õpilaste omavaheline vastastikune kontroll ja vastastikune abistamine. Sageli see, mis ühele on segane, on teisele hästi arusaadav, lünkade puudumine aga selgub proovi seletamisel palju paremini, kui kuulajaks ei ole ettekujutatav, vaid tõeline, tähelepanelik ja noriv kuulaja. Esmalt üks seletab, teine kuulab, seejärel osad vahetatakse.

Ülesannete iseseisval lahendamisel on esiteks tarvis endale selgeks teha asja sisu, täpselt aru saada ülesandes antud tingimustest ja esitatud küsimustest. Teiseks on kasulik järele mõtelda, kas analoogilisi ülesandeid ei ole varem lahendatud, ja kui on, kas ei saa siis kasutada neidsamu lahendamisvõtteid, tehes neis vastavalt vajalikud muudatused. Kolmandaks, kui tuleb uus lahendus leida, siis tuleb meelde tuletada, mis on õpitud neist asjadest, millest ülesandes räägitakse, otsides tarbe korral juhatusi ka raamatuist. Neljandaks, tuleb otsida lahenduskäik, kasutades kas otsest (sünteetilist) meetodit, mis puhul minnakse andmeilt otsitavale, või kaudset (analüütilist) meetodit, mis puhul lähtutakse oletusest, et ülesanne on lahendatud, et siis, leidnud lahenduskäigu, läbida see teiskordselt, siirdudes nüüd juba andmeilt otsitavale. Selgitatakse hoolikalt, kas leitud lahendus on ammendav. Kui üks lahendustee, mis viib eesmärgile, on leitud, siis vaadatakse, kas ei ole veel teisi. Võrreldes saadud tulemusi, neid vastastikku kontrollides, mõeldakse veel muist kontrollimisvõtteist. Lõpuks, valinud parima lahendamise variandi, vormistatakse see, kasutades lühikest, kuid selget ja täpset üleskirjutust ning varustatakse ta, kui seda nõutakse, vajalike seletustega.

Ülesannete lahendamisel toob kollektiivne töö vähem kasu kui valmismaterjali õppimisel, sest siin iga osavõtja initsiatiiv kas segab teiste initsiatiivi või surutakse teiste poolt maha (kui jõud on väga erinevad). Ülesannete kollektiivsel lahendamisel on parem piirduda ühiselt probleemi ülesseadmisega ja tulemuste arutlusega ühiselt, mis igaühe poolt on saadud individuaalse töö korras.

Õpilaste iseseisev töö ilmutab täit mõju ainult sel juhtumil, kui seda õigeaegselt hoolikalt kontrollitakse; matemaatika õpetaja peab asja sellele küljele niisama palju tähelepanu pühendama nagu ülesannete valikule. Süstemaatilise ja produktiivse iseseisva töö viljumusi ei saavutata õpilaste poolt kaugeltki mitte korraga. Peale näpunäidete, mis õpetaja annab kogu klassile, korduvalt selle küsimuse juurde tagasi tulles, vaadeldes üksikute õpilaste õige ja väära iseseisva töö näiteid, toovad palju kasu õpetaja vestlused sellele teemale üksikute õpilastega, mille eesmärgiks on selgusele jõuda,

kuidas igaüks töötab, ja aidata puudused kõrvaldada. Võib palju saavutada, kui võtta reegliks vestelda igapäev igaühega, kes selleks päevaks järjekordselt ülesannet ei ole täitnud. Iseseisva töö vilumuste kujundamise kohta leiab õpetaja palju huvitavat artiklis [I, 54 a].

§ 21. Näitlikkus matemaatika õpetamisel.

Nagu teada, nimetatakse näitlikuks niisugust õpetamist, mis on rajatud otseselt tajutavaile konkreetseile kujudele, mitte aga abstraktseile mõisteile, mis alles järk-järgult kujunevad neist konkreetseist kujudest. Näitlikkuse printsiibi tähtsus viljakaks õpetamiseks on ammu tunnetatud ning igas pedagoogika õpikus uuritakse üksikasjalikult selle rakendamise mitmesuguseid külgi. Kuigi matemaatika õpetamisel on näitlikkuse teostamine kergem kui ühegi teise aine õpetamisel, esineb ometi praktikas sageli juhtumeid, kus näitlikkuse printsiibile ei osutata küllaldast tähelepanu, ning samuti selle väärtarvitamise juhtumeid. Näitlikkuse printsiibi õige rakendamine kindlustab õpetamise protsessis tolle üleminеku elavalt kaemuselt abstraktsele mõtlemisele, millest räägitakse kuulsas Lenini poolt antud sõnastuses tunnetuse teooria olemuse väljendamiseks («elavalt kaemuselt abstraktsele mõtlemisele ja sealt praktikale — niisugune on dialektiline tee tõe tunnetamiseks, objektiivse reaalsuse tunnetamiseks»). Ei saa esimesest astmest — elava kaemuse astmest üle astuda, sest ainult selle alusel saab välja kujundada täisväärtusliku abstraktse mõtlemise, kuid ei saa ka liiga kauaks peatuma jääda esimesele astmele, sest abstraktse mõtlemise elementide ilma õigeaegse arendamiseta on iga teaduse aluste omandamine võimatu.

Mida kõrgem on õpilaste vaimse arenemise üldine tase, seda kergemini teostub see üleminek elavalt kaemuselt abstraktsele mõtlemisele; õpetaja hoolitsus näitlikkuse vajaliku määra kindlustamise eest õpetamisel järk-järgult väheneb sedamööda, kuidas õpilased siirduvad ühest klassist teise, ning selles suhtes on õppetöö erinevus V ja X klassis väga suur. Kuid see hoolitsus ei tohi iialgi päriselt ära jääda: õpetaja peab igal õpetamise astmel selgitama, kas tema õpilastel juba on täiesti selgete ja eredate näitlike kujutluste küllalt püsiv baas olemas, või ta peab aitama säärase baasi luua. Kui säärane baas puudub, siis õpilaste teadmised on viljatud ja formaalsed. Need ei ole teadmised tegelikust maailmast, mis annavad võimaluse teda alistada, teda kasutada inimeste hüvanguks, vaid on sõnade ja fraaside kasutu teadmine, mille taga ei ole õpilase jaoks mingit tegelikkust.

Näitlikkus matemaatika õpetamisel saavutatakse järgmiste abinõudega:

1. Peab nii täielikult kui võimalik kasutama meid ümbritsevat tegelikkust. Näiteks VII klassis on geomeetria tund, esimene tutvumine rööpkülikuga. Miks mitte õpilaste tähelepanu pöörata neile

kujundeile, mis läbi aknaklaaside tungivad päikese kiired klassi põrandale moodustavad? Miks mitte küsida, mis kuju on trepikoja värvitud seina osal («paneelil»)? Kasutatakse silmade ees olevaid asju, aga ka asju, mida silma all ei ole, kuid mida igaüks teab, näiteks kujundeid kaldjoontega vihikus.

2. Peab kasutama erilisi matemaatilisi näitlikke õppevahendeid, nii omavalmistatuid kui ka ostetuid. Esimesi võib suurel hulgal valmistada käepärast olevast materjalist, teised tuuakse kauplusest. Näiteks pabeririba kujutab pärast korduvat kahekorra murdmist poole, veerandi, kaheksandiku jne. mõistet. Kartongist väljalõigatud ring, mis võrdseiks sektoreiks jaotatud, võimaldab luua püsivalt meeldejääva kujutluse ringjoone pikkuse ja ringi pindala vahelisest seosest. Raske teoreem iga kolmnurkse prisma kolmeks ruumiliseks püramiidiks jaotamise võimalusest saab palju paremini arusaadavaks, kui selle õppimisel kasutada mitte ainult jooniseid, vaid ka mudelit. Kolmnurkse prisma, mis on kolmeks võrdruumiliseks püramiidiks lõigatud, võib valmistada iga lõppklassi õpilane mingist sobivast materjalist: kes oskavad saagida — puust, kes oskavad liimida — kartongist, kõik teised kas suurest kartulist või kaalikast.

3. Peab taotlema, et õpilased oskaksid lihtsaimaid matemaatilisi riistu vabalt käsitseda. Sentimeetri ja millimeetri jaotustega joonlaud, nurklaud, sirkel ja mall peavad olema õpilastel alati käepärast. Kui neid ei saa osta, siis peab neid ise tegema, mis on alati võimalik (sirkli asendaja tehakse paksust paberi- või kartongiribast, millesse on pistetud augud nööpnõela ja pliiatsi jaoks). Raskem, kuid siiski täiesti võimalik on õpilasi varustada omavalmistatud logaritmiliste arvutuslükatitega, mis tehakse millimeetri-paberi ribast ning võimaldavad tulemusi saada kahe õige numbriga; see selgitab hästi selle lihtsa, kuid väga väärtusliku arvutusvahendi teooriat.

On hulk matemaatilisi instrumente ja vahendeid, millega tutvumine on väga kasulik ja mida ei ole raske oma jõududega valmistada. Siia kuuluvad loodlaud, vaaderpass, ekker, palett (läbipaistev leht, millele on joonestatud ruutvõrk ja mida kasutatakse korrapäratu kontuuriga kujundite pindalade ligikaudseks määramiseks), Neperi pulgad (lihtsaim korrutamise mehhaniseerimise vahend) jm. Siinjuures märgime siiski, et kõrvuti riistade abil tehtud enamvähem täpsete joonistega peavad õpilased oskama ülesannete lahendamisel ja teoreemide tõestamisel teha korralikke jooniseid ka vaba käega (nii vihikusse kui ka klassitahvlile). Õpetaja peab neile siin eeskuju näitama, vältides jooniste tegemisel riistade tarvitamist, kui see ei ole eriti vajalik.

4. Omapäraseiks näitlikeks matemaatilisiks õppevahendeiks on mitmesugused joonistused ja joonised, mis valmistatakse nii õpetaja kui ka õpilase poolt paljude küsimuste parema selgitamise eesmärgil. Joonise tähtsusest geomeetrias ei ole vaja rääkidagi (mõnedest raskustest, mis seotud jooniste valmistamisega stereomeetrias, tuleb kõnet 4. osas). Kuid sageli on ka aritmeetikas tulus kasutada joonistusi ja jooniseid (vt. 2. osa § 4).

Milline ka oleks näitlik matemaatiline õppevahend, kas ese, millel on oma erieesmärk, kuid mida kasutatakse matemaatika õpetamisel, või eriti selleks eesmärgiks valmistatud õppevahend, alati toob ta seda rohkem kasu, mida rohkem õpilane temaga töötab. Selle lihtne näitamine tunnis annab vähe. Palju parem on, kui õpilased teostavad sellega mingeid manipulatsioone, mis on vajalikud asja juurde kuuluva mõnesuguse ülesande täitmiseks. Veel parem on, kui õpilased ise valmistavad säärase näitliku õppevahendi. Nii näiteks, hoolimata sellest, et kerge on kõiki õpilasi varustada valmisnurklaudadega, on siiski kasulik eelnevalt ette panna, et õpilased ise valmistaksid endale paberist nurklauad voltimise teel: siin kasutatakse praktiliselt ja omandatakse täisnurga kui oma kõrvunurgaga võrdse nurga definitsiooni.

Olgugi harva, kuid siiski esineb näitlike õppevahendite kasutamisel ka liialdusi. Ei tohi unustada, et matemaatika õpetamise, ja ka üldse üheks hariduslikuks ülesandeks on abstraktse mõtlemise vilumuste kujundamine, ning igasuguste näitlike õppevahendite eesmärgiks on nende vilumuste kujundamise hõlbustamine. Näitlike vahendite kasutamisega aitab õpetaja õpilasel ühest või teisest keerulisest küsimusest kergemini aru saada. Kui aga õpilane teatava pingutusega suudab asja endale hästi selgeks teha ilma näitlike õppevahenditeta, siis nende kasutamine võib ainult kahju teha. Mida vanem klass, seda vähem on vajadus näitlike õppevahendite järele.

§ 22. Klassiväline ja kooliväline töö matemaatika alal.

Matemaatika õpetaja töö keskkoolis ei piirdu tavalises tunniplaanis ettenähtud tundide ja koduse töö kontrollimisega: suurt kasu toob asjale mõnede klassiväliste ja koolivälise ürituste teostamine, millest tähtsaimad on täiendav õppetöö mahajäänutega, töö teaduslikus ringis kõige tugevamatega, matemaatilised olümpiaadid, geodeetilised tööd maastikul, matemaatilised ekskursioonid.

Täiendav õppetöö mahajäänutega on väga mõjukaks vahendiks võitluses õppeedukuse tõstmise eest. Väga tihti võib tähele panna juhtumeid, et õpilane, kes mõnest tunnist on puudunud kas haiguse pärast või mõnel muul põhjusel, kaotab järje, ei saa õpetaja seletustest aru, ei tule koduste ülesannetega toime, — ta on maha jäänud, ja kui nüüd vastavaid abinõusid ei võeta õigeaegselt tarvitusele, siis võivad tagajärjed kujuneda väga tõsiseks, kuni terve õppeaasta kaotuseks. Niisuguseil puhkudel on vajalik täiendav individuaalne õppetöö, mis olukorra kiiresti parandab. On väga tähtis, et säärast abi osutatakse tingimata individuaalses korras, täpse arvestusega sellest, mis antud õpilasele on just vaja. Õppetöö mahajäänute rühmaga toob tavaliselt vähe kasu, sest mahajäämuse põhjused on väga erinevad. Seetõttu ühine töö võib osutuda niisama vähe produktiivseks, nagu erinevate haigustega haigete rühma ravimine ühe ning sama ravimiga. Töötades mahajäänutega individuaalselt ja

seejuures küllalt tihti, kõige parem iga päev, võib mahajäämuse varsti ületada, nii et õpilane võib hakata sammu pidama oma edasijõudvate klassikaaslastega. Algajale õpetajale tuleb eriti soovitada isiklikult teostada säärast individuaalset õppetööd mahajäänutega, sest see aitab aru saada neist raskustest, mis takistavad edukat õppetööd matemaatika alal, aitab paremini tunde anda. Kui säärast järeleaitamist teostavad mahajäänute vanemad kaaslased, siis õpetaja peab hoolega seda tööd planeerima ja kontrollima. Peab silmas pidama, et säärane järeleaitamistöö on kasulik mitte üksnes mahajäänule, vaid ka teda aitavale seltsimehele endale, viies sageli pedagoogiliste annete avastamisele.

Suurt tähelepanu nõuavad ka need õpilased, kes ilmutavad erilist kalduvust matemaatikale ning tulevad kohustusliku programmi materjali kallal töötades kergemini toime kui teised; on soovitav nende huvi matemaatika vastu ära kasutada programmi raamidest väljaulatuva aine alal süvendatud töötamiseks. Ka siin on vajalik individuaalne lähenemine: huvidè selgitamine, individuaalsed ülesanded, konsultatsioonid. Kui leidub mitu õpilast, kes lahendavad täiendavaid individuaalseid ülesandeid, siis on soovitav organiseerida matemaatika ring, kus perioodiliselt kogunetakse ettekannete kuulamiseks töö tulemuste kohta.

Viimasel ajal korraldatakse mitmes NSVL linnas igal aastal matemaatika olümpiaad, millest võtavad osa tugevaimad matemaatikud — keskkoolide õpilased. Tavaliselt toimuvad niisuguseil olümpiaadidel loengud populaarteaduslikel teemadel, mis ulatavad keskkooli kursusest väljapoole, konsultatsioonid, võistlused raskemate ja huvitavamate ülesannete lahendamise alal. Iga matemaatika õpetaja peab mõjutama oma paremaid õpilasi osa võtma sääraseist olümpiaadidest, ise osa võtma nende organiseerimisest, ära kasutama need olümpiaadid matemaatika vastu huvi tõstmiseks oma õpilastes.

Kooli matemaatika ringide ja linnade matemaatiliste olümpiaadide tööd on käsitletud paljudes ajakirjade artiklites.

Heaks abinõuks töö mitmekesistamiseks matemaatika õpetamise alal on mõne õppuse organiseerimine vabas looduses. Need õppused võivad olla väga mitmesuguse sisuga: kauguste otsene mõõtmine sammude või mõõtpaelaga, kauguste mõõtmine kaudsel teel geomeetria ja trigonomeetria kursuses õpitud võtete rakendamisega, ligipääsematute kõrguste mõõtmine, kujundite tükeldamine maastikul (näiteks maatüki väljamõõtmine mänguväljakuks, aiamaaks), lihtsaimad plaanistamise tööd, nivelleerimine. Osa sääraseist töödest võib teha ilma igasuguse erilise inventarita, osa omavalmistatud riistade kasutamisega. Peatingimuseks on, et õpetaja ise tunneb selle asja teoreetilist ja praktilist külge, vastavaid teadmisi võib ammutada rikkalikust kirjandusest, raamatuist ja ajakirjade artikleist, näiteks [IV, 29].

Huvitav, kuid harva kasutatav klassivälise töö vorm matemaatika alal on matemaatilised ekskursioonid: õpetaja, olles rühma õpilastega jalutuskäigul, juhib nende tähelepanu mitmesuguseile asjadele, milles on näha mõnd matemaatilist omadust. Näiteks pikk rida kaugenevaid telefoniposte, mis asetsevad sirgjoonel. Tekib rida küsimusi. Kuidas saab paigutada telefonipostid rangelt sirgele joonele? Kui suur on kahe lähestikuse telefoniposti vaheline kaugus

(kauguse määramine silma järgi ning tulemuse kontrollimine mõõtmise teel)? Kuidas määrata kaugust telefonipostide loendamise teel? Kuidas leida telefoniposti kõrgus selle otsa ronimata? Mis kõverad moodustavad telefonitraadid? Käänak trammi teel: kui suur on ringjoone raadius, millel asetseb rööbas käänakul (küsimus lahendatakse kergesti, kui mõõta kõõl a ja segmendi kõrgus b, kasutades võrrandit:

$$(2x - b)b = \frac{1}{4}a^2,$$

kus x on otsitav raadius)? Või näiteks vihmaveetoru, milles katuselt voolav vesi ööse on ära jäätanud: kui palju kaalub jää, mis toru tervenisti täidab? Ei ole midagi katki, kui kõigile tekkinud küsimustele ei saa kohe ammendavaid vastuseid; tehtud mõõtmised ja vaatlused võimaldavad edaspidi nende küsimuste juurde tagasi tulla ning teha siis vastavad õiendused. Kuid siiski on parem, kui ülesande lahendamine viiakse kohe siinsamas ekskursioonil lõpule, mis on alati võimalik, kui juht kõik üksikasjad mõtleb varakult läbi ja varub õigeaegselt vajalikud andmed.

Ainet matemaatilisteks vaatlusteks ja järelduste tegemiseks leidub igal sammul: ligipääsematute asjade kaugused, ligipääsematute punktide vahelised kaugused, kõrgused, kaldenurgad, pindalad, ruumalad, kaalud — kõik see annab võimaluse seada ja lahendada hulga huvitavaid, õpetlikke ja õpilastele jõukohaseid küsimusi sageli sellele järgneva kontrolliga otseste mõõtmiste teel, mis on seotud füüsikaga, tehnikaga, astronoomiaga. Sageli võib ühe ning sama küsimuse lahendada mitmesuguste, ka täpsuselt erinevate võtetega. Näiteks mingi orientiiri kaugust võib hinnata silma järgi, seejärel mõõta seda sammudega ning lõpuks mõõtpaelaga. Kui suurt elevust tekitavad niisugused ekskursioonid! Kuidas nad äratavad huvi matemaatika vastu, mobiliseerides vältimatute raskuste ületamisele!

Näiteid sellest, missugust matemaatilist materjali võib kasutada ekskursiooni ajal, leiab lugeja J. Sergejevi brošüürist [I, 50].

IV peatükk.

MATEMAATIKA ÕPETAMISE ORGANISEERIMINE.

§ 23. Programmi materjali jaotus. Kalenderplaan.

Matemaatika õpetaja töö tunniandmiseks klassis algab täpse planeerimisega, ilma milleta pole võimalik ülesantava materjali õige doseerimine ega selle täitmise kontrollimine. Tutvunud programmile lisatud seletuskirja põhjal antud klassi matemaatika kursuse iseloomu ja eesmärkidega kui ka programmi endaga, mis sisaldab õppimiseks määratud teemade loetelu ja iga teema sisu, peab õpetaja peale selle mõõdunud aasta töötulemuste kokkuvõtete põhjal kindlaks tegema klassi olukorra matemaatika alal. Kas programm on kõik läbi võetud? Missugused on kevadiste eksamite tulemused? Mida ilmutasid sügisesed eksamid? Missugused on antud klassi vastuvõetud uute õpilaste teadmised ja oskused? Kõiki neid tingimusi arvesse võttes koostab õpetaja poolaasta tööplaani, jaotades aine veerandite kaupa, ette nähes kordamise ja kontrollimise. Aluseks võetakse programmis teemadele ettenähtud ligikaudsed tundide arvud, kuid seal tehakse vastavad muudatused, mis on tingitud antud klassi iseärasustest. Algajal õpetajal on töö pla-

neerimisel väga kasulik nõu pidada oma vanemate töökaaslastega. Planeerimistöö tulemusena peab kujunema dokument, mida nimetatakse «kalenderplaaniks» ja mis esitatakse direktorile kinnitamiseks. On soovitav, et plaani koostamise ja selle kinnitamise vahele jääks teatav ajavahemik, et õpetaja oma esialgses plaanis saaks teha parandusi, mille otstarbekohasus selgub ajajooksul, kuid peab silmas pidama, et kalenderplaan esimeseks poolaastaks peab olema kinnitatud hiljemalt 25. augustiks, teiseks poolaastaks 5. jaanuariks.

Kinnitatud kalenderplaan on ametlik dokument ning säilitatakse õppeala juhataja käes. Õpetajal peab olema käepärast selle ärakiri. Elu nõuab nii mõnigi kord tehtud plaanis paranduste tegemist, kuid need peab põhjalikult läbi mõtlema, peab hankima tööplaani kinnitanud isiku sanktsiooni, neid peab fikseerima nii aasta aruande koostamise tarvis kui ka oma kogemuste arvestamiseks töö tarvis tulevikus.

Toome kalenderplaani näite.
Kalinini K. K. Nr. 30.

Õpetaja Aleksandrov B. V.

Algebra kalenderplaan VIII klassile 1947./48. õppeaasta esimeseks veerandiks (4 tundi nädalas, kokku 38 tundi).

Teema nr. nr.	Töö sisu		Tundide arv	Tähtajad	Märkusi
	Uus aine	Kordamine			
1	2	3	4	5	6
	Jagu «Astmed ja juured.»				
1	Naturaalarvuliste ja täheliste astendajatega astmed.	Relatiivsed arvud.	2	September 1, 2	
	Negatiivse arvu astmed.				
2	Korrutise, jagatise, astme aste. Hulkliikme ruut.	Neli tehet hulkliikmetega.	3	4, 6, 8	
3	Kontrolltöö Nr. 1 ja selle arutlus.		2	9, 11	
4	Ruutjuure leidmine arvudest.	Korrutamise abivalemid.	4	13, 15, 16, 18	
5	Irratsionaalarvu mõiste. Tehted irratsionaalarvudega.	Hulkliikmete tegureiks lahutamine.	2	20, 22	
6	Kontrolltöö Nr. 2 ja selle arutlus.		2	23, 25	
7	Korrutise, jagatise, astme juurimine.	Ühe otsitavaga 1. astme võrrandid.	3	29, 30 Oktoober 2	

1	2	3	4	5	6
	Juuravaldise teisendamine.				
8	Juure põhiomadus. Juurte teisendamine ühisjuurijaga juurteks. Sarnased juured ja nende koondamine.	Ülesanded võrrandite koostamiseks.	4	4, 6, 7, 9	
9	Kontrolltöö Nr. 3 ja selle arutlus.		2	11, 13	
10	Kuus tehet radikaalidega.		4	14, 16, 18, 20	
11	Nimetaja vabastamine irratsionaalsusest.	1. astme võrrandite süsteemid ja ülesanded nende koostamiseks.	3	21, 23, 26	
12	Ülesannete lahendamine kõige läbivõetu kohta veerandi jooksul.		4	27, 28, 30 November 1	
13	Kontrolltöö Nr. 4 ja selle arutlus.		2	3, 4	
14	Ülevaade veerandi jooksul tehtud tööst.		1	6	
		Kokku	38		

Märkused.

1. Jao «Astmed ja juured» õppimiseks on planeeritud 38 tundi programmis soovitatud 30 tunni asemel, silmas pidades klassi vastuvõetud õpilaste erinevusi ettevalmistuses, kes varem õppisid teistes koolides, ning vajadust korrata mõnd varem õpitud algebra osa. 8 tunnine puudujääk kaetakse kahele järgnevale osale määratud tundide arvude vähendamise teel, nimelt: teemale «Ruutvõrrandid» — 38 tundi 42 tunni asemel ja teemale «Ruutvõrrandite süsteemid» — 16 tundi 18 tunni asemel, ning üldise kordamise arvel, millele jääb 14 tundi 16 tunni asemel.

2. Suur arv kontrolltöid, üldse 4 veerandi kohta, on planeeritud sel eesmärgil, et võimalikult kiiresti saavutada kõigi õpilaste oskus süstemaatiliselt iseseisvalt töötada.

3. Pärast iga kontrolltööd on kavatsus täiendavalt töötada nende õpilastega, kes selle kirjutavad mitte rahuldavalt (esmaspäeviti kella 17 kuni 19-ni). Õpilastele, kelle teadmistes ilmneb suuri lünki varem õpitud osades, on kavatsetud korraldada regulaarsed täiendavad õppused vähemalt kolm korda nädalas.

4. Õpilastele, kes ilmutavad väga head õppeedukust, organiseeritakse pärast kontrolltööd Nr. 1 matemaatika ring, kus koosolekud toimuvad igal nädalal reedeti kella 17 kuni 19-ni, alates 12. septembrist. Ringi liikmed saavad individuaalsed ülesanded (peamiselt J. Perelmani raamatu «Elav matemaatika» järgi).

24. VIII 47. Õpetaja B. Aleksandrov.

Kinnitan. Täiendavaiks töödeks antakse tuba Nr. 14 esmaspäevadel, kolmapäevadel ja reedeti kella 16 kuni 20.

30. augustil 1947. a. Direktor A. Platonova.

§ 24. Õpiku, teadusliku ja metoodilise kirjanduse tundmaõppimine. Õpetaja matemaatiline endaarendamine.

Kindlaks teinud, mis nimelt antud klassis tuleb õpetada, uurib õpetaja hoolega õpikute ja ülesannete kogude sisu selgitades, mis õpperaamatuis on ja mis neis puudub, mis seal on esitatud küllaldase selgusega ja vastava ea õpilastele arusaadavalt, mis seal nõuab täiendavaid seletusi. On väga tähtis üksikasjaliselt läbi arutada võimalikult kõigi õpikus toodud ülesannete näidislahendused ja ise lahendada kõik ülesanded programmi vastava osa kohta ülesannete kogus, et oleks teada, missugused raskused õpilastel võivad esineda nende lahendamisel. Igal õpilasel olemasolev õpik ja ülesannete kogu on matemaatika õpetaja peamised tööriistad, ja selleks, et neid õigesti kasutada, peab tundma kõiki nende iseärasusi. Normaalses olukorras õpetaja teab juba eelmise õppeaasta lõpul, mida ta hakkab õpetama uuel õppeaastal, ning tal on suvekuudel aega põhjalikuks ettevalmistamiseks, sealhulgas ka õpperaamatute vastavate osadega põhjalikuks tutvumiseks. Sellele lootma jääda, et õpikut õpiti tundma pedagoogilises instituudis või et selle õpiku järgi õpiti ka siis, kui õpetaja oli ise veel keskkooli õpilane, ei tohi mingil juhtumil: esiteks, igas uues trükis õpikuid parandatakse, täiendatakse, muudetakse, ning teiseks, õpiku tundmaõppimisel õpetaja poolt on hoopis teine iseloom kui selle tundmaõppimisel õpilase poolt.

Õpikute ja ülesannete kogude täielik tundmine on õpetajal tingimata vajalik, kuid kaugeltki veel mitte piisav. Programmis esineb küsimusi, mida õpikus ei ole üldse käsitletud või on puudulikult käsitletud. Õpetaja peab ainet sügavamini ja laiemini tundma kui see on kooli jaoks programmis ette nähtud, muidu ta ei ole suuteline eristama olulist mitteolulisest, jääb hädasse raskemate ülesannete lahendamisel, teeb vigu tugevamate õpilaste küsimustele vastamisel. Palju kasulikke teadmisi oma aines saab õpetaja pedagoogilises instituudis õppimise ajal, kuid need teadmised vajavad järjest värskendamist ja täiendamist, mis saavutatakse üksnes õpetaja iseseisva töötamisega teoreetilise ja metoodilise kirjanduse alal. On palju häid raamatuid mitmesuguste matemaatika osade kohta, mis varemail aastail on ilmunud, ning järjest ilmub uusi raamatuid, mis on määratud keskkooli matemaatika õpetaja jaoks. Rikkalikku ja seejuures üldiselt sugugi mitte vananenud materjali leidub sääraseis ajakirjades, nagu «Математическое образование», mis ilmus aastail 1912—1917 ja 1928—1930, «Математика в школе», mis hakkas ilmuma 1937. aastal (enne seda ilmus ajakiri «Математика и физика в школе») ja ilmub regulaarselt ka käesoleval ajal. See on halb õpetaja, kes ei tunne huvi niisuguse kirjanduse vastu, ei ammuta sellest uut ja kasulikku oma tööks koolis. Suurt tähtsust matemaatika õpetaja jaoks omavad raamatud keskkooli matemaatika õpetamise metoodika küsimustele: nende tundmine teeb võimalikuks vanemate seltsimeeste kogemuste kasuta-

mise, ergutab uute teede otsimisele, väldib võimalikke vigu. Kuid peab hoiduma kriitikata suhtumisest igasuguseisse, isegi trükis ilmunud metoodilistesse nõuannetesse: see, mis annab häid tulemusi ühtedes tingimustes, võib teissuguseis tingimustes mitte midagi anda. Peale selle esineb ka harrastusi, ühe külje ülehindamist teiste, mitte vähem tähtsate külgede arvel.

Õpetaja peab süstemaatiliselt töötama raamatute ja ajakirjade artiklite kallal, värskendades ja süvendades kõrgemast koolist kaasatoodud teadmiste varu, tarvitusele võttes kõik abinõud selleks, et seda varu täiendada ja laiendada. Õpetaja, kes piirdub oma erialal ainult kooli õpikute ja ülesannete kogudega ning loeb ainult harva mõnd üksikut metoodilist artiklit, mis tavaliselt järgib kitsaid praktilisi eesmärke, riskeerib käsitööliseks mandumisega. Õpetaja ei tohi minutikski unustada, et ta õpetab ainult algeid suurest matemaatilisest teadusest, millel on rikkaliku sisuga ajalugu ja mis tormiliselt areneb, leides üha uusi ja uusi rakendusalasid. Uurida matemaatika ajalugu, jälgida selle arenemist ja uusi saavutusi, tutvuda ta rakendustega loodusteadustes ja tehnikas — seda kõike peab õpetaja tegema selleks, et järjest tõsta oma meisterlikkust. Kõigele sellele peab vajaliku tingimusena lisama pideva treeningu mitmesuguste kõrgemat raskusjärku matemaatiliste ülesannete lahendamise alal. Sääraseid ülesandeid leidub erilistes ülesannete kogudes, näiteks [III, 24] ja [IV, 23] ja suurel hulgal ka vanades ja uutes matemaatilistes ajakirjades.

§ 25. Õpetaja valmistumine tunniks.

Õpetaja üldisele ettevalmistusele antud kursuse õpetamiseks antud klassis peab tingimata liituma tema valmistumine igaks üksikuks tunniks. See viimane koosneb järgmistest koostisosadest:

a) tunni eesmärgi ja üldise iseloomu selgitamine;

b) tunnikäigu plaani koostamine umbkaudse aja jaotusega minutites iga märgitud osa kohta, ja nimelt: koduse töö kontrollimiseks, uue aine seletamiseks, koduste ülesannete andmiseks jne.

c) iga tunnietapi üksikasjalik planeerimine (märgitakse õpilaste nimed, keda kutsutakse tahvli juurde koduse töö kontrollimise eesmärgil, samuti nende nimed, keda kavatsetakse küsida kohal, kui ka nende nimed, kellelt võetakse vihud ära; tehakse täpselt kindlaks materjal, mis esitatakse uue aine seletamisel, märgitakse küsimused, mis seejuures esitatakse klassile, nähakse ette mitmesugused võimalikud vastused ja raskused vastamisel; märgitakse nõrgemad õpilased, keda tuleb eriti küsida, et kontrollida, kas nad suutsid uue aine omandada; valitakse ülesanded klassis lahendamiseks ja koduseks tööks jne.). On ütlematagi selge, et seletuse iga detail peab olema hästi läbi mõeldud, iga ülesanne peab olema varem lahendatud, seejuures mitmesugusel viisil. Peab valima näited uue aine illustreerimiseks, tuleb valida ja kontrollida näitlikud õppevahen-

did. Algajal on soovitav koostada üksikasjalikum konspekt, jättes selle kirjutamisel laiad vabad ääred mitmesuguste märkuste jaoks selle kohta, mis selgub tunniandmise ajal. Niisugused märkustega konspektid on väga kõlvulised edaspidigi sama kursuse teiskordsel läbivõtmisel. Kogenenumad õpetajad piirduvad lühikese üleskirjutusega, ära märkides vähemalt näited, ülesanded, õpilaste nimed. Kogemus näitab, et mida hoolsamini on õpetaja poolt tund ette valmistatud, seda parem ja produktiivsem ta on.

Ette valmistada tuleb mitte ainult lähim tund, vaid ka 2—3 järgnevat tundi. See võimaldab paremini aega ära kasutada, mis on väga kallis: andes üht tundi, saab paremat arusaamist järgmisest tunnist ja selle paremat omandamist ette valmistada.

Allpool on toodud väga üksikasjaliku tunnikonspekti näide, nimelt § 23 näitena esitatud tööplaan ühe tunni kohta. Algajale õpetajale on soovitav oma esimesteks tundideks koostada just niisugune üksikasjalik konspekt, milles on vähimadki pisiasjad ette nähtud. Edaspidi, omades rohkem kogemusi, jääb tunnikäigu plaan lühemaks, kuid ka päris kogenud õpetaja tunniplaanis peab olema, esiteks, kõik see, mis tuleb üleskirjutamisele klassi tahvlil ja mis dikteeritakse õpilastele, ning, teiseks, õpilaste nimestik, keda peab küsima või mingil muul viisil kontrollima, ja ka see, mis antakse koduseks tööks.

VIII klass. Algebra tund 4. septembril 1947. a.
(Esimene tund teemale Nr. 2).

Eesmärk: teema sisu selgitus, korrutise ja jagatise astendamise juhiste tuletamine ja omandamine.

Plaan: a) koduste ülesannete täitmise kontrollimine (Kisseljov, II, §§ 1 ja 2: summa ja korrutise kommutatiivsus ja assotsiatiivsus; Kisseljov I, §§ 6 ja 8; harjutusülesanded arvude astendamiseks) — 10 min.;

b) uue teema sisu selgitamine — 5 min.;

c) uus aine — 25 min.;

d) uue aine ülesandmine — 5 min.

Detailiseerimine.

a) Kutsuda tahvli juurde Netšajev ja Stepanov üles kirjutama kõik, mis nad oma vihikuis koduste ülesannete lahendamisel on kirjutanud. Kõik teised võrdlevad oma üleskirjutusi üleskirjutustega tahvlil, valmistavad ette küsimusi ja märkusi. Klassis kõndides vaatan igaühe vihikusse, kas lahendused on seal olemas. Eriti kontrollida, kas Makarov ja Daiber on eelmise koduse töö ülesanded lahendanud, kellel 2. septembril oli see tegemata; kontrollida, kas Kotov, Sinitski ja Fjodorov on oma lahendused ümber kirjutanud (möödunud korral oli nende lahendustes vigu ja üleskirjutused olid räpased); mis on teinud Abramov (2. septembril ta puudus, kuid 3. septembril ta oli koolis ja pidi kaaslastelt kodused ülesanded teada saama).

Lasta seletada üleskirjutuse järgi tahvlil, vastata küsimustele.

Küsida kohtadelt: mida tähendab üleskirjutus a^k?

Millega võrdub 3^4? 4^3? $(-3)^4$? $(-4)^3$? $(-1)^{1005}$? $(-1)^{1006}$?

Kuidas sõnastatakse negatiivse arvu astendamise juhis?

Missugust arvu nimetatakse paarisarvuks? paarituarvuks? Tuua näiteid.

Kas null on paarisarv või paarituarv?

Mispärast? Tuua näiteid.

Kuidas sõnastatakse kommutatiivsuse omadus?

Missuguste valemitega saab seda väljendada?

Kuidas sõnastatakse assotsiatiivsuse omadus ja missuguste valemitega see väljendub?

Kontrollida, kas assotsiatiivsuse omaduse mõlemad sõnastused on omandatud piisava selgusega: et liita summa, selleks tuleb liita järgemööda iga liidetav; summa ei muutu, kui mõned liidetavad asendada nende summaga. Analoogiliselt korrutise puhul.

Tähele panna Kotovit, Daiberit ja Streltsovi; kui nad kätt ei tõsta, tingimata neid küsida.

Võtta vihikud ära Grigorjevilt, Panovalt, Streltsovilt, Timofejevilt, öeldes neile, et nad tuleksid oma vihikute järele täna pärast 5. tundi õpetajate tuppa (kontrollin neid 4-da, vabatunni ajal).

b) Uus teema — täheliste avaldiste astendamine; esmalt üksliikmete astendamine, sest see on kergem, siis hulkliikmete astendamine (see on palju raskem, piirdume ainult ruutu tõstmisega, sellal kui üksliikmeid astendame mis tahes naturaalarvulise astendajaga).

Kontrollida, kas on meeles, mis on täheline avaldis, üksliige, hulkliige. Öelda, et uuele teemale kulutatakse kolm tundi (4., 6., 8. september) ja et 9. septembril on kontrolltöö Nr. 1 teemadele 1 ja 2. Rääkida kontrolltööde tähtsusest.

c) Korrutise ja jagatise astendamise juhised.

Millega võrdub $(2 \cdot 10)^3$? Vastus: $2 \cdot 10 = 20$; $20^3 = 8000$.

Kas sama tulemust ei saaks ilma 2 ja 10 korrutamise teostamiseta?

Võib nii:

$(2 \cdot 10)^3 = (2 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 10)$ astme definitsiooni põhjal
$= 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10$ korrutise assotsiatiivsuse põhjal (esimene sõnastus)
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ korrutise kommutatiivsuse omaduse põhjal
$= (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10)$ korrutise assotsiatiivsuse põhjal (teine sõnastus)
$= 2^3 \cdot 10^3$ astme definitsiooni põhjal
$= 8 \cdot 1000 = 8000$.

Üleskirjutuse tahvlile teen ise, esitades kogu aeg küsimusi ning toetudes õpilaste vastustele kohtadelt. Nõuan üleskirjutusi vihikuis kõige selle kohta, mis tahvlile ilmub. Esmalt esitan küsimuse, seejärel, pärast pausi, nimetan õpilase, kes peab vastama. Taotleda kõikide osavõttu.

Sama töö kordamine avaldise $(ab)^5$ puhul, seejärel avaldise $(ab)^n$ puhul. Tahvli juures üks tugevaid õpilasi, kas või Korelov. Nõuda kõik seletada, ilma katkestamata ja ilma viiteid tahvlile kirjutamata, kuid sõnastades nad. Kui lõpetab, siis teha öiendused, kui need on vajalikud. Teise avaldisega opereerib tahvli juures Abin.

Kuidas sõnastada korrutise astendamise juhis? Kas see jääb püsima kolme teguri puhul? mitme tahes teguri puhul?

Kõik võtavad Kisseljovi õpiku 2. osa ja loevad § 3, punkti *a*.

Analoogne töö jagatise astendamise juhise tuletamisel, kuid kiiremas tempos. Esmalt $(15 : 3)^4$, siis $(a : b)^5$, lõpuks $(a : b)^n$. Kisseljovis § 3, punkt b.

Lahendan keerulisema ülesande, viiteid üles kirjutamata, kuid nõudes neid õpilastelt kohtadel. Tahvlil kirjutan järgmist:

$$\left(\frac{5ab}{2c}\right)^4 = \frac{(5ab)^4}{(2c)^4} = \frac{5^4a^4b^4}{2^4c^4} = \frac{625a^4b^4}{16c^4}$$

Meenutada, et murrukriips asendab jagamise märki ja sulge.

Kui aeg lubab, kutsuda tahvli juurde lahendama analoogilisi harjutusülesandeid üks tugev (Švetsov) ja üks nõrgem õpilane (Abramov).

d) Ülesandmine 6. septembriks:

1) Kisseljov, 2. jagu, § 3, pp. a ja b osata sõnastada juhised ja tuletada nad kõigi vajalike viidetega põhjendustele.

2) Vabastada sulgudest avaldised

$(0{,}7\ ab)^3$; $(-3^1/_2\ axy)^2$; $\left(-\frac{4ax}{3y}\right)^5$.

3) Arvutada kahel viisil $x=\left(\frac{a}{bc}\right)^3$, kui $a=30$, $b=-3$, $c=-2$.

4) Leida mitmel viisil $x=(2^3)^2$, $y=(10^4)^3$, $z=(a^5)^4$, $u=(a^k)^n$, kus a on mis tahes arv, k ja n on mis tahes naturaalarvud.

3. septembril 1947. a. Õpetaja B. Aleksandrov.

§ 26. Kodused ülesanded.

Kui head ka matemaatika tunnid oleksid, ei suuda nad üksi kindlustada vilumusi iseseisvaks tööks, mille kasvatamine on kooli üheks tähtsaimaks ülesandeks. Selle vilumuse annab ainult koduste tööde õige korraldamine ja nende täitmise täpne kontroll.

Koduseid ülesandeid on kolm põhilist liiki.

Esiteks on see tunnis seletatud aine viimistlemine. Õpilased mõtlevad kõik uuesti läbi, mis nad klassis kuulsid, kasutades oma üleskirjutused ja õpikus osutatud kohad; õpivad pähe selle, mis on tarvis meeles pidada (definitsioonide, teoreemide, reeglite sõnastused), vältides mehhaanilist tuupimist, püüdes aru saada iga sõna tähendusest antud sõnastustes, mõeldes, kuidas võiks teisiti väljendada; katsuvad taastada neid arutlusi, mis toimusid klassis ning taotlevad, et need arutlused kulgeksid ladusalt, iga sammu põhjendamisega, ilma vihikusse või raamatusse vaatamata; korrastavad oma klassis tehtud üleskirjutused, kas neid lihtsalt läbi vaadates ja parandades vead (see on kohustuslik miinimum), või täiendades neid, peale selle, oma näidetega, uute sõnastustega, arutluste variantidega, või lõpuks, ja see on veel kõige parem, kirjutades nad ümbertöötatud kujul ümber. Siia kuulub ka klassis läbitöötatud ainega analoogilise aine iseseisev õppimine õpperaamatu järgi.

Teiseks on see koduseks tööks antud ülesannete iseseisev lahendamine. Säärast lahendamist peab ühendama klassis läbitöötatud aine viimistlemisega. On halb, kui ülesandeid ei lahendata üldse või neid lahendatakse väga vähesel arvul, kuid niisama halb on, kui kogu töö kujuneb ülesannete lahendamiseks ilma teoreetilise külje piisava selgitamiseta. Esimene puudus esineb sagedamini geomeetria õpetamisel, teine algebra õpetamisel. Ülesannete iseseisev lahendamine kodus on õpilaste esimene panus aktiivsesse, loovasse töösse, kuid sellel peab olema püsiv ja hästi tunnetatud teoreetiline alus ja ta peab vastama nõudeile, millest oli juttu eespool (§ 19).

Kolmandaks on see töö uue materjali alal ettevalmistamise töö järgmiseks tunniks. Sellal kui kaks esimest liiki koduseid ülesandeid leiavad alati rakendamist, ei ole see kolmas liik leidnud üldist tunnustamist, kuid seal, kus ta on õigesti korraldatud, annab ta ikka häid tulemusi: uus tund toob võrratult rohkem kasu, kui ta annab vastused küsimustele, mis õpilastel tekkisid eelneval tutvumisel selle tunni materjaliga, kui ta üldistab neid erijuhtumeid, millega õpilased tutvusid juba iseseisvalt. XIX sajandi kuuekümnendate aastateni, mõnes kohas ka veel hiljem, kasutati koolides laialt liht-

sat uue materjali ülesandmist õpperaamatust, ning õpetaja ülesandeks oli kontrollida, mis igaüks oli teinud. Praegusel ajal ei saa juttugi olla selle iganenud süsteemi juurde tagasipöördumisest: õpetaja elav seletus tunnis on põhilüliks töös uue aine alal. Kuid säärane elav seletus toob rohkem kasu, kui seda kuulavad õpilased, kes arutuselolevate küsimuste üle on juba mõtelnud.

Koduse töö andmisel peab arvestama vajalikku mõõtu, s. o. kodune töö ei tohi olla liiga väike ega liiga suur. Normiks võib pidada säärast kodust tööd, mis nõuab keskmiselt õpilaselt 30 minutit intensiivset kodust töötamist. Koduse töö andmine matemaatikast on väga kerge, selleks tavaliselt nimetatakse paragrahvid õpperaamatust ja ülesannete numbrid ülesannete kogust, ning õpetajad, eriti algajad, sageli koormavad õpilasi üle. Seoses sellega on õpetajale väga kasulik teha endale reegliks õpilastele koduseks tööks antavad ülesanded alati ise enne lahendada, ära märkides, kui palju selleks aega kulub, ning selle kogemuse põhjal teha kindlaks koefitsient, millega tuleb oma aeg korrutada, et saada antud klassi keskmise õpilase aeg. Koduse töö õige doseerimine on väga tähtis asi ja sellele peab osutama kõige tõsisemat tähelepanu. On lubamatu ühelt poolt ignoreerida massilisi kaebusi ülekoormamisest ja teiselt poolt liiga usaldada õpilaste iga avaldust.

Kodused ülesanded peavad olema vastava klassi õpilastele jõukohased. Juhtub sageli, et õpetaja annab ettevaatamatult koduseks tööks lahendada uut tüüpi ülesande, mille lahendamiseks on vaja mõni võte, mis õpilastel ei ole veel teada, ülesanne ei ole õpilaste enamusele jõukohane. Rõõmsa rahulduse asemel, mida hästi tehtud töö alati pakub, tabab õpilasi, kes säärasele ülesandele kulutasid palju aega ega saavutanud mitte midagi, pettumus ja nördimus, nad kaotavad usu oma jõusse ja tahtmise õppida matemaatikat. Peab olema reegliks — kodused ülesanded valida nõnda, et neid suudab lahendada iga õpilane, kes tunnis on seletusi tähelepanelikult kuulanud ja kellel varemõpitu osas ei ole lünki. Raskemate ülesannete korral, mille lahendamine nõuab õnnelikku leidlikkust, tuleb anda näpunäiteid, mis kergendavad lahenduse leidmist, või hoiatada, et see ülesanne on raske, ta ei ole kõigile kohustuslik, ta on soovitav lahendada esmajoones kõige tugevamail.

Et töö koduste ülesannetega kulgeks ladusalt, on tarvis hoolitseda selle eest, et õpilased selle õigesti organiseeriksid. Näiteks, ei ole harulduseks, et õpilased raiskavad aega viljatuiks katseiks lahendada ülesannet säärase teoreemi rakendamisega, mida nad ei ole nagu kord ja kohus selgeks õppinud. On väga soovitav anda klassis mõne ülesande lahenduskäigu näidis, samuti selgitada lahendamata jätmise põhjused ja vead, mis lahendamisel tehakse ning mis põhjustavad asjatut ajaraiskamist. Väga õpetlik on õpilaste külastamine õpetaja poolt nende kodus ja individuaalsed vestlused teemal sellest, kuidas nad tundideks õpivad (mitte üldiselt, vaid konkreetseil näidetel).

Õpetaja suureks mureks peab olema materjali otstarbekohane valik kodusteks ülesanneteks. Peab ettevaatlikult suhtuma õpilaste poolt kulutatud ajasse ja andma ainult niisuguseid ülesandeid, mille täitmine toob tõeliselt kasu. Muuseas, ei tule anda palju ühetüübilisi ülesandeid: iga kodusesse töösse kuuluv ülesanne peab taotlema mingit kindlat eesmärki.

On väga soovitav, et kodustes töödes oleks vaheldust, mis tõstab huvi ja seega ka töö produktiivsust. Kõrvuti tunni aine õppimisega ja ülesannete lahendamisega selle aine alalt, on hea anda ülesandeid ka varemõpitu kohta, ülesandeid ümbritsevast elust, jooksvast poliitilisest ja majanduselust, soovitada õpilastel enestel koostada uusi ülesandeid õpitud aine osa kohta, anda graafikuid valmistada, lihtsamate mudelite valmistamist, mitmekesistada ülesannete õige lahendamise kontrollimise vorme. Näiteks, tuues klassi ühekihilise silindrikujulise pooli (raadio üksikosa), millele on mähitud mitte väga peenike traat, annab õpetaja ülesande: traati lahti kerimata leida ta pikkus, tehes vajalikud mõõtmised. Igaüks saab vastuse, nende õigsus kontrollitakse (järgmises tunnis) otsese mõõtmise teel (pool arutatakse lahti).

Valides materjali koduseiks ülesandeiks, peab õpetaja, nagu alati oma töös, arvestama oma õpilaste ea iseärasusi, mitte iialgi unustades, et võimed ja kalduvus abstraheerimiseks ilmuvad vaid järk-järgult ja et loogilisi elemente peab tugevdama aegamööda ning ettevaatlikult. Nooremaile — rohkem arvutusi, jooniseid, mõõtmisi; vanemaile — rohkem arutlusi. Väga sobivaks tööks igale eale on vigade otsimine sääraseis arutlustes, mis viivad ilmselt absurdse tulemuseni, kuigi nad esimesel pilgul paistavad õiged olevat (matemaatilised sofismid), millest vt. raamatus [I, 15].

Kodused ülesanded muutuvad tühiseks, kui nende täitmist ei kontrollita. Kõigepealt on tarvis kontrollida täitmise fakti ennast: koos andmetega puudujate kohta peab õpetaja iga tunni alguses saama ülevaate ka nendest õpilastest, kes ei ole koduseid ülesandeid valmistanud, ja võtma need mittevalmistajad erilise vaatluse alla. Esialgu on kasulik pühendada mõned minutid igas tunnis kiireks pilguheitmiseks koduste ülesannete vihikuisse (õpilased avavad oma vihikud, õpetaja käib pingiread läbi ja veendub, kas vihikuis on vastavad üleskirjutused olemas). Edaspidi võib säärast kontrolli mitte süstemaatiliselt, vaid taoti teostada. Koduste ülesannete täitmise fakti üldine kontrollimine asendatakse valikkontrolliga. Töö headust kontrollitakse mitmel viisil. On kasulik päris tunni alguses kutsuda tahvli juurde kaks-kolm õpilast, et nad kirjutaksid lühidalt oma lahendused üles, et saaks kontrollida nii lahenduskäiku kui ka tulemusi. On tarvis süstemaatiliselt ja hoolsasti kontrollida koduseid vihikuid; sel eesmärgil võtab õpetaja mõned vihikud kaasa, vaatab need tähelepanelikult läbi, teeb vajalikud parandused ning annab järgmises tunnis tagasi, ära märkides kogu klassi ees nende head küljed kui ka puudused, et iga koduse vihiku kontrollimisest teha järeldused, mis on kasuks kogu klassile. Õpilastesse mõjub väga hästi ja harjutab neid tõsiselt suhtuma õpetaja igasse näpunäitesse, kui õpetaja süstemaatiliselt registreerib (oma taskuraamatus) iga õpilase vead ja lüngad. Näiteks, kui on selgunud, et nii ja niisugune õpilane ei ole järjekordseks tunniks õppinud (olgugi vabandataval põhjusel), siis peab talle määrama uue tähtaja ega tohi unustada kontrollida, kuidas ta on ülesande uueks tähtajaks täitnud. Kui on avastatud, et varemõpitust mõnd asja ei teata, peab kohustama seda osa kordama ja siis tingimata küsima. Tähele pannud, et õpilane väljendab oma mõtteid ebaõigesti, teeb üleskirjutustes vigu (kas matemaatika või grammatika seisukohalt), peab õpetaja talle vea ära näitama ja mõne aja pärast kontrollima, kas see viga on kõrvaldatud jne.

Suuliste koduste ülesannete täitmist, näiteks mõne tõestamise oskust, kontrollitakse väljakutsutud õpilase küsimise teel. Oleneb õpetaja meisterlikkusest, kas säärane küsimine on huvitav ning õpetlik kogu klassile. Kõige parem on anda väljakutsutud õpilasele võimalus sel ajal, kui tema seltsimees vastab, teha tahvlil vajalikud üleskirjutused (arvutused, joonised), ja siis anda talle sõna, tehes korralduse, et kõik kuulaksid ja paneksid puudusi tähele. Kui jutus-

tus on lõpetatud, saavad soovijad järgemööda sõna märkusteks, lõpuks kõik tekkinud ja vastuseta jäänud küsimused lahendab õpetaja.

Koduste ülesannete iseseisev valmistamine ei eemalda kollektiivse töö mõistlikke vorme. Näiteks, arutades mõnd tõestust üheskoos, võivad kaks õpilast teineteist järgemööda kuulata: üks jutustab peast mälu järgi, teine jälgib teda, kontrollib ja teeb raamatu järgi parandusi, siis osad vahetatakse. Lahendanud iseseisvalt teineteisest sõltumatult mingi ühe ning sama ülesande ja saades erinevad vastused, kontrollitakse kahekesi koos lahendust ja leitakse vead. Ergutades mõistlikku vastastikust abistamist, mõnikord seda ka organiseerides (mahajäänute ja nõrgemate abistamine tugevamate poolt), peab õpetaja resoluutselt võitlema selle moonutuste (ärakirjutamine) vastu, selgeks tehes kahju, mis õpilane teeb endale, kui esitab võõra töö oma tööna, paljastades järjekindlalt sääraseid juhtumeid ning nõudes ülesande täitmist iseseisvalt uuesti.

Lõpuks märgime veel ühe mõistliku pedagoogilise nõude, mida sageli rikutakse algaja õpetaja poolt: koduseid ülesandeid võib tunnis anda igal ajal, sõltuvalt selle plaanist, ainult mitte pärast kella kõlisemist.

§ 27. Kirjalikud kontrolltööd.

Perioodiliselt korraldatavad kirjalikud kontrolltööd klassis on väga tähtis osa matemaatika õpetamise protsessist, mis näitavad nii õpetajale kui ka õpilastele eneselle, kuivõrd läbivõetud materjal on omandatud. Kontrolltööd annavad õpetajale suurepärase aluse õpilaste töö sügavaks, täiesti objektiivseks ja mitmekülgseks hindamiseks ja aitavad samal ajal nii õpilastel kui ka õpetajal teha vastavaid parandusi oma edaspidises töös. Kontrolltöid võrreldakse õigusega arstitermomeetriga, mis näitab objektiivselt inimese tervislikku seisukorda.

Et kirjalikud kontrolltööd annaksid suurima efekti, peab neid korraldama süstemaatiliselt ja mitte liiga harva. Kui matemaatikale on jäetud 6—7 tundi nädalas, tuleb normiks lugeda üks kontrolltöö iga kahe nädala kohta; nende teostamine harvemini kui üks kord kuus tuleb lugeda juba väheseks. Õppeaasta alguses, et õpilasi organiseerida kiiremini süstemaatiliselt iseseisvalt töötama, eriti kui töö toimub uuesti komplekteeritud klassiga, tuleb kontrolltöid teha veelgi sagedamini.

Kontrolltööde kestvus võib olla väga erinev, kõikudes 15—20 minutist kuni 2 tunnini, kuid reeglina tuleb kontrolltööks kulutada üks õppetund. Lühike kontrolltöö (vähem kui üks tund) on täiesti kohane, kui õpetajal on vaja kindlaks teha, kuivõrd püsivalt on omandatud üks või teine raskem võte, et teada saada, kas võib edasi minna. Kahetunnilist kontrolltööd võib soovitada lõppklassis (sealgi ainult harva) matemaatika kirjaliku eksami proovitööna, sest

eksamitöö kestab mõnikord kolm-neli tundi ja isegi rohkem (küpsuseksamil, vastuvõtul kõrgemasse kooli).

Esmajärgulise tähtsusega asi on materjali valik kirjalikuks kontrolltööks õpetaja poolt. Kõige sagedamini on sääraseks materjaliks ülesanded, seejuures enam-vähem tüübilised ülesanded, mis ei vaja väga pikaajalist otsimist, kuidas neid lahendada, kuid kasulik on anda ka teoreetilist laadi küsimusi: definitsioonide ja teoreemide sõnastusi, õpitud tõestuste esitamist. Kontrolltöö ulatuse ja raskuse määramisel peab õpetaja vältima kaht ühtmoodi kahjulikku äärmust: mitte anda liiga kerget tööd, mida kõik või peaaegu kõik lahendavad ilma mingi pingutuseta ja saavad seetõttu veendumuse, et nad teavad kõike väga hästi ning võivad edaspidi vähem töötada, kuid mitte anda ka liiga rasket, ülejõukäivat tööd, mida ainult üksikud suudavad lahendada, suuremal hulgal aga jäävad käed rüppe. Õpetaja, kes oma klassi tunneb ja hoolsalt suhtub materjali valikusse, leiab töö raskusele alati paraja mõõdu.

Et kindlustada iga õpilase täiesti iseseisev töö, antakse kontrolltöö vähemalt kahes, tingimata ühesuguse raskusega variandis. Et mitte asjatult kulutada kontrolltööle määratud kallist aega, peab kontrolltöö organisatsiooniline külg hästi läbimõeldud ja ette valmistatud olema. Kõige parem on, kui ülesanded on paljundatud (kopeerimispaberiga ümber kirjutatud) vastavalt õpilaste arvule klassis, nii et igaüks saab erilehe ülesannetega. Kui seda on raske teostada, tuleb ülesanded kirjutada tahvlile või dikteerida. Sageli tehakse nii: kui mõlema variandi esimene ülesanne on dikteeritud (esimene variant neile, kes istuvad iga pingi vasakul otsal, teine variant neile, kes istuvad paremal otsal), lastakse kõigil esimest ülesannet kohe hakata lahendama, järgmisi ülesandeid enam ei dikteerita, vaid kirjutatakse tahvlile. Kõik vajalikud juhatused antakse õpilastele tunni alguses; lubamatu on see, kui õpilaste iseseisvat pingsat tööd katkestatakse selleks, et ära kuulata mõni täiendus kontrolltööle või mõni õiendus. Samuti on lubamatu, et õpetaja kontrolltöö ajal üksikuid õpilasi ühel või teisel moel abistab, asetades nad sel viisil teistega võrreldes privilegeeritud olukorda.

Õpetajale äraantud kontrolltööde vihikud vaadatakse õpetaja poolt läbi ning parandatakse, kusjuures see tuleb teha kiiresti: huvi nende küsimuste vastu, millega õpilased kontrolltöö ajal tegelesid, ei tohi jahtuda, ja peale selle on tähtis mitte anda õpilastele halba eeskuju, vihikute tagastamist nädalate viisi kinni pidades. Reeglina antakse kontrolltöö parandatult õpilastele tagasi järgmises tunnis. Kontrollida ja parandada tuleb kogu töö tervikuna ja mitte teha nii, nagu õpetajad mõnikord teevad: leides vea, kriipsutatakse see alla, ülesande edaspidist lahenduskäiku aga üldse ei vaadata. On iseasi, kui lahenduses on ainult see üks viga, ja teine asi, kui neid edaspidi on veel terve hulk.

Ei ole hea, kui õpilased neile tagastatud vihikuis ei leia midagi peale mõne allakriipsutuse ja hindenumbri. Tööd tähelepanelikult läbi vaadates tuleb teha mingid järeldused, tuleb õpilasele näidata,

mis tal puuduste kõrvaldamiseks on soovitav teha, peab ära märkima mitte üksnes töö negatiivsed, vaid ka positiivsed küljed, tuleb märkida, kas eelmisega võrreldes töö on parem või halvem

Kui kõik vihikud on kontrollitud, märgib õpetaja endale rea küsimusi, millest vihikute kätteandmisel on tarvis rääkida terve klassiga: need on sagedamini esinevad vead, üldised raskused, üksikud tähelepanuväärivad õnnestunud võtted, õpetlikud vead. Aja kokkuhoidmiseks on parem vihikud kätte anda enne tunni algust, muidu mitme minuti kestel õpilased ei kuula, mis õpetaja räägib, vaid huvituvad sellest, mis leidub kättesaadud vihikus. Peab olema reegliks, et mitterahuldavalt kirjutatud töö kirjutatakse parandatud kujul ümber.

Kontrolltööde jaoks on parem pidada erivihikut: ta peegeldab õpilase edu üsna pikal ajavahemikul.

Tavaliselt õpilased suhtuvad kontrolltöödesse väga tõsiselt. Nende täitmine on õpilaste närvisüsteemile suureks koormaks ning õpetaja peab tarvitusele võtma abinõud selleks, et kontrolltööd kulgeksid võimalikult rahulikus ja asjalikus õhkkonnas.

Ei tohi alahinnata iga õpilase töö täieliku iseseisvuse tagamise tähtsust: võitlus ärakirjutamise vastu on eeskätt võitlus ausa, nõukogulıku suhtumise eest oma töösse. Esimesel kohal peavad seisma kõlbelise mõjutamise vahendid, kuid koos nendega kasutatakse ka organisatsioonilisi vahendeid, mis teevad petmise raskeks ja kasutuks: ülesannete individualiseerimine, mustendite esitamise nõudmine, eriline tähelepanu nendele õpilastele, keda märgati petmiskatsel (igal juhtumil säärasele tähelepanule mitte solvavat kuju andes), iga vihiku hoolas analüüs, mis peaaegu alati avastab mitteiseseisvuse, jne. Igal ärakirjutamise juhtumil peavad olema teatavad järeldused, igal juhtumil vähemalt töö uuesti kirjutamine uue variandi järgi niisuguseis tingimusis, kus töö iseseisvus on täiesti tagatud.

§ 28. Kordamine.

Et kindlustada õpilaste poolt matemaatika õppimise töö protsessis omandatud teadmiste ja vilumuste püsivus, peab õigesti organiseerima kordamist, s. o. tagasipöördumist läbivõetud materjali juurde, taotledes kaht eesmärki ja nimelt: programmi aine lõplikku viimistlemist, nii-ütelda, selle lihvimist ning ühes sellega ta kinnistamist õpilaste mälus. Kordamine ei pea hoopiski olema selle tähttähelıne teiskordne reprodutseerimine, mis varem oli tehtud: see on uus töö, kus osaliselt tuttavat ainet vaadeldakse uuest seisukohast, süstematiseeritakse, võrreldakse varemõpituga, kusjuures eriline tähelepanu pööratakse raskemaile ja teravamaile küsimustele, esikohale tõstetakse olulisim, mis kuulub meelespidamisele.

Iga uus küsimus, mida õpitakse matemaatika tunnis, rajaneb alati teataval määral varemõpitud materjalile ning uue aine seletamise peab siduma nende asjade kordamisega, mida uue aine sele-

tamisel vajatakse. Näiteks, vaatlemisele on tulemas küsimus korrapäraseist hulknurkadest. Ettevalmistuseks on kasulik kontrollida, kas õpilased mäletavad niisuguste terminite tähendust, nagu kumer murdjoon, ringjoone kõõl, puutuja, kas neil on meeles teoreemid nurkade mõõtmisest kaartega jne. Tavaliselt on pilt kirju: on õpilasi, kel need teadmised on hajunud, ning õpetaja peab, arusaadavalt, eriti viimaste eest hoolitsema. Suurte lünkade korral, mida jooksvas töös ei saa põgusa kordamisega kõrvaldada, tuleb anda eriülesanded koduseks tööks, millel on individuaalne iseloom, ning mitte unustada kontrollida, kuidas need ülesanded on täidetud. Selleks õpetaja teeb oma märkmikus vastava õpilase nime kohale märkuse: «see ja see on unustatud», tagamõttega see märkus kustutada, kui ollakse veendunud, et lünk on kõrvaldatud. 1) Teostades regulaarselt säärast vana aine kordamist jooksvas töös klassis, harjutab õpetaja oma õpilasi ka iseseisval töötamisel kodus niiviisi kordama, vajaduse korral raamatust järele vaadates. Kordamist jooksvas töös ei teostata mitte üksnes uue teoreetilise materjali õppimisel, vaid ka ülesannete lahendamisel: tutvunud ülesande tingimustega, tuleb meelde tuletada nende terminite täpne tähendus, mis esinevad ülesande tekstis. Säärane oma olemasolevate teadmiste «mobiliseerimine» on esmajärgulise tähtsusega ülesande edukal lahendamisel ning samaaegselt kordamistöö tähtsaks vormiks. On iseendast mõistetav, et õpperaamatu ja üleskirjutuste kasutamist oma vanades vihikutes tuleb igapidi õhutada: kui oled midagi unustanud, siis pead oskama õpperaamatus või oma vihikuis vastava koha üles leida.

2) Teatava aine osa lõpetamisel on kasulik teha eriline kordamistund kokkuvõtete ja ülemalnimetatud lihvimistöö teostamiseks. Niisuguse kordamise saab teha huvitavaks ja kasulikuks kogu klassile: nõrgad õpilased teevad siinjuures endale selgeks need asjad, mis töö protsessis jäid neile arusaamatuks; tugevad õpilased märkavad uusi detaile, uusi seoseid, saavad kasutatud meetodite olemusest paremini aru.

3) Kolmas kordamise liik on pikema ajavahemiku — õppeveerandi, poolaasta, aasta jooksul läbivõetud aine süstemaatiline kordamine, mis on tööplaanis vastavalt kehtivais programmides soovitatud tundide arvuga ette nähtud. Siin peab õpetaja peamiseks mureks olema õpilaste iseseisva aine kordamise organiseerimine ja tulemuste kontrollimine klassis. Ei ole hea, kui õpetaja piirdub lihtsalt mehhaanilise ülesandmisega «korrata need ja need paragrahvid õpperaamatust, lahendada need ja need ülesanded ülesannete kogust», pealegi, nagu seda tuleb sageli ette, ülemäära suurel hulgal; on tarvis hoolsalt välja valida kõik oluline ja anda esmajärjekorras hästi korrata see oluline, tegeldes teist järku detailidega ainult võimalust mööda; peab täpselt kindlaks tegema, mis on tarvis meeles pidada ja mis on tarvis osata tuletada. On iseendastmõistetav, et kodust tööd kordamise alal peab kontrollima, parandama ja täiendama klassis, kusjuures tuleb küsida nii tugevaid

õpilasi, kelle vastused seatakse klassile eeskujuks, kui ka nõrku, kelle vastused annavad võimaluse osutada mitut liiki puudustele ja nende kõrvaldamise võtetele. Kordamistööd on kergem kui mistahes teist liiki tööd teha igavaks ja mittehuvitavaks. Kuid asja õigel korraldamisel iga kordamistund peab õpilasi millegagi rikastama ning olema neile niisama veetlev kui igasugune teine tund.

Kuidas kasutada programmis süstemaatiliseks kordamiseks ettenähtud tunde? Siin on võimalikud mitmesugused variandid. Mõnel õpetajal on vana aine süstemaatilist kordamist parem teha paralleelselt uue aine õppimisega, nagu see on ette nähtud eespool, § 23 toodud näidis-kalenderplaanis. Teistel õnnestuvad paremini erilised kordamistunnid, mis korraldatakse iga aine osa lõpetamisel ja aasta lõpul. Ometi ei tohi iialgi unustada, et säärane süstemaatiline kordamine peab jooksvat kordamist täiendama, mitte aga seda asendama. On halb, kui kordamistöö peamiseks liigiks on süstemaatiline kordamine, mis teostatakse paralleelselt uue aine õppimisega, viimasega sidumata, ja kui jooksvat kordamist üldse ei praktiseerita.

Märgime lõpuks, et on olemas kordamistöö neljas liik: see on varem läbivõetu kordamine, mis teostatakse uue õppeaasta alguses, enne kui alustatakse uue programmiaine õppimist. See on eriti vajalik neil juhtumeil, kui õpetaja alustab tööd uuesti formeeritud klassiga. Kehtiv programm näeb säärast liiki tööd ette V klassis, eraldades 21 tundi «Algkooli kursuse kordamiseks ja süstematiseerimiseks», ning selle tähtsus peab olema õpetajale väga selge: lapsed tulevad V klassi mitmesuguseist koolidest, erinevailt õpetajailt, nende teadmised ja vilumused on väga ebaühtlased, nende teadmistes on palju enam-vähem olulisi lünki. Programm märgib hulga küsimusi, mis kuuluvad kordamisele, ning õpetaja asi on seda tööd õigesti organiseerida, sidudes seda ülesannete lahendamisega. Selle tulemusena peab klassis olema loodud soodus õhkkond edaspidiseks tööks matemaatika alal: huvi töö vastu, tähtsaimad aritmeetilised vilumused, õpilaste usaldus oma võimetesse, harjumus kindla režiimiga õppetööks. Niisugune ettevalmistav kordamine on soovitav teostada ka teistes klassides, kui õpetaja alustab tööd uue koosseisuga klassis, eriti VIII klassis.

Väga huvitavaks kordamise viisiks on ülevaate laadiga jutustused ja vestlused, mis sobivad ülevaate-kordamisel vanemais klassides. Need täidavad eesmärgi, kui teatava pikema ajavahemiku kestel detailselt õpitud ainet valgustatakse uuest vaatepunktist, ühendatakse ja süstematiseeritakse. Näiteks õpilastele, kes on palju tegelnud geomeetriliste konstruktsioonülesannete lahendamisega — on kasulik anda ülevaade konstruktsioonülesannete lahendamise meetoditest. Ülevaate vestlusteks võib soovitada järgmisi teemasid: funktsiooni mõiste, funktsioonide graafikud, arvu mõiste arendamine, algebra rakendamine geomeetrias, elementaarmatemaatika mõne osa ajalugu, näiteks logaritmide ajalugu jne.

§ 29. Õppeedukuse arvestus. Kirjalikud ja suulised eksamid.

Iga õpilase õppetöö tulemuste, nii igapäevane, jooksev kui ka kokkuvõtlik arvestus, mida teostatakse kindlail tähtaegadel ja mis näitab, mida õpilane on saavutanud õppeveerandi, aasta või mitme aasta kestel, siinhulgas ka ülemineku ja lõpueksamid, on õppeprotsessi vajalikuks ja väga tähtsaks koostisosaks. See on vajalik õpilasele endale, sest kasvatab temas süstemaatilise ja produktiivse iseseisva töö vilumusi; see on vajalik õpetajale, sest näitab, milliseid tulemusi annab tema poolt teostatav õppetöö; see on vajalik ka koolile, et õigesti lahendada küsimusi iga õpilase edaspidise töö kohta.

Õppeedukuse arvestuse ja sellega seotud igasuguste hinnete aluseks on õpilase töö igakülgne täpne ja regulaarne vaatlus, mida teostab õpetaja. See esmane jooksev arvestus peab toimuma tõeliselt iga päev, siin ei tohi märkamata jääda mitte ükski lohakas koduse töö valmistamine, mitte ükski raskus, millega õpilane oma iseseisvas töös põrkas kokku, mitte ükski õpilase taiplikkuse, leidlikkuse, huvi või algatuse väljendus. Matemaatika õpetajal on igas klassis 6—7 tundi nädalas ja ta võib õppeedukuse jooksva arvestuse õigel korraldamisel oma iga õpilast põhjalikult tundma õppida, kindlustades sel viisil vastavate abinõude õigeaegse tarvitusele võtmise, et õpilase töö kvaliteeti tõsta. Õppeedukuse jooksev arvestus ei tohi mingil juhtumil muutuda üksnes hinnete väljapanekuks päevikusse teatav arv korda veerandi jooksul, mis iseloomustavad üksikute ülesannete täitmist õpilase poolt: see peab olema täielikum, peab sisaldama põhjuste analüüsi ja kindlaid järeldusi õpilase edaspidise töö kohta.

Jooksvat arvestust teostatakse koduste tööde täitmise ja kontrolltööde kontrollimisega, millest oli juttu juba eespool, aga ka suulise küsitlemisega, mis toimub kas küsimusena kohalt, mis puhul nõutakse ainult lühikesi vastuseid esitatud küsimustele, või väljakutsumisena tahvli juurde, mis puhul vastamine peab olema ulatuslikum, sisaldades arvutusi ja jooniseid. Kohalt küsimist peab korraldama nii, et kõik valmistuksid vastamiseks, et kõik suhtuksid kriitiliselt oma kaaslaste vastustesse ja saaksid teha oma parandused. Ka tahvli juures vastamisel on tarvis taotleda, et kogu klassi tähelepanu oleks pööratud vastusele. On halb, kui tahvli juurde kutsutud õpilase vastust kuulab ainult õpetaja, kõik teised õpilased aga tegelevad igaüks oma asjaga. Tahvli juurde kutsutud õpilane on nagu referent, kelle ettekannet kõik kohalviibijad peavad tähelepanelikult kuulama, tehes endale vastavaid märkusi ning võttes pärast ettekande lõpetamist sõna kriitilisteks märkusteks, täiendusteks, ettepanekuiks. Siis peab lõppsõna ütlema õpilane-referent ning kõige lõpuks ütleb õpetaja oma sõna, mis kõik arusaamatused selgitab. Õigesti korraldatud küsitlemine ei ole mitte üksi kontrollimise vahendiks, vaid ka õpetamise vahendiks. Küsitlemise käigus kõrvaldatakse arusaamatused, vaadeldakse mitmesuguste varemõpitud küsimuste vahelisi seoseid, paljastatakse vead. Suuline küsimine omab suurt tähtsust ka kui õigete üleskirjutuste ja õige kõnekeele vilumuste kasvatamise vahend, kuid jällegi peab asja korraldama nii, et õpetaja iga märkus küsitletava õpilase üleskirjutuse või kõnekeele kohta ulataks iga õpilaseni ning eemaldaks sama vea kordamise võimaluse teiste poolt.

Üks küsitlemise ratsionaliseerimise viisidest on artiklis [I, 48] hästi valgustatud.

Küsitlemise teostamise oskust algaja õpetaja ei saavuta korraga. Küsimused peab esitama selgesti, mitte sõnaohtralt, kusjuures peab veenduma, et neist on hästi aru saadud (on soovitav nõuda küsimuse kordamist), peab andma aega mõtlemiseks, isegi nõudma, et liiga ei kiirutsetaks. Alguses on parem esitada kergemad küsimused, et luua oma jõududesse suurema usalduse meeleolu, ning siis järk-järgult üle minna raskemaile. Õpilase vastamist ei tule katkestada: las ta jutustab lõpuni, siis alles näidata ta vead ja esitada täiendavaid küsimusi. Sellest tähtsast reeglist tuleb loobuda ainult siis, kui vastuses tehtud viga teeb edaspidise jutustamise kasutuks või kui viga kordub. Tingimata peab olema kindlustatud rahulik küsitlemise käik.

Õpilase vastuse hinnet väljendava numbri väljapanek on väga vastutusrikas moment õpetaja töös. Hinne peab olema täielik, s. o. peab hõlmama õpilase töö kõiki külgi, mitte aga selle üht teatavat külge. Ta peab olema täielikus kooskõlas nende üldiste nõudmistega, mis õpetaja oma töös alati esitab ametlikult kindlaksmääratud hindamise normide alusel. Hindamine peab olema objektiivne, peab toimuma mitte «näo järgi». Nendest kolmest nõudest ükskõik millise rikkumist tajuvad õpilased väga valusalt ja see häirib õppetöö normaalset käiku. Peale eespool nimetatud nõudmiste rikkumise juhtumite, mida mõnikord tuleb ette, esineb õpetaja töös vahel veel üks järgmisest kahest väärast tendentsist: liialdatud kitsidus hindamisel, mis enamasti rajaneb vastuse teist järku detailidele liiga suure tähtsuse omistamisel, ja lubamatu heldus, mis demobiliseerib õpilasi ning on tuntud «liberalismi» nime all. Algaja õpetaja peab tõsiseimat tähelepanu pöörama sellele, et hindamise asjas pidada kindlat, õiget joont, hinnates põhjendatult, läbimõeldult, arvestades täielikult neid tulemusi, mis hinded peavad andma. Kahtlastel juhtumitel on parem hindamine edasi lükata, et oleks võimalus õpilase töö teisi külgi täiendavalt kontrollida. Õppeaasta alguses on eriti kahjulikud vead hinnetes nende kõrgendamise suunas: andekas õpilane, kes koduseid ülesandeid ei valmistanud nagu kord ja kohus, vaid vaatas 5 minutit enne tunni algust õppida antud materjali kiiresti üle ning saades vastuse eest selles aines hinde «5», mis võib siis juhtuda, kui küsimine oli pealiskaudne («Milleks teda pikalt küsida: ta on ju parim õpilane klassis!»), võib edaspidi hakata kogu töösse suhtuma lohakalt, sellal kui tema suhtes õpetaja poolt ilmutatud mõistlik rangus («Sa oled ju parim õpilane klassis, pead olema teistele eeskujuks!») oleks mobiliseerinud ta tõsisele, pingsale tööle. VNFSV Haridusministeeriumi Koolide Valitsuse poolt on antud üksikasjalikud juhendid õpilaste õppeedukuse hindamise normide kohta matemaatika alal V—X klassis [I, 5].

Mõned õpetajad kasutavad edukalt individuaalseid koduseid, kirjalikke kontrolltöid kõige tugevamate õpilaste jaoks, säilitades sellega rohkem aega töötamiseks nõrgematega.

Õppetöös matemaatika alal on eksamid väga tähtsaks momen-

diks, kuid nad ei tohi muutuda eesmärgiks: õpilane õpib matemaatikat selleks, et seda teada ja tarbe korral rakendada, eksamid aga on ainult kontrollimisvahendiks, kas see eesmärk on saavutatud. Ei ole hea, kui õpetaja aasta jooksul räägib liiga palju eksameist, veel halvem on, kui õpetaja töö kujuneb eriliseks «eksameile vedamiseks», kui õpetaja teadlikult eraldab mõned küsimused, võib-olla isegi säärased, mis ei ole esmajärgulise tähtsusega, nõudes nende eriti hoolsat äraõppimist selleks, et eksamil nendele peamist tähelepanu pöörata. Igal tingimusel on tarvis kindlustada rahulik olukord eksamil, rahulik eksamieelne töö. Peab taotlema, et õpilased saaksid ülepingutuse kahjulikkusest aru, et eksamile peab tulema, nagu ütlevad sportlased, «vormis», s. o. täiesti vallates kõiki oma teadmisi ja andeid, puhanult ja väljamaganult. Õpilased omandavad kogu selle eksamitele valmistamise tehnika kerge vaevaga, kui õppetöö aasta kestel toimus õigesti.

Kirjalike eksamite teemad saadetakse kooli lõplikult valmiskujul, õpetajal on tarvis ainult õpilastele need esitada. Kui aga õpetaja ise koostab eksami ülesanded, siis peab seda tegema väga suure hoolega, et vältida kaht äärmust: mitte anda liiga raskeid ülesandeid, millega ei saa hakkama ka paljud aasta jooksul korralikult töötanud õpilased, kuid ei tule anda ka liiga kergeid, mistõttu erinevus tugeva ja nõrga õpilase vahel tuhmub (kõik lahendavad väga hästi). Üldiselt peab meeles pidama, et nii kontrolltöö ajal kui ka eksameil töötavad õpilased teataval määral halvemini kui tavalise jooksva töö õhkkonnas, seetõttu tuleb neil puhkudel anda pisut madalama raskusastmega ülesanded, võrreldes tavaliselt koduseks tööks antud ülesannetega.

Suulisel eksamil kasutatakse pileteid, mille järgi eksamiaine on ära jaotatud. Vastajale antakse teatav aeg temale antud küsimuse üle järelemõtlemiseks kui ka vajalike arvutuste ja jooniste tegemiseks. Pärast vastamist, mida ei tule katkestada, esitatakse täiendavaid küsimusi, mis täpsustavad üksikuid detaile ning selgitavad omandamise teadlikkust, näidatakse ära vead; ei tule laskuda üksikasjalistesse seletustesse, sest see võib põhjustada eksami käigu mittesoovitavat venitamist. Peale piletis näidatud põhiliste küsimuste on mõnikord tarvis anda mõned täiendavad küsimused, ning õpetaja peab eksami teostamist ette valmistades säärased küsimused, nii teoreetilist laadi kui ka väikeste ülesannete kujulised, aegsasti valmis vaatama. Kõik need küsimused peavad olema niisugused, et nendele saab vastata (kui vastavad teadmised on olemas) lühidalt, ilma arvutusteta ja pikema mõtlemiseta.

Sageli juhtub, et suuline eksam muutub ühekülgseks: kontrollitakse ainult, kui hästi on meeles reeglid, definitsioonid, teoreemid. Niisugune eksam ei saa anda täielikku ülevaadet: tarvis on selgusele jõuda, kuivõrd on ainest aru saadud, kontrollida teadlikkust omandamisel, teadmiste praktikas rakendamise oskust.

Kui õpetaja eksamineerib oma õpilasi, keda ta aasta jooksul on hästi tundma õppinud, kaldub ta eksami vastuse hindamisel arvestama aasta jooksul tehtud töö iseloomu. Kuid peab meeles pidama, et eksamil tuleb hinnata ainult eksami vastust, ei tohi olla ebaõiglane, hinnates ilmselt väga head vastust madalamalt ainult selle põhjal, et vastaja aasta jooksul ei töötanud väga hästi. Niisuguseil juhtumeil on kasulik esitada mõned täiendavad küsimused ja arvestada rohkem assistendi otsust.

Seda raskust ei ole siis, kui õpetaja eksamineerib uusi õpilasi, kuid sel korral tekib muid raskusi: peab arvestama võimalikke individuaalseid iseärasusi teise õpetaja töös, peab eriti hoolsalt jälgima, kas esitatud küsimustest on õigesti aru saadud, peab igakülgselt kontrollima ettevalmistust.

Korraldades kontrolltöid ja eksameid, peab õpetaja alati meeles pidama seda suurt vastutust, mida ta kannab väljapandud hinnete õigsuse eest: neist sõltub mõnikord õpilase edaspidine saatus.

§ 30. Abinõud mahajäämuse vältimiseks. Mahajääjate abistamine.

Arst ütleb, et haigust on kergem vältida kui ravida. Sama lugu on mahajäämusega: õigeaegselt tarvituselevõetud abinõud mahajäämuse vältimiseks annavad vähema jõu ja aja kuluga suurema efekti kui tekkinud mahajäämuse parandamine, mis sageli lõpeb teiseks aastaks klassi jäämisega. Töötades klassiga peab õpetaja kohe õppeaasta alguses arvele võtma mahajääjate kandidaadid, kes oma klassi kaaslastega ei suuda sammu pidada, ning süstemaatiliselt töötama nendega, et neid ühisele tasemele tõsta. Esiteks on tarvis selgitada mahajäämise iseloom ja põhjused, mis saavutatakse individuaalse vestluse teel õpilasega (mitte kogu klassi ees), mõnikord ka tema vanematega. Teiseks, olenevalt säärase vestluse tulemustest, tehakse otsus olukorra parandamise abinõude kohta: pärast haiguse diagnoosi määratakse ravimise viis. Kolmandaks, see ravimine on tarvis teostada. Enamasti on tarvis lihtsalt korrata mõnd osa sellest, mis varem on õpitud, mida õpilane võib õpetaja näpunäidete järgi ja õpetaja kontrolli all teha iseseisvalt. Raskemail juhtumeil on vajalik süstemaatiline töö õpilasega, täpselt arvestades seda, mis just antud õpilasel on tarvis teha, et ta saaks edasi minna ega jääks oma kaaslastest maha. Niisugused õppused võivad olla väga lühikesed, kuid neid peab teostama tihti, kõige parem iga matemaatika tunni eel.

On hea, kui selliseid täiendavaid õppusi teostab õpetaja ise, kuid see ei ole alati võimalik, ning siis peab valima vastastikuse abistamise organiseerimise tee, taotledes kooli üldsuse kaastööd. Igale mahajääjale kinnistatakse täiesti edukas kaasõpilane kas samast või vanemast klassist; kõige parem, kui see toimub komsomoli või pioneeri organisatsiooni korraldamisel, kuid õpetaja peab seda tööd planeerima ja kontrollima. See töö on ühtviisi kasulik mõlemale poolele. Kõige loomulikum ja efektiivsem selle töö vorm on abistamine koduste ülesannete täitmisel, abistamine, mis väljendub nende põhjuste kõrvaldamises, mis takistavad koduste ülesannete iseseisvat täitmist. Kui õpetaja tarvitab abinõusid selleks, et säärased «repeteerivad», täiendavad õppused toimuvad regulaarselt ja õigesti (peaasi, et nad ei muudaks koduste ülesannete iseseisva täitmise mahajääja poolt valmislahenduste ärakirjutamiseks), siis annavad nad kiiresti tulemusi: mahajääja kandidaadist saab korralik õpilane; edaspidi need täiendavad õppused ei olegi enam vajalikud.

Märgime veel kord, et õigesti organiseeritud ja õpetaja poolt kontrollitav vastastikune abistamistöö on kasulik mitte üksnes mahajäämuse vältimise vahendina: selles töös arenevad ka need,

kes mahajääjaid abistavad, hakates ainet paremini valdama ja omandades vilumusi pedagoogilises töös. Mida varem see töö korraldatakse, seda kiiremad ja paremad on tulemused. Õpetaja peab väga hoolikalt kontrollima iga õpilase jooksvat tööd ning hädakella lööma niipea, kui ilmuvad süstemaatilise mahajäämise esimesed tundemärgid.

§ 31. Eriti edukate lisatöö.

Hoolitsedes mahajäämuse vältimise eest, peab õpetaja hoolitsema ka oma tugevamate õpilaste eest, peab selgitama andekamad matemaatika alal, äratama nendes huvi selle teaduse vastu, organiseerima neile süvendavat tööd õppeprogrammi mittekuuluvate matemaatiliste küsimustega. Säärase töö lihtsaimaks kujuks on individuaalsed tööd huvitavate, kõrgemat raskusjärku ülesannete lahendamise näol, täiendava kirjanduse tundmaõppimine. Alguses võib kasutada huvitava matemaatika küsimusi, mis väga suurel hulgal ning väga huvitavas vormis on andeka matemaatika populariseerija kadunud J. Perelmani poolt välja töötatud. Nendelt on loomulik üle minna matemaatilise sisuga artiklite ja raamatute uurimisele, tõstes järk-järgult ja ettevaatlikult nende raskust ja tõsidust. Meil antakse matemaatika alal suurel hulgal välja huvitavaid ja keskkooli õpilastele täiesti jõukohaseid raamatuid.

Säärased on näiteks raamatud seeriast «Populaarsed loengud matemaatika alal», mida 1950. aastast alates kirjastab «Riiklik Tehniline Kirjastus», sama kirjastuse raamatud seeriast «Matemaatika ringi raamatukogu».

Sobivat materjali leidub õpetajate jaoks väljaantavais matemaatilistes ajakirjades, kusjuures suurem osa sellest materjalist ei ole vananenud, võib edukalt kasutada ajakirjade «Математика в школе», «Математическое образование», «Вестник опытной физики и элементарной математики» varemaid aastakäike.

Aeg-ajalt ilmub matemaatilisi ülesandeid, artikleid ja märkusi ajalehes «Пионерская правда», populaartehnilistes ajakirjades «Знание — сила», «Техника молодёжи». Täiendava kirjanduse soovitamisel tugevamaile õpilastele tuleb toimida väga läbimõeldult, tuleb tingimata ise sellega varem tutvuda, sest kui õpilane saab mittejõukohase ja teda mitte huvitava raamatu, siis kaotab ta huvi matemaatika vastu. Peab meeles pidama, et miski ei mobiliseeri edaspidiseks süvendavaks tööks nii, nagu teatavate uute tulemuste saavutamine iseseisvalt, kas või ülesannete lahendamise näol, eriti selliste, kus tegemist on õpilase suhtes uute matemaatiliste faktide taasavastamisega.

Parimaks töö organiseerimise vormiks tugevamaile õpilastele on matemaatika ring, kus esitatakse lahendatud ülesannete tulemusi, referaate loetud artikleist, laiendatakse tööd uute ülesannetega.

§ 32. Matemaatika kabinet.

Matemaatika õpetamine vajab eri-inventari tunduvalt vähem kui näiteks füüsika, kuid ikkagi vajab, ning seda inventari on mugav koondada ühte omaette tuppa, mis on saanud nimetuse «matemaatika kabinet», või äärmisel juhtumil eraldada selleks otstarbeks eri kapp. Peale selle peab olema igas klassitoas, kus toimub matemaatika õpetamine, võimalikult suurte mõõtudega klassitahvel, vähemalt 1,5 m × 1,5 m, või veel parem, kaks-kolm niisugust tahvlit, sealhulgas üks tahvel (mitte väga jämedate) ruutjoontega. On hea, kui matemaatika õpetaja käsutuses on karp värvilisi kriite. Peale tahvli peab igas klassiruumis olema joonestamisvahendid tahvlil joonestamiseks: meetripikkune joonlaud sentimeetri jaotustega, suur nurklaud nurkadega 30° ja 60°, klassi sirkel, mall. On väga kasulik, kui on olemas eriline klassi arvelaud, mis algkoolides on väga levinud, või vähemalt tavaline arvelaud, kuid võimalikult suurte mõõtude ja hea väljatöötlusega.

Riistad joonestamiseks vihikusse, nagu millimeetrijoonlaud, nurklaud, pliiatsiga sirkel ja mall peavad igal õpilasel alati kaasas olema, kuid on hea, kui üks komplekt sääraseid riistu on ka kooli matemaatika kabinetis. Joonestamisriistadest peab kabinetis olema veel mõni kõrgema kvaliteediga sirklikarp eritööde jaoks.

Õppetarvete kauplustesse ilmub aeg-ajalt müügile mitmesuguseid õppevahendeid matemaatika alal; on soovitav, et sääraste vahendite kollektsioon leiduks matemaatika kabinetis. Siia kuuluvad: meetrimõõtude mudelid, sealhulgas kuupdetsimeeter, koost lahtivõetav, mis võimaldab näha selle seost kuupsentimeetriga; komplekt kartongist ja puust tasapinnaliste geomeetriliste kujundite mudeleid; komplekt õõnsaid ja umbseid geomeetriliste kehade mudeleid puust, metallist, klaasist; tavalised 25 cm pikkused logaritmilised arvutuslükatid ja demonstratsiooni lükat pikkusega 1 m või 2 m, riistad trigonomeetriliste joonte näitlikuks esitamiseks, maamõõduriistad (mõõdukett, lihtsaim nurgamõõtja, ekker j. m.), mitmesugused seinatabelid ja plakatid. Matemaatika õpetaja peab taotlema, et kool muretseks sääraseid õppevahendid, peab neid hoolikalt säilitama ja õppetöös maksimaalselt kasutama.

Palju kasulikke näitlikke matemaatilisi õppevahendeid võib ise valmistada. Algatusvõimega õpetaja leiab siin alati elavat vastukõla õpilaste poolt, kes heameelega tegelevad papi-, joonestamis-, puusepa- ja lukksepatöödega ning oma ettevõtlikkusega tõmbavad kaasa ka oma perekonnaliikmeid.

Teistest matemaatika kabineti esemetest märgime järgmisi: 1) matemaatilise kirjanduse valik tööks väljaspool kohustuslikku programmi (raamatud, ajakirjad, väljalõiked ajalehtedest); kirjandust säilitatakse tavaliselt üldises kooli raamatukogus ning laenutatakse üldistel alustel, kuid hoolitsus selle täiendamise eest ja õpilastele soovitamine lasub matemaatika õpetajal; 2) materjalide valik, mis valgustavad matemaatikateadlaste elu ja tegevust (portreed, biograafiad, tööde populaarsed väljaanded); 3) mitmesuguste materjalide kogumine ja kasutamine, mis iseloomustavad tööd matemaatika õpetamise alal koolis (kontrolltööde näidised, andmed matemaatika ringide tööst, andmed võistlusest õppeedukuse tõstmise eest, eriti vastastikuse abistamise arendamisest, jne.); 4) sääraste andmete kogumine antud kooli

lõpetanute kohta, mis pakuvad huvi matemaatika õpetamise seisukohalt: raskused matemaatika alal, mis lõpetajail tekkisid kõrgemasse kooli astumisel ja selles töötamisel, mitmesugused matemaatilised ülesanded, millega neil tuleb tegemist teha, andmed eriti silmapaistvaist lõpetajaist jne.

Ajakirjades ilmub järjest artikleid, milles kõneldakse uutest näitlikest õppevahenditest matemaatika alal, õppe-, teadusliku ja metoodilise sisuga uutest raamatutest, teostatavaist matemaatilistest olümpiaadidest ja muist sääraseist matemaatika õpetajale huvitavaist küsimustest. Kooli matemaatika kabinet peab nii õpetajaile kui ka õpilastele olema abiks kõigi selliste uudistega tutvustamisel.

V peatükk.

FORMALISM MATEMAATIKA KOOLIKURSUSES JA VÕITLUS SELLEGA. MUUD PUUDUSED MATEMAATIKA ÕPETAMISEL.

§ 33. Mis on formalism õpilaste teadmistes matemaatika alal?

Formalismi õpilaste teadmistes, seda koolitööst ikka veel väjarookimata pahet, võib iseloomustada kui teadmiste teatavate väliste tunnuste olemasolu tõeliste teadmiste puudumisel. Formaalsete teadmiste põhilised iseärasused on: 1) vormi irdumine sisust; 2) teooria irdumine praktikast; 3) mälu domineerimine arusaamise üle; 4) trafareedi, šablooni valitsemine. Formaalsed teadmised on surnud, passiivsed, kasutud teadmised.

Käesoleva peatüki ülesandeks on õpilaste teadmistes formalismi nähtuste esinemise konkreetsete vormide kui ka õpetaja töös esinevate puuduste selgitamine matemaatika alal, mille puhul need nähtused saavad võimalikuks. Tundes neid konkreetseid vorme, on võimalik leida ka abinõud nende vältimiseks ja kõrvaldamiseks.

Matemaatilise teaduse mingi osa valdamine tähendab: a) tutvust selle teaduse mõistetega ja vastava terminoloogia omandamist; b) selles teaduse osas kindlakstehtud faktide teadmiste omandamist; c) üksikute faktide vahel olemasolevate seoste teadmiste omandamist, s. o. selle teadusliku süsteemi tundmist, kuhu need faktid kuuluvad; d) ning lõpuks kõigi nende teadmiste praktikas kasutamise vilumuse omandamist. Vaatleme järgemööda selle küsimuse kõiki nelja külge.

Matemaatilise terminoloogia formaalne teadmine on üks kõige levinumaid formalismi nähtusi matemaatika õppimise alal: õpilane räägib sõnu, mille täpsest tähendusest ta pole aru saanud. Näiteks, kui sageli õpilane, kes väga eneseteadlikult tarvitab terminit «punktide geomeetriline koht», väidab, et punktide geomeetriline koht on nurga poolitaja, ning õpilane, kes arvab, et ta on aru saanud terminitest «ratsionaalne arv», «irratsionaalne arv», ütleb, et irratsionaalne arv on juur. Kui võtta terminid, nagu «vertikaaljooned», «horisontaaljooned», siis õige arusaamine nendest, sisu

poolest küll geograafilistest, kuid matemaatikas sageli esinevaist termineist, esineb ainult erandjuhtumina.

On absoluutselt vajalik taotleda seda, et iga õpilane teaks tema poolt tarvitatava termini täpset tähendust, et ta tunneks ebamugavust, rahutust, rääkides sõnu, millest ta ei saa aru või ei saa täielikult aru. Vastavat definitsiooni peab teadma, kuid sellest üksi veel ei piisa: peab omama selged, konkreetsed kujutlused. Õpilane, kes teab definitsiooni, peab oskama selle kohta näiteid tuua, s. o. peab oskama nimetada objekte, mis definitsiooni nõudeid rahuldavad, ja ka objekte, mis on sarnased, kuid mõnel teataval põhjusel ei rahulda seda definitsiooni. Iga uue termini tarvituselevõtmisel peab peale lühikese ja selge defineerimise tooma hulga võimalikult näitlikke, eredaid ja kergesti meeldejäävaid näiteid ning peab taotlema seda, et õpilased ise oskaksid sääraseid näiteid tuua. Väga kasulik on vaadelda ühe ja sama definitsiooni mitut varianti.

Õpetada õpilasi kasutama oskussõnu täpselt ning teadlikult, on kahtlemata üks tähtsaimaid kasvatuslikke ülesandeid, mida koolimatemaatika peab lahendama, kuid mida ta formaalse õpetamise tõttu mõnikord ei lahenda.

Matemaatilise terminoloogia õppimine toimub paralleelselt matemaatiliste faktide, s. o. aksioomides ja teoreemides väljendatud tõdede õppimisega. Matemaatilise lause (teoreemi või aksioomi) tekst ise omandatakse ja reprodutseeritakse sageli ainult mälu järgi, ilma arusaamiseta: õpilane ei taipa, mis on teoreemi eelduseks, mis on väiteks, ei saa aru, kas pöördteoreem on õige, s. o. kas see eeldus on antud väitele ainult piisavaks tingimuseks või on samaaegselt ka tarvilikuks tingimuseks, s. o. sääraseks tingimuseks, ilma milleta väide kaotab jõu; õpilane ei oska tuua näiteid konkreetseist juhtumeist, millal teoreem kehtib, ja ka sääraseid (vastunäiteid), kus teoreemi eelduses nimetatud mõne tingimuse puudumise tõttu teoreem lakkab kehtimast. Kui täpselt ja julgesti õpilane õpikus trükitud teoreemi teksti ka reprodutseerib, jääb selliste puuduste tõttu selle teoreemi teadmine temal ometi ainult formaalseks. Suure hulga näidete ja vastunäidete vaatlemine, teoreemi tekstis nimetatud või ka ainult mõeldud üksikute tingimuste selgitamine, teoreemi sõnastuse mitmesuguste teisendite otsimine, mis on samaväärsed õpikus toodud sõnastusega, selgitamine, kas pöördteoreem ja vastandteoreem on õiged, — need on mõned teedest, mis viivad matemaatiliste tõdede tõelisele, ja mitte ainult formaalsele omandamisele. Suurepäraseks vahendiks formalismist vabanemiseks uute matemaatiliste tõdede omandamisel on niisuguse olukorra loomine, milles õpilased ise otstarbekohaselt valitud ülesannete lahendamise protsessis avastavad need tõed. Näiteks, enne seda geomeetria tundi, milles kavatsetakse vaadelda kolmnurga ortotsentrit, võib õpilastele anda kodus joonestada mitu eritüüpi kolmnurka (teravnurkseid, nürinurkseid, täisnurkseid), tõmmata igaühes kolm kõrgust, ja vaadata, kuidas

need (või nende pikendused) lõikuvad. Tulles nüüd järgmisse tundi, leiab õpetaja eest õpilaste väga elava vestluse sellest, et kõigil on üks ning sama tulemus: kõik kolm kõrgust läbivad üht ja sama või peaaegu üht ja sama punkti.

Täpsemalt: kolm sirget, millel asetsevad kolmnurga kõrgused, läbivad üht ja sama punkti. Selle teoreemi tõeline, mitte aga formaalne omandamine on nüüd palju kergem, ja ka teoreemi tõestamist ennast tajutakse nüüd kui nende kahtluste lõplikku lahendamist, mis vaatlusel tekkisid: kas kolm kõrgust tõesti päris täpselt läbivad üht ja sama punkti? Kas alati on nii? Analoogilise töö võib sooritada iga teoreemiga; vahe seisab ainult näpunäidete arvus, mis ülesande andmisel eelnevalt tehakse. Uued matemaatilised tõed ei ilmu niisuguses olukorras ootamatult ega laest kukkunult: õpilased ise avastavad nad enam-vähem lõplikus kujus.

c) Teoreemi tõestamise oskus on mõnikord ka puhtalt formaalne, mis põhineb ainult mälu tööl, ning on seepärast kasutu mõtlemise arendamisele. Niisuguse oskuse korral on iseloomustav õpikus toodud kõigi joonise detailide ja arutluse täht-täheline reprodutseerimine. Niipea kui muudetakse tähistust või kujundi asendit joonisel, mis ikkagi vastab teoreemi tingimustele, satub õpilane kohe segadusse: ta on omandanud ainult välise külje, arutluse välise vormi, mitte aga selle sisu. On tarvis tingimata nõuda, et õpilane oskaks tõestuse sooritada teissuguse asendi korral kui see oli õpikus. Väga kasulik on kogu arutluse jaotamine üksikuiks punktideks, üksikuiks üksteisele järgnevaiks etappideks, iga etapi põhjendamisega, kui ka põhilise idee, ta «võtme» selgitamisega. Niisuguse «võtme» kindlakstegemine ja meelespidamine kergendab tunduvalt teadlikku ja püsivat omandamist. Näiteks, kui õpilane peab meeles, et teoreemi tõestamine kolmnurga ortotsentrist põhineb niisuguse abikolmnurga ehitamisel, mille küljed läbivad antud kolmnurga tippe ning on nende tippude vastaskülgedega paralleelsed, siis on kerge reprodutseerida kogu tõestus, sel tingimusel muidugi, et õpilane üldse tõestusi taipab ega õpi neid ainult formaalselt.

Formalism matemaatiliste faktide õppimisel ilmneb mõnikord selles, et õpilane, kes mõnd üldist lauset teab hästi, satub raskustesse selle rakendamisega konkreetsel erijuhtumil, millel on mõned iseärasused. Tüüpiline näide: õpilane jutustas arukalt lõikude mõõtmisest, tuues ühismõõdu definitsiooni ja seletades Eukleidese algoritmi, jäi aga ummikusse, kui temalt nõuti nimetada kahe võrdse lõigu ühismõõt. See õpilane oli täielikult skeemi võimuses, mis annab küsimuse lahenduse mittevõrdsete lõikude jaoks; see skeem ei ole võrdsete lõikude korral vajalik, kuid ta varjas küsimuse tuuma, mis sel erijuhtumil lahendub hoopis lihtsalt.

Teaduse ükski osa ei kujuta endast üksikuid üksteisega sidumata tõdesid, vaid alati nende teatavat süsteemi. Matemaatikas see side iga tema osa sisus ilmneb eriti selgesti, ega ole kaugeltki täisväärtuslik niisugune teadmine, mille puhul õpilane valdab

enam-vähem selgesti aine osasse kuuluvaid üksikuid tõdesid, kuid ei ole omandanud seda süsteemi, mis nad moodustavad, ei valda seoseid, mis nende vahel olemas. See on ka üks formalismi nähtusi matemaatika õppimisel. Tutvudes uue teoreemiga, peab õpilane endale selgesti aru andma sellest, missuguseil varemõpitud aksioomidel ja teoreemidel põhineb selle tõestus. Selle süsteemi uurimise tööd, mille moodustab programmi antud aine osa, on eriti tähtis sooritada selle osa kordamisel, kuid ka uue ainega esimesel tutvumisel peab seda andma teatavas süsteemis ja taotlema selle arusaamist ja omandamist õpilaste poolt.

a) Programmi mingi osa õiges õpetamiskäigus paralleelselt teoreetilise külje õppimisega toimub ka selle praktilise rakendamise vilumuste omandamine mitmesuguste harjutuste ja ülesannete lahendamise näol. Siin esineb formalism kahel viisil: mõnikord praktika esineb, kuid lahus teooriast. Kui sageli kuuleme õpetajailt, et aja nappus ei võimaldanud õpetada õpilasi ühest või teisest geomeetria osast ülesandeid lahendama, eriti konstruktsioonülesandeid. On ka sääraseid juhtumeid, et õpetaja näitab mõnede ülesannete valmislahendusi ning õpilased «õpivad ära», s. o. peavad need lahendused lihtsalt meeles. Need ülesanded saavad sel viisil lihtsalt tükikeseks teooriast. Töötab ainult mälu, mingit vilumust uute ülesannete iseseisvaks lahendamiseks õpilased ei saa. Aritmeetika ja eriti algebra õpetamisel esineb sageli praktika irdumist teooriast: ilma teoreetilise külje omandamise kindlustamiseta tõttab õpetaja ülesannete lahendamisele, annab valmisreeglid, mis sageli jäävad õpilastele arusaamatuks, ning sel kombel saavutatakse mõnikord teatavat kindlat tüüpi ülesannete lahendamise oskus. Kuid niisugusel korral õpilased on täiesti abitud, kui satuvad teist tüüpi küsimustele, olgugi kergemaile esimestest, ning loovad endale täiesti moonutatud kujutluse ainest. Üks koolitüdruk ütles, et ta oskab iga ruutvõrrandit lahendada ja saab kõigest aru, ainult ühest mitte: «miks ruutvõrrand alati võrdub nulliga?» Siin esines formalism vilumuse omandamisel lihtsalt küsimusseade mittemõistmises, sest lahendamine toimus kindlaksmääratud šablooni järgi, ja peab tunnistama, et see nähtus on küllaltki levinud. Kui küsida, kuidas saab teada, kas antud võrrandite süsteem on õigesti lahendatud, siis leidub tavaliselt õpilasi, kes ei tunne muud kontrollimise viisi, kui vaadata ülesannetekogu lõpus toodud valmisvastuseid; aga nende hulgas, kes teavad, et leitud lahendid tarvis asetada antud võrranditesse, leidub niisuguseid, kes väidavad, et asendamine on tarvis teha ainult süsteemi ühes võrrandis: kui see võrrand on rahuldatud, siis see tähendab, et süsteem on lahendatud õigesti.

Teatavate kindlate, šablooniliste ja tavaliselt väikese arvulise ülesannete tüüpidega piirdumine on ka üks formalismi nähtus matemaatiliste vilumuste omandamisel. Sageli võib kuulda eksamil: «Seda ülesannet ma ei oska lahendada, ma ei tea isegi, kuidas alustada, sest niisuguseid ülesandeid meie koolis ei lahendanud.»

Matemaatika õpetaja ei tohi unustada, et vilumuste omandamisel matemaatiliste ülesannete lahendamises on ka kasvatuslik eesmärk, mis ulatub kaugele väljapoole matemaatika raame: see arendab taibukust, leidlikkust, oskust taandada keeruline probleem lihtsamate probleemide ahelaks, oskust mobiliseerida kogu oma teadmiste tagavara ja valida sellest need, mis siin on kasulikud, oskust kriitiliselt kontrollida ja põhjendada oma oletusi. Väikese hulga šabloonilist tüüpi ülesannetega piirdumine muudab matemaatika õpetamise klassist klassi vedamiseks, mis ei arenda, vaid pigemini nürib andeid.

Formalismi küsimuse vaatlemise matemaatiliste vilumuste omandamisel lõpetame märkusega välise vormi ülehindamise kohta, milles tuleb süüdistada mõnd õpetajat, kes nõuab, et lahenduse üleskirjutus oleks korraga täiesti korrektne ning varustatud seletustega. Lahenduse üleskirjutus on õpilastel väga sageli räpane ning süsteemitu ja selle puuduse vastu peab pidevalt ning otsustavalt võitlema, kuid ei saa nõuda, et lahendus korraga saaks kindla, täiesti korrastatud kuju, ja veel enam, et ta korraga oleks varustatud kirjalike seletustega, — niisugune nõudmine aheldab alati initsiatiivi, vähendab sobiva oletuse šansse. Peab eristama ülesande lahenduse algstaadiumi, lahendustee otsimist ja esimesi katseid sellel edasi liikuda, ja lõppstaadiumi, leitud lahenduse vastavat vormistamist, kus on kohane nõuda ka täielikku korda üleskirjutustes ja kirjalikke seletusi. Muidugi on tarvis võidelda ka korraliku mustendi eest, kuid ka siin on tarvis pidada parajat mõõtu.

§ 34. Formalismi nähtused matemaatika õpetaja töös.

Formalismi nähtustelt õpilaste matemaatilistes teadmistes ja vilumustes siirdume neile nähtustele õpetaja enda töös. Need nähtused võib liigitada kolme rühma.

1) Esiteks, teoreetiliselt on võimalik, et õpetaja enda matemaatilistes teadmistes ja vilumustes esinevad samasugused formalismi nähtused, mis meenutavad eespool vaadeldud formalismi nähtusi õpilaste matemaatilistes teadmistes ja vilumustes. Siin on ainsaks võitlusvahendiks õpetaja töö oma kvalifikatsiooni tõstmiseks.

2) Teiseks, olles ise isiklikult küll vaba seda laadi puudustest, suhtub õpetaja ometi sallivalt nendesse nähtustesse õpilaste juures, ei tõsta hädakisa iga niisuguse nähtuse esinemise korral, ei mobiliseeri õpilasi neid kõrvaldama ja vältima. Niisugune õpetaja on ka süüdi formalismis ning isegi suuremal määral kui vähe kvalifitseeritud õpetaja. Too teeb kurja, seda ise mitte teades, see aga näeb kurja, kuid ei võitle selle vastu ja seega soodustab seda.

3) Kolmandaks, õpetaja poolt kasutatavais õpetamise meetodeis võivad olla niisugused momendid, mis viivad otseselt esitatud materjali formaalsele omandamisele. Vaatleme mõnd iseloomustavat näidet.

Uue aine seletamine võib olla täiesti formaalne selle tõttu, et see ei vasta õpilaste ettevalmistuse ja arenemise tasemele, nad ei saa sellest seletusest aru. «Mina olen kohustatud seletama seda ja seda, ning seda ma seletan, aga kas õpilased saavad minust aru või mitte, see on juba nende asi, mitte aga minu asi,» — niiviisi, kui just mitte ei ütle, siis vähemalt mõtleb säärane õpetaja. Mõnikord ta rahustab ennast ja teisi, väites, et praktilised vilumused, mis tulenevad sellest õpilastele mittearusaadavast seletamisest, on nad siiski omandanud (formaalselt, ilma arusaamiseta). Näiteks nii on lugu, vähesed erandid välja arvatud, ruutjuure võtmisega mitmekohalistest arvudest. Õpetaja seletab tuntud reegli tekkimist, näitab selle rakendamist näidete varal ja rahuldub sellega, et õpilased omandavad vastava vilumuse. Õpikus toodud tavalist seletust õpilased ei omanda, õpetaja teab seda, aga ei taha seda puudutada, ei taha seda küsida õpilastelt ei tunnis, veel vähem eksamil, ei viitsi otsida arusaadavamat seletust (sellised on olemas, näiteks geomeetrilise tõlgenduse kaudu). Selle reegli formaalne õppimine väljendub jämedais vigades, mis õpilased teevad tema rakendamisel (näiteks, jaotavad juuritava arvu numbrid rühmadeks mitte komast alates, vaid alates esimesest või viimasest numbrist).

Ka õpilaste küsimine võib olla formaalne. Nii on lugu siis, kui õpetaja rahuldub õpilase poolt südikalt väljendatud fraasidega, mis peaaegu täpselt reprodutseerivad õpikut, kontrollimata jättes, kas nende fraaside taga on ka selget arusaamist sisust, ei esita täiendavaid küsimusi, mis vastust täpsustaksid, ei nõua õpilase enda leitud, mitte aga raamatust võetud näidete toomist.

Formaalne võib olla ka (ja kahjuks sagedasti ongi) õpilaste kirjalike tööde, nii klassi- kui ka koduste tööde kontrollimine. Töö on just nagu kontrollitud, on tehtud märkusi, on välja pandud hinne, õpetaja allkiri, kuid hulk vigu on jäetud märkimata ja parandamata. Ei maksa rääkidagi, kui suurt kahju toob säärane lohakus õpetaja töös: õpilaste poolt tehtud vigade parandamine on, võib-olla, õpetaja tähtsaim funktsioon. Kontrollimine peab olema tingimata täisväärtuslik. Parem kontrollida harvemini ja mitte kõike, mis õpilaste poolt on tehtud, vaid ajapuudumisel valiku järgi, kuid nii, nagu kord ja kohus.

Kui tähelepanelikult vaadelda hinnete väljapaneku praktikat, siis võib sageli ka siin näha formaalset suhtumist. Veerandi alguses õpilane vastas tunniks ülesantud materjali osas väga hästi, sai hinde «5», rohkem pole teda küsitud. Ainsat kontrolltööd veerandi kestel ta ei kirjutanud, ja õpetaja paneb talle veerandi eest «4». Kas see hinne on põhjendatud? Kas see mobiliseerib õpilast edaspidi tõsisele iseseisvale tööle?

Liberalism hindamisel, s. o. hinnete kõrgendamine, kujutab ka endast erilist ning väga halba formalismi nähtust: vormiliselt hea seisukord, sisuliselt aga õpetaja töö nurjumine. Harvemini esineb, kuid ikkagi esineb, õpetaja vastupidine viga: formaalne

rangus asja sisusse puuduliku tähelepanuga suhtumise korral. Niisugune on olukord siis, kui üksikute, töös tehtud juhuslike vigade pärast tunnustatakse töö mitterahuldavaks, hoolimata üldisest matemaatilise kultuuri kõrgest tasemest, millest annab tunnistust töö tervikuna. Sääraste vigade eest tuleb hinnet alandada, nende vastu on tarvis otsustavalt võidelda, kuid siingi, nagu alati, tuleb pidada mõistlikku mõõtu.

§ 35. Vead õppetöö planeerimisel matemaatika alal.

Algaja õpetaja teeb sageli vigu oma töö planeerimisel, mõnikord oma õpilaste jõudu ja võimalusi üle hinnates, neid üle koormates, siirdudes uuele küsimusele, kui enamus klassis pole veel kaugeltki eelmist täiesti omandanud, mõnikord aga vastupidi: neid alla hinnates, peatades asjata pikalt kergemail küsimustel, mistõttu õpilastel kaob huvi, ning edaspidi pole võimalust raskemaile küsimustele rohkem tähelepanu pöörata.

Töö õigel planeerimisel on tingimata vaja täpselt arvestada antud klassi õpilaste teadmiste ja oskuste olukorda. Õigesti toimib see õpetaja, kes oma tööd uue klassiga alustab sellest, et selgusele jõuda, mis tema õpilased teavad ja mis nad oskavad teha, huvitudes eriti sellest aine osast, mis edukaks tööks on vajalik kõige lähemal ajal. Kui töö tuleb planeerida enne isiklikku tutvumist klassiga, siis tuleb andmeid koguda kõigilt nendelt, kel selle klassiga on tegemist olnud (selle klassi eelmine matemaatika õpetaja, klassijuhataja, õppeala juhataja, assistent matemaatika eksamil), pidades mitte üleliigseks isegi mõne selle klassi õpilase väljakutsumist, et temaga vestelda. Kui tööplaani projekt veerandaastaks on koostatud, siis algaja õpetaja peab oma kogenenumate kolleegidega nõu pidama, vastavad parandused tegema, ja siis alles esitama selle kinnitamiseks.

Kinnitatud plaanisse tuleb suhtuda lugupidamisega, ilma hädavajaduseta seda mitte muutes, taotledes kogu jõuga selle täitmist ettenähtud tähtaegadeks. Tõelise vajaduse korral teha tarvilikud muudatused, saades selleks vastava sanktsiooni.

Õppetöö plaane võib õigusega võrrelda sõjaliste plaanidega: lahinguks ette valmistudes väeülem töötab välja täpse plaani, kuid lahingu käigus teeb selles parandusi, mida põhjustavad mitmesugused uued olukorrad.

Õpetaja töö planeerimisse mõnevõrra laiemas mõttes kuulub ka küsimuse otsustamine sellest, missuguste klassidega hakkab ta töötama uuel õppeaastal. Asja kasuks on väga tähtis, et üks ja sama matemaatika õpetaja töötaks ühe ja sama koosseisuga klassis mitu aastat järgemööda, näiteks V kuni VII klassini, VIII kuni X klassini, või veel parem: V kuni X klassini. Hea õpetaja taotleb niisugust pidevust töös, soovides kanda täit vastutust selle töö tulemuste eest, tagades sel viisil igal järgmisel aastal nende puuduste kõrvaldamise, mis eelmisel aastal tulid ilmsiks, õppides oma õpilasi kõigiti tundma ning leides võtteid igaühe töö parandami-

seks. Nõrk õpetaja aga eelistab klassi, milles ta aasta on töötanud, teisele üle anda, et see parandaks kõik selles klassis tekkinud defektid, ise püüab võtta uue klassi, millega tal kordub sama lugu. Säärase vastutustundetusega peab võitlema nii kooli administratsioon, ametiühingu organisatsioon kui ka iga õpetaja, kes tahab oma töös saavutada parimaid tulemusi. Mõnikord kooli juhtkond ise sunnib peale õpetaja vahetamise: see ja see õpetab matemaatikat halvasti, seepärast las vähemalt X klassis õpilased saavad parema õpetaja ja kas või osaliseltki parandavad oma puudujäägid. Niisugune joon on põhjani ekslik: nõrka õpetajat peab aitama õppida paremini töötama, tuleb panna ta töötama enda kallal, mitte aga temalt ära võtta vastutus tema töötulemuste eest; kui ta aga ei ole suuteline paremini töötama, tuleb tõsta küsimus tema suunamisest teisele tööle.

§ 36. Õpilaste initsiatiivi mahasurumine ja mõned muud matemaatika õpetaja vead.

Toome väikese pildi tegelikkusest.

Algaja naisõpetaja annab aritmeetika tundi V klassis, teemaks murdude liitmine. Konspekt on korralikult koostatud ning vastavalt sellele antakse ülesanne peast lahendamiseks: «Esmalt kulutati ära $^2/_5$ rubla, siis veel $^3/_{10}$ rubla. Kui palju kulutati ära üldse?» Varsti tõuseb hulk käsi. Üks tüdrukuist saab loa vastata; ta algab rõõmsa enesekindlusega: «Kaks viiendikku rubla on nelikümmend kopikat, ja kolm kümnendikku ...» Kuid siin õpetaja katkestab ta: «Ei, nii ei ole tarvis arvutada, me arvutame ainult rublade murdosades. Istu, las vastab teine.» Esimene tütarlaps istub argliku näoga oma pingile. Ta ei saa aru, mille poolest tema vastus oli halb: ta on kindel selle õigsuses. Ja tõepoolest, õpilane hakkas ülesannet lahendama kõige loomulikumal viisil, ja õpetaja oleks pidanud lubama tal vastata lõpuni, ja siis alles, märkides lahenduse õigsust, seadma küsimuse teissuguse lahendamisviisi võimalusest, mis ei nõua rublade peenendamist kopikaiks. Parem oleks olnud anda ülesande niisugune variant: «Esmalt käidi ära $^2/_5$ teekonnast, siis veel $^3/_{10}$ teekonnast. Missugune osa teekonnast oli üldse ära käidud?»

Õpilaste poolt esitatud õige lahenduse väljapraakimine on lubamatu. Seda peab alati tervitama, ära märkima ta head küljed, selgitama ta puudused võrreldes sama ülesande teiste võimalike lahendustega. Isegi veel enam: peab kõige tähelepanelikumalt suhtuma ka vigastesse lahendustesse, ergutades õpilasi igati oma algatusele, sealjuures selgesti ära näidates, mille poolest see lahendus on halb. Ühe ülesande õige lahendus, millele klass jõudis pärast ühe või kahe väära lahenduse läbiarutamist ja tagasilükkamist, mis õpilaste enda poolt olid esitatud, toob palju rohkem kasu, kui õpetaja poolt antud mitme ülesande lahendusega tutvumine: esimesel juhtumil harjutab õpetaja õpilasi lahendust iseseisvalt otsima, teisel juhtumil suurendab ainult nende teadmiste hulka.

Algajail õpetajail, kes kohusetundlikult valmistavad tunde, on püüd juhtida tunni käik iga hinna eest täpselt etteplaanitsetud teed mööda, ning nad kalduvad ebasõbralikult suhtuma kõigesse, mis neid viib sellest teest kõrvale. See on muidugi oluline puudus nende töös. Peab oskama tunni käigus õigeaegselt teha vajalikud parandused oma plaanis, vältides õpilaste initsiatiivi kõige vähematki mahasurumist, mitte mingil juhtumil lubades niisuguse olukorra tekkimist, et õpilased hakkavad mõtlema mitte sellest, missugune vastus on õige, vaid sellest, missugust vastust ootab neilt õpetaja, kuigi see nende silmis ei ole õige vastus või on vähem õige.

Õpetaja vead, mis vähemal või suuremal määral vähendavad tema töö produktiivsust, on lõpmatu mitmekesised. Märgime veel mõned säärased eriti sagedasti esinevad vead.

Õpetaja peab tähele panema ilma erandita kõiki õpilasi klassis, kuid peaaegu kunagi ei õnnestu saavutada, et kõik töötaksid ühtlaselt: igas klassis on tugevamaid õpilasi, kes uue materjali omandavad kiiresti ning hakkavad igavust tundma, sellal kui nende nõrgemad klassikaaslased seda materjali veel ei ole suutnud selgeks saada. Säärases iga klassi ebaühtlases koosseisus peitub õpetaja töö kõige suurem raskus, mis sageli viib ühele kahest tema veast: mõnikord õpetaja orienteerub ekslikult, arvestades oma klassi paremikku, mitte tähele pannes, et paljud hakkavad maha jääma, kuni olukord muutub ilmselt katastroofiliseks, kuni, näiteks, järjekordse kontrolltöö puhul ollakse sunnitud panema palju mitterahuldavaid hindeid; mõnikord jälle õpetaja rajab oma töö, silmas pidades kõige nõrgemaid; taotledes nende töös teatavat edu, unustab ta enamiku keskmisi ja tugevaid õpilasi, kes seetõttu hakkavad halvemini töötama, kaotavad huvi ning muutuvad ise mahajääjate kandidaatideks. Normaalne olukord on niisugune, et õpetaja arvestab klassi keskmiste õpilaste enamikku, kuid ei lase silmist ei nõrgemaid õpilasi, osutades neile õigeaegselt vajalikku abi, ega tugevamaid, kellele ta annab parajat mõõtu täiendavaid individuaalseid ülesandeid, organiseerib neid nõrgemate õpilaste abistamiseks, tõmbab kõige tugevamad ringi töösse.

Matemaatika õpetamise õigel korraldamisel ei pea õpilased raskeks ei matemaatika tunde ega tundideks ettevalmistamist: nad on huvitatud sellest tööst; nad tunnevad rahuldust, isegi heameelt, toime tulles jõukohaste ülesannetega, mille suurest tähtsusest nad aru saavad. Kõik jutud sellest, et matemaatika oma loomult on «kuiv aine», niivõrd vähe huvitav, et seda on võimalik õppida ainult sundimise tõttu, on eranditult nende vigade vili, mis õpetaja teeb kas teadmatusest või siis hoolimatusest. Hea õpetaja annab alati tundi nõnda, et kogu klass on tööst huvitatud, kõik mõtlevad, kõik võtavad arutlusest aktiivselt osa. Seda ei ole alati ühtviisi kerge saavutada. Mõnikord ei piisa üksnes asja õigest metoodilisest korraldamisest, vaid on vaja erilisi abinõusid huvi äratamiseks matemaatika vastu, mis häirete tõttu õppetöös

eelmistel aastatel on kadunud. Suurepäraseks, alati mõjuvaks vahendiks säärase huvi äratamisel on õpilastele arusaadavate eredate näidete demonstreerimine matemaatika praktilisest rakendamisest. Vajaliku murrangu võib luua oskuslik ülesannete lahendamine suuruste kaudse mõõtmise kohta, näiteks, ligipääsmatute kauguste mõõtmise kohta. Tutvustades mis tahes klassi õpilasi neudele arusaadavate matemaatika rakendustega, mis näitavad matemaatilise meetodi võimsust, loob õpetaja soodsa pinna visaks tööks selle õppimisel. Muidugi mõista, ei ole võimalik ega vajalik teha kõik õpitav veetlevaks: õpilased teevad hea meelega ka igavat tööd, kui see on neile arusaadav, jõukohane ja kui eesmärk on selge, mis selle tulemusena saavutatakse.

Üheks väga levinuks matemaatika õpetaja veaks on mitte küllaldane tähelepanu osutamine sellele, kuidas õpilased kasutavad oma õpperaamatuid; aritmeetikas ja algebras kogu töö taandub mõnikord ülesannete lahendamisele ilma baasi rajamiseta hästi õpitud teooria näol; geomeetrias õpitakse ära õpetaja poolt antud definitsioonide ja teoreemide sõnastused ning vihikus üleskirjutatud tõestused. Õpetaja juhatab kätte igakord õpikust need paragrahvid, mis käivad seletatud materjali kohta, kuid ei näita, kuidas nende kallal töötada, ega kontrolli, kuidas see töö kulgeb. Keskkooli üheks ülesandeks on õpetada oma kasvandikke raamatuga töötama, ning matemaatika õpetaja võib ses suunas paljugi saavutada, kui ta asja sellele küljele osutab tähelepanu. Matemaatika raamatut peab lugema tingimata pliiatsi ja paberiga, teostades kõik nimetatud arvutused, konstrueerides joonised, selgitades kõigi väidete põhjendused, leides võimaluse korral variandid, valides sobivad näited. Selleks kõigeks peab õpetama, kusjuures tuleb võimalikult suurel määral õpik ära kasutada, eristades selles õnnestunud ja mitte õnnestunud kohad, hoiatades võimalike raskuste eest, ettevaatlikult ja järk-järgult õpetades õpilasi töötama raamatuga iseseisvalt. Vanemais klassides on kasulik aeg-ajalt katsuda anda kergemaid küsimusi, mis õpikus on hästi esitatud, õpilastele iseseisvalt raamatu järgi õppida, ilma nende küsimuste eelneva käsitlemiseta klassis, siis aga tingimata nende küsimuste hoolsa vaatlemisega järgmises tunnis, kus selgitatakse ja kõrvaldatakse arusaamise ja omandamise defektid. Ometi peab tunnistama, et on olemas õpetajaid, kes valivad sääraseks iseseisvaks raamatu järgi õppimiseks raskeimad küsimused, mida nad ei julge klassis seletada, ning väldivad nende küsimuste käsitlemist ka edaspidi.

Ei saa edukalt õpetada matemaatikat ilma huvi tundmata selle aine seose vastu teiste kooli õppeainetega, nagu füüsika, astronoomia, joonestamine jne. Peab teadma, millised vajadused neis õppeaineis on matemaatiliste teadmiste ja vilumuste järgi, ning tarvitusele võtma abinõud selleks, et õpilased niisuguseil juhtumeil ei oleks abitud, peab tähelepanelikult suhtuma teiste õpetajate igasuguseisse kaebustesse ja soovidesse. Näiteks, kui geo-

graafia õpetaja kaebab, et õpilased on unustanud pindala meetrimõõdud, siis peab neid kordama. Kui ajaloo tundides selgub, et õpilased teavad kalendrit halvasti ega oska sooritada ajamõõtudega seotud arvutusi, siis on tarvis 20—30 minutit pühendada nendele küsimustele, kuigi need küsimused ei esine antud klassi programmis. Matemaatika side füüsikaga peab olema eriti elav ja regulaarne. See õppeaine annab matemaatikale palju kõige kasulikumat materjali harjutusteks koolikursuse kõigis osades. Geomeetria õpetamine võidab sellest väga palju, kui õpetaja arvestab seda, millega õpilased samal ajal tegelevad joonestamise tundides. Geomeetria peab teoreetilise baasi looma nendele tehnilistele vilumustele, mis õpilased omandavad joonestamisega tegeldes, mis omakorda omavad suurt väärtust matemaatikale endale.

Iga õpetaja kohuseks, sealhulgas ka matemaatika õpetaja kohuseks, on kõige elavam osavõtt võitlusest õpilaste kõne- ja kirjakeele kultuuri eest, nende kirjaoskuse eest. Kõigepealt, õpetaja ise peab olema selles suhtes laitmatu. Andes alati head eeskuju oma õige kõnekeelega, oma absoluutselt õigete ja korrektsete üleskirjutustega, peab ta õpilastelt nõudma sedasama kõigis nende suulistes ja kirjalikes vastustes, mitte ühtki vea või lohakuse esinemise juhtumit tähele panemata ja parandamata jättes. Ainult kogu õpetajate kollektiivi ühtse rindega kirjaoskuse eest võideldes saavutatakse õpilaste kõne- ja kirjakeele kultuuri tõus.

§ 37. Mille eest peab algaja õpetaja eeskätt hoolitsema?

Lõpetame käesoleva esimese osa mõne nõuandega algajale õpetajale.

Võimatu on edukalt õpetada seda, mida ise kindlasti ei tea. Õpetaja peab laitmatult ainet tundma, seejuures sügavamalt ja täielikumalt kui seda õpilased peavad omandama. Matemaatika õpetaja ettevalmistus pedinstituudis ei varusta teda alati matemaatika koolikursuse vajaliku tundmisega, siit tuleneb tarvidus pidevalt ja tõsiselt töötada programmi materjali süvendatud tundmaõppimiseks. Kooli õpikute üksikasjalik tundmine, ülesannete kogust mis tahes ülesande täielik lahendamise oskus on tarvilikud, kuid veel mitte piisavad: peab tundma õppima õpilaste ja õpetajate jaoks väljaantavat täiendavat matemaatilist kirjandust, peab jälgima uudisteoseid. Õpilased teevad suurepäraselt vahet õpetaja sügavate ja pealiskaudsete teadmiste vahel oma aine alal ning reageerivad vastavalt sellele kas suurema huvi ja tähelepanuga või hoolimatu suhtumisega ainesse.

Oma teadmisi ainest on tarvis osata õpilastele edasi anda, on tarvis mitte üksi teada oma ainet, vaid osata seda ka metoodiliselt õigesti õpilastele esitada. Edu saab kindlustada ainult hoolsa ettevalmistusega kogu kursuse ulatuses ja igaks tunniks eraldi, tulemuste täpse arvestusega, tehes oma töös vajalikke parandusi. Ebaõnnestumist ei tule kunagi panna niinimetatud «objektiivsete põhjuste» arvele: peab otsima teed, mis võimaldab edu saavutada

ka kuitahes raskeis tingimustes, peab õppima oma suuremate kogemustega vanemailt kolleegidelt, vaadeldes nende tööd ja kasutades nende nõuandeid.

Kunagi ei tohi unustada vajadust läheneda igale õpilasele individuaalselt, vajadust kõige tähelepanelikumalt suhtuda tema kõigisse iseärasustesse, põhjuste hoolsat uurimist, mis tingivad mahajäämuse, ettevaatlikku hoolitsust nende heade võrsete eest, mis igaühel on olemas. Peab kindlasti meeles pidama nõrkadeks ja tugevateks jaotamise tinglikkust: välja arvatud vähesed erandid, iga õpilane on suuteline iga ainet õppima väga hästi, sealhulgas ka matemaatikat, tarvis ainult õige tee leida.

Oma nõudmistes õpilaste suhtes peab õpetaja olema mõistlikult järeleandmatu ning järjekindel ja iga õpilase töö hindamisel range ning õiglane. Eriline leebus kui ka ülemäärane karmus üksikute õpilaste töö hindamisel viib kergesti õpetaja autoriteedi kaotuseni õpilaste silmis.

Edu peavaenlaseks matemaatika õpetamisel on õpilaste loidus ja ükskõikne suhtumine sellesse ainesse. Kui õpetaja on suutnud õpilastes huvi äratada oma aine vastu, siis on pool kogu tööst sooritatud, sel puhul kõik raskused ületatakse; kui ta seda aga ei ole suutnud, siis on kõik pedagoogilise mõjutamise abinõud asjatud. Kuid kergeim on teistes huvi äratada selle vastu, millest ise oled huvitatud. Siit on paratamatu tähtsaim järeldus: õpetaja pidev töö matemaatika uurimisel, siinjuures eriti nende alade uurimine, millel on kokkupuuteid küsimustega, mida õpivad kooliõpilased.

«Liiga suurearvuline õpilaste mahajäämus on lubamatu nähtus. Selle nähtuse vältimine, kõigi vahenditega selle vastu võitlemine on õpetaja ja kooli peamine ülesanne. Peab meenutama, et õpetaja kannab vastutust iga oma õpilase teadmiste eest. Ta peab vankumatu olema oma nõudmistes õpilase vastu ning ühtlasi iga päev teda abistama. Õpetaja ei ole kuiv pedant, kes ükskõikselt jaotab mitterahuldavaid hindeid, vaid inimene, kes tunneb muret iga oma õpilase pärast, tema töö ja teadmiste pärast. Õpetaja ei saa orienteeruda oma töös niinimetatud «keskmist» õpilast silmas pidades. Igas klassis on niimitu individuaalsust, kuimitu õpilast seal on. Õpilaste intellektuaalse arenemise taseme, nende võimete ja nõudluste arvestamine, — sellest peab õpetaja väsimatult mõtlema ja vastavalt sellele rajama nii töö kogu klassiga kui ka individuaalse töö. Iga õpilase nõrkade ja tugevate külgede tundmine, see annab meie meisterpedagoogidele võimaluse hästi õpetada ja kasvatada, seepärast ei ole neil mahajääjaid. Tähelepanelikult jälgida iga õpilase tööd, vältida mahajäämust juba selle idus, — säärane on praegu üks põhilistest ülesannetest, mis seisab õpetajate, koolide ja haridusorganite ees.»

Nende palavate sõnadega 1947. a. 22. detsembri «Utšitelskaja gazeta» juhtkirjast («Mida õpetavad esimese õppeveerandi kokkuvõtted») lõpetamegi käesoleva esimese osa, mis on pühendatud matemaatika õpetamise üldise metoodika küsimustele.

I peatükk.

ÜLDISI VAATEID ARITMEETIKA ÕPETAMISELE KESKKOOLIS

§ 1. Aritmeetika teadusena ja õppeainena koolis.

Aritmeetika, nagu osutab kreeka keelest tulenev nimetuski „ἀριθμὸς“ — arv, on õpetus arvudest. Nüüdisaegne matemaatika tegeleb väga mitmesugust laadi arvudega: naturaalarvudega (1, 2, 3, 4, ...), täisarvudega (0, ±1, ±2, ±3, ...), mis hõlmavad ka kõiki naturaalarve; ratsionaalarvudega, mis saame, kui kõigi täisarvudega ühendame kõik võimalikud murdarvud; siis tulevad reaalarvud, mis hõlmavad kõiki ratsionaal- ja irratsionaalarve; kompleksarvud, s. o. arvud kujuga $a + bi$, kus a ja b on mis tahes reaalarvud ja i on imaginaarne ühik; hüperkompleksarvud, mille lihtsaimaks liigiks on kvaternioonid, s. o. arvud kujuga $a + bi + cj + dk$, kus a, b, c, d on mis tahes reaalarvud ja i, j, k on erilised ühikud, jne.

Nende arvude igas liigis on teostatavad liitmise ja korrutamise operatsioonid, millel on täisarvude liitmise ja korrutamise omadustega analoogilised omadused (siiski, kvaternioonide puhul ei kehti kommutatiivsus korrutamisel), ja ka pöördoperatsioonid — lahutamine ja jagamine. Eespool nimetatud arvude klassid esitavad väga eriliiki, kuid ühtlasi tähtsaimaid näiteid niinimetatud arvuringidest ja korpustest, mida uuritakse algebras ühtsest vaatepunktist. Definitsioonide üksikasjadesse tungimata, mida lugeja peab teadma kõrgemast algebrast, meenutame, et ringi näiteks võib olla kõigi täisarvude hulk, kus alati on teostatav liitmine, lahutamine ja korrutamine, kuid ei ole alati teostatav jagamine (kuigi kõrvale jätta jagamine nulliga); korpuse näitena võib vaadelda ratsionaalarvude korpust, kus nii lahutamine kui ka jagamine on alati teostatavad (välja arvatud jagamine nulliga).

Mis jääb siis aritmeetikale kui teadusele, kui aritmeetiliste operatsioonide üldine teooria on viidud algebrasse? Aritmeetika kui teadus, mida nüüdsel ajal nimetatakse arvuteooriaks, kujutab endast väga mitmeharulist ja rikkaliku sisuga osa matemaatikast, mis ajalooliselt on kujunenud seoses uurimustega täisarvude jaguvuse

teooria alal, ja eriti seoses algarvude uurimisega. Viimasel sajandil ja iseäranis viimasei! aastakümneil ta problemaatika üha avardub. Juhtiv osa arvuteooria arendamisel kuulub P. Tšebõševi ajast alates vene teadusele. Siin tuleb märkida nimed, nagu A. Korkin, E. Zolotarjov, A. Markov, G. Voronoi, L. Šnirelman, R. Kuzmin, ning praegu elutsevad teadlased I. Vinogradov, B. Delone, A. Hintšin, B. Venkov, A. Gelfond, J. Linnik jt.

Aritmeetika, nimelt naturaalarvude aritmeetika küsimused olid esimesed matemaatilised küsimused, millega inimene puutus kokku juba oma varajaseil arenemise astmeil.

Teadmiste alged naturaal- ja murdarvudest on olemas inimestel, kes seisavad väga madalal kultuuri astmel, ja ajaloos on säilinud usaldatavad teated rahvaste aritmeetilistest teadmistest väga kauges minevikus. Lihtsaimaid teateid aritmeetika ajaloost, mis esmajärjekorras on vajalikud matemaatika õpetajale, võib leida niisuguseis väikestes raamatutes nagu [I, 12 ja II, 10]. Aritmeetika ajaloost [I, 22 b]. Venemaal jutustab raamat. Neile, kes soovivad üksikasjalikumalt tutvuda aritmeetika arenemise käiguga, soovitame kasutada raamatuid [I, 14, 57, 59].

Aritmeetika koolikursus hõlmab arvuõpetusest ainult need vähesed osad, mis igapäevases elus on igale inimesele tarvilikud, nagu numeratsioon, s. o. kui tahes suurte arvude lugemise ja üleskirjutamise võtted, siis neli tehet naturaalarvudega, murdude õpetus koos nende teadmistega naturaalarvude teooriast, mis on vajalikud nelja tehte sooritamiseks murdarvudega (jaguvuse teooria). Arvu mõiste edasine arendamine, nimelt negatiivsete arvude tarvituselevõtmine ning esimesed sammud reaal- ja kompleksarvude tundmaõppimiseks, kuuluvad koolis algebra kursusse. Paralleelselt aritmeetika kursuse teoreetilise osaga toimub tutvumine selle hulgaliste rakendustega. Palju tähelepanu pööratakse mõõtude (pikkuse, pindala, ruumala, kaalu, aja) küsimustele, vaadeldakse mitmesuguseid aritmeetika rakendusi igapäevase elu küsimuste lahendamiseks, näiteks protsentide kasutamine, arvelaua tarvitamine, õpitakse eriti lihtsaid, kuid ühtlasi väga tähtsaid suuruste-vahelisi seoseid — võrdelisust ja pöördvõrdelisust.

Niisiis, kooli aritmeetika erineb oluliselt nendest teaduslikest matemaatilistest distsipliinidest, kus uuritakse arve ja operatsioone nendega (algebra ja arvuteooria). Ühelt poolt, koolikursuses on ainult tühiselt väike osa nendest küsimustest, mida uuritakse eespool nimetatud teadustes, ning seejuures aga lihtsustatud kujul; teiselt poolt esineb seal terve hulk teistest distsipliinidest laenatud küsimusi. Aritmeetika kooli kursus kujutab endast füüsika-matemaatika teaduse omapärast aabitsat, süstematiseeritud valikut neist lihtsaimaist teateist, mis on ühtviisi vajalikud nii praktiliseks tegevuseks kui ka matemaatika, füüsika, loodusteaduse ja tehnika edaspidiseks uurimiseks.

Aritmeetika õpetamise eesmärgiks alg- ja keskkoolis on kõige-

pealt teatava hulga teadmiste omandamine arvudest (naturaal- ja murdarvudest) ja mõõtudest ühes vastavate kogemustega nende käsitsemiseks, mis on vajalikud igale inimesele. Ühtlasi püstitatakse veel teine eesmärk: põhiliste loogiliste vilumuste kasvatamine, oskus seada ja jaotada küsimusi, oskus sooritada järjekindlalt mingi arutlus, oskus mitmest võimalikust teest valida kõige lühem, mis viib eesmärgile, taibukuse arendamine. Selle teise eesmärgi saavutamise peamiseks vahendiks on treening suure hulga ülesannete lahendamisel, millest tuleb juttu edaspidi (§ 4). Elulise sisuga ülesannete lahendamine taotleb üheaegselt mõlemat osutatud eesmärki.

§ 2. Algkoolis omandatud teadmised ja oskused aritmeetikast, mis tulevad edasiarendamisele ja kinnistamisele keskkoolis.

Asudes aritmeetika õpetamisele V klassis, peab õpetajal olema täpne ettekujutus nendest matemaatilistest teadmistest ja oskustest, mis on olemas tema õpilastel, kes on V klassi vastu võetud pärast algkooli nelja klassi lõpetamist, kus aritmeetika õpetamisele on määratud 858 tundi (3300 tunnist, mis on tundide üldarv), iseseisvat tööd kodus mitte arvestades. On tarvis üksikasjaliselt tutvuda praegu kehtiva algkooli aritmeetika programmiga (vt. «Algkoolide programmid»).

Nende teadmiste ja vilumuste iseloom, mis algkooli õpilaste poolt peavad olema omandatud vastavalt programmile, on üksikasjaliselt valgustatud sellele lisatud «Seletuskirjas». Toome siin kaks väljavõtet sellest.

«Matemaatika õpetamine algkoolis peab tagama teadmiste teadlikku ja kindlat omandamist aritmeetikas ja geomeetria algkursuses, samuti ka õpilaste poolt oskuse omandamist kasutada saadud teadmisi praktikas.

Aritmeetika õpetamine peab kaasa aitama laste loogilise mõtlemise arenemisele, oskusele kindlaks määrata sõltuvust suuruste vahel, teha õigeid järeldusi.

Nelja õppeaasta kestel peavad õpilased algkoolis omandama:

1) kindlad teadmised neljast aritmeetilisest tehtest igasuguste suurustega, niihästi abstraktsete kui ka nimelistega, ja püsivad vilumused nende tehete sooritamiseks; oskuse kasutada arvelauda;

2) kindlad teadmised meetrimõõdustikust, ajamõõtudest ja oskuse neid mõõtmisel kasutada;

3) algteadmised harilikest murdudest ja protsentidest;

4) algteadmised näitlikust geomeetriast, oskuse kasutada neid teadmisi praktikas;

5) oskuse lahendada mitmesuguseid aritmeetilisi ülesandeid täisarvude ja murdudega.

Aritmeetika õppimine peab olema nii korraldatud, et arvud ja mõõdud oleksid laste käes ümbritseva tõelikkuse tunnetamise tööriistaks. Aritmeetika tundmist tuleb kasutada sotsialistliku ehitustöö sügavamaks mõistmiseks laste poolt, kasvatades nendes teadlikku suhtumist töösse ja neid ette valmistades Kodumaa kaitsele.

Teadliku distsipliini, korralikkuse, täpsuse kasvatamine töös jne. saavutatakse aritmeetika õpetamisel, nõudes õiget ja täpset kõnet, puhtust ja korralikkust kirjalikes töis, vastutust arvutuste tulemuste eest.»

Algkooli programmis ettenähtud matemaatilised teadmised ja vilumused on väga primitiivsed, olles täielikus vastavuses 7—10-aastaste laste üldise arenemise tasemega, kuid nende kindel valdamine omab kolossaalset tähtsust kogu edaspidisele matemaatilisele haridusele. Need on säärased teadmised ja vilumused, mis peavad olema omandatud kogu elu ajaks, sest nad on kõigile ja alati tarvilikud, need on tõepoolest üldise hariduse kõige vajalikumad elemendid. Ei ükski hilisem süvendatud matemaatika õppimine tee tarbetuks neid algteadmisi, selle kogu edaspidise matemaatika õppimise tõelist vundamenti. Selle vundamendi tähtsus kohustab keskkooli matemaatika õpetajat kõige tähelepanelikumalt suhtuma algkoolis omandatud õpilaste teadmistesse ja vilumustesse. Ka kindlaimad tulemused, kui neid ei kasutata, kaovad aja jooksul. Keskkooli matemaatika õpetaja, alustades mis tahes uue küsimuse õpetamist, peab oma õpilastele meelde tuletama seda, mis nad sellest küsimusest on algkoolis õppinud, peab neid harjutama nendes oskustes, mis nad seal on omandanud. Näiteks, seletades V klassi õpilastele, kuidas teostada mis tahes nimetajatega murdude liitmist (jaguvuse teooria põhjal), peab õpetaja meelde tuletama, kuidas liideti algkoolis «vabal kaalutlusel» sääraseid murde, nagu $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_5$, $^1/_{10}$. Tutvudes uuete võtetega, peab õpilane nägema nende suuremat võimsust võrreldes vanadega, kuid peab ühtlasi hindama neid vanu võtteid, peab neid kasutama sääraseil lihtsamail juhtumeil, kui nad kiiremini viivad otsitavale tulemusele.

Keskkooli matemaatika programm määrab 21 tundi kohe õppeaasta alguses teemale «Algkooli kursuse kordamine». Arusaadav, et selle ajaga ei ole võimalik korrata kogu algkooli kursust, seda enam, et õpilaste koduseks tööks selles osas on programmis ette nähtud ainult 8 tundi, kuid sellest ajast piisab, et korrata seda, mis läheb tarvis esmajärjekorras, ning saada selge pilt sellest, mida õpilased sellest kursusest tõeliselt teavad ja mida nad ei tea.

Juhtub, et keskkooli lõpetanu ei tea matemaatikast lihtsaid asju, mida ta algkooli lõpetamisel teadis. Niisugune «matemaatilise kirjaoskamatuse retsidiiv» esineb ka arvutamises miimekohaliste arvudega, mõõtude alal ja ka ülesannete lahendamise alal. Säärane ebanormaalne olukord kõneleb osalt puudustest töö korraldamisel algkoolis, kuid veel suuremal määral sellest, et matemaatika õppimisel algkoolis ja keskkoolis on lõhe. Et see kõrvaldada, peab keskkooli matemaatika õpetaja mitte ignoreerima, vaid kinnistama ja edasi arendama neid väärtuslikke matemaatilisi vilumusi, mis lapsed algkoolis omandavad.

Võtame näiteks küsimuse mõõtudest. Algkooli lõpetajad peavad teadma kõiki igapäevases elus tavaliselt tarvitatavaid mõõte: programmis on nimetatud pikkusmõõdud mm, cm, dm, m, km, raskusmõõdud g, kg, ts, t, ajamõõdud — sekund, minut, tund, ööpäev, nädal, kuu, aasta, sajand, siis pindala ja ruumala meetermõõdud.

«Meetermõõdustiku, samuti ka ajamõõtude õppimist alatakse I klassis ja seda jätkatakse kogu algkoolis õppimise kestel. Õpetamise tulemusena peavad õpilased kindlalt omandama meetrimõõdustiku ja ajamõõdud, mitmesuguste

mõõtude suuruse vahekorrad (joon-, ruut- ja kuupmõõtude, raskus- ja ajamõõtude), mõõtude teisendamise, tehted nimeliste liitarvudega ja oskuse lahendada ülesandeid nimeliste arvudega.

Mõõtude õppimist tuleb teostada nii, et õpilased omandaksid *konkreetse* kujutluse igast mõõdust, et nad õpiksid neid kasutama. Oskust mõõta nõutakse igas tehnika harus, igal tootmise alal. Kool peab seepärast andma õpilastele praktilisi oskusi sel alal.» Algkoolide programmid, 1952 («Seletuskiri»).

Keskkooli programmis puudutatakse mõõtude küsimust ainult «Algkooli kursuse kordamise» osas (V klass), kus esineb punkt: «Pikkuse, pindala ja ruumala mõõdud». Kas see tähendab, et keskkooli matemaatika õpetajat küsimus mõõtudest ei pea üldse huvitama? Mõned õpetajad arvavad, et see on tõepoolest nõnda, et kõik vajalikud teadmised mõõtudest on õpilased saanud algkoolis, ja kui ei ole saanud, siis selle eest peab vastutama algkool, ning et keskkoolis on parem üldse vältida konkreetseid mõõte, kõneldes alati ühikuist üldiselt, nagu seda sageli tehakse ka õpikuis (näiteks, vt. ülesanne Nr. 47, § 211 A. Kisseljovi õpikus «Geomeetria, planimeetria VIII ja IX klassile», 1949). See on muidugi väär, kahjulik orientatsioon: keskkool peab kindlustama ja täiendama teadmisi mõõtudest; peab kasutama iga ülesannet selleks, et meenutada neid tähtsaid asju, et tagada praegusel ajal üldkasutatavate mõõtude kindlaim tundmine kui ka arusaamine meetermõõdustiku põhimõttelistest paremustest, mis tulenevad tema seosest kümnendnumeratsiooniga, ja teatav tutvus vanade vene ja tähtsamate välismaa mõõtudega, nagu nael, puud, verst, tiin, inglise miil. buššel jt., millega igaüks puutub kokku ajalehtede lugemisel. Siin ei saa sellele toetuda, et neid küsimusi puudutatakse füüsika programmis: kui keskkooli lõpetajal pole kujutlust, näiteks sellest, mis on aar ja hektar, siis selle eest on vastutajaks esmajoones matemaatika õpetaja. Mõningaid kasulikke teateid mõõtudest aritmeetika kursuse jaoks võib leida raamatust [II, 19].

§ 3. Aritmeetika kursuse ülesehitus keskkoolis. Õppekirjandus.

«Aritmeetika õpetamise eesmärgiks on õpetada õpilasi teostama teadlikult, kiiresti, kindlalt ja kõige ratsionaalsemalt tehteid täis- ja murdarvudega, rakendama omandatud teadmisi ülesannete lahendamisel ja lihtsamate, praktilise iseloomuga arvutuste teostamisel.»

Nii on määratud aritmeetika süstemaatilise kursuse konkreetne ülesanne keskkoolis praegu kehtiva keskkooli matemaatika programmi seletuskirjas. Selle eesmärgi saavutamiseks näeb õppeplaan ette 7 tundi nädalas terve õppeaasta kestel V klassis, mis annab kokku 231 tundi, ja 2 tundi nädalas VI klassis, mis annab täiendavalt 66 tundi. Eri tunde aritmeetika õppimiseks järgnevais klassides ei näe õppeplaan ette, kuid VII klassis matemaatikale pühendatud 196 tunnist võetakse 32 tundi aritmeetika, algebra ja geomeetria kordamiseks. Osutatakse vajadusele aritmeetika süstemaatiliseks kordamiseks vanemais klassides, kusjuures kirjalikke ja peastarvutusi täis- ja murdarvudega soovitatakse korrata seoses algebraliste avaldiste numbriliste väärtuste arvutamisega kui ka geomeetriliste arvutusülesannete lahendamisel. Seda viimast näpunäidet peab mõistma kui väga laialt levinud niisuguse praktika taunimist, et algebra ja geomeetria ülesannetes valitakse andmed kunstlikult nõnda, et kogu arvutuslik külg tuleb võimalikult lihtne: et jagamised teostuksid alati täisarvudes ilma jäägita, et juurimine teostuks alati täpselt, et vastused väljenduksid mugavate arvudena, millel on üks või kaks tüvenumbrit. See tee viib paratamatult nende arvutuslike vilumuste kadumiseni, mis omandati I—IV klassis.

Teoreetilise materjali hulk, mis kuulub õppimisele V ja VI klassis, ei ole aritmeetika kursuses kuigi suur, kuid aega on palju: 231 + 66 = 297 tundi, ja veel umbkaudu 120 tundi iseseisvat kodust tööd. On olemas täielik võimalus tagada niihästi selle kindel omandamine kui ka täisväärtuslik oskus seda rakendada kõige mitmekesisemate ülesannete lahendamiseks. Võrreldes revolutsioonieelse kooliga on aritmeetika programm läinud palju lihtsamaks. Esiteks, on ära jäänud vana-aegsete mõõtude õppimine koos nende ebamugavate suhetega, mis nõudsid palju mälutööd ja tegid ülesannete lahendamise väga keeruliseks. Et selles veenduda, piisab, kui võrrelda ühe miljoni solotniku ja ühe miljoni grammi ülestamist. Vastuse saamiseks teisele küsimusele kirjutame korraga:

$$1\,000\,000\ \text{g} = 1\,000\ \text{kg} = 1\ \text{t},$$

kuid esimesele küsimusele vastuse saamiseks on tarvis teha jagamine 3-ga (3 solotnikku on 1 lood), siis jagamine 32-ga (32 loodi on 1 nael), siis jagamine 40-ga (40 naela on 1 puud) ja 10-ga (10 puuda on berkovits), mis lõppude lõpuks annab: 1 000 000 solotnikku = 26 berkovitsi 0 puuda 16 naela 21 loodi 1 solotnik. Teiseks, on ära jäänud hulk erireegleid, nagu «vekslite diskonteerimise reeglid» ja «ahelarvutused». Aritmeetika õpetamise kogu korraldus nõukogude keskkoolis omab hulga paremusi võrreldes sellega, mis oli revolutsioonieelses keskkoolis. Nüüd õpilased saavad aritmeetika alal eluks tõeliselt vajalikud teadmised ja vilumused ega kuluta aega niisuguse materjali õppimiseks, millel ei ole mingit teoreetilist ega praktilist väärtust.

Ometi ei saa ütelda, et praegusel ajal keskkoolis kehtima pandud aritmeetika programm oleks puudustest vaba. Nii ka praegusel ajal kool jääb tehniliste arvutuste alal elust tunduvalt maha. Tänapäevani ei ole programm ega kooli õpperaamatud lahendanud nagu kord ja kohus ligikaudsete arvutuste probleemi, millele me allpool pühendame eri osa (V peatüki).

VNFSV Pedagoogiliste Teaduste Akadeemia õpetamise meetodite Instituudi poolt 1953. a. väljatöötatud keskkooli matemaatika uue programmi projekt toob kehtivasse programmi mõned muudatused. Pööratakse palju tähelepanu arvutustöö ratsionaliseerimise küsimustele (tabelite, arvelaua kasutamine, arvutuste õige paigutus, enesekontroll), soovitatakse varem alustada ülesannete lahendamist protsentarvutustele, osutatakse mõnele väärtuslikule aritmeetiliste arvutuste liigile, näiteks arvutused tulp- ja sektordiagrammide koostamiseks, tuludekulude aruannete koostamiseks, juhitakse tähelepanu vanade vene mõõtude tundmise tähtsusele, rõhutatakse geomeetrilise temaatika kasutamise vajadust, pööratakse rohkem tähelepanu ligikaudseile arvutustele.

Õpetaja peab töötama praegusel ajal kehtiva programmi järgi, kuid on soovitav, et ta arvestaks eesrindlikus pedagoogilises praktikas ilmnevaid tendentse.

Siirdume õppekirjanduse vaatlemisele.

Praegusel ajal kasutatakse VNFSV keskkoolides kaht stabiilset aritmeetika õpperaamatut, mis on Haridusministeeriumi poolt kin-

nitatud: A. Kisseljovi õpik «Aritmeetika», mis prof. A. Hintšini poolt on ümber töötatud ning 1952. a. ilmus 14. trükis, ja E. Berezanskaja «Aritmeetika ülesannete ja harjutuste kogu», mis 1953. a. ilmus 20. trükis. Mõlemad raamatud said eelnevais trükkides õiglase kriitika osaliseks, kus avastati palju puudusi, mis on uutes trükkides järk-järgult kõrvaldatud, ning mõlemad õpperaamatud oma praegusel kujul, kuigi puudustest mitte vabad, tagavad siiski õpilaste poolt programmi materjali omandamise võimaluse.

Märgime Kisseljovi õpiku järgmised tähtsamad nõrgad küljed:

1. Õpilase eelnevat tööd aritmeetika õppimise alal algkoolis ignoreeritakse täielikult: kõik esitatakse nõnda, nagu poleks viienda klassi õpilased seni aritmeetika alal absoluutselt mitte midagi teinud.

2. Vaadeldakse naturaal- ja murdarvudega tehete sooritamise üldisi kirjalikke võtteid, peaaegu ei puudutatagi nende ratsionaliseerimise küsimusi: peast arvutuste võtteid, kirjaliku arvutamise eri võtteid, kontrollimise võtteid, üleskirjutuste küsimust, arvutusriistade küsimust, tabelite ja graafikute kasutamist.

3. Õpik ei sisalda mingeid teateid operatsioonide iseärasustest ligikaudsete arvudega, kui mitte arvestada näpunäidet jagatise ümardamise vajadusest, kui see esineb lõpmatu kümnendmurru kujul.

4. Esitus on üsna abstraktse iseloomuga, ei selgita alati küllaldasel määral iga teoreetilise lause praktilist tuuma, sisaldab väga vähe ajaloolisi andmeid. Raamat on V ja VI klassi õpilastele iseseisvaks töötamiseks raske.

E. Berezanskaja ülesannete kogu sisaldab oma esimestes trükkides erakordselt kerget materjali, mis kujutas endast ainult harjutusi õpitud reeglite kasutamiseks ega nõudnud peaaegu mingit mõttetööd. Viimaseis trükkides on hulk raskemaid küsimusi, päris ülesandeid. Kuid ikkagi tuleb ära märkida selle ülesannete kogu mõned puudused. Nii on seal palju pseudoelulise sisuga ülesandeid, ülesandeid, mis kõnelevad praktilise elu küsimustest, kuid hoopiski mitte nii, nagu nad esinevad tegelikkuses. Tõeliselt praktilise sisuga ülesandeid, sääraseid, mis elus tegelikult esinevad, on väga vähe ja nende lahendused on rõhuvas enamuses väga üksluised. On ka ebaõnnestunud ülesandeid. Näiteks, ülesandes Nr. 546 nõutakse ütelda, kas arvud kujuga $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 2$ jt. on algarvud või kordarvud, ning ülesandes Nr. 547 nõutakse algarvude 1, 2, 3, 5, 7 abil kirjutada «ülemal antud reegli põhjal (vt. eelmist ülesannet) üks algarv ja üheksa kordarvu», millest järeldub, et autor loeb algarvudeks kõik arvud kujuga $2 \cdot 3 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$ jne., mis ei ole õige: näiteks $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$. Arvu $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$ suhtes, kus tähed märgivad üksteisele järgnevaid algarve 2, 3, 5, 7 jne., võib ainult seda väita, et ta ei jagu ühegagi neist algarvudest, kaasa arvatud algarv p_n, ning seetõttu on ta kas algarv või niisugune kordarv, mille algtegurid on suuremad kui p_n. Esineb ka ülesandeid vigadega

kas andmeis või vastustes, mida, tõsi küll, järgnevais trükkides vähehaaval parandatakse.

Nii on ebaõnnestunud ülesanne Nr. 547 pärast 1948. aastat ilmunud trükkides asendatud teisega. Nii Kisseljovi aritmeetika kui ka Berezanskaja ülesannete kogu ei vasta täielikult stabiilsete õpikutena V ja VI klassile, kuid nende järgi võib edukalt töötada, kui arvestada nende puudusi ning teha vastavad korrektiivid. On soovitav, et õpetaja kasutaks ka teisi õpperaamatuid, esmajoones aritmeetika ülesannete kogu pedagoogilistele koolidele [II, 36], ja ka mõnd vanemat väljaannet, nagu [II, 25]. Meenutame uusi aritmeetika ülesannete kogusid V ja VI klassile [II 30a, 33].

§ 4. Aritmeetilised ülesanded.

Õpilastele pakutavaid aritmeetilisi ülesandeid võib liigitada järgmisel viisil. Esimesele kohale paigutatakse aritmeetika kursuses harjutusülesanded, mille lahendamine nõuab ainult teatavate reeglite kindlat teadmist ja mis antakse eesmärgiga välja treenida kindel vilumus nende reeglite kasutamises. Siia kuuluvad kõigepealt ülesanded antud arvudega näidatud tehete lihtsaks sooritamiseks. Kooli matemaatikas nimetatakse tavaliselt «harjutusteks» seda liiki ülesandeid neil juhtumeil, kui tingimuste üleskirjutuseks kasutatakse ainult matemaatilisi sümboleid, numbreid, tehete märke, sulge, kuna sõnaline tekst puudub täiesti, kuid see asjaolu ei ole oluline: matemaatilise sisu poolest ei ole mingit vahet arvutusülesande $x = (5{,}6 + 7{,}4) : 0{,}02$ ja ülesande «Leida arvude 5,6 ja 7,4 summa jagatis arvuga 0,2» vahel. Harjutusülesannete lahendamine kujutab endast väga primitiivset, vähe arendavat harjutamist, kuid ta tähtsus on sellest hoolimata väga suur: vilumused aritmeetiliste tehete sooritamiseks peavad olema kinnistatud püsivalt, kogu elu ajaks, peavad teatavail juhtumeil kujunema automaatseiks (korrutamistabel, tehete järjekorra reeglid), ning peale selle, harjutused kasvava keerukusega harjutusülesannete lahendamises kasvatavad lastes kasulikemat oskust sooritada suurt tööd, jaotades selle üksikuiks sammudeks, treenides kannatlikkust ja tähelepanu, õpetades täpsust, enesekontrolli, kasvatades ülitähtsat vastutustunnet oma töö eest. Harjutusülesandeid peab andma iga uue reegli kohta ja ka varem õpitud reeglite kasutamise kohta, seejuures väga erineva raskusega, tingimata kaasa arvatud ka säärased, mida saab lahendada peast, nagu ülaltoodud näide.

Harjutusülesannetelt, kus küsimus lahendamisviisist jääb üldse kõrvale, mis tahes aritmeetika osa õppimisel siirduvad õpilased päris rakendusliku aritmeetilise sisuga ülesannete lahendamisele, kus küsimus vastavate aritmeetiliste tehete valikust tuleb endal seada, kuid ta lahendub ilma igasuguste raskusteta. Nimetame kokkuleppeliselt säärased ülesanded kalkulatsioonülesanneteks. Just sääraste ülesannetega puutub inimene kokku nii igapäevases elus kui ka mis tahes kutsealal igal sammul.

Kalkulatsioonülesannete lahendamine taotleb osaliselt sama eesmärki, nagu harjutusülesannete lahendamine, s. o. püsivate vilumuste väljatreenimist aritmeetiliste tehete sooritamises, kuid siin on peaasi selles, et õppida kasutama aritmeetikat praktilise elu küsimuste lahendamiseks: rahalised kalkulatsioonid, mis tuleb sooritada igasuguse ostu puhul («Ma ostsin 2 kg leiba hinnaga 1 rbl. 35 kop., 500 g peensuhkrut hinnaga 9 rbl. 40 kop. 1 kg, 300 g võid hinnaga 28 rbl. 70 kop. 1 kg ning andsin 100 rbl.; kui palju saan tagasi?»), ja samasugused keerukama iseloomuga kalkulatsioonid, kus oste ei tehta isiklikuks tarbeks, vaid asutuse jaoks (näiteks spordi-inventari ost pioneerilaagri jaoks), tehnilis-eelarve lihtsaimad arvestused (näiteks, toa remondi kulude arvestus). Puhtmatemaatilises suhtes sedalaadi ülesanded ei anna õpilastele midagi uut, kuid täieliku vilumuse omandamine nende lahendamisel on esmajärgulise tähtsusega asi. Kõige rohkem etteheiteid kooli halva töö pärast matemaatilise ettevalmistamise alal tehakse just sellepärast, et paljud seitsmeklassilise kooli ja keskkooli lõpetajad ei oska teostada seda laadi arvutusi oma kutse-tegevuses ega järgneval edasiõppimisel.

Praegu kehtiva matemaatika programmi seletuskiri rõhutab sedalaadi arvestusülesannete temaatikat. Neid on valmiskujul suures valikus igas aritmeetika ülesannete kogus (kuigi alati mitte sobivalt koostatud). Elu pakub õpetajale igal sammul palju uut materjali sääraste ülesannete iseseisvaks koostamiseks [vt. II, 20].

Erilist meenutamist väärivad niinimetatud «aja-arvutamise» ülesanded mõnede tarvituselolevate ajaühikute omapärase iseloomu pärast. Nagu teada, kuu ei ole täiesti kindel ajaühik: veebruaris on 28 või 29 päeva, aprill, juuni, september ja november on 30 päeva, ülejäänud 7 kuud on igaüks 31 päeva. Seepärast neil juhtumeil, kus nõutakse ajavahemiku täpset määramist, on parem kuid mitte kasutada. Omades neid väheseid teadmisi ajamõõtmisest, mis on esitatud stabiilses Kisseljovi aritmeetika õpikus, on V klassi õpilased suutelised lahendama kõiki aja-arvutamise ülesandeid, mis on toodud Berezanskaja ülesannete kogus, ning täielikult ammendavad need juhtumid, kus küsimused ajaarvutamisest tekivad igapäevase elu praktikas. Toome näitena ühe säärase ülesande: «Mitu päeva kestis Suur Isamaasõda, kui arvestada ka fašistliku Saksamaa NSV Liidule kallaletungimise päeva — 22. juunit 1941. a. ja Saksamaa kapituleerimise aktile allakirjutamise päeva — 8. maid 1945. a.?» Vastus: 1417 päeva.

Kolmas liik V ja VI klassi õpilastele pakutavaid aritmeetika ülesandeid on keerukama matemaatilise sisuga ülesanded, mis enamail juhtumeil lahenduvad algebralise meetodiga võrrandite abil äärmiselt lihtsalt, kuid esitavad teatavaid raskusi, kui võrrandeid mitte kasutada. Niisuguste ülesannete sissetoomise eesmärgiks on arendada taibukust, initsiatiivi, oskust kombineerida ja arutleda. Neid võib nimetada *arendavaiks aritmeetilisteks ülesanneteks*. Toome säärase ülesande tüüpilise näite: «Ühel inimesel on 265 rbl., teisel 157 rbl., kumbki kulutab iga päev ära 10 rbl.; mitme päeva pärast on esimesel viis korda rohkem raha järel kui teisel?» Ülesanne lahendub kergesti, kui kirjutada võrrand:

$$265 - 10x = 5 \cdot (157 - 10x),$$

mis annab $x = 13$. Algebrat mitte kasutades võib selle ülesande lahendada lihtsa vaatlemise teel, võrreldes raha ülejääke 1, 2, 3 jne. päeva pärast; see kasulik primitiivne lahendus pakub ka teatavat huvi, sest see võimaldab peatuda suuruse muutumise küsimusel: esimese ja teise järjestikuste jääkide jagatis on esmalt 255 : 147, mis on vähem kui 2, viie päeva pärast on see jagatis 215 : 107, s. o. suurem kui 2, ning 10 päeva pärast on ta juba 165 : 57, s. o. peaaegu 3, ja 13 päeva pärast 135 : 27, s. o. võrdne 5-ga. Kindlaks teinud niisuguse lihtsa, kuid vaevanõudva ja pika lahendamise võimaluse, seame küsimuse lühemast lahendamisest, mis ei nõua proovimisi. Hea lahenduse saame, kui paneme tähele, et vahe 265 — 157 = = 108 (rbl.) jääb muutumatuks ja et see vahe on otsitava arvu päevade pärast teise inimese raha ülejäägi neljakordne.

Sääraste ülesannete lahendamise otstarbekohasuse suhtes aritmeetika kursuses on väga erinevaid arvamusi, alates ettepanekuist nad üldse kõrvaldada, viies nad tervenisti üle algebra kursusse, kuni neile prevaleeriva tähtsuse andmiseni ning teatavate kindlate tüüpülesannete lahendamisele viimiseni aritmeetikas. Mõlemad niisugused äärmised arvamused on väärad: sääraste ülesannete arendav tähtsus on vaieldamatu, nende lahendamine harjutab mõtlema ja arutlema, kuid esikohale aritmeetika õpetamisel tuleb ikkagi paigutada harjutusülesanded ja kalkulatsioonülesanded. Kasu arendavate ülesannete lahendamisest väheneb järsult, kui õpilastele jõukohaste, järk-järgult kasvava raskusastmega valitud ülesannete asemel antakse korraga rasked ülesanded koos nende lahendustega, millest peab aru saama, omandama ja analoogilistel juhtumitel rakendama («oletusülesanded», «liikumisülesanded», «koostöö-ülesanded» jne.).

Märgime, et arendavad ülesanded ei tähenda hoopiski ainuüksi algebralise iseloomuga ülesandeid, s. o. võrrandite abil kergesti lahenduvaid ülesandeid. Toome näite heast mittealgebralisest arendavast ülesandest, mis täiesti sobib V klassile. «On 80 väliselt ühesugust münti, mille hulgas 79 on üheraskused ja üks on pisut kergem; kuidas saab selle kergema mündi eraldada, kasutades mitte rohkem kui neli kaalumist?» (MRÜ X matemaatika olümpiaad). Võrreldes 40 ja 40 mündi raskust, siis 20 ja 20, 10 ja 10, 5 ja 5, 2 ja 2, 1 ja 1 raskust, saame kergema mündi eraldada, kuid siinjuures on tarvis 6 kaalumist. Peab taipama mündid rühmitada mitte kaheks, vaid kolmeks rühmaks ja võrrelda kahel kaalukausil esmait 27 ja 27 münti, siis 9 ja 9, 3 ja 3, 1 ja 1 münti, otsitava mündi saab eraldada pärast neljandat kaalumist.

Arendavate ülesannete valikuks soovitame uut raamatut [II, 39].

Niisiis, aritmeetika kursuses on meil tegemist kolme kategooria ülesannetega: harjutusülesannete, kalkulatsioonülesannete ja arendavate ülesannetega. Normaalseks tuleb pidada niisugust olukorda, kus iga kategooria ülesannetele pühendatakse ligikaudu ühepalju tähelepanu ja aega, aja nappuse korral tuleb arendavate ülesannete vähema arvuga leppida, sest aritmeetika õppimise peamiseks eesmärgiks on, kordame veel, arvudega tehete sooritamise vilumuste väljatreenimine ja oskus neid vilumusi kasutada lihtsamail juhtumeil, mis praktikas esinevad.

Valides aritmeetilisi ülesandeid õpilastele lahendamiseks, peab õpetaja silmas pidama järgmisi asjaolusid:

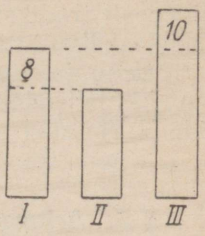
1. Alati peab endale aru andma sellest, missugust eesmärki

taotleb klassile esitatud iga ülesanne: ühe või teise vilumuse kinnistamine, varemõpitu kordamine, uue teoreetilise materjali õppimisele ettevalmistamine, huvi äratamine jne.

2. Kasutades kooli ülesannete kogu, peab meeles pidama selle puudusi, peab ta ülesannetesse kriitiliselt suhtuma, peab tingimata iga ülesande lahendama, enne kui õpilastele anda, kasutades teisi ülesannete kogusid.

3. Kalkulatsioonülesannetes tuleb vältida ebareaalseid ja ebatõenäoseid andmeid, taotledes küsimusseade maksimaalset elulisust.

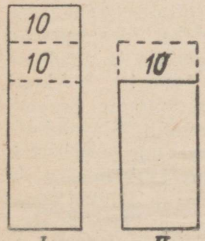
4. Õpetajal on soovitav laialt praktiseerida ülesannete komponeerimist, s. o. uute ülesannete koostamist, kasutades igasuguseid arvulisi andmeid kooli elust, kodusest elust, ajalehtedes peegelduvast jooksvast ühiskondlikust elust, juhtides ülesannete tingimustes tähelepanu neile andmeile, mis iseloomustavad meie sotsialistlikku ehitustööd, eriti viisaastaku plaani täitmist.



Joon. 1.

5. On väga soovitav ülesannete koostamisele kaasa tõmmata õpilasi endid, esitades neile esialgu ülesandeid, milles arvulised andmed puuduvad ja mis nad peavad ise hankima. Näiteks, võib anda ülesande, milles nõutakse leida põranda pindala ja akende pindala suhet klassis ja toas, milles õpilane elab, teostades selleks vajalikud mõõtmised, või leida õpiku lehe paksus jne. Nagu näitab kogemus, jäävad säärased ülesanded, peale kõige muu, püsivalt meelde.

Iga mõiste, millega õpilased puutuvad aritmeetiliste ülesannete lahendamisel kokku, peab olema neile täiesti selge, nad peavad sellest hästi aru saama ja seda oskama näitlikult ette kujutada.



Joon. 2.

Pikkuse, pindala, ruumala, raskuse ja igasuguseid muid mõõte, millest kõneldakse, peab võimalust mööda õpilastele näitama, aga mitte ainult nendest rääkima. Ülesande teksti peab selgitama joonistega, mille abil varem mitte arusaadav lahendus saab sageli äärmiselt selgeks. Võtame näiteks niisuguse ülesande: «Kolmes kastis on kokku 107 vihikut, kusjuures esimeses on 8 võrra rohkem kui teises ja kümne võrra vähem kui kolmandas; mitu vihikut on igas kastis?» Kui selle ülesande tingimust selgitada joonisel 1 näidatud skemaatilise kujutusega, siis lahendamine ei tekita mingeid raskusi: $8 + 10 = 18$; $8 + 18 = 26$; $107 - 26 = 81$; $81 : 3 = 27$ jne. See lahendus põhineb I ja III kastis olevate vihikute arvude võrdsustamisel II kastis olevate vihikute arvuga. Õpetlik on vaadelda täiendavalt kaht lahendamisvarianti, kus toimub I ja II kasti vihikute arvude võrdsustamine III-ga ning II ja III võrdsustamine I-ga.

Teine näide: «Kahel isikul on kokku 100 rbl.; kui esimene annab teisele 10 rbl., siis on neil raha ühepalju; kui palju raha on kummalgi?» Peaaegu alati õpilased lahendavad alguses vääralt: $100 - 10 = 90$; $90 : 2 = 45$, ning väidavad, et ühel on 45 rbl., teisel 55 rbl. Ka siin lihtne joonis (joon. 2) juhatab korraga õigele lahendusele.

Õpetaja pidev hoolitsus näitlikkuse tagamise eest iga ülesande lahendamisel tõstab tunduvalt õpilaste töö kvaliteeti ning hävitab kõigepealt radikaalselt ühe halvima formalismi nähtuse: ülesande lahenduskäigu arusaamiseta, mehhaanilise päheõppimise.

Tõetruu ja kunstipärase kirjelduse sellest, mis toimub õpilase peas, kes lahendab raskemat aritmeetilist ülesannet iseseisvalt, võib leida N. Nossovi raamatus «Viitja Maleejev koolis ja kodus».

§ 5. Aritmeetika ja teised matemaatilised distsipliinid.

Me juba meenutasime levinud tendentsi algebra ja geomeetria ülesannete koostamisel, mis seisab arvuliste andmete kunstlikus valikus nõnda, et aritmeetilised raskused taanduksid miinimumini. Õpetaja, kes praktiseerib niisugust valikut, õigustab seda ajapuuduse ja vajadusega keskendada õpilaste tähelepanu uuele algebralisele või geomeetrilisele materialile, kuid asja aritmeetilise külje täielik ignoreerimine viib paratamatult vastavate vilumuste kadumiseni. Vanemais klassides on tarvilik aeg-ajalt hariutada nii peast arvutamist, keerukamate aritmeetiliste arvutuste sooritamist kui ka teadmiste kasutamist mõõtudest; peale selle on tarvis täielikult ära kasutada tunnid, mis matemaatika programmis on ette nähtud aritmeetika kordamiseks vanemais klassides.

Teiselt poolt, on väga soovitav võtta aritmeetika kursusse mõned lihtsaimad teated algebrast ja geomeetriast, nii aritmeetika õpetamisel V ja VI klassis kui ka selle kordamisel vanemais klassides. Juba algkoolis lapsed tutvuvad ristkülikuga ja risttahukaga. V klassis praktiseeritakse edukalt ristkülikuist koosnevate kujundite pindala ja risttahukaist koosnevate kehade ruumala arvutamise ülesannete lahendamist. Võib näidata täisnurkse kolmnurga pindala arvutamise võtet, vaadeldes seda kui poolt kaateteile ehitatud ristkülikust, ning pärast seda iga kolmnurga pindala arvutamist, selleks mitte eri tunde kasutades, vaid ülesannete lahendamise ajal. Rikkalikku materiali aritmeetilisteks ülesanneteks pakuvad seosed ringjoone pikkuse ja diameetri vahel, ringi pindala ja raadiuse vahel (vt. Berezanskaja ülesannete kogus Nr. Nr. 1031, 1032, 1428 jt). V klassi aritmeetika programmis on nimetatud ka silindri pindala ja ruumala arvutamine. Selle küsimuse arutamisel saame võimaluse lahendada palju ülesandeid, mis omavad suurt praktilist väärtust nii iseendast kui ka vahendina aritmeetiliste vilumuste kinnistamiseks. Üksikasju sellest, kuidas läheneda kõigile neile geomeetrilistele küsimustele V klassis, vaadeldakse pärastpoole, neliandas osas. Märgime siin ainult nende küsimuste doogmaatilise käsitlemise äärmist ebasoovitatavust ja täielikku võimalust neid V klassi õpilastele arusaadavalt selgitada näitlike õppevahendite ja mõõtmiste abil.

On täiesti võimalik ja väga kasulik V klassi aritmeetika kursusse mõnede täheliste tähiste sissetoomine. Kõige loomulikum on tähte kasutada otsitava tähisena, üldkasutatavat tähte x («iks»), mille kasutamist ilma igasuguse põhjuseta aritmeetikas mõnikord välditakse, asendades ta küsimärgiga või sõnaga «osa». Parem on üleskirjutust: $5 + ? = 11$ mitte kasutada, vaid kirjutada: $5 + x = 11$. Täpselt samuti on sobiv kirjutada x ülesannete lahendamisel «osade kaudu» (näiteks: «Kahel isikul on kokku 100 rubla, kusjuures esimesel on neli korda rohkem kui teisel; kui palju on kummalgi?»). Peab tungivalt soovitama tähtede kasutamist vabalt valitud antud arvude tähistamisel kui aritmeetiliste

lausete lühema üleskirjutamise vahendit. Näiteks, kõneldes ühenimeliste murdude liitmise reeglist, on väga kasulik pärast sõnadega formuleerimist («Et liita kaks võrdsete nimetajatega murdu, tuleb lugejaks kirjutada lugejate summa, ja nimetajaks ühine nimetaja») kirjutada see reegel ka valemi kujul:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Huvitav on jälgida, kuidas õpilased vähehaaval harjuvad tähti kasutama arvude üleskirjutamiseks ning hakkavad ikka enam ja enam hindama seda tähelist sümboolikat. Formuleerides reeglit, dikteerib õpetaja selle sõnalises vormis ning pärast seda näitab samaväärset sümboolset üleskirjutust. Jättes vabaks valida, kas kasutada üht või teist, ning küsides, kes kumba eelistab, saab õpetaja õppeaasta alguses klassi enamuselt vastuse, et sõnaline formulatsioon on parem, arusaadavam, kuid õppeaasta lõpul (kui säärast tähtede abil tähistamist näidati süstemaatiliselt) rõhuva enamuse klassist moodustavad sümboolse üleskirjutuse pooldajad.

Mainime veel üht algebra õppimisele ettevalmistamise võimalust: negatiivsete arvude sissetoomist algebraliste summade arvutamisel. Nõutagu näiteks teada saada, kui palju raha on kassapidajal, kui tal alguses oli 1000 rbl., pidi esmalt välja maksma 600 rbl., siis 900 rbl., siis aga laekus kassasse 800 rbl. Loomuliku lahendusviisi ($1000+800=1800$; $600+900=1500$; $1800-1500=300$) kõrval on kasulik vaadelda ka niisugust lahendust: «Kui palju raha on kassapidajal pärast esimest väljamaksmist?» (1000 rbl. — 600 rbl. = 400 rbl.). «Kui palju kassa jääb võlgu, kui 900 rbl. tasumiseks antakse välja kõik kassas olev raha?» (900 rbl. — 400 rbl. = 500 rbl.) «Kui palju raha jääb kassasse, kui pärast 800 rbl. laekumist tasutakse võlg?» (800 rbl. — 500 rbl. = 300 rbl.).

Märgime lõpuks, et terava piirjoone tõmbamine matemaatiliste eri distsipliinide vahel kooli praktikas ei ole soovitav. Matemaatika õppimise eesmärgiks koolis on varustada õpilasi matemaatiliste vilumuste ja teadmistega, õpetada neid iga matemaatilise küsimuse lahendamisel iseseisvalt valima vastavaid vahendeid kõigest oma teadmiste tagavarast, mis neil on olemas. Mida rohkem sidemeid kujuneb aritmeetika ja teiste matemaatiliste distsipliinide vahel, seda parem.

II peatükk.

NATURAALARVU ÕPETUS.

§ 6. Suuline ja kirjalik numeratsioon.

Alustades õppetööd V klassis tuleb matemaatika õpetajal kõigepealt tegelda numeratsiooni küsimusega. Mitmekohaliste arvude numeratsiooni küsimuse kordamisega algabki töö aritmeetika alal keskkoolis.

Oma praktilises tegevuses puutub inimene kokku vajadusega loendada asjade suuri hulki, ning kümnendnumeratsiooni kordamist ongi hea alustada *kümnekaupa loendamise* võtte vaatlemisega. Kujutleme, et meil on suur kuhi tuletikke, ning nõutakse täpselt loendada, kui palju neid on. Kuidas seda teha, et tagada loendamise täpsus ja kiirus ning ka kontrollimise mugavus? Väga soodus on järgmine viis. Seome esmalt iga kümme tikku ühte *kimpu*. Nüüd on meil üksikute tikkude virna asemel teatav arv kimpe ja mitte rohkem kui üheksa üksikut tikku, mis jäid kimpu

sidumata; paigutame nüüd kimbud kümne kimbu kaupa ühte k a r p i, üksikuid kimpe, mis jäid karpi panemata, ei ole üle üheksa. Teeme nüüd igast kümnest karbist ühe p a k i, mähkides need, näiteks, paberisse. Nüüd on meil teatav arv pakke ja mitte üle üheksa üksiku karbi. Igast kümnest pakist teeme nüüd k o m p s u, mässides iga kompsu tugevasse pakkimispaberisse (üle jääb mitte üle üheksa üksiku paki, iga kümne kompsu paigutame ühte k a s t i (üksikuid kompse jääb mitte üle üheksa). Oletame, et saime ainult kolm kasti, — edasi minna pole enam tarvis. Teeme kokkuvõtte: on olemas mitte rohkem kui üheksa üksikut tikku, mitte üle üheksa üksiku kimbu, kümme tikku igas kimbus, mitte üle üheksa üksiku karbi, igas karbis kümme kümmet, s. o. sada tikku igas karbis, mitte üle üheksa paki, igas pakis kümme sada, s. o. tuhat tikku igas pakis, mitte üle üheksa üksiku kompsu, kümme tuhat tikku igas kompsus, ja kolm kasti, kus igaühes on kümme kompsu, s. o. sada tuhat tikku.

Kui tagada vajalik näitlikkus, näidates asju, millest kõneldakse, või kasutades jooniseid, omandavad õpilased kindlalt kümnendnumeratsiooni põhilise idee: l o e n d a d e s ü k s i k u i d e s e m e i d (ühelisi) k u n i k ü m n e n i j a v õ t t e s i g a k ü m m e ü h e l i s t u u e k s k õ r g e m a k s l o e n d a m i s e ü h i k u k s, v õ i m e l o e n d a d a i g a s u g u s e h u l g a e s e m e i d.

Kui õpilased on saanud selge ja ereda, seega ka püsivalt meeldejääva kujutluse kümnekaupa loendamisest, siis ei ole neil raske omandada ka kogu suulise ja kirjaliku kümnendnumeratsiooni küsimust, meelde tuletades ja täiendades seda, mis nad algkoolis on õppinud: järkude ja klasside nimetused, nulli kasutamine puuduvate järguühikute märgina, oskus veata lugeda ja üles kirjutada mis tahes mitmekohalist arvu.

Märgime mõned üksikasjad.

1) Kümnendnumeratsiooni selgitamist soodustab väga hariliku kontori arvelaua kasutamine, millest üks eksemplar peab olema klassis. Seda lihtsat ja kättesaadavat riista ei tohi ignoreerida.

2) On täiesti piisav, kui piirduda ainult naturaalarvude viie esimese klassiga, s. o. miljarditest (parem kasutada seda üldtuntud terminit, mitte aga vananenud kahemõttelist terminit «biljon») ja triljonitest mitte kaugemale minna. Järgnevate klasside nimetusi (kvadriljon, kvintiljon jne.) praktikas üldse ei kasutata; nende asemel kasutatakse kümne astmeid, mida edaspidi tuleb ka õpilastele õpetada.

3) Erilist tähelepanu nõuab number null. Kuni on tegemist ainult numeratsiooniga, tähistab see number antud järgu ühikute puudumist. Sõna «null» tuleb ladinakeelsest sõnast «nullus» = «ei mingi».

4) Numeratsiooni kordamist on kasulik siduda meetrimõõdustiku mõõtude kordamisega. Mitmesuguste mõõtude, eriti pindala ja ruumala mõõtude vahelised seosed esitavad suurepäraseid näiteid suurtest arvudest: ühes ruutmeetris on miljon ruutmillimeetrit, 1 kuupmeeter on miljard kuupmillimeetrit jne. Huvitav ja kasulik on lahendada mõned järgmist laadi ülesanded: «Kui suur on miljoni (ja seejärel miljardi) tuletiku üldpikkus, mis on paigutatud otsakuti, nagu raudtee rööpad?» Siinjuures õpilased ise tehku kindlaks, et hariliku tuletiku pikkus on 5 cm, ja esitagu need pikkused näitlikult, võrreldes neid näiteks Moskva ja Vladivostoki vahelise kaugusega. Sääraseid ülesandeid koostavad õpilased heameelega ise, kui neid selleks ergutada.

5) Õppe- ja metoodilises kirjanduses tehakse rangesti vahet terminite «number» ja «arv» vahel: numbrid on märgid, mille abil tähistatakse arve; kümnendnumeratsioonis on ainult 10 numbrit. Kõnekeeles tarvitatakse sõna «number» ka arvu tähenduses (näiteks «nimetada ümmargune number», «kontrollnumber» jne.). Aritmeetika tundides tuleb õpilastelt nõuda termini «number» tarvitamist selles tähenduses, nagu matemaatikas on tavaks, selgitades ka selle sõna teist, kõnekeele tähendust.

6) Peale kümnendnumeratsiooni tundmise peavad õpilased saama mõiste ka rooma numeratsioonist. Kuigi V klassi programmis seda ei ole nimetatud, on seda väga soovitav siiski õpetada kas või selles väikeses ulatuses, nagu see on Kisseljovi aritmeetika õpikus käsitletud. On teada niisugused väga kahetsemisväärsed arusaamatused tegelikus elus, mis tulid, näiteks, sellest, et segati ära arvud IV ja VI. Aritmeetika kordamisel vanemais klassides on positsiooniprintsiibi paremaks selgitamiseks kasulik vaadelda kümnendsüsteemist erinevaid arvusüsteeme, nagu kahendsüsteem, kolmendsüsteem jne.

7) Vanemais klassides võib soovitada ka ringitöös lahendada raskemaid ülesandeid, mis on seotud numeratsiooni küsimustega, nagu näiteks: «Mitu viiekohalist arvu saab kirjutada, kasutades mitte muid numbreid kui 0, 1, 2, 3?» — «Kui naturaalarvud kirjutada järjest üksteise järel, siis missugune number asub mingil kindlal kohal, näiteks 2845634-ndal kohal?» — «Näidata kõik niisugused kolmekohalised arvud, mis on võrdsed oma numbrite faktoriaalide summaga.» — «Kuidas mõista üleskirjutust $7 \cdot 8 = 62$?»

Õpilastes äratab alati suurt huvi küsimus niinimetatud «maagilistest kaartidest», mis on seotud kahendsüsteemiga, ning küsimus võimalusest kaaluda mis tahes arv gramme ühest kuni $\frac{1}{2}(3^{k+1} - 1)$, omades 1, 3, 9, 27, ... 3^k grammiseid pomme, mis on seotud numeratsiooni kolmendsüsteemiga, jt.

§ 7. Neli aritmeetilist tehet.

Tavaliselt tulevad algkooli lõpetanud V klassi üsna kindlate vilumustega nelja aritmeetilise tehte sooritamises mitmekohaliste arvudega (halvem on lugu peast arvutamisega — sellest tuleb juttu edaspidi), kuid ikkagi tuleb õpilaste teadmisi kontrollida ja mõnd asja korrata. Kõige sagedamini esineb vigu jagamisel, näiteks, üritades jagada 75 555 arvuga 365, mõnel õpilasel õige jagatise 207 asemel võib tulla 27. Samuti pälvivad tähelepanu niisugused korrutamise juhtumid, kus andmeis on null keskel või lõpus.

Nelja aritmeetilise tehte kordamisel on tarvis pidevalt nõuda tehete teostamise õigsuse kontrollimist: liitmist kontrollitakse selle tehte teiskordse sooritamise teel liidetavate teissuguse järjestusega, lahutamist kontrollitakse liitmisega, korrutamist teiskordsel korrutamisel, vahetades tegurite kohad, jagamist kontrollitakse korrutamisega. Vaevalt on otstarbekohane aega kulutada kontrollimise erivõtetele arvude 9 ja 11 abil; see sobib tugevamaile õpilastele individuaalseks ülesandeks ja ringitöö teemaks, samuti nagu arvutuste abivahendite vaatlemine — korrutiste tabelid, Neperi pulgad, aritmomeeter. Seevastu vene arvelaua kasutamine kõigi õpilaste poolt liitmise ja lahutamise sooritamiseks on väga soovitav.

Nelja tehte kordamise töö mitmekohaliste arvude korral on loomulikult ühendatud niisuguste harjutusülesannete lahendamisega, kus esinevad sulud; siinjuures on tarvis enne korrata tehete järjekorra ja sulgude kasutamise reegleid, mis kokkuvõttes on järg-

mised: 1) kui antud avaldises on ainult I astme tehted, s. o. liitmine ja lahutamine, siis nad tehakse selles järjekorras, nagu nad on kirjutatud (vasakult paremale); 2) kui avaldises on ainult II astme tehted, s. o. korrutamine ja jagamine, siis ka need tuleb teha üleskirjutuse järjekorras (vasakult paremale); 3) kui esinevad I ja II astme tehted ning ei ole sulgusid ega rõhtsat joont jagamise märgina, siis tehakse enne II astme tehted, seejärel I astme tehted, näiteks,

$$5 + 12 \cdot 3 = 5 + 36 = 41;$$

4) igasugune kõrvalekaldumine neist kolmest reeglist osutatakse sulgudega: esmalt sooritatakse sulgudes olevad tehted. Rõhtjoon tähendab ühtaegu jagamise märki ja asendab sulgusid. Avaldises $(5 \cdot 8) : 10 = 4$ on sulud üleliigsed, kuid avaldises $60 : (3 \cdot 15) = 4$ on nad tarvilikud. Hiljuti esitatud ettepanekul teha korrutamine enne jagamist, mis kõrvaldab kahetsusväärse lahkumineku aritmeetika ja algebra vahel, ei ole seni edu olnud (vt. sellest [II, 7]).

Mitmekohaliste arvudega nelja tehte laitmatu sooritamise oskuse saavutamine on V klassi matemaatika õpetaja põhiliseks ülesandeks algkoolis läbivõetu kordamisel. Õpilastel peab olema selge kujutlus iga tehte mõttest, suutes näiteid tuua nende kasutamisest, nad peavad oskama eristada jaotamist võrdseiks osadeks (näiteks, 15 cm : 3 = 5 cm) mahutusjagamisest (15 cm : 3 cm = 5), peavad teadma andmete ja tulemuste nimetusi, andmete ja tulemuste vahelisi seoseid, peavad teadma, kuidas muutub tulemus sõltuvalt andmete muutumisest, osates hästi eristada suurendamist nii ja nii mitme ühiku võrra suurendamisest nii ja nii mitu korda.

Märgime mõned üksikasjad, mis puudutavad nelja tehte kirjaliku sooritamise tehnikat. Summa ja vahe arvutamist alustatakse madalamast järgust (paremalt vasakule, kuid kahe andme korral võib resultaadi kirjutada korraga vasakult paremale. Korrutamisel ei ole lubatav kirjutada osakorrutisi, mille kõik numbrid on nullid. Kui korrutataval ja korrutajal nullist erinevate numbrite arvud erinevad, siis on kasulikum vähema numbrite arvuga tegur võtta korrutajaks. Nullidega lõppevate arvude jagamisel tuleb jagatavas ja jagajas ühepalju nulle lõpust ära jätta, kuid seejuures peab silmas pidama, et siis jääk moondub: nii annab 600 jagamine 70-ga jagatises 8 ja jäägis 40, kuid 60 jagamine 7-ga annab sama jagatise, jäägis aga 4.

On väga hea, kui V klassi õpilased teavad summa ja korrutise selliseid omadusi, nagu: naturaalarvude summa ja korrutis on alati olemas ning andmetega üheselt määratud, — kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse ja distributiivsuse omadus; kuid kogemus näitab, et nende omaduste praktiline kasutamine V klassis on võimalik, ilma et nendega eraldi tegeldaks, mida võib teha edaspidi algebra õppimisel. Iga V klassi õpilane saab kergesti aru, et summa $27 + 12 + 8$ leidmiseks võib 27-le liita korraga $12 + 8 = 20$, kuid alati ei õnnestu tagada oskust seletada seda kui summa assotsiatiivsuse omaduse rakendamist. On väga meelitav seada endale eesmärgiks algkoolis läbivõetu kordamisel saavutada kõigi nende teoreetiliste teadmiste omandamine, millel põhinevad neli tehet mitmekohaliste arvudega, kas või sellel kujul, nagu nad on käsitletud Kisseljovi aritmeetika õpikus (I osas), kuid seda saab soovitada ainult tugevamaile õpilastele.

Tehete tulemuste muutumise küsimusele sõltuvalt andmete muutmisest tuleb piisavalt tähelepanu pühendada: siin on meil tegemist suuruste-vaheliste

funktsionaalse seose lihtsaimate juhtumitega. Õpilased peavad omandama mitte üksnes vastavate teoreemide sõnastused, vaid oskuse neid ka praktiliselt kasutada. Näiteks, on teostatud mingi lahutamine, seejärel aga on vaja teostada see lahutamine samal vähendatava väärtusel, kuid 5 võrra suurema lahutatava väärtusel, siis õpilased peavad taipama, et arvutust ei ole tarvis uuesti teha: uus tulemus saadakse endisest lihtsalt selle vähendamise teel 5 võrra. Andmete ja tulemuste vaheliste seoste teadmist saab hästi kinnistada lihtsaimate võrrandite lahendamise teel, nagu

$$5 + x = 9,\ x - 7 = 12,$$
$$x \cdot 5 = 30,\ 48 : x = 6 \text{ jne.}$$

Siin on kerge saavutada täpsete sõnastuste kindel teadmine: iga liidetav on võrdne summaga, millest on lahutatud teised liidetavad; vähendatav võrdub vahega, millega on liidetud lahutatav, jne.

Viienda klassi õpilastel on kasulik, jõukohane ja huvitav lahendada sedalaadi keerukamaid ülesandeid. Näiteks, pärast avaldise

$$[(16\,000 : 32 - 1\,640 : 82) : 15 \cdot 7\,000 - 192\,000] : 40$$

väärtuse arvutamist (Berezanskaja stabiilne ülesannete kogu, Nr. 368, 1), saades vastuse 800, võib selles avaldises mis tahes andme asendada tähega x ja siis leida see x. See on tehete andmete ja tulemuste vaheliste seoste suurepärane rakendamine, pika arutluse läbiviimise harjutamine kui ka lahenduse õigsuse kontrollimise vahend. Kui, näiteks, esimene arv asendada tähega x, siis saame ülesande: leida x, kui

$$[(x : 32 - 20) : 15 \cdot 7\,000 - 192\,000] : 40 = 800.$$

See lahendatakse nõnda: «Milline on siin viimane tehe?» — Nurgelistes sulgudes oleva tundmatu arvu jagamine 40-ga, mis jagatises annab 800. «Millega võrdub see tundmatu arv?» — Ta on $800 \cdot 40 = 3\,200$, sest jagatav võrdub jagatisega, mis on korrutatud jagajaga. Nüüd oleme saanud:

$$(x : 32 - 20) : 15 \cdot 7\,000 - 192\,000 = 32\,000.$$

Analoogilised arutlused annavad lõppude lõpuks, et

$$x = 16\,000,$$

ning me oleme veendunud, et kõik on õigesti tehtud.

Võtame veel ühe ülesannete tüübi, mida praktikas harva kasutatakse ja mis esimesel pilgul paistavad väga rasketena, kuid äratavad alati suurt huvi, ja neid lahendatakse meeleldi. Need on ülesanded numbrite taastamisest, mis figureerisid mitmekohaliste arvudega sooritatud mingi tehte üleskirjutuses, kuid hiljem kustutati. Näiteks, nõutakse kindlaks teha, missugused numbrid on asendatud tähekestega järgmises korrutamises:

$$\begin{array}{r} *8* \\ \times\ \ *8 \\ \hline 4*** \\ *** \\ \hline ****0 \end{array}$$

On ilmne, et esimese osakorrutise viimane number on 0, seepärast korrutatava üheliste number võib olla kas 0 või 5. Korrutatava esimene number on tingimata 5, sest vähema numbri korral esimene osakorrutis oleks kõige rohkem $485 \cdot 8 = 3\,880$, suurema numbri korral see osakorrutis oleks $680 \cdot 8 = 5\,440$ või rohkem. Kui oleme kindlaks teinud, et korrutatav on kas 580 või 585, siis võib kohe ütelda, et korrutaja kümneliste number võib olla ainult 1,

ning ülesanne on täielikult lahendatud; saime kaks vastust: $580 \cdot 18 = 10\,440$ ja $585 \cdot 18 = 10\,530$, mingeid muid võimalusi ei saa olla.

Sääraseid «aritmeetilisi mõistatusi» leidub brošüüris [II, 29 b], kuid neid on kerge ka ise koostada.

Palju kasulikke ajaloolisi andmeid nelja tehte kohta mitmekohaliste arvudega leiab lugeja raamatuis [I, 12] ja [II, 32].

§ 8. Peast arvutamine.

Ei ole vähimatki kahtlust selles, et oskus teha lihtsamaid arvutusi ilma üleskirjutuseta ja ilma igasuguste arvutamise abivahenditeta on väärtuslik vilumus, mille kool peab õpilastele andma. See on niinimetatud «peast arvutamine». Algkool pöörab sellele palju tähelepanu ja saavutab selles üldiselt märkimisväärseid tulemusi, kuid keskkooli matemaatika õpetajad sageli alahindavad selle tähtsust, mille tulemusena vanemate klasside õpilased pahatihti arvutavad kirjalikult isegi sääraseid lihtsaid juhtumeid nagu $58 + 35$ või $17 \cdot 8$. Niisugune olukord ei ole normaalne: peale ilmse praktilise kasu on peast arvutamise vilumuste omandamisel suur kasvatuslik tähtsus, sest see arendab mälu, õpetab mõtteid kontsentreerima, aitab luua enesekontrolli harjumuse, teritab taibukust. Oluline on siin see, et peast arvutamine ei toimu rangesti kindlaksmääratud reeglite järgi nagu kirjalik arvutamine, vaid iga antud juhtumi iseärasuste ärakasutamisel arvutuste lihtsustamiseks. Ei ole liialdus ütelda, et peast arvutamine on laste loova töö lihtsaimaks vormiks aritmeetika õppimisel. Asja oskuslikul korraldamisel kujuneb peast arvutamine lastele lõbusa spordi taoliseks, mille kujukaks näiteks on revolutsioonieelse tuntud pedagoogi S. Ratšinski töö, mis on jäädvustatud tema õpilase N. Bogdanov-Belski suurepärasel pildil «Peast arvutamine» (asub Tretjakovi Galeriis Moskvas).

V klassi matemaatika programmis on punkt «Peast arvutamise võtted». Seletuskirjas kõneldakse peale kirjalike arvutuste ka peast arvutuste vajadusest täis- ja murdarvudega algebra ja geomeetria ülesannete lahendamisel. Milline on siis nende vilumuste ulatus peast arvutamisel, mis keskkooli õpilased peavad kindlasti omandama? Algkoolis teostatakse neli tehet täisarvudega 100 piiris alati peast, kui nii andmed kui ka otsitav tulemus on ühe- või kahekohalised; on lubamatu, et sääraseid lihtsaid arvutusi keskkooli õpilased sooritavad kirjalikult; nullide juurdekirjutamine sääraste arvude lõppu ei muuda muidugi midagi arvutamise teostamisel. On täiesti teostatav kõigi nelja tehte peast sooritamise nõue naturaalarvudega alla 100, ka sel juhtumil, kui tulemus on üle 100. Teatavaid raskusi tekitab kahekohalise arvu korrutamine kahekohalise arvuga, kuid need raskused on ületatavad.

Tagades peast arvutamise üldvõtete kindla omandamise, s. o. sääraste võtete, mis on rakendatavad nimetatud piirides kõigi arvude puhul, on tarvilik näidata õpilastele võimaluse korral ka erivõtteid, mis võimaldavad suurt öko-

noomiat ka väljaspool neid piire. Siia kuulub kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse omaduse kasutamine (näiteks, niisuguseil juhtumeil:

$$59 + 85 + 41 = (59 + 41) + 85 = 100 + 85 = 185,$$
$$49 \cdot 25 \cdot 4 = 49 \cdot (25 \cdot 4) = 49 \cdot 100 = 4\,900),$$

ümardamine (näiteks:

$$254 - 98 = 254 - 100 + 2 = 156),$$

mõnede kergesti meeldejäävate tulemuste rakendamine, nagu $4 \cdot 25 = 100$ (kasutatakse korrutamisel ja jagamisel 25-ga) või $37 \cdot 3 = 111$ (hõlbustab kahekohaliste arvude korrutamist 37-ga).

On palju erivõtteid, mis teatavail juhtumeil lihtsustavad tehete sooritamist. Meenutame kahekohalise arvu korrutamist 11-ga, kus korrutatava numbrite summa kirjutatakse ta kümneliste ja üheliste numbri vahele, teise kümne arvude korrutamist, mis selgub valemist:

$$(10 + a)(10 + b) = 100 + 10 \cdot (a + b) + ab,$$

kahe arvu korrutamist, mille kümnete numbrid on ühesugused ja üheliste numbrite summa on 10, mis selgub valemist:

$$(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc$$

ja mis võimaldab efektselt saada korraga tulemused, nagu

$$68 \cdot 62 = 4\,216,$$
$$114 \cdot 116 = 13\,224,$$
$$9\,997 \cdot 9\,993 = 99\,900\,021 \text{ jne.}$$

Edu peast arvutamise kultuuri kasvatamisel on kindlustatud, kui õpetaja ise tunneb neid võtteid ning kasutab neid iga kord, kui see on otstarbekohane. On olemas hulk raamatuid, kus neid võtteid käsitletakse (näiteks [II, 10, 29 *a*, 37]), ja peab tungivalt soovitama neid uurida, kuid peaasi on õpetaja oma initsiatiiv, tähelepanelik suhtumine igasse arvutusse, visadus parimate teede otsimisel selle teostamiseks.

Peast arvutamisega tegeldakse tundides suuremalt jaolt juhuslikult, kui esinevad sobivad arvutused, kuid praktiseeritakse ka lühikeste (5—10-minutiliste) eri tunnietappide kasutamist peast arvutamise harjutamiseks, mida võib vaadelda iseliikl «ajude gümnastikana», mis on väga kasulik vahend klassis meeleolu loomiseks ning soodustab edasist tõsist ja raskemat tööd. Neid tunnietappe teostatakse mitmel viisil. Ülesande võib anda suuliselt, nõudes, et kõik mõtleksid ilma midagi üles kirjutamata («Pange sulepead lauale, vihikud kinni!»), ja kes saab vastuse, tõstku käsi. Kui on saadud mitu vastust, õigeid ja valesid, siis ei tule kohe ütelda, missugused on õiged. Parem on lasta vale vastuste autoreil endal jutustada, kuidas nad said vastuse, ja näidata seega kogu klassile vigade põhjused, hoiatades nende kordamise eest. Võib anda kõigile õpilastele väikese tüki paberit, et neile kirjutada ainult vastused, mitte aga arvutusi, ning kirjutada tahvlile mõned lihtsad harjutusülesanded; igaüks, kellel arvutused on tehtud, läheb tahvli juurde ja kirjutab oma tulemused vastavasse lahtrisse. Niipea kui tahvli juures tekib järjekord, katkestatakse tahvlile üleskirjutamine ning algab tulemuste arutlus.

Nagu kõikjal, nii ka peast arvutamise õpetamisel on vaja mõõtu pidada. Tuleb ette, kuigi harva, et õpetaja harrastab peast arvutamist matemaatika õpetamise teiste külgede kahjuks, nõudes peast arvutamist niisuguseil juhtumeil, kus kirjalik arvutus on ilmselt kasulikum: säästes kriiti ja paberit raiskab ta ebasäästlikult oma õpilaste vaimset energiat.

§ 9. Arvude jaguvusest.

V klassi programmi kuulub väike osa arvuteooriast (ehk, nagu mõnikord kõneldakse, teoreetilisest aritmeetikast), mis on vajalik murdude edukaks õppimiseks. See on jaguvuse tunnused, kordarvu ja algarvu mõiste, algtegureiks lahutamine, antud arvude suurima ühisteguri (SÜT) ja vähima ühiskordse (VÜK) leidmine. Selle osa õppimiseks soovitab programm eraldada 20 tundi, millest täielikult piisab. Omandamiseks kuuluv kogu materjal on Kisseljovi aritmeetika õpikus hästi käsitletud, kusjuures peenkirjas on antud rida täiendusi, mida võib kasutada eriülesannetena tugevamaile õpilastele ja ringitööks. Aritmeetika ülesannete kogus on küllaldaselt materjali iseseisvaks harjutamiseks; ülesandeid klassis lahendamiseks on parem võtta teistest allikatest.

Arvude jaguvuse lihtsaimate küsimustega algab keskkoolis õpilaste suhtes uue matemaatilise materjali õppimine. On äärmiselt tähtis kohe algusest peale võtta õige joon, taotledes kõigi uute terminite täiesti selget arusaamist, oskust anda vastavaid definitsioone, õpitavaist lauseist arusaamist kui ka täpsust nende sõnastamisel, ja peaasi — teooria ja praktika vajalikku ühtsust. Hoopiski püüdmata anda mingit naturaalarvu definitsiooni, peab tagama, et igaüks kindlasti teaks, et naturaalarvud on arvud 1, 2, 3, 4, ..., mida võib üksteise järele kirjutada, ühtki arvu vahele jätmata ja seejuures ilma lõputa. V klassis kasutatakse terminit «täisarv» samas tähenduses nagu «naturaalarv», kuid edaspidi nimetatakse täisarvudeks kõiki arve:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$

ja seepärast on ka V klassis parem kõnelda mitte täisarvudest, vaid naturaalarvudest.

Esimestes tundides, kus kasutatakse terminit «jagaja», tekivad raskused selle termini tähenduse kahesuse pärast: seni õpilased nimetasid jagajaks seda arvu, millega teist antud arvu jagatakse, sõltumata sellest, missugune jääk siinjuures tuleb; nüüd aga nimetatakse antud arvu jagajaks ainult niisugust arvu, millega antud arv jagub jäägita. Varem, teostades näiteks 18 jagamist 5-ga, nimetasime 5 jagajaks ja 3 jäägiks, nüüd aga hakkame rääkima, et 5 ei ole arvu 18 jagaja, ja et arvu 18 jagajaiks on ainult arvud 1, 2, 3, 6, 9, 18. Sellest põhilisest mõistest arusaamise ja ta kindla omandamise saab tagada teatavais piirides võetud kõigi naturaalarvude jagajate tabeli koostamisega, mille algus on toodud siin:

Arvud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nende jagajad	1	1,2	1,3	1, 2, 4	1,5	1, 2, 3, 6	1,7	1, 2, 4, 8	1, 3, 9	1, 2, 5, 10	1,11	1, 2, 3, 4, 6, 12

Säärase tabeli kollektiivne koostamine toimub alati hoogsalt: kõik proovivad tähelepanelikult jagada, teatavad rõõmsa rahuldusega saadud tulemusi, vaidlevad, teevad parandusi, konstateerivad hulga silmatorkavaid fakte, teevad ratsionaliseerimise ettepanekuid (näiteks: «Milleks kirjutada 1, see jagaja on ju kõigil arvudel!»). Lapsed märkavad varsti, et igale leitud jagajale vastab teine jagaja, mis võrdub esimesega jagamisel saadud jagatisega: kui näiteks on leitud, et 28-l on jagaja 4, siis on leitud ka jagaja $28 : 4 = 7$. On tarvis peatada siit järelduval kogu protseduuri tunduval lihtsustamisel: järjestikuseid naturaalarve kui jagajaid on tarvis proovida ainult nii kaua, kuni jagatises saame arvu, mis on jagajast vähem. Nii näiteks leides, et arvul 28 on jagaja 1 (jagatis 28), 2 (jagatis 14), 4 (jagatis 7), proovime edasi jagada 5-ga (jagatis 5, jääk 3), 6-ga (jagatis 4, jääk 4), nüüd katkestame proovimise: kõik jagajad, mis on suuremad kui 6, on meil juba leitud (7, 14, 28). Klassis teostatud tabeli koostamise töö lõpetatakse ülesande andmisega: tahvlile üleskirjutatud tabel korralikult vihikusse ümber kirjutada, kodus aga jätkata seda nii palju, kui palju keegi jõuab. Kulutades säärase tabeli koostamiseks terve tunni, võidab õpetaja palju kogu järgneva jaguvuse õpetuse õppimiseks: on tagatud kujutluste varu, mis tuleb edaspidi läbitöötamisele, on tekitatud huvi, iga õpilase vihikusse on ilmunud väärtuslik õppevahend, mida edaspidi saab mitmel korral kasutada.

Järgmiseks tunniks peab õpetaja koostama suure seinatabeli kõigi naturaalarvude jagajaist vähemalt kuni 100. Kui see tabel varakult seinale riputada, siis lapsed omal algatusel võrdlevad seda oma tabeliga ja veel enne tunni algust teevad oma vihikuis vajalikud parandused.

Jagajate tabeli koostamise töö teeb väga loomulikuks terminite «algarv» ja «kordarv» tarvituselevõtmise, esimese niisuguste arvude tähistamiseks, millel on kaks jagajat ja ainult kaks jagajat, teise niisuguste arvude tähistamiseks, millel on kolm või rohkem kui kolm jagajat. Arv üks, millel on üksainus jagaja, ei kuulu ei algarvude ega kordarvude hulka.

Järjekorras on küsimus jaguvuse tunnuseist. Selle lahendamist on hea siduda tabeli vaatlemisega. Missuguseil naturaalarvudel on jagaja 2 ja missuguseil seda jagajat ei ole? Missugune on viimane number neil arvudel, mis jaguvad 2-ga, ja missugune neil, mis 2-ga ei jagu? Kas tabeli järgi tehtud oletus (2-ga jaguvad need ja ainult need arvud, mille viimane number on 0, 2, 4, 6, 8) on õige ka väljaspool tabeli piire? Alustanud vaatlustest jõuame lõppude lõpuks järgmise teoreemi loogilise tõestuseni: 2-ga jaguvad kõik need arvud, mille viimane number on 0, 2, 4, 6, 8; 2-ga ei jagu kõik need arvud, mille viimane number on 1, 3, 5, 7, 9. See viimane sõnastus, mis tavalisest on mõnevõrra pikem, on lastele arusaadavam, kuid peab taotlema, et oleks täiesti selgitatud ka lühem sõnastus («2-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis lõpevad paarisnumbriga»).

Edasi tehakse samas korras kindlaks 5-ga jaguvuse tunnus

(esmalt vaatlused jagajate tabeli järgi!). Et kõige lühemat teed mööda jõuda 4-ga ja 25-ga jaguvuse tunnusteni, võib soovitada, vaatlusteks aega mitte kulutades, alustada kohe arvu kujutamisega kahe liidetava summana, mida kasutati 2-ga ja 5-ga jaguvuse tunnuste loogilisel tõestamisel (ainult selle vahega, et seal arvu kujutati kümneliste arvu ja üheliste arvu summana, kuid siin peab seda kujutama summana, mille liidetavaiks on ta sajaliste arv ja kahest lõppnumbrist moodustatud arv). Pärast seda kulgeb ladusalt ka raskeimate tunnuste, 3-ga ja 9-ga jaguvuse tunnuste õppimine.

Lõpetanud küsimuse jaguvuse tunnuseist, siirdutakse kordarvude kujutamisele algarvude korrutisena. Siin on ka hea alustada tabeli koostamisega:

$$4 = 2 \cdot 2 = 2^2;$$
$$6 = 2 \cdot 3;$$
$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3;$$
$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2;$$
$$10 = 2 \cdot 5;$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3;$$
$$14 = 2 \cdot 7 \text{ jne.}$$

Õpilastel ei teki mingit kahtlust selles, et iga kordarvu saab säärasel viisil esitada algarvude korrutisena ning säärase esitamise võimaluse ja ühesuse tõestamine on V klassis enneaegne. Siin tuleb kogu tähelepanu pühendada asja tehnilisele küljele (eeldades, et küsimusseadest arusaamine on juba tagatud). Tegureiks lahutamise tavalise võtte kasutamise oskus mitte väga suurte arvude korral omandatakse kergesti (tulbavõte). Lihtsamail juhtumeil on soovitav lahutus kirjutada korraga, tehes vajalikud arvutused peast. Näiteks, soovides arvu 720 lahutada algtegureiks ning tähele pannes, et ta on 72 ja 10 korrutis ehk 8 ja 9 ja 10 korrutis, kirjutame kohe

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Tuleb vaadelda ka mõnd raskemat juhtumit, nagu näiteks niisugune, kus nõutakse algtegureiks lahutada arv 3 599 (siin on kaks algarvulist jagajat: 59 ja 61). Asi seisab selles, et lapsed, olles veendunud, et 2-, 3-, 5-, 7- ja 11-ga jagada ei saa, ruttavad otsustama, et antud arv on algarv. Tuleb täpselt selgitada, et on tarvis proovida jagada antud arvu kõigi järjestikuste algarvudega seni, kuni jagatises tuleb vähem arv kui jagaja, alles siis on täiesti põhjendatud otsustus, et antud arv on algarv. Peab õhutama suurema algarvude tabeli kasutamist, mis on paigutatud Kisseljovi aritmeetika õpiku lõppu, hoides seega kokku proovimisteks kulutatavat aega. Väga suuri arve, mille algtegurid on ka suured, võib anda algtegureiks lahutada ainult tugevamaile õpilastele täiendava individuaalse töö korras (näiteks $10\,201 = 101^2$).

Olles õppinud arve lahutama algtegureiks, võib tagasi pöörduda antud arvu kõigi jagajate leidmise küsimuse juurde ja läbi arutada täielikuma võtte, mis on näidatud stabiilses õpikus (kombineerides algtegurid kõigil võimalikel viisidel kahekaupa, kolmekaupa, nelja-

kaupa jne.). Kuid see võte on viienda klassi õpilastele väga raske ning edaspidi ei ole teda vaja, seetõttu võib täiesti rahulduda sellega, kui õpilane oskab antud arvu kõik jagajad leida proovimisel, kusjuures jaguvuse tunnuste teadmine võimaldab proovimiste arvu tunduvalt vähendada.

Lõpuks vaadeldakse kahe antud arvu ühisteguri, suurima ühisteguri (SÜT), ühiskordse, vähima ühiskordse (VÜK) mõisteid ning sellele järgnevat üldistust mitme tahes antud arvu kohta. On kasulik alustada mingi erijuhtumi vaatlemisega, näiteks võtta arvud 18 ja 24, leida kummagi kõik tegurid, leida nende suurim ühistegur, välja kirjutada kummagi arvu mõned kordsed, seejärel mõned ühiskordsed, alates vähimast ühiskordsest. Suurima ühisteguri leidmist järkjärgulise jagamise võttega V klassis ei vaadelda tavaliselt üldse, kuid see on suurepärane teema täiendavaks tööks (stabiilse õpiku kasutamisega). Kui aeg lubab, on hea lahendada mitmesuguseid tekstülesandeid, kus rakendatakse SÜT ja VÜK mõisteid (mõned säärased ülesanded leiduvad stabiilses ülesannete kogus), kuid edaspidise töö suhtes ei ole mingit kahju, kui piirduda ainult antud arvude SÜT ja VÜK leidmise oskusega ja ülesannete lahendamine nende mõistete rakendamiseks edasi lükata, kuni nende küsimuste juurde tullakse tagasi vanemais klassides aritmeetika kordamisel.

VI klassis on aritmeetika lõpetamiseks antud 66 tundi, kusjuures on ette nähtud kogu aritmeetika kursuse kordamine, mis lõpetatakse VII klassis. Säärasel kordamisel on loomulik mõnd programmi küsimust süvendada ja lahendada mitmesuguseid raskemaid ülesandeid.

§ 10. Arvu mõiste esimene laiendamine: arv null.

V klassi õpilased, tegeldes algkoolis õpitud aritmeetika kordamise ja arvu jaguvuse küsimustega, teevad ise seda märkamata põhimõtteliselt tähtsa sammu: hakkavad nimelt nulli vaatlema kui arvu, laiendades seda arvu mõistet, mis neil varem oli olemas, kus õpiti ainult naturaalarve. Algkoolis null on ainult teatavate järguühikute puudumise märk. Õppides arvude jaguvust, hakatakse nulliga teostama aritmeetilisi operatsioone nagu arvuga. Näiteks aritmeetika õpikus § 81, kus hakatakse kasutama jagaja mõistet, loeme: «Märgime, et null jagub mis tahes arvuga (peale nulli), kusjuures jagatiseks on samuti null. Tõepoolest, sest $a \cdot 0 = 0$». Niisiis tuleneb, et nulli jagajaks on iga naturaalarv; null on ainus täisarv, millel on lõpmatu palju jagajaid (märgime, et teaduses omistatakse terminile «nulli jagaja» eriline, teine tähendus). Et nulli jagamise võimalust põhjendada, tuleb liitmistehte kordamisel märkida, et liita võib mitte üksnes naturaalarve, vaid ka mis tahes naturaalarvu nulliga ja ümberpöördult ($a + 0 = a$, $0 + a = a$), ja nulli nulliga ($0 + 0 = 0$); korrutamistehte kordamisel tuleb eri juhtumeina vaadelda nulli korrutamist mis tahes naturaalarvuga, mis

teostatakse korrutise üldise definitsiooni põhjal, et korrutis on võrdsete liidetavate summa:

$$(0 \cdot a = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0),$$

ja mis tahes naturaalarvu korrutamist nulliga erilise täiendava definitsiooni põhjal $(a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0)$, mida laiendatakse ka nulli korrutamisele nulliga $(0 \cdot 0 = 0)$. On tarvis vältida levinud viga: võrdust $a \cdot 0 = 0 \cdot a$ ei saa mingil juhtumil põhjendada korrutise kommutatiivsuse omadusega; see pole midagi muud kui naturaalarvu nulliga korrutamise definitsioon, mis täiendab naturaalarvuga korrutamise definitsiooni kui võrdsete liidetavate liitmist. Vaadeldes nulli arvuna, saame võimaluse paljusid lauseid tunduvalt lihtsamalt sõnastada; näiteks saab võimalikuks 2-ga jaguvuse tunnuse lühike üldkasutatav sõnastus («2-ga jaguvad kõik need ja ainult need arvud, mis lõpevad paarisnumbriga»). Kui nulli arvuks mitte lugeda, siis me ei saaks ütelda, et naturaalarvude mittetäielik jagamine (jagamine jäägiga) on alati võimalik.

Vaatelt nullile kui ühikute puudumise märgile üleminek nulli käsitusele arvuna toimub õpilastel täiesti loomulikult ja neile isegi märkamata. Igaüks nõustub kergesti, et kui a rublale, mis mul käes on, lisada veel b rubla, mis on ümbrikus, siis saab kokku $a + b$ rubla, ja kui ümbrik on tühi, siis mul jääb kätte sama summa, mis mul oli enne, ning et selle viimase asjaolu võib väljendada valemiga $a + 0 = a$. Käsitust nullist kui arvust V klassis süvendada on enneaegne, kuid juba siin tuleb siiski täie kindlusega selgitada, et nulliga jagamine on võimatu, lähenedes sellele küsimusele kahel viisil. Esiteks, jagada mingi naturaalarv a nulliga, tähendab leida, mitu korda 0 mahub arvusse a, mitu korda peab võtma 0 liidetavana, et saada a; on selge, et kuimitu nulli me ka võtaksime, nende liitmine ei anna midagi muud kui nulli; ei saa koguda a rubla, kui igaühelt võtta 0 rubla. Teiseks, jagada a arvuga 0 tähendab leida niisugune arv, mis nulliga korrutamisel annab a, kuid mis tahes arvu x korrutamisel nulliga saame 0, seepärast arvu a jagamisel arvuga 0 jagatist pole olemas.

III peatükk.

HARILIKUD MURRUD.

§ 11. Esialgne tutvumine lihtsamate murdudega.

Lapsed astuvad V klassi, omades murdudest juba mõningaid teadmisi: IV klassi programmi kuulub murdude $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{10}$ tundmaõppimine, sealhulgas ka ühesuguste ja üksteise kordsete nimetajatega murdude liitmine ja lahutamine. Ülesandeid murdudele lahendatakse algkoolis mitte nende üldise teooria alusel, vaid

«vaba arutluse teel», juhindudes konkreetsest kujutlusest ja tervest mõistusest.

Asudes V klassis murdude tundmaõppimisele, on ülimal määral kasulik korrata kõiki neid teadmisi, vaadeldes rida järgmiselaadilisi lihtsaid ülesandeid: «Üheks loosungiks kulub $1\frac{1}{2}$ m ja teiseks $\frac{3}{4}$ m riiet. Kui palju riiet kulub kaheks loosungiks kokku?» Selliseid ülesandeid on kasulik lahendada kahel viisil: esiteks lahendada, kõrvaldades murrud üleminekuga sentimeetritele (100 cm : 2 = = 50 cm; 100 cm + 50 cm = 150 cm; 100 cm : 4 = 25 cm; 25 cm × × 3 = 75 cm; 150 cm + 75 cm = 225 cm; 225 cm = 200 cm + + 25 cm = $2\frac{1}{4}$ m), kusjuures enne tuleb kontrollida, kas kõik õpilased omavad selget kujutlust poolest ja veerandist, ning siis lahendada ilma üleminekuta sentimeetritele.

Sageli avaldatakse arvamust, et mingisugusele esialgsele tutvumisele murdudega ei tasu aega kulutada, sest õpilased peavad varsti omandama murdude üldist teooriat, mis võimaldab kõiki selliseid ülesandeid lahendada teatavate reeglite alusel. Selle kohta tuleb teha kaks vastuväidet: 1) definitsioonide ja reeglite tundmaõppimine jääb paratamatult formaalseks, kui see ei baseeru konkreetsete kujutluste rikkalikul varul, mis kõige paremini kujuneb nimelt sedalaadi «vaba arutluse teel» lahenduvate ülesannete najal; 2) on väga soovitav, et oskus lahendada lihtsamaid ülesandeid murdudega mitte üldiste reeglite alusel, vaid iga eri olukorra iseärasuste ärakasutamisega säiliks õpilasel kogu järgneva töö kestel. Kui kahju on vaadata, kuidas õpilane, kes kindlalt omandanud murdude korrutamise reegli, kuid täielikult unustanud oma esimesed sammud murdudega tutvumisest, näiteks $237\frac{3}{8}$ korrutamiseks 2-ga teostab arvutusi üldise reegli järgi, selle asemel, et teostada eraldi täisosa ja murru korrutamist.

Kogemused näitavad, et oskus lahendada lihtsaid ülesandeid, toetudes nende selgele mõistmisele ja sellele tervele mõistusele, mida leidub küllaldasel määral igal V klassi astuval lapsel, osutub väga kindlaks ja edaspidi äärmiselt kasulikuks. Järgnev teooria peab näitama, kuidas tuleb toimida keerukamail juhtumeil, kus sellest «vabast arutlusest» juba ei piisa, kuid selle õppimine kaugeltki ei tee üleliigseks neid esialgu omandatud harjumusi.

Et see esialgne töö harilike murdudega tooks maksimaalset kasu, on vaja igati kanda hoolt, et iga vaadeldav küsimus seataks mitte abstraktselt, vaid konkreetselt ja näitlikult. Neid murde, millest kõneldakse, peab õpilane n ä g e m a ning seejuures võimalikult mitmel kujul: need on võrdsed sirglõikude osad ja võrdsed ringisektorid kui ka ühesuguste väikeste esemete (tikkude, kivikeste) kogud, mis on jaotatud võrdseiks osadeks; tunni osi kella numbrilaual saab näitlikuks teha minutiosuti poolt moodustatud täisringi võrdsete osadena. On soovitav, et õpilased mitte ainult ei näeks kõiki neid näitlikke vahendeid, vaid ka looksid neid ise, tehes lihtsaid jooniseid, joonistusi, valides mudelite jaoks vajalikku materjali, mis juhtub kodus käepärast olema. Kulutades nädala (7 tundi) kõige selle kordamiseks, mis murdudest oli õpitud algkoolis, võidab õpetaja palju kõige järgneva selge mõistmise ja kindla omandamise mõttes.

§ 12. Viienda klassi matemaatika programmis ettenähtud teoreetiliste teadmiste ulatus murdude alalt.

Murdude tundmaõppimine moodustab V klassi aritmeetika kursuse peamise sisu. Sellele pühendatakse väga palju aega: harilikele murdudele 90 tundi, kümnendmurdudele, mis ei ole muud kui hari-

like murdude erijuhtumid, 50 tundi, protsentidele, mis kujutavad endast kümnendmurdude erijuhtumeid, 30 tundi, seega kokku 170 tundi. See on täiesti küllaldane selleks, et kindlustada nii teadlik teoreetilise külje omandamine kui ka püsivate praktiliste oskuste kujunemine.

Mõnelt poolt on soovitatud õpetada kümnendmurde enne harilikke, sest tehete teostamine on kümnendmurdudega lihtsam kui harilike murdudega: üleminek tehetelt naturaalarvudega, mis on kirjutatud kümnendsüsteemis, tehetele kümnendmurdudega nõuab ainult mõnd õige lihtsat reeglit murrumärgi asukoha kohta. Niisugune murdude tundmaõppimise järjekord on ette nähtud näiteks raamatus [II, 25], mis üldiselt sisaldab tööks V klassis väga palju huvitavat ja väärtuslikku materjali. Kuid ettepanek, vaadelda kümnendmurde enne harilikke, on kahtlemata ekslik: õpetada lapsi näiteks korrutama kümnendmurruga, andes neile dogmaatiliselt reeglid koma asukohast korrutises, ilma et selgitataks murruga korrutamise mõtet, tähendab asja teoreetilise külje omandamise teadlikkuse ohverdamist puhttehniliste oskuste omandamise kiiruse huvides. Kuid asja teoreetilist külge tuleb endastmõistetavalt selgitada üldkujuliste, s. o. harilike murdude najal, ja mitte erikujuliste — kümnendmurdude abil.

Niisiis, programmis näidatud murdude tundmaõppimise järjekord on täiesti õige: enne harilikud murrud, siis nende erijuhtumid — kümnendmurrud, s. o. harilikud murrud nimetajaga 10, 100, 1000 jne., mis kümnendsüsteemi numeratsioonis lasevad end kirjutada ilma nimetajata ja tehete poolest alistuvad väga lihtsaile reegleile, lõpuks kümnendmurdude erijuhtumid — protsendid, s. o. praktikas eriti sagedasti rakendamist leidvad kümnendmurrud nimetajaga 100.

See vajadus esmalt tundma õppida harilikke murde ja hiljem nende erijuhtumeid — kümnendmurde — ei takista kaugeltki seda, et juba harilike murdude tundmaõppimisel kasutatakse kümnendmurdude mõnusat kirjutusviisi ilma komata. See kirjutusviis leiab elus püsivalt rakendamist (ajalehed, plakatid jne.) ja pole mingit mõtet keelata V klassi õpilasel selle kasutamist. Harilike ja kümnendmurdude samaaegse tundmaõppimise soovitavuse kohta leidub näpunäiteid Sohhor-Trotskil [II, 42].

Sama kehtib ka märgi % kohta, mis tema laialdase kasutamise tõttu praktilises elus tuleb tarvitusele võtta võimalikult varakult.

V klassis tundmaõppimisele kuuluv teadmiste ulatus harilike murdude alalt on programmis täpselt näidatud. Kõik need teadmised on antud Kisseljovi aritmeetika õpikus (IV osa), kusjuures teadmised protsentidest on antud samas osas. Peenes kirjas trükitud paragrahvid ei ole kohustuslikud (murru muutumisest tema liikmete suurenemisel ühe ning sama arvu võrra, taandamatuist murdudest, jaotuvuse seaduse laiendamisest murdudele) ja pakuvad tugevamaile õpilastele head materjali individuaalseiks ülesanneteks. Paragrahvides 115 ja 116 on antud terminoloogia. Jaotades mingi suuruse, mis on võetud ühikuks (tervikuks), võrdseteks osadeks, saame vastava hulga selle ühiku jagusid (mida mõnikord nimetatakse ka «alikvootseiks osadeks»): $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ jne.

Murruks nimetatakse ühiku üht jagu või kogumikku, mis koosneb ühiku mitmest ühesugusest jaost, ja segaarvuks — täisarvu koos murruga. Murde ja segaarve nimetatakse ühiselt murdarvudeks, mis vastandatakse täisarvudele (naturaalarvudele).

Vastandades murdarve täisarvudele, nagu seda soovitab kooli-

õpik, tuleb meeles pidada, et iga täisarv (naturaalne) on esitatav murruna mis tahes nimetajaga: $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \ldots$. Seega murru mõiste osutub üldisemaks kui (naturaalse) täisarvu mõiste. Viimast saab vaadelda eri liiki murruna, nimelt murruna, mille nimetaja on 1, või murruna, mille nimetaja on meelevaldne, kuna lugeja on selle kordne. Pärast negatiivsete arvude tarvituselevõtmist on sobiv täis- ja murdarvud ühendada üheks ühiseks r a t s i o n a a l a r v u mõisteks, kuid V klassis on veel vara seda terminit tarvitusele võtta.

Peatükis «Harilikud murrud» õppimisele kuuluv teoreetiline materjal on väga vähene. Kokkuvõttes seisneb see selle selgitamises, mis on murd, murdude mõne omaduse tundmaõppimises ja nelja tehte omandamises murdudega. Selle teadlik ja püsiv omandamine tagab võimaluse lahendada kõige mitmekesisemaid ülesandeid, milleks kulubki suurem osa sellele peatükile ettenähtud ajast.

Praktikas leiavad kasutamist ainult väikeste nimetajatega murrud, mistõttu pole mingit mõtet treneerida õpilasi tehetes harilike murdudega, mille nimetajad on mitmekohalised arvud. Murdarvude aritmeetika ideeline külg selgub lihtsate näidete varal, ja kui see on omandatud, siis saavad õpilased vajaduse korral hakkama igasuguste murdudega, kui aga neil on kasutada küllaldaselt aega.

§ 13. Arvu mõiste teine laiendamine: murd kui arv.

Murdude süstemaatilisele õpetamisele asuva õpetaja esimeseks mureks on luua õpilastel selge arusaamine sellest, mida kujutab endast mingi murd, näiteks $\frac{7}{12}$. Nad peavad mõistma, et mingi ese (tervik, mida sageli nimetatakse ühikuks) on jaotatud 12 võrdseks osaks ja neid osi on võetud 7. Vaadeldes rida konkreetseid näiteid murdude moodustamisest õige erineva loomusega ühikuist (lõigud, ringikesed, mitmesugused esemed, millega õpilasel on tegemist koolis või kodus), mis võimaldavad jaotamist võrdseiks osadeks, jõuavad õpilased lõpuks niisugusele murru mõistmisele: nad hakkavad nägema abstraktset arvu — seitset kaheteistkümnendikku mis tahes ühikust (mis võimaldab jaotamist).

Murru mõiste selgitamiseks on eriti kasulik lahendada mitmesuguseid jaotamisülesandeid, millel on tõeliselt eluline ja laste huvidele lähedane sisu. Jaotada 8 õuna võrdselt nelja seltsimehe vahel on väga lihtne, aga kuidas jaotada nende vahel 9 või 10 või 11 õuna? Muutes arve, jõuame üldisele järeldusele, et mis tahes arv õunu (ja igasuguseid muid osadeks jaotuvaid esemeid) saab jaotada võrdselt mis tahes arvu osanike vahel, kui esmalt rakendada hästi tuntud täisarvude jagamist ja siis jäägi iga ühik jaotada vastavaks arvuks võrdseteks osadeks. Kui õpilased oskavad iga täisarvu kindlalt, täpselt ja kiiresti jagada täisarvuga, näiteks 150 jagada 7-ga, teadlikult saades tulemuse segaarvuna $21\frac{3}{7}$ või liigmurruna $\frac{150}{7}$, siis sellega on tehtud esimene tähtis samm

murdude tundmaõppimises. Märgime järgmise, mõnevõrra raskema jaotamisülesande, mida on kasulik anda kui taibukust arendavat ülesannet: jaotada 5 õuna 6 lapse vahel nii, et kõik saaksid võrdselt ja et ühtki õuna poleks vaja jaotada 6 osaks (igaüks kolmest õunast lõigatakse pooleks, igaüks ülejäänud kahest lõigatakse kolmeks võrdseks osaks, iga laps saab $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$).

Murru mõistest arusaamist soodustab väga ülesannete lahendamine «osa leidmisele arvust». Et leida näiteks $\frac{3}{8}$ paberiribast, võib eduga kasutada selle järjestikust kahekorra murdmist. Et leida, kui pikk on $\frac{3}{17}$ paberiribast, mille pikkus on 136 mm, leiame esiteks jagamise teel ühe seitsmeteistkümnendiku tema pikkusest, mis on 136 mm : 17 = 8 mm, ja siis kolm seitsmeteistkümnendikku, mis võrdub 8 mm · 3 = 24 mm.

Pöördülesande lahendamine — arvu leidmine tema antud osa järgi — ei nõua õpilastelt ka midagi muud peale arusaamise sellest, mis on murd, ja on jõukohane juba murdude tundmaõppimise esimestel sammudel. Ülesande konkreetsel ja näitlikul seadmisel lahendub ta raskusteta: õpetaja murrab klassi nähes pabeririba järjestikku kahekorra, eraldab sellest $\frac{3}{8}$ ja peidab ülejäänud osa ära; ära mõõtes eraldatud osa ja leides, et selle pikkus on näiteks 57 cm, seab ta küsimuse, kui pikk oli kogu võetud pabeririba. Õige vastus saadakse ilma igasuguste raskusteta: 57 cm on vaja jagada 3-ga, et leida $\frac{1}{8}$ riba pikkusest, ja jagatiseks saadud arv 19 (cm), siis korrutada 8-ga. Ülesanded leida $\frac{3}{4}$ arvust 24 ja leida arv, millest $\frac{3}{4}$ on 24, kui neid seada abstraktsel kujul, teevad õpilastele harilikult raskusi, mistõttu mõned õpetajad vaatlevad neid mõnevõrra hiljem, nimelt esimest murruga korrutamise puhul ja teist murruga jagamise puhul. Minule näib õigemana teine tee: need kaks ülesannet ei nõua midagi muud peale selge arusaamise sellest, mis on murd, ja neid on vaja lahendada murdudega töötamisel päris alguses. Siin kumbki neist ülesandeist lahendub kahe tehtega; murruga korrutamise ja jagamise õppimisel toimub asjale kasulik tagasipöördumine nende ülesannete juurde, kusjuures tutvutakse kummagi lahendamisega ühe tehte abil.

Nimetame lõpuks kolmanda põhilise ülesande murdudest, mille vaatlemine on niisamuti täiesti sobiv murdudega töötamisel päris alguses: leida, missuguse osa ühest antud arvust moodustab teine antud arv, s. t. leida kahe antud arvu suhe. Esialgu on parem mitte kasutada terminit «suhe», piirdudes konkreetsete küsimustega, nagu: millise osa meetrist moodustab 20 cm, 30 cm, 40 cm, 52 cm, 75 cm?

Murru mõiste võib lugeda õigesti ja püsivalt omandatuks, kui õpilased on võimelised teadlikult lahendama konkreetseid ülesandeid kõigist kolmest nimetatud põhitüübist.

Pärast seda, kui on saavutatud täielik, V klassile jõukohane aru-

saamine sellest, mis on murd, vaadeldakse kolme küsimust: küsimust ühe ja sama murru esitamisest mitmel kujul, mis viib murru taandamise reeglile ja valmistab ette murdude teisendamist ühenimelisteks, siis sellega väga tihedalt seotud küsimust murru muutumisest tema ühe liikme suurenemisel ja vähenemisel mingi arv korda ja lõpuks kahe murru võrdlemise küsimust.

Lahendades ülesannet — täisarvu jagamine täisarvuga, puutume kokku juhtumitega, kus üldise reegli järgi saadud vastust saab asendada teise, praktiliselt mõnusamaga. Kui näiteks on vaja 4 õuna jaotada võrdselt 8 isiku vahel, siis iga õuna 8-ks võrdseks osaks lõikamise ja igale $\frac{4}{8}$ andmise asemel on parem lõigata iga õun pooleks ja, saanud üldse kaheksa poolt, anda igale $\frac{1}{2}$. Niiviisi veendume, et murrud $\frac{4}{8}$ ja $\frac{1}{2}$ on (ühe ja sama ühiku korral) võrdsed. Kogudes sedalaadi näidete varal mõnevõrra konkreetset materjali, on kerge teha üldine järeldus esiteks sellest, et iga murdu on võimalik kujutada vähemate osade abil (kooliõpikus on seda operatsiooni vaadeldud paragrahvis «Murdarvude võrdsus ja mittevõrdsus», kuid paremini vastaks sellele termin «osade peenestamine») ja, teiseks, sellest, et mõnd murdu on võimalik kujutada suuremate osade abil («osade ülestamine» või, nagu tavaliselt öeldakse, «murdude taandamine»). Osade peenestamine on alati võimalik ja seejuures lõpmatult mitmeti, sest iga osa saab asendada 2, 3, 4, 5 jne. korda vähemate osadega, kuna murru taandamine on võimalik ainult mõnikord, ja siiski ainult mõnel viisil, mille hulgas alati leidub üks, mis korraga annab suurima võimaliku lihtsustuse (näiteks murdu $\frac{12}{18}$ saab kujutada ainult üheksandikes, kuuendikes ja kolmandikes, kuid mitte mingisuguseis suuremais osades). Pärast seda ei ole raske jõuda kahe tuntud reegli juurde, mis väljendatakse sõnades või valemina $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ ja mis lugemisel vasakult paremale annab reegli murru esitamisest vähemais osades, s. o. «osade peenestamise» reegli, kuid lugemisel paremalt vasakule annab reegli murru esitamisest suuremais osades, s. o. «murru taandamise» reegli.

Nagu sümboli $\frac{a}{b}$ tähenduse täielik selgumine moodustab harilike murdude tundmaõppimise esimese olulise sammu, niisamuti moodustab valemite $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ ja $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$ tähenduse selgumine teise sellise sammu. Õpilane peab oskama seletada, et siin on tegemist mingi suurusega (tervikuga, mingi ühikuga), mis jaotatakse esiteks b võrdseks osaks ja siis (jaotades iga saadud osa veel m vähemaks võrdseks «osakeseks») üldse bm võrdseks «osakeseks»; kui oli võetud a esialgset (suuremat) osa, siis neist saab nüüd am osakest, ja meil on alust väita, et murrud $\frac{a}{b}$ ja $\frac{am}{bm}$ väljendavad üht ja sama

suurust, mis on kord esitatud suuremais, teine kord vähemais osades. Sellise lihtsa arutlusoskusega peab kaasnema oskus tuua konkreetseid näiteid (mis mingil juhtumil ei tohi olla päne õpitud, vaid õpilaste endi poolt leitud). Samalaadilisi tulemusi saab ja tuleb saavutada ka murdude taandamise reegli alal.

Vaadelnud valemeid $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ ja $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$, on loomulik seada küsimus selle kohta, mis toimub murruga, kui mingi arv korda suurendada või vähendada ainult murru lugejat või ainult murru nimetajat (termin «kordselt muutumine» on lühem, kuid raskem, ja see on parem tarvitusele võtta ainult kordamisel). Konkreetsete näidete varal on kerge jõuda üldisele järeldusele, mis ütleb, et muutumatuna püsiva nimetaja korral on murru lugeja suurendamine mingi arv korda samaväärne murru enda suurendamisega sama arv korda $\left(\frac{3\cdot 5}{8}=\frac{3}{8}\cdot 5;\ \frac{am}{b}=\frac{a}{b}\cdot m\right)$ ja muutumatuna püsiva lugeja korral on murru nimetaja suurendamine mingi arv korda samaväärne murru enda vähendamisega sama arv korda $\left(\frac{3}{3\cdot 5}=\frac{3}{8}:5;\ \frac{a}{bm}=\frac{a}{b}:m\right)$. Murru ühe või teise liikme korrutamine mingi naturaalarvuga m on alati võimalik, kuid mõnikord on võimalik ka jagamine. Kuidas see jagamine mõjub murru suurusele? Selle küsimuse lahendus, mis loomulikult tuleneb murru mingi ühe liikme mingi arv korda suurendamise küsimuse lahendusest, leiab kinnitust rea konkreetsete näidete vaatlemisel ning väljendatakse lõpuks vastavate sõnaliste reeglitena ja üldiste valemitena: $\frac{a:m}{b}=\frac{a}{b}:m;\ \frac{a}{b:m}=\frac{a}{b}\cdot m$. Märgime veel kord, et järelduste ja reeglite sõnalised formulatsioonid peavad V klassis seisma esikohal: nende omandamine tuleb saavutada igal juhtumil, kuna valemid seisavad teisel kohal (nende omandamine on väga soovitav, kuid alati ei ole võimalik neid kõigilt nõuda).

Kui küsimus murru suuruse muutumisest tema ühe liikme suurenemisel või vähenemisel mingi arv korda on teadlikult omandatud, siis sellega on saadud võimalus lahendada suur hulk harjutusja kalkulatsioonülesandeid murdude korrutamise ja jagamise kohta mis tahes täisarvuga. Tegeldes sellega peab õpetaja tähelepanelikult jälgima seda, et ei esineks õpitud reeglite mehhaanilist rakendamist, et iga õpilaste poolt teostatud operatsioon murruga omaks näitlikku tagapõhja (kas või võrdseiks osadeks jaotatud lõigu või võrdseiks sektoreiks jaotatud ringi kujul).

Murdude täisarvuga jagamise kätteoppimisega on õpilased teinud kolmanda olulise sammu murdude tundmaoppimise teoreetilise külje omandamisel. Edasi tuleb neljas samm — kahe murru suuruse võrdlemine: esmalt võrreldakse kaht võrdsete nimetajatega murdu, siis kaht võrdsete lugejatega murdu ja lõpuks erinevate lugejate ja nimetajatega murde, jõudes nii vajadusele teisendada murrud ühenimelisteks, kusjuures selle teisenduse omandamine ei

tekita mingisuguseid raskusi, kui hoolitseda kahe ja enama arvu vähima ühiskordse kohta varem õpitud materjali kordamise eest. Murdude teisendamisega ühenimelisteks lõpebki harilike murdude peatüki sissejuhatava osa õppimine; edasi järgneb nelja tehte tundmaõppimine.

Teeme veel mõned erilaadi märkused.

1. Sageli vahetavad õpilased ära mõisted «niimitu korda suurem» ja «niimitme ühiku võrra suurem», millest esimene on ühenduses korrutamisega, teine — liitmisega. Kummagi mõiste paremaks omandamiseks on kasulik pärast seda, kui on vaadeldud küsimust murru muutumisest tema lugeja ja nimetaja suurendamisel mingi arv korda ja nimetaja suurendamisel mingi arv korda, vaadelda küsimust sellest, mis toimub murruga, kui tema liikmeid üheaegselt suurendada või vähendada ühe ning sama arvu võrra, lahendades näiteks järgmise ülesande: «Mis toimub murruga $\frac{4}{5}$, kui tema lugejat ja ühtlasi ka nimetajat suurendada 1 võrra?» Sama küsimuse seame ka murru $\frac{5}{4}$ kohta. Kooliõpikus on vaadeldud niisuguste ülesannete lahendamist üldkujul, kuid see on V klassi õpilastele liiga raske ja jäetakse harilikult kasutamata. Erikujul on ta hoopis lihtsam ja teda saab teha õpilastele huvitavaks, kui siduda kas või järgmise praktilise ülesandega: «Ühe laua taha pandi viis külalist ja neile anti neli arbuusi; teise laua taga istus kuus külalist ja neile anti ühe arbuusi võrra enam; on vaja võrrelda seda, mis sai iga külaline esimeses lauas, sellega, mis ta sai teises lauas, eeldades, et jaotus kummaski lauas toimus võrdselt.»

Nimetame järgmist, õige head ja pisut taipu nõudvat ülesannet, mille lahendusele satutakse kiiresti, kui andmed esitada näitlikult: ilma ühenimelisteks teisendamiseta selgitada, kumb kahest murrust on suurem: $\frac{5}{6}$ või $\frac{6}{7}$, $\frac{6}{7}$ või $\frac{7}{8}$, üldiselt $\frac{a}{a+1}$ või $\frac{a+1}{a+2}$. Lahenduse saab otsekohe, kui võrrelda, kui palju kummaski murrus puudub arvust 1.

2. Murdude tundmaõppimise algastmel suurt tähtsust omavate mitmesuguste jaotamisülesannete lahendamisel on kasulik näidata neid praktilisi võtteid, mis kergendavad lõikude ja ringide jaotamist võrdseiks osadeks: paberiribade ja -ringide kahekorra murdmine, mis kergesti võimaldab jaotamist 2-ks, 4-ks, 8-ks, 16-ks, 32-ks võrdseks osaks, ringjoone jaotamine 6-ks võrdseks osaks ja selle kaudu jaotamine 3-ks, 12-ks, 24-ks, 48-ks võrdseks osaks (koos kahekorra murdmisega), lõigu ja kaare jaotamine mistahes arvuks võrdseiks osadeks süstemaatilise proovimise teel: selleks, et jaotada ringjoon näiteks viieks võrdseks osaks, võtame sirkliga lõigu, mis on raadiusest natuke suurem, ja paigutame selle 5 korda mööda ringjoont; saades pisut üle või alla terve ringjoone, jaotame selle ülejäägi või puudujäägi viieks võrdseks osaks (silma järgi) ja parandame vastavalt sirkli teravike vahelist kaugust; pärast seda kordame operatsiooni; harilikult pärast teist parandust viga ei ole enam märgatav.

3. Kindlustades murru $\frac{a}{b}$ mõistmist teatava operatsioonina mis tahes ühiku suhtes, operatsioonina, mida õpilased peavad oskama kindlalt ja teadlikult teostada, niipea kui see ühik ning a ja b väärtused on antud, teostame sellega arvu mõiste teise laiendamise (esimeseks oli nulli tarvituselevõtmine); nulliga laiendatud naturaalarvude hulga asemel on meil nüüd mittenegatiivsete ratsionaalarvude hulk. Süvendada seda küsimust on V klassis muidugi enneaegne; kui murde on võimalik võrrelda nende suuruse poolest ja nendega saab teostada aritmeetilisi operatsioone, nagu naturaalarvudegagi, siis loetakse neid arvudeks, kuid naturaalarvudest erinevat liiki arvudeks.

§ 14. Murdude liitmine ja lahutamine.

Harilike murdude liitmine ja lahutamine kulgeb eriliste raskusteta, muidugi, kui õpilased on omandanud murru mõiste ja need operatsioonid murdudega, mida vaatlesime eelmises paragrahvis. Teisiti ei saagi olla, sest need kaks tehet murdudega ei sisalda mingit uut ideed: ühesuguste nimetajatega murdude liitmine ja lahutamine on oma olemuselt samane nimega arvude liitmise ja lahutamisega, mida õpilased tunnevad hästi juba algkoolist, ja murdude teisendamine ühenimelisteks on täiesti analoogiline erinevais ühikuis antud nimega arvude teisendamisega samades ühikuis väljendatud nimega arvudeks. Igaühele on selge, mida tähendab liita 3 kg ja 4 kg või 3 kg ja 750 g; niisamuti ei paku ka $\frac{3}{8}$ ja $\frac{5}{8}$ või $\frac{3}{8}$ ja $1\frac{1}{4}$ liitmine mingisuguseid printsipiaalseid raskusi (erinevalt näiteks korrutamisest, kus kohtume vajadusega üldistada selle operatsiooni definitsiooni), muidugi eeldusel, et on täiesti mõistetud, mis on murd. Need murdude liitmise ja lahutamise definitsioonid, mis on toodud Kisseljovi õpikus, tekitavad õpilastele harilikult teatavat arusaamatust: mis on neis siis uut? Ilma igasuguse kahjuta asjale võib need välja jätta, minnes konkreetsete näidete juurest otse üldiste reeglite juurde.

Märgime järgmised üksikasjad.

1. Segaarvude liitmisel ja lahutamisel teisendavad õpilased sageli need enne liigmurdudeks. See on täiesti üleliigne, isegi kahjulik keerukaks tegemine. Normaalne täielik skeem on järgmine:

$$4\frac{2}{15}+8\frac{9}{10}+3\frac{5}{6}=4\frac{4}{30}+8\frac{27}{30}+3\frac{25}{30}=15\frac{4+27+25}{30}=15\frac{56}{30}=16\frac{26}{30}=16\frac{13}{15};$$

$$12\frac{1}{9}-5\frac{7}{12}=12\frac{4}{36}-5\frac{21}{36}=11\frac{40}{36}=5\frac{21}{36}=6\frac{40-21}{36}=6\frac{19}{36}.$$

Püsiva oskuse omandamisel jäetakse sellest täielikust skeemist üksikud lülid välja.

2. Nõudes keerukamate arvutuste puhul täielikku üleskirjutust, tuleb kategooriliselt keelata niisuguste kirjutuste kasutamist juhtumeil, mis ei paku peast arvutamiseks mingisuguseid raskusi, näiteks $6\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}=10\frac{1}{4}$.

3. Üldisi võtteid tundma õppides tuleb, nagu alati, kasutada lihtsustusi, mida võimaldab antud erijuhtum. Näiteks summa $2\frac{1}{2}+5\frac{11}{104}+1\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=9\frac{11}{104}$ arvutamist saab teostada peast, kui pöörata tähelepanu sellele, et $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

§ 15. Murdude korrutamine.

Kui need kaalutlused murru muutumisest tema liikmete korrutamisel ja jagamisel ühe ning sama arvuga, millest oli juttu § 13 on omandatud, siis murru korrutamine täisarvuga on sisuliselt

omandatud. Kuid siiski on kasulik enne murdude korrutamise üldjuhtumi vaatlemist veel kord tagasi pöörduda selle küsimuse juurde. On vaja meelde tuletada naturaalarvude korrutamisel kasutatud korrutise definitsiooni (*ab* on *b* liidetava summa, milles iga liidetav on *a*), märkides eraldi korrutiste $a \cdot 1$ ja $a \cdot 0$ mõtte, ja näidata, et see arusaamine korrutisest jääb kehtima ka siis, kui *a* on murd. Sõnastades siit tuleneva ja valemiga $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$ väljenduva reegli murru korrutamisest täisarvuga, on vaja peatuda mõnel tehnilisel üksikasjal: selgitada taandamise otstarbekohasust enne *a* ja *m* korrutamist; näidata, et segaarvu korrutamisel täisarvuga on alati kasulikum tema täis- ja murdosa eraldi korrutada, ja mitte teisendada teda liigmurruks. Printsipiaalne külg ei paku siin mingisuguseid raskusi.

Teisiti on olukord murruga korrutamisel, sest murrulise korrutaja puhul endine käsitus korrutisest kui võrdsete liidetavate summast on juba kõlbmatu: arvu *a* ei saa võtta liidetavana $\frac{3}{4}$ või $2\frac{1}{8}$ korda. On vajalik uus definitsioon korrutisele, seejuures niisugune, et täisarvulise korrutaja puhul see uus definitsioon annaks sama, mis endine (uus definitsioon peab olema endise üldistuseks ja endine peab olema uue erijuhtumiks) ja et tal oleksid samad põhiomadused, mis naturaalarvude korrutisel.

Puht-teoreetilisest küljest lahendub küsimus väga lihtsalt: defineerides korrutist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ kui murdu $\frac{ac}{bd}$ on kerge veenduda, et täisarvulise korrutaja puhul, kus $d = 1$, seda korrutist, mis võrdub $\frac{ac}{b \cdot 1}$ ehk $\frac{ac}{b}$ ehk $\frac{a}{b} \cdot c$ saab vaadelda *c* liidetavast koosneva summana, s. t. uus definitsioon osutub tõepoolest korrutise endise definitsiooni (kui võrdsete liidetavate summa) üldistuseks. Samuti ei tekita ka põhiomaduste kehtivuse tõestus mingisuguseid raskusi: murdude korrutis $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ on alati olemas, on korrutatava ja korrutaja andmisega üheselt defineeritud, on vahetuvuse omadusega $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)$, sest naturaalarvude korrutistel $ac = ca$ ja $bd = db$ on see omadus, on ühenduvuse omadusega, mis väljendub valemiga $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$ ja järeldub naturaalarvude korrutise assotsiatiivsusest, on liitmise suhtes jaotuvuse omadusega, sest kerge on veenduda valemi $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ õigsuses.

Seda murdude korrutamise küsimuse käsitlusviisi saab pidada soovitavaks keskkooli vanemais klassides, kus tuleb tegelda aritmeetika kordamisega. Viiendas klassis on vaja teissugust, mitte niivõrd loogiliselt, kuivõrd psühholoogiliselt lapsi veenvat küsimuseseadet, mis on rajatud rea otstarbekohaselt valitud ülesannete eel-

nevale vaatlusele, nagu see nüüd on üldiselt tunnustatud. Murdude korrutamise metoodika kohta on palju kirjutatud, on esitatud mitmed head mõtted selle raske küsimuse käsitlemiseks koolis. Minu tähelepanekute järgi annab paremaid tulemusi meetod, mis on rajatud mingi praktilise ülesande vaatlemisele, kus jääva korrutatava juures korrutaja omandab rea täisarvulisi kui ka murrulisi väärtusi (eeldatakse, et eespool, § 13 vaadeldud osa leidmine antud arvust kahe tehte abil on kindlalt omandatud). Esitame näite selle meetodi kasutamisest.

Kui on vaja leida 3 kg hind teades, et 1 kg maksab 15 rbl., siis tuleb 15 rbl. korrutada 3-ga, mis annab 45 rbl. (ülesanne lahendub naturaalarvuga korrutamise teel).

Kui on vaja leida, kui palju maksab $\frac{1}{5}$ kg sama hinna juures 15 rbl. kilogramm, siis tuleb 15 rbl. jagada 5-ga, mis annab 3 rbl. (ülesanne lahendub naturaalarvuga jagamise teel).

Kui on vaja leida, kui palju maksab $\frac{4}{5}$ kg sama hinna juures 15 rbl. kilogramm, siis ülesanne lahendub kahe tehtega: ühe korrutamise ja ühe jagamise teel naturaalarvuga.

Kui on vaja leida, kui palju maksab $2\frac{4}{5}$ kg sama hinna juures 15 rbl. kilogramm, siis ülesanne lahendub nelja tehtega: 15 rbl. $\cdot$ 2 = = 30 rbl.; 15 rbl. : 5 = 3 rbl.; 3 rbl. $\cdot$ 4 = 12 rbl.; 30 rbl. + 12 rbl. = = 42 rbl.

Teisendades segaarvu $2\frac{4}{5}$ liigmurruks, on siiski võimalik taandada see juhtum ka eelmisele.

Loomulikult tekib küsimus: kas on võimalik anda üks üldine reegel selle ülesande lahendamiseks sõltumatult sellest, missugusele kilogrammide hulga väärtusele vastavat hinda soovitakse määrata? Selgub, et selle üldise reegli saab iseenesest, kui võtta tarvitusele uus tehe — korrutamine murruga, mõistes selle all osa leidmist antud arvust: arvu 15 korrutamine murruga $\frac{1}{5}$ tähendagu $\frac{1}{5}$ osa leidmist arvust 15, s. o. arvu 15 jagamist 5-ga; arvu 15 korrutamine murruga $\frac{4}{5}$ tähendagu $\frac{4}{5}$ osa leidmist arvust 15, s. o. 15 jagamist 5-ga ja nii saadud arvu 3 korrutamist 4-ga; üldiselt, murru $\frac{a}{b}$ korrutamine murruga $\frac{c}{d}$ tähendagu $\frac{c}{d}$ osa leidmist arvust $\frac{a}{b}$, s. t. arvu $\frac{a}{b}$ jagamist arvuga d ja nii saadud murru $\frac{a}{bd}$ korrutamist arvuga c, nii et lõpptulemusena saadakse $\frac{ac}{bd}$.

Nii nimelt on lahendatud murru murruga korrutamise küsimus Kisseljovi «Aritmeetikas».

See korrutamise üldistamine on V klassi õpilastele alati raske. Võib soovitada mitte forsseerida käsitlust, vaid vaadelda iga mur-

dude korrutamise ülesande puhul kaht lahenduse varianti: üht, mis ei rakenda murruga korrutamist, ja teist, mis kasutab seda õpilastele uut tehet, ning lasta õpilastel endil otsustada, missugune viis on parem. Esialgu pooldavad peaaegu kõik õige kategooriliselt esimest viisi («nii on pikem, kuid selgem»), kuid järk-järgult kasvab teise viisi pooldajate arv ja lõpuks saabub silmapilk, kus sellega siiralt lepivad kõik, hinnates tema vaieldamatuid eeliseid ning loobudes oma kiindumusest vanasse, harjumuseks saanud tõlgendusse korrutisest kui võrdsete liidetavate summast.

Esitame ühe niisuguse ülesande näidislahenduse.

«Iga peenra kastmiseks kulub $3\frac{1}{2}$ ämbrit vett. Kui palju kulub vett $5\frac{3}{4}$ peenra kastmiseks?»

I lahendus (murruga korrutamiseta):

1. 5-le peenrale kulub $3\frac{1}{2} \cdot 5 = 15\frac{5}{2} = 17\frac{1}{2}$ (ämbrit);
2. $\frac{1}{4}$-le peenrale kulub $3\frac{1}{2} : 4 = \frac{7}{2} : 4 = \frac{7}{2 \cdot 4} = \frac{7}{8}$ (ämbrit);
3. $\frac{3}{4}$-le peenrale kulub $\frac{7}{8} \cdot 3 = \frac{7 \cdot 3}{8} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$ (ämbrit);
4. $5\frac{3}{4}$-le peenrale kulub $17\frac{1}{2} + 2\frac{5}{8} = 19\frac{9}{8} = 20\frac{1}{8}$ (ämbrit).

II lahendus (murruga korrutamisel):

$5\frac{3}{4}$-le peenrale kulub $3\frac{1}{2} \cdot 5\frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 23}{2 \cdot 4} = \frac{161}{8} = 20\frac{1}{8}$ (ämbrit).

Kui võtta mingi seda liiki ülesanne: «Kiirrong läbis minutis $1\frac{1}{5}$ km; kui pika tee läbib ta sama kiiruse puhul $4\frac{1}{2}$ minutiga?», siis seda saab lahendada mitte enam kahel, vaid juba kolmel viisil: peale ülalpool vaadeldud kahe viisi on võimalik veel lahendusviis, mis täiesti kõrvaldab murrud: $1\frac{1}{5}$ km = 1200 m; 1200 m · 4 = 4800 m; 1200 m : 2 = 600 m; 4800 m + 600 m = 5400 m ehk 5 km 400 m. See lahendusviis leiab ka pooldajaid, kuid nende arv kahaneb kiiresti, kui võtta sama ülesanne teissuguste murruliste andmetega, mis nii kergesti ei väljendu täisarvudes (näiteks kiirus on $1\frac{3}{16}$ km minutis).

Niisiis, selle aritmeetika kursuse kaheldamatult raskema momendi — murruga korrutamise — teadliku ületamise tagatiseks V klassis on usaldus õpilaste terve mõistuse vastu ja selle tehte uue tõlgenduse eeliste demonstreerimine konkreetsete näidete varal.

Õpetaja peab arvestama seda, et üheks asjaoluks, mis murdude

korrutamise õppimisel tugevasti häirib õpilasi, on arvu vähenemise nähtus selle arvu korrutamisel lihtmurruga: siin esineb nagu vastuolu terminiga («korrutada» — suurendada). Seda küsimust eraldi selgitades tuleb luua õige vaade murruga korrutamisele kui teatavale uuele tehtele, mille puhul mõned endise tehte (korrutamine täisarvuga) omadused püsivad, kuid nende kõrvale ilmuvad ka mõned uued omadused.

Kui uue tehte printsipiaalsed raskused on ületatud, siis vastava tehnika omandamine ei ole enam raske. Stabiilne ülesannete kogu sisaldab murdude korrutamise alalt küllaldasel määral harjutus- ja kalkulatsioonülesandeid. Nende hulgas eriti väärtuslikeks tuleb pidada geomeetrilise sisuga ülesandeid, nimelt ülesandeid ristküliku pindala määramise kohta, kui külgede pikkused väljenduvad murdarvudega (lahendus vajab tingimata joonist, kasutada tuleb kõiki ülalnäidatud viise) ja ülesandeid ringjoone pikkuse määramiseks tema antud läbimõõdu põhjal. Vastavate mõõtmiste abil tuleb enne kindlaks teha, et ringjoone pikkus on $3\frac{1}{7}$ korda tema läbimõõdust suurem, kusjuures algul on parem võtta ringjooned läbimõõduga 7, 14, 21, 28 jne. sentimeetrit. Ringjoone pikkuse ja diameetri suhte ligikaudse väärtuse $3\frac{1}{7}$ võib ette ütelda ja võtta see kontrollimisele. Selleks mõõdetakse näiteks ämbri põhja läbimõõt, korrutatakse see $3\frac{1}{7}$-ga, mõõdetakse siis (pabeririba abil) ämbri põhja ümbermõõt ja võrreldakse tulemusi.

Küllaldase harjutamise tulemusena peab õpilastel välja kujunema mitte ainult valemiga $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ väljendatava reegli formaalne tundmine, vaid ka veendumus, et iga ülesanne, mis täisarvuliste andmete korral lahendub korrutamise teel, lahendub niisamuti korrutamise teel ka siis, kui need täisarvulised andmed on asendatud murrulistega.

§ 16. Murdude jagamine.

Naturaalarvude jagamine teeb algkoolis õpilastele suuremaid raskusi kui korrutamine; murdude jagamisega on V klassis lugu just vastupidine: see nõuab tunduvalt vähem aega ja vaeva kui korrutamine. Asi on selles, et algkoolist õpilastele tuntud jagamise definitsioon («jagada üks arv teisega tähendab leida niisugune kolmas arv, mille korrutamisel teise arvuga saadakse esimene») jääb ka murdude puhul püsima.

Jagada murd $\frac{a}{b}$ murruga $\frac{c}{d}$ — see tähendab leida arv (murd) $\frac{x}{y}$, mis korrutamisel murruga $\frac{c}{d}$ annab $\frac{a}{b}$. Seega $\frac{xc}{yd} = \frac{a}{b}$, millest $\frac{x}{yd} = \frac{a}{bc}$ ja $\frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}$ (siin kasutame juba tuntud reegleid murru muutumisest

tema ühe liikme korrutamisel või jagamisel mingi arvuga). Niisugune murdude jagamise reegli tuletamine peab V klassis toimuma muidugi arvulistel näidetel.

On võimalik ka teine lähenemine murdude jagamisele. Sageli alustatakse terviku antud osa järgi selle terviku leidmise küsimuse vaatlemisega, millest kõnelesime juba eespool (§ 13), ja lahendatakse järgmisekujulised ülesanded:

Kui on vaja leida ühe kilogrammi hind teades, et 3 kg maksab 45 rbl., siis ülesanne lahendub ühe tehtega — jagamise teel naturaalarvuga (45 rbl. : 3 = 15 rbl.).

Kui on vaja leida ühe kilogrammi hind teades, et $3\frac{1}{2}$ kg eest tuli maksta 35 rbl., siis ülesanne lahendub kahe tehtega, millele eelneb segaarvu teisendamine liigmurruks $\frac{7}{2}$: esiteks leitakse, kui palju maksab $\frac{1}{2}$ kg, nimelt 35 rbl. : 7 = 5 rbl., siis 1 kg hind, nimelt 5 · 2 = 10 rbl.

Täpselt samuti (kahe tehtega) lahendub ka niisugune ülesanne, nagu 1 kg hinna arvutamine, kui on antud, et $\frac{4}{5}$ kg maksab 24 rubla: esiteks 24 rbl. : 4 = 6 rbl. (kui palju maksab $\frac{1}{5}$ kg?); siis 6 rbl. · 5 = = 30 rbl. (kui palju maksab 1 kg?).

Kui on vaja leida 1 kg hind teades, et $\frac{1}{5}$ kg maksab 8 rbl., siis ülesanne lahendub ühe tehtega (8 rbl. · 5 = 40 rbl.).

Siin tekib samuti, nagu murdude korrutamise reegli tuletamisel, loomulik küsimus: kas ei saaks neid nelja ühesisulist ülesannet, mis erinevad ainult arvuliste andmete poolest, lahendada ühe ning sama reegli alusel? Niisuguse kõigi juhtumite jaoks ühtse reegli saab, kui võtta tarvitusele uus tehe — jagamine murruga, tõlgendades seda kui tundmatu terviku otsimist tema antud osa järgi.

Minnes seda teed, seisab õpetaja jällegi järgmise probleemi ees: selgitada, et see uus tehe on ammutuntud tehte — täisarvuga jagamise üldistus ja et mitmesugused ülesanded, mis varem lahendusid täisarvuga jagamise teel, lahenduvad jagamise teel igasuguste andmete korral.

Teatavat raskust valmistavad siin ülesanded, mis nõuavad mahutamist (vastandina osadeks jaotamisele, millest kõnelesime seni), näiteks: «Mitu lipukest saab valmistada $4\frac{1}{2}$ meetrist riidest, kui igaks lipukeseks kulub $\frac{3}{8}$ m?» Mitte tundes murdude jagamist saab seda ülesannet lahendada, kõrvaldades murrud üleminekuga meetritelt millimeetritele: kui on kasutada $4\frac{1}{2}$ m ehk 4500 mm riiet,

siis lipukesi à $\frac{3}{8}$ m ehk 375 mm saab teha nii palju, kui mitu korda 375 mm mahub 4500 millimeetrisse, s. o. 12 lipukest.

Teine võimalik lahendus, mis ka ei nõua murruga jagamise oskust, tugineb mõlema antud suuruse väljendamisel ühesuguseis osades, antud puhul meetri kaheksandikes (siin nagu kasutaksime eri pikkusühikut, nimelt $\frac{1}{8}$ m): $4\frac{1}{2}$ m moodustavad 36 kaheksandikku meetrist ja 3 kaheksandikku meetrist mahub 36 niisamasugusesse kaheksandikku $36 : 3 = 12$ korda.

Kolmanda, kõige parema lahendusviisi annab lihtsalt murdude jagamise reegli kasutamine: $4\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 12$. Märgates, et see reegel annab siin vajaliku tulemuse, kusjuures arvutusi esineb siin vähem, kui esimese kahe viisi puhul, hakkavad õpilased seda eelistama; kuid selleks, et anda õige seletus selle kohta, et siin on vaja nimelt jagada, tuleb märkida, et kõne all olev ülesanne on pöördülesandeks niisugusele ülesandele, mis lahendub korrutamise teel («Kui palju kulub riiet 12 lipukese valmistamiseks, kui igale lipukesele kulub $\frac{3}{8}$ m?»).

Lõpuks juurdub õpilastes veendumus, et murdude jagamist tuleb rakendada kõigil neil juhtumeil, kus on selge, et murdude asendamisel täisarvudega on vaja nimelt jagada. Samuti, nagu murdude korrutamise õppimisel, tuleb üht ning sama ülesannet lahendada mitmel viisil, kord kõrvaldades murrud, kord seda mitte tehes. Asja sisu mõistmine on tagatud, kui iga vaadeldav ülesanne uuritakse läbi täieliku selguseni.

§ 17. Ülesanded kõigi tehete jaoks murdudega.

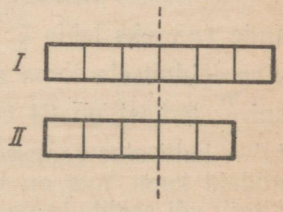
Püüdes kõigiti saavutada teadlikkust operatsioonides murdudega, ei tohi unustada ka nende operatsioonide ratsionaalse teostamise kindlate harjumuste loomise vajadust. Viimase eesmärgi saavutamiseks tuleb lahendada õige palju harjutusülesandeid, mida küllaldasel määral leidub Berezanskaja ülesannete kogus, aga mida õpetaja ka ise saab kergesti koostada. Nende (sulgudega) harjutuste kohta olgu veel kord öeldud, et pole mingit mõtet kulutada aega operatsioonideks murdudega, mille nimetajad on mitmekohalised arvud; kogu murdude õpetuse nii ideelise kui ka tehnilise külje saab omandada ka töötamisel murdudega, mille nimetajad ei ole suured, ja praktilises elus suurte nimetajatega harilikud murrud peaaegu alati asendatakse kümnendmurdudega. Murruliste andmetega avaldiste väärtuste arvutamist saab mitmekesistada järgneval kahel viisil: esiteks, leides vastuse, asendatakse üks antud arvudest tähega x ja leitakse see x, kasutades lauseid tehete komponentide ja resultaatide vahelistest seostest (nagu see on näidatud § 7 naturaalarvude kohta); teiseks, murdudelt on võimalik erilise

raskuseta üle minna täisarvudele, kui võtta kõik murdudega määratud osad ühest ja samast küllalt suurest arvust. Näiteks Berezanskaja ülesannete kogu ülesande nr. 969 (1) puhul, kus nõutakse avaldise väärtuse leidmist, võib pärast vastuse $\frac{1}{7}$ harilikul viisil saamist võtta ühikuks kõigi nimetajate vähima ühiskordse, nimelt 1680, ja taandada harjutus avaldise

$$\{[(1190 + 378) - (385 + 651)] : 6384\} \cdot 2880$$

väärtuse arvutamisele, mille teostamisel saab 240, nagu peabki olema ($\frac{1}{7}$ arvust 1680 on 240).

Ülesannete kogudes on elulise sisuga arvutusülesandeid väga vähe, sest praktikas eelistatakse kasutada mitte harilikke, vaid kümnendmurde, kuid neid siiski leidub (näiteks Celsiuse ja Réaumur'i termomeetrite skaalade võrdlemine, ristküliku pindala, ringjoone pikkus ja ringi pindala, kus võetakse $\pi \approx 3\frac{1}{7}$, gaaside soojuspaisumine, kus paisumiskoefitsient võetakse võrdseks $\frac{1}{273}$ ühine töö jne.). Enamik õpperaamatuis esitatud ülesandeist harilikele murdudele on kunstliku iseloomuga; nad on õige kaugel neist ülesannetest, mida tuleb lahendada elus, ja taotlevad ainult treeningu-eesmärki, mis teatavais piirides on kahtlemata kasulik. Meenutame veel kord, kuivõrd võidab ülesannete lahendamine tingimuste näitlikul kujutamisel. Võtame näiteks Berezanskaja ülesannete kogust ülesande nr. 1108, mis taandub kahe arvu leidmisele eeldustel, et nende summa on 44 ja pool ühest arvust on $\frac{3}{5}$ teisest. Kujutades otsitavad arvud ristkülikuina (joonis 3), näeme kergesti, et üks arv sisaldab $3 \cdot 2 = 6$ niisugust osa, nagu teine sisaldab neid 5, seega mõlemad kokku 11 osa, ja järelikult on esimene arv $(44 : 11) \cdot 6 = 24$ ning teine $4 \cdot 5 = 20$.



Joon. 3.

Harilikke murde rakendavate ülesannete hulgas esinevad needsamad tüüpülesanded, mida lahendati täisarvude puhul: «oletusele», «asendusele», «liikumisele» jne. Kuid leidub ka ülesandeid uue, oluliselt murdudega ühenduses oleva temaatikaga. Ilusaks näiteks neist on L. Tolstoi tuntud ülesanne niitjaist (toodud Berezanskaja ülesannete kogus nr. 2225 all), mille lahendamiseks ei tarvitse midagi ette ütelda (mida ülesannete kogus kahjuks on tehtud), kui ülesande tingimusi selgitada joonise abil.

§ 18. Tüüpilised raskused ja tüüpilised vead. Järeldused.

Eespool nimetasime juba seda arusaamatust, mille kutsub esile arvu vähenemine selle korrutamisel lihtmurruga. Samasugune olukord tekib jagamisel lihtmurruga. Sedalaadi kahtlustesse, mis tekivad sageli lastel ülesannete lahendamisel murdudega, tuleb suhtuda kõige tähelepanelikumalt: need on iseseisva mõtlemise tunnused, need on tingitud tahtmisest omandada õpitav materjal mitte lihtsalt mehhaaniliselt, formaalselt, vaid teadlikult. Teostades näiteks õpitud reegli alusel arvu $5\frac{1}{4}$ jagamist arvuga $\frac{3}{8}$, saab õpilane jagatiseks 14; olles harjunud jagamist siduma teatud arv korda vähendamisega, on õpilane hämmeldunud. Viide jagamise reegli põhjendusele, selle tehte kui korrutamise pöördtehte definitsioonile ei kõrvalda seda hämmeldust: siin on olemas konflikt harjumusliku intuitsiooni ja õpilasele uue loogika vahel, mida saab kõrvaldada, kui tuua sobivaid näiteid. «Mitu $\frac{3}{8}$ kg suurust leivaportsjonit võib saada $5\frac{1}{4}$ kilogrammist?» Tuleb teha arvutus, üle minnes grammidele või kilogrammi kaheksandikele. «Kui pikk on lõik, millest $\frac{3}{8}$ on võrdne $5\frac{1}{4}$ meetriga?» Tuleb teha joonis ja vastav arvutus sentimeetrites. «Kui pikk alus on ristkülikul, mille kõrgus on $\frac{3}{8}$ m ja pindala on $5\frac{1}{4}$ m²?» Siin on ka vajalik joonis; arvutuse teeme ruutsentimeetrites või ruutudes küljega $\frac{1}{8}$ m, leides, et ühes ruutmeetris on viimaseid 64. Abstraktse tehte niisuguste konkreetsete tõlgenduste abil lahendub konflikt intuitsiooni ja loogika vahel täielikult ka kõige teadmishimulisemal õpilasel.

Tavaliseks raskuseks V klassis on tervikust osa leidmise ülesande (näiteks leida $\frac{3}{4}$ arvust 24 cm) ärasegamine ülesandega terviku leidmisele tema antud osa järgi (näiteks leida lõigu pikkus, kui $\frac{3}{4}$ temast on 24 cm). Selle segamise kõrvaldamiseks soovitatakse kaht otse vastandlikku vahendit: kas vaadelda mõlemaid ülesandeid koos, mis on täiesti võimalik juba murdudega töötamise algul, või eraldada need teineteisest õige pika ajavahemikuga, vaadeldes näiteks esimest neist murruga korrutamise puhul ja teist murruga jagamise puhul, nagu seda soovitab ka programm. Edu võib saavutada nii ühel kui teisel teel, kuid selle vältimatuks tingimuseks on vastavate ülesannete näitlikust kujutlusest tulenev teadlik reeglite omandamine, mitte aga nende mehhaaniline tuupimine. On selge, et kumbki neist ülesannetest tuleb esialgu lahendada kahe tehtega ja hiljem ühega, kusjuures mõne aja jooksul tuleb nõuda õpilastelt mõlemat lahendust ja ainult pärast asja sisu täielikku omandamist piirduda ühe (muidugi teise) lahen-

dusega, kuid siiski aeg-ajalt tagasi pöördudes esimese lahenduse juurde, et ennetada reeglite formaalne rakendamine.

Käesoleva peatüki lõpetame lühikese kokkuvõttega, tehes tema sisust järgmised järeldused:

1. Harilike murdude kursuse ideeline sisu, mis moodustab teise arvu mõiste laienduse (pärast nulli tarvituselevõtmist), on õige väikese ulatusega ning tuleb täielikult omandada, kuigi võetakse õpilaste poolt omaks kaunis suurte raskustega. Definitsioonide ja reeglite mehhaaniline meelespidamine ilma kõnesolevate mõistete reaalse sisu mõistmiseta ei oma mingit väärtust.

2. Definitsioonide ja reeglite tuletamiseks on vaja vaadelda konkreetseid ülesandeid, mis on võetud lastele tuntud ümbritsevast reaalsusest, kusjuures nende ülesannete lahendus peab olema täielikult näitlik ja lahenduse õigsus lastele selgeks tehtud sõltumatult igasuguseist teoreetilistest kaalutlustest; see on alati võimalik, näiteks kõrvaldades murrud üleminekuga sobivalt valitud vähemate mõõtmisühikute juurde.

3. Murdude kursuse ideelise sisu selgitamisele peab järgnema heade ning püsivate murdudega opereerimisoskuste kätteõpetamine, milleks tuleb lahendada küllaldane hulk mitmesuguseid ülesandeid, vältides murde väga suurte nimetajatega.

4. Arvutamisel murdudega on vaja kõrvuti tehete kirjaliku teostamisega kultiveerida ka peast arvutamist, mitte lubades vahepealsete teisenduste üleskirjutamist juhtumeil, nagu: $2\frac{1}{2} - 1\frac{7}{16}$, $3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{7}{10}$, $8 : \frac{1}{5}$ jne. Siin tuleb anda tulemus otsekohe.

5. Murdude teadliku käsitsemise väärtuslikke oskusi tuleb kogu järgneva matemaatika kursuse kestel hoolega säilitada, lahendades selleks murruliste andmetega ülesandeid ja korrates vastavaid teoreetilisi teadmisi (definitsioone, reegleid) nii episoodiliselt, juhuslikult (ühenduses ülesannete lahendamisega) kui ka süstemaatiliselt (nähes seda ette kalendrilises tööplaanis).

IV peatükk.

KÜMNENDMURRUD. PROTSENDID.

§ 19. Kümnendmurdude eelised. Meetermõõtude süsteem.

Harilike murdude hulgas omavad erakordset tähtsust need murrud, mille nimetajaks on meie arvusüsteemi aluse mitmesugused astmed, s. o. arvud $10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000$ jne. Need kümnendmurdudeks nimetatavad murrud kujutavad endast süsteemimurdude erijuhtumeid, s. o. erijuhtumeid niisuguseist murdudest, mille nimetajaiks on kasutatava arvusüsteemi aluse astmed (näiteks kahendsüsteemis on süsteemimurdudeks murrud nimetajatega 2, 4, 8, 16, . . .).

Süsteemimurdude, eriti allpool ainsaina kõnesse tulevate kümnendmurdude eriline tähtsus on tingitud nende kahest eelisest, mis tõstavad neid teiste harilike murdude hulgast esile. Esiteks on neid võimalik kirjutada ilma nimetajata, toetudes samade numbrite tähenduse positsiooniprintsiibile, mis 10 numbri abil võimaldab kirjutada kui tahes suuri naturaalarve; et naturaalarvude kirjutises üleminek ühe koha võrra pahemale tähendab numbri väärtuse suurenemist 10 korda, siis üleminek ühe koha võrra vastupidises suunas, s. o. paremale, tähendab selle väärtuse vähenemist 10 korda. Selle põhjal peavad üheliste numbrist paremal asetsema numbrid, mis väljendavad järjekorras kümnendikke, sajandikke, tuhandikke jne. Märkides ühelisi tähendava numbri erilise murrutähise abil (meil ja enamikus maadest koma abil, Inglismaal punktiga, mis on mõnikord paigutatud numbri keskkoha kõrgusele ja isegi kõrgemale), saame mõnusa viisi kümnendmurdude kirjutamiseks, mis tänapäeval on üldiselt levinud: arv $2\frac{57}{100}$ kirjutatakse alati kujul 2,57. Teiseks, tehteid kümnendmurdudega saab teostada tunduvalt lihtsamalt kui teiste murdudega. Näiteks kahe kümnendmurru teisendamine ühenimelisteks toimub nende kümnendmärkide arvu võrdsustamisega lihtsalt nullide juurdekirjutamisel paremale, korrutamine ja jagamine arvudega 10, 100, 1000 jne. toimub koma üleviimisega.

Märgime, et kümnendmurde ei saa vastandada harilikele murdudele, sest kümnendmurrud kujutavad endast harilike murdude erijuhtumeid; on võimalik vaid vastandada harilikke kümnendmurde ja harilikke mittekümnendmurde. Ei ole õige kõnelda kümnendmurdude teisendamisest harilikeks murdudeks: tuleb kõnelda kümnendmurdude kirjutamisest nimetajatega (järgneva taandamisega, kui see osutub võimalikuks); võib kõnelda hariliku mittekümnendmurru, näiteks $\frac{3}{8}$ esitamisest kümnendmurruna, nimelt murruna $\frac{375}{1000}$ ehk, kirjutatult ilma nimetajata, 0,375.

Niisugune vastandamine on õigustatud ainult sel puhul, kui kümnendmurd on defineeritud murruna, mille nimetaja on arvu 10 aste ja mis on kirjutatud ilma nimetajata, kuid siis tuleks murdu $\frac{3}{10}$ nimetada harilikuks ja murdu 0,3 — kümnendmurruks.

Kümnendmurdude lugemise kohta tuleb ütelda lisaks sellele, mis on öeldud Kisseljovi õpikus, et kümnendarve, millel on koma järel 4 numbrit, loetakse harilikult kui kaht kahekohalist arvu ilma nimetaja nimetamiseta; näiteks arve 3,1286 ja 15,4005 loetakse järgmiselt: kolm tervet kaksteist kaheksakümmend kuus ja viisteist tervet nelikümmend null viis. On väga soovitav kasutada kümnendmurdude kirjutamist ilma nimetajata juba harilike murdude tundmaõppimisel.

Kümnendmurdude tundmaõppimisega võidame väga, kui neid illustreerida konkreetsete näidetega, mis on ühenduses meetermõõtude süsteemi kuuluvate mõõtudega. Selle süsteemi peamiseks hüveks, mis tingis tema levimist kogu maailmas (välja arvatud Inglismaa ja Ameerika Ühendriigid, kes kuni tänapäevani kasutavad osaliselt oma vanu mõõte), on nimelt see asjaolu, et erinevate sama liiki mõõtude suhe avaldub arvu 10 astmena. On soovitav kasutada artiklit [II, 21].

Kümnendmurdude käsitlemisel V klassis kordab õpetaja ühtlasi meetermõõte, hoolitsedes selle eest, et õpilastel kujuneksid neist mõõtudest kindlad näitlikud kujutlused: on vaja mitte ainult kõnelda meetermõõtudest, vaid ka näidata neid, valmistada mude-

lid mõnedest neist (m, dm, cm, mm, cm^2 jt.) ja pidevalt harjutada õpilasi neid mõõtmisel kasutama.

On väga soovitav, et õpilased täiesti omandaksid meetri kaks definitsiooni: nii tema esialgse, suuruste ligikaudseks hindamiseks sobiva definitsiooni kui ühe neljakümne miljondiku maakera meridiaanist, samuti ka tema praeguse definitsiooni kui lõigu eteloonil. Seesama kehtib ka kilogrammi ja liitri kohta.

Kümnendmurdude tundmaõppimine läheb õpilastel tunduvalt kergemini kui harilike murdude tundmaõppimine, milline asjaolu on täiesti loomulik, sest harilike murdude teooria kujutab endast võrdlemisi rikkaliku ideelise sisuga etappi arvu mõiste arendamisel, kuna õpetus kümnendmurdudest koosneb reast tehnilise iseloomuga reeglitest, mis tulenevad harilike murdude teooriast. Uue printsipiaalselt tähtsa momendina ilmneb vajadus ümardada jagatisi, mis saadakse isegi täpsete arvude jagamisel, ja sellega ühenduses olev ligikaudsete arvutuste teooria küsimuste kompleks.

§ 20. Järgnevad sammud kümnendmurdude tundmaõppimisel.

Et tehted kümnendmurdudega, mis on kirjutatud ilma nimetajata (edaspidi me seda klauslit enam ei kasuta), ei kujuta endast sisuliselt midagi uut võrreldes tehetega harilike murdudega, siis nõuavad nad ainult mõnede reeglite tundmist, kusjuures need reeglid ei oma printsipiaalset, vaid puht-tehnilist iseloomu ning on kergesti tuletatavad üldistest reeglitest tehete kohta harilike murdudega. Need reeglid on õige lähedased reeglitele tehete kohta naturaalarvudega, ja ühenduses sellega tehakse sageli ettepanekuid õpetada kümnendmurde koolis enne üldkujuliste harilike murdude õpetamist. Eespool (§ 12) on juba esitatud kaalutlused, mis näitavad sellise korra lubamatust. On siiski täiesti võimalik õppida rööbiti üldkujulisi harilikke murde ja kümnendmurde: iga sammu harilike murdude teooria tundmaõppimises võib lõpetada sellega, et tuletatakse reegel selle sammu teostamisest kümnendmurdude puhul. See muudaks murdude käsitlemise loomulikumaks ja kaoksid silma haavavad kirjutised, nagu näiteks 37 kop. $= \frac{37}{100}$ rbl., sest lapsed oleksid harjunud kasutama kirjutist 37 kop. $= 0{,}37$ rbl.

Märgime lühidalt need üksteisele järgnevad sammud, mis tuleb teha kümnendmurdude tundmaõppimisel.

1. Kümnendmurdu defineeritakse kui niisugust harilikku murdu, mille nimetajaks on 10, 100, 1000 jne., üldiselt arv 1 nullidega ehk täpsemalt: arvu 10 aste (naturaalse astendajaga), ja antakse üldiselt tarvitatav nende murdude lühendatud kirjutamisviis ilma nimetajata; vaadeldakse järgmisekujulisi näiteid: 288 mm $= 28{,}8$ cm $=$ $= 2{,}88$ dm $= 0{,}288$ m $= 0{,}000288$ km. Õpilased peavad olema võimelised arutama umbes järgmiselt: «Mida kujutab endast murd 0,2704?» On võetud mingi suurus (tervik või ühik), mis on jaotatud

10 000-ks võrdseks osaks (ühe juures on nii mitu nulli, mitu kümnendmärki on koma järel) ja neid kümnendikke on võetud 2704 (nii palju, kui mitu ühelist sisaldab arvu kümnendmärkidest moodustuv naturaalarv).

Edasi on võimalik ja soovitav lahendada ülesandeid kümnendmurruga määratud osa leidmisele antud arvust ja arvu leidmisele tema antud osa järgi, s. t. ülesandeid, nagu: leida 0,45 arvust 7200; leida arv, millest 0,45 on 7200 (selgitades nende kahe ülesande täpset mõtet tingimata näitlikult ja toonitades nende erinevust).

2. Selgitatakse võimalus kujutada üht ning sama suurust mitmesuguste erinevate kümnendmurdudena, nagu $0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}3000$, $0{,}4200 = 0{,}42$, mis tuleneb harilike murdude tuntud omadusest (mis väljendub valemiga $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$) ja mille teostamine kümnendmurdude korral on eriti lihtne (nullide juurdekirjutamine või läbitõmbamine murdosa tüvenumbreist paremal, milleks taandub «osade peenestamine» ja «osade ülestamine» ehk «murru taandamine»); siit järeldub murdude ühenimelisteks teisendamise reegel.

3. Tuletatakse reegel kümnendmurru suurendamisest ja vähendamisest 10, 100, 1000 jne. korda (koma nihutamine paremale või vasakule ühe, kahe, kolme jne. koha võrra).

4. Sõnastatakse kahe kümnendmurru võrdlemise tunnus, mida saab rakendada kohe pärast nende teisendamist ühenimelisteks (s. o. pärast kümnendmärkide arvu võrdsustamist), kuid näidatakse, et see võrdlemine on teostatav ka ilma selleta — täisosade võrdlemise teel, või nende võrdsuse korral — kümnendike arvu võrdlemisel, viimaste võrdsuse korral — sajandike arvu võrdlemisel jne.

5. Vaadeldakse kümnendmurdude liitmist (esmalt juhtumil, kui liidetavail on kümnendmärke võrdselt, siis üldjuhtum), leitakse praktiline reegel liitmiseks ja toonitatakse selle analoogiat naturaalarvude liitmise reegliga.

6. Analoogiliselt vaadeldakse ka kümnendmurdude lahutamist.

7. Kehtestatakse kümnendmurdude korrutamise reegel, mis tuleneb harilike murdude korrutamise reeglist, kui arvestada võimalust, et arvu 10 astmeid saab korrutada lihtsalt nullide ülelugemise teel (mis taandub edaspidi algebras üldkujul käsitletavale valemile $10^k \cdot 10^n = 10^{k+n}$). Õige sobiv on ka teine tee, mis on rajatud reeglile murru suuruse muutumisest koma nihutamisel: soovides korrutada näiteks murdu 3,64 murruga 0,025, nihutame koma korrutatavas kahe ja korrutajas kolme koha võrra paremale, mistõttu korrutis suureneb $100 \cdot 1000$ korda. Leides selle moonutatud (100 000 korda suurendatud) korrutise $364 \cdot 25 = 9100$, parandame selle jagamisel 100 000-ga, milleks nihutame koma $2 + 3 = 5$ koha võrra vasakule ja saamegi otsitava korrutise.

Et vältida ebasoovitavat puhtmehhaanilist korrutamise teostamist, on vaja meenutada murruga korrutamise mõtet ja lahendada

kahel viisil mõned ülesanded kümnendmurdude korrutamisega: esiteks kõrvaldades murrud üleminekuga vähemate ühikute juurde ja teiseks rakendades murruga korrutamist. Näiteks 3,4 m riide hinna arvutamine, kui meeter maksab 32,5 rbl., toimub järgmiselt:

Esimene viis:

3,4 m = 34 dm; 32,5 rbl. = 3250 kop.;

1 dm maksab

3250 kop. : 10 = 325 kop.;

34 dm maksab

325 kop. · 34 = 11050 kop. = 110 rbl. 50 kop.

Teine viis:

32,5 rbl. · 3,4 = 110,50 rbl. = 110 rbl. 50 kop.

8. Analoogiliselt toimub töö ühenduses jagamise reegliga, kusjuures esmalt tuleb vaadelda ainult niisuguseid juhtumeid, kus jagamise tulemusena saadakse lõpliku kümnendmurru kujuline jagatis. Esimest etappi — jagamist täisarvuga — saab tõlgendada kui osadeks jaotamist, teist — jagamist kümnendmurruga — kui tehet, mille saab jagatist muutmata taandada täisarvuga jagamisele, kui jagatavat ja jagajat suurendada üks ning sama arv korda. Toonitame, et tuleb ainult hoolitseda jagaja täisarvuks teisendamise eest, kuna ei ole oluline, kas jagatav on täis- või murdarv. Nii on 0,56175 jagamiseks 0,07-ga küllalt, kui koma viia kahe koha võrra paremale ja teostada arvu 56,175 jagamine 7-ga; tehte taandamine täisarvu jagamisele täisarvuga (56175 : 7000) annab muidugi sama tulemuse (8,025), kuid nõuab rea liigsete nullide kirjutamist.

Teostatava tehte reaalse mõtte selgitamiseks tuleb, nagu korrutamisegi puhul, lahendada näitliku sisuga ülesandeid. Näiteks saab äsjavaadeldud jagamise juhtumit illustreerida järgmise ülesandega: «Leida alus ristkülikul, mille pindala on 0,56175 m^2 ja kõrgus on 0,07 m.»

Esimene viis: 1 m^2 = 100 cm · 100 cm = 10000 cm^2; 0,56175 m^2 = 5617,5 cm^2; 0,07 m = 7 cm; 5617,5 cm^2 : 7 cm = = 802,5 cm = 8,025 m.

Teine viis: 0,56175 m^2 : 0,07 m = 8,025 m.

9. Teatavasti viib kümnendmurdude jagamine (ja sealhulgas ka naturaalarvude jagamine, kui jagatis on soovitav anda kümnendmurruna) ainult üksikuil juhtumeil lõplikule kümnendmurrule, kuna sagedamini annab ta lõpmatu perioodilise murru. Siin ilmneb aritmeetika õppimisel printsipiaalselt uus moment: lõpliku suuruse esinemine lõpmatult suure hulga lõpmatult vähenevate liidetavate summana. Siin kohtuvad õpilased esmakordselt ideedega, mis moodustavad matemaatilise analüüsi aluse, ideedega, mida paratamatult riivatakse järgnevais keskkooli klassides (irratsionaalarvud, piirväärtused). Viiendas klassis on nende ideede sügavam vaatlus muidugi enneaegne.

§ 21. Protsendid ja promillid.

Murrud nimetajaga 100 on leidnud praktilises elus kõige sagedamini rakendamist ja levinud kaugelt enam kui kümnendmurrud teiste nimetajatega: kümnendikud on liiga suured (kasutades ainult kümnendikke ei ole võimalik märkida mitmeid olulisi peensusi), tuhandikud aga on liiga väikesed, nende kasutamine juhib tähelepanu kõrvale põhilisest, teeb selle vähem selgeks. On loomulik, et sajandikud kui eriti sageli kasutatavad osad said eriņimetuse — «protsendid» (ladinakeelsest pro centum — «saja eest») kui ka erilise tähise (%). Niisiis, protsendid ei ole midagi muud kui erilisel viisil kirjutatud sajandikud: 65% on sama, mis 0,65 (ehk $\frac{65}{100}$).

Protsentide kasutamine on levinud niivõrd üldiselt, et neis on hakatud väljendama ka kümnendikke (iga kümnendik on 10 sajandikku ehk 10%) ja tuhandikke (iga tuhandik on kümnendik sajandikust, s. o. 0,1%), kirjutades $\frac{7}{10}$ ehk 0,7 asemel sageli 70% ja $\frac{329}{1000}$ ehk 0,329 asemel 32,9%. Kõrvuti protsendi kümnendike hariliku kirjutusviisiga kasutatakse ka nende väljendamist «promillides», nagu nimetatakse tuhandikke (ladina keeles «pro mille» — «tuhande eest»), tähistades neid sümboliga ‰, nii et kirjutis 329‰ tähendab sedasama, mis 32,9%. Kümnetuhandikke väljendatakse sageli protsendi sajandikena ning eri nimetust ja tähistusviisi nad ei oma. Neid oleme näinud muuseas ametlikes teadetes nõukogude võimuorganite valimiste tulemustes. Näiteks teates Ukraina NSV kohalike nõukogude valimistest 21. detsembril 1947. a. on öeldud, et oblasti, ringkonna ja linna töörahva saadikute nõukogude valimistel oli hääletamisest osavõtt vastavalt 99,95%, 99,99% ja 99,98%. On selge, et siin ei saa piirduda sajandike või tuhandikega (s. o. tervete protsentidega või promillidega), sest siis erinevus nende kolme valimisliigi tulemuste vahel tasanduks. Kuid niisugused juhtumid on kaunis haruldased erandid; harilikult on vaadeldav kvantitatiivne seos küllalt selgesti ja ilmekalt iseloomustatav tervetes protsentides. Nii annab 18. jaanuaril 1948. a. avaldatud NSVL Gosplaani teade 1947. a. rahvamajanduse taastamise ja arendamise riikliku plaani täitmise kokkuvõtetest täieliku pildi, kasutades ainult terveid protsente: Musta Metallurgia Ministeerium täitis plaani 101%-liselt, Värvilise Metallurgia Ministeerium 107%-liselt jne. Promillide kasutamise ainsa juhtumina selles teates esineb arv 103,5% NSV Liidu kogu tööstuse 1947. a. plaani täitmise näitajana.

Protsentide väga laialdane kasutamine kohustab kooli taotlema selle mõiste võimalikult selget omandamist õpilaste poolt ja saavutama täisväärtuslikke oskusi tema rakendamisel. Juba IV klassi programmis esineb punkt: «Protsendi mõiste. Ühe või mitme protsendi leidmine antud arvust, mis on väljendatud tervetes sadades.» Viienda klassi programmis on protsentide õppimiseks ette nähtud

30 tundi, kusjuures selle peatüki sisu on sõnastatud järgmiselt: «Kolm põhiülesannet protsentidele: a) protsentide leidmine antud arvust, b) arvu leidmine protsentide järgi, c) kahe arvu suhte väljendamine protsentides. Keerukamate ülesannete lahendamine protsentidele.»

Näib, nagu ei peaks protsentide tundmaõppimine moodustama mingisuguseid raskusi: murrud on tuntud ja protsendid on murrud nimetajaga 100. Aega on reserveeritud küllaldaselt nende õppimiseks koolis. Kuid ülesannete lahendamine protsentidele läheb lastel vaevaliselt. Milles siis seisab asi? Õige seletus on järgmine.

«Selle asemel et algusest peale ammendava selgusega ütelda, et protsendid kujutavad endast vaid murdude erilist kirjutusviisi ja et seetõttu ei ole ega saagi olla mingisuguseid «ülesandeid protsentidele», et vastupidiselt: iga ülesannet murruliste andmetega saab anda ning lahendada protsentides ja ümberpöördult, — selle äärmiselt selge küsimusele lähenemise asemel luuakse mingi protsendikultus, hüpostaseeritakse protsente kuni neile eriainelise sisu omistamiseni, luuakse neile eri teooria ja eri kategooria ülesandeid, tehakse lühidalt kõik, mis võimalik, et iga õpilase teadvuses protsent kujuneks uueks, raskeks ja võõraks mõisteks, mis nõuab spetsiaalset lähenemisviisi ja spetsiaalseid uurimismeetodeid. Ja pärast seda tavaliselt konstateeritakse, et «protsente omandavad õpilased halvasti» (prof. Hintšin,A., artikkel «Matemaatika algmõisted keskkoolis», ajakiri «Математика в школе», 1939, nr. 4, lk. 9).

Sellest protsentide tundmaõppimisega ühenduses olevate raskuste põhjuste seletusest tuleneb ka näpunäide nende raskuste kõrvaldamiseks: tuleb taotleda protsentide kui arvu sajandike õiget mõistmist ning lahendada kõik ülesanded protsentidele kui ülesanded eri viisil kirjutatud murdudele nimetajaga 100. Ümber töötades Kisseljovi aritmeetika-õpikut, lülitas prof. Hintšin harilikele murdudele pühendatud peatükki paragrahvid 138, 139 ja 140, milles annab protsendi mõiste ja lahendab kaks põhiülesannet protsentidele: protsentide leidmine antud arvust kui osa leidmine arvust ja arvu leidmine tema antud osa järgi. Kumbki neist ülesandeist lahendub ühe tehtega, esimene — murru korrutamise, teine — jagamisega. Näib kasulikuna kõrvuti sellega näidata ka võimalus lahendada kumbki neist ülesandeist kahe tehtega, silmas pidades, et alles mõlema lahendusviisi kõrvutamine tõepoolest veenab õpilast selle viisi eelistes, mis võimaldab ülesande lahendada ühe tehtega (ja siiski ei tule see veendumus, nagu juba märgitud, korraga). Niisiis, et leida 18% arvust 245, kasutavad õpilased kaht viisi. Esmalt lahendatakse ülesanne kahe tehtega: jagades 245 arvuga 100, leitakse 1% antud arvust, s. o. üks sajandik temast, ja siis 18%, korrutades 2,45 arvuga 18, saades nii 44,10 ehk 44,1. Kooliõpikus näidatud teine viis nõuab ainult üht tehet: 245 korrutamist 0,18-ga. Analoogiliselt käib ka teise põhiülesande lahendamine: kui on vaja leida arv, teades et 18% temast moodustab 14,4, siis jagades 14,4 arvuga 18 ja saades 0,8 leitakse 1% temast ja siis kogu otsitav

arv, mis sisaldab 100% (ehk 100 sajandikku), s. o. $0{,}8 \cdot 100 = 80$; teine viis — arvu 14,4 jagamine arvuga 0,18 annab $14{,}4 : 0{,}18 = 1440 : 18 = 80$.

Kui täielik arusaamine protsendist kui sajandikust on saavutatud, siis, vaadeldes ülesandeid protsentidele kui juba hästi tundmaõpitud ülesandeid murdudele, kõrvaldame need raskused, mis tavaliselt esinevad ülesannete lahendamisel protsentidele.

Kolmas põhiülesanne protsentidele — kahe antud arvu suhte väljendamine protsentides — ei paku midagi olulisel uut õpilastele, kes on kindlasti omandanud teadmise, et ülesannet, missuguse osa arvust a moodustab teine arv b, lahendatakse arvu b jagades arvuga a. Olgu vaja teada, mitu protsenti arvust 75 moodustab arv 15. Viienda klassi õpilastele osutub täiesti jõukohaseks järgmine lahendusviis: 15 moodustab $\frac{15}{75} = \frac{1}{5}$ arvust 75, s. o. sajandikes väljendatult 0,20 ehk 20%.

Protsentarvutuse põhiülesannete lahendamist soodustab järgmise tabeli koostamine (õpilaste endi poolt):

$1\% = 0{,}01$ ehk $\frac{1}{100}$
$2\% = 0{,}02$ ehk $\frac{1}{50}$
$4\% = 0{,}04$ ehk $\frac{1}{25}$
$5\% = 0{,}05$ ehk $\frac{1}{20}$
$10\% = 0{,}1$ ehk $\frac{1}{10}$
$12{,}5\% = 0{,}125$ ehk $\frac{1}{8}$
$15\% = 0{,}15$ ehk $\frac{3}{20}$
$20\% = 0{,}2$ ehk $\frac{1}{5}$
$25\% = 0{,}25$ ehk $\frac{1}{4}$
$50\% = 0{,}50$ ehk $\frac{1}{2}$
$75\% = 0{,}75$ ehk $\frac{3}{4}$
$100\% = 1{,}00$
$125\% = 1{,}25$ ehk $1\frac{1}{4}$
$150\% = 1{,}5$ ehk $1\frac{1}{2}$
$175\% = 1{,}75$ ehk $1\frac{3}{4}$
$200\% = 2$ jne.

See kergesti täiendatav tabel tuleb õpilastel kindlasti omandada, selleks et seda kasutada peast arvutamisel.

Edukaks ülesannete lahendamiseks protsentidele on esmajärgulise tähtsusega see, et mõistetaks vajadust igal konkreetsel juhtumil kindlaks teha, mis on võetud ühikuks (tervikuks, 100%-ks). Kui näiteks mingi ratsionaliseerimisürituse tulemusena toodangu omahind alaneb 5000 rublalt 4000 rublale, siis moodustab see alanemine 20%; siin võetakse ühikuks (tervikuks, 100%-ks) endine omahind (5000 rbl.) ja leitakse, mitu sajandikku sellest moodustab omahindade vahe. Teine küsimusseade on: mitme protsendi võrra tõuseb see uus omahind, kui loobuda sellest ratsionaliseerimisest. Nüüd saame teise vastuse. Siin võetakse ühikuks (tervikuks, 100%-ks) uus omahind, s. o. 4000 rbl. ja hinnatõus (1000 rbl.) moodustab juba 25% sellest. Veel üks ülesanne: missuguseks kuju-

neb lõplik hind, kui esialgset hinda tõsta 10% võrra ja siis alandada niisamuti 10% võrra? Kõrgendatud hind moodustab 110% esialgsest hinnast, ja hinnaalanduse arvutamisel ühikuks (tervikuks, 100%-ks) võetakse see uus hind, nii et 10% uuest hinnast moodustab $110\% : 10 = 11\%$ esialgsest hinnast; lõplik hind moodustab seega 99% esialgsest.

Õpetajal tuleb peatuda ka järgmisekujulistel ülesannetel: kauba hinda alandati 35% võrra ja on nüüd 9 rbl. 10 kop.; missugune oli hind enne alandamist? Hinnaalandus on antud protsentides esialgsest hinnast ja järelikult on see võetud 100%-ks. Seega uus hind moodustab $100\% - 35\% = 65\%$ esialgsest hinnast. Kuid on teada, et uus hind on 9 rbl. 10 kop. Jääb leida arv, millest 65% on 9 rbl. 10 kop., kuid seda juba oskame teha.

Kui protsendi kui sajandiku mõiste on kindlasti omandatud ja lihtsamaid ülesandeid ollakse harjunud teadlikult lahendama, siis keerulisemate ülesannete lahendamine ei tekita erilisi raskusi. Vaatleme neist kaht ülesannet, mis on ühenduses uute tähtsate ideede andmisega.

«Ettevõte suurendab oma tootlikkust iga aastaga 20% võrra. Kui suur on ettevõtte tootlikkuse tõus viisaastaku jooksul?» Vastus $20\% \cdot 5 = 100\%$ on ilmselt ebaõige: aastane tõus arvutatakse sellest, mis oli aasta algul. Võttes tootlikkuse viisaastaku esimese aasta algul võrdseks 100%-ga, saame, et tootlikkus oli selle aasta lõpuks (s. o. teise aasta alguseks) $100\% + 20\% = 120\%$,

teise aasta lõpuks juba $120\% + 24\% = 144\%$,

kolmanda aasta lõpuks $144\% + 28{,}8\% = 172{,}8\%$,

neljanda aasta lõpuks $172{,}8\% + 34{,}56\% = 207{,}36\%$ ja

viienda aasta lõpuks $207{,}36\% + 41{,}472\% = 248{,}832\%$.

Niisiis moodustab tootlikkus viisaastaku lõpul peaaegu 249% sellest, mis ta oli viisaastaku algul, ja tema tõus viisaastaku jooksul on mitte 100%, vaid 149%.

Siin kohtusime näitega muutumisest liitprotsentide seaduse järgi.

Vaatleme veel üht praktilise iseloomuga ülesannet, mis annab ühe uue mõiste — kaalutud keskmise mõiste. Ettevõtte toodang oli I kvartalis 200 t, sellest 80% esimest sorti, II kvartalis 300 t, sellest 90% esimest sorti. Missugune on I ja II kvartali keskmine esimese sordi väljalase protsentides? Tavaline keskmise arvutamise viis $(80 + 90 = 170;\ 170 : 2 = 85\%)$ ei ole siin rakendatav, sest esimest sorti toodangu väljalaske kvartalinäitajad käivad erinevate kogutoodangu hulkade kohta ja neid ei saa liita. Õige lahendus on järgmine: esimest sorti toodangut on välja lastud esimeses kvartalis $200 \cdot 0{,}8 = 160$, teises kvartalis $300 \cdot 0{,}9 = 270$ ja kahes kvartalis kokku $160 + 270 = 430$ tonni kogutoodangu $200 + 300 = 500$ tonni juures; jääb leida, mitu protsenti arvust 500 moodustab 430 (vastus: 86%).

Artiklis [II, 43] on toodud ülesanne, mis on huvitav selle poolest, et selle lahendavad algul ebaõigesti mitte ainult õpilased, vaid harilikult ka õpetajad: kui palju vett tuleb välja aurutada 100 kg-st massist, mis sisaldab 90% vett, et saada mass 80%-se veesisaldusega? Õige vastus (50 kg) näib esimesel silmapilgul täiesti uskumatuna. Õige õpetlik on koostada tabel, mis näitab veesisalduse järkjärgulist alanemist protsentides kogu massist 10 kg, 20 kg, 30 kg, ... 90 kg väljaaurutamisel, ja kujutada auramiskäik graafiliselt. Analoogilisi tõeliselt elulise sisuga ülesandeid, mis väärivad õpetaja tõsist tähelepanu, leidub ka Berezanskaja ülesannete kogus (näiteks ülesanne nr. 1994 seentest).

Märgime lõpuks, et protsentarvutuse alal omandatud oskuste säilitamiseks tuleb protsentide juurde tagasi tulla kogu kooli matemaatikakursuse kestel. Loomulikku põhjust selleks annavad mitmesugused arvulised andmed, mis esinevad teadetes poliitilise ja

majanduselu jooksvaist küsimustest, mida külluses leidub igas ajalehenumbris, ja kooli, kolhoosi, tehase, oblasti või vabariigi tööd iseloomustavad arvulised andmed jne. Protsendi mõiste on nii tähtis igale NSV Liidu kodanikule, et kool on kohustatud kindlustama selle täisväärtusliku omandamise mitte vähemal määral kui korrutamistabeli või meetermõõtude tabeli omandamise.

Ebaõige suhtumine protsentidesse, soov näha protsentides mitte lihtsalt sajandikke, vaid midagi muud, on kahjuks kaunis levinud. Seda näeme näiteks ka arvustusest [I, 60]. Nagu 1% ei ole midagi muud kui 0,01 ehk $\frac{1}{100}$ teises tähistuses, samuti ei ole ka need ülesanded protsentidele, millest kõneldakse programmides ja ülesannete kogudes, midagi muud kui ülesanded teatavaile erikujulistele murdudele. Õpilased, kes on hästi omandanud tehted harilike murdudega, ei tunne mingeid raskusi ülesannete lahendamisel protsentidega, kui neid ainult ei viida segadusse protsentide kui mingi uue, murdudest printsipiaalselt erineva vaatlemisega.

§ 22. Harilike mittekümnendmurdude teisendamine kümnendmurdudeks.

Tehteil kümnendmurdudega on nii palju eeliseid, et iseenesest tekib küsimus, kas ei saaks üldse loobuda igasuguste muude murdude kasutamisest peale kümnendmurdude. Täieliku vastuse saamiseks sellele küsimusele tuleb vaadelda mõnd õige lihtsat lauset, mis on väga hästi käsitletud Kisseljovi õpiku paragrahvides 174—180, ja omandada praktiliselt kaks mittekümnendmurdude kümnendmurdudeks teisendamise viisi: korrutamisviis, mida saab rakendada juhtumeil, kus antud mittekümnendmurru nimetaja on $2^n \cdot 5^k$-kujuline arv, kus $n \neq k$, ja jagamisviis, mida saab rakendada alati, kuid mis annab lõpliku kümnendmurru ainult siis, kui on rakendatav ka korrutamisviis, ja kõigil muil juhtumeil annab lõpmatu perioodilise kümnendmurru, mida tema praktiliseks kasutamiseks tuleb ümardada. Selle osa õppimisel kohtavad õpilased uusi mõisteid — lõpmatu kümnendmurru ja perioodilise kümnendmurru mõistet, ja õpetaja peab tõsiselt hoolitsema nende täisväärtusliku omandamise eest (nende juurde tuleb hiljem korduvalt tagasi tulla, ja nende väärmõistmine toob kaasa õige palju komplikatsioone). Küsimuse teoreetilise külje tundmaõppimine ei tekita siin mingisuguseid raskusi; see seisneb järgmiste teoreemide teadlikus omandamises: 1) igaüks arvudest 10, 100, 1000, 10000, ... on kahtede ja viite korrutis, kusjuures neid ja teisi on nii palju, kui mitu nulli on ühe järel: $10 = 2 \cdot 5$; $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$; $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3$ jne.; 2) kui murru nimetaja ei oma muid algtegureid peale kahtede ja viite, siis see murd teisendub kümnendmurruks lugeja ja nimetaja korrutamisel sobiva arvu kahtede ja viitega; sama tulemuse annab ka lugeja jagamine nimeta-

jaga; 3) kui taandamatu murru nimetaja omab kas või ainult ühe algteguri, mis erineb kahest ja viiest, siis selle murru teisendamine (lõplikuks) kümnendmurruks on võimatu; teostades sel puhul lugeja jagamist nimetajaga ja kirjutades jagatise kümnendmurruna, saame lõpmatu kümnendmurru ning seejuures perioodilise, kus periood sisaldab ülimalt nii mitu numbrit, mitu ühelist on nimetajas ilma üheta.

Omandanud need kergesti tõestatavad teoreemid, peavad õpilased neile tuginedes oskama teostada üleminekut igalt mittekümnendmurrult temaga võrdsele lõplikule või lõpmatule kümnendmurrule, valides selleks kõige ratsionaalsema tee. Niisuguseid murde, nagu $\frac{7}{20}, \frac{13}{50}, \frac{3}{8}$ jne. peavad nad kümnendmurdudeks teisendama peast; murde, nagu $\frac{15}{64} = \frac{15}{2^6}$ tuleb osata teisendada kirjalikult, rakendades kas korrutamisviisi (lugeja ja nimetaja tuleb korrutada arvuga $5^6 = 625 \cdot 25 = 15625$, kusjuures tegelikult tuleb korrutada ainult lugeja, sest nimetaja korrutamisel saadav tulemus on ette teada) või jagamisviisi (ühel viisil saadud tulemust on hea kontrollida teisel viisil saadud tulemusega). Õpilased peavad mõistma, et murdude puhul, mille nimetajad on 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, ..., ei ole korrutamisviis üldse rakendatav ja jagamisviis annab murrud lõpmatute perioodiliste kümnendmurdude kujul, peavad oskama leida neid kümnendmurde lihtsamail juhtumeil (nimetajate 3 ja 9 puhul) peast, ülejäänud juhtumeil kirjalikult, ette öeldes, missugune on suurim võimalik numbrite hulk perioodis.

Teoreetilise külje edasine süvendav tundmaõppimine annab palju huvitavaid tulemusi, mida õpilased võivad avastada ise: missugused harilikud murrud annavad teisendamisel kümnendmurdudeks perioodi, mis algab kohe pärast koma («puhtperioodilised» murrud), ja missugused annavad «segaperioodilise» murru? Missugune seos on ühe ja sama nimetajaga murdude perioodide vahel, nagu $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$? Missuguse paranduse peab tegema tekkinud arvamises, kui vaadelda murde nimetajaga 13? Missuguse osa maksimaalsest võimalikust perioodi numbrite arvust moodustab antud nimetaja korral tegelik perioodi numbrite arv? Sellised küsimused ulatuvad välja programmi raamidest ja annavad suurepärast materjali täiendavaiks õpinguiks.

§ 23. Perioodilised murrud.

Kui on selgunud, et iga harilik mittekümnendmurd teisendub kas lõplikuks kümnendmurruks või lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks, tekib paratamatult pöördküsimus — kuidas antud lõpmatust perioodilisest kümnendmurrust saada harilik murd, mille teisendamine kümnendmurruks annab selle perioodilise murru. Kas alati on olemas niisugune harilik murd? Kuidas seda leida, kui ta on olemas?

Vastuse mõlemale küsimusele saab, kui vaadelda mõnd teoreemi, mis kasutavad järjendi piirväärtuse mõistet ja leiduvad igas aritmeetika käsiraamatus (muunulgas ka Kisseljovi õpikus). Vastus on järgmine: iga perioodilise kumnendmurru puhul, välja arvatud murrud, mille periood sisaldab ainult numbrit 9, leidub üksainus taandamatu harilik murd, mis teisendamisel kümnendmurruks annab selle perioodilise murru; need harilikud murrud saadakse kahe tuntud reegli järgi (üks puhtperioodiliste, teine segaperioodiliste murdude konta), mille rakendamine näiteks 0,(459) ja 0,43(2) puhul annab $\frac{459}{999}=\frac{17}{37}$ ja $\frac{432-43}{900}=\frac{389}{900}$ (kerge on näha, et murdude $\frac{17}{37}$ ja $\frac{389}{900}$ teisendamisel kümnendmurdudeks saadakse nimelt antud perioodilised murrud); murrule perioodiga 9 ei leidu vastavat harilikku murdu, s. o. niisugust harilikku murdu, mille teisendamine kümnendmurruks annaks selle perioodilise murru (perioodiga 9), sest iga niisugune murd, kui teda vaadelda lõplike kümnendmurdude — selle perioodilise kümnendmurru «lõikude» järjendi piirväärtusena, on kas täisarv või lõplik kümnendmurd; näiteks 0,(9) kui murdude järjendi 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, ... piirväärtus on 1 ja murd 0,45(9) kui murdude järjendi 0,4, 0,45, 0,459, 0,4599, 0,45999, 0,459999 ... piirväärtus on 0,46.

Praegu kehtiv keskkooli matemaatika programm näeb ette ainult «perioodilise murru mõiste»; kooli ülesannete kogus (Berezanskajal) üldse ei esine perioodilisi murde (välja arvatud üksikud erandid). Kui ülesannete lahendamisel jagamise tulemusena saadakse jagatis lõpmatu kümnendmurruna (mis seejuures on alati perioodiline), siis tuleb kas rahuiduda jagatise ligikaudse väärtusega, millest kõneldakse järgmises peatükis, või teostada jagamine üldise reegli järgi, saades jagatiseks hariliku mittekümnendmurru.

Neis aritmeetilistes operatsioonides, millega tuleb kokku puutuda igasuguste praktiliste arvutuste puhul, ei kasutata üldse perioodilisi kümnendmurde, kuid nendega tutvumiseta jääb murdude teooria tundmaoppimine lõpetamata. Keskkooli kursuses on perioodiliste murdude loomulikuks kohaks IX klassis õpitav peatükk geomeetrilisest progressioonist, sest iga puhtperioodilist murdu saab vaadelda teatava kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmete summa piirväärtusena ja segaperioodilise murru küsimus taandub kergesti küsimusele puhtperioodilisest murrust.

Revolutsioonieelses koolis oli mis tahes perioodilise kümnendmurru harilikuks murruks teisendamise oskus aritmeetika programmiga nõutav, ja vanad ülesannete kogud olid kirjud ülesandeist, nagu: «Mis on nüüd kell, kui möödunud osa ööpäevast on 3,13333... tunni võrra pikem eelolevast osast» («Сборник арифметических задач для средних учебных заведений» И. Верещагина, изд. 1895 г. № 2431). Kaasaegseis ülesannete kogudes selliseid kunstlikke ülesandeid enam ei leidu, kuid Kisseljovi aritmeetika õpikus on küsimuse teoreetilise külje käsitlus tanaseni säilinud ja seejuures kahes redaktsioonis: §§ 181—184 sisaldavad (jämedas trükis) V klassi opilasele jõukohase ja mitterange käsitluse, mis viib lühimat teed mööda praktiliste reeglite juurde, ja §§ 185—194 esitavad (peenes trükis) samu küsimusi sügavamalt ja täielikumalt, kuid on käsitletud raskelt, V klassi õpilasele täiesti mittejõukohaselt, kusjuures ei kasu-

tata neid teadmisi piirväärtuste teooria ja progressioonide alalt, mis õpilased saavad IX klassis, kuhu kuulub ka nende küsimuste vaatlemine.

Lõpuks märgime, et kuigi perioodilise kümnendmurru harilikuks murruks teisendamise oskus aritmeetika kursuse programmi järgi ei ole nõutav, tuleb õpetajal sellega siiski sageli kokku puutuda: tutvudes kirjandusega, eriti vanemaga, satuvad õpilased niisuguse teisendamise vajadusele, ja ka kõrgemate koolide vastuvõtueksameil esitatakse mõnikord neid küsimusi. Seepärast peab igatahes matemaatika õpetaja ise hästi orienteeruma selles õige väikeses teoorias. Kisseliovi aritmeetika õpiku need paragrahvid, mis sisaldavad viienda klassi õpilastele jõukohast praktiliste reeglite tuletamist, pakuvad head materjali tugevamaile õpilastele individuaalseks tööks.

§ 24. Mitmesugused arvutused harilike kümnend- ja mittekümnendmurdudega.

Igasuguste arvuliste kalkulatsioonide tegemisel domineerib tänapäeval kümnendmurdude rakendamine, kusjuures laialt kasutatakse allpool kõnesse tulevaid ligikaudse arvutamise reegleid. Väikeste nimetajatega harilikke mittekümnendmurde kasutatakse tihti, sest nad on lihtsamad kui nendega võrdsed kümnendmurrud; näiteks lihtsam on kasutada murde $\frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{3}$ kui murde 0,125 ja $0{,}333\ldots = 0{,}(3)$. Suurte nimetajatega harilikke mittekümnendmurde kasutatakse võrratult harvemini, kuid siiski kasutatakse, sest nad omavad mõnel puhul teatavaid paremusi võrreldes kümnendmurdudega. On tähtis osata igal konkreetsel juhtumil teha õige valik nende ja teiste murdude vahel, ja õpetada seda õpilastele saab ja tuleb juba viiendas klassis. Selleks tuleb, esiteks, tähelepanelikult suhtuda nii klassis lahendatavate kui ka õpilastele iseseisvaks tööks antavate ülesannete teksti sõnastusse, vältides nende või teiste murdude ebaratsionaalset kasutamist, ja teiseks, nõuda õpilastelt igal konkreetsel puhul teadlikku, põhjendatud valikut. Näiteks Berezanskaja ülesannete kogu ülesannet nr. 1959, milles nõutakse õige lihtsat kalkulatsiooni agronoomia alalt, tuleb lahendada ainult kümnendmurde kasutades, kuid ülesannet nr. 1926, milles vaadeldakse hammasrattaid, on kasulikum lahendada harilikes murdudes sellest hoolimata, et siin ilmuvad suured nimetajad.

Ülesande teksti ebaõnnestunud sõnastuse näitena võib tuua ülesande nr. 2340 samast Berezanskaja ülesannete kogust: «Kolme arvu summa on 770. Esimene arv moodustab $53\frac{4}{7}\%$ teisest ja $44\frac{2}{17}\%$ kolmandast arvust. Leida need arvud.» Siin on tegemist ebakohase kombinatsiooniga protsentidest, s. o. sajandikest ja niisuguseist osadest, nagu seitsmendikud ja seitsmeteistkümnendikud. Siin oleks tulnud üldse loobuda protsentidest: esimene arv moodustab $\frac{375}{700}$ ehk $\frac{15}{28}$ teisest ja $\frac{750}{1700}$ ehk $\frac{15}{34}$ kolmandast. Et lahendada see ülesanne ilma mingi erilise reeglita, oletame, et esimene arv sisaldab 15 osa. Siis teine arv sisaldab 28 samasugust osa ja kolmas arv —

34 samasugust osa. Lahenduse lõpuleviimiseks ei ole vaja enam mingisuguseid selgitusi.

Selles ülesandes toodud andmed ($53\frac{4}{7}\%$ ja $44\frac{2}{17}\%$) on sisse võetud ainsa eesmärgiga teha ülesannet lahendava õpilase töö keerulisemaks, sundides teda neid ebaloomulikke murde teisendama harilikeks mittekümnendmurdudeks. Niisuguseid murde praktikas kunagi ei kasutata.

Küsimusele sellest, missuguste murdudega, kas kümnend- või mittekümnendmurdudega, on parem teostada arvutusi, tuleb omistada palju tähelepanu ja lahendada ta igal üksikul juhtumil vastavalt ülesande tingimustele.

Näide: arvutust $x = 0{,}567 \cdot \frac{3}{7}$ saab teostada peast: $567 : 7 = 81$; $81 \cdot 3 = 243$; $x = 0{,}243$.

V peatükk.

LIGIKAUDNE ARVUTAMINE

§ 25. Suuruste täpsed ja ligikaudsed väärtused. Ümardamisreeglid.

Arvud, millega tuleb tegelda praktikas, väljendavad valdaval enamikul juhtumeil reaalsuse kvantitatiivseid seoseid mitte täpselt, vaid ainult ligikaudselt. Käesoleva raamatu lehekülgede arvu saab näidata päris täpselt, kuid selles trükitud tähtede hulga täpne loendamine on juba õige tülikas ja tema lehekülje laiuse täpne mõõtmine osutub üldse võimatuks põhjusel, et see lõik, mida nimetame lehekülje «laiuseks», pole täiesti määratud nii mõõtmiseks kasutatavate riistade ebatäpsuse kui ka meie silma ebatäiuslikkuse tõttu. Kasutades millimeeterjaotustega joonlauda, saab lehekülje laiust parimal juhtumil mõõta kuni millimeetri kümnendikeni: millimeetri sajandikud, tuhandikud ja järgnevad osad jäävad tundmatuks sellise mõõtmise puhul. Kaasaegne füüsika ja tehnika on mõõtmise täpsuse viinud täiuslikkuse kõrge astmeni, kuid ka täpseimad mõõtmised annavad tulemuse siiski ainult teatava lähendusastmega.

Niisiis on valdav enamik arvulisi tulemusi, millega tuleb tegemist teha, ainult tundmatute tõeliste suuruste l i g i k a u d s e d väärtused ehk, lühemalt, l i g i k a u d s e d arvud.

Teostades antud arvudega ühtesid või teisi operatsioone, ei saa jätta arvestamata seda antud arvude enamiku ligikaudset iseloomu. Toome kaks näidet.

Vastuseks küsimusele, kui vana on muuseumis säilitatav antiikne kuju, ütles muuseumi teenistuja, et kuju on 3008 aastat vana. Külastajate nõutule küsimusele, et kuidas osutus võimalikuks seda vanust nii täpselt määrata, seletab ta, et astudes kaheksa

aastat tagasi muuseumi teenistusse, kuulis ta muuseumi direktorilt, et kuju on 3000 aastat vana; järelikult on ta nüüd $3000 + 8 = 3008$ aastat vana. See teenistuja ei taipa, et vanus 3000 aastat on kindlaks tehtud ainult ligikaudselt, et nii vanade esemete valmistamisaega saab ajaloolane kindlaks määrata paremal juhtumil ainult kuni sajandi täpsusega ja et 8 aasta lisamine ei muuda selles ligikaudses arvus midagi. Tavaline liitmise reegel ($3000 + 8 = 3008$) ei ole siin rakendatav.

Olgu vaja arvutada risttahukakujulise alumiiniumplaadi kaal, kui selle servade pikkused mõõtmisel millimeeterjaotustega joonlauaga osutusid võrdseks 184 mm, 109 mm ja 32 mm (täpsusega kuni 1 mm). Käsiraamat ütleb, et alumiiniumi tihedus kõigub 2,5 ja 2,7 vahel; loeme ta võrdseks 2,6-ga. Üle minnes sentimeetritele leiame, et plaadi ruumala on $18{,}4 \cdot 10{,}9 \cdot 3{,}2 = 641{,}792$ cm³ ja kaal on 1668,6592 g. Kõik kasutatud andmed on ligikaudsed arvud ja ligikaudne on loomulikult ka lõpptulemus. Kuid mida selles võib siis usaldada?

Nagu edaspidi näeme, tuleb saadud vastus ümardada kuni kahe tüvenumbrini, nii et juba kaalu kümneliste number (kolmas tüvenumber) ei ole usaldatav. Kirjutades vastuse kujul 1,7 kg märkame, et kolm veerandit meie tööst, mille kulutasime kaheksakohalise arvu 1668,6592 g saamiseks, oli asjatu.

Tehteil ligikaudsete arvudega on omad iseärasused nagu näeme, ja selleks, et teostada neid kindlalt ning ilma ebatootliku töö kulutamiseta, tuleb tunda vastavat teooriat.

Sajandite kestel kujunenud traditsiooni kohaselt kooli aritmeetika kursus ei sisalda seda teooriat, välja arvatud üks küsimus, mille puhul tuleb arvestada tulemuse ligikaudsust isegi absoluutselt täpsete andmete korral: kui jagatis väljendada kümnendmurruna, siis valdaval enamikul juhtumeil nii täis- kui ka murdarvude jagamine viib lõpmatu kümnendmurru juurde, ja selle jagatise kasutamiseks tuleb ta ümardada, s. t. asendada lõpliku kümnendmurruga, tehes sellega teatava vea. Vastava ümardamisreegli vaatlemine ühes sellega seotud mõistega arvu ligikaudsest väärtusest puuduga või liiaga kuni teatava järguni, — see on kõik, mida sisaldab Kisseljovi aritmeetika õpik ligikaudsete arvude alalt (vt. §§ 169, 170 ja 177 1952. a. trüki järgi).

Viienda klassi matemaatika programmis leidub punkt: «Andmete ja tehete tulemuste ümardamine». Seda punkti mõistetakse mitmeti. Allpool on esitatud kaalutlusi tema laiemaks tõlgendamiseks, mille dikteerivad (nii elu- kui ka kooli-) praktika nõuded. Asi taandub mõne lihtsa reegli silmaspidamisele aritmeetiliste tehete teostamisel, kusjuures nende reeglite otstarbekohasust saab mõne näite varal kergesti näidata, kuid täielikult tõestada saab ainult hiljem. Artikkel [II, 2] näitab, kuidas seda võib teha algebra kursuses, ja raamatuis [II, 12 a, b] on selgitatud selles suunas liikumise võimalused juba viiendas klassis. Asumegi selle tee vaatlemisele (kõige üldisemais joontes).

§ 26. Ligikaudse arvutuse teooria lihtsamad mõisted ja reeglid (teadmiste esimene kontsenter).

Aritmeetika õpetamise tavalise korralduse juures tuleb õpilastel ligikaudse arvutuse teooria algmõistetega esmakordselt tegemist teha kümnendmurdude jagamisel, nimelt mis tahes kümnendarvu — täisarvu või murru — jagamisel täisarvuga (jagamine kümnendmurruga ei anna selles suhtes midagi uut). Siin selgub, mida nimetatakse ligikaudseks jagatiseks täpsusega kuni selle või teise kümnendkohani (kuni kümnendikeni, kuni sajandikeni jne.), hakatakse eristama ligikaudset jagatist, mis on võetud puuduga, ligikaudsest jagatisest, mis on võetud liiaga, võetakse tarvitusele ligikaudse võrdumise märk ($\approx$), põhjendatakse ja formuleeritakse reegel arvude ümardamisest selle või teise järguni (kuni terveteni, kuni kümnendikeni jne.), mille kohaselt mingi järguni ümardamisel jäetakse kõrvale kõik sellest järgust paremal asetsevad numbrid, kusjuures selle järgu number jääb muutmata, kui järgnev, s. o. esimene ärajääv number on 0, 1, 2, 3 või 4, ja tugevdatakse (suurendatakse ühe võrra), kui esimene ärajääv number on 5, 6, 7, 8 või 9. Sellele ümardamisreeglile tuleb pühendada küllaldast tähelepanu, püüdes saavutada tema teadlikku omandamist ja püsivat rakendamisoskust, sest ta leiab kasutamist mitte ainult kümnendmurdude jagamisel, vaid alati siis, kui liiga palju kümnendkohti sisaldav kümnendarv tuleb ühel või teisel põhjusel asendada lühema ja järelikult sobivama, kuigi vähem täpse arvuga. Väga tähtis on mitte piirduda valmis sõnastatud täpsusenõuetega, vaid vaadelda ka rida praktilise iseloomuga ülesandeid, kus nõutav täpsus on ülesande tingimuste poolt ette kirjutatud. Kui näiteks seinalehe jaoks on vaja paberipoogen jaotada joontega 7 ühelaiuseks veeruks, siis, mõõtnud kogu poogna laiuse sentimeetrites, peame jagamisel 7-ga leidma ühe veeru laiuse, kusjuures piisab, kui selle tehte teostame täpsusega kuni sentimeetri kümnendikeni: sentimeetri sajandike osade (millimeetri kümnendike) teadmine on siin kasutu.

Ligikaudsete arvude saamine ei tohi toimuda ainult täpsete arvude ümardamisel. Tähtsamaks ligikaudsete arvude saamise allikaks on mõõtmine, ja iga mõõtmistulemuse ligikaudsuse iseloomu mõistmises tuleb saavutada täielik selgus ning oskus iseloomustada selle mõõtmistulemuse täpsust eeskätt nende järkude näitamise teel, mille numbrid on usaldatavad. Ei piisa ainult jutust mõõtmistulemuste täpsuse kohta; on tarvilik, et õpilased ise teostaksid mõõtmisi mitmesuguste mõõduriistadega: suure klassjoonlauaga, mis on varustatud sentimeeterjaotustega, millimeeterjaotusi kandva joonlauaga, malliga, kaaluga, mille vähimad vihid on grammised, soovitav ka mõõdulinti, põikmastaapi jne. kasutada. On vaja saavutada seda, et õpilased selgesti mõistaksid niisuguseid väiteid, nagu «postkaardi pikkus täpsusega kuni 1 mm on 143 mm», «20-kopikase metallraha läbimõõt on 21,2 mm täpsusega kuni millimeetri kümnendikeni» jne. Need laused tähendavad, et kui meile

tundmatud nende suuruste täpsed väärtused, s. o. millimeetrites väljendatud postkaardi pikkus ja metallraha läbimõõt ümardada, esimene kuni tervete millimeetriteni, teine kuni kümnendike millimeetriteni, siis saadakse näidatud arvud. Peale niisuguste lihtsate mõõtmisjuhtumite tuleb õpilasi tutvustada ka keerukamate juhtumitega, kus üht ning sama objekti mõõdetakse korduvalt ja arvutatakse tulemuste keskmine. Soovides näiteks leida kauguse koolist postkontorini, märgitakse kõigepealt need punktid, mille vahelist kaugust soovitakse mõõta, tähistatakse see joon, mida mööda kavatsetakse mõõta, ja teostatakse mõõtmine korduvalt, kõige parem mõõduketi või mõõdulindiga. Oletame, et mõõtmist on teostatud 4 korda ja saadud arvud 885,8 m, 889,8 m, 894,3 m ja 887,4 m. Mõõtmistulemuste keskmine on siin 889,325 m, kuid et tervete meetrite number mõnevõrra kõigub, siis ümardame selle tulemuse terveteni, kõrvale jättes kogu murdosa, ja väidame, et otsitav kaugus võrdub 889 m.

Pöörates järjest õpilaste tähelepanu nende arvude täpsusele, millega neil tuleb tegemist teha, õpetame neid eristama, missugused andmed on täpsed, missugused ligikaudsed, harjutame säilitama mõõtmistulemustes ainult usaldatavaid numbreid ja mitte enam kui üht mitte täiesti usaldatavat, kõrvale heites järgnevad numbrid (I reegel). Erilist tähelepanu nõuab number null juhtumil, kui ta esineb ligikaudse arvu madalaima järgu numbrina. Öeldes näiteks, et linna elanikkond on 156 000 inimest, anname elanike arvu ligikaudse väärtuse kuni tuhandeteni (tuleb eelistada kirjutist «156 tuhat»), ja kirjutades, et juhtme läbimõõt on 0,40 mm, märgime nulli sajandiku kirjutamisega, et mõõtmine on teostatud täpsusega kuni sajandikeni. Esimesel juhtumil nullid asendavad meile tundmatuid numbreid ega kuulu «tüvenumbrite» hulka, kuid teisel juhtumil number 0 (sajandikud) näitab ühikute puudumist sajandike järgus ja kindlasti kuulub «tüvenumbrite» hulka. Siin antakse terminile «tüvenumber» uus, varem kasutatud tähendusest erinev tähendus (nulli vasakul ei loeta kunagi tüvenumbriks).

Edasi tekib küsimus, kuidas teostada nelja aritmeetilist tehet ligikaudsete arvudega. Ühe ja sama järguni ümardatud ligikaudsete arvude liitmine ja lahutamine ei tekita raskusi: viiendas klassis käiakse nendega ümber kui täpsete arvudega, lükates liitmise ja lahutamise tulemuse kõigi numbrite usaldatavuse küsimuse edasi vanemate klassideni. Kuid juba niisugune ülesanne, nagu arvude $a \approx 4{,}537$ ja $b \approx 12{,}8$ summa leidmine, kus üks arv on antud täpsusega kuni tuhandikeni, teine ainult täpsusega kuni kümnendikeni, nõuab erilise, kergesti püstitatava summa ümardamise reegli rakendamist. Tõepoolest, märkides andmeis järgnevate järkude tundmatuid numbreid küsimärkidega ja teostades liitmist tavalisel viisil, saame:

$$\begin{array}{r} 4{,}537? \\ +\ 12{,}8?\,?\,? \\ \hline 17{,}337? \end{array}$$

Otsekohe on näha, et summa teine ja kolmas kümnendmärk ei ole usaldatavad. Järelikult tuleb saadud summa ümardada ja kirjutada ta kujul 17,3. Niiviisi saame järgmise reegli: ligikaudsete arvude liitmisel ja lahutamisel tuleb tulemuses säilitada nii mitu kümnendmärki, kui mitu kümnendmärki on vähima kümnendmärkide arvuga ligikaudses andmes (II reegel). Juhtum, kus ligikaudsed andmed on täisarvud, taandub kergesti vaadeldud juhtumile, kui need andmed väljendada mingi kõrgema järgu ühikuis.

Ligikaudsete arvude korrutise ja jagatise ümardamise reegli saamiseks on samuti lihtsaim kasutada tundmatute numbrite märkimist küsimärkidega. Mõned näited:

```
   4,26?        4,26?        4,26|?   : 5,73? = 0,743
 × 5,73?      × 5,7?         4,26|?   | 573?
  |?????       |?????       4 26|??   | 0,743
  1|278?       2 |982?       4 01|1?
 2 9|82?      21 |30?         24|9??
21 3|0?       24,|282??       22|92?
24,4|098??     24 |             1|98??
24,4|                          1|719?
                                |261?
```

```
4,3|? : 5,73? = 0,74
4 3|?? ?  |573?
4 0|11 ?  |0,74
  2|49 ??
  2|29 2?
   |19 8?
```

Siin punktiirjooned eraldavad neist paremal asetsevaid numbreid, mis ei väärі mingit usaldust, numbritest, mis asetsevad neist vasakul ning on usaldatavad. Koma nihutamine andmeis ei muuda midagi peale koma asukoha tulemuses, ja korrutise ning jagatise ümardamise reegel, millele viib analoogiliste näidete vaatlemine, sõnastub teisiti. kui summa ja vahe korral: korrutamisel ja jagamisel tuleb tulemuses säilitada nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on vähima tüvenumbrite arvuga ligikaudses andmes (III reegel). Arvu «tüvenumbriteks» nimetatakse siin tema kõiki numbreid peale nullide, mis asetsevad vasakul tema esimesest nullist erinevast numbrist.

Märgime veel kolm reeglit, mida on kerge saada, kui vaadelda vastavaid erinäiteid.

Vahepealsete tulemuste arvutamisel tuleb säilitada üks number enam, kui seda soovitavad eelmised reeglid. Lõpptulemuses heidetakse see «varunumber» ära (IV reegel).

Kui mõned andmed sisaldavad enam kümnendmärke (liitmisel ja lahutamisel) või enam tüvenumbreid (korrutamisel ja jagamisel)

kui teised, siis tuleb need esmalt ümardada, säilitades ainult ühe lisanumbri (V reegel).

Kui andmeid on võimalik võtta meelevaldse täpsusega, siis selleks, et saada tulemus 2, 3, 4, ... üldiselt n kohaga, tuleb andmed võtta 3, 4, 5, ... üldiselt $n+1$ kohaga (VI reegel).

Nende kuue reegliga on ammendatud kogu see teadmiste hulk ligikaudse arvutuse alalt, mida tuleb soovitada praktiliseks omandamiseks viiendas klassis. Nende reeglite teoreetiline põhjendamine ei ole viiendas klassis võimalik, kuid neist kindlasti kinnipidav õpetaja saavutab kergesti seda, et õpilased neid oskavad ning püsivalt rakendavad, kokku hoides palju aega ja jõudu, mis kasutult kuluks vähimatki usaldust väärivate numbrite saamiseks. Eespool toodud näidisarvutused küsimärgi kasutamisega sunnivad õpilasi täiesti nõustuma vajadusega ümardada iga tulemus nende reeglite kohaselt.

Juhtides lugejat, kes soovib seda küsimust sügavamini tundma õppida, eespool näidatud raamatute juurde, piirdume ainult ühe näite vaatlemisega, millest nähtub nende reeglite rakendamine keerukama (kuid viienda klassi õpilastele jõukohase) arvutuse puhul.

On vaja leida avaldise $x = \frac{a+b}{(a-b)\cdot c}$ väärtus, kui $a = 3\frac{4}{7}$, $b = 3\frac{5}{11}$ ja $c = 28\frac{1}{3}$, esmalt täpselt, teostades arvutused harilikes murdudes, siis ligikaudselt, teisendades kõik andmed kümnendmurdudeks täpsusega kuni sajandikeni, ja võrrelda tulemusi.

Esimene viis:

$$a+b = 3\frac{4}{7}+3\frac{5}{11} = 6\frac{44+35}{77} = 7\frac{2}{77} = \frac{541}{77};$$

$$a-b = \frac{9}{77};\quad c = 28\frac{1}{3} = \frac{85}{3};$$

$$x = \frac{541\cdot 77\cdot 3}{77\cdot 9\cdot 85} = \frac{541}{255} = 2\frac{31}{255} = 2{,}1215\ldots$$

Teine viis:

$a \approx 3{,}57$; $b \approx 3{,}45$; $c \approx 28{,}33$; $a+b \approx 7{,}02$;
$a-b \approx 0{,}12$; $(a-b)c \approx 0{,}12\cdot 28{,}33 \approx 3{,}40$ (viimane number on varunumber);

$x \approx 7{,}02 : 3{,}40 \approx 2{,}06\ldots$; $x \approx 2{,}1$.

Teine viis andis ümardamisreeglite rakendamise tulemusena nagu näeme just selle tulemuse, mille saame esimesel viisil saadud täpse resultaadi ümardamisel kahe tüvenumbrini.

§ 27. Ülemtõke ja alamtõke (teadmiste teine kontsenter ligikaudse arvutamise alalt).

Mitte teades vaadeldava arvu x täpset väärtust on meil väga sageli võimalik näidata arvu, mis on tingimata vähem arvust x ja mida nimetatakse tema alamtõkkeks (lühendatult ATx), ja

samuti arvu, mis on tingimata suurem kui x ja mida nimetatakse tema ülemtõkkeks (lühendatult $\dot{U}Tx$). Ligikaudse väärtuse ($x \approx a$) asendamine ATx ja $\dot{U}Tx$ andmisega võimaldab tuua täit selgust kõigisse väidetesse, mis on seotud ligikaudsete väärtustega, ja taastab matemaatiliste arvestuste ranguse: kahekordne võrratus $a_1 < x < a_2$ annab täiesti määratud ilme arvule x, mida ei saa ütelda ligikaudsest võrdusest $x \approx a$. Selliste kahekordsete võrratuste tähtsusest on aru saadud väga ammu, juba Vana-Kreekas: «Rakenduslikest vajadustest tekkinud huvi suuruste ligikaudse mõõtmise ja ligikaudsete arvutuste vastu ei viinud III sajandi (e. m. a.) matemaatikuid loobumisele matemaatilisest rangusest. Kõik nende poolt teostatud rohkearvulised ligikaudsed juurimised ja isegi kõik astronoomilised arvutused viidi läbi tõkete täpse arvestusega Arhimedese ringjoone pikkuse kuulsa määramise eeskujul laitmatult tõestatud võrratuste $3\frac{1}{7}\,d > P > 3\frac{10}{71}\,d$ vormis (kus P on ringjoone pikkus, kui diameeter on d). See selge vaade, et ligikaudne matemaatika ei ole «ebarange» matemaatika, unustati hiljem kauaks ajaks ära» [I, 30 a].

Asendada tundmatu suuruse x ligikaudse väärtuse arvutamine ATx ja $\dot{U}Tx$ arvutamisega — sellele ideele on rajatud ülimal määral väärtuslik arvutusviis vigade range arvestusega tõkete meetodil, mis moodustab teise kontsentri teadmisi ligikaudsete arvutuste alalt. Tema teoreetiline külg on väga lihtne ja tugineb juba algkoolist hästi tuntud tõdedele tehete tulemuste muutmisest sõltuvalt komponentide muutumisest. Kui piirduda nelja aritmeetilise tehtega, siis see teoreetiline külg ammendub järgmiste lausetega:

$$
\begin{aligned}
&AT(x+y) = ATx + ATy,\\
&\dot{U}T(x+y) = \dot{U}Tx + \dot{U}Ty,\\
&AT(x-y) = ATx - \dot{U}Ty,\\
&\dot{U}T(x-y) = \dot{U}Tx - ATy,\\
&ATxy = ATx \cdot ATy,\\
&\dot{U}Txy = \dot{U}Tx \cdot \dot{U}Ty,\\
&AT(x:y) = ATx : \dot{U}Ty,\\
&\dot{U}T(x:y) = \dot{U}Tx : ATy.
\end{aligned}
$$

Siia tuleb lisada veel kolm lauset, mille õigsus vahetult järeldub AT ja $\dot{U}T$ definitsioonist: 1) AT-t võib ümardada ainult puuduga, $\dot{U}T$-t ainult liiaga, 2) mida vähem on vahe $\dot{U}Tx - ATx$, seda täpsemalt on x määratud, 3) suuruse x ligikaudseks väärtuseks on soovitav võtta arvude ATx ja $\dot{U}Tx$ aritmeetiline keskmine või arv, mis on lähedane sellele keskmisele.

Tõkete meetodi lihtsamad rakendused ei paku mingisuguseid raskusi ja selguvad täielikult järgmisest näitest.

Leida $x = \frac{a+b}{(a-b)\cdot c}$, kui $a = 3\frac{4}{7}$, $b = 3\frac{5}{11}$ ja $c = 28\frac{1}{3}$, arvutades a, b ja c jaoks nende AT ja $\dot{U}T$ kümnendmurdudes täpsusega kuni sajandikeni.

	AT	ÜT
a	3,57	3,58
b	3,45	3,46
$a+b=m$	7,02	7,04
$a-b$	0,11	0,13
c	28,33	28,34
$(a-b)\cdot c=n$	3,11	3,69
$x=m:n$	1,90	2,27

$$\begin{array}{rr} 2{,}27 & -\ 2.27 \\ 1{,}90 & \quad 1{,}90 \\ \hline 4{,}17 & \quad 0{,}37 \end{array}$$

$4{,}17 : 2 = 2{,}085;\ 0{,}37 : 2 = 0{,}185$

$x \approx 2{,}085\ (\pm 0{,}185)$

$x \approx 2{,}1\ (\pm 0{,}2)$

Saanud kahekordse võrratuse $1{,}90 < x < 2{,}27$, on loomulik suuruse x ligikaudseks väärtuseks võtta leitud tõkete keskmine, nimelt 2,085, kuid seejuures võib tekkida mulje, et oleme leidnud x täpsusega kuni tuhandikeni. Seda «puru silma ajamist» ei esine, kui ühtlasi näidata, kui suur on suuruse x tõelise väärtuse suurim võimalik hälve sellest keskmisest, mis ju ilmselt võrdub tõkete poole vahega, ja vastus kirjutada ligikaudse võrduse $x \approx 2{,}085$ $(\pm 0{,}185)$ kujul. Teine, lihtsam ja sagedamini kasutatav viis seisneb leitud keskmise ümardamises niisuguse arvestusega, et selles oleks ainult üks mitte täiesti usaldatav number. Antud juhtumil annab ümardamine kuni kümnendikeni arvu $(x \approx 2{,}1)$, mis erineb suuruse x tõelisest väärtusest ühelt poolt vähem kui $2{,}1 - 1{,}90 = 0{,}20$ võrra ja teiselt poolt vähem kui $2{,}27 - 2{,}1 = 0{,}17$ võrra. Kirjutis $x \approx 2{,}1\ (\pm 0{,}2)$ tähendab, et suuruse x antud ligikaudne väärtus erineb tema tõelisest väärtusest mitte rohkem kui 0,2 võrra ükskõik kummale poole.

Märgime, et tulemus, mille suuruse x arvutamisel saime § 26, on täielikus kooskõlas äsjaleitud tulemusega. Vahe on vaid selles, et saanud seal $x \approx 2{,}1$, võisime väita ainult seda, et see arv 2,1 erineb suuruse x tõelisest väärtusest vähe, siin aga võime garanteerida, et erinevus x ja 2,1 vahel oma absoluutväärtuse poolest ei ületa arvu 0,2. Nagu näitab võrdlus sealsamas leitud täpse tulemusega $(x = 2{,}1215\ldots)$, ületab see erinevus tegelikult vaevalt arvu 0,02.

Tõkete meetodi rakendamisega detailsemalt tutvuda soovivale lugejale soovitame pöörduda raamatute [II, 12] poole.

Oma ideelise sisu poolest on tõkete meetod viienda klassi õpilastele täiesti jõukohane, kuid otstarbekohasemana näib tema tarvituselevõtmine alles kuuendas klassis, piirdudes viiendas klassis § 26 näidatud ja sageli «õigete numbrite arvu määramise reegliteks» nimetatud kuue reegli alatise rakendamisega.

§ 28. Absoluutsete ja relatiivsete vigade tõkked (teadmiste kolmas kontsenter ligikaudse arvutamise alalt).

Teades, et arv a on mingi meile tundmatu täpse arvu x ligikaudne väärtus, võib küsida, kui suur on vahe $x - a = \alpha$, mida harilikult nimetatakse ligikaudse arvu a absoluutseks veaks. See absoluutne viga on kas positiivne (kui a on arvu x ligikaudne väärtus puuduga) või negatiivne (kui a on ligikaudne väärtus liiaga). Kui x ei ole teada, siis ei ole teada ka viga α, kuid väga sageli saab määrata α absoluutväärtuse ülemtõkke, s. t. niisuguse positiivse arvu Δa, et $|x - a| < \Delta a$ ehk $-\Delta a < x - a < \Delta a$. Seda arvu Δa nimetatakse arvu a kui arvu x ligikaudse väärtuse absoluutse vea tõkkeks ehk absoluutse vea ülemmääraks. Nii oli eespool vaadeldud näites arvu x jaoks leitud ligikaudse väärtuse $a = 2{,}1$ absoluutse vea tõkkeks arv 0,2. Ümardades mis tahes kümnendarvu mingi järguni, saadakse tulemuseks arv a, mille absoluutse vea tõkkeks on pool viimase järgu ühikust. Tavaliselt kasutatakse kirjutist $x \approx a(\pm \Delta a)$, mida loetakse järgmiselt: iks võrdub ligikaudu a-ga absoluutse veaga mitte üle Δa.

Teades arve a ja Δa on kerge saada $ATx = a - \Delta a$ ja $\ddot{U}Tx = a + \Delta a$. Ümberpöördult: teades, et $ATx = a_1$ ja $\ddot{U}Tx = a_2$ ja võttes $x \approx a$, kus $a = (a_1 + a_2) : 2$, saame, et $\Delta a = (a_2 - a_1) : 2$. Tõepoolest

$$a_1 < x < a_2$$

$$a_1 - (a_1 + a_2) : 2 < x - a < a_2 - (a_1 + a_2) : 2$$

ehk

$$-(a_2 - a_1) : 2 < x - a < (a_2 - a_1) : 2$$

$$|x - a| < (a_2 - a_1) : 2.$$

Kui a väärtuseks võtta mitte $(a_1 + a_2) : 2$, vaid mingi muu arv x_0, siis Δa võrdub suurema vahega $x_0 - a_1$ ja $a_2 - x_0$ hulgast.

Niisiis, a ja Δa andmine on samaväärne $ATx = a_1$ ja $\ddot{U}Tx = a_2$ andmisega. Absoluutse vea tõket Δa saab defineerida ka teisiti, nimelt kui positiivset arvu, mille lahutamisel arvust a saab ATx ja liitmisel arvuga a saab $\ddot{U}Tx$. See Δa definitsioon on kergemini omandatav, kuid kui lähtuda sellest, siis tuleb tõestada, et $|x - a| < \Delta a$, andes kahekordsele võrratusele $a - \Delta a < x < a + \Delta a$ kuju $-\Delta a < x - a < \Delta a$ ehk $|x - a| < \Delta a$.

Absoluutse vea tõke on heaks täpsuse karakteristikuks, võimaldades võrrelda ühe ning sama suuruse mitmesuguste ligikaudsete väärtuste täpsust. Kui näiteks $x \approx 24 (\pm 1)$ g ja $x \approx 23{,}85$ $(\pm 0{,}01)$ g, siis on selge, et tundmatu kaalu x teine väärtus on palju täpsem. Esimene kirjutis on samaväärne kahekordse võrratusega 23 g $< x <$ 25 g; selle tulemuse võib saada tavalise kauplusekaaluga, millel on grammine kaaluviht, kuid teine on samaväärne võrratusega 23,84 g $< x <$ 23,86 g (mille saab, kui kasutada täpsemat laboratooriumikaalu).

Kuid absoluutse vea tõkkest ei piisa, kui on vaja võrrelda eri-

nevate suuruste ligikaudsete väärtuste täpsust. Oletame näiteks, et mõõdeti tuletiku pikkus x ja laua pikkus y ning saadi $x \approx 50(\pm 1)$ mm ja $y \approx 1627(\pm 1)$ mm. Kuigi siin on absoluutse vea tõke mõlemal juhtumil üks ning sama, ütleb siiski igaüks, et teine mõõtmine on teostatud palju tapsemalt esimesest, sest esimese mõõtmise puhul moodustab absoluutse vea tõke 2% kogu suurusest, kuid teise puhul kõigest 0,06%. Niisiis ei ole tähtis mitte ainult absoluutse vea tõkke suurus, vaid ka see asjaolu, missuguse osa moodustab Δa kogu ligikaudsest väärtusest a. Siit tuleneb vajadus vaadelda murdu $\frac{\Delta a}{a}$, mida nimetatakse antud ligikaudse väärtuse a relatiivse vea tõkkeks (ülemmääraks) ja väljendatakse tavaliselt protsentides, kasutades kirjutist $x \approx a(\pm p\%)$, mis on samaväärne kirjutisega $a(1 - 0{,}01\ p) < x < a(1 + 0{,}01\ p)$. Ülal antud näites relatiivse vea tõkked on $\frac{1}{50}$ ehk 2% ja $\frac{1}{1627}$ ehk 0,06%; esimese mõõtmise täpsus on ümmarguselt 30 korda vähem kui teisel.

Absoluutse ja relatiivse vea tõkke mõiste leiab praktikas sageli kasutamist. Näiteks kaubakaalude kontrollimise määrus nõuab, et kauplustes kasutatavad kaalud võimaldaksid kaalumist veaga mitte üle ühe grammi iga kilogrammi kohta, s. o. annaksid relatiivse vea tõkke mitte üle 0,1%. Muugilolevad raadioaparaatide detailid, näiteks takistused, kannavad järgmisekujulisi märkusi: «300(± 10%) oomi». Niisugune märkus ütleb, et antud detaili tõeline takistus erineb tema nominaalsest takistusest (300 oomi) mitte rohkem kui 10% võrra 300-st, s. o. 30 oomi võrra, ja asetseb seega 270 ja 330 oomi vahel.

Need mõisted on niivõrd lihtsad, et tutvumine nendega võib teostuda juba seitsmeklassilises koolis. On väga kasulik harjutada õpilasi andma endale aru nende ligikaudsete arvude täpsusest, millega neil on tegemist, kasutades kõiki kolme vaadeldud meetodit, kusjuures viiendas klassis on esikohal lihtne usaldatavate numbrite arvu määramine, kuuendas klassis — AT ja UT määramine ning seitsmendas klassis — absoluutse vea tõkke ja relatiivse vea tõkke määramine.

Hoopis raskemaks kujuneb absoluutse ja relatiivse vea tõkke mõiste rakendamine arvutustulemuste vigade rangel määramisel, mis harilikult leiab kasutamist laboratooriumipraktikas. See küsimus taandub järgmiste teoreemide tuletamisele ja rakendamisele: 1) summa ja vahe absoluutse vea tõke on võrdne antud andmete absoluutsete vigade tõkete summaga, 2) korrutise ja jagatise relatiivse vea tõke on võrdne andmete relatiivsete vigade summaga, 3) astme (juure) relatiivse vea tõke on võrdne astendatava (juuritava) relatiivse vea ja astendaja (juurija) korrutisega (jagatisega). Nende teoreemide tõestused ja rakendamisnäited leiab lugeja eespool juhatatud kirjanduses; nende käsitlemist keskkoolis programm ei näe ette. Seda tuleb lugeda programmi puuduseks, sest absoluutse ja relatiivse vea tõkete kohta käivate teoreemide tundma-

õppimine esiteks on tarvilik igale töötajale mis tahes laboratooriumis ja teiseks võimaldavad need teoreemid põhjendada neid tähtsaid arvutustulemuste ümardamise reegleid, mis on antud eespool (paragrahvis 26); ligikaudse arvu absoluutse vea tõket iseloomustab arvu täpsete kümnendmärkide arv ja relatiivse vea tõket — tema täpsete tüvenumbrite arv. Näiteks iga ligikaudne arv, millel on kaks täpset kümnendmärki, on absoluutse vea tõkkega 0,005 ja iga ligikaudne arv, millel on kaks täpset tüvenumbrit, on relatiivse vea tõkkega 0,5%-st kuni 5%-ni. Siit järeldub, et liitmise ja lahutamise teostamisel, kus absoluutse vea tõkked liituvad, tuleb arvesse võtta kümnendmärkide arv, kuid korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise teostamisel — tüvenumbrite arv.

§ 29. Üldisi metoodilisi vaateid ligikaudsele arvutamisele keskkoolis.

Aritmeetika koolikursus kujunes üldjoontes XVII ja XVIII sajandil, peegeldades selle aja tegelikku elu, kaubanduslikku ja sõjalist praktikat. Juba korduvalt nimetatud vene kuulus L. Magnitski õpik «Aritmeetika», mis ilmus 1703. a., rahuldas täielikult Peetri-aegse tegeliku elu arvutuslikke nõudeid. Edasi muutusid aritmeetika programmid ja õpikud aeglasemalt kui elu poolt arvutusoskuse ja ülesannete lahendamise oskuse alal esitatavad nõuded ning side kooli ja elu vahel katkes, mis XX sajandi algul muutus eriti tunduvaks. Suur Oktoobrirevolutsioon kutsus esile keskkooli, sellega ka aritmeetika koolikursuse põhjaliku reformi, kuid ligikaudse arvutamise suhtes on olukord jäänud ebarahuldavaks tänapäevani. Küsimuse uudsus, selle lahendamisega seotud teaduslikud ja metoodilised raskused, vastavate teadmiste ja kogemuste puudumine matemaatika õpetajate laialdastel hulkadel, osaliselt ka lihtsalt ligikaudse arvutuse tähtsuse alahindamine matemaatika kogu rakenduste seisukohalt — kõik see pidurdas ligikaudse arvutuse teooria elementide keskkooli sisseviimise küsimuse õiget lahendamist.

Eelmises kolmes paragrahvis on märgitud need teadmised, mis tuleb lugeda keskkooli jaoks täiel määral tarvilikeks ja samal ajal täiesti jõukohaseiks, kuid mis kujutavad endast praegu kehtiva programmi laiendusi. Siia kuuluvad kõigepealt tehete tulemuste ümardamise reeglid ligikaudsete arvude puhul, mis programmis on nimetatud, kuid mõistetakse tavaliselt liiga kitsalt. Õpetaja, kes ise on need hästi omandanud ja alati neist arvutuste puhul juhindub, saavutab kergesti ka seda, et õpilased peavad neist kinni, astudes sellega tõsise sammu edasi oma õpilaste matemaatilise kultuuri tõstmise mõttes. Need teoreemid kindlustavad, et õpilaste vihikuis ei esine neid «mittetarvilike numbrite mõttetuid sabasid», millest vihikud on kirjud ja mida näeme näiteks jagatises $87 : 32 = 2{,}71875$, mis on saadud kivi tiheduse arvutamisel, kui selle kaal ja ruumala (87 g ja 32 cm^3) on saadud mõõtmisel, sellal kui nende ligikaudsete andmete puhul võimalik õige vastus on 2,7.

Viidet ajapuudusele, mis nagu takistaks nende reeglite juurutamist koolipraktikas, ei saa lugeda põhjendatuks: kaotades mõne tunni ümardamisreeglite omandamisel, säästab õpetaja mitmed kümned tunnid tänu sellele kokkuhoiule arvutustöös, mida annab nende reeglite alatine kasutamine. On olemas teine, võrratult olulisem takistus: tarvituselolevad ülesannete kogud, nende seas stabiilne E. Berezanskaja ülesannete kogu, on koostatud neid reegleid arvestamata, ja õpetaja, kes soovib neid rakendada, peab tegema parandusi paljude ülesannete tekstis kui ka raamatus antud vastustes.

Teadmiste teine kontsenter, nimelt kõik, mis on ühenduses tundmatu arvu alam- ja ülemtõkkega, on parem jätta seitsmeaastase kooli vanemaisse — VI ja VII — klassidesse. Neid teadmisi on kerge siduda võrratuste lihtsamate omadustega, millega õpilastel on tegemist juba VII klassis. Tõkete meetodi teoreetilised alused on niivõrd lihtsad, et selle praktilise omandamisega tuleb kergesti toime iga õpilane lihtsalt ülesannete lahendamise korras, ilma et õppimiseks kulutada eri tunde.

Teadmiste kolmas kontsenter, nimelt vigade tõkete meetod, mille tundmine on tähtis edukaks tööks igas kõrgema kooli laboratooriumis, tekitab tunduvalt suuremaid raskusi, ja kehtivas programmis vastava osa puudumise tõttu ei saa praegusel ajal keskkoolis läbivõtmisele tulla, kuigi absoluutse ja relatiivse vea tõkke mõiste ise on niivõrd lihtne, et on jõukohane juba V klassis. Täiesti teostatav ja väga kasulik on, et juba viienda klassi õpilased tunneksid selliste väljendite tähendust, nagu $125(\pm 1)$ mm, $400(\pm 2\%)$ g jne. Kuid absoluutse ja relatiivse vea tõkke kohta käivate teoreemide tundmaõppimine, oskus rakendada neid ülesannete lahendamisel, selgitada nende seos õigete numbrite arvu määramise reeglitega — kõike seda saab praegu soovitada ainult individuaalseks tööks tugevamaile õpilastele ja ringide tööks.

VI peatükk.

SUHTED JA VÕRDED. VÕRDELISED SUURUSED.

§ 30. Kahe arvu suhte mõiste.

On olemas kaks arvude suhte mõiste tõlgendust. Esimese, vanema ning kitsama tõlgenduse järgi on kahe arvu suhteks nende arvude jagatis neil ja ainult neil juhtumeil, kus kas mõlemad võetud arvud on abstraktsed (arvude 15 ja 3 suhe on $15 : 3 = 5$, 15 ja 20 suhe on $15 : 20 = 0{,}75$) või mõlemad on ühenimelised arvud, s. t. väljendavad ühe ja sama suuruse väärtusi ühtedes ning samades ühikutes, näiteks 5 cm ja 2 cm suhe on $5 : 2 = 2{,}5$ või 1 g ja 1 kg suhe on $1 : 1000 = 0{,}001$. Termini «suhe» sellise mõistmise puhul iga suhe on jagatis, kuid iga jagatis ei ole suhe: näi-

teks 20 kg jagamisel arvuga 5 saame jagatise 20 kg : 5 = 4 kg, mis ei ole suhteks; jagatis on suhteks ainult siis, kui ta kujutab endast abstraktset arvu. Teine, ajakohasem ning avaram arvude suhte mõiste tõlgendus tunnistab teda samaseks arvude jagatise mõistega: iga arvude suhe on nende jagatis ja arvude iga jagatis on nende suhe. Niisuguse tõlgenduse järjekindel läbiviimine eeldab loobumist kirjutisest 20 kg : 5 ja selle asendamist kirjutisega $\frac{20}{5}$ (kg), mis tähendab, et otsitav kilogrammide arv on võrdne arvude 20 ja 5 suhtega.

Kisseljovi «Aritmeetika» viimaseis väljaandeis leiame niisuguse avarama suhte mõiste tõlgenduse. Tema põhjendamisele on pühendatud prof. A. Hintšini eri artikkel [II, 34].

Suhte mõiste avarama tõlgenduse kasuks kõnelevad ka järgmised kaalutlused. Kui jutt oleks aritmeetikast kui ainult arve käsitlevast teadusest ilma selle rakendusteta, siis võiks termini «suhe» üldse kõrvale heita, asendades selle terminiga «jagatis». Kuid abstraktset õpetust arvudest ei saa isoleerida õpetusest teda rakendada õige mitmesuguste konkreetsete suuruste tundmaõppimisel, seda enam, et matemaatika koolikursuses, nagu korduvalt oleme toonitanud, seatakse need rakendused esikohale ja on enamikul juhtumeil isegi abstraktsete tõdede mõistmisele viiva töö lähtekohtadeks. Iga sama liiki konkreetsete suuruste, näiteks lõikude suhe defineeritakse lihtsalt kui samades ühikutes väljendatud nende suuruste arvuliste väärtuste suhe: lõikudel pikkusega 20 cm ja 15 cm suhe on jagatis $20 : 15 = 1\frac{1}{3}$. Kuid täiesti õigustatud on vaadelda ka mitte sama liiki suuruste suhet, mis teatavasti viib uute suuruste juurde. Näiteks 20 m ja 4 sekundi suhe väljendab ühe uue suuruse väärtust, nimelt ühtlase liikumise kiiruse väärtust, mis on kujutatav jällegi arvude 20 ja 4 jagatise, s. o. 5-ga võrdse kiirusühikute arvuga, antud puhul meetrite arvuga sekundis. Ühenduses sellega tuleb õigeks lugeda kirjutis 20 cm : 4 sek. $= 5\ \frac{\text{cm}}{\text{sek.}}$ ja samuti kirjutis 16 g : 20 $\text{cm}^3 = 0{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Viimasel juhtumil massi suhe ruumalasse on uus suurus — tihedus. Meenutame, et ka arvude korrutamisel näeme analoogilist uutele suurustele ja nende mõõtmiseks uutele ühikutele ülemineku protsessi: näiteks 5 cm · 4 cm = 20 cm^2 ja 10 töölist · 8 tundi = 80 töötundi. Toonitame, et iga kord on kõne all tehe (korrutamine või jagamine) arvudega, kuid tulemust tõlgendame uue suuruse väärtuse avaldisena.

Mõnevõrra teissugune vaade suhte mõistele leiab arendamist prof. M. Grebentša artiklis [II, 16]. Kuid tema tulemused suhte mõiste praktilise kasutamise kohta ei ole vastuolus sellega, mis äsja öeldi mis tahes suuruste väärtusi väljendavate arvude suhtest.

Keskkooli matemaatika programmi seletuskirjas öeldakse: «Kahe arvu suhte mõiste võetakse tarvitusele juba täisarvude võrdlemisel; pärast murdude tarvituselevõtmist tuleb ta vastavalt üldistada.

Kummalgi juhtumil tuleb selle mõiste sisu selgitada vastavate, võrdeliste suurustega seotud ülesannete najal.» (1952. a. trükk, lk. 8)

Lapsed kohtuvad suhte mõistega sisuliselt juba algkoolis, kui seatakse küsimus selle kohta, mitu korda on üks arv teisest suurem või vähem. Kuid seni, kuni pole tundma õpitud murde, mis võimaldavad teostada iga jagamise, välja arvatud jagamise nulliga, ei saa väita, et igal kahel arvul on olemas kindlaksmääratud suhe: murde mitte tundes ei saa kõnelda 5 ja 4 suhtest. Kuid osates jagada mis tahes täis- või murdarvu mis tahes täis- või murdarvuga, avaneb võimalus leida kahe arvu suhe. Üldistades mõistet «suurem nii mitu korda» öeldakse, et suhe, mis võrdub näiteks arvuga $3\frac{1}{7}$, näitab, et esimene arv on teisest $3\frac{1}{7}$ korda suurem. Suhe, mis võrdub mingi murruga, näiteks $\frac{3}{4}$ või $\frac{7}{5}$, näitab, et esimene arv võrdub vastava murdosaga, nimelt $\frac{3}{4}$ või $\frac{5}{7}$ teisest.

Kahe arvu suhte, s. o. jagatise otsimine on üheks nende arvude võrdlemise viisiks. Kõrvuti sellega kasutatakse ka teist võrdlemisviisi — nende vahe arvutamist. Ühenduses sellega võib vanemais aritmeetika õpikuis leida termineid «aritmeetiline ehk vahenguline suhe» ja «geomeetriline ehk jaondiline suhe». Need terminid ei leia käesoleval ajal üldse kasutamist ja terminit «suhe» kasutatakse alati jagatise tähenduses (endises mõttes geomeetriline ehk jaondiline suhe), nii et arvude kahe võrdlemisviisi (nende vahe ja nende jagatise arvutamise teel) segamise hädaoht tekib ainult ühenduses väljenditega «suurem või vähem nii ja nii mitme võrra» ja «suurem või vähem nii ja nii mitu korda». Õpetaja peab tähelepanelikult jälgima, kas nende väljendite tähendust mõistetakse õigesti.

Märgime, et kõrvuti terminiga «suhe» kasutatakse sageli ka terminit «protsentsuhe», mis tähendab suhte korrutist 100-ga. Nii on arvude 6 ja 8 suhe 0,75, aga nende protsentsuhe — 75%.

§ 31. Võrded.

Võrrete küsimust vaadeldakse matemaatika koolikursuses kaks korda: esimene kord VI klassi aritmeetika kursuses võrdelise sõltuvuse tundmaõppimise ettevalmistuse korras ja teine kord VII klassi algebra kursuses. See väikese ja kerge küsimuse ebasoovitav kaheks osaks tükeldamine on ühenduses sellega, et võrdelise sõltuvuse tundmaõppimine kuulus varem V klassi programmi, kus tähelise sümboolika kasutamine oli raskendatud ja seetõttu võrrete tundmaõppimine viidi lõpule alles VII klassis.

Kehtiva programmi järgi võetakse VI klassis läbi ainult võrde definitsioon, võrde põhiomadus ja tema tundmatu liikme leidmine. Neile kolmele küsimusele on reserveeritud 10 tundi klassitööd ja 5 tundi õpilaste kodust tööd, mis on enam kui küllalt. See ajarohkus võimaldab lahendada suure hulga ülesandeid võrdelistele suurustele, alustades sellega tööd järgmise teema alalt. Kisseljovi aritmeetika õpiku peatükk, mis on pühendatud võrretele, ei leia VI klas-

sis täielikku kasutamist: geomeetrilise keskmise, tuletatud võrrete ja võrdsete suhete omaduse küsimus ei ole VI klassi programmis ette nähtud, ja need võib täielikult üle viia algebra kursusse. Aritmeetilise keskmise küsimus on paigutatud sellesse peatükki ilma muu aluseta peale traditsiooni: varem, kui «vahengulise suhte» kõrval käsitleti ka «vahengulist võrret» $a - b = c - d$, esines kahe arvu aritmeetiline keskmine «pideva vahengulise võrde» $a - x = x - b$ keskmise liikmena $x = 0{,}5(a + b)$, kuid nüüd ei ole ta võrdega kuidagi seotud. Nüüd puutuvad õpilased hoopis varem kokku mitme arvu aritmeetilise keskmisega.

Defineerides võrret nagu tavaliselt kahe suhte võrdusena, on kasulik vihjata sellele, et nelja arvu, mis moodustavad võrde, nimetatakse v õ r d e l i s t e k s. Väites, et mingid neli arvu, näiteks 8, 6, 4 ja 3 on võrdelised, väidame ka seda, et neist arvudest saab koostada võrde, kusjuures neid arve kasutatakse selles järjekorras, nagu nad on antud, moodustades nimelt esimese ja teise arvu suhte ning kolmanda ja neljanda arvu suhte. Küsimus selle kohta, kas võrre $8 : 6 = 4 : 3$, mille saab koostada neist arvudest, on ainus selline, jääb esialgu lahtiseks. Mõistete «võrre», «võrde liikmed», «välisliikmed», «võrdelised arvud» ja «neljas võrdeline» tundmaõppimine ning rea näidete vaatlemine — see on esimeseks sammuks võrrete tundmaõppimisel. Kirjutis $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ on lühem ja mõnusam kui kirjutis $8 : 6 = 4 : 3$, kuid praktikas esinevad mõlemad ja kasutada tuleb mõlemaid. VI klassis ei tekita mingisuguseid raskusi ka võrde kirjutamine üldkujul:

$$a : b = c : d \text{ või } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Teiseks sammuks on võrdusega $ad = bc$ väljendatava omaduse, s. o. võrde põhiomaduse tuletamine. Kontrollinud selle kehtivust rea näidetega, antakse tema loogiline tõestus, mis põhineb sellel, et võrdsed suhted jäävad võrdseiks ka pärast seda, kui kumbki neist on korrutatud korrutisega bd. Kisseljovi õpik viib läbi selle tõestuse arvulisel erinäitel, kuid VI klassile on täiesti vastuvõetav arutluse teostamine ka üldkujul kirjutatud võrde puhul. Väga soovitav on peatuda mõisteil «erijuhtumi kontroll» ja «üldkujuline tõestus», teoreemi mõistel ning selle eelduse ja väite leidmisel. Nende mõistetega on VI klassi õpilastel samaaegselt tegemist ka geomeetrias ja nende rööbitine käsitlemine aritmeetikas ainult soodustab nende paremat omandamist.

Tõestanud teoreemi, et arvu a, b, c ja d võrdelisuse puhul on korrutised ad ja bc võrdsed, siirdume loomulikult küsimuse juurde, kas pöördlause on ka õige: kui on antud korrutiste võrdsus $ad = bc$, kas võib siit järeldada, et arvud a, b, c ja d on võrdelised, s. o., et võrre $a : b = c : d$ on õige? Pärast kontrollimist mõne näite varal anname tõestuse üldkujul, mis on niisama lihtne kui esimese lause tõestus. Otsese ja pöördteoreemi kõrvutamist on aritmeetika

kursuses tulnud teha ka varem, näiteks jaguvuse tunnuste tundmaõppimisel, kuid üldine küsimus pöördteoreemi kehtivusest seatakse esmakordselt alles geomeetria kursuse peatükis «Sissejuhatus», mille läbivõtmine toimub kuuenda õppeaasta algul. Täiesti võimalik ja soovitav on vaadelda seda ka aritmeetika kursuses võrde põhiomaduse tundmaõppimisel, millega lõpeb võrde tundmaõppimise kolmas samm.

Neljandaks sammuks on lõpetada küsimus võrretest, mille võib saada neljast võrdelisest arvust, näiteks arvudest 8, 6, 4 ja 3 või üldkujul arvudest a, b, c ja d. Kui need arvud on võrdelised, siis kooskõlas definitsiooniga saame, et $8:6=4:3$ või $a:b=c:d$; kuid esimese teoreemi põhjal saame siis võrdused $8\cdot3=6\cdot4$ ja $ad=bc$, mis jäävad õigeks, kui muuta tegurite järjekord ühes või mõlemas korrutises või kui muuta korrutiste järjekord võrduses. Ühe võrduse asemele saame nüüd kaheksa võrdust, nimelt:

$8\cdot3=6\cdot4$; $ad=bc$ (lähtevõrdus);
$3\cdot8=6\cdot4$; $da=bc$ (on muudetud tegurite järjekord vasakus pooles);
$8\cdot3=4\cdot6$; $ad=cb$ (on muudetud tegurite järjekord paremas pooles);
$3\cdot8=4\cdot6$; $da=cb$ (on muudetud tegurite järjekord mõlemas pooles);
$6\cdot4=8\cdot3$; $bc=ad$ (on muudetud korrutiste järjekord);
$4\cdot6=8\cdot3$; $cb=ad$ (on muudetud korrutiste järjekord ja tegurite järjekord vasakus pooles);
$6\cdot4=3\cdot8$; $bc=da$ (on muudetud korrutiste järjekord ja tegurite järjekord paremas pooles);
$4\cdot6=3\cdot8$; $cb=da$ (on muudetud korrutiste järjekord ja tegurite järjekord mõlemas pooles).

Igaüks neist kaheksast võrdusest annab uue võrde, ja niiviisi saab igast neljast võrdelisest arvust koostada üldse kaheksa võrret. Märgime (teadmiseks õpetajale, kuid mitte õpilastele selgitamiseks), et neljast võrdelisest arvust a, b, c ja d saab moodustada, nagu teada, üldse $4!=24$ permutatsiooni, kuid neist ainult kaheksast saab võrded, sest ülejäänud permutatsioonid ei anna võrdust $ad=bc$.

Antud neljast võrdelisest arvust kõigi kaheksa võrde saamise küsimus annab võimaluse harjutada VI klassi õpilasi neile jõukohase ja küllaltki pika arutluse läbiviimises, olles sellega väga kasulik.

Viies ja (VI klassis) viimane samm võrde tundmaõppimisel — võrde tundmatu liikme leidmine, s. o. antud mis tahes kolme arvu kaudu neljanda võrdelise leidmine — teostub ilma raskusteta.

§ 32. Võrdelisus ja pöördvõrdelisus.

Funktsionaalse sõltuvuse idee omandamine on üldharidusliku kooli matemaatika kursuse üheks põhiliseks ülesandeks, nagu nüüd üldiselt on tunnustatud. Juba algkoolis läbivõetud materjali kordamisel tuleb tegelda summa, vahe, korrutise ja jagatise muutumise küsimusega sõltuvalt andmete muutumisest; edasi kerkib küsimus murru väärtuse muutumisest tema liikmete muutumisel. Neil kahel juhtumil puutuvad õpilased esmakordselt kokku funktsionaalse sõltuvuse konkreetsete näidetega ja nimelt sõltuvustega, mida saab väljendada valemitega: $y = x + a$, $y = x - a$, $y = a - x$, $y = ax$ ja $y = a : x$, kuigi nad ei tunne veel ei neid valemeid ega vastavaid termineid. Tutvumine nende funktsioonidega piirdub rea lihtsamate omaduste tundmaõppimisega, mis väljenduvad tuntud lausetes, nagu: kui üht liidetavat suurendada mingi arvu võrra ja teine jätta muutmata, siis summa suureneb sama arvu võrra. Väga tähtis on mitte ainult omandada rida seda liiki lauseid, vaid õppida neid ka arvutuste teostamisel praktiliselt kasutama, nagu eespool on juba märgitud.

Õige vana traditsiooni kohaselt toimub aritmeetika kursuse lõpposas funktsionaalse sõltuvuse kahe juhtumi, nimelt võrdelisuse ja pöördvõrdelisuse ($y = ax$ ja $y = a : x$) mõnevõrra sügavam tundmaõppimine (kehtiva programmi kohaselt VI klassis 22 tunni ulatuses). Neile kahele funktsioonile erilise tähelepanu pööramine on täiesti õigustatud selle erakordselt suure tähtsuse tõttu, mis neil on igal sammul nii igapäevases elus kui ka mis tahes tootmistegevuses esinevate aritmeetiliste arvestuste teostamisel.

Programmi selle peatüki printsipiaalne külg haarab kahe suuruse vahelise sõltuvuse üldist ideed, mis omandatakse kahe arvujärjendi vahelise vastavusena muidugi konkreetsete näidete varal, ja kaht spetsiaalset sõltuvust: võrdelisust (funktsiooni $y = ax$) ja pöördvõrdelisust (funktsiooni $y = a : x$). Väga soovitav on sellele lisada veel tutvumine mõistetega kasvav funktsioon ja kahanev funktsioon (monotoonsed funktsioonid), mille erijuhtumeiks on võrdelisus ja pöördvõrdelisus. Õpilastel on kalduvus segada kasvava suuruse mõistet ja mingi suuruse võrdelise suuruse mõistega. Selle segamise saab kõrvaldada, kui kõigi kasvavate suuruste hulgast esile tõsta võrdelised suurused sellega, et näidata nende iseloomustavat omadust: kasvamist nii mitu korda, kui mitu korda kasvab teise suuruse väärtus, s. t. vastavate väärtuste suhete võrdsust, võrde $y_1 : y_2 = x_1 : x_2$ kehtivust ühe suuruse mis tahes kahe väärtuse (x_1 ja x_2) ja neile vastavate teise suuruse väärtuste (y_1 ja y_2) kohta. Analoogiline olukord esineb ka ühenduses pöördvõrdelisusega. Praktiliselt laheneb küsimus sellega, kui vaadelda rida niisuguseid kasvavate ja kahanevate suuruste sõltuvuse näiteid, kus kõrvuti võrdelisuse ja pöördvõrdelisusega esineb ka muid sõltuvusliike, nii et õpilased kindlalt omandaksid selle mõtte, et mitte iga suurus, mis kasvab teise suuruse kasvamisel,

ei ole temaga võrdeline, ja mitte iga suurus, mis kahaneb teise suuruse kasvamisel, ei ole temaga pöördvõrdeline. Sobivaid näiteid selleks leidub suures valikus suuruste hulgas, millega õpilased on juba varem kokku puutunud. Näiteks ruudu külje, tema ümbermõõdu (piirde) ja pindala kõrvutamine, mida saab teostada järgmise tabeli koostamisega:

Ruudu külg	1	2	3	4	5	6	7	8
Tema ümbermõõt	4	8	12	16	20	24	28	32
Tema pindala	1	4	9	16	25	36	49	64

annab suurepärase näite kolmest kasvavast suurusest, millest teine (ümbermõõt) on võrdeline esimesega, aga kolmas ei ole. Teise sama liiki näite annab murru muutumise vaatlemine tema nimetaja suurenemisel mingi arv korda ja mingi arvu võrra, näiteks:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y=\frac{3}{4x}$	0,75	0,375	0,25	0,1875	0,15	0,125	0,1071...	0,09375	0,0833...
$y=\frac{3}{4+x}$	0,6	0,5	0,428...	0,375	0,333...	0,3	0,272...	0,25	0,230...

Siin esimese suuruse kasvamisel teine ja kolmas suurus kahanevad, kuid ainult teine suurus on esimesega pöördvõrdeline.

On soovitav, et õpetaja valiks näited võrdelise ja pöördvõrdelise sõltuvuse kohta aladelt, mis on õpilastele tuntud ja nende huvidele lähedased. Harjudes süvenema asja sisusse õpilased ei tee seda levinud viga, et mehhaaniliselt loevad iga kasvava suuruse teisega võrdeliseks ja iga kahaneva suuruse teisega pöördvõrdeliseks.

Kisseljovi «Aritmeetikas» on pööratud liiga vähe tähelepanu tähtsale küsimusele sellest, missugused on võrdelised ja missugused pöördvõrdelised suurused, ja sellega, mis seal leidub, ei saa piirduda.

Märgime, et väga soovitav on selgitada võrdeliste ja pöördvõrdeliste suuruste vahelise sõltuvuse vastastikkust: kui mingi suurus on võrdeline või pöördvõrdeline teise suurusega, siis see teine suurus on omakorda võrdeline või pöördvõrdeline esimese suurusega.

§ 33. Ülesanded võrdeliste ja pöördvõrdeliste suurustega. Kolmlaused.

Missugused ka on ühe suuruse kaks väärtust x_1 ja x_2 ja neile vastavad teise, esimesega võrdelise suuruse väärtused y_1 ja y_2, alati kehtib võrdelisuse definitsiooni põhjal otseselt võrre $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$. Pöördvõrdelisuse korral võtab see võrre teise kuju, nimelt $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$. Järelikult, kui on teada kolm neist neljast arvust x_1, x_2, y_1 ja y_2, siis kasutades võrde põhiomadust saame neljanda alati leida. Kirjutades ühte tulpa esimese suuruse väärtused ja selle kõrvale teise tulpa teise suuruse vastavad väärtused, saame antud x_1, y_1 ja x_2 järgi y_2 leidmise ülesande lahendamiseks järgmise skeemi:

1. suurus	2. suurus	1. ja 2. suurus on võrdelised	1. ja 2. suurus on pöördvõrdelised
x_1	y_1	$y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$	$y_2 = \frac{y_1 x_1}{x_2}$
x_2	y_2		

On kerge näha, et niisuguse andmete üleskirjutuse korral on kehtiv järgmine lihtne reegel: et saada otsitav väärtus (y_2), tuleb sama suuruse tuntud väärtus (y_1) korrutada võrdelisuse korral teise suuruse vastavate väärtuste suhtega, s. o. suhtega $x_2 : x_1$, ja pöördvõrdelisuse korral selle suhte pöördväärtusega, s. o. $x_1 : x_2$.

On iseenesest mõistetav, et selle «lihtkolmlauseks» nimetatava reegli andmisega õpilastele ei tule rutata. Esialgu on vaja saavutada seda, et nad oskaksid koostada ja lahendada vastavat võrret.

Kõrvuti selle «võrdemeetodiga» kasutatakse ka «ühiku kaudu lahendamist», mis Kisseljovi õpikus on esitatud küllalt selgesti ja täielikult. Sellel on võrdemeetodiga võrreldes see paremus, et sunnib enam süvenema vaadeldavate suuruste vahelise sõltuvuse olemusse ning nõuab teatavat arutelu. Mõlemad meetodid on tarvis kindlasti omandada. Ülesannetes esineb ka sõltuvusi enam kui kahe suuruse x, y, z, ..., w vahel. Kui seejuures öeldakse, et suurus w on näiteks võrdeline suurustega x ja y ja pöördvõrdeline suurusega z, siis seda tuleb mõista nii, et w on kolme muutuja x, y ja z funktsioon, mille kuju on:

$$w = k \frac{xy}{z}.$$

Oletame, et on teada väärtused x_1, y_1, z_1 (endised väärtused) ja neile vastav väärtus w_1 ning nõutakse leida väärtus w_2, mis vastab väärtustele x_2, y_2 ja z_2 (uued väärtused).

Valemitest $w_2 = k\frac{x_2 y_2}{z_2}$ ja $w_1 = k\frac{x_1 y_1}{z_1}$ saame liikmeti jagamisel

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{z_1}{z_2},$$

millest

$$w_2 = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{z_1}{z_2} \cdot w_1.$$

Leidsime, et väärtus w_2 saadakse väärtusest w_1 selle korrutamisel sõltumatute muutujate x, y ja z uute ja vanade väärtuste suhetega, kusjuures selle muutuja korral, millega w on võrdeline, võetakse otsene suhe, ja selle korral, millega w on pöördvõrdeline, võetakse pöördsuhe. Teisiti, väärtust w_2 kujutava murru lugejasse kirjutatakse temaga võrdeliste suuruste uued väärtused ja pöördvõrdeliste suuruste vanad väärtused, kuna nimetajasse märgitakse temaga võrdeliste suuruste vanad väärtused ja pöördvõrdeliste suuruste uued väärtused (nn. «liitkolmlause»).

Klassis on analoogilisi ülesandeid võimalik lahendada kolmel viisil:

1) ilma mingisuguste erireeglite rakendamiseta, 2) «ühiku» kaudu ja 3) «liitkolmlause» meetodil.

Vaatleme nimetatud kolme meetodit näitel, mida pakub järgmise ülesande lahendamine.

«Elektrienergia eest, mille kulutasid ühe hoone 25 elektrilampi à 40 W ja mis põlesid 16 päeva, iga päev keskmiselt 5,5 tundi, tuli maksta 22 rbl. Mitu tundi keskmiselt päevas põlesid teises hoones ülesseatud 18 elektrilampi à 60 W, kui nende eest sama tariifi alusel tuli tasuda 31 päeva eest 28 rbl. 50 kop.?»

Siin täht W asendab sõna «vatt», nagu üldiselt on tarvitusele võetud. Edasi on terminite «vatt-tund», «kilovatt-tund» ja «kilo-«vatt» asemel kasutatud vastavalt Wh, kWh ja kW.

Esimene meetod:

I hoone kõik lambid kulutasid kokku iga päev:

$$40 \cdot 25 \cdot 5{,}5 \text{ Wh} = 5500 \text{ Wh} = 5{,}5 \text{ kWh}.$$

16 päeva jooksul on kulutatud:

$$5{,}5 \cdot 16 = 88 \text{ kWh}.$$

Tariif (ühe kWh hind):

$$22 : 88 \text{ rbl.} = 0{,}25 \text{ rbl.} = 25 \text{ kop.}$$

II hoones 31 päeva jooksul kulutatud energiahulk:

$$28 \text{ rbl. } 50 \text{ kop.} : 0{,}25 \text{ kop.} = 114 \text{ (kWh)}.$$

II hoones ühe päeva jooksul kulutatud energiahulk:

$$114 : 31 = 3{,}677 \ldots \approx 3{,}68 \text{ (kWh)}.$$

II hoone lampide üldine võimsus:

$$60 \cdot 18 \text{ W} = 1080 \text{ W} = 1{,}08 \text{ kW}.$$

Keskmine päevane põlemise kestus teises hoones:

$$3{,}68 : 1{,}08 = 3{,}408 \ldots \approx 3{,}41$$ (tundi ehk 3 t. 25 min.).

Teine meetod (lahendamine ühiku kaudu):

Kirjutame ülesande tingimused järgmise skeemi kujul:

	Lampide arv	Iga lambi võimsus	Päevas põlenud tundide arv	Päevade arv	Makstud
1. hoone	25	40 W	5,5 tundi	16	22 rbl.
2. hoone	18	60 W	x tundi	31	28 rbl. 50 k.

Arutades analoogiliselt sellega, mis kõigis üksikasjades on esitatud Kisseljovi õpiku § 28, saame:

$$x = \frac{5{,}5 \cdot 25 \cdot 40 \cdot 16 \cdot 28{,}5}{18 \cdot 60 \cdot 31 \cdot 22}$$ tundi

ehk pärast lihtsustusi: $x = \frac{950}{279} = 3{,}405 \ldots \approx 3{,}41$ tundi ehk 3 tundi 25 min.

Kolmas meetod (liitkolmlause alusel):

Märgates, et päevas põlenud tundide arv on võrdeline maksusummaga (muutumatu lampide arvu, nende võimsuse ja päevade arvu juures) ja pöördvõrdeline lampide arvuga, iga lambi võimsusega ja põlemispäevade arvuga (eeldusel, et ainult üks neist suurustest muutub, kuna teised kaks ja samuti maks energia eest ei muutu), saame liitkolmlause põhjal:

$$x = \frac{28{,}5 \cdot 25 \cdot 40 \cdot 16}{22 \cdot 18 \cdot 60 \cdot 31} \cdot 5{,}5,$$

s. o. ülalantud tulemuse.

Neist kolmest meetodist kolmas viib kõige kiiremini eesmärgile, kuid ta baseerub ainult mälul ja õpilased tulemust ei mõtesta, seepärast on parem teda mitte kasutada. Esimese ja teise meetodi väärtuseks on see, et nad kõrvaldavad formaalse omandamise hädaohu. Esialgu on soovitav lahendada iga ülesanne kolmel viisil ja hiljem jätta meetodi valik õpilastele endile.

Toonitame, et igaüks neist kolmest meetodist eeldab, et kõik suurused, millest ülesandes kõneldakse, on võrdelised või pöördvõrdelised sellega, mille väärtust otsitakse, tähendab, on ka üksteisega võrdelised või pöördvõrdelised. Asja sellele küljele tähelepanu mittepööramine võib tekitada jämedaid vigu.

§ 34. Ülesanded võrdelise jaotamisega.

Revolutsioonieelseis aritmeetika käsiraamatuis ja ülesannete kogudes vaadeldi kõrvuti «kolmlausega» veel rida muid «lauseid» — reegleid: «protsentide arvutamise reegel», «vekslite oodustamise reegel», «võrdelise jaotamise reegel», «segu arvutamise reegel» jt. Endisaegne elutarbeline ja eriti kaubanduslik praktika andis mõned tüüpilised ülesanded, mis oma sisult olid väga lihtsad, kuid ulatusid siiski välja tavaliste elus esinevate arvuliste kalkulatsioonide raamidest. Neid peeti vajalikuks käsitleda koolides ja anda nende lahendamiseks skeemid eri reeglite näol.

Igasuguste ülesannete lahendamisel teadlikkust taotlev nõukogude matemaatika metoodika annab niisuguseile reegleile vähe tähtsust: valdaval enamikul juhtumeil saab ülesandeid, mis võimaldavad lahendamist nende reeglite alusel, raskusteta lahendada ka ilma nende reegliteta, muidugi kui üldse on olemas mingi lahendamisoskus. Erilisi raskusi pakkuvail juhtumeil on loomulik kasutada universaalset lahendamismeetodit, nimelt võrrandi meetodit, viies niisugused ülesanded algebra kursusse. Need tüüpilised ülesanded, mille jaoks olid välja töötatud erilised reeglid ja mis endistel aegadel pakkusid huvi kaupmeestele, on nõukogude ühiskondliku korra tingimustes kaotanud igasuguse mõtte. Mõned operatsioonid, millest kõneldi neis ülesandeis, on praegusel ajal kriminaalselt karistatavad. Niisugune tehing esineb näiteks Vereštšagini ülesannete kogu ülesandes nr. 2333 [II, 13]: «Veinikaupmees ostis mõned panged veini, makstes 12,8 rbl. pangest. Lahjendades kogu ostetud veini 9 pange veega, hakkas ta müüma segu 11,5 rbl. pang, mille tagajärjel sai kogu veini müügist 51,5 rbl. kasu. Mitu pange veini esialgu osteti?»

Kõigist neist reegleist on kuni käesoleva ajani teatava (õige tagasihoidliku) tähtsuse säilitanud ainult eelmises paragrahvis vaadeldud kolmlause.

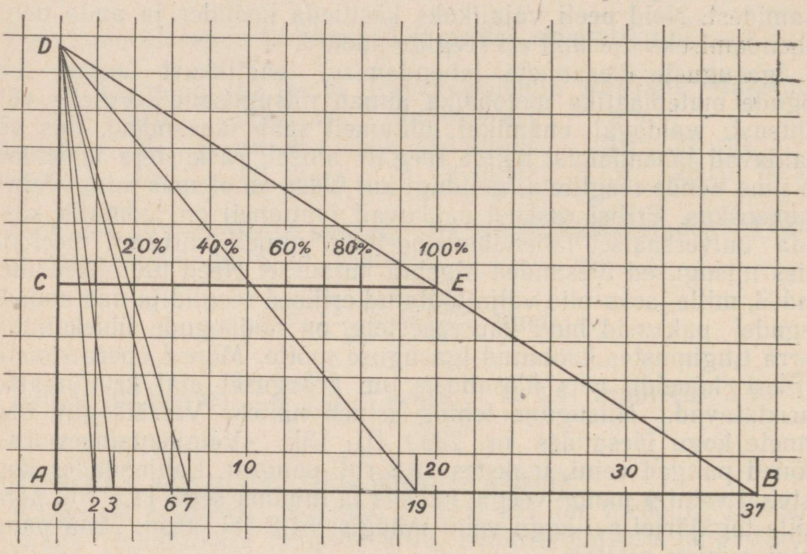
«Võrdelise jaotamise reegel», mis endistel aegadel kergendas kaubitsejate-kompanjonide poolt ühiselt saadud ja samuti ka päranduse teel üleminevate rahasummade jaotamiskalkulatsioone, on tänapäeval kaotanud igasuguse tähtsuse.

Seda tüüpi ülesandeid (kuid hoopis teise konkreetse sisuga) esineb ka tänapäeva tegelikkuses, kuid need on kergesti lahendatavad ilma erilise reeglita. Kisseljovi aritmeetika õpikus on lahendatud mõned tüüpilised ülesanded arvude jaotamisest võrdeliselt ja pöördvõrdeliselt antud arvudega. Niisuguste ülesannete lahendamine on programmis ette nähtud ja tuleb kindlustada analoogiliste ülesannete lahendamise oskus, milleks Berezanskaja ülesannete kogus on materjali küllaldases valikus. Täiendavalt on soovitav vaadelda ka mõnusat ja VI klassi õpilastele täiesti jõukohast nende ülesannete lahendamise graafilist meetodit, mida selgitame järgmise näite varal.

«Kontrolltöö eest said klassi kuus õpilast hinde «5», üheksateist

õpilast hinde «4», seitse õpilast hinde «3», kolm õpilast hinde «2», kuna kaks õpilast tööd ei kirjutanud. Mitu protsenti klassi õpilaste üldarvust moodustab iga nimetatud hinde saajate arv?» Ülesanne taandub 100% jaotamisele viieks (mittevõrdseks) osaks võrdeliselt arvudega 6, 19, 7, 3 ja 2, mille summa on 37.

E s i m e n e v i i s (graafiline). Joonistame ruudulisel (vihiku-) paberil lõigu *AB* pikkusega 18,5 jaotust (joonis 4), võttes selle 37 ühiku kujutiseks (mastaap: 1 jaotus on 2 ühikut), ja märgime



Joonis 4.

sellele alates ühisest alguspunktist *A* lõigud, mis samas mastaabis kujutavad meid huvitavaid arve 6, 19, 7, 3 ja 2. Lõigu *AB* ristsirgel, mis on tõmmatud läbi *A*, võtame võimalikult kaugel lõigust *AB* meelevaldse punkti *D* ja leiame niisuguse *AB*-ga paralleelse lõigu *CE*, millel oleks protsentide lugemiseks sobiv pikkus (punkt *C* võetakse sirgel *AD*). Joonisel 4 on lõigu *CE* pikkuseks võetud 10 jaotust, nii et tema iga jaotus kujutab 10%, kuid oleks võinud võtta selleks näiteks lõik 20 jaotust (allpool *AB*-d); siis iga jaotus kujutaks 5%. Jääb üle ühendada punkt *D* lõigul *AB* märgitud lõikude lõpp-punktidega ja teha lugemid, mis vastavad nende ühenduslõikude ja *CE* lõikepunktidele. Joonis 4 annab, nagu näeme, järgmised tulemused:

arv	6	19	7	3	2,	kokku 37,
%-des	16%	51%	19%	8%	6%	kokku 100%.

Kontrolliks lahendame sama ülesande aritmeetiliselt.

Teine viis (arvutuslik).

Hinne	Õpilaste arv	Sama protsentides	Sama pärast ümardamist terveteni
5	6	2,703 · 6 = 16,218%	16%
4	19	2,703 · 19 = 51,357%	51%
3	7	2,703 · 7 = 18,921%	19%
2	3	2,703 · 3 = 8,109%	8%
Ei kirj.	2	2,703 · 2 = 5,406%	6%
Kokku	37	100,011%	100%

$100 : 37 =$

$=2{,}7027\ldots \approx$

$\approx 2{,}703$

Kolmandas veerus kontrollimise eesmärgil leitud summa 100,011 erineb 100-st seadusepäraselt: arvu 2,7027... ümardamisel nelja tüvenumbrini saime 2,703, mis täpsest väärtusest on suurem peaaegu 0,0003 võrra, ja see ülejääk läks summasse 37-kordses suuruses, millest tekkiski summa ülejääk $0{,}0111 \approx \approx 0{,}011$.

Ümardades kolmandas veerus saadud korrutised kuni terveteni, peame 5,406 vastavalt ümardamisreeglile asendama arvuga 5, kuid siis üldsumma ei oleks 100%, vaid 99%: korduvalt teostatud ümardamisi puuduga ei kompenseeri ühekordne ümardamine liiaga. Reeglist kõrvale kaldudes, asendame seetõttu ümardamise puuduga ühel juhtumil liiaga ümardamisega, nimelt seal, kus asendus tingib võimalikult väikese moonutuse.

Graafilise lahendusmeetodi omandamine kujutab endast suurt väärtust nii tema praktilise külje tõttu kui ka teatava geomeetrilise propedeutikana ja ka vahendina õpilaste huvi tõstmiseks aritmeetika vastu.

Märgime, et lahendades ülesandeid nii graafiliselt kui ka arvutades, on parem alustada graafilise meetodiga, mis teatavasti annab vähema täpsusega tulemused, sest nii saab vältida tahtmatut graafiku lugemite «sobitamist» otsitavate suuruste juba tuntud täpsemaile väärtustele.

§ 35. Aritmeetilised harjutused ja funktsionaalne propedeutika algebra kursuses.

Aritmeetika programm näeb ette tutvumist funktsionaalse sõltuvuse kahe eriti tähtsa juhtumiga: võrdelise ja pöördvõrdelise sõltuvusega, kuid ka edasisel, juba algebra kursusse kuuluval funktsionaalse sõltuvuse tundmaõppimisel on küsimuse puhtaritmeetilisel küljel suur osatähtsus. Nimetame üht väärtuslikku aritmeetiliste harjutuste liiki, mis on välja töötatud Pedagoogiliste Teaduste Akadeemia korrespondeeriva liikme prof. V. Gontšarovi poolt [II, 15a]. Siin mõeldakse tähelise avaldise arvuliste väärtuste arvutamist, mida teostatakse avaldises esinevate tähtede rea väärtuste jaoks ratsionaalse tööjaotusega sellest osavõtjate vahel. Prof. Gontšarovi nimetatud artikkel sisaldab elava kirjelduse ühest VIII klassi tunnist, mis oli antud ilma igasuguse ettevalmistuseta ja pühendatud avaldise

$$y = \sqrt{\frac{1 + x + x^2}{1 + x^2}}$$

väärtuste arvutamisele x mitmesuguste väärtuste puhul, mis olid võetud 0,5 ja 1,5 vahelt täpsusega kuni tuhandikeni. Sama täpsusega kuni tuhandikeni oli vaja leida ka y väärtus. Leitud tulemusi kontrolliti sel teel, et klassitahvlil konstrueeriti punktid ristkoordinaatidega x ja y: veatu arvutamise korral peavad punktid asetsema ühe ladusa kõvera kaarel. Prof. Gontšarov vaatleb üksikasjalikult niisuguste harjutuste tähtsust ja nende teostamise metoodikat. Nende õpilastele nähtavaks eesmärgiks on aritmeetiliste operatsioonide teostamise treening, kuid ühtlasi saavutatakse õpilaste poolt seda märkamata veel teine, tähtsam eesmärk: koguneb kujutluste varu funktsionaalse sõltuvuse konkreetseist juhtumeist, millest kõneldakse III osas. Juhtides lugeja prof. V. Gontšarovi sisukate tööde tsükli juurde märgime ainult, et paljude V ja VI klassis tavaliselt lahendatavate aritmeetika ülesannete üldistamine viib mitmesuguseile funktsionaalseile sõltuvustele, mis võivad olla selliste harjutuste teemadeks. Vaatleme üht näidet, mida saab käsitleda ka aritmeetika kursuses (ilma valemiteta).

«Mis on töötajaile kasulikum, kas töötasu tõstmine 20% võrra kõigi hindade muutmata jätmisel või kõigi hindade alandamine 20% võrra töötasu muutmata jätmisel?»

Esimesel juhtumil saab töötaja oma töötasu eest osta 20% võrra rohkem kaupu kui enne, teisel juhtumil aga ostab ta neid nii mitu korda rohkem, kui mitu korda endised hinnad (100%) on suuremad uutest hindadest (100% — 20% = 80%), s. o. 100 : 80 = 1,25 korda ehk 25% võrra rohkem, kui enne. Niisiis, reaalse töötasu tõus, s. o. tõus kaupade koguses, mis töötaja saab osta oma töötasu eest, on teisel juhtumil suurem kui esimesel (25% 20% vastu).

Ülesannet üldistades võrdleme reaalse töötasu tõusu rahalise töötasu tõstmisel $x\%$ võrra ja hindade alandamisel $x\%$ võrra. Esimesel juhtumil moodustab tõus $x\%$ ja teisel $\left(\frac{100}{100-x} - 1\right) \cdot 100$ ehk $100x : (100 - x)\%$. Andes viimasele murrule kuju $x + \frac{x^2}{100-x}$ näeme, et tõus on teisel juhtumil alati suurem kui esimesel, kusjuures vahe väljendub valemiga $y = \frac{x^2}{100-x}$. Kontrolliks võtame juhtumi, kus $x = 50\%$; siis valem annab $y = 50\%$, nagu peabki olema: hindade alandamisel 50% võrra reaalne töötasu tõuseb kahekordseks, s. o. 100% võrra, ja teise ning esimese juhtumi vahe on $100\% - 50\% = 50\%$.

Selle õpetliku ülesande lahendamine on soovitav lõpetada reaalse töötasu juurdekasvu ühel ja teisel juhtumil väljendava funktsiooni $y = x$ ja $y = \frac{100x}{100-x}$ väärtuste tabeli koostamisega ja nende funktsioonide graafilise kujutamisega ühel ning samal joonisel.

KOLMAS OSA.

ALGEBRA ÕPETAMISE METOODIKA

I peatükk.

ÜLDISI SEISUKOHTI ALGEBRA ÕPETAMISEST KESKKOOLIS.

§ 1. Evolutsioon vaadetes algebrale kui teadusele.

Meie ajani säilinud töödes esineb sõna «algebra» esmakordselt raamatus «Al-džabr wa'l-mukābala», mis on kirjutatud 820. a. ümber. Selle autor on Muhhammad ibn Mūsā Al Khwārizmī, s. o. Musa poeg Muhamed Horesmist (Horesmi oblast kuulub nüüdsesse Usbeki NSV-sse). Raamat on pühendatud esimese ja teise astme võrrandite koostamisele ja lahendamisele. Selles termin «al-džabr», mis hiljem on ümber tehtud «algebraks», tähendas võrrandi negatiivsete liikmete ülekandmist võrrandi teisele poolele, kuid aja jooksul on seda hakatud kasutama võrrandeid käsitleva teaduse enda nimetusena.

Märgime, et Muhhammad ibn Mūsā töös algebra tähelist sümboolikat üldse ei leidu, kõik kirjutatakse üles sõnades («sõnaline» ehk «retooriline» algebra). Käsitledes näiteks võrrandit, mille meie kirjutame kujul $x^2 + 10x = 39$, sõnastab ta selle järgmiselt: «ruut ja 10 juurt on võrdsed 39 ühikuga». Kujutluse Muhhammad ibn Mūsā käsitluse iseloomust võib saada matemaatika ajaloo lugemikus [III, 14] toodud kahe katkendi põhjal tema raamatust.

Algebra kui võrrandeid käsitleva teaduse alged kuuluvad hoopis varasemasse ajajärku. Me leiame neid nii Egiptuse vanemais matemaatika teaduse mälestusmärkides, kus tundmatu tähistamiseks oli tarvitusel eriline sõna «hau», s. o. kuhi (näiteks leidub Ahmese papüüruses ülesanne: «kaks kolmandikku kuhjast, pool kuhjast, seitsmendik kuhjast ja terve kuhi on kokku kolmkümmend kolm; millega võrdub kuhi?») Babüloonia kiilkirjalistes tekstides, kus esineb ülesandeid, mis viivad isegi kuupvõrranditele ja mille lahendamiseks kasutati tabeleid, kui ka hindude juures. Kreeka matemaatiku Diophantose teos, mis kannab nimetust «Arithmetica», kuid on pühendatud tervikuna täis- või murdarvudes lahendatavaile määratud ja määramatuile võrrandeile, mis nüüd kuuluvad arvuteooriasse, on pärit IV sajandist. Diophantosel esineb juba mõnin-

gaid kaasaegsele algebrale nii iseloomustava sümbolismi algeid: on eri märk tundmatu ja selle ruudu tähistamiseks, eri märk lahutamise tähistamiseks. Harilikult need märgid kujutavad endist lihtsalt vastavate terminite lühendatud kirjutisi analoogiliselt sellega, nagu kaasaegne sümbol log on sõna «logarithmus» lühend («sünkoopiline» algebra).

Edasi arenedes eeskätt võrrandeid käsitleva õpetusena, pidi algebra paratamatult vaatlema arvu mõiste mitmesuguseid üldistusi: negatiivseid arve, ilma milleta ei saa olla esimese astme võrrandite täielikku teooriat; irratsionaalseid arve, mille juurde, samuti kui imaginaarsete arvude juurde vältimatult viib ruut- ja kuupvõrrandi lahendamine. Loomulik püüe teha võrrandite lahendamiseks tarvilike teisenduste üleskirjutamine lühemaks ja ülevaatlikumaks, viis algebralise sümboolika loomisele: tähtedega hakati tähistama mitte ainult tundmatuid arve, vaid ka antuina eeldatud arve; järk-järgult võeti tarvitusele mitmesuguseid matemaatilisi operatsioone ja seoseid tähistavad sümbolid.

Tähtede süstemaatilise kasutamise arvude kirjutamiseks üldkujul võttis tarvitusele François Viète (Viëta) (XVI s. lõpp), kuid tema sümboolika on õige kaugel kaasaegsest, nagu võib näha eespool nimetatud lugemikus trükitud ühe tema töö katkendist. Järkjärgult täienedes võtab ta Peterburi Teaduste Akadeemia liikme Leonhard Euleri kuulsas õpperaamatus, mis esmakordselt ilmus vene keeles 1768.—1769. a. Peterburis [III, 44], juba täiesti kaasaegse ilme. Euleril kujuneb algebra sisu õige mitmekülgseks ja sisaldab võrrandite lahendamist ainult ühe osana. Algebra kui kaasaegses keskkoolis õpitav õppeaine peegeldab osaliselt seda Euleri käsiraamatu sisu mitmekülgsust.

Seda algebra koolikursust vaatleme detailsemalt järgmises paragrahvis, kuid nüüd märgime vaid algebra kui teaduse mõned jooned.

Euleri ajal ja veel kaua aega pärast teda oli algebra põhiküsimuseks algebraliste võrrandite lahendamine, s. o. võrrandite, millele saab anda niisuguse kuju, kus ühe või mitme muutuja polünoom on võrdsustatud nulliga. Kuid võrrandite lahendamise ülesannetega ühenduses olevate üldiste uurimiste teostamine viis selleni, et algul võrrandite lahendamisel ainult abistavas osas esinevad teooriad osutusid hoopis laiemat rakendusvälja omavaiks nii matemaatika enda piirides kui ka väljaspool seda. Need teooriad nimelt, mille hulka kuulub rühmateooria, ringiteooria, korpuseteooria, lineaaralgebra, Galois teooria, algebraliste arvude teooria jne., moodustavadki kaasaegse algebrateaduse põhilise sisu. Rühmateooria, mis algul tekkis ühenduses algebraliste võrrandite radikaalides lahenduvuse tingimuste uurimisega, omab põhilist tähtsust kogu matemaatikas. Matemaatilises analüüsis, geomeetrias ja füüsikas omab erakordselt suurt tähtsust ka lineaaralgebra, mis tekkis algebraliste võrrandite lineaarsüsteemide lahendamise teooria

alusel ning muutus aja jooksul vektorite ja maatriksite teooriaks.

Niisiis tuleb konstateerida suurt erinevust kaasaegse algebra kui teaduse ja algebra kui keskkooli õppeaine vahel.

§ 2. Algebra koolikursuse põhilised arenemisjooned. Algebra kui õppeaine.

Kaasaegse algebra koolikursuse sisus võib eristada järgmisi põhilisi arenemisjooni, mis nende viie aasta kestel, millal teda õpitakse (VI klassist kuni X klassini), üksteisega vahelduvad ja üksteisesse põimuvad.

I. Arvu mõiste arenemine. Algebra õppimisele asudes tunnevad õpilased naturaalarve, arvu null ja murdarve. VI klassis tutvuvad nad negatiivsete arvudega, mille lisamine varem tuntud arvudele annab ratsionaalarvude korpuse. Kaheksandas klassis vaadeldakse (õigust ütelda, väga pealiskaudselt) irratsionaalarve, mis koos ratsionaalarvudega moodustavad reaalarvude korpuse. Kolmas ja keskkoolis viimane arvu mõiste laiendamine toimub X klassis, kus võetakse tarvitusele imaginaararvud, mis koos reaalarvudega moodustavad kompleksarvude korpuse.

II. Samasusteisendused. Arvude tähistamine tähtedega ja tähtavaldiste samasusteisendused leiavad rakendamist kogu algebra koolikursuse jooksul. Samasusteisenduse mõiste sisu teaduslik analüüs näitab, et nende teisenduste hulka kuulub õige erisugust materjali. Siin võib esile tõsta järgmisi küsimusi:

a) ratsionaalsed operatsioonid arvukorpustes (ratsionaalarvude, reaalarvude, kompleksarvude korpuses) ja samuti ka polünoomide ringis ja ratsionaalsete funktsioonide korpuses;

b) radikaalid ja operatsioonid nendega (see osa oma teadusliku sisu poolest kuulub algebraliste võrrandite juurde, sest juurimise operatsioon on oma olemuselt kaheliikmelise võrrandi lahendamine);

c) elementaarsed transtsendentsed funktsioonid (üldine astmefunktsioon, eksponent- ja logaritmfunktsioon) ja nende funktsionaalsed omadused, mille kasutamises sageli nähakse eriliste operatsioonide teostamist (logaritmimine, potentseerimine).

III. Võrrandid. See algebra koolikursuse osa on käesoleval ajal kahtlemata kõige tähtsam. Lihtsate võrranditega on tegemist juba VI klassi õpilastel. VII klassis lahendatakse ühe tundmatuga esimese astme võrrandeid ja esimese astme võrrandisüsteeme kahe ja kolme tundmatuga; kuid küsimust ei viida siin lõpule: võrrandi uurimine, s. o. kõigi lahendamisel esineda võivate juhtumite vaatlemine jäetakse X klassi. VIII klassis tutvuvad õpilased ruutvõrrandite ja niisuguste kõrgema astme võrranditega, mis kergesti taanduvad ruutvõrrandile, kui ka lihtsamate teise astme võrrandisüsteemidega. IX klassis ilmuvad mittealgebralised (transtsendentsed) võrrandid ja nimelt eksponent- ja logaritmvõrrandid, X klassi

õpilased viivad lõpule esimese ja teise astme võrrandite lahendamise küsimuse (uurimine!), tutvuvad mõnede kahe- ja kolmeliikmeliste võrrandite lahendamisega ning samuti ka mõnede üldiste teoreemidega algebraliste võrrandite kohta.

IV. Funktsioonid. Üldiselt on tunnustatud, et lihtsamate funktsioonide uurimine peab keskseks teemaks olema algebra koolikursuses, kuid praegu kehtiv keskkooli matemaatika programm realiseerib selle printsiibi vaid osaliselt. Funktsionaalse sõltuvuse mõistega puutuvad õpilased esmakordselt kokku VIII klassis, kus programm reserveerib 10 tundi teemale «Funktsioonid ja nende graafikud». IX klassis vaadeldakse eksponent- ja logaritmfunktsiooni ja X klassis täisratsionaalsete funktsioonide mõnesid üldisi omadusi (Bézout' teoreemi ja järeldusi sellest). Kuid juba VI ja VII klassi programmis leidub rida punkte, mis kõige tihedamal viisil on seotud funktsionaalse sõltuvuse mõistega ning valmistavad ette selle mõiste omandamist: temperatuuri graafikud, funktsioonide $y = ax$, $y = ax + b$ graafikud jm. Algebra koolikursuse peaaegu igasse muusse peatükki saab lülitada küsimusi, mis soodustavad funktsiooni mõiste — selle kaasaegse matemaatikateaduse tähtsaima mõiste — selgitamist.

Nimetatud nelja rubriiki saab mitteoluliste eranditega paigutada kogu kehtiva matemaatika programmiga määratud algebra praeguse koolikursuse sisu. Väljaspool neid rubriike on järgmised küsimused:

1) võrded, mida käsitletakse VII klassis VI klassi aritmeetika kursusesse kuuluva küsimuse järeltööna; võrrete seos võrdelise sõltuvusega lubab selle küsimuse arvata funktsioonide tundmaõppimise juurde;

2) ruutjuure leidmine arvudest, mis on puhtaritmeetiline operatsioon, kuid seisab siiski ühenduses kaheliikmelise ruutvõrrandi lahendamise küsimusega;

3) arvujärjendite küsimus üldiselt ja kaks lihtsamat ja eriti tähtsat järjendiliiki — aritmeetiline progressioon ja geomeetriline progressioon;

4) logaritmiline arvutamine kui arvutamise lihtsustamise vahend — kuulub sisult aritmeetikasse;

5) ühendite teooria — omapärane peatükk, mis kuulub matemaatika eridistsipliini («kombinatoorika») ning on algebra koolikursusse võetud tema seotuse tõttu Newtoni binoomiga; selle teooria huvitavaimad ja tähtsaimad rakendused on seotud tõenäosuse teooria elementidega;

6) piirväärtuste teooria, mis programmis on arvatud IX klassi geomeetria kursusse, kuid sisuliselt kuulub analüüsi.

See algebra koolikursuse kirevus teeb vastamise küsimusele, mis on algebra, äärmiselt raskeks. On võimatu anda sellele niisugust definitsiooni, mis haaraks kogu tema sisu. Koolipoisi silmis algab algebra seal, kus arvude kirjutamise asemel numbritega hakatakse neid kirjutama tähtedega, kuid see vaade on ekslik; üleskirjutuste

lühendamiseks hakkab aritmeetika üha enam kasutama tähelist märkimisviisi, isegi V klassis õpitav aritmeetika, ja peale selle iga matemaatiline distsipliin kasutab alati tähelist sümboolikat. Veel ekslikum on vaade algebrale kui teadusele, mida iseloomustab peale kooliaritmeetikas tundmaõpitavate täis- ja murdarvude veel teiste arvude rakendamine: põhilised arvu mõiste üldistamised kuuluvad aritmeetikasse. Ka ei saa olla juttugi sellest, et koolialgebrale saaks läheneda kaasaegse definitsiooniga, mille järgi algebra on teadus operatsioonidest, mis defineeritud mis tahes objektidest koosnevail hulkadel (rühmad, ringid, korpused): koolis on tegemist ainult arvudest ja funktsioonidest koosnevate hulkadega. Õigemaks osutub vaade, mille järgi koolialgebra on õpetus lihtsamaist funktsioonidest, eeskätt täis- ja murdratsionaalseist funktsioonidest, aga ka mõnedest transtsendentseist funktsioonidest; võrrandiõpetus ilmub ühenduses ülesandega leida argumendi need väärtused, mille puhul antud funktsioon omab etteantud väärtuse, eriti väärtuse null, ja arvu mõiste laiendamise vajadus on tingitud lahendi puudumisest sellel ülesandel paljudel juhtumitel, kui piirduda aritmeetikast tuntud arvuliikidega; samasusteisenduste teooria on õige loomulikult ühendatav funktsioonide tundmaõppimisega: tuleb vaadelda ühe ning sama funktsiooni mitmesuguseid esitamisvorme. Aritmeetilist progressiooni saab vaadelda argumendi ekvidistantseile väärtustele vastavate lineaarse funktsiooni väärtuste järjendina ja geomeetrilist progressiooni eksponentfunktsiooni väärtuste analoogilise järjendina. Võib ütelda, et koolialgebra üldse ei kujuta endast mingit kindlat haru, vaid on õppeaineks, millesse matemaatika algete õpetamise huvides on ühendatud materjal, mis osalt kuulub aritmeetikasse, osalt algebrasse selle päristähenduses, osalt analüüsi.

Ühenduses algebra koolikursuse sisuga teeme veel ühe olulise märkuse. Selles kursuses on rida peatükke, mida saab ja tuleb õppida täielikult, ammendavas ulatuses, nagu näiteks lihtsaima kuju andmine täis- ja murdratsionaalseile avaldistele (täisavaldistele leksikograafiliselt korraldatud hulkliikme kuju, murdavaldistele taandamatu murru kuju), esimese ja teise astme võrrandite lahendamine ja mitmed muud. Peale selle on rida peatükke, milles küll küsimus seatakse, kuid seda ei ole võimalik lahendada täielikult: tuleb leppida lihtsaimate oluliste juhtumitega. Nii on olukord näiteks kõrgema kui teise astme võrrandite lahendamisega. Kuid on ka õige palju küsimusi, mida keskkoolis ei saa isegi õigesti seada. Niisugune on näiteks irratsionaalsete avaldiste samasusteisenduste küsimus (mis lugeda radikaale sisaldava avaldise normaalkujuks?). Samalaadne on ka küsimus algebralisist irratsionaalvõrrandeist ja transtsendentseist võrrandeist (lähemalt kõneldakse sellest artikli [III, 3] lõpus). Õpetaja peab selgesti mõistma programmi nende kolme peatükkide liigi erinevust, püüdma ammendavalt õpetada esimest liiki peatükke ja mitte seadma endale teostamatuid ülesandeid töötamisel teist ja kolmandat liiki peatükkide juures. Niisiis oleks viga püüda anda midagi irratsionaalsete avaldiste samasusteisenduste teooria taolist. Siin saab anda ainult rea ülesandeid nende teisendamise alalt, kusjuures see, mis on ühel puhul kasulik, võib teisel osutuda ebasoodsaks; näiteks $\sqrt{128}$ asendamine avaldisega $8\sqrt{2}$ on kasulik, kui nõutakse, ütleme, lihtsustada avaldis $\sqrt{128} - \sqrt{98} = 8\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \sqrt{2}$, aga on ebasoodus, kui tabeli järgi on vaja leida väärtus $x = \sqrt{128}$.

§ 3. Koolialgebra õpetamise eesmärgid. Selle programm.

Vene NFSV Haridusministeeriumi poolt kinnitatud praegu kehtiva keskkoolide matemaatika programmi seletuskirjas on algebra eesmärk määratud järgmiselt: «Algebra õpetamise ülesandeks on laiendada õpilaste kujutlust arvust, õpetada neid teadlikult, kiiresti ja ratsionaalseimalt teostama algebraliste avaldiste samasusteisendusi, arendada funktsionaalse sõltuvuse ideed ja selle graafilist kujutamist, õpetada võrrandite koostamise võtteid ja nende lahendamise meetodeid, samuti ka oma teadmiste rakendamist lihtsamate ülesannete lahendamisel naaberdistsipliinide — füüsika, keemia, astronoomia, tehnika ja põllumajanduse alalt.»

Võrrandi koostamine ei ole midagi muud kui teatava funktsiooniavaldise koostamine ning selle võrdsustamine antud arvuga või kahe funktsiooniavaldise koostamine ja nende võrdsustamine teineteisega ning võrrandi lahendamine ei ole midagi muud kui argumentide nende väärtuste otsimine, mille puhul antud funktsioon omandab etteantud väärtuse. Niisiis, kogu töö võrranditega, millele algebra õpetamise eesmärkide määramisel on antud nii tähtis koht, on sisult töö funktsioonidega. Teiselt poolt, algebra rakendamine ülesannete lahendamisel naaberdistsipliinide (aritmeetika, geomeetria, füüsika, astronoomia jne.) alalt on põhiliselt mitmesuguste neis distsipliinides vaadeldavate suuruste vaheliste sõltuvuste väljendamine täheliste valemite abil, s. o. jällegi töö funktsioonidega, eeskätt ratsionaalsete funktsioonidega, töö, mis loomulikul viisil ja paratamatult viib ka funktsionaalse sõltuvuse keerukamate juhtumite juurde; uurides näiteks vabal langemisel ilma algkiiruseta käidud tee sõltuvust ajast, jõuame funktsiooni $s = 0{,}5\ gt^2$ juurde, kuid pöördküsimuse uurimisel funktsiooni $t = \sqrt{2s} : g$ juurde.

Nähes funktsionaalse sõltuvuse tundmaõppimises algebra koolikursuse põhilist ülesannet, tuleb täie jõuga toonitada arvu mõiste arendamise ja samasusteisenduste tundmise tähtsust, sest ilma nendeta ei ole teostatav funktsionaalse sõltuvuse tundmaõppimine.

Algebra õppimise eesmärgi selgekstegemine lastele, kes äsja asusid selle õppimisele, on võrratult raskem kui aritmeetika puhul, sest erinevalt aritmeetikast ei ole koolialgebral otseseid elutarbelisi rakendusi. VI klassi õpilastele nähtavate algebra esimeste peatükkide õppimise eesmärkide puudumine loob erilised raskused. On soovitav näidata kaht niisugust eesmärki: esiteks, õppida kasutama tähelist märkimisviisi, mis võimaldab õige mõnusalt, lühidalt ja selgesti üles kirjutada mitmesuguseid arvude kohta käivaid reegleid, omadusi ja seadusi, eeskätt neid, mida õpiti aritmeetikas ning mis korduvad algebra algkursuses, olles aluseks samasusteisenduste kohta käivate reeglite tuletamisel; näiteks reeglit «et lahutada vahe, tuleb lahutada vähendatav ja liita lahutatav» saab kirjutada lühendatult valemina: $a - (b - c) = a - b + c$; teiseks, õppida lahendama aritmeetilisi ülesandeid võrrandite abil, võttes tarvitusele

tundmatu tähistamise tähega ja toetudes tehete definitsioonidele ja omadustele, mis on täiesti võimalik veel enne samasusteisenduste tundmaõppimist.

Tähelise sümboolika ja koos sellega samasusteisenduste tundmaõppimise eesmärki on kerge teha õpilastele arusaadavaks, kui seda sümboolikat vaadelda erilise matemaatilise keelena, mis omab lühiduse ja selguse ilmseid eeliseid, olles seejuures rahvusvaheline. Täpselt samuti on kerge saavutada ka võrrandite väärtuse tunnustamist õpilaste poolt, sest need võimaldavad ühe ning sama meetodi abil lahendada õige erinevaid ülesandeid, mille lahendamisel aritmeetikas tuli iga kord leiutada uus meetod: ülesanded arvude leidmisele nende summa ja vahe või summa ja suhte järgi, ülesanded «oletustele», «liikumisele», «andmete võrdsustamisele» ja paljud teised aritmeetika kursuses nii palju raskusi tekitanud ülesanded on kergesti lahendatavad ühe ning sama — võrrandite koostamise meetodiga. Kui õpetajal on õnnestunud saavutada seda, et need kaks ideed, mis sisalduvad arvude tähistamises sümbolitega ja võrrandite meetodis, on õpilaste poolt omandatud, siis on sellega pandud kindel vundament kogu kooli algebra kursuse õppimisele.

Praegu kehtiv keskkooli matemaatika programm näeb ette algebra alal tööd 5 aasta kestel, reserveerides sellele üldse 400 tunni ümber, kusjuures nädalatundide arv aastate ja poolaastate järgi tunduvalt kõigub: VI klassis 3 tundi nädalas, VII klassis esimesel poolaastal 4 tundi nädalas ja teisel poolaastal 3 tundi nädalas, VIII klassis on nagu VII, kuna IX ja X klassis on kogu aasta kestel 2 tundi nädalas. VI klassis lapsed tutvuvad täheliste avaldistega, negatiivsete arvudega, täisüksliikmetega ja -hulkliikmetega, kaasa arvates ka hulkliikmete lahutamine tegureiks; võrranditele pühendatud eri peatükki siin veel ei ole, kuid lihtsamate võrrandite koostamine ja aritmeetiliste tehete definitsioonide ning omaduste põhjal lahendamine on programmis ette nähtud juba esimese kahe peatüki läbitöötamisel. VII klassi algebra kursuse peamise sisu moodustavad algebralised murrud ja esimese astme võrrandid; lisaks sellele leidub seal õige väike võrretele pühendatud peatükk ja mõnevõrra suurem peatükk, mis on pühendatud ruutjuure leidmisele arvudest. VIII klassis õpitakse astmeid ja juuri, siis ruutvõrrandeid ja neile taanduvaid (ühe ja kahe tundmatuga) võrrandeid; õige väike lõpp-peatükk on pühendatud funktsioonidele ja nende graafikuile. IX klassis toimub arvujärjendite, eriti progressioonide tundmaõppimine, astendaja mõiste üldistamine, eksponent- ja logaritmfunktsiooni ja nende rakenduste tundmaõppimine. X klassi kuuluvad peatükid: ühendid ja Newtoni binoom, kompleksarvud, võrratused (ühenduses võrrandite uurimisega) ja mõned täisratsionaalsete funktsioonide üldised omadused (Bézout' teoreem ja järeldused sellest).

§ 4. Õppe- ja metoodiline kirjandus algebra alalt.

Kõige levinumaks ja kehtivale programmile vastavamaks algebra käsiraamatuks on A. Kisseljovi «Algebra», mis Vene NFSV Haridusministeeriumi poolt on kinnitatud keskkooli õpikuks (I osa VI ja VII klassile, II osa VIII — X klassile). Selle raamatu esimene väljaanne ilmus juba 1888. a. ning on sellest ajast uute väljaannete puhul korduvalt ümber töötatud. Funktsionaalse sõltuvuse küsimusele on pühendatud mitu paragrahvi, kuid tervikuna peegeldab see raamat vähe kaasaegset teadust. Üksikute küsimuste käsitluse iseärasustest selles raamatus kõneleme korduvalt edaspidi.

1940. a. ilmus katseväljaandena P. Aleksandrovi ja A. Kolmogorovi «Algebra», mis oli mõeldud Kisseljovi «Algebra» asendajaks. Kirjutatuna nõukogude suurimate matemaatikute poolt kooskõlastab raamat algebra koolikursuse esimese osa kaasaegse teaduse nõuetega ja väärib juba ainult seepärast kõige terasemat tähelepanu. Ilmunud esimese osa kohta, mis on kirjutatud vastavalt VI ja VII klassi programmile, toimusid õpetajate laialdastes ringides elavad arutlused, kuid sõda takistas kavatsetud uue, parandatud trüki väljaandmist. 1941. a. ilmus samadelt autoritelt artikkel «Võrratuste omadused ja ligikaudse arvutuse mõiste» [III, 25], mis kujutab endast üht peatükki nende algebraõpiku teisest osast. Saades tervikuna selle uue algebra õpiku, on keskkooli matemaatikaõpetajal võimalus oluliselt parandada oma aine õpetamist.

Vene noorsoo mitu põlve on algebrat õppinud A. Davidovi «Algebra algkursuse» järgi, mille esitrükk ilmus juba 1865. a. ja mis tänu oma täiusele, selgusele ja täpsusele sai tohutu leviku osaliseks; seda raamatut anti välja ka pärast Oktoobrirevolutsiooni [III, 18].

K. Lebedintsevi «Algebra kursus keskõppeasutustele» [III, 28] sisaldab koos traditsioonilise materjaliga ka palju uut, mis tutvustab õpilasi funktsiooni mõiste, ristkoordinaatide ja funktsioonide graafikutega. Sama autori teistes töödes on hästi läbi töötatud tavalisest varema võrrandite käsitlemisele võtmise metoodika.

Uut ja värsket materjali annab S. Novosjolovi raamat «Algebra», mis ilmus 1947. a. õpetajate instituutidele määratud käsiraamatuna ning on mõeldud elementaarse algebra süvendatud tundmaõppimiseks isikuile, kes juba tunnevad keskkooli algebra kursust.

1950. a. ilmus sellest õpetajale kasulikust raamatust teine, oluliselt ümbertöötatud trükk. 1951. a. ilmus samalt autorilt raamat, pealkirjaga «Elementaaralgebra erikursus», mis on määratud pedagoogiliste instituutide üliõpilastele.

Pedagoogiliste Teaduste Akadeemia andis 1949. ja 1950. a. välja prof. V. Gontšarovi kaks raamatut: «Algebra seitsmeklassilisele koolile» (eraldi VI ja VII klassile) ja samuti «Metoodilised näpunäited õpetajaile» esimese juurde neist. Funktsioonide tundmaõppi-

misega ühenduses olevad küsimused on neis läbi töötatud täielikumalt kui üheski teises algebra õpikus.

Utšpedgiz'i Leningradi osakond andis 1951. a. välja D. Fadejevi ja I. Sominski «Algebra» I osa käsiraamatuna seitsmeklassilise kooli õpetajaile. Raamatut saab soovitada ka õpilastele algebra õpikuna. Autorid on pööranud erilist tähelepanu katkevuse kõrvaldamisele aritmeetika ja algebra õppimise vahel, reserveerides algebra kursuse algusest peale palju ruumi ülesannete lahendamisele võrrandite abil.

Paratamatult saime märkida ainult õige väheseid vanu ja uusi õpikuid algebra alalt. Üle minnes ülesannete kogude juurde piirdume ka ainult üksikute, õpetajale eriti tähtsate raamatute nimetamisega.

XIX sajandi lõpul ja XX sajandi algul oli Venemaal laialt levinud F. Bõtškovi poolt koostatud «Elementaaralgebra kursuse juurde kuuluvate harjutuste ja ülesannete kogu» [III, 12]. Vastates täiesti revolutsioonieelse keskkooli algebra programmile, sisaldas ta suure hulga hoolikalt valitud harjutusi ja ülesandeid, mille alal töötamine võimaldas omandada täisväärtuslikke oskusi, kuid algebra kursuse teoreetiliste aluste omandamist soodustas vähesel määral. Tervikuna on raamat kahtlemata vananenud, kuid on kui rikkalik treeningumaterjali kogu säilitanud oma tähtsuse kuni käesoleva ajani.

Esitame kaks ülesannet sellest kogust (1910. a. väljaandes).

1. Arvutada $\sqrt[4]{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}$. See, peatükis IV nr. 515 all toodud ülesanne lahendub korraga, kui ruutjuur esitada kujul $\sqrt[4]{(3-\sqrt{6})^2}=\sqrt[4]{3(5-2\sqrt{6})}$.

2. Kaks isikut sõidavad välja ühes ning samas suunas kahest eri kohast, mille vaheline kaugus on 45 versta. Esimene jõudis 11 tunni 36 minuti pärast teisele järele, sõites välja enne teda nii mitu minutit, kui mitu neid on vaja, et tunniosuti poolt kellal käidud minutijaotuste arv koos minutiosuti poolt käidud samade jaotuste arvuga oleks võrdne 104-ga. On vaja leida, mitu versta sõidab kumbki neist tunnis, kui on teada, et kui nad oleksid üheaegselt välja sõitnud teineteisele vastu samade kiirustega nagu varem, siis oleksid nad kohtunud nii mitme tunni pärast, kui suur on lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa, kui selle teine liige on $\frac{1}{3,2,1,2}$ ja progressiooni tegur on $(3+\sqrt{3,66\ldots}):6$. (Peatükk «Segaülesanded», nr. 155).

Siin näeme tüüpilist «kombineeritud» ehk «kroogitud» ülesannet, mille äärmiselt kunstlik iseloom kutsus esile eesrindliku õpetajaskonna õigustatud protesti.

Bõtškovi ülesannete kogu asemele tuli N. Šapošnikovi ja N. Valtsovi «Algebra ülesannete kogu», mis täiuse ja ülesannete valiku metoodilise õigsuse poolest ei jäänud maha esimesest, kuid

algebra kursuse ideelise külje omandamiseks andis rohkem. Selle raamatu edu soodustasid oluliselt tema kaks iseärasust: lühikese teooria-alase sissejuhatuse esinemine iga paragrahvi algul, mis näitas, mida tuleb teada (lisaks kõigele eelnevale) selleks, et lahendada selle paragrahvi ülesandeid, ja ülesannete dubleerimine (iga ülesande juurde anti teine, eelmisega sarnane ülesanne, nii et õpetaja abiga ühe ülesande lahendanud õpilane tuli teisega ilma eriliste raskusteta iseseisvalt toime. Selle ülesannete kogu voorused kindlustasid talle leviku õpperaamatuna nõukogude koolis, kusjuures teda on mitu korda ümber töötatud. Kuid raamat ei ole kaugeltki vaba puudustest, mis püsivad ka viimaseis trükkides. Näiteks täheliste avaldistega seotud mitmesuguste ülesannete vastuste andmisel ülesannete kogu peaaegu kunagi ei märgi neid erijuhtumeid, mille puhul lahendamine annab teise vastuse või ei anna mingit vastust. Nii on I osa VI peatüki ülesandes nr. 253 (1948. a. trüki järgi) nõutud lahendada süsteem $ax + by = 1$, $a^2x + b^2y = a$ ja raamatu lõpul antud vastus $x = 1 : a$ ja $y = 0$. Selle vastuse saamiseks tuleb teostada jagamised avaldistega $a - b$ ja a, järelikult on ta kehtiv ainult eeldustel, et $a - b \neq 0$ ja $a \neq 0$.* Juhtumil, kui $a = b$, võtab süsteem kuju $a(x + y) = 1$, $a^2(x + y) = a$ ja omab $a \neq 0$ korral lõpmatu hulga lahendeid, mida saab väljendada valemitega $X = t$, $y = 1 : a - t$, kus t on mis tahes arv, kuid $a = 0$ korral rahuldub täiesti meelevaldsete x ja y väärtustega.** Kui aga $a - b \neq 0$, kuid $a = 0$, siis $b \neq 0$, ja süsteem on vastuoluline (ei ole simultaanne). Ilma niisuguse väikese uurimiseta on süsteemi lahendamine ebatäielik; kui arvatakse, et see ei ole õpilastele veel jõukohane, siis tuleb erijuhtumite vaatlemise vajadus kõrvaldada lisatingimuste $a \neq b$, $a \neq 0$ ja $b \neq 0$ seadmisega. Ülalnäidatuga analoogiliste komplikatsioonide ignoreerimine kasvatab tähelistesse avaldistesse mehhaanilise, formaalse suhtumise harjumuse. Ülesannete kogus leidub ka ebaõnnestunud sõnastusi. Kooli ülesannete kogusse, samuti kui õpikusse tuleb suhtuda kriitiliselt, hästi läbi mõteldes nendes pakutava materjali ning tehes neis vajaduse järgi vastavad parandused.

Nimetame veel üht ülesannete kogu, mis ilmus revolutsioonieelsel ajajärgul ega ole kaugeltki laitmatu, kuid sisaldab palju originaalset ja õpilasi huvitavat materjali. See on «Algebra elementaarkursuse harjutuste ja ülesannete kogu», mis on koostatud kolme autori (D. Bem, A. Volkov, P. Struve) poolt ja ilmunud Sõtini kirjastusel 1913. a. On ilmunud kordustrükke nii täielikul kui ka lühendatud kujul, muuseas ka nõukogude ajal.

1949. a. ilmus esmakordselt Vene NFSV teenelise õpetaja

---

* Tõlkija märkus. Veel on vajalik, et $b \neq 0$, sest kui $a \neq 0$ ja $b = 0$ (seega $a - b \neq 0$), siis lahendiks on $x = 1 : a$, y — meelevaldne (seega mitte ainult 0).

** Tõlkija märkus. Siin autor eksib, sest kui $a = 0$, siis süsteem on $0 \cdot x + by = 1, 0 \cdot x + b^2y = 0$, mida ei rahulda ükski x ja y väärtus, olgu b missugune tahes (süsteem on vastuoluline).

P. Laritševi poolt koostatud ja seitsmeklassilise kooli ning keskkooli VI ja VII klassile määratud «Algebra ülesannete kogu». Ülesannete kogus peegeldub rida progressiivseid tendentse, nagu näiteks võrrandite varane sissevõtmine, suurem tähelepanu graafikuile ja arvutustehnikale jm., ning ta väärib tõsiseimat tähelepanu õpetajate poolt.

Edaspidi ilmus ka II osa sellest ülesannete kogust (määratud VIII, IX ja X klassile), ja mõlemad osad on VNFSV Haridusministeeriumi poolt kinnitatud seitsmeklassilise kooli ja keskkooli stabiilseks õpikuks.

1937. a. ilmus ONTI kirjastusel prof. V. Kretšmari «Algebra ülesannete kogu», mis on määratud vanemaile õpilastele, kes on huvitatud matemaatikast, ja õpetajaile, sisaldades hea hulga keskmisest raskemaid ülesandeid, mis võimaldavad valgustada mitmeid printsipiaalselt tähtsaid teoreetilisi küsimusi. Ümbertöötatud ja lühendatud kujul ilmus ta 1940. a. Utšpedgizi poolt ja 1950. a. Gostehhizdat andis välja tema teise täieliku trüki. Nimetame veel Utšpedgizi poolt 1941. a. välja antud P. Ober'i ja G. Papelje «Elementaaralgebra harjutused», milles on õige täielikult esitatud algebra kursuse esimesed peatükid. Selle raamatu erilise väärtuse moodustab võrrandite uurimist nõudvate harjutuste ja ülesannete rikkalik valik.

Raamatuist algebra õpetamise metoodika alalt nimetame prof. I. Tšistjakovi «Algebra metoodikat», mille Utšpedgiz andis välja 1934. a. ja mis peale rea matemaatiliste küsimuste käsitluse sisaldab ka palju täisväärtuslikke ajaloolisi näpunäiteid, ja uuemat, S. Bronšteini «Algebra metoodikat» (Utšpedgiz, 1937), mis ei ole niivõrd metoodiline käsiraamat, kuivõrd algebra enda käsitlus.

Elementaaralgebra õpetamise üksikuile küsimustele pühendatud raamatuid ja artikleid leidub suur hulk. Tähtsaimad neist nimetame edaspidi. Praegu nimetame ainult 1949. a. ilmunud prof. V. Gontšarovi katseõpikut, milles traditsiooniline kursus on oluliselt ümber töötatud ja mida käesoleval aastal praktiliselt proovitakse reas koolides (vt. [III, 17 b]).

§ 5. Algebralised ülesanded.

Aritmeetilised ülesanded saab jaotada, nagu nägime eespool, II osa § 4, järgmiselt: 1) harjutusülesanded, mille lahendamine taandub kursuse teoreetilises osas püstitatud üldiste reeglite rakendamisele erijuhtumil, 2) rakendusliku sisuga kalkulatsioonülesanded, kus tuleb küll seada küsimus tehete valikust, kuid see laheneb ilma igasuguste raskusteta ja 3) arendavad ülesanded, mille lahendamine nõuab teatavat leidlikkust ega kaugeltki ole tagatud vastava teooria lihtsa tundmisega. Samad kolm ülesannete tüüpi leiame ka algebras, tema koolikursuse igas peatükis, kuid ainult teistes proportsioonides kui aritmeetika koolikursuses. Domineeriva

tähtsusega on harjutusülesanded, mis peavad kindlustama täisväärtuslike tehniliste oskuste omandamist samasusteisenduste teostamisel, valmisvõrrandite ja nende süsteemide lahendamisel, arvutustes ratsionaalarvudega (positiivsete ja negatiivsetega), reaal- ja kompleksarvudega. Järk-järgult komplitseerudes muutuvad harjutusülesanded märkamatult arendavaiks ülesanneteks, mille lahendamine kujutab endast juba matemaatilise loomingu algvormi. Nii näiteks kolmliikme $4x^2 - 12x + 9$ tegureiks lahutamise ülesanne on tüüpiline harjutusülesanne, kuid hulkliikme $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 3 = (2x - 3y + 1)(2x + y - 3)$ tegureiks lahutamine nõuab keskkooli õpilaselt juba põhjalikku süvenemist, leidlikkust ja visadust. Kalkulatsioonülesannete hulka tuleb lugeda näiteks kõik võrrandite koostamise ülesanded, mis nõuavad orienteerumist küsimuse konkreetseis tingimustes ja oskust rakendada nende puhul teatavat üldist meetodit. Harjutus- ja kalkulatsioonülesanneteks taanduvad ka peaaegu kõik algebra rakendused teistes distsipliinides, ja on loomulik, et just seda liiki ülesannetele pööratakse algebra koolikursuses maksimum tähelepanu. Kõrvuti nendega on siiski väga soovitav anda ka teatud hulk arendavaid ülesandeid, mis nõuavad õpilastelt mitte lihtsalt liikumist mööda hästi tuntud tavalist teed, vaid oskust mobiliseerida kõik oma teadmised sobiva tee otsimiseks, oskust rajada uut teed. Sedalaadi ülesandeid on harilikes kooliõpikuis ja ülesannete kogudes väga vähe, kuid hea valik neist leidub näiteks eespool nimetatud Kretšmari raamatus. Näiteks ülesandes nr. 16 § 3 (1937. või 1950. a. trüki järgi) tuleb tõestada, et $\sqrt[3]{2}$ ei saa esitada ruutirratsionaalsuse $p + \sqrt{q}$ kujul, kus p ja q on ratsionaalarvud. Kui õpilane ei tunne liitradikaali valemit, siis temale niisuguseks arendavaks, kuid juba raskemaks ülesandeks on sama raamatu ülesanne nr. 11 § 3. Siin tuleb leida avaldise

$$y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$

väärtus (eeldusel, et kõigil radikaalidel võetakse aritmeetiline väärtus); ülesannete kogus pannakse ette tõestada, et kui $1 \leqq x \leqq 2$, siis $y = 2$, ja kui $x \geqq 2$, siis $y = 2\sqrt{x-1}$, kuid parem on mitte anda neid tulemusi, vaid lasta õpilastel endil leida need, alustades funktsioonide graafikute ehitamisega ristkoordinaatides. Küsimuse lõpuleviimiseks tuleb vaadelda y^2 avaldist, mis on võrdne $2x + 2\sqrt{(x-2)^2}$, s. o. $4x - 4$, kui $x \geqq 2$, ja 4, kui $x \leqq 2$.

Samal ajal, kui aritmeetikas soovitatakse ülesannete lahendamiseks reserveeritav aeg jaotada ligikaudu võrdselt harjutus-, kalkulatsioon- ja arendavate ülesannete vahel, peab algebras see suhe olema teissugune, umbes 3 : 2 : 1. Sageli kujuneb õpilase kogu töö ainult harjutusülesannete lahendamiseks, kuid see on muidugi täiesti ebanormaalne.

Algebraliste ülesannete lahendamise koolipraktika kannatab veel

ühe olulise puuduse all: ülesandeid lahendades ei mõista õpilased, milleks nad seda teevad, ja õpetaja kas ka ei anna endale selles küllaldasel määral aru või ei pea tarvilikuks sellest õpilastega kõnelda. Võtame näiteks ülesanded irratsionaalsuse kaotamisele nimetajast, millele VIII klassis pühendatakse tavaliselt palju aega. Harilikult õpilased ei tea, mis eesmärgil toimub see teisendus, isegi ei aima, et mõnikord on kasulikum kaotada irratsionaalsus mitte nimetajast, vaid lugejast, nagu näiteks otsides funktsiooni $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ piirväärtust x lähenemisel ühele, kus teisendamine avaldiseks $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ otsekohe näitab, et see piirväärtus on võrdne arvuga 0,5. Ja ometi on seda eesmärki nii kerge selgitada, ette pannes leida näiteks arvu $1:\sqrt{2}$ ja temaga võrdse arvu $\sqrt{2}:2$ või summa $1:(\sqrt{2}-1)+1:(\sqrt{3}-1)+1:(\sqrt{6}-1)$ ja temaga võrdse summa $(\sqrt{2}+1)+0{,}5(\sqrt{3}+1)+0{,}2(\sqrt{6}+1)=1{,}7+$ $+(\sqrt{2}+\sqrt{0{,}75}+\sqrt{0{,}24})$ ligikaudne väärtus nelja õige numbriga! Kui kasutada ruutjuurte tabelit, siis viimase avaldise väärtuse saab ühe üleskirjutamist nõudva tehte (liitmise) tulemusena, kuna esimesel juhtumil tuleb teostada kolm õige tülikat jagamist.

Hoolimatus algebraliste ülesannete mõne liigi lahendamise eesmärkide selgitamise vastu toob kahju kahes suhtes: harjutab õpilasi formaalselt täitma õpetaja poolt näidatud operatsioone, ilma et mõistetaks nende mõtet, kuid peale selle võtab ära õpetaja poolt teostatud harjutusmaterjali valikul mõistlikud alused.

Tagasi pöördudes küsimuse juurde nõuetest, mis tuleb esitada ülesande lahendusele (vt. I osa § 19), märgime, et leitud lahendi õigsuse kontrolli kahjuks tavaliselt üldse ei teostata. Lahenduse põhjendamise nõudele pööratakse enamikul juhtumeil vähe tähelepanu: praktika kulgeb lahus teooriast, ilma teostatavate operatsioonide seaduslikkuse tarviliku valgustuse ja kontrollita. Ühenduses sellega ei ole ülesande lahendus kaugeltki alati ammendav, täielik. Kui keskkooli lõpetajale anda lahendada võrrand $1+\frac{5}{(x-2)(x+3)}-$ $-\frac{1}{x-2}=0$, siis peaaegu alati saame vastuseks kaks lahendit: $x_1=+2$ ja $x_2=-2$; lahendaja ei arvesta seda, et tema poolt saadud võrrand $x^2-4=0$, mis annab need lahendid, on tuletatud antud võrrandist selle korrutamisel tundmatust x sõltuva avaldisega ja seetõttu võib mitte olla samaväärne antuga; omades kõiki antud võrrandi lahendeid võib tal veel olla võõrlahendeid, milleks ongi lahend $x_2=+2$. Antud võrrandil on ainult üks lahend $x=-2$. Olukord muutub täiesti selgeks, kui võrrandi vasakule poolele anda kuju $1+\frac{2-x}{(x-2)(x+3)}$ ehk $1-\frac{1}{x+3}$ ja kujutada graafiliselt funktsioon $y=1-\frac{1}{x+3}$; saab kõvera (hüperbooli), mis lõikab X-telge ühesainsas punktis $x=-2$.

Sageli suhtutakse hoolimatult ka küllalt tähtsasse lahenduse lihtsuse nõudesse. Tihtilugu saab üht ning sama ülesannet lahendada mitmel viisil, kusjuures need lahendusviisid aja- ja jõukulu mõttes ei ole kaugeltki samaväärsed. Tuleb nõuda võimalikult lihtsa lahenduse otsimist, juhtida õpilasi vastavate näpunäidetega niisuguste lihtsate lahenduste juurde ja mõnikord anda

valmis lahendused, mis millegipärast väärivad eelistamist võrreldes nendega, mis õpilased ise leidsid. Olgu näiteks vaja lahendada võrrand $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c$, kus a, b ja c on antud arvud ja seejuures ükski summadest $a+b$, $b+c$, $c+a$ ei ole 0. Tavalisel viisil lahendades saame pärast küllaltki keerukaid teisendusi vastuse $x=ab+bc+ca$ (puhul, kui $S=3ab+3bc+3ca+a^2+b^2+c^2\neq 0$). Kuid viies kõik liikmed võrrandi vasakule poolele, saame temale kergesti anda kuju $(x-ab-bc-ca)\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=0$, millest otsekohe järeldame, et puhul, kui $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{S}{(a+b)(b+c)(c+a)}\neq 0$ on võrrandil üksainus lahend: $x=ab+bc+ca$ ja puhul, kui $S=0$, rahuldab võrrandit x iga väärtus. Veel üks näide: olgu vaja arvutada sajandiku täpsusega avaldise $y=2x^3-5x^2+3x+2$ väärtus, kui $x=\sqrt{5}-2$. Siin on kasulik vaadelda kolme viisi: 1) otsest asendust $x\approx 2{,}236-2=0{,}236$, mis annab $y\approx 2{,}448$ ehk lõpuks 2,45; 2) x-i asendamist tema täpse irratsionaalse väärtusega, mis annab $y=57\sqrt{5}-125=\sqrt{16245}-125$ ehk lõpuks 2,456; 3) antud avaldise eelnevat lihtsustamist asendusega $x^2=1-4x$, mis annab $y=57x-11$ ja viib samale lõpptulemusele, mis teine viis, kuid nõuab hoopis vähem arvutusi.

II peatükk.

ARVU MÕISTE ARENDAMINE SEITSMEKLASSILISES KOOLIS.

§ 6. Negatiivsete arvude tarvituselevõtmine. Ratsionaalarvude hulk.

Matemaatika ajalugu näitab selgesti, kuivõrra raskemini sai inimkond hakkama arvu mõiste kolmanda laiendamisega — negatiivsete arvude tarvituselevõtmisega — võrreldes esimese kahe laiendamisega — nulli ja murdude tarvituselevõtmisega. On loomulik, et ka õpilasel on raskem harjuda selle temale uue materjaliga, mis võrratult vähem seostub igapäevase eluga kui null («ei midagi») ja murrud. Kui rasked algajaile ka on tähelise sümboolika omandamise esimesed sammud, lähevad nad koolis hoopis kergemini kui uued arvud, ja tekib küsimus, kas ei oleks parem enne tundma õppida täisratsionaalsete avaldiste samasusteisendusi ja lineaarvõrrandeid ning siis alles üle minna arvu mõiste laiendamisele, mis vastaks enam ka asjaolude ajaloolisele käigule. Kuid nii programm, mis käesoleval ajal kehtib VNFSV keskkoolides, kui ka enamik õpikuid võtab esimese, tähelisele sümboolikale pühendatud (sissejuhatava) teema järele vahetult negatiivsed arvud teise teemana. Ka meie peame allpool kinni sellest üldiselt vastuvõetud korrast. Tarvitusele võttes uued, «negatiivsed» arvud, nimetame «positiivseiks» kõik varemtuntud täis- ja murdarvud, välja arvatud arv null, mis ei kuulu ei ühtede ega teiste hulka, vaid on neid eraldavaks piiriks. Positiivsed täis- ja murdarvud koos negatiivsete täis- ja murdarvudega ja arvuga null moodustavad ratsionaal-

arvude hulga. See termin väärib eelistamist võrreldes sageli kasutatava terminiga «relatiivsed arvud», mis süvendab väära vaadet, nagu oleks olemas kõrvuti aritmeetikas õpitavate harilike arvudega, millel nagu poleks märki, veel uued arvud, mida iseloomustab märgi pluss või miinus esinemine. Kisseljovi stabiilne algebra õpik sisaldab kaks lauset, mis toovad segadust mõistetes ja mis ammu oleks aeg kõrvaldada: «Positiivseid arve, negatiivseid arve ja nulli nimetatakse koos relatiivseiks arvudeks, eristades neid harilikest (ehk aritmeetilistest) arvudest, mille ees ei ole mingit märki. Relatiivse arvu absoluutväärtuseks nimetatakse seda arvu ilma märgita võetuna; nii on arvu + 10 absoluutväärtus 10 ja arvu — 5 absoluutväärtus 5» (lk. 15, 1949. a. trükk). Erinevana sellest, mis siin väidetakse, tuleb lugeda, et mingisuguseid märgita arve ei ole olemas. Harilikud arvud, mida õpitakse tundma aritmeetika koolikursuses, on positiivsed arvud ja nende ette võib kirjutada märgi pluss, kuid seda võib ka mõtelda, nii et pole mingit vahet arvude 5 ja + 5 vahel. Positiivse arvu absoluutväärtuseks on see arv ise, negatiivse arvu absoluutväärtuseks on tema vastandarvuks olev positiivne arv ja nulli absoluutväärtuseks on null.

1952. a. trükis on absoluutväärtuse mõiste ebaõige definitsioon lõpuks kõrvaldatud, kuid leheküljel 15 on tehtud uus viga: negatiivse arvu absoluutväärtuse definitsioonis on kasutatud terminit «vastandarv», kuid see termin defineeritakse alles lk. 16 absoluutväärtuse mõiste abil. Siin on näide definitsiooni loogilisest veast «circulus vitiosus», millest kõneldi eespool (I osa, § 5).

Tegeldes arvu mõiste mingi laiendamise küsimuse teadusliku käsitlusega, püstitatakse rida aksioome ja neist tulenevaid teoreeme, mis väljendavad omadusi arvudel, mis eelduse kohaselt on tuntud, ja võetakse definitsiooniga tarvitusele uued arvud, mille omadustest mõned on samased varem tuntud arvude omadustega, mõned aga erinevad neist. Niisuguse käsitluse leiame näiteks I. Arnoldi õpiku «Arvuteooria» [III, 4 a] esimeses peatükis, kus pärast naturaalarvude teooria aluseks olevate aksioomide vaatlemist definitsiooniga võetakse tarvitusele täisarvud kui naturaalarvude paarid ja ratsionaalarvud kui täisarvude paarid. Matemaatika õpetajal on kasulik tunda seda aritmeetika aksiomaatilist käsitlust, mis teatavasti võimaldab selgesti eraldada seda, mis kuulub tõestamisele, sellest, mis võetakse vastu ilma tõestuseta, kuid ei saa olla juttugi sellest, et tutvustada selle aksiomaatilise käsitlusega algajaid, kelle juures esmajärgulist tähtsust omab esitatavate definitsioonide otstarbekohasuse näitamine, nende motiveerimine. Algajad vajavad mitte aksiomaatilist, vaid geneetilist ja induktiivset käsitlust, vajavad mitte lõplikult valminud teooriat, vaid niisuguse teooria järkjärgulise loomise demonstreerimist, mis erijuhtumite vaatlemiselt viib üldistele tulemustele, kusjuures see demonstratsioon ei pea sisaldama midagi niisugust, mis on vastuolus kaasaja teadusega, midagi niisugust, millest edaspidi tuleks loobuda.

Geneetilis-induktiivne käsitlusviis, millega lisaks juba tuntud positiivseile täis- ja murdarvudele võetakse tarvitusele negatiivsed ratsionaalarvud, on õpikuis mitmeti üles ehitatud. Näiteks Euleri «Täielik algebra käsiraamat» lähtub võimalusest vaadelda algebralise summa kõiki liikmeid positiivsete ja negatiivsete liidetavaina, tõlgendades neid kui vara ja võlga. Üksikasjalikumalt on see käsitlusviis arendatud Bertrand'il [III, 9], kes negatiivsed arvud võtab tarvitusele valemiga $a - b = a + (-b)$. Lähtekohana kõige sagedamini võetakse vaatluse alla niisugused suurused, mida saab mõiste kahes vastandtähenduses, s. o. «suunaga» suurused, nagu näiteks liikumine mööda sirget kahes vastandsuunas. Aritmeetikast tuntud arvud, iseloomustades niisuguste suuruste väärtusi, vajavad veel täiendamist suuna nimetusega (Kisseljovi õpik illustreerib seda mõtet näitega raudteest), mis muutub üleliigseks, kui arv varustada seda suunda näitava märgiga + või —. See meetod on hea selle poolest, et ta otsekohe seob ratsionaalarvud nende näitliku kujutamisega arvtelje punktidena, kuid tuleb ületada raskused, mis on seotud märkide + ja — kahesuguse tähendusega: nii liitmis- ja lahutamismärkidega kui ka arvude suuna märkidega. Kolmandaks võimalikuks ja samuti sageli kasutatavaks negatiivsete arvude tarvituselevõtmise meetodiks on vahe $a - b = x$, s. o. võrrandi $b + x = a$ vaatlemine ja tõlgendamine arvust a suuremate b väärtuste korral (oma olemuselt on see meetod aksiomaatilisele käsitlusele kõige lähedasem). Erilist tähelepanu väärib uue algebra käsiraamatu [III, 2 a] poolt soovitatud meetod, mis tõlgendab negatiivseid arve suuruste vähenemise mõõduna, kuna iga positiivset arvu vaadeldakse suuruse suurenemise mõõduna, kusjuures igale positiivsele arvule a (ehk, mis on sama, $+a$) vastab oma eriline negatiivne arv $-a$, mis väljendab vähenemist a mõõduühiku võrra. Seejuures arve a ja $-a$ nimetatakse teineteise «vastandarvudeks». Nii osutub ratsionaalarv mitte ainult suuruse mõõduks, vaid ka suuruse muutumise mõõduks, ja tema rakendamispiirkond oluliselt laieneb. Võib ütelda, et tema niisugune tõlgendamine vastab eespool (esimese osa §§ 1 ja 2) vaadeldud üleminekule matemaatika arenemise esimeselt põhietapilt tema teisele etapile, üleminekule jäävate suuruste uurimiselt muutuvate suuruste uurimisele. Osutub, et see negatiivsete arvude tarvituselevõtmise meetod võimaldab kergemini ületada mitmeid raskusi, mis õpilaste ette kerkivad nende arvude tundmaõppimisel.

Juhtides lugejat, kes detailsemalt soovib tutvuda negatiivsete arvude mitmesuguste tarvituselevõtmise meetoditega, algebra metoodika erikursuste [III, 10; 42] ja eriti prof. J. Arnoldi väga sisuka raamatu «Negatiivsed arvud algebra kursuses» [III, 4 b] juurde, soovitame algajal õpetajal vaadelda ratsionaalarvu järjekindlalt suuruse muutumise mõõduna. Muide, niisuguse vaate puhul neile ei tekita nende arvude märkide küsimus mingisuguseid raskusi: positiivsed arvud, mis väljendavad suurendamist, tuleb tähistada liitmismärgiga (+), sest vastava suurenemistulemuse saamiseks tuleb arvud liita, ja negatiivsed arvud tuleb tähistada lahutamismärgiga (—), sest vähenemistulemuse saamiseks tuleb arvust arv lahutada. Sama loomulikult saadakse ka valemid $+(+a) = +a = a$, $-(+a) = -a$, $+(-a) = -a$ ja $-(-a) = +a = a$, mis otseselt tulenevad sellest, et definitsiooni kohaselt sümboliga $-a$ tähistatakse arvu a vastandarvu sõltumatult sellest, kas see arv on positiivne või negatiivne.

Vaadeldes ratsionaalarvu suuruse muutumise mõõduna ja tegeldes suurusega, mis saab muutuda nullist nii ühele kui ka teisele poole, saame iga ratsionaalarvu vaadelda ka suuruse enda mõõduna: arv +10 (rubla) näiteks väljendab nii sularaha iga suurenemist 10 rubla võrra kui ka selle suurenemist nullist 10 rubla võrra, s. o. sularaha 10 rubla ennast, ja arv —10 (rubla) väljendab nii sularaha iga vähenemist 10 rubla võrra kui ka selle vähenemist nullist, s. o. võlga 10 rubla.

Missugusel viisil oleksid negatiivsed arvud ka tarvitusele võetud, on väga tähtis õpilasi varustada mingi kindla konkreetse kujutamisviisiga, mille poole võiksid nad pöörduda kui allika poole, millest järelduvad nende arvude kõik omadused. Niisugune kujutus-

viis toob võrratult enam kasu kui kõige parem neid omadusi määravate definitsioonide, aksioomide ja teoreemide süsteem. Pärast seda, kui on selgitatud, et negatiivse arvu mõiste võimaldab lõpmatu hulga erinevaid konkreetseid tõlgendusi, võetakse üks mingi niisugune tõlgendus ja vaadeldakse seda eriti hoolega ning üksikasjalikult, pöördudes tulevikus alati esimeses järjekorras selle poole. Varem võeti selleks positiivsete ja negatiivsete arvude standardkujutiseks sularaha ja võlg, nüüd võetakse sagedamini arvtelje punktide hulk, s. o. punktid sirgel, millel on määratud positiivne suund, alguspunkt ja mõõduühik. Sularaha ja võla mõiste on igaühele väga hästi tuttav, kuid pilt arvteljest, mille punktid alguspunktist ühele poole on märgitud positiivsete ratsionaalarvudega ja teisele poole negatiivsete ratsionaalarvudega, on kahtlemata veel näitlikum ja mängib matemaatika edasisel tundmaõppimisel nii erakordselt tähtsat osa, et tema varajane tundmaõppimine on väga kasulik. Lugedes põhikujutiseks arvtelje punktide hulga, on erijuhtumite illustreerimisel kasulik pöörduda ka ratsionaalarvude teiste tõlgenduste poole. Tehes näiteks arvtelje abil kindlaks, et -20 on vähem kui -5, seame küsimuse sellest, kuidas võrrelda kahe inimese vara, kui ühel neist pole midagi muud, kui ainult 20 rubla võlgu ja teisel — ainult 5 rubla võlgu.

Korraldades vastavuse ratsionaalarvude ja arvtelje punktide vahel, kasutame ainult selle telje ratsionaalseid punkte. See asjaolu selgub õpilastele alles hiljem, kui kõneldakse irratsionaalarvudest; kõnelda sellest algebra kursuse algul ei ole vaja.

§ 7. Ratsionaalarvude liitmine ja lahutamine.

Kogu raskus ratsionaalarvude liitmise omandamisel on tingitud sellest, et siin tuleb toetuda selle tehte uuele, üldistatud definitsioonile, mis erijuhtumina sisaldab naturaalarvude ja positiivsete murdude liitmist. See summa uus definitsioon on formuleeritav mitmeti sõltuvalt sellest, mil viisil on negatiivsed arvud tarvitusele võetud. Vaadeldes ratsionaalarve a ja b mingi suuruse muutumise näitajaina, defineerime summa $a+b$ kahe järjestikku teostunud muutumise näitajana. Veendunud, et positiivsete arvude, näiteks arvude 3 ja 8 puhul annab see definitsioon hariliku summa $3+8=11$ (järjestikune suurenemine esiteks 3 võrra, siis 8 võrra on samaväärne ühekordse suurenemisega 11 võrra), arutame kergesti läbi mitmesugused erijuhtumid, nagu $(+3)+(-8)$, $(-3)+(+8)$, $(-3)+(-8)$, tuletame vastavad reeglid ja veendume siis, et summa põhiomadused, mis eelmise teema käsitlemisel leiti kehtivat positiivsete arvude puhul, kehtivad niisuguse summa mõistmise korral ka kõigi ratsionaalarvude puhul. Pöördumine arvtelje poole soodustab tunduvalt omandamise selgust ja püsivust: kui $a=+3$ on algpunktist mõõdetud kauguse suurenemine 3 ühiku võrra, s. t. üleminek näiteks punkti 10 juurest punkti 13 juurde ja $b=-8$ on järgnev selle kauguse vähenemine 8 ühiku võrra, s. t. üleminek

punkti 13 juurest punkti $13 - 8 = 5$ juurde, siis summa $a + b$ väljendab üleminekut punkti 10 juurest punkti 5 juurde, s. t. vähenemist $10 - 5 = 5$ ühiku võrra ehk muutust -5; järelikult $(+3) + (-8) = -5$ ja selle tulemuse võib saada kiiremini, toimides püstitatud reegli järgi.

Väga oluline on, et lapsed hästi mõistaksid, et ratsionaalarvu lisandamine arvule kaugeltki ei tarvitse anda esimesest liidetavast suuremat summat. Üleminekul kitsama arvuhulga juurest laiema arvuhulga juurde jääb osa omadusi püsima, nagu näiteks summa vahetuvuse omadus ja ühenduvuse omadus, kuid osa kaob. Opereerides naturaalarvudega saame alati, et $a + b > a$. Nulli tarvituselevõtmine sunnib kirjutama juba $a + b \geqq a$, kuna (positiivsete) murdude tarvituselevõtmine midagi ei muuda selles valemis. Kuid üleminek ratsionaalarvude juurde teeb võmalikuks ka juhtumid, kus $a + b < a$, ja summa $a + b$ ning arvu a võrdleva suuruse kohta ei saa juba midagi ütelda.

Ratsionaalarvude lahutamine on liitmisest printsipiaalsest seisukohast lihtsam, sest see tehe põhineb endisel vahe definitsioonil: kahe antud arvu vahe on arv, mis tuleb liita teise antud arvuga, et saada esimene arv. Kuid reeglite tuletamiseks vajalike erijuhtumite läbivaatamine selle definitsiooni alusel kujutab endast õige tülikat tööd, mida tunduvalt lihtsustab järgmise teoreemi kasutamine: vahe on võrdne lahutatava vastandarvu ja vähendatava summaga. Selle teoreemi tõestuseks tuleb näidata, et summa $a + (-b)$ liidetud arvuga b annab arvu a, kuid selle saab otsekohe, kui kasutada summa ühenduvuse seadust: $a + (-b) + b = a + [(-b) + b] = a + 0 = a$. Küsimuse täielik käsitlus nõuab selle vahe ühesuse tõestamist, kuid selle peensuse võib VI klassis ära jätta.

Kindlaks teinud võimaluse asendada ratsionaalarvu a lahutamine vastandarvu $-a$ liitmisega, märgime edasi, et ratsionaalarvude lahutamine on alati võimalik. On tarvis näidata, kuidas ratsionaalarvude lahutamist saab illustreerida arvteljel (positiivse arvu lahutamine on samaväärne negatiivse arvu liitmisega ja vastab rõhtteljel liikumisele vasakule, negatiivse arvu lahutamine on samaväärne positiivse arvu liitmisega ja vastab liikumisele paremale) ja mõistete sularaha — võlg abil. Konkreetse kujutluse negatiivse arvu lahutamisoperatsioonist annab näiteks niisuguse juhtumi vaatlemine. Mul on taskus 10 rubla sularaha ja sedel, mis meenutab vajadust tasuda 3 rubla trahvi, nii et maha arvates see 3 rubla on minu käsutuses 7 rubla; saanud teate, et mind on trahvist vabastatud, hävitan ma sedeli ja nüüd on minu käsutuses juba 10 rubla; kogu operatsiooni saab üles kirjutada kujul: $7 - (-3) = 10$.

Ratsionaalarvude liitmise ja lahutamise üheaegne vaatlemine viib algebralise summa omaduste selgitamisele ja reeglitele tehete kohta hulkliikmetega, mille võib järgmise teema («Täisüksliikmed ja -hulkliikmed») juurde üle kanda.

§ 8. Ratsionaalarvude korrutamine ja jagamine.

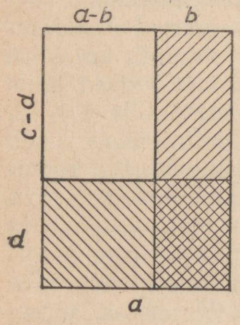
Mis tahes ratsionaalarvu korrutamine ja jagamine naturaalse või murrulise positiivse arvuga ei tekita õpilastele mingisuguseid raskusi: vaadeldes negatiivset arvu nimega arvu eriliigina ja kasutades aritmeetikast tuntud naturaalarvuga korrutamise definitsiooni kui võrdsete liidetavatega summa leidmist ja murruga korrutamise definitsiooni kui korrutatavast murdosa leidmist, kui ka jagatise endist definitsiooni, on kerge järeldada, et näiteks $(-6)\cdot 3 = (-6)+(-6)+(-6) = -18$, $(-6):3 = -2$ ja $(-6)\cdot\frac{2}{3} = (-6):3\cdot 2 = -4$. Illustreerime neid operatsioone konkreetsete näidetega (näiteks kütuse tagavara vähenemine iga päev 6 m³ võrra moodustab 3 päevaga vähenemise üldse 18 m³ võrra) ja teeme kindlaks reeglid mis tahes ratsionaalarvu korrutamise või jagamise kohta positiivse arvuga.

Kuid korrutamine negatiivse arvuga nõuab printsipiaalselt uut tähtsat sammu: korrutise uue definitsiooni tarvituselevõtmist. Tõepoolest, defineerides arvude a ja b korrutist kui summat b liidetavast, millest igaüks on a, ei saavuta me midagi juhtumil, kui b on näiteks -3, ja seetõttu on määratud nurjumisele kõik katsed tõestada võrdused, nagu $4\cdot(-3) = -12$ või $(-4)\cdot(-3) = +12$, lähtudes sellest definitsioonist. Korrutise uus definitsioon peab rahuldama kolme nõuet: olles esiteks iga kahe ratsionaalarvu korrutise definitsiooniks, peab ta üldistama endist definitsiooni, mis kehtib neil juhtumeil, kui korrutaja on positiivne arv; teiseks peab ta säilitama korrutise põhiomadused — tema kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse ja distributiivsuse liitmise suhtes; kolmandaks, kõik suunaga suuruste kohta käivad ülesanded, mis lahenduvad korrutamistehte abil juhtumeil, kui nende suuruste väärtused on positiivsed, peavad lahenduma korrutamise teel ka siis, kui need suurused omavad negatiivseid väärtusi. Need nõuded moodustavad korrutamise kohta käivate seaduste nn. «permanentsuseprintsiibi» (jäävuse, püsivuse printsiibi) sisu.

Kõiki neid nõudeid rahuldab täielikult see definitsioon, mis raamatus [III, 2 a] on formuleeritud järgmise reeglina: kahe teguri korrutis on võrdne 1) tegurite absoluutväärtuste korrutisega, kui mõlemad tegurid on positiivsed või mõlemad tegurid on negatiivsed, 2) tegurite absoluutväärtuste korrutisega, võetud märgiga miinus, kui üks tegur on positiivne ja teine negatiivne, 3) nulliga, kui kasvõi ainult üks tegur võrdub nulliga.

Formuleerinud selle reegli kui millegi, mis on antud ja üldiselt vastu võetud, tegeldakse edasi sellest järelduste tuletamisega, näidates, et kõik nimetatud nõuded on tõepoolest rahuldatud. Kuid siin tuleb alati ületada teatav psühholoogiline vastupanu õpilaste poolt, kes hämmeldunult küsivad, mispärast negatiivse arvu korrutamine negatiivse arvuga annab positiivse arvu. See hämmeldus on täiesti loomulik: rea aastate kestel oli korrutamine lastele võrdsete

liidetavate liitmiseks; raske oli lastel V klassis omandada korrutamine murruga, veel raskem — korrutamine negatiivse arvuga. Seda raskust saab kergendada (ainult kergendada, kuid kaugeltki mitte kõrvaldada!) suunaga suuruste korrutamise juhtumite vaatlemisega, kasutades näiteks ühtlase liikumise valemi $s = vt$ paremal poolel esinevaid suurusi. Kisseljovi algebra stabiilne õpik alustabki selle valemiga, analüüsides kõiki võimalikke märkide kombinatsioone ja formuleerides edasi üldise reegli. Aleksandrovi ja Kolmogorovi raamat alustab üldise reegliga ja alles hiljem vaatleb selle konkreetseid rakendusi, muuseas ka rakendusi ühtlase liikumise juhtumile, vähendades sellega definitsiooni ja tõestuse segamise hädaohtu, kuid venitades seda õpilaste psühholoogilist vastupanu. Selgust selle mõistmises, mis defineeritakse ja mis tõestatakse, on vaja saavutada, kuid esialgu on siin nagu alati vaja kindlustada operatsioonide mõtte õige mõistmine konkreetseil erijuhtumeil, mis hoopis paremini jõuavad õpilaste teadvuseni, kuna üldiste formuleeringute detaile on parem viimistleda selle teema alal kokkuvõtteid tehes ja kordamisel.



Joon. 5.

Toome lühikese, kuid üsna õpetliku raamatust [III, 2a] võetud teate negatiivsete arvude ajaloost. Valemi $(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$ tuletamine puhul, kui $a > b$ ja $c > d$, viib Diophantose reeglile (lahutatava arvu korrutamisel liidetavaga ja liidetava korrutamisel lahutatavaga saadakse lahutatav, lahutatava korrutamisel lahutatavaga saadakse liidetav) ja aitab oluliselt kaasa korrutamise kaasaegse märkidereegli omandamisele. Kuid jämedaks veaks oleks viimase reegli põhjendamise katse sel teel, et võetakse $a = c = 0$ ja tuletatakse sellest valemist, et $(-b)\cdot(-d) = +bd$: enne tutvumist negatiivsete arvudega tõestatakse see valem ju ainult juhtumi jaoks, kus $a > c$ ja $b > d$, kasutades korrutise distributiivsust liitmise ja lahutamise suhtes või geomeetrilisi kaalutlusi, mis on arusaadavad joonise 5 abil.

See asjaolu, et arvu mõiste igal laiendamisel tuleb ületada raskused, mis on seotud varem tarvitusele võetud ja üleminekul uude arvupiirkonda osaliselt kehtivuse kaotanud definitsioonide üldistamise vajadusega, raskused, mis on eriti suured korrutamise puhul, sunnib otsima definitsioone, mis samuti nagu pöördtehete definitsioonid kehtiksid kõigis koolis vaadeldavais arvupiirkondades. Niisuguse üldise korrutamisedefinitsiooni katset kujutab endast järgmine Lacroix definitsioon: «Korrutis moodustatakse korrutatavast samuti nagu korrutaja on moodustatud positiivsest ühikust». Kui sellele definitsioonile lisandada täpne juhend selle kohta, kuidas positiivsest ühikust moodustada korrutaja, s. o. näpunäide selle operatsiooni kohta, mis tuleb teostada arvuga $+1$ selleks, et saada korrutaja, ja mis tuleb korrata korrutatavaga, et definitsiooni kohaselt saada korrutis, siis see definitsioon võib aidata ületada korrutamisega ühenduses olevaid raskusi. Seni, kuni jutt on naturaalarvudest, on selleks

operatsiooniks liitmine: iga naturaalarvu võib saada ühikute liitmisel, millest tulenebki harilik definitsioon naturaalarvuga korrutamisele kui võrdsete liidetavate liitmisele. Iga (positiivse) murru võib saada ühiku jaotamisel teatavaks arvuks võrdseiks osadeks ja nende osade liitmisel; siit tuleneb harilik definitsioon murruga korrutamisele kui korrutatavast murdosa leidmisele.

Iga negatiivse ratsionaalarvu võib saada positiivsest ühikust selle märgi muutmisel, tema jagamisel vajalikuks arvuks võrdseteks osadeks ja niisuguste osade liitmisel; siit tuleneb harilik negatiivse arvuga korrutamise definitsioon.

Arvu mõiste laiendamise selle meetodi detailse käsitluse, rakendatuna mitte ainult ratsionaalarvude tundmaõppimisele ja rajatuna arvu tõlgendusele «operaatorina», võib leida prof. I. Arnoldi töödes [III, 4].

Õppinud nii või teisiti selgeks kahe ratsionaalarvu korrutamise, astuvad õpilased kergesti järgnevad sammud, mis ei paku mingisuguseid printsipiaalseid raskusi, ja nimelt: tutvuvad kolme ja enama teguri korrutise arvutamisega, astmete a^2, a^3, a^4, ... arvutamise ja ratsionaalarvude jagamise reegliga. Jagamine omandatakse alati palju kergemini kui korrutamine, sest see põhineb endisel hästi tuntud definitsioonil: arvude a ja b jagatiseks nimetatakse arvu, mis korrutamisel arvuga b annab a. Soovides leida näiteks $+10$ ja -2 jagatist, veendume, et antud definitsiooni põhjal selleks saab olla ainult -5. Väga soovitav on mitte piirduda küsimuse sellise formaalse lahendamisega, vaid katsuda omandada ka vastavad konkreetsed kujutlused, vaadeldes sellekohaseid suunaga suurusi. Kui näiteks mingi suurus ühtlaselt vähenedes 3 päevaga väheneb 12 ühiku võrra, siis ühe päeva kohta tema vähenemine moodustab $12:3=4$ ühikut, ja kogu arvutust iseloomustab täielikult kirjutis $(-12):(+3)=-4$. Kirjutis $(-12):(-4)=+3$ annab vastuse küsimusele, mitme päevaga toimub vähenemine 12 ühiku võrra, kui iga päevaga toimub vähenemine 4 võrra.

Ratsionaalarvude korrutamise ja jagamise vaatlemisel tuleb eraldi peatuda tehetel nulliga: korrutis võrdub siis ja ainult siis nulliga, kui vähemalt üks tegureist on null; nulli jagamisel mis tahes arvuga, mis ei ole null, saab nulli; jagamist nulliga kunagi ei vaadelda.

§ 9. Ülesanded kõigi tehete kohta ratsionaalarvudega.

Kui reeglid, mille järgi toimuvad tehted ratsionaalarvudega, on kätte õpitud, siis tuleb õpilastel oma teadmiste kinnistamiseks ja kindlate oskuste omandamiseks lahendada palju harjutusülesandeid. Lisaks sellele harjutusmaterjalile, mis leidub stabiilses ülesannete kogus, võib soovitada kaht järgmist tüüpi harjutusi.

1. Antakse mingi algebraline samasus valmis kujul, ilma tuletamiseta, näiteks $(a^3-6a^2+12a-8):(a^2-4a+4)=a-2$ ühes vastava näpunäitega tähtede lubatavate väärtuste kohta, antud puhul näpunäitega, et a võib omandada iga väärtuse peale $+2$, ja nõutakse kontrollida seda samasust rea meelevaldselt võetud tähtede ratsionaalsete väärtustega. Märkides, kui palju lihtsam on võrduse parema poole väärtuse arvutamine võrreldes vasaku poo-

lega, juhime tähelepanu sellele, et selliste lihtsamate ja arvutamiseks sobivamate avaldiste saamine (antud keerukamaist avaldistest) on järgneva algebra kursuse üks tähtis ülesanne.

2. Antakse mingi lihtsa (ratsionaalse, ühe argumendi x) funktsiooni y avaldis ja nõutakse leida tema väärtused, mis vastavad argumendi mõnedele kindlaksmääratud väärtustele, ning märkida vastavad punktid koordinaatidega x ja y graafikul ristkoordinaatides. Vastavat terminoloogiat tarvitusele võtta pole mingii vajadust, küll on aga vaja kasutada ruudulist paberit (kas harilikku vihikupaberit või, parem, millimeeterpaberit). Teeme järelduse (järgnevate arvutuste abil kontrollitava oletuse kujul) selle kohta, missugusel joonel asetsevad need punktid. Võttes näiteks funktsiooni $y = 10 - 3x$ anname x-le väärtused $x = 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4$ jne. Märgates, et graafiku kõik punktid asetsevad ühel ja samal sirgel, teeme oletuse selle kohta, kuidas asetsevad punktid, mis vastavad argumendi x mingeile vahepealseile väärtustele, näiteks väärtustele $+0{,}5$ ja $-0{,}5$ («interpolatsioon»), ja veendume vastava arvutuse põhjal selle oletuse õigsuses.

§ 10. Ruutjuure leidmine. Arvude ruutude ja ruutjuurte tabel.

Pärast negatiivsete arvude tarvituselevõtmist on järgmiseks arvu mõiste laienduseks irratsionaalarvude tarvituselevõtmine ja üleminek ratsionaalarvude hulga juurest reaalarvude hulga juurde. Kuid praegu kehtiva programmiga on see üleminek viidud VIII klassi ja seda vaatleme VI peatükis. Kuid VII klassis on ette nähtud teema «Ruutjuure leidmine», millele aasta lõpul on reserveeritud 12 tundi ja mis valmistab ette irratsionaalarvude tarvituselevõtmist, kuid ühtlasi omab ka omaette väärtust, sõltumatult edasisest matemaatika kursusest: juurimine, eeskätt ruutjuure leidmine esineb matemaatika rakendustes niivõrd sagedasti, et seitsmeklassilisest koolist väljalastavate noorte tutvustamine sellega näib tarvilikuna.

Ruutjuur nii täpset ruutu kujutavast ratsionaalarvust, millest see juur on võetav täpselt, kui ka mis tahes positiivsest ratsionaalarvust, mille puhul tuleb piirduda mingi etteantud täpsusega, on mõiste, mida VII klassi õpilased taipavad ilma raskusteta ja omandavad kindlalt, kui silmas pidada tema geomeetrilist tähendust kui antud pindalaga ruudu külje pikkust. Seitsmeklassilise kooli lõpetajad tunnevad ka harilikku võtet ruutjuure leidmiseks mitmekohalisest arvust, kuid rakendavad seda ainult mehhaaniliselt, endale aru andmata selles, miks on vaja toimida nii ja mitte teisiti, ja teevad seetõttu jämedaid vigu. Soovides leida näiteks ruutjuurt arvust 123,8, jaotavad mitmed selle numbrid rühmadeks alates viimasest numbrist, mitte aga alates komast, ja saavad õige vastuse 11,12 asemele väga vigase 3,52. On vaja taotleda mitmekohalisest arvust ruutjuure leidmisel harilikult rakendatava võtte teadlikku omanda-

mist, kuigi algebra programmis (1952. a. trüki järgi, lk. 11) on märgitud, et õpilastelt on üleliigne nõuda selle loogilist põhjendamist. Väga soovitav on omandada ruutude tabeli ja ruutjuurte tabeli kasutamise oskus, sest need tabelid lihtsustavad ja kiirendavad arvutustööd tunduvalt ning leiavad praktikas üldist kasutamist.

Neid asjaolusid silmas pidades on soovitav tööd teema «Ruutjuure leidmine» alalt alustada arvude ruutude arvutamise teatava ratsionaliseerimisega. VII klassi õpilasi on soovitav tutvustada (kui seda pole tehtud varem) valemiga $(10a+5)^2 = 100a(a+1)+25$, mis lihtsustab numbriga 5 lõppeva arvu ruutu tõstmist (näiteks $85^2 = 100 \cdot 8 \cdot 9 + 25 = 7225$; $9995^2 = 999 \cdot 1000 \cdot 100 + 25 = 99\,900\,025$), näidata lühendatud korrutamise valemite rakendamise paremust kasvõi niisuguse näite varal, nagu $49^2 = (50-1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$. Kuid veel enam kasu toob tutvumine nn. «kahe sissekäiguga» ruutude tabeliga, millega tutvumist on hea alata kahekohaliste naturaalarvude ruutude tabeli koostamisega õpilaste endi poolt, mis toimub väga kiiresti üksinda liitmise teel. Valem $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a^2 + (2a+1)$ ütleb, et kui a^2 on teada, siis $(a+1)^2$ saame liites arvu $2a+1$. Kirjutame üles esiteks arvude 10, 20, 30, . . . ruudud, siis täidame järk-järgult üksikud read: $21^2 = 20^2 + 41 = 441$, $22^2 = 441 + 43 = 484$, $23^2 = 484 + 45 = 529$, $24^2 = 529 + 47 = 576$ jne. kuni $29^2 = 784 + 57 = 841$, $30^2 = 841 + 59 = 900$. Järgmise rea algul juba kirja pandud viimase arvu saamine kontrollib selle rea kõigi arvude õigsust. Lapsed taipavad kiiresti tabeli koostamisviisi, jätkavad seda omal algatusel, hindavad õigesti tema rakendamise paremust ja edaspidi kasutavad seda alatiselt, kergesti üle minnes täielikuma ruutude tabeli juurde, mis leidub kooli tabelite kogus «Neljakohalised matemaatilised tabelid» (sellest kõneldakse allpool).

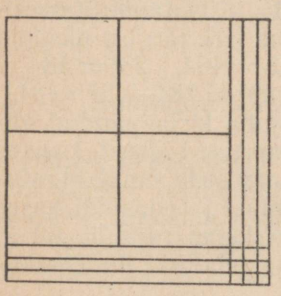
Arvude 10 kuni 100 ruutude tabel.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	100	121	144	169	196	225	256	289	324	381
20	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
30	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
40	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
50	2500	2601	2704	2809	2616	3025	3136	3249	3364	3481
60	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
70	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
80	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
90	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
100	10000									

Üle minnes ruutjuure leidmise ülesande juurde, lahendatakse see kõigepealt süstemaatiliste proovide meetodil, mille teostamine läheb väga kiiresti, kui on kasutada äsjavaadeldud ruutude tabel.

Soovides leida näiteks ruudu külje x, kui tema pindala on 4500 m², proovime järjekorras arve 10 (vähe, sest $10^2 = 100$), 100 (palju, sest $100^2 = 10\,000$), 50 (vähe, sest $50^2 = 2500$), 70 (palju, sest $70^2 = 4900$), 60 (vähe, sest $60^2 = 3600$), 65 (vähe, sest $65^2 = 4225$), 67 (vähe, sest $67^2 = 4489$), 68 (palju, sest $68^2 = 4624$), niisiis $67 \text{ m} < x < 68 \text{ m}$ ja $x \approx 67$ m (täpsusega kuni 1 m puuduga). On selge, et samal teel võib leida ka kümnendike, sajandike jne. numbri, kusjuures korrutamine tuleb teostada kas otseselt või täielikuma ruutude tabeli abil. Õpilaste tähelepanu on kasulik juhtida süstemaatiliste proovide meetodi analoogiale nende proovimistega, mis tuleb teha igal kaalumisel, kus kasutatakse kaaluvihte.

Järgmine samm — mitmekohalisest arvust ruutjuure leidmise hariliku võtte omandamine — läheb õpilastel hoopis raskemini. Kogemused näitavad, et Kisseljovi «Algebras» toodud selle võtte seletus (1. osa §§ 111—112 1952. a. trüki järgi) ei ole arusaadav VII klassi õpilastele ja õpetajad lepivad harilikult võtte mehhaanilise rakendamisega, mis muidugi on äärmiselt ebasoovitav. Omandamise teadlikkust aitab väga tõsta geomeetriline tõlgendus, mille kohta võib lugeda raamatust [III, 11] ja mis laseb ennast edasi arendada ning täiendada. Küsimus tuleb seada järgmiselt: on antud teatud hulk ruutsentimeetreid, näiteks 529, mis tuleb paigutada nii, et tekiks ruut. Märgates, et 529 cm² on 5 dm² ja 29 cm² veendume, et otsitavasse ruutu mahub kõigepealt 4 dm², mis moodustavad ruudu küljega 2 dm (joonis 6). Ülejäänud 1 dm² 29 cm² ehk kokku 129 cm² paigutame 1 cm² laiuste ribadena paremale ja alla; niisuguste ribade iga paari peale kulub $2 \cdot 2 \cdot 10 = 40$ cm² ja olemasolevast 129 cm²-st jätkub kolmeks ridade paariks, kuid mitte enam, kusjuures arv 3 saadakse jäägi 129 jagamisel arvuga $2 \cdot 20 = 40$ ehk, mis on sama, arvu 12 jagamisel 4-ga. Pannud need kolm paari ribasid paigale, saame uue jäägi $129 - 120 = 9$ cm², mis läheb kujundi alumises paremas nurgas tekkinud väikese ruudu (küljega 3 cm) täitmiseks. See ruutjuure leidmise ülesande geomeetriline tõlgendamine lubab näitlikult kujutada operatsiooni iga sammu ja saavutada tema omandamisel täielikku teadlikkust.



Joon. 6.

Naturaalarvust ruutjuure leidmise ülesanne püstitatakse kahel kujul: esiteks, leida suurim naturaalarv x, mille ruut sisaldub antud naturaalarvus a, s. t. arv x, mis rahuldab kahekordset võrratust $x^2 \leqq a < (x+1)^2$; teiseks, leida antud arvu a ligikaudse ruutjuure väärtus etteantud täpsusega kuni $\frac{1}{n}$ (harilikult täpsusega kuni 1, kuni 0,1, kuni 0,01 jne.); teiste sõnadega: on vaja leida murd $\frac{x}{n}$, mis rahuldab nõuet $\left(\frac{x}{n}\right)^2 \leqq a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$; kui $n = 1$, siis see ülesanne

täandub esimeseks. See ülesanne on analoogiline ülesandele teisendada harilik murd kümnendmurruks antud lähendustäpsusega, ja on kasulik meenutada vastavat terminoloogiat (ligikaudne väärtus täpsusega kuni $\frac{1}{n}$ puuduga, liiaga) ning selgitada ka, kuidas teostada valikut ligikaudse väärtuse vahel puudu ja liiaga. Üle minnes naturaalarvu ruutjuure leidmiselt selle leidmisele mis tahes positiivsest ratsionaalarvust, tuleb lahendada oluline küsimus juure muutumisest juuritava muutumisel: on tarvilik, et õpilased kindlasti teaksid, et arvu suurendamine 10, 100, 1000 korda kutsub esile tema ruudu suurenemise $10^2 = 100$, $100^2 = 10\,000$, $1000^2 = 1\,000\,000$ jne. korda, kuid tema ruutjuure suurenemise ainult $\sqrt{10} = 3{,}16\ldots$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{1000} = 31{,}6\ldots$ jne. korda, illustreerides seda sõltuvust geomeetriliste näidetega, kasvõi niisugustega: 1 cm^2 sisaldab 100 mm^2, kuid 1 m^2 sisaldab juba 1 000 000 mm^2 ja 1 km^2 miljon miljonit (triljon) ehk tuhat miljardit (10^{12}) ruutmillimeetrit.

Hoolitsedes seitsmeklassilise kooli lõpetajaile praktiliste, enamikule inimestest igapäevases elus vajalike teadmiste andmise eest matemaatika alalt, on vaja silmas pidada ka tutvumist kuupjuure leidmisega. Siin muidugi ei saa minna kaugemale proovide meetodist ja tabelite kasutamisest (kasvõi ainult kuupide tabeli kasutamisest).

III peatükk.

SAMASUSTEISENDUSED SEITSMEKLASSILISES KOOLIS.

§ 11. Täheline sümboolika.

Kehtiva programmi kohaselt algab seitsmeklassilises koolis algebra kursus VI klassis teemaga «Tähelised avaldised», mille käsitlemiseks soovitatakse kasutada 12 tundi. Selle teema tarvilikkus on ilmne: asudes algebra õppimisele tuleb lastel kõigepealt tutvuda selle terminoloogiaga, õppida mõistma seda erilist sümbolite keelt, mida kasutatakse algebras, ja õppida kasutama seda keelt. Kõnes on siin küsimused, mis oma olemuselt on väga lihtsad, kuid millest algajad saavad ikka ainult vaevaga jagu: esiteks, üleminek arvude tähistamisele tähtedega tähendab tõusmist abstraktsiooni kõrgemale astmele; teiseks ei ole algajaile selge tähelise sümboolika tarvituselevõtmise eesmärk. Üleminek konkreetseilt, nimega arvudelt (2 kivikest, 2 vihku) abstraktseile arvudele (2 ühelist) ei ole oma olemuselt kergem, kuid see toimub aeglaselt, jaotatuna algkoolis viibimise mitmele aastale ja läheb seetõttu märkamatult. Kuid üleminek arvudelt, mis sisaldavad määratud arvu ühelisi (arvud 2, 10, 100) määramata arvudele a, b, c, millest igaüks võib sisaldada mis tahes täis- või murdarvu ühelisi, läheb võrratult suurema vaevaga juba lihtsalt seetõttu, et toimub lühema aja kestel. Õpetaja eriliseks mureks peab olema igati pikendada seda aega: lapsi tuleb järk-järgult harjutada tähelise sümboolikaga juba alates V klassi aritmeetika kursusest, millest kõneldi ka eespool. Teiselt poolt tuleb algebra õpetamise esimesed sammud korraldada nii, et õpilastele saaks selgeks tähelise sümboolika tarvituselevõtmise eesmärk, tuleb hoolitseda arvude tähelise tähistuse motiveerimise eest.

On olemas kolm teed, mis annavad niisuguse motiveeringu: 1) mitmesuguste õpilastele sõnalisel kujul enam-vähem tuntud lausete kirjutamine sümboolsel kujul; 2) ülesannete üldkujuliste lahendusvalemite tuletamine; 3) lihtsamate võrrandite koostamine ja lahendamine.

Esimest teed minnes kasutatakse ära kõigepealt aritmeetiliste tehete koha käivad seadused, mis osaliselt on tuntud V klassi kursusest. Kehtiv programm sisaldab teemat «Aritmeetiliste tehete seadused, nende sõnastus ja täheline märkimine», millele tuleb pühendada küllaldast tähelepanu, kasutades täielikuit vastava materjali Kisseljovi õpikust (I osa, §§ 6—9), täiendades seda tehete seadustega murdude alalt (näiteks $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ jne.) ja kirjutades valemitena geomeetriast tuntud pindala ja ruumala kohta käivad lausedi. Kogemused näitavad, et tähtsat arvude kohta käivate lausete tähelise märkimise oskust ei saa õpilased kätte korraga, ja seetõttu on väga tähtis harjutada neid sellega juba aritmeetika kursuses, nõudes esialgu iga lause puhul kaht kirjutist, nimelt nii sõnalisel kui ka sümboolsel kujul, ja aegamööda üle minnes ainult sümboolse kuju juurde kohustusliku nõudega lugeda iga sümboolset kirjutist sõnades.

Nimetame summa vahetuvuse seadust $a + b = b + a$ ja samuti summa ja vahe omadusi

$$a + (b + c) = a + b + c, \qquad a - (b + c) = a - b - c,$$
$$a + (b - c) = a + b - c, \qquad a - (b - c) = a - b + c,$$

mis väljendavad algebralise summa ühenduvuse seadust; neid nimetatakse mõnikord «summa ja vahe liitmise ja lahutamise reegliteks». Veenduda nende valemite õigsuses on kõige lihtsam, kui vaadelda konkreetseid arvutamisjuhtumeid, näiteks niisugust: «Omades a rubla sain rahakaardi b rublale, kusjuures mind paluti sellest summast c rubla üle anda teisele isikule ja ülejääv summa jätta endale; kui palju on mul raha pärast seda, kui olen täitnud selle palve?» Ülesanne on lahendatav kahel viisil: ma võin esmalt leida, kui palju raha jääb saadud b rublast üle pärast c rubla tasumist, nimelt $b - c$ rubla, ja siis selle ülejäägi $b - c$ liita olemasoleva a rublaga, millega saan üldse $a + (b - c)$, kuid võin ka esmalt leida, kui palju mul on raha pärast saadud b rubla liitmist sularahaga a rubla, ja siis arvutada, kui palju jääb järele, kui sellest summast $a + b$ tasun ära c rubla, millega saan $(a + b) - c$ või lühemalt $a + b - c$. On selge, et mõlemad viisid annavad ühe ning sama tulemuse ja seepärast $a + (b - c) = a + b - c$. Analoogilised selgitused on soovitavad ka ülejäänud kolme valemi puhul, samuti ka korrutamise ja jagamise kohta käivate valemite, nagu $(a + b)c = ac + bc$ ja $(a - b)c = ac - bc$ puhul. Niisugune konkretiseerimine annab lastele enam kui formaalne tuletamine

aksioomide ja definitsioonide alusel ning kindlustab tuletatud valemite õige ja teadliku rakendamise.

On kasulik endale selgeks teha (kuid mitte arutada seda VI klassi õpilastega), et näiteks võrdus $a+b+c=c+a+b$ on järeldus mitte ainult summa vahetuvuse omadusest, vaid vahetuvuse ja ühenduvuse omadusest koos. Kolme (või enam) arvu liitmisel sulgude ärajätmise võimalus ise on järeldus ühenduvuse seadusest:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Tõepoolest, selle põhjal võime avaldist $a+b+c$ tõlgendada kui $(a+b)+c$ ja kui $a+(b+c)$, ilma et teeksime viga. Niisiis

$$a+b+c=(a+b)+c=c+(a+b)=c+a+b.$$

Nii näeme, et siin tuli tegelikult toetuda summa m õ l e m a l e omadusele.

Teine tee — aritmeetiliste ülesannete üldkujuliste lahendusvalemite tuletamine sel kujul, nagu seda tavaliselt tehakse, selgitab algajaile vähe tähelise märkimise väärtust, sest seda illustreeritakse näidetega, kus üldkujul lahendamine ei kergenda erijuhtumil tehtavate arvutuste teostamist.

Suure efekti annab lahendamine üldkujul siis, kui see üldkujuline lahendus tõepoolest kergendab järgnevat tööd. Kui õpilastel on V klassi aritmeetika kursusest nii palju säilinud, et oskavad leida ringi pindala («ringi pindala on ligikaudu 3,14 korda suurem tema raadiusele ehitatud ruudu pindalast») ja silindri ruumala («silinder kõrgusega 1 cm sisaldab nii mitu kuupsentimeetrit, kui mitu ruutsentimeetrit sisaldab tema põhi»), siis võib seada küsimuse näiteks selle kohta, kuidas oleks mõnus leida antud läbimõõduga ja antud pikkusega vasktraadi kaalu, silmas pidades, et 1 cm^3 vaske kaalub 8,8 g. Leidnud selle kaalu mingil erijuhtumil, näiteks juhtumil, kui traadi läbimõõt on 0,4 mm ja pikkus on 600 m harilikul, mitmeid arvutusi nõudval viisil ($0{,}4:2=0{,}2$ mm $=0{,}02$ cm; $0{,}02\cdot 0{,}02=0{,}0004$ cm^2; $0{,}0004\cdot 3{,}14=0{,}001256$ cm^3; $0{,}001256\cdot 60000=75{,}36$ cm^3; $8{,}8\cdot 75{,}36=663{,}344$ g $\approx 0{,}66$ kg), ja silmas pidades, et selliseid arvestusi tuleb teha õige sagedasti, lahendame ülesande üldkujul, eeldades, et (vask)traadi läbimõõt on d cm ja pikkus on a m: silindri põhja kujutava ringi raadius on $0{,}5d$, sellesse ehitatud ruudu pindala võrdub $0{,}25d^2$, ringi pindala $0{,}25d^2\cdot 3{,}14=0{,}785d^2$ cm^2, silindri ruumala on $0{,}785d^2\cdot 100a=78{,}5\ ad^2$ cm^3, traadi kaal $8{,}8\cdot 78{,}5\ ad^2=690{,}8\ ad^2$ g $\approx 0{,}69\ ad^2$ kg. Tavaliselt kasutatakse pisut vähema täpsusega, kuid kergemini meeldejäävat valemit $P=0{,}7\ ad^2$, kus a on traadi pikkus meetrites, d — läbimõõt sentimeetrites ja P — kaal kilogrammides. Kerge on näha, kuivõrd selle valemi kasutamine lihtsustab arvestust igal erijuhtumil.

Toodud näitega analoogiliste ülesannete varal saab veenvalt näidata ülesannete üldkujuliste lahenduste kasulikkust ainult teatava küllalt kõrge üldise arengu juures, mida alati ei ole VI klassi õpilastel. Seetõttu ei saa anda suurt tähtsust tähelise märkimisviisi koolis tarvituselevõtmise sellele teele.

Võrratult õpetlikumaks osutub VI klassi õpilastele kolmas tee — lihtsamate võrrandite koostamine ja lahendamine. Selleks võetakse aritmeetika kursuses erivõtete abil juba lahendatud ülesanded ja selgitatakse nende üldist lahendamisviisi, mis põhineb tundmatu

suuruse jaoks eri tähise tarvituselevõtmisel. Olgu vaja lahendada järgmine ülesanne «oletusele»: «20-kopikaliste ja 15-kopikaliste rahadega tasuti 8 rubla 65 kopikat, kokku 50 rahaga; mitu raha oli ühe, mitu teise väärtusega?» (Berezanskaja ülesannete kogu, nr. 455). Tähistanud 20-kopikaliste rahade arvu tähega x, saame võrrandi

$$20x + 15 \cdot (50 - x) = 865,$$

mida on võimalik lahendada ainult aritmeetiliste tehete definitsioone ja omadusi kasutades, ilma et midagi oleks teada võrrandeist ja samasusteisendustest. See algebra õppimist alustavaile VI klassi õpilastele jõukohane lahendus on järgmine:

$20x + (750 - 15x) = 865 \ldots$ on kasutatud korrutise jaotuvuse omadust lahutamise suhtes, s. o. omadust, mis väljendub valemiga $a(b - c) = ab - ac$;

$20x + 750 - 15x = 865 \ldots$ on kasutatud reeglit: selleks, et liita summa, tuleb liita vähendatav ja siis lahutada lahutatav;

$750 + 20x - 15x = 865 \ldots$ on kasutatud summa vahetuvuse omadust;

$750 + (20x - 15x) = 865 \ldots$ on veel kord kasutatud vahe liitmise seadust (kuid vastupidises järjekorras);

$750 + 5x = 865 \ldots$ vaadeldes arve $20x$ ja $15x$ teatavat liiki ühenimeliste arvudena, asendame vahe $20x - 15x$ arvuga $5x$ samuti, nagu vahe 20 m — 15 m asendatakse arvuga 5 m, 20 aastat — 15 aastat arvuga 5 aastat jne.

$5x = 865 - 750 = 115 \ldots$ iga liidetav on võrdne summaga, millest on lahutatud teised liidetavad;

$x = 115 : 5 = 23 \ldots$ kui $5x$ on 115, siis $1x$ on 5 korda vähem.

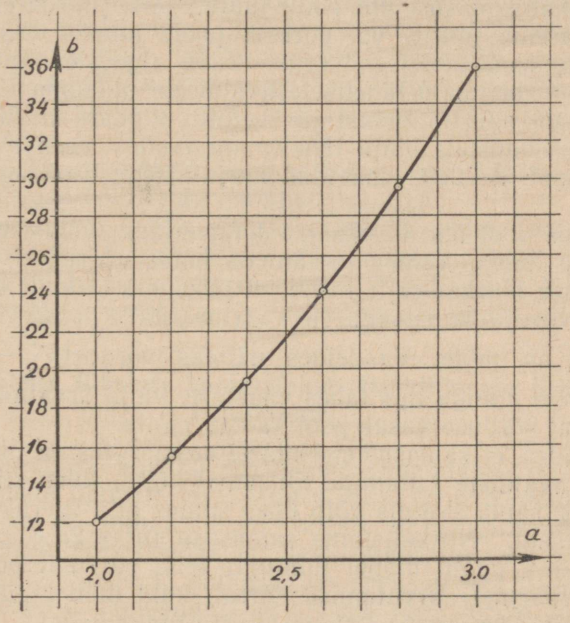
Niisiis, tasumisel anti 20-kopikalisi 23 ja 15-kopikalisi $50 - 23 = 27$.

Seda liiki lahendusi näeb kehtiv programm ette juba algebra kursuse esimese teema all («Tähelised avaldised») ja neile tuleb pühendada küllaldast tähelepanu. Lapsed õpivad kiiresti hindama võrrandite jõudu ülesannete lahendamisel ja omandavad vähehaaval selle meetodi rakendamise oskuse. Võrrandi mõiste varajast tarvituselevõtmist näeb ette ka P. Aleksandrovi ja A. Kolmogorovi algebra õpik. Üksikasjalikumalt on see küsimus läbi töötatud raamatus [III, 28b].

Algebra programmi esimese teema kogu ülejäänud materjal on stabiilseis õpikuis küllaldaselt esitatud. Tuleb hoolitseda, et õpilased harjuksid üleminekuga sõnalisel kujul antud algebraliste avaldiste ja valemite juurest nende kirjutamisele sümboolsel (tähelisel) kujul ja ümberpöördult, kasutades selleks põhjalikult stabiilse ülesannete kogu kahe esimese paragrahvi materjali. Tegeldes algebralises avaldises esinevate tähtede asendamisega nende arvuliste väärtustega, on kasulik anda valmis samasusi ja lasta veenduda, et tähtede kõigi lubatavate väärtuste korral mõlema poole arvutamine annab ühe ja sama tulemuse. Näiteks võib anda kontrollida võrdsuste

$$\frac{27x^3 - 8y^3}{9x^2 + 6xy + 4y^2} = 3x - 2y \text{ ja } \frac{27x^3 - 54x^2y + 36xy - 8y^3}{9x^2 - 12xy + 4y^2}$$

$= 3x - 2y$ õigsust suuruste x ja y mis tahes antud väärtustel, mis täidavad tingimust $3x \gtrless 2y$, näiteks väärtustel $x = 5$ ja $y = 2$, või jätta väärtuste valik igaühe enda hooleks. Tavaliselt praktiseeritava ainult üht tähte sisaldava avaldise arvuliste väärtuste arvutamise, s. o. ühe argumendi funktsiooni väärtuste arvutamise saab teha õpilastele võrratult huvitavamaks, kui sellega kaasub graafiline kujutamine ristkoordinaatides. Võttes näiteks avaldise $b = a^3 + 2a^2 -$



Joon. 7.

$- 5a + 6$, laseme leida tema väärtused kasvõi kümnendike täpsusega juhtumil, kui $a = 2$; 2,2; 2,3 jne. ja leida siis ruudulisel paberil kõik need punktid, mis on määratud a ja b vastavate väärtuste paaridega, valides selleks sobiva mõõtkava ja lähtesirged, millest mõõtmine algab. Joonisel 7 kujutatud graafiku joonestamine on VII klassi õpilastele täiesti jõukohane ja püsiva huviga teostatav töö.

Veel üks märkus detailide kohta. Sageli tähelepandav märkide $>$ (on suurem) ja $<$ (on vähem) segamine on täiesti kõrvaldatav, kui toonitada, et märgil $=$ (on võrdne) on kriipsukeste otste vaheline kaugus vasakul niisama suur kui paremal, kuid märkidel «on suurem» ja «on vähem» ei ole, kusjuures suurem kaugus on lähemal suuremale arvule.

§ 12. Samasusteisenduste ülesanne ja liigid.

Saades summa $a+a+a+a$, võime selle kirjutada lühemal kujul $4a$; eespool vaadeldud võrrandi vasaku poole, nimelt $20x+15\cdot(50-x)$ teisendasime avaldiseks $750+5x$. On selge, et $4a$ on seesama avaldis, mis $a+a+a+a$, kuid kirjutatud teisiti, nimelt lühemalt. Missugune ka oleks a väärtus, alati $a+a+a+a=4a$; missugune ka oleks arvu x väärtus, alati $20x+15\cdot(50-x)=750+5x$. Siin meil on, nagu öeldakse, kaks samasust ehk kaks samasusvõrdust: samasus defineeritakse võrdusena, mis on õige temas esinevate tähtede igasuguste lubatavate väärtuste puhul ja üleminekut samasuse ühe poole juurest teise juurde (vasaku poole juurest parema juurde või parema poole juurest vasaku juurde) nimetatakse samasusteisenduseks. Juba algajale algebra õppijale on selge, et keerukale tähelisele avaldisele lihtsama kuju andmise oskus omab suurt tähtsust ja seetõttu algebra peab pühendama samasusteisendustele palju tähelepanu (selles veenvad juba täielikult eespool, lk. 219 vaadeldud harjutustega analoogilised harjutused).

Märgime veel ühe üksikasja: defineerides samasust võrdusena, mis kehtib temas esinevate tähtede kõigi väärtuste puhul, tuleb teha selgitav märkus selle kohta, et mõeldakse ainult tähtede lubatavaid väärtusi, s. o. niisuguseid väärtusi, mille puhul võrduse mõlemal poolel on mõte. Vaadeldes näiteks võrdust $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$, võime tähele x anda mis tahes väärtuse, välja arvatud $x=2$, sest $x=2$ puhul võrduse vasak pool kaotab mõtte.

Toonitades, et samasusteisenduste eesmärgiks on üldiselt öeldes keerukate avaldiste esitamine lihtsamal kujul, tuleb silmas pidada, et üks ning sama avaldis võib ühes suhtes olla keerukam ja teises suhtes lihtsam. Nii eelistame samasuse $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)=a^4+4$ puhul mõnel juhtumil selle paremat poolt, näiteks arvuliste väärtuste arvutamise korral, kuid mõnel puhul vasakut poolt (näiteks, kui see avaldis on murru nimetajaks).

Seitsmeklassilises koolis vaadeldakse ainult ratsionaalseid algebralisi avaldisi, s. o. avaldisi, mis on koostatud tähtede või numbrite abil väljendatud arvudest nelja aritmeetilise tehte, nimelt liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise abil, kusjuures need tehted võivad korduda lõplik arv korda. Astendamine (naturaalse astendajaga) on korrutamise erijuhtum, nii et selle tehte rakendamine ei riku algebralise avaldise ratsionaalsust. Ratsionaalset avaldist nimetatakse täisavaldiseks, kui selles ei esine jagamist tähelise jagajaga, ja murruliseks, kui selline jagamine esineb.

Üksliikmeks nimetatakse korrutist, mis koosneb numbrilisest tegurist (koefitsiendist ehk kordajast) ja ühest või mitmest tähest, millest igaüks on võetud kindlas astmes; üksliikmeks loetakse ka üksik, numbritega väljendatud arv; hulkliikmeks nimetatakse üksliikmete iga algebralist summat. Selle, raamatus [III, 2a] esitatud

ja vana definitsiooniga võrreldes kindlat eelistamist vääriva definitsiooni kohaselt täisratsionaalne avaldis $(a + b)^3$ ei ole ei üksliige ega ka hulkliige, kuid teda saab esitada hulkliikmena kujul $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Kehtib teoreem: iga täisavaldist saab teisendada temaga samaselt võrdseks üksliikmeks või hulkliikmeks. Iga täisratsionaalse avaldise esitamine tema peatähe alanevate astmete järjekorras korraldatud hulkliikmena on tema teisendamine n o r m a a l k u j u k s ehk k a n o o n i l i s e k s kujuks $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Mitme võrdõigusliku tähe olemasolu korral, s. o. kui antud täisratsionaalne avaldis on mitte ühe, vaid kahe või enam sõltumatu muutuja funktsioon, kasutatakse «leksikograafilist» («tähestikulist») järjestust. Lugedes, et x eelneb tähele y, saame järgmise teise astme täisratsionaalse avaldise normaalkuju: $a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_02y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$. Iga murdratsionaalse avaldise normaalkujuks on tema esitamine kahe ühistegurita hulkliikme jagatisena.

Ratsionaalsete avaldiste samasusteisenduste küsimuse teadusliku sisu käsitluse võib leida artiklist [III, 3].

Seitsmeklassilises koolis õpitakse tundma ratsionaalsete avaldiste samasusteisendusi, nimelt VI klassis üks- kui ka hulkliikmelisi täisavaldisi ja VII klassis murdavaldisi. Paralleelselt laiendatakse arvu mõistet ning koostatakse ja lahendatakse võrrandeid.

§ 13. Sarnaste liikmete koondamine. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine.

Õppinud tundma koefitsiendi mõiste, omandavad õpilased kergesti ka sarnaste liikmete koondamise, mis tundub neile nimega arvude liitmise ja lahutamisega täiesti analoogilisena: $5x^2y + 7x^2y = 12x^2y$ ja $8a^3 - 5a^3 = 3a^3$, sest 5 mingit arvu koos 7 samasuguse arvuga annavad 12 samasugust arvu, ja kui 8 ühesugusest arvust lahutame 5 samasugust arvu, siis jääb järele 3 niisugust arvu.

Üksliikmete liitmist ja lahutamist tegelikult ei teostata, vaid ainult märgitakse (millele järgneb sarnaste liikmete koondamine, kui osutub, et selliseid on). Hulkliikmete liitmine ja lahutamine taanduvad eespool (§ 11) kõnes olnud valemite $a + (b + c) = a + b + c$, $a + (b - c) = a + b - c$, $a - (b + c) = a - b - c$ ja $a - (b - c) = a - b + c$ üldistamiseks mis tahes algebralise summa juhtumile, mida on kasulik alata nende uuesti sõnastamisega, ühendades neid kahekaupa: algebralise summa ($b + c$ või $b - c$) liitmiseks tuleb ära jätta selle ees seisev märk + ja ka sulud, millesse ta on paigutatud, ning kirjutada tema kõik liikmed eelneva juurde samade märkidega, mis neil on, pidades silmas, et märgi puudumine arvu ees on samaväärne märgi + esinemisega selle ees; algebralise summa ($a + b$ või $a - b$) lahutamiseks tuleb ära jätta selle ees seisev märk ja sulud, millesse ta on paigutatud, ning kirjutada tema kõik liikmed eelneva juurde märkidega, mis on vastu-

pidised nende seniste märkidega. Kui on aru saadud sellest, et need kaks reeglit on samaväärsed aritmeetika nelja tavalise reegliga summa ja vahe liitmise ja lahutamise kohta, siis ei ole raske kindlustada nii nende püsivat omandamist kui ka teadlikku rakendamist.

§ 14. Üksliikmete ja hulkliikmete korrutamine. Lühendatud korrutamise valemid.

Korrutamise reeglid on väga lihtsad ja harilikult õpilased omandavad need kergesti, aga kui õpetaja küllaldaselt ei hoolitse teadlikkuse tagamise eest nende õppimisel, siis võib alati juhtuda, et mõni õpilane kirjutab midagi niisugust, nagu $5x^2 \cdot 3x^4 = 5 \cdot 3 \cdot x^{2 \cdot 4} = 15x^8$. Üksliikmete korrutamine baseerub täielikult korrutise kahel omadusel, nimelt vahetuvuse omadusel ja ühenduvuse omadusel, kuna hulkliikmete korrutamisel leiab peale selle veel kasutamist jaotuvuse omadus. Valemid $ab = ba$, $abc = a(bc)$, $(a+b) \cdot c = ac + bc$, kus tähed tähendavad mis tahes arve, on selleks baasiks, millele tuleb ehitada algebraliste avaldiste korrutamise õppimine. Iga reegli tuletamisel tuleb meeles pidada vajadust minna üle järk-järgult kergemate küsimuste juurest raskemate juurde, vältida mitme raskuse ületamist korraga, minna vähem üldisema juurest enam üldisema juurde, konkreetsema juurest abstraktsema juurde, mitte edasi lükates saadud üldiste algebra reeglite praktilist rakendamist aritmeetikas ja geomeetrias ning ära hoida väärtõlgendused.

Oletame, et on tegemist näiteks ühesuguste alustega astmete korrutamise reegli tuletamisega. Siis küsimus seisab järgmise mõttekäigu teadlikus ja püsivas omandamises (a on mis tahes arv, n ja k — naturaalarvud):

$$a^n \cdot a^k = \underbrace{(aa \ldots a)}_{n \text{ korda}} \cdot \underbrace{(aa \ldots a)}_{k \text{ korda}}$$ — (naturaalse astendajaga astme definitsiooni järgi)

$$= \underbrace{aa \ldots aaa \ldots a}_{n \text{ korda } k \text{ korda}}$$ — (reegli järgi: selleks, et korrutada korrutisega, on vaja järjestikku korrutada korrutise iga teguriga)

$$= \underbrace{aaa \ldots a}_{n+k \text{ korda}}$$ — (on leitud tegurite üldarv)

$$= a^{n+k}$$ — (uuesti on kasutatud naturaalse astendajaga astme definitsiooni).

See mõttekäik viib järgmisele reeglile, mis on valemi $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ sõnaliseks väljenduseks: ühe ning sama arvu astmete korrutamisel saadakse sellesama arvu niisugune aste, mille astendaja on võrdne tegurite astendajate summaga. Kuid metoodiline viga oleks, kui see õige lühike mõttekäik anda VI klassis korraga, ilma vajaliku ettevalmistuseta rea erijuhtumite vaatlemise näol; see ettevalmistus toimub algul ainult arvude najal, mis kergesti või-

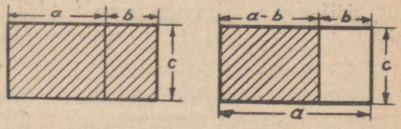
maldavad teostada kontrolli, näiteks $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$, millelt siis järk-järgult minnakse üle aluse ja astendaja tähelisele märkimisele: $a^3 \cdot a^2 = a^5$, $2^k \cdot 2^n = 2^{k+n}$, $a^k \cdot a^n = a^{k+n}$. On õpetlik läbi arutada mõned sageli esinevad vead, nagu järgmised: $2^5 \cdot 3^2 = 6^{5+2} = 6^7$; $2^3 + 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ (on kasulik anda õige valem $a^n b^n = (ab)^n$, lastes selle iseseisvalt tõestada ja sõnastada).

Üksliikmete korrutamist saab lugeda omandatuks ainult siis, kui õpilased on suutelised vastavat reeglit mitte ainult täpselt sõnastama ja igal konkreetsel juhtumil rakendama, nagu leida $(+3a^2b) \cdot (-12a^3b^2c) = -36a^5b^3c$, vaid ka küsimuse oskavad taandada astme definitsiooni ja korrutise omaduste kasutamisele, s. o. oskavad seda reeglit antud konkreetsel juhtumil põhjendada, arutades umbes järgmiselt (muidugi iga sammu põhjendades):

$$(+3a^2b) \cdot (-12a^3b^2c) = (3aab) \cdot (-12aaabbc) =$$
$$3aab \cdot (-12)aaabbc = 3 \cdot (-12)aaaaabbbc =$$
$$(-36) \cdot (aaaaa) \cdot (bbb) \cdot c = -36a^5b^3c.$$

On vaja, et õpilased oskaksid kasutada seda reeglit aritmeetikas, näiteks arvude $96 = 2^5 \cdot 3$ ja $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ korrutise saamiseks kujul $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5$ loomulikult koos kontrolliga ($96 \cdot 720 = 69120$; $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 = 256 \cdot 27 \cdot 10 = 69120$), ning geomeetrias, näiteks ruudukujulise põhjaga püstsamba ruumala V arvutamiseks selle põhja külje $5a$ cm ja samba kõrguse $8a$ cm järgi ($V = 25a^2 \cdot 8a = 200a^3$ cm^3) või silindri ruumala arvutamiseks, kui põhja raadius on r ja kõrgus on võrdne põhja läbimõõduga ($V = 3{,}14r^2 \cdot 2r = 6{,}28r^3$). Tuleb silmas pidada, et õpilane, kes üldkujul on omandanud üksliikmete korrutamise reegli ja oskab seda rakendada harilike, ülesannete kogus leiduvate abstraktse iseloomuga harjutusülesannete lahendamisel, teeb sageli vigu selle rakendamisel ülalnäidatud juhtumite taolistel puhkudel, mis annab tunnistust asja omandamise formaalsest iseloomust.

Hulkliikmete korrutamise reegel baseerub samadel summa ja korrutise vahetuvuse ja ühenduvuse omadusel ja korrutise jaotuvusel liitmise suhtes. Valemi $(a+b) \cdot c = ac + bc$ ja sellest kergesti tuleneva, korrutise jaotuvust lahutamise suhtes väljendava valemi $(a-b) \cdot c = ac - bc$ täielikuks mõistmiseks aitab oluliselt kaasa sobivalt valitud aritmeetiliste ja geomeetriliste ülesannete vaatlemine, nagu seda on järgmised: «Igale õpilasele c õpilase hulgast anti esmalt a vihikut ja siis b vihikut; mitu vihikut jaotati õpilastele?» Ülesande kaks lahendusviisi annavad vastuseks kaks võrdset avaldist: $(a+b) \cdot c$ ja $ac + bc$. «Igale õpilasele c õpilase hulgast anname esmalt a vihikut ja siis igalt õpilaselt võtame tagasi b vihikut ($b < a$); mitu vihikut jäi klassi



Joon. 8.

õpilastele kokku?» Ülesande kaks lahendusviisi viivad võrdusele $(a-b)\cdot c = ac - bc$. «Kui suur pindala on kummalgi kahest viirutatud ristkülikust, mis on kujutatud joonisel 8?» Avaldades kummagi pindala kahel viisil, saame samad kaks valemit (esimese juhtumiks, kui arvud a, b ja c on positiivsed, teise juhtumiks, kui peale selle veel $a > b$).

Vaadeldes rida erinäiteid arvudega, mis ei rahulda neid tingimusi, veendume, et valemid $(a \pm b)\cdot c = ac \pm bc$ jäävad püsima ka muil juhtumeil. Kõigi võimalike juhtumite pedantne vaatlemine on liiga tülikas ja VI klassis ebakohane — tuleb piirduda kontrolliga üksikuil erijuhtumeil ning märkida, et on tõestatud nende valemite täielik kehtivus a, b ja c igasuguste väärtuste puhul, soovitades tugevamail õpilastel seda tõestust tundma õppida näiteks sel kujul, nagu see on antud raamatus [III, 2a] lk. 76—77.

Valemi $(a+b)\cdot(c+d) = ac + bc + ad + bd$ tuletamisele on vaja pühendada küllaldaselt tähelepanu ja vaadelda nii tema formaalset tuletamist, mis baseerub summa $a+b$ asendamisel ühe tähega s, kui ka kontrollimist arvude abil, võttes näiteks $a = 2$, $b = 0{,}5$, $c = 3$ ja $d = 0{,}25$, ja veel geomeetrilist illustratsiooni ristküliku pindala abil. Kui vahetuvuse, ühenduvuse ja jaotuvuse omadus lugeda tõestatuks kõigi arvude puhul, siis valemi summa korrutamisest summaga saab korraga mis tahes arvude jaoks, kuid siiski on kasulik eraldi vaadelda valemeid $(a+b)\cdot(c-d) = ac + bc - ad - bd$ ja $(a-b)\cdot(c-d) = ac - bc - ad + bd$. Pärast seda ei ole raske tuletada reegel mis tahes hulkliikme korrutamise kohta mis tahes üksliikme ja mis tahes hulkliikmega.

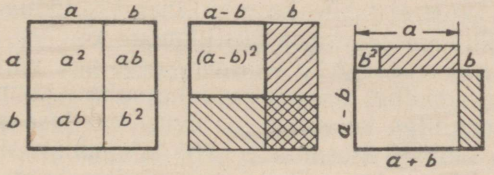
Hulkliikmete korrutamise tähtsamaks juhtumiks on ühe argumendi täisratsionaalsete funktsioonide korrutamine. Tegurid on soovitav korraldada argumendi («peatähe») alanevate või tõusvate astmete järjekorras ja korrutise liikmed kirjutada üksteise alla nii, et sarnased liikmed oleksid ühes tulbas.

Erilist tähelepanu nõuavad lühendatud korrutamise valemid, mis praktikas leiavad niivõrd sagedasti rakendamist, et neid on vaja kindlalt meeles pidada. Kuid ei ole õige nõuda nende meelespidamist kohe algusest peale: osaku õpilased igaüht neist vastavate hulkliikmete korrutamise teel tuletada, osaku igaüht neist sõnades väljendada ja lahendagu ülesandeid nende rakendamisele; siis nende meelespidamine toimub peaaegu alati iseendast. On kasulik saavutada seda, et iga ülesannet nende valemite rakendamisele osataks lahendada kahel viisil, esiteks kui ülesannet hulkliikmete korrutamisele ja teiseks kui ülesannet ühe lühendatud korrutamisvalemi kasutamisele. Nõudes esmalt kohustuslikku lahendamist mõlemal viisil ja jättes hiljem lahendusviisi valiku õiguse õpilastele, kindlustame kiiresti nende valemite meelespidamise.

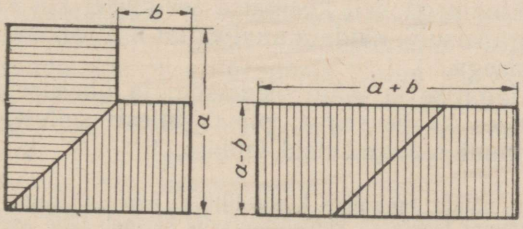
Suure väärtusega on lühendatud korrutamise valemite rakendamine aritmeetikas (programmis on mainitud nende rakendamist peastarvutamisel). Näiteks 29^2 arvutamist on kerge teostada vahe ruudu valemi järgi, nimelt $29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2\cdot 30\cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 941$, ja 29^3 arvuta-

mist — vahe kuubi valemi järgi, mis annab $30^3 - 3 \cdot 30^2 + 3 \cdot 30 - 1 = 24389$. Mõnikord on kasulik üht või teist neist valemeist kasutada mitte kui korrutamisvalemit, vaid «tagasikäiguks», s. o. kui tegureiks lahutamise valemit, ette valmistades järgnevat selle operatsiooni õppimist (näiteks selleks, et arvutada $37^2 - 13^2 = 50 \cdot 24 = 1200$).

Summa ruudu, vahe ruudu ja ruutude vahe valemi geomeetriline tõlgendus on näidatud joonisel 9. Selle omandamine aitab oluliselt kaasa valemite püsivaks meelespidamiseks, tehes peaaegu võimatuks vead, mida mõnikord teevad õpilased, kes unustavad kahekordse korrutisega liikmete olemasolu. Teine, lihtsam ruutude vahe valemi geomeetriline tõlgendus on näidatud joonisel 9a (seda soovitas prof. J. Depman). Mõnevõrra keerukam, kuid VI klassi õpilastele siiski ka jõukohane, on viimase nelja lühendatud korrutamise valemi geomeetriline tõlgendamine, mis nõuab siirdumist ruumi.



Joon. 9.



Joon. 9a.

Kõige tähelepanelikumalt on vaja suhtuda valemite sõnastuse täpsusse, eriti oskusse eristada vahe ruutu ja ruutude vahet, summa kuupi ja kuupide summat jne. Ei ole vaja nõuda õpikuis toodud sõnastuste sõnasõnalist meelespidamist, on isegi kasulik virgutada õigete variantide koostamist, kuid kõik erinevad ebatäpsused tuleb ära märkida ja parandada.

Lühendatud korrutamise valemite tundmaõppimine jätkub ka järgnevas kursuses: IX klassis geomeetriline progressioon viib samasusele $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \cdot (a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n)$, mida X klassis vaadeldakse uuesti ühenduses Bézout' teoreemiga, ja Newtoni binoomivalem annab kaksliikme ruudu ja kuubi valemi üldistuse mis tahes naturaalse astendaja puhuks.

Kokkuvõtete tegemisel on kasulik tarvitusele võtta terminid «ratsionaalne algebraline avaldis» ja «täisratsionaalne algebraline avaldis» ning sõnastada kaks tulemust: «iga täisratsionaalset algebralist avaldist saab esitada hulkliikme kujul» ja «iga täisratsionaalne algebraline avaldis omab mõtet temas esinevate tähtede igasuguste arvuliste väärtuste juures», või, mis on sama, «täisratsionaalse algebralise avaldise puhul on lubatavad temas esinevate tähtede igasugused väärtused».

§ 15. Üksliikmete ja hulkliikmete jagamine.

Teades ühe ning sama alusega astmete korrutamise valemit, on kerge saada valemit $a^n : a^k = a^{n-k}$, mis on õige eeldustel, et $a \neq 0$ ja $n > k$, ning selle kõrval valemi $a^n : a^n = 1$, mis on õige, kui $a \neq 0$ ja n on mis tahes arv (vaadeldakse ainult naturaalseid astendajaid). Ühe ning sama aluse astmete jagamise vaatlemise puhul, kui jagatava astendaja on vähem jagaja astendajast, lükkub edasi VII klassi. Raskust ei tekita ka mis tahes üksliikme jagamine üksliikmega. Hulkliikme jagamist üksliikmega on hea alustada valemite $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$ vaatlemisega, mis väljendavad jagamise jaotuvuse omadust summa ja vahe suhtes ja mida saab tõestada lihtsa kontrolliga korrutise jaotuvuse seaduse alusel või järgneva ülesande taoliste ülesannete kahe lahendusviisi vaatlemisega: mitu vihikut sai üldse iga õpilane, kui c õpilasele on jaotatud võrdselt a ruudulist vihikut ja b joonelist vihikut?

Jagamise õppimisel kõige suuremat raskust pakub hulkliikme jagamine hulkliikmega. Nii küsimuse seadmisel kui ka reegli tuletamisel on väga kasulik näidata analoogiat mitmekohaliste naturaalarvude jagamisega.

Küsimust jagatise ja jäägi olemasolu ja ühesuse kohta ei tule seitsmeklassilises koolis seada; piisab täiesti sellest, kui õpilased igal üksikjuhtumil oskavad neid leida.

On soovitav nõuda jagamise kontrollimist korrutamisega. Teine, vähem kindel, kuid kiiremini teostatav kontrollimisviis seisneb tähe asendamises mingi arvuga, mis ei muuda jagajat nulliks. Kui asendamisel saadud jagatava (a), jagaja (b), jagatise (c) ja jäägi (r) väärtus ei rahulda võrdust $a = bc + r$, siis tuleb otsida viga (kas jagamises endas või kontrollis). Selle võrduse saamine aga ei garanteeri veel vea puudumist, kuid annab tunnistust selle vähesest tõenäosusest.

Ei ole üleliigne hoiatada liiga pika aja kulutamise pärast «lühendatud jagamise» valemitele. Teistest tähtsamad on valemid kahe arvu ruutude ja kuupide vahe jagamisest nende arvude vahega ning kuupide summa jagamisest esimeste astmete summaga, kuid need on samad lühendatud korrutamise valemid, ainult teisiti kirjutatud. Teised kooli ülesannete kogus toodud valemid leiavad õige harva rakendamist ja vaevalt tasub neid meeles pidada. On täiesti võimalik piirduda oskusega neid tuletada iga kord, kui selleks on vajadus.

§ 16. Hulkliikmete lahutamine tegureiks.

VI klassi algebra kursuse viimast teemat — «Hulkliikmete lahutamist tegureiks» — loetakse paljude poolt seitsmeklassilise kooli kogu algebra kursuse raskeimaks küsimuseks.

Sel ajal kui ülesannete lahendamine algebra teiste teemade alal nõuab enamasti ainult mingi ühe võtte täpset teadmist, liikumist üht täiesti määratud teed mööda, leidub siin neid teid peaaegu alati mitu ja on vaja teha õige valik. Mitte asjata ei räägi kogenud matemaatika õpetajad, et hulkliikmete lahutamine tegureiks on kogu järgneva algebra kursuse võti.

Programm näeb ette kolme tegureiks lahutamisvõtte omandamist: ühise teguri sulgude ette toomist, rühmitamist, lühendatud korrutamise ja jagamise valemite rakendamist; omaette küsimuse moodustab täisarvuliste kordajatega ruutkolmliikme lahutamine lineaarseiks tegureiks. Paljud leiavad, et pärast ühise teguri sulgude ette toomise võtte vaatlemist tuleb käsitleda esmalt lühendatud korrutamise ja jagamise valemite rakendamist ja alles pärast seda üle minna rühmitamisvõtte juurde, sest sellest on raskeim jagu saada. Tõepoolest, ühe või teise valemi rakendamise võimaluse selgitamine teostub kergesti, näpunäite annab juba lihtne liikmete ülelugemine, kuid rühmitamist saab proovida teostada mitmel viisil, millest enamik midagi ei anna.

Hulkliikme tegureiks lahutamise küsimuse seadmisel on kasulik näidata analoogiat V klassist hästituntud naturaalarvude tegureiks lahutamise küsimusega, toonitades, et nii seal kui ka siin on eesmärgiks esmajoones murdude lihtsustamine. Kuigi algebraliste murdude taandamine on programmis viidud VII klassi, võib soovitada üksikute taandamisnäidete vaatlemist juba VI klassis kui vahendit tegureiks lahutamise teema mõtestamiseks selle klassi õpilaste juures. Koolialgebra üheks ülesandeks on otsida võtteid algebraliste avaldiste lihtsustamiseks, muutmata nende arvulist väärtust neis esinevate tähtede mis tahes väärtuse juures; seda mõtet on kasulik teostada, nagu juba nimetatud, algebra esimestest tundidest peale. Veendunud proovimise teel, et avaldis $(8x^3 - 36x^2 + 54x - 27):(4x^3 - 8x^2 - 3x + 9)$ annab tähe x igal väärtusel (mis erineb arvust -1 ja arvust $+1{,}5$) sama arvulise väärtuse, mis avaldis $(2x - 3):(x + 1)$, on loomulik seada küsimus selle kohta, kuidas esimesest avaldisest saab teine.

Väärib märkimist, et ratsionaalse murru taandamise küsimust on võimalik lahendada ka lugeja ja nimetaja tegureiks lahutamiseta: kahe hulkliikme suurima ühisjagaja saab leida ka ainult rea jagamisi teostades (Eukleidese algoritm!).

Pärast kolme põhivõtte tundmaõppimist asutakse lahendama ülesandeid nende võtete kombineeritud rakendamisele. On soovitav kinni pidada järgmisest korrast: soovides antud hulkliikme tegureiks lahutada, tuleb selgitada kõigepealt, kas selle kõigil liikmeil leidub ühine tegur, ja tuua see sulgude ette, kui ta leidub; edasi

tehakse kindlaks, kas sulgudesse jäänud avaldise suhtes saaks rakendada mingit lühendatud korrutamise ja jagamise valemit, ning pärast seda algab liikmete kombineerimine (rühmitamine), mida saab teha mitmeti. Ruutkolmliikme lahutamisel lineaarseiks tegureiks tuleb rakendada neljandat põhivõtet: ühe liikme asendamist kahe, temaga sarnase liikme summa või vahega, nagu näiteks tegureiks lahutamisel: $4x^2 + 16x + 15 = 4x^2 + 6x + 10x + 15 = 2x(2x + 3) + 5(2x + 3) = (2x + 3)(2x + 5)$ või $4x^2 - 4x - 15 = 4x^2 + 6x - 10x - 15 = 2x(2x + 3) - 5(2x + 3) = (2x + 3)(2x - 5)$. Õpilastele on tarvis rea näidete varal selgeks teha, et välja arvatud lihtsaimad juhtumid, kus lahutamisviis otsekohe nähtub antud hulkliikme kujust, on vaja süstemaatiliselt katsetada. Lahendades nii hulkliikme $a^2b^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 4abcd$ tegureiks lahutamise ülesannet, õnnestub alles pärast rida ebaõnnestunud rühmituskatseid sattuda õigele mõttele ühendada rühmitamist liikme $-4abcd$ asendamisega kahe liikmega, millest kumbki on $-2abcd$, ja niiviisi antud hulkliige teisendada kahe ruudu vaheks.

Sageli esineb ülesandeid hulkliikme tegureiks lahutamisele, mis on rasked mitte ainult õpilastele, vaid ka õpetajale. Et neid lahendada, on kasulik meelde tuletada mõnd kõrgema algebra lauset. Reaalsete kordajatega ühe argumendi täisratsionaalne funktsioon on, nagu teada, alati lahutatav niisamuti reaalsete kordajatega lineaarseiks ja teiseastmelisiks tegureiks, kuid ratsionaalsete kordajatega funktsioonil, millega ju ainult on tegemist seitsmeklassilises koolis, need lineaarsed ja teiseastmelised tegurid kaugeltki ei ole alati ratsionaalsete kordajatega (kuid kui täisarvuliste kordajatega funktsioon lahutub murruliste kordajatega tegureiks, siis ta lahutub ka täisarvuliste kordajatega tegureiks). Näiteks $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$, kuid avaldist $x^4 + 1$ juba ei ole võimalik esitada ratsionaalsete kordajatega hulkliikmete korrutisena: $x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$. Kahe ja enama argumendi täisratsionaalset funktsiooni pole kaugeltki alati võimalik lahutada tegureiks. Kahe argumendi teise astme funktsiooni puhul (lineaarseiks) tegureiks lahutamise võimaluse tingimus ei ole midagi muud, kui vastava koonuslõike sirgete paariks kõdumise tunnus. Võttes näiteks korrutise $(2x - 3y + 1)(x + 2y - 3) = 2x^2 + xy - y^2 - 5x + 11y - 3$, võib tugevamaile õpilastele anda ülesandeks lahutada see hulkliige täisarvuliste kordajatega lineaarseiks tegureiks. Hulkliikme $2x^2 + xy - 6y^2 - 5x + 11y - 1$ suhtes tuleb küsimus seada teisiti: lahutada see hulkliige täisarvuliste kordajatega lineaarseiks tegureiks või tõestada, et niisugune lahutamine ei ole võimalik (siin tuleb kasutada määramata kordajate meetodit).

Tegeldes hulkliikmete lahutamisega tegureiks on eriti kerge välja valida rühm matemaatikas andekamaid ja sellest enam huvitatud õpilasi ning anda neile järgmisekujulisi lisaülesandeid: tõestada, et $(a^4 - 1)$-kujuline arv, kus a on naturaalarv, mis ei jagu 2 ega 3-ga, jagub alati 24-ga; tõestada, et iga $(a^4 + 4)$-kujuline arv, kus a on ühest suurem naturaalarv, on alati kordarv jne.

§ 17. Algebralised murrud.

Murdratsionaalsete algebraliste avaldiste teisendamisele pühendatakse VII klassi kursuses õige palju aega. Kuigi selle peatüki ideeline sisu on õige kasin ega paku oma olemuselt midagi uut võrreldes V klassis õpitud teemaga «Aritmeetilised murrud», tuleb

püsiva algebraliste murdude teisendamisoskuse kätteõpetamiseks reserveerida õige palju tunde; raskused ja vead eksameil neis teisendustes näitavad, et sellele küsimusele tuleb pöörata enam tähelepanu.

Õppides aritmeetikat V klassis, lähtuvad õpilased näitlikust kujutlusest: seal murd on ainult mingisuguse, ühikuks võetud suuruse võrdsete osade teatud hulk. Katkestada sidet selle näitliku kujutlusega ei tohi kunagi: murd $\frac{a}{b}$ jääb esmajoones ikka üldkujuliseks kirjutiseks suurusele, mis saadakse mingi teise suuruse b võrdseks osaks jaotamise ja a niisuguse osa summeerimise tulemusena. Kuid juba VII klassi õpilased peavad mõistma, et algebralise murru $\frac{a}{b}$ tähendus on laiem: see on eri kirjutusviis jagatisele, mis saadakse täiesti meelevaldse, tähega a tähistatud arvu jagamisel teise, juba mitte täiesti meelevaldse arvuga b (see ei saa omada väärtust, mis on võrdne nulliga). Ühenduses sellega tuleb tehete kohta käivate reeglite tuletamine rajada algebraliste murdude puhul mitte niivõrd ühiku osade, näiteks lõigu võrdsete osade või ringi võrdsete sektorite kohta käivate mitmesuguste küsimuste vaatlemisele, vaid tehete kohta käivaile seadustele, esmajoones jagatise omadustele. Ei tohi aritmeetikast eemalduda, vaid tuleb hoolitseda, et õpilased täiesti mõistaksid algebra ja aritmeetika väga tihedat sidet, kuid peab saavutama ka seda aritmeetiliste definitsioonide, teoreemide ja reeglite üldistuse mõistmist, millega on tegemist algebras. Algebraliste murdude tundmaõppimisel nihkuvad esiplaanile jagatise omaduste kohta käivad laused. Näiteks selleks, et õigustada ühenimeliste murdude liitmise reeglit, konstateerime, et jagatisel on liitmise suhtes jaotuvuse omadus, mis väljendub valemiga $(a+b):c=a:c+b:c$, ja, vahetanud võrduse pooled, saame vajaliku valemi.

Märgime mõned detailid tööst algebraliste murdudega.

1. Enamikul juhtumeil on murdratsionaalse algebralise avaldise teisendamise eesmärgiks selle esitamine taandamatu murruna, mille lugeja ja nimetaja on täisratsionaalsed avaldised. Kuid mitte alati ei ole see kuju kõige sobivam. Olgu näiteks vaja arvutada avaldise $y=\frac{3x+7}{x+2}$ väärtused rea x-i väärtuste juures (mis erinevad arvust -2). Siin on kasulikum esitada parem pool kujul $3+\frac{1}{x+2}$; siis y-i väärtuste arvutamine toimub pöördarvude tabeli olemasolu korral ilma igasuguse kirjaliku arvutuseta. Veel üks näide: olgu vaja leida tähe n need naturaalsed väärtused, mille puhul murrul $\frac{3n^2-3n+20}{n-1}$ on täisarvuline väärtus. Esitades selle kujul $3n+\frac{20}{n-1}$, saame ammendava vastuse: $n=2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 11;\ 21$.

2. Mõnikord saab murdratsionaalsele algebralisele avaldisele anda tavalise lihtsaima kuju mitmeti. On kasulik proovida teisendamisi mitmel viisil ja leida nende hulgast parim. See kehtib nii lihtsamate küsimuste korral, nagu näiteks lihtsaima kuju andmine «mitmekorruselistele» murdudele, kus kõige kasulikum on rakendada jagatava ja jagaja korrutamist nimetajate vähima ühiskordsega

kui ka raskete ülesannete korral, mida suures valikus leidub ülesannete kogudes [III, 24, 25].

3. Pärast antud avaldisele lihtsaima kuju andmist on soovitav õpilastelt nõuda selle kontrollimist antud avaldise ja teisendatud avaldise arvuliste väärtuste arvutamise teel tähtede mingisuguste sobivate väärtuste korral, märkides ühtlasi sellise kontrolli ebatäiuslikkust.

4. On kaks viga, mida õpilased teevad tehteis murdudega eriti sagedasti. Esimene seisneb murru lubamatus taandamises lugeja ja nimetaja üksiku liikmega, nagu näiteks $\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{1+1}{a-b}=\frac{2}{a-b}$, teine — ebaõige märgi panekus pärast murdude algebralise summa viimist ühisele nimetajale, nagu näiteks $\frac{a}{b^2-c^2}-\frac{b}{ab+ac}=\frac{a^2-b^2-bc}{a(b^2-c^2)}$, kus üheaegselt teostatakse kaks tehet, nimelt korrutamine ja lahutamine. Neid vigu tuleb ära hoida, püüdes saavutada taandamise õiget mõistmist ja rõhutades (esialgu) iga tehte eraldi teostamise vajadust: parem on teisendatav avaldis liigne kord ümber kirjutada, kindlustades sellega tulemuse õigsuse.

IV peatükk.

ESIMESE ASTME VÕRRANDID JA NENDE SÜSTEEMID.

§ 18. Võrrandite ja nende süsteemide elementaarne teooria.

Siirdudes võrrandite juurde, märgime mõned mõisted ja laused, mida õpetaja ise peab kindlalt teadma.

«Iga võrdust, milles üks tähega väljendatud arv loetakse tundmatuks, teiste tähtede väärtused aga (kui neid teisi leidub) loetakse tuntuks, nimetatakse ühe tundmatuga võrrandiks. Tundmatut arvu nimetatakse lühidalt lihtsalt tundmatuks. Tundmatut tähistatakse ühe tundmatuga võrrandis kõige sagedamini tähega x.»

See definitsioon, mis sisaldub uues algebra õpikus [III, 2a] ja mis on täiesti jõukohane seitsmeklassilise kooli õpilastele, säilitab kehtivuse ka kogu järgneva algebra kursuse jooksul. Märgime, et ta eeldab, et on antud, esiteks, kaks algebralist avaldist, millest vähemalt üks sisaldab tähe x, s. t. on antud argumendi x kaks funktsiooni $f_1(x)$ ja $f_2(x)$, ja teiseks mingi arvuhulk M, millest tuleb võtta x-i väärtus («x-i lubatavate väärtuste» hulk). Kursuse kestel VI—X klassini nende funktsioonide kuju muutub, muutub ka arvuhulk M. Seitsmeklassilises koolis vaadeldakse ainult ratsionaalsete kordajatega ratsionaalseid funktsioone ja lubatavate väärtuste hulgaks M on üldiselt ratsionaalarvude korpus. Kuid üksikuil juhtumeil lubatavate väärtuste hulk M kitsendub. Kui näiteks lahendatakse võrrandit $x:(x-3)=7$, siis lubatavaiks väärtusteks on kõik ratsionaalarvud, välja arvatud 3, sest $x=3$ puhul võrrandi vasaku poole moodustav funktsioon kaotab mõtte. Kui võrrand on koostatud ülesande tingimuse põhjal, kusjuures otsitavaks on mingi inimeste arv, siis tundmatu lubatavaiks väärtusteks on ainult naturaalarvud ja arv null. VIII ja IX klassis on hulgaks M reaalarvude korpus (või selle mingi osa) ja X klassis kompleksarvude korpus (või selle mingi osa).

Ühe tundmatuga võrrandi lahendiks ehk juureks nimetatakse iga niisugust arvu, millega tundmatut asendades saavad mõlemad funktsioonid $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ ühe ja sama väärtuse. Lahendada võrrand tähendab leida tema kõik lahendid või veenduda, et tal neid ei ole; tähistades lahendite kogu tähega S, võime ütelda, et võrrand $f_1(x) = f_2(x)$ eraldab kõigi lubatavate väärtuste hulgast M seda võrrandit rahuldavate x väärtuste alahulga S. Seejuures võib esineda üks kolmest juhtumist: a) hulk S langeb ühte hulgaga M, nagu näiteks võrrandi $x + x = 2x$ või võrrandi $(x^2 - 1) : (x - 1) = x + 1$ puhul; niisuguseid võrrandeid nimetatakse samasusteks; b) hulk S on hulga M mingi pärisosa, nagu näiteks võrrandi $x(x - 1)(x - 2) = 0$ puhul, kus S koosneb kolmest arvust: 0,1 ja 2, või võrrandi $|x| = x$ puhul, kus S on kõigi mittenegatiivsete arvude hulk (see on õige ka sel puhul, kui vaadeldakse kompleksarvude korpust M); c) hulk S on tühi, s. t. ei leidu ühtki x väärtust, mis võrrandit rahuldaks, nagu näiteks võrrandi $x = x + 1$ puhul või võrrandite $+\sqrt{x} = -1$ ja $x : |x| = 2$ puhul.

Eriti on vaja toonitada lubatavate väärtuste hulga M nimetamise tähtsust; ilma selle nimetamiseta ei oma võrrandi lahendite küsimus täiesti määratud mõtet. Näiteks võrrandil $x^2 + 1 = 0$, millel ratsionaalarvude korpuses ja reaalarvude korpuses ei leidu lahendeid, on kompleksarvude korpuses kaks lahendit: $+i$ ja $-i$; võrrandil $|x| = 1$ on reaalarvude korpuses kaks lahendit ja kompleksarvude korpuses lõpmatu hulk lahendeid (lahendiks on iga kompleksarv, mille kuju on $\cos\alpha + i \sin\alpha$, kus α on mis tahes reaalarv).

Vaade tähelistele samasustele kui võrrandite eriliigile ei ole üldiselt omaks võetud. Kisseljovi algebra õpik jaotab kõik tähelised võrdused võrranditeks ja samasusteks, vastandades neid teineteisele; sama leiab aset ka artiklis [III, 3], kuid uutes algebra õpikutes [III, 2a, 33a] vaadeldakse samasusi võrrandite eriliigina. Suurt tähtsust sel vastuolul ei ole, kuid teine vaateviis pakub mõned eelised, ja järgnevas peame kinni sellest.

Kaht võrrandit nimetatakse samaväärseiks ehk ekvivalentseiks, kui neil on ühed ja samad lahendid, s. t. kui esimese võrrandi iga lahend on ühtlasi teise lahendiks ja teise võrrandi iga lahend on ühtlasi esimese lahendiks. Teist võrrandit nimetatakse esimese järelduseks ehk sellest tuletatuks, kui teda rahuldavad kõik esimese lahendid; kui tal ei ole mingeid muid lahendeid, siis võrrandid on samaväärsed ja esimene on omakorda järeldus teisest; kuid teisel võrrandil võib leiduda veel muid lahendeid, «võõrlahendeid», ja siis ta, olles küll esimese järelduseks, ei ole sellega samaväärne. Teatud teoreemid võrrandite omadustest ütlevad, et kui võrrandi mõlema poolega liita üks ja sama arv või funktsioon $f_3(x)$, mis omab mõtet x-i kõigi lubatavate väärtuste puhul, või kui võrrandi mõlemad pooled korrutada arvuga, mis erineb nullist, siis saadakse uus võrrand, mis on antuga samaväärne. Kuid võrrandi mõlema poole korrutamine funktsiooniga $f_3(x)$, mis omab mõtet x-i kõigi lubatavate väärtuste puhul, annab uue võrrandi, mis kujutab endast

ainult antud võrrandi järeldust: omades kõiki antud võrrandi lahendeid, võib ta omada veel võõrlahendeid, nimelt võrrandi $f_3(x) = 0$ lahendeid. Võõrlahendid tekivad ka võrrandi poolte astendamisel mingi arvuga: näiteks võrrand $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ on järelduseks võrrandist $f_1(x) = f_2(x)$, kuid peale selle lahendite omab veel võrrandi $f_1(x) = -f_2(x)$ lahendeid.

Võrrandi lahendamise protsess seisneb tavaliselt tema asendamises järjest lihtsamate ja lihtsamate samaväärsete võrrandite ahelaga, kuni lõpuks jõutakse ühe või mitme võrrandini kujuga $x = x_1$, $x = x_2 \ldots$ Sageli tuleb samaväärsust rikkuda, teostades teisendusi, mis annavad antud võrrandist järelduva, kuid sellega mittesamaväärse võrrandi, nii et on võimalik võõrlahendite tekkimine. See ei kujuta endast hädaohtu, kuid kohustab kõiki leitud lahendeid kontrollima nende asetamisega antud võrrandisse. Teisendused, mis on seotud lahendite kadumise võimalusega, on lubamatud, nagu näiteks võrrandi $f_1(x)f_3(x) = f_2(x)f_3(x)$ mõlema poole jagamine ühise teguriga $f_3(x)$ või võrrandi mõlema poole juurimine ühe ja sama arvuga. Jagamise asemele avaldisega $f_3(x)$ tuleb rakendada korrutise $f_2(x)f_3(x)$ üleviimist vasakule ja tegureiks lahutamist, millega saadakse võrrandipaar $f_1(x) = f_2(x)$ ja $f_3(x) = 0$, mis on samaväärne antud ühe võrrandiga: antud võrrandi iga lahend on lahendiks vähemalt ühel võrrandil neist kahest ja neist kahest kummagi võrrandi iga lahend on antud võrrandi lahendiks. Täpselt samuti asendub võrrand $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ pärast funktsiooni $f_2^2(x)$ üleviimist vasakule ja tegureiks lahutamist temaga samaväärse võrrandipaariga $f_1(x) + f_2(x) = 0$ ja $f_1(x) - f_2(x) = 0$.

Võib juhtuda, et võrrandi $f_1(x) = f_2(x)$ mõlemal poolel on üks ja sama piirväärtus juhtumil, kui $x \to a$, kuid $x = a$ korral vähemalt üks funktsioonidest $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ ei ole defineeritud. Siin on loomulik neid funktsioone täiendavalt defineerida, võttes $f_1(a) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x)$ ja $f_2(a) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$. Siis arv a tuleb lugeda antud võrrandi lahendiks. Niisugune olukord on näiteks võrrandiga $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ ja võrrandiga $\frac{\sin x}{x} = 1$. Defineerides täiendavalt esimese võrrandi vasakut poolt tingimusega, lugeda $x = 1$ korral murd $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ võrdseks tema piirväärtusega puhul, kui $x \to 1$, s. o. arvuga 2, ja murd $\frac{\sin x}{x}$ võrdseks arvuga 1, kui $x = 0$, saame võimaluse vaadelda arve 1 ja 0 vastavalt esimese ja teise võrrandi lahendina. Selliseid lahendeid nimetatakse mõnikord «päratuteks», nagu näiteks artiklis [III, 8], kuid seda terminit tuleks kasutada ainult argumentide lõpmatute väärtuste kohta, mis mõnikord ka tuleb lugeda võrrandi lahendeiks, nagu näiteks võrrandi $\frac{x+1}{x} = 1$ puhul, kus vasakul poolel on $x \to \pm \infty$ korral piirväärtuseks 1, mis on võrdne

parema poolega, nii et võib ütelda, et sellel võrrandil on «päratu» lahend $x = \pm\infty$.

Eriti teravaks kujuneb võrrandi vasakut ja paremat poolt moodustavate funktsioonide täiendava defineerimise küsimus trigonomeetriliste võrrandite lahendamisel, ja selle juurde pöördume veel § 32 tagasi. Seitsmeklassilises koolis seda küsimust ei teki, sest kõigil ratsionaalsete funktsioonide pidevuse kõrvaldatavail katkemisjuhtumeil siin vajalik täiendav defineerimine toimub iseenesest, kui nõuda, nagu seda tavaliselt ka tehakse, et funktsioonidele ikka antaks kanooniline kuju. Murd $\frac{x^2-1}{x-1}$, mis moodustab esimese ülalantud võrrandi vasaku poole, tuleb taandada ja asendada avaldisega $x+1$, ja mingit raskust siin VII klassi õpilastel ei tule.

Ühe tundmatuga võrrandilt on kerge üle minna kahe tundmatuga võrrandile $f_1(x, y) = f_2(x, y)$. Siin on meil niisamuti tegemist kahe funktsiooni võrdsusega, kuid mitte ühe, vaid kahe argumendi funktsioonidega, ja nende argumentide lubatavate väärtuspaaride hulgaga M. Võrrand eraldab hulgast M seda võrrandit rahuldavate x ja y väärtuspaaride teatava alahulga S. Siin võivad jällegi esineda needsamad kolm juhtumit, mis esinesid ühe tundmatuga võrrandi lahendamisel: hulk S võib ühte langeda hulgaga M, võib olla hulga M pärisosa, võib olla tühi. Näiteks võrrand $(x^2 - y^2) : (x - y) = x + y$ on samasusvõrrand (M ja S on siin kõigi mittevõrdseist arvudest koosnevate paaride hulk); võrrandi $x - y = 0$ puhul M on kõigi võimalike arvupaaride hulk ja S on kõigi võrdseist arvudest koosnevate paaride hulk; võrrand $x^2 + y^2 = -1$ reaalarvude korpuses lahendeid ei oma (kuid kompleksarvude korpuses omab lõpmatu hulga lahendeid).

Analoogiline on olukord võrrandiga, millel on mis tahes arv tundmatuid.

Vaadeldes kahe võrrandi süsteemi kahe tundmatuga $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ ja $g_1(x, y) = g_2(x, y)$, s. t. lugedes, et kummalgi tundmatuist x ja y on mõlemas võrrandis üks ja sama väärtus, saame x ja y lubatavate väärtuspaaride hulgaks M ja süsteemi lahendite hulgaks S nende eraldi võetud võrrandite vastavate hulkade lõike (ühisosa). Näiteks süsteemi $2x - y = 0$, $y = 6 + 8 : x$ puhul hulk M koosneb kõigist arvude x ja y paaridest, välja arvatud need, kus $x = 0$, ja hulk S koosneb ainult kahest paarist: $x_1 = 4$, $y_1 = 8$ ja $x_2 = -1$, $y_2 = -2$. Kui vaadelda ainult reaalarve, siis süsteemi $2x + y = 0$, $y = 6 + 8 : x$ puhul hulk S on tühi: sellel süsteemil reaalarvude korpuses lahendeid ei ole, ta on vastuoluline (kuid kompleksarvude korpuses on tal kaks lahendit). Niisuguste süsteemide lahendamist reaalarvude korpuses saab teha täiesti näitlikuks, kui kujutada arvupaar x, y punktina, mille Cartesiuse koordinaadid on x ja y, ja kasutada neid geomeetrilisi kujundeid, mis on määratud antud võrranditega.

Kaks võrrandisüsteemi on samaväärsed, kui esimese süsteemi kõik lahendid (juurte süsteemid) rahuldavad teist ja teise kõik

lahendid rahuldavad esimest. Teine süsteem on esimese järelduseks ehk sellest tuletatud, kui esimene neist tingimustest on täidetud. Näiteks süsteemi puhul $f_1(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$, $f_2 = x - y = 0$, $f_3 = y - z = 0$ süsteem $g_1 = f_1 + 2f_2 + 2f_3 = 3x + y - z = 3$, $g_2 = f_1 - f_2 + f_3 = 3y - 3 = 0$, $g_3 = 2f_1 + f_2 + 3f_3 = 3x + 4y - z - 6 = 0$, mille saab esimese süsteemi võrrandite lineaarse kombineerimise teel, on antud süsteemi järelduseks, sest iga arvukolmik x, y, z, mis muudab nulliks igaühe kolmest funktsioonist f_1, f_2 ja f_3, muudab nulliks ka igaühe kolmest funktsioonist g_1, g_2 ja g_3, kuid need kaks süsteemi ei ole samaväärsed: esimest süsteemi rahuldab ainult üks arvukolmik $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ (võrrandid $f_2 = 0$ ja $f_3 = 0$ näitavad, et $x = y = z$ ja võrrand $f_1 = 0$ ütleb, et $x + y + z = 3x = 3$), kuna teisel süsteemil leidub lõpmatu hulk lahendeid: $x = t$, $y = 1$, $z = 3t - 2$, kus t on mis tahes arv.

Teostades antud süsteemi võrranditega mitmesuguseid operatsioone, näiteks kombineerides neil lineaarselt, saame uue, tavaliselt lihtsama süsteemi, kuid alati peame selgitama, kas ta on antud süsteemiga samaväärne. Enamasti see uus süsteem on esimese järeldus, kuid kaugeltki mitte alati temaga samaväärne. Juba lihtsamate kahe ja kolme tundmatuga esimese astme võrrandisüsteemide lahendamisel ei ole harvad sellise mittesamaväärsuse juhtumid, mis detailsele käsitlusele kuuluvad X klassis, kuid arvestada tuleb neid juba VII klassis.

Piirdudes nende väheste, õpetajale väga tarvilike teadmistega võrrandeist lisaks sellele, mis leidub kooliõpikuis, soovitame järgnevate üksikasjadega tutvumiseks pöörduda artikli [III, 3] ja raamatute [III, 9] ning [III, 33a] poole. Kõige paremini õnnestunud võrrandite küsimuse käsitlus, mis on jõukohane seitsmeklassilise kooli õpilastele, on antud õpikus [III, 2a].

§ 19. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandite lahendamine ja ülesanded nende koostamisele.

VI klassi algebra programmi on lülitatud kaks punkti, millel on õige oluline mõju võrranditega töötamise edule: «Lihtsamate võrrandite lahendamine aritmeetiliste tehete definitsioonide ja omaduste alusel ja ülesannete lahendamine võrrandi koostamisega» (teema 1); «Lihtsamate võrrandite lahendamine aritmeetiliste tehete definitsioonide ja omaduste alusel relatiivsete arvude vallas» (teema 2). VII klassis tegelevad õpilased võrranditega nende teatava elementaarse teooria alusel, ja see nende töö kulgeb alati tunduvalt edukamalt, kui nad VI klassis on juba omandanud lihtsamate võrrandite koostamise ja lahendamise harjumused. Üht lihtsat liiki võrranditega on õpilastel tegemist ka võrrete tundmaõppimisel, millega tegeldakse nii VI klassis aritmeetika kursuses kui ka VII klassis algebra kursuses. Niisiis siirdudes teema juurde

«Esimese astme võrrandid ühe tundmatuga», millele programm reserveerib VII klassis 30 tundi, on õpilastel juba olemas kujutlus lihtsamaist võrrandeist, oskavad neid koostada ülesande tingimuste põhjal ja oskavad neid lahendada.

Seda teemat alustatakse teoreetiliste teadmiste teatava miinimumi andmisega. Antakse definitsioonid terminitele «võrrand» ja «Võrrandi lahend», selgitatakse, mida tähendab lahendada võrrand ja kuidas saab võrrandit teisendada, nii et tema lahendid ei muutuks, kuid ta ise muutuks lihtsamaks. Termini «samaväärsed võrrandid» võib esialgu jätta tarvitusele võtmata (Aleksandrovi ja Kolmogorovi raamatus ilmub see termin alles pärast üleminekut võrrandisüsteemide juurde); väljend «võrrandid ühesuguste lahenditega» omab esialgu eeliseid võrreldes väljendiga «samaväärsed võrrandid». Kisseljovi õpikus antud kahe võrrandite omadusi käsitleva teoreemi tõestuse omandamine kutsub alati esile raskusi. Hoopis paremini on õnnestunud nende tõestus Aleksandrovi ja Kolmogorovi raamatus.

Väga tähtis on kujundada päris algusest peale õige vaade võrrandile kui küsimusele selle kohta, kas leidub arve, mis teda rahuldavad, mitte aga kui mingile väitele. Õpilased peavad mõistma, et võrrandil $x = x + 1$ ei ole lahendeid, mitte aga ütlema, et see võrrand ei ole õige. Näiteid, nagu $x^2 + 1 = 0$ on esialgu parem vältida: lahendite puudumise tingimusteta väitmine ei ole siin soovitav, sest pärast üleminekut kompleksarvude juurde tuleb sellest lahti ütelda, aga jutt sellest, et lahendeid ei leidu VII klassi õpilastele tuntud ratsionaalarvude hulgas, kuid neid leidub teiste, praegu neile alles tundmatute arvude hulgas, on parem edasi lükata vähemalt kuni üldise kordamiseni. Väga kasulik on saavutada seda, et selgesti mõistetaks vahet võrrandi samasusteisenduse vahel, kus võrrandi kumbki pool asendatakse temaga samaselt võrdse avaldisega, ja tema teisendamise vahel samaväärsuse alusel, kus kogu võrrand asendatakse teise, temaga samaväärse võrrandiga, mille kumbki pool juba ei ole samaselt võrdne sellega, mis oli enne. Tähelepanelik suhtumine sellesse detaili kõrvaldab täielikult seda laadi vead, nagu sageli tehakse, kui võrrandi üks pool viiakse ühisele nimetajale ja nimetaja jäetakse ära, säilitades teise poole muutmatuna.

Väga sagedased on juhtumid, kus õpetaja ruttab üleminekuga võrrandite lahendamise harjutamise juurde, kokku mätsides sellegi vähese teooria, mis peab harjutustele eelnema. Selle teooria päris teadlik omandamine on täiesti tarvilik ja kergesti saavutatav, kui nõuda (vähemalt esialgu) lahenduse iga sammu põhjendamist. Õpilased peavad näiteks selgesti mõistma, et üleminek võrrandi $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 10$ juurest võrrandi $\frac{5}{6}x = 10$ juurde toimub samasusteisenduse alusel, kuid üleminek selle teise võrrandi juurest võrrandi $5x = 60$ ja siis võrrandi $x = 12$ juurde kujutab endast ühe võrrandi asendamist teise, temaga samaväärse võrrandiga, kusjuures mõle-

mal korral kasutatakse teoreemi võrrandi poolte korrutamisest arvuga, mis erineb nullist («võrrandi teine omadus»).

Õiget arusaamist võrrandeist kui küsimusest teda rahuldavate tundmatu väärtuste olemasolu kohta soodustab tublisti leitud lahendi alatine kontrollimine selle asetamise teel võrrandi pooltesse. Ülesannete kogusse paigutatud vastuste kasutamine kiirendab kontrollimist, kuid vastustele tuleb vaadata kui teatavale tehnilisele abile, mis võib olla, võib ka mitte olla, ja seepärast peab oskama läbi saada ka ilma selleta. Kuid tähtede asendamine arvuliste väärtustega on omaette väärtusega ülesanne, mille juurde tagasipöördumise võimalusi ei tuleks hüljata (koos peast arvutamise võtete ja mitmesuguste arvutamise abivahendite kasutamisega).

Võrrandeile pühendatud raamatuis ja artikleis osutatakse õige palju tähelepanu küsimusele võrrandi näitlikust kujutamisest piltide, kaalude jne. abil (vt. näiteks [III, 5] lk. 39—44). Keskkoolis vaevalt on vajadust seda liiki näitlike vahendite järele, kuid õpetaja peab nende olemasolust siiski teadma, et vajaduse korral neid kasutada. Võib juhtuda näiteks, et mõni õpilane kuidagi ei mõista märgi muutmise vajadust liikme üleviimisel võrrandi ühelt poolelt teisele, kuid pärast plokiga kaalu näitamist või lihtsalt joonisega segitatud jutustust sellisest kaalust muutub kõik selgeks.

Küsimus sellest, missugust võrrandi lahenduse üleskirjutust tuleb soovitada õpilastele, ei ole tähtsusetu. Esialgu tuleb rõhutada üksikasjalikku üleskirjutust koos kogu võrrandi ümberkirjutamisega, mis tunduvalt soodustab küsimuse teoreetilise külje selgumist. Kui võrrandi üks pool ei vaja teisendamist, siis teda ei tarvitse ümber kirjutada, vaid võib tegelda teise poolega eraldi (siin on täiesti sobiv reaskirjutus). Näidislahendus võiks olla järgmine:

$$\frac{8-x}{6}-\frac{5-4x}{3}=\frac{x+6}{2}$$

$$\frac{8-x-(5-4x)\cdot 2}{6}=\frac{(x+6)\cdot 3}{6}$$

$$8-x-10+8x=3x+18$$

$$-x+8x-3x=18-8+10$$

$$4x=20$$

$$x=5$$

Kontroll:

vasak pool $\frac{8-5}{6}-$

$-\frac{5-20}{3}=\frac{1}{2}+5=5\frac{1}{2}$

parem pool $\frac{5+6}{2}=5\frac{1}{2}$

Väga soovitav on, et õpilased hästi mõistaksid kirjutuse mitmesuguste variantide võimalust ja lahenduskäigus ise leiaksid endale sobivama. Näiteks eelistavad mitmed mitte viia kõik murrud ühisele nimetajale, mis hiljem jäetakse ära, vaid kohe korrutada võrrand liikmeti nimetajate vähima ühiskordsega, antud näites arvuga 6; teine ülalpool kirjutatud rida langeb siis välja, kuid tekib tõsine vea hädaoht vasaku poole viimase liikme märgis: $+8x$ asemele kirjutatakse $-8x$. Võitluse huvides sedalaadi vigadega, mis algajate juures on õige levinud, tuleb iga lahendusprotsessi lihtsusta-

mist, eriti kahe ja enama operatsiooni korraga teostamist rakendada suure ettevaatusega. Nõrk ja kärmas õpilane läheb väga meeleldi kirjutuse lühendamise teed, püüdes teostada mõned operatsioonid peast ja eksides seejuures sageli, mistõttu temalt tuleb alati nõuda täielikku üleskirjutust, et saavutada veatu arvutamine.

Ei ole kahtlust, et valmis võrrandite lahendamine läheb õpilastel tunduvalt kergemini kui ülesannete lahendamine võrrandite koostamisega, ja see on ka täiesti loomulik: valmis võrrandi lahendamine toimub kindla reegli järgi, tunduval määral automaatselt, sellal kui võrrandi koostamine nõuab alati teatavat iseseisvat mõttetööd (kooskõlas eespool antud klassifikatsiooniga on üks harjutusülesanne ja teine kalkulatsioonülesanne).

Kuid see-eest on ka kasu võrrandi abil ülesannete lahendamise oskusest vaieldamatult palju suurem kui oskusest lahendada valmis võrrandeid, sest enamik algebra praktilisi rakendusi viib kõige mitmekesisemate küsimuste lahendamisele võrrandite meetodil. Võrrandite koostamisele ja järgnevale lahendamisele tuleb reserveerida mitte vähem kui pool kogu ajast, mis nähakse ette võrrandite tundmaõppimiseks. Eriti tähtis on otstarbekohane, mitmekülgse sisuga ja järk-järgult kasvava raskusega ülesannete valik.

Iseseisvaks lahendamiseks antavad ülesanded peavad esialgu olema enam või vähem analoogilised nendega, mis lahendati klassis õpetaja juhatusel. Koostanud ülesande tingimuste põhjal võrrandi ja lahendanud selle, tuleb vastuse õigsust kontrollida mitte lihtsalt tundmatu asendamisel leitud lahendiga võrrandi mõlemas pooles, vaid tingimata selgitada, kas ta rahuldab ülesande tingimusi: võib ju juhtuda, et võrrand on õigesti lahendatud, kuid ebaõigesti koostatud. Töö muutmiseks elavamaks ja huvi tõstmiseks selle vastu aitavad oluliselt kaasa naaberaladelt (aritmeetika, geomeetria ja füüsika) valitud mitmesugused ülesanded võrrandi koostamisele, ajaloolise iseloomuga ülesanded, mida õige palju võib leida raamatuist [I, 44] ja [III, 6], ning ülesanded «huvitavast matemaatikast». Kasuliku valiku ülesannetest võrrandi koostamiseks ühes nende liigitamisega tüüpide järgi võib leida raamatust [III, 5].

Igale esimese astme võrrandile ühe tundmatuga saab anda kuju $ax = b$ ja selle täielik lahendus sisaldab ka nende juhtumite vaatlemist, kui $a = 0$ ja $b \neq 0$ (võrrandil ei ole ühtki lahendit) ning kui $a = b = 0$ (võrrandit rahuldab x iga väärtus). Tavaliselt nende erijuhtumite vaatlemine lükatakse edasi kuni X klassini ja ühendatakse teemaga «Võrratused», kuid täiesti võimalik on tutvuda nendega ka VII klassis, andes tööle teemaga «Esimese astme võrrandid ühe tundmatuga» nii väga soovitava lõpetatuse tervikluse. Kisseljovi algebra õpik (I osa) läheb täiesti mööda sellest küsimusest, kuid Aleksandrovi ja Kolmogorovi õpikus on sellele pühendatud paragrahv, mis selgitab neid kaht juhtumit VII klassi õpilastele täiesti arusaadaval kujul. Soovitav on siiski seal vaadeldud valmis võrranditele, millel puuduvad lahendid, ja võrranditele, millel on lõpmatu hulk lahendeid, lisada veel ülesandeid, mis viivad nii-

suguste võrrandite koostamisele, näiteks: leida kolmekohaline arv, millel on neli kümnelist ja mille sajaliste number on 1 võrra suurem üheliste numbrist, kui on teada, et ta on 99 võrra või mingi teise arvu võrra suurem arvust, mis on kirjutatud samade numbritega vastupidises järjekorras (vahe 99 puhul leidub 9 niisugust arvu, nimelt 140, 241, 342, ... 948, kuid iga teise vahe puhul ei leidu ühtki niisugust arvu).

Erilist tähelepanu nõuavad võrrandid, milles tundmatu esineb murru nimetajas, sest võrrandi vabastamisel nimetajatest võivad tekkida võõrlahendid (samaväärsus läheb kaduma). Kisseljovi õpikus on olemas paragrahv, mis räägib võõrlahendite tekkimise võimalusest ühenduses võrrandi vabastamisega tundmatuid sisaldavaist nimetajaist, kuid koolis sellele asjaolule kahjuks ei pöörata tähelepanu. Aleksandrovi ja Kolmogorovi õpikus leidub eri peatükk, mis on pühendatud tundmatut nimetajas sisaldavaile võrrandeile, ja selle täielikku tundmaõppimist tuleb VII klassis igati soovitada.

Esimese astme võrrand ühe tundmatuga võib sisaldada veel ka tähti, mis tähistavad tuntud suurusi («parameetreid» ehk suhteliselt jäävaid suurusi). Programm toonitab, et VII klassis on vaja lahendada ka neid «tähelisi» võrrandeid, millist asjaolu tuleb pidada täiesti õigeks, sest algebra rakendustes esinevad sageli võrrandid, mis määravad sõltuvuse kahe ja enama suuruse vahel, kusjuures igaüht neist võib pidada tundmatuks ja väljendada teiste kaudu. Vaadeldes näiteks ühtlase liikumise seadust, mis väljendub valemiga $s = s_0 + vt$, tekib küsimus igaühe kolmest suurusest s_0, v ja t määramisest sõltuvana teistest suurustest. Nende täheliste võrrandite, s. o. parameetreid sisaldavate võrrandite lahendamine pakub tunduvalt enam raskusi kui «numbriliste» võrrandite lahendamine, kus peale otsitavat tähistava tähe muid tähti ei ole, ja nendega on vaja tegelda teises järjekorras, nimelt pärast seda, kui on omandatud kindel oskus numbriliste võrrandite lahendamises. Kontroll tundmatu asendamise teel leitud avaldistega võrrandi mõlemas pooles kujutab endast suurepärast samasusteisenduse harjutust, mis on kõige muu kõrval väärtuslik selle poolest, et ta on mõtestatud, sest õpilastele on tema eesmärk täiesti selge. Peab märkima, et mõned autorid pooldavad numbriliste ja täheliste võrrandite paralleelset lahendamist, leides, et viimaste lahendamise raskused ületatakse sel puhul kergemini (vt. raamatut [III, 5]).

Lõpetades teema «Esimese astme võrrandid ühe tundmatuga» käsitlust, on kasulik läbi arutada mõned algajale raskemad ülesanded, nimelt mõned niisugused ülesanded, mis nõuavad kas enam süvendatud tähelepanu võrrandite teooria läbivõetud elementide suhtes või head taipu (need ei ole juba harjutusülesanded ega kalkulatsioonülesanded, vaid arendava iseloomuga ülesanded). Esitame mõned sobivad ülesanded sellest liigist: lahendada x suhtes ruutvõrrand $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ja n-nda astme võrrand:

$$a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n) = 0,$$

kus a on antud arv, mis erineb nullist; mis selles ülesandes muutub, kui $a = 0$?

Kas võrrandid $x^2 - 12x + 36 = 49$ ja $x - 6 = 7$, $x - 5 + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{x-5}$ ja $x - 5 = 0$ on samaväärsed või mitte? Siia sobivad täiesti ka lihtsamad ülesanded ühe tundmatuga võrrandi lahendi uurimise alalt (kasvõi ühe tähelise parameetriga), nagu seda on järgmine: «Kaks liiklejat väljusid üheaegselt ühes ja samas suunas üht ja sama teed mööda; esimene läbib igas sekundis 3 meetrit, teine $3 + a$ meetrit. Mitme sekundi pärast teine on stardist kaks korda kaugemal kui esimene?» Siin tuleb selgitada lahendi mõtet juhtumeil, kui $a = 3$ ja kui $a \neq 3$.

§ 20. Kahest kahe tundmatuga esimese astme võrrandist koosneva süsteemi lahendamine ja ülesanded nende koostamisele.

Kui ühe tundmatuga esimese astme võrrandi lahendamine ja ülesannete lahendamine nende koostamisele on hästi omandatud, siis üleminek esimese astme võrrandisüsteemidele toimub ilma raskusteta. Programm reserveerib sellele teemale õigesti ainult ligikaudu poole sellest ajast, mis on ette nähtud eelmisele (18 tundi 30 asemel). Siin on õpilastele uudiseks kõigepealt määramatu kahe tundmatuga võrrand, ja selle punkti juures maksab peatuda pisut kauem kui soovitab õpik, selgitades, et niisugune võrrand määrab, üldiselt üteldes, sõltuvuse kahe suuruse vahel. Sõnad «üldiselt üteldes» on tarvilikud, sest siin on võimalikud erandid (näiteks, kui piirduda ainult mittenegatiivsete arvudega, siis võrrand $x + y = 0$ omab üheainsa lahendi $x = 0$, $y = 0$, ja kui piirduda ainult reaalarvudega, siis võrrand $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$ on rahuldatud ainult puhul, kui $x = a$ ja $y = b$).

Siirdudes kahest kahe tundmatuga esimese astme võrrandist koosneva süsteemi juurde, määratakse kindlaks järgmiste terminite täpne tähendus: «võrrandisüsteem» (kogu võrrandeid, milles ühed ja samad tähed tähistavad ühtesid ning samu arve), niisuguse süsteemi «lahend» (paar arve, mis rahuldavad iga võrrandit), «tuletatud süsteem» (süsteem, mida rahuldavad kõik samad lahendid, mis rahuldavad antud süsteemi), «samaväärsed süsteemid» (ühiste lahenditega võrrandisüsteemid: esimese süsteemi kõik lahendid on ühtlasi teise lahenditeks ja kõik teise süsteemi lahendid — esimese lahenditeks). Eeldades, et süsteem omab lahendit, elimineerime ühe tundmatu asendusvõtte abil ja redutseerime küsimuse ühe tundmatuga esimese astme võrrandi lahendamisele, esialgu mööda minnes erijuhtumeist, kus see «lõppvõrrand» on määramatu või ei oma lahendeid. Eelmise teema kestel tundmaõpitud kaks võrrandite omadust on kergesti üldistatavad süsteemi juhtumile, mille järel kergesti omandatakse ka süsteemi lahendamine algebralise liitmise meetodil.

Ei tule rutata üleminekuga harjutusmaterjali juurde ega viimast küsimuse teoreetilisest küljest lahti kiskuda. Harjutustega tuleb alata alles pärast teoreetilise külje selgitamist, millega kaasub mõnede näidete vaatlemine; on vaja saavutada täit teadlikkust lahenduse iga sammu suhtes. Süsteem loetakse lahendatuks alles

pärast kõigi leitud lahendite kontrollimist asendamisega mitte mingis ühes võrrandis, vaid tingimata mõlemas võrrandis.

Õppinud lahendama valmis võrrandisüsteeme, tuleb tegelda ka ülesannetega, nende lahendamiseks süsteeme koostades. Nagu kogemused näitavad, läheb see töö alati tunduvalt sujuvamalt kui ühe tundmatuga võrrandite koostamine: siin avaldab mõju kogemuste kuhjumine iga õpilase juures, kuid paljudel juhtumitel teise tundmatu tarvituselevõtmine ka iseenesest kergendab sõltuvuse koostamist ülesannete tingimuste põhjal. Et viimases veenduda, tarvitseb vaid kõrvutada näiteks järgmise ülesande kaks lahendusviisi (ühe ja kahe tundmatu abil): «Kahel isikul on kokku 20 rbl.; kui esimene annab teisele 3 rbl., siis neil on raha ühepalju.»

Igale kahe lineaarse võrrandi süsteemile kahe tundmatuga saab anda «normaalkuju» $ax + by = c$ ja $a_1x + b_1y = c_1$, mille täielik lahendus nõuab järgmiste juhtumite vaatlemist: 1) $D = ab_1 - ba_1 \neq 0$, millal süsteemil on üksainus lahend; 2) $D = 0$, kuid vähemalt üks arvudest $D_1 = cb_1 - bc_1$ ja $D_2 = ac_1 - ca_1$ on erinev nullist, millal süsteem on vastuoluline (mittesimultaanne); 3) $D = D_1 = D_2 = 0$, kuid vähemalt üks koefitsientidest a, b, a_1, ja b_1 on nullist erinev, millal süsteemil on lõpmatu hulk lahendeid, sest ta redutseerub üheks võrrandiks, ja ühe tundmatu väärtuse võib võtta meelevaldselt; 4) $a = b = a_1 = b_1 = 0$, kuid vähemalt üks arvudest c ja c_1 ei ole null, millal süsteem on vastuoluline; 5) $a = b = a_1 = b_1 = c = c_1 = 0$, millal süsteem on määramatu, sest kummagi tundmatu väärtuse võib võtta meelevaldselt. Sellise ammendava uurimise teostamine on VII klassis enneaegne, kuid sellal, kui Kisseljovi stabiilne õpik piirdub ainult esimese juhtumi vaatlemisega, jättes täielikult nõutuks õpilased, kes kohtavad näiteks süsteemi $\frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{5}$, $\frac{2x+4}{2y+5} = \frac{1}{5}$, astub Aleksandrovi ja Kolmogorovi õpik selle uurimise suunas mõned sammud edasi: võetakse tarvitusele süsteemi determinandi $D = ab_1 - ba_1$ mõiste, tuuakse näiteid vastuolulistest süsteemidest ja määramatuist süsteemidest (lk. 178—179).

Õppinud koostama ja lahendama numbriliste võrrandite süsteeme kahe tundmatuga, on tarvis üle minna täheliste, kõigepealt ühe parameetriga võrrandite juurde. Lahendamine ja kontroll annavad siin suurepäraseid võimalusi treeninguks samasusteisenduste teostamises ja vähese tähelepanu pööramisega lahenduse üksikutele etappidele saab teostada selle lihtsa uurimise, mis tavaliselt lükatakse edasi X klassini, kuid mis on täiesti jõukohane ka VII klassi õpilastele. Võtame näiteks ülesande: «Lahendada x ja y suhtes süsteem $x + y = 1$, $bcx + acy = ab$.» Raamatu lõpul antud vastus $x = \frac{a(c-b)}{c(a-b)}$, $y = \frac{b(a-c)}{c(a-b)}$ on õige ainult puhul, kui $a \neq b$ ja $c \neq 0$. Kas ei tuleks õpilasi õpetada nägema selle tingimuse tarvilikkust? Kas õpilastele käib üle jõu vaadelda juhtumeid, kus $a = b$ ja $c \neq 0$, kus $a \neq b$ ja $c = 0$, kus $a = b$ ja $c = 0$? Ignoreerides küsimuse seda külge, kasvatame ehtsat formalismi: õpilased teostavad teatud retsepti järgi teatud operatsioone ilma endale nende seaduslikkusest ja tulemuse mõttest aru andmata. Parem oleks seda ülesannet

lihtsustada, asendades antud süsteemi näiteks järgmisega: $x+y=1$, $x+a^2y=a$ (üks parameeter!), kuid viia lahendus lõpuni, kindlaks tehes, et juhtumil, kui $a\neq\pm 1$, on tal üksainus lahend, mis väljendub valemitega $x=a:(a+1)$ ja $y=1:(a+1)$, et juhtumil, kui $a=-1$, lahendit üldse ei ole (süsteem $x+y=1$, $x+y=-1$ on vastuoluline), et juhtumil, kui $a=+1$, on olemas lõpmatu hulk lahendeid, milles üks tundmatuist x ja y on meelevaldne ja teine täiendab seda arvuni 1 (süsteem taandub üheks võrrandiks $x+y=1$).

Juhtumite $a\neq\pm 1$ jaoks saadud üldvalemite kuju järgi võiks arvata, et need ei kehti ainult sel puhul, kui $a=-1$, kuid lahenduskäigus saadud võrrand $(a^2-1)y=a-1$ kohustab meid vaatlema mõlemat juhtumit, kus y juures olev kordaja on 0, nimelt $a=+1$ ja $a=-1$.

Niisiis vähem keerukaid teisendusi, kuid rohkem tähelepanu ammendava lahendi saamise tagamisele.

§ 21. Muud esimese astme võrrandite süsteemid.

Üleminek süsteemi juurest, mis koosneb kahest esimese astme võrrandist kahe tundmatuga, süsteemi juurde, mis koosneb kolmest niisugusest võrrandist kolme tundmatuga, läheb kergemini kui üleminek ühe tundmatuga võrrandi juurest kahe võrrandi süsteemi juurde kahe tundmatuga. Näidanud kolme tundmatuga võrrandi ja kahest niisugusest võrrandist koosneva süsteemi määramatust, võetakse kolme võrrandi süsteem kolme tundmatuga ja eeldades, et on olemas arvukolmik, mis rahuldab igaüht neist kolmest võrrandist, avaldatakse üks neist arvudest sõltuvana kahest ülejäänust ja jõutakse pärast asendamist kahe kasutamata võrrandi juurest süsteemi juurde, mis koosneb kahest esimese astme võrrandist kahe tundmatuga ja mille lahendamisviis on juba tuntud. Sama tulemuse saab, kui kasutada liitmisvõtet ja elimineerida üks kolmest tundmatust esmalt näiteks süsteemi esimesest ja teisest võrrandist, siis tema esimesest ja kolmandast võrrandist. Nende kahe võtte (asendamisvõtte ja liitmisvõtte) kätteõppimises seisnebki kolmest kolme tundmatuga esimese astme võrrandist koosneva süsteemi lahendamise tehnika omandamine.

Niisuguse süsteemi täielik uurimine ei ole VII klassi õpilastele jõukohane, kuid neile on soovitav anda mõiste võimalikest erijuhtumeist, kus süsteem osutub vastuoluliseks vastuolu tõttu tema kahe võrrandi vahel (näiteks süsteem $x+y+z=0$, $2x+2y+2z=3$, $x-y+z=1$) või vastuolu tõttu tema ühe võrrandi ja kahest teisest saadud mingi järelduse vahel (nagu süsteem $x+y+z=0$, $x-y+z=1$, $2x+2z=3$, mille esimese kahe võrrandi liikmeti liitmine annab võrrandi $2x+2z=1$, mis on vastuolus kolmanda võrrandiga) või kus süsteem on küll simultaanne, kuid määramatu, sest üks tema võrrandeist osutub järelduseks kahest teisest (nagu süsteemis $x+y+z=0$, $x-y+z=1$, $2x+2z=1$) või kaks tema võrrandeist on järeldused kolmandast. Stabiilne Kisseljovi algebra õpik (I osa) läheb neist erijuhtumeist vaikides mööda, kuid Aleksandrovi ja Kolmogorovi uues algebra õpikus on vaadeldud mõnd vastavat näidet.

Nii asendamisvõte kui ka liitmisvõte leiavad kasutamist ka süsteemide lahendamisel, mis koosnevad neljast ja enamast võrrandist sama arvu tundmatutega, kuid üldkujul neid süsteeme keskkoolis ei vaadelda. VII ja ka vanemais klassides lahendatakse mõned eri süsteemid neljast ja enamast võrrandist sama arvu tundmatutega, püüdes leida mõnede tundmatute elimineerimiseks spetsiaalseid, mõnikord üsna kunstlikke võtteid. Stabiilseis õpikuis on näidatud mõned niisugused võtted, kuid on soovitav mitte anda neid valmis kujul, vaid esitada vastavad ülesanded arendavate ülesannetena, mobiliseerides õpilasi sobivate lahendusvõtete otsimisele. Mõned head seda liiki ülesanded leiduvad Aleksandrovil ja Kolmogorovil, näiteks niisugune: «Lahendada võrrandisüsteem 101 tundmatuga: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{101} = 0$, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \ldots = x_{100} + x_{101} = 1$" (nr. 210, lk. 187), mis oma ülisuure tundmatute arvuga alati köidab õpilaste tähelepanu ja ilma erilise raskuseta on lahendatav enamiku õpilaste poolt (kerge on näha, et esimese 100 tundmatu summa võrdub 50 ja seetõttu $x_{101} = -50$, millest järeldub, et $x_{100} = 51$, $x_{99} = -50$ ja üldiselt kõik tundmatud paaritute numbritega on väärtustega -50, paarisnumbritega aga 51). Eriti tuleb märkida mõnede süsteemide lahendamist lihtsustavat abitundmatute tarvituselevõtmise ideed.

See, mis eelmises paragrahvis on öeldud kahest tähelisest võrrandist koosneva kahe tundmatuga süsteemi uurimise võimaluse ja soovitavuse kohta, kehtib ka iga süsteemi puhul. Olgu näiteks antud süsteem $x + ay + a^2z = 0$, $x + by + b^2z = 0$, $x + cy + c^2z = 0$, millel on, nagu kerge on näha, üksainus lahend $x = y = z = 0$, kui parameetrite a, b ja c hulgas ei leidu kaht võrdset. Juhtumil, kui $a = b$ ja $c \neq 0$, taandub süsteem kahe võrrandi süsteemiks kolme tundmatuga ja osutub määramatuks, sest rahuldub meelevaldse z juures väärtustega $x = acz$ ja $y = -(a + c)z$; juhtumil, kui $a = b = c$, taandub süsteem üheks võrrandiks ja osutub määramatuks veel suuremal määral, sest on rahuldatud, kui y ja z võtta meelevaldselt ja x on võrdne avaldisega $-ay - az$. Ei saa piirduda antud süsteemi niisuguse lahendusega, mis on õige ainult erinevate parameetrite a, b ja c puhul, kui see lahend esitatakse üldkehtivana, s. o. kui ei tehta erilist kitsendavat märkust.

Õpetajad kurdavad tihti raskuste üle, mida õpilastele pakub võrrandi koostamise ülesannete lahendusvõtete omandamine. Põhjusi niisuguseiks kurtmisteks jääks kahtlematult palju vähem, kui algebra tundides hakataks tegelema mitte ainult vajalike tehniliste, kord alatiseks määratud operatsioonide šabloonikohase teostamise oskuste kätteõpetamisega, vaid pööratakse rohkem tähelepanu teadlikkusele nende teostamises, neile raskustele, mida esitavad erijuhtumid.

Märgime, et rikkalik materjal selle teadlikkuse kätteõpetamiseks võrrandite koostamise ja lahendamise osas leidub raamatuis [III, 23, 36].

§ 22. Võrratuse mõiste ja selle kasutamine seitsmeklassilises koolis.

Võrratuse mõiste ilmub kooli ühel ajal võrduse mõistega. Juba algebrakursuse päris alguses võetakse tarvitusele võrratusemärk ($\neq$) ja märgid «on suurem» ($>$), «on vähem» ($<$); nad leiavad edaspidi korduvalt kasutamist nii algebras kui ka geomeetrias. Kuid võrratuste kohta käivate teadmiste korraldamine teatavasse süsteemi ja nende süstemaatiline käsitlus, mis lõpeb täheliste võrratuste («relatiivsete» võrratuste) lahendamise küsimuse vaatlemisega, on edasi lükatud keskkooli viimasesse klassi. Püüd anda juba seitsmeklassilises koolis võimalikult ümmargune teadmiste kogu algebra alalt kutsus esile VII klassi programmis teema all «Esimese astme võrrandid ühe tundmatuga» järgmised punktid: «Võrratuse mõiste. Võrratuse omadused. Ühe tundmatuga esimese astme võrratuse lahendamine.» Need programmi punktid ei ole dešifreeritud ja õpetajad tunnevad nende järgi tööd planeerides suuri raskusi. Metoodilises kirjanduses on pühendatud võrratuste küsimusele küllaltki palju tähelepanu, kuid VII klassi materjal ei ole välja valitud. Sellekohast katset sisaldav artikkel [III, 32] kutsub esile rea kahtlusi ja vastuväiteid.

Selles, et võrratuste täielik tundmaõppimine tuleb edasi lükata kuni X klassini, mille programm sisaldab eri peatükki «Võrratused» ja mille käsitlemiseks on reserveeritud 22 tundi, ei ole kahtlust. VII klassis tuleb meelde tuletada sümbolite $\neq$, $>$ ja $<$ tähendus, tarvitusele võtta sümbolid $\geqq$ ja $\leqq$, mida loetakse «on suurem või võrdne» või «ei ole vähem» ja «on vähem või võrdne» või «ei ole suurem», näidata ühesuguste märkidega võrratuste transitiivsuse omadust (kui $a < b$ ja $b < c$, siis $a < c$ jne.) ilma termini «transitiivsus» enda tarvitusele võtmiseta, märkida siit tulenevaid võrratuse «tugevdamise» ja võrratuste liikmeti liitmise võimalusi, mida sageli kasutatakse geomeetrias, selgitada ratsionaalarvude võrdlemise tunnus (a on suurem kui b siis, ja ainult siis, kui $a - b > 0$) ja näidata võrratuse geomeetrilist tõlgendust arvteljel (rõhttelje ja püsttelje tavalise orientatsiooni puhul vastab suuremale arvule paremal või vastavalt kõrgemal asetsev punkt). On soovitav osata lahendada lihtsamaid võrratusi, nagu $2x - 3 > 6 - x$, ja mõista võrratuse $|x| < a$ ja kahekordse võrratuse $-a < x < a$ samaväärsust, andes sellelaadilisi küsimusi ülesannetena üldisel kordamisel («arendavad ülesanded») muidugi, ilma et kulutataks aega mingisugustelegi nendega seotud teoreetilistele arutlustele.

Ülimal määral soovitav on kasutada võrratusi ligikaudse arvutamise tulemuste ülesmärkimiseks, nimelt vea tõketega varustatud ligikaudsete võrduste asendamiseks rangete kahekordsete võrratustega, s. t. niisuguste kirjutiste samaväärsuse selgitamiseks, nagu $x \approx 124 (\pm 1)$ ja $123 < x < 125$ või $x \approx 200 (\pm 5\%)$ ja $190 < x < 210$. Võrratuste küsimust saab seitsmeklassilises koolis täielikult

mõtestada siis, kui teda siduda ligikaudse arvutamisega, mida kehtiv programm kahjuks ette ei näe ja mis käesoleval ajal võib teostamist leida ainult klassivälise töö korras.

V peatükk.

FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS.

§ 23. Funktsiooni idee lülitamine matemaatika üldhariduslikku kursusse.

Eespool, käesoleva III osa § 2 näitasime, et algebra koolikursuse neljast põhilisest arenemisjoonest (arvud, samasusteisendused, võrrandid ja funktsioonid) viimasele, s. o. funktsioonide tundmaõppimisele kuulub mõnes mõttes juhtiv osa. Prof. A. Hintšinil on õigus, kui ta ütleb, et «funktsionaalse sõltuvuse mõiste peab saama mitte ainult üheks matemaatika koolikursuse tähtsamaks mõisteks, vaid ka selleks peateljeks, mis läbib kogu kursust elementaarsest aritmeetikast kuni algebra, geomeetria ja trigonomeetria kõrgemate küsimusteni ja mille ümber koondub kogu matemaatika õpetamine» [I, 51a]. Märkides teiste, mitte vähem tähtsate mõistete, kujutluste ja meetodite alahindamise lubamatust, näitab prof. Hintšin edasi, mispärast funktsionaalse sõltuvuse mõiste tuleb nii teravalt välja tõsta kõigi teiste matemaatika põhiliste mõistete hulgast, millega keskkool tutvustab õpilasi: «Esiteks seepärast, et ükski teine mõiste ei peegelda reaalse tegelikkuse nähtusi nii vahetult ning niisuguse konkreetsusega nagu funktsionaalse sõltuvuse mõiste, milles on kehastatud nii reaalse maailma liikuvus, dünaamilisus kui ka reaalsete suuruste vastastikune kausaalsus. Teiseks seepärast, et enam kui ükski teine mõiste kehastab see endas kaasaegse matemaatilise mõtlemise dialektilisi jooni; tema harjutab nimelt nägema suurusi nende elavas muutuvuses, mitte aga kunstlikult prepareeritud liikumatuses, nende vastastikuses seostuses ja kausaalsuses, mitte aga kunstlikus üksteisest eraldatuses. Lõpuks seepärast, et funktsionaalse sõltuvuse mõiste on kogu kõrgema matemaatika põhiline mõiste ja keskkooli lõpetanute ettevalmistuse kvaliteet kõrgema kooli matemaatika kursuse omandamise seisukohalt mõõtub tunduval määral sellega, kuivõrd kindlalt, täielikult ja kultuurselt on neis kodunenud see mõiste.»

Nagu nägime esimese osa I peatüki lühikeses ajaloolises ülevaates, siirdus matemaatika juba mitu sajandit tagasi arvude, suuruste ja geomeetriliste kujundite uurimiselt suuruste ja geomeetriliste kujundite muutumise uurimisele, mis nihutaski funktsionaalse sõltuvuse mõiste esiplaanile. Kuid koolimatemaatika elab alles nüüd läbi selle matemaatikateaduse uuele arenemisetapile ülemineku ja oleks ekslik arvata, et see üleminek on juba teostunud; vastupidi: nii matemaatika koolikursuse programm, kooliõpikud kui ka igapäevane õpetamispraktika peegeldavad veel väga ebatäie-

likult ja ebajärjekindlalt seda üleminekut. Matemaatika õpetaja ülesandeks on jõudumööda osa võtta sellest traditsioonilise õpetamisviisi niisuguse ümberorganiseerimise raskest ja tähtsast tööst, mille tulemusena funktsionaalse sõltuvuse idee juhtiv osa oleks tõepoolest realiseeritud.

Samal ajal, kui need üldised seisukohad funktsionaalse sõltuvuse idee kasutusele võtmise vajadusest on nõukogulikus matemaatika õpetamise metoodikas üldtunnustatud, valitseb nende realiseerimise küsimuses suur arvamuste mitmekesisus.

Kõigepealt on vaja otsustada, missugune ajaloo kestel tekkinud funktsiooni mõiste definitsioon võtta aluseks funktsiooni mõiste tundmaõppimisel keskkoolis: kas 200 aastat tagasi Leonhard Euleri poolt formuleeritud «operatiivne» definitsioon, mis samastab funktsiooni selle valemiga, mis näitab, missugused tehted tuleb teostada sõltumatute muutujate väärtustega selleks, et saada funktsiooni vastav väärtus, või see XVIII sajandil operatiivsest definitsioonist üldisemaks loetud definitsioon, mida võib nimetada «graafiliseks» ja mis ühe muutuja funktsiooni puhul taandub täiesti meelevaldset kõverat mööda liikuva punkti abstsissi ja ordinaadi vahelise sõltuvuse määramiseks, või lõpuks kolmas, N. Lobatševski poolt antud definitsioon, mida võib nimetada «tabeliliseks» ja mis tänapäeval ühe argumendi funktsiooni puhul formuleeritakse järgmiselt: «Kui hulga M iga elemendiga x on vastavusse seatud hulga N mingi element y, siis öeldakse, et hulgal M on defineeritud funktsioon, ja kirjutatakse: $y = f(x)$. Seejuures elemente x nimetatakse argumendi väärtusteks ja elemente y — funktsiooni väärtusteks» [III, 30b]. Akadeemik S. Bernstein oma ettekandes «Funktsiooni mõiste keskkoolis», mille ta esitas II ülevenemaalisel matemaatika õpetajate kongressil 1913. aastal, pooldas otsustavalt funktsiooni operatiivse definitsiooni paigutamist esikohale, tehes reservatsiooni, et ka mõlemad teised definitsioonid peavad saama tähtsa koha keskkoolis; tunnustades, et funktsiooni tabeliline definitsioon on üldisem kui operatiivne, kõnelemata juba graafilisest definitsioonist, leidis ta, et võimalus esitada iga pidev või lõplikul hulgal katkemiskohti omav funktsioon teatava polünoomina (mis tahes defineeritud vahemikus) näitab, et keskkoolis on võimalik lähtuda funktsiooni operatiivsest definitsioonist. Sõltuvalt selles ettekandes arendatud üldistest seisukohtadest on õppe- ja metoodilises kirjanduses kuni kõige viimase ajani domineerinud funktsiooni operatiivne definitsioon. Kuid viimaseil aastail on ilmunud rida töid, mis veenvalt näitavad üldise (tabelilise) definitsiooni eeliseid, definitsiooni, mis on rajatud hulga ideel ja vastavuse ideel, s. o. ideedel, mis, olles kaasaegse matemaatika põhilisteks ideedeks, väärivad iseenesest koolis tarvituselevõtmist. Need kaks mõistet on nii lihtsad ja ühtlasi niivõrd üldised, et ilma neil eraldi peatumiseta saab neid võtta püsivale kasutamisele matemaatika tundides, lähendades sellega koolimatemaatikat mõnevõrra kaasaegsele teadusele. Näiteks täiesti võimalik on asendada vana termin «punktide

geomeetriline koht» temaga samaväärse kaasaegse terminiga «punktide hulk». Eespool [§ 18] nägime, kui kasulik on hulga mõiste rakendamine võrrandite elementaarteooria käsitlemisel.

Üldine mõiste funktsioonist kahe hulga elementide vastavusena on keskkooliõpilastele täiesti jõukohane ja seda saab vaadelda ühe täiesti vastuvõetava alusena funktsioonide tundmaõppimisel koolis.

Juhtides õpetajat, kes soovib tutvuda selle tähtsa küsimuse detailidega, artiklite [I, 51a], [III, 33b] ja [III, 30b] juurde, asume vaatlema neid teadmisi funktsioonide kohta, mida keskkool peab andma.

§ 24. Funktsioonide tundmaõppimise ülesanded keskkoolis.

Praegu kehtiva matemaatika programmi «Seletuskiri» annab funktsioonide tundmaõppimise kohta järgmised näpunäited.

«Funktsionaalse sõltuvuse idee arendamine taotleb algebra õpetamise kõigil astmeil võrdsel määral nii üldhariduslikke eesmärke kui ka võimalikult suure koordinatsiooni saavutamist kooli teiste õppeainetega, eriti füüsikaga. Selleks tuleb VII klassis praktiseerida arvuliste väärtuste leidmise tulemuste kirjutamist tabeli kujul ja ka lihtsamate graafikute joonestamist. VII klassi programm näeb ette koordinaaditelgede tarvituselevõtmist ja mõnede lihtsamate funktsioonide graafikute ehitamist. VIII—IX klassis laiendatakse süstemaatiliselt tundmaõpitavate funktsioonide hulka nii, nagu on näidatud programmi vastavais kohtades. Graafikute ehitamisel ei tohi üheski klassis piirduda skemaatilise joonisega. Tuleb taotleda graafikute ehitamist küllaldase täpsusastmega punktide järgi ruudulisel paberil. Õpetaja, kes õpilasi laseb arvutada algebralise avaldise arvulisi väärtusi mingi tähe mitmesuguste väärtuste puhul, korraldada tulemused tabeli kujul ja ühtlasi teha vastava graafiku (punktide järgi), õpetab neid algebralises avaldises nägema mitte ainult tähtede ja arvude teatud kombinatsiooni, vaid ka nende tähtede funktsiooni. Seejuures funktsionaalne terminoloogia ja eriti tähistused otseselt programmi nõudmiste näol on võetud VIII klassi kursusse» (Keskkooli programmid. «Matemaatika», Utšpedgiz, 1952, lk. 10).

Arvestades kõiki neid näpunäiteid ja seda, mis konstateeriti eelmises paragrahvis, saab funktsioonide tundmaõppimise ülesandeid keskkoolis formuleerida järgmiselt:

1. Tuleb omandada vähemalt ühe argumendi funktsiooni puhul funktsionaalse sõltuvuse üldine idee kui vastavus kahe hulga, nimelt argumendi väärtuste hulga ja funktsiooni väärtuste hulga elementide vahel, toetudes konkreetseile näidetele, nagu järgmine: igale naturaalarvule vastab tema jagajate (samuti naturaalsete) arv; siin argumendi väärtuste hulgaks on kõigi naturaalarvude hulk, funktsiooni väärtuste hulgaks on sama hulk, sest kerge on näha, et leidub naturaalarve igasuguse jagajate arvuga (näiteks

arvul 2^{n-1} on n ja ainult n jagajat 1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^{n-1}); vastavust näitab tabel, mis koostatakse antud funktsiooni definitsiooni põhjal:

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$y=$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	...

Seda üldist (tabelilist) definitsiooni on soovitav üldistada kahe, kolme jne. argumendi funktsiooni juhtumi jaoks. Konkreetne näide: kahe naturaalarvu ühisjagajate arv kui nende arvude funktsioon; siin on argumendi väärtuste hulgaks naturaalarvude kõigi paaride hulk, funktsiooni väärtuste tabel on «kahe sissekäiguga» ja funktsiooni väärtuste hulgaks on kõigi naturaalarvude hulk. Teine näide: kolmnurga pindala tema kolme külje pikkuse funktsioonina (argumendi väärtuste hulgaks on positiivsete reaalarvude kõigi niisuguste kolmikute hulk, kus suurim arv kolmikus on vähem kahe teise summast, ja funktsiooni väärtuste hulgaks on kõigi positiivsete reaalarvude hulk).

2. Tuleb omandada vaade, et iga algebraline avaldis on nende suuruste funktsioon, mida tähistavad temas esinevad tähed (funktsiooni operatiivne definitsioon), ja osata koostada selle funktsiooni väärtuste tabelit (vähemalt ühe muutuja funktsiooni puhul), näidates argumendi ja funktsiooni väärtuste hulka või vähemalt argumendi väärtuste hulka, s. t. osata funktsiooni operatiivselt definitsioonilt üle minna selle tabelilisele definitsioonile. See üleminek on alati võimalik (samal ajal, kui üleminek tabeliliselt definitsioonilt operatiivsele võib esitada suuri, õpilastele sageli ületamatuid raskusi).

Tegeldes näiteks VIII klassis avaldisega $+\sqrt{x-1}$, on vaja mõista, et siin esineb funktsioon $y=+\sqrt{x-1}$, mis on defineeritud kõigi arvust 1 mittevähemate reaalarvude hulgal, et funktsiooni väärtused moodustavad siin kõigi mittenegatiivsete reaalarvude hulga ja et selle funktsiooni väärtuste tabelit on kerge koostada, kui on kasutada ruutjuurte tabel.

3. Tuleb omandada arusaamine funktsiooni $y=f(x)$ graafikust ristkoordinaatides ja oskus kasutada valmis graafikut suuruse y väärtuse leidmiseks antud x väärtuse järgi ja ümberpöördult, kui ka oskus ehitada funktsiooni graafikut selle tabelilise või operatiivse definitsiooni põhjal. Siin ei saa mingil juhtumil rahulduda ainult idee omandamisega, vaid on vaja saavutada vastav praktiline vilumus, mis küüniks kuni otstarbekohase mastaabi ja koordinaaditelgede asukoha valimise oskuseni (olemasolev ruuduline paberileht tuleb maksimaalselt ära kasutada, mahutades meid huvitava graafikuosa selle paberilehe piiridesse). On tähtis märkida, et funktsiooni graafiku ehitamine «punktide järgi» omandab mõtte vaid tingimusel, kui järelduste tegemine graafiku iseloomu kohta kahe ehitatud punkti vahel toimub mingisuguste, antud funktsiooni definitsioonile rajatud teoreetiliste kaalutluste alusel, mitte aga lihtsalt analoogial, mis võimaldab teha ainult oletusi.

4. On tarvis mõista funktsionaalse sõltuvuse pööramise operatsiooni ja sellega seotud mitmese funktsiooni mõistet esmalt niisuguste lihtsate näidete puhul, nagu $y = ax + b$, $y = x^2 (a \neq 0$, x on mis tahes reaalarv; pöördfunktsioonid on $x = y : a - b : a$, $x = \pm \sqrt{y}$) või $y = (-1)^x$, kus x omandab iga täisarvulise väärtuse, y aga ainult kaks väärtust: $+1$ ja -1, nii et pöördfunktsioon on lõpmatult mitmene, ja hiljem keerukamate sõltuvuste puhul.

5. Et funktsioonide kohta omandatud teadmised ei jääks õpilastel «surnud kapitaliks», on vaja neid varustada oskusega kasutada neid teadmisi mitmesuguste ülesannete lahendamisel esmases järjekorras selleks, et saavutada näitlikkus (seal, kus see küsimuse paremaks omandamiseks on kasulik), kuid mõnikord ka ligikaudsete arvuliste tulemuste saamiseks. Suurepärane näide on raudteel kasutatavad rongide liikumise graafikud, mida tuleb soovitada kasutada iga kooli VII klassis (niisuguste graafikute osi on toodud paljudes algebra õpikutes, kuid kõige parem on raudteeteenistujate kaudu hankida vana graafiku originaaleksemplar). Isegi kvalifitseeritud matemaatik tunneb suurt kergendust, kasutades tuntud rongide kohtumise ülesande lahendamisel graafikut («Punktidest A ja B väljub iga päev keskpäeval rong ja läbib täpselt nädalaga kogu tee; samuti toimub liiklemine vastassuunas. Mitu rongi kohtab reisija, kes niisuguses rongis teeb sõidu punktist A punktini B?»). Paljudel juhtumitel võimaldab korralikult tehtud graafik saada ka otsitava suuruse (ligikaudse) arvulise väärtuse lihtsamalt kui ükski teine viis; niisugune on näiteks õige populaarne süsteemi $x^2 + y = 41$ ja $x + y^2 = 31$ lahendamise ülesanne, mis taandub neljanda astme võrrandile ühe täisarvulise ja kolme irratsionaalse lahendiga, mis pärast kahe parabooli joonistamist on kergesti graafikust leitavad, või mitte vähem tuntud eksponentvõrrandi $2^x = 4x$ lahendamise ülesanne, mille lahendid kui sirge $y = 4x$ ja kõvera $y = 2^x$ lõikepunktide abstsissid on graafikust kergesti leitavad.

Viienda osa § 34 on vaadeldud mõnd näidet transtsendentsete trigonomeetriliste võrrandite lahendamisest funktsioonide graafikute kasutamisel.

§ 25. Funktsionaalne propedeutika.

Funktsioonide süstemaatilist tundmaõppimist ühenduses definitsioonide ja teoreemide täpsete sõnastustega ja teoreemide tõestamisega ei ole otstarbekohane alata enne kui VII klassis. Kas tähendab see, et eelnevais klassides ei pea olema mingisugust tööd funktsioonide tundmaõppimise alal? Teiste sõnadega, kas klassides V — VII on vajalik funktsionaalne propedeutika analoogiliselt näiteks murdude propedeutikale algkoolis? Selles küsimuses esineb suur arvamuste lahkuminek. Nii loeme näiteks eespool nimetatud ettekandes [III, 7]. «... täiesti rahuldav seletus sellele, et võrdelisuse seadus väljendub sirgjoonena, eeldab teatavat geomeetria

tundmist; seetõttu võib graafilise meetodi rakendamine aritmeetiliste ülesannete lahendamisel tuua geomeetria propedeutilise kursuse puudumisel rohkem kahju kui kasu. «Kui see seisukoht täielikult vastu võtta, siis tuleb funktsiooni $y = ax + b$ graafiku vaatlemine edasi lükata kuni VIII klassini, sest kolmnurkade sarnasuseõpetus võetakse läbi alles seal. Aleksandrovi ja Kolmogorovi uue algebra õpiku I osas ei leidu terminit «funktsionaalne sõltuvus», ei võrdelise sõltuvuse graafikut ega siis ka lineaarse funktsiooni graafikut, s. t. funktsionaalne propedeutika puudub täielikult. Kuid püüd teha funktsiooni mõiste «peateljeks», mille ümber koondub kogu matemaatika õpetamine, ja ka kaalutlused, mille kohaselt seitsmeklassilise kooli lõpetajaile on soovitav anda teatav miinimum teadmisi funktsioonide kohta, viisid mõnede funktsionaalsesse sõltuvusse puutuvate küsimuste lülitamisele VI ja VII klassi programmi. Funktsioonidega $y = ax$ ja $y = a : x$ õpilased puutuvad kokku juba VI klassi aritmeetika kursuses; kahe suuruse sõltuvuse idee, s. t. idee vastavusest suuruse x väärtuste hulga ja $y = ax$ või $y = a : x$ väärtuste hulga elementide vahel on siin ilmne, kuigi terminit «funktsioon» veel ei tarvitata; mingit kahtlust tekitamata praktiseeritakse siin juba argumendi x ja funktsiooni $y = ax$ või $y = a : x$ väärtuste tabeli koostamist. Siit on aga üksainus samm nende funktsioonide graafilise kujutamiseni, kusjuures järeldus selle kohta, et funktsiooni $y = ax$ graafik on sirgjoon, saadakse empiirilise faktina ehk täpsemalt: arvamisena, hüpoteesina, mida kinnitavad kõik selle kontrollimiseks tehtavad vaatlused. Selle funktsiooni graafilise kujutamisega ühenduses olevad raskused ei ole põrmugi suuremad, kui need on temperatuuri, kasvu, mõõtude ümberarvutamise jm. graafikute joonestamisel, mida laialt kasutame juba algkoolis ja mida programm soovitab kasutada algebra algete õppimisel VII klassis. Graafikute $y = ax$ ehitamine a mitmesuguste arvuliste väärtuste juures on VII klassi algebra programmi nõudeks: tundes juba, et iga niisuguse funktsiooni graafik on sirgjoon, selgitatakse, missugune seos on olemas võrdeteguri a väärtuse ja sirge asendi vahel koordinaaditelgede suhtes. Töötades lineaarsete võrrandisüsteemidega tuleb programmikohaselt teha veel üks samm funktsioonide tundmaõppimise alal: ehitada lineaarse funktsiooni $y = ax + b$ graafik, mis ei nõua mingeid uusi, katsete kinnitust vajavaid hüpoteese, sest see saadakse sirgest $y = ax$ viimase paralleellükkel Y-telje sihis lõigu b võrra, ja samuti ka graafik suuruste x ja y vahelisest sõltuvusest, mis on väljendatud võrrandiga $Ax + By + C = 0$, ja mis juhtumil, kui $B \neq 0$, omandab kuju $y = ax + b$, kus $a = -A : B$ ja $b = -C : B$, ning juhtumil, kui $B = 0$ ja $A \neq 0$, omandab kuju $x = c$, kus $c = -C : A$.

Juhtumil, kui $A = B = 0$, ei määra see võrrand x ja y vahel mingit sõltuvust.

Lineaarse sõltuvuse graafiku tundmine võimaldab täie selgusega vaadelda võrrandite ja nende süsteemide lahenduste neid erijuhtumeid, mis VII klassi õpilasi tavaliselt viivad segadusse ja mida

oli väga soovitav X klassini mitte edasi lükata. Võrrand $ax + b = a_1x + b_1$ on samaväärne süsteemiga $y = ax + b$ ja $y = a_1x + b_1$, mille lahendamise ülesanne on kahe sirge ühise punkti leidmise ülesanne; kuid neid punkte on ainult üks tingimusel, et need sirged lõikuvad, neid punkte ei olegi, kui sirged on paralleelsed, ja neid on lõpmatu hulk, kui sirged ühtivad.

Rea uusi ettepanekuid funktsionaalse propedeutika ja selle sidumise kohta aritmeetikaga sisaldab prof. Gontšarovi raamat [III, 17a]. Kahtlemata on kogu funktsionaalse propedeutika küsimuses palju vaieldavat, alates põhilise küsimusega: kas niisugune propedeutika on tarvilik VI ja VII klassis? Kui tunnustada, et on tarvilik, nagu seda kehtiv programm ka teeb, siis tuleb nõustuda prof. Gontšarovi rea ettepanekutega. Vastuväited selle põhjendamise kohta, et esimese astme funktsiooni graafik on sirgjoon, enne sarnasuse õpetamist on õige tõsised ja neile tuleb vastata järgmiselt; VI ja VII klassis see tõsiasi tehakse kindlaks katseliselt, nagu füüsikaline seadus, ja VIII klassis tullakse selle juurde tagasi ning näidatakse tema loogilist paratamatust üldiste geomeetriliste lausete põhjal.

Lineaarse funktsiooni graafiku tundmine on väärtuslik nii puhtpraktiliselt seisukohalt, eriti tema seose tõttu füüsikaga, kui ka rea matemaatika enda küsimuste parema selgitamise seisukohalt, mispärast seitsmeklassilise kooli lõpetajate tutvustamine sellega on täiesti õigustatud.

§ 26. Peatükk «Funktsioonid ja nende graafikud» VIII klassis.

Programm sisustab selle teema järgmiselt, reserveerides temale 10 tundi: «Funktsionaalse sõltuvuse mõiste. Ristkoordinaatide süsteem tasapinnal. Võrdelise sõltuvuse $y = kx$ ja pöördvõrdelise sõltuvuse $y = k : x$ graafiku ehitamine. Funktsiooni $y = kx + b$ graafik. Funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafik.»

Teeme mõned märkused õpikute materjali kohta.

1. See argumendi ja funktsiooni kui sõltumatu ja sõltuva muutuja definitsioon, mis antakse Kisseljovi õpikus, ei haara kõiki tähtsamaid juhtumeid, mis esinevad koolikursuses. Toetudes sellele definitsioonile on õpilased näiteks õigustatud vastu vaidlema väitele, et avaldis $kx + b$ kujutab endas argumendi x funktsiooni juhtumil, kui $k = 0$, kuna ülalpool antud funktsiooni definitsioon vastavusena kahe hulga vahel on täiesti rakendatav: argumendi väärtuste hulgaks on siin kõigi reaalarvude hulk, kuid funktsiooni väärtuste hulk koondub üheks ainsaks arvuks b, mis vastab argumendi igale väärtusele. Kui õpetajal on küllalt enesekindlust, siis võib ta anda funktsiooni kaasaegse definitsiooni, näidates, et õpikus toodud definitsioon kattub sellega täielikult, ja tunduvalt laiendada seda definitsiooni illustreerivate näidete nimestikku (vt. [III, 30 b]).

2. Võrdelisuse ja pöördvõrdelisuse vaatlemisel on vajalik toonitada, et need on needsamad kaks sõltuvust, mida vaadeldi juba aritmeetika kursuses. Erinevus on vaid selles, et võrdetegur k võib omada nüüd mis tahes reaalset väärtust, aga mitte ainult mis tahes positiivset ratsionaalset väärtust, nagu aritmeetikas, ja nii argu-

mendi kui ka funktsiooni väärtuste hulk koosneb nüüd $k \neq 0$ korral kõigist reaalarvudest (välja arvatud arv 0 pöördvõrdelisuse puhul). Eraldi nimetamist väärib juhtum $k = 0$, kus funktsiooni $y = kx$ väärtuste hulk koondub üheks ainsaks arvuks 0.

3. Funktsiooni $y = kx$ graafiku vaatlemisel on kasulik märkida, et k kõigi võimalike reaalsete väärtuste korral saadakse kõik sirged, mis läbivad koordinaatide algust (kaasa arvatud ka X-telg, mis vastab väärtusele $k = 0$, ja välja arvatud Y-telg, mida ei saa ühegi k väärtuse korral).

4. Defineerides hüperbooli funktsiooni $y = k : x$ graafikuna $k \neq 0$ korral, tuleb päris algusest peale toonitada tema kahe haru olemasolu ja mitte kõnelda, et positiivse k ja x korral asetseb hüperbool esimeses veerandis, nagu see on öeldud Kisseljovi õpikus. Konstrueerinud graafikust rea isoleeritud punkte, põhjendame neist pideva kõvera läbipaneku võimalust kaalutlustega selle kohta, kuidas muutub suurus y kahe punkti vahel, mida graafik läbib.

5. Mastaabi näitamine ja selle ratsionaalne valik tuleb graafikute ehitamisel lugeda eranditult kohustuslikuks. Kõige otstarbekohasem on võtta 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 jne. ühikut pikkuseühikus (1 cm või 1 mm), vältides niisuguseid mastaape, nagu 3, 6, 7 jne. ühikut ühes sentimeetris, mille puhul interpoleerimine silma järgi on raskendatud. Et kõrvaldada niisugused juhtumid, kus graafiku ehitamisel kasutamist leiab ainult jooniselehe üks nurgake, ei tule karta koordinaaditelgede paigutamist joonise piirkonnast väljapoole, näidates joonisel nendega paralleelseid sirgeid. Mitte hoiduda võtmast erinevaid mastaape X-telje ja Y-telje jaoks, pidades siiski meeles, et sel puhul funktsiooni $y = kx + b$ graafiku kaldenurga tangens juba ei võrdu arvuga k.

6. Väga soovitav on kasutada lineaarse funktsiooni graafikut ühe tundmatuga esimese astme võrrandi ja kahest kahe tundmatuga esimese astme võrrandist koosneva süsteemi lahendi selleks uurimiseks, millest oli juttu eelmises paragrahvis.

7. Erilist tähelepanu väärib funktsiooniväärtuste tabeli koostamise ja ratsionaalse kasutamise küsimus, millele stabiilne õpik pühendab äärmiselt vähe tähelepanu, sidumata seda, mis kõneldakse funktsiooni määramisest tabeli abil, õpilastel kasutada olevate valmis tabelite praktilise kasutamisega. Kas on normaalne niisugune olukord, kus õpilased kõnelevad funktsiooni $y = kx$ väärtuste tabelitest meelevaldselt võetud k väärtuste korral ega tea, et neil on olemas funktsiooni $y = \pi x$ üksikasjalik tabel, mis nii väga kergendab ülesannete lahendamist ringjoone pikkusele, ja funktsiooni $y = \frac{\pi}{180} \cdot x$, s. o. x-kraadise kaare radiaanmõõdu tabel, mis aitab lahendada ülesandeid kaare pikkusele? Sama küsimus tekib funktsiooni $y = k : x$ ja pöördväärtuste tabeli, s. o. funktsiooni $y = 1 : x$ tabeli puhul, funktsiooni $y = ax^2$ ja ruutude tabeli, s. o. funktsiooni $y = x^2$, samuti ringi pindala, s. o. funktsiooni $y = 0{,}25\pi x^2$ tabeli puhul. Lineaarse funktsiooni graafiku vaatlemisel mainitakse

tangensfunktsiooni; miks mitte tegelda siinuste ja tangensite tabelitega, ilma milleta jääb õhku rippuma see trigonomeetria propedeutika, mida näeb ette VIII klassi geomeetria programm. Peatükki «Funktsioonid ja nende graafikud» oleks vaja täiendada järgmise punktiga: elementaarmatemaatika kursuses eriti sagedasti esinevate funktsioonide tabelite, nimelt ruutude, kuupide, pöördväärtuste, ringjoone pikkuse, ringi pindala, radiaanmõõdu ning siinuste ja tangensite naturaalsete väärtuste tabeli ehitus ja kasutamine. Tabelite praktiline valdamine saab olla täisväärtuslik ainult siis, kui saab selgeks interpolatsioonioperatsioon. Tabelite kogu «Neljakohalised matemaatilised tabelid», mis on olemas IX ja X klassi õpilastel, saab kasutada ka VIII klassis, kusjuures asja teoreetiline külg on küllaldaselt valgustatud «Seletustes», mis alates 19. trükist on paigutatud tabelite kogu lõppu. On tarvilik, et õpilased mitte ainult ei oskaks kasutada neid «valmis parandusi», mis on antud kogu peaaegu kõigis tabeleis, vaid mõistaksid ka, kuidas need valmis parandused on arvutatud ja kuidas toimida, kui neid ei ole, s. t. oskaksid teostada lineaarset interpolatsiooni, teades tingimusi, mille puhul see on lubatav.

Tabelite küsimusega üksikasjalikumalt tutvuda soovijaid juhime raamatute [II, 12] juurde.

§ 27. Funktsioonide tundmaõppimine IX ja X klassis.

Neis klassides on kolm spetsiaalselt funktsioonidele pühendatud peatükki: eksponentfunktsiooni ja selle pöörde — logaritmfunktsiooni tundmaõppimine IX klassis; IX ja X klassi trigonomeetria kursuses tundmaõpitavad trigonomeetrilised funktsioonid; Bézout' teoreem ja järeldused sellest, s. o. täisratsionaalse funktsiooni mõned omadused, millele on pühendatud X klassi algebra programmi viimane teema. Kuid VIII klassis omandatud funktsiooni mõiste on viljakalt kasutatav peaaegu igas järgnevas matemaatika kursuse peatükis. Nii näiteks on meil IX klassis piirväärtuste vaatlemisel kogu aeg tegemist arvujärjenditega, s. o. funktsioonidega, mis on defineeritud naturaalarvude hulgal; lahendades mingit võrrandit, otsime neid argumendi väärtusi, mille puhul kaks antud funktsiooni omavad üht ja sama väärtust; kõik meetrilise geomeetria tulemused kujutavad endast järeldusi pikkuste, pindalade ja ruumalade kui tasaste kujundite ja ruumiliste kehade teatud elementide funktsioonide kohta.

Iga funktsiooni täielik tundmaõppimine eeldab rea küsimuste lahendamist, mis ulatuvad kaugele välja keskkooli piiridest. Niisugused küsimused on näiteks tema pidevuse uurimine, tema muutumiskäigu selgitamine mis tahes antud intervallis, maksimumi- ja miinimumipunktide leidmine. Jäädes propedeutika tasemele, saab iga vaadeldava funktsiooni puhul mõnele küsimusele anda ammendava vastuse, mõnele osalise, kuid seegi on väärtuslik kõigepealt

selle poolest, et ta kujundab välja konkreetsed kujutlused, mis väga soodustavad matemaatiliste distsipliinide ja nende rakenduste tundmaõppimist kõrgemas koolis. Iga tundmaõpitava funktsiooni defineerimine ja tema argumendi või argumentide väärtuste hulga määramine peab olema täiesti täpne; see toimub väga lihtsalt, kui funktsioon on antud operatiivselt, valemi abil, ja tunduvalt raskemini, kui on tegemist uue funktsiooniga, mis ei ole avaldatav juba tuntud funktsioonide abil, nagu see on näiteks eksponentfunktsiooni ja vähemalt ühe trigonomeetrilise põhifunktsiooni tundmaõppimisel. Mõnel puhul õnnestub ilma erilise raskuseta näidata ka funktsiooni väärtuste hulka, kuid sagedamini saab selle alles tema üksikasjalikul uurimisel. Pidevusest saavad õpilased ainult konkreetse kujutluse, mis on rajatud sellele vaatepildile, mille annab kõvera joonestamine ilma pliiatsi teravikku paberilt tõstmata. Tundes piirväärtuse mõistet on keskkooli õpilased tegelikult ette valmistatud selleks, et võiks täpselt defineerida ühemuutuja funktsiooni pidevust nii tema antud punktis kui ka lõigul, kuid kindla näitliku kujutluse loomine pidevast funktsioonist koos selge kujutlusega reast konkreetseist juhtumeist, kus pidevus on rikutud, kujutab endast ka suurt väärtust. Muutumiskäigu uurimine mis tahes intervallis nõuab üldiselt tuletise kasutamist, kuid paljudel erijuhtumitel on teostatav ka elementaarselt. Sellega nimelt on seotud praktiliste rakenduste poolest kõige rikkam külg kogu tööst funktsioonide tundmaõppimise alal, külg, mis loob avara põllu õpilastele jõukohaseks iseseisvaks tööks, mis õige korralduse puhul neid ikka tugevasti huvitab, isegi innustab. Jääb märkida veel, et tabuleerimisel tuleb maksimaalselt kasutada käepärast olevaid valmistabeleid ja õpilastele teadaolevaid arvutuste ratsionaliseerimise võtteid, ja sellele järgnev graafikute ehitamine peab välja kujundama vastavad tehnilised oskused (mastaab ja telgede asendi valik, tugipunktide märkimine, graafiku enda joonestamine). Graafiku ehitamine peab tuginema teoreetilistele järeldustele funktsiooni muutumiskäigu kohta, kuid mõnikord tuleb see loomulik järjekord asendada vastupidisega: funktsiooni definitsioonist graafiku käigu kohta järelduvate andmete puudumisel ehitatakse rida punkte sellest graafikust ja nende alusel tehakse enam või vähem tõenäone järeldus funktsiooni muutumiskäigust nende tugipunktide vahelistes intervallides.

Niisugune funktsiooni tundmaõppimise käsitus ei peaks leidma vastuväiteid, kui sedalaadi järeldustes näha ainult seda, mida nad endast tõepoolest kujutavad, s. o. hüpoteese, arvamusi, ja mitte näha neis tõestusi.

Vaatleme üht näidet funktsiooni tundmaõppimise alalt. Oletame, et kõnes on küsimus, kui pikk on tara, millega on vaja kolmest küljest piirata ristküliku kujuline maatükk pindalaga 200 m², mis ühe küljega on vastu hoone seina, s. o. kõne all on funktsioon $y = 2x + 200 : x$, kus x on ristküliku kummagi kahe, vastu seina toetuva külje pikkus. Praktilist huvi pakub x selle väärtuse leidmine, mille puhul funktsioon y omandab vähima väärtuse, kuid küsimus tuleb seda laiemalt, selle funktsiooni üldise uurimisena, püüdes vastused saada järgmistele eriküsimustele: 1) missuguste x väärtuste puhul see funktsioon on

määratud? (kõigi nullist erinevate reaalarvude puhul, kusjuures x asendamisel — x-ga funktsioon muudab märgi, säilitades absoluutväärtuse, ja seetõttu piisab, kui teda uurida vahemikus 0 kuni $+\infty$); 2) kuidas muutub y, kui x kasvab? (ei ole raske näidata täiesti elementaarsel teel, et x kasvamisel vahemikus $0 - 10$ y kahaneb ja vahemikus 10 kuni $+\infty$ kasvab, omades järelikult $x = 10$ puhul miinimumi, mis võrdub 40); 3) missugused väärtused omab y või parem: 0,5 y argumendi x väärtuste korral, mis muutuvad väärtusest $x = 1$ kuni väärtuseni $x = 20$ iga 1 järgi? (see arvutustöö teostub mõne minutiga, kui kasutada pöördväärtuste tabelit); 4) missugune on funktsiooni graafiku kuju x väärtustel arvust 1 kuni 20? (kasutades veerandit ruudulisest vihulehest, võtame mastaabiks X-teljel 1 m ühes ruudu küljes, s. o. 2 m ühes sentimeetris ja Y-teljel 10 m² ühes ruudu küljes, s. o. 20 m² ühes sentimeetris); 5) missugune on graafiku kuju väljaspool seda vahemikku? (y kasvab kiiresti, kui x läheneb 1-st 0-le, ja tunduvalt aeglasemalt, kuid üha kiirenevalt, kui x kasvab alates 10-st; x negatiivsete väärtuste puhul on graafik eelnevaga sümmeetriline alguspunkti suhtes; on soovitav ehitada graafik vähemas mastaabis); 6) missugune on funktsiooni y väärtuste hulk? (kõik reaalarvud $-\infty$ kuni -40 ja $+40$-st kuni $+\infty$); 7) missuguse järelduse võib kõige leitu põhjal teha üldisema funktsiooni $y = x + k^2 : x$ käigu kohta?

Koolis lahendatavad ülesanded algebra, geomeetria ja trigonomeetria alalt pakuvad tohutul hulgal funktsioone, mis on IX ja X klassi õpilastele tundmaõppimiseks täiesti sobivad. Rikkalik valik suurepäraseid käsitlusobjekte leidub varem nimetatud artikleis [III, 33 b ja III, 30 b] ja eriti raamatuis [III, 17 a, b]. Huvitavat materjali võib leida ka raamatus [III, 19].

VI peatükk.

ARVU MÕISTE ARENDAMINE KESKKOOLI VANEMAIS KLASSIDES.

§ 28. Irratsionaalarvude tarvituselevõtmine. Reaalarvude hulk.

Kooli matemaatika kursuses pole olemas teist peatükki, mille omandamine läheks niisuguse raskusega nagu peatükk, mis VIII klassis on pühendatud irratsionaalarvude tarvituselevõtmisega teostuvale üleminekule ratsionaalarvude hulgalt reaalarvude hulgale. Isegi põhiküsimusele, mis on irratsionaalarv, annavad keskkooli lõpetajad sageli ebaõigeid vastuseid, mis näitavad, et nad asja sisu ei mõista (sagedaimini öeldakse, et irratsionaalarv on juur). Kurva pildi maalib artikkel [III, 31], mis põhineb kahe linna koolidest kogutud materjalil. Eriti huvitavad vastused on saadud küsimusele selle kohta, kas võib liita arve π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ja $\sqrt{8}$. Õige vastuse asemel, mis kinnitaks kõigi nende arvude liitmise võimalust ja võimalust esitada nende summa ligikaudselt kümnendarvuna kuitahes suure täpsusega, väidavad enam kui pooled õpilased kategooriliselt, et neist saab liita ainult kaht arvu, nimelt $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{8}$. Niisiis kõrvalise tähtsusega üksikasi, nimelt võimalus esitada arvude $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{8}$ summa kujul $3\sqrt{2}$, on saanud paljudel õpilastel asja sisuks, kuid reaalarvude liitmise tõeline mõte, rajatuna kasvõi ainult lõikude summa geomeetrilisele kujutlusele, kui lõikude pikkused väljenduvad antud liidetavatega, on neile tundmatu.

Ilma irratsionaalarvudeta ei ole elementaarmatemaatikas võimalik läbi saada, kuid ühtki olemasolevaist reaalarvu teooriaist ei ole nende keerukuse tõttu võimalik keskkoolis täielikult tundma õppida. Teistest keskkoolile lähemal on Cantor-Méray teooria, mis on üles ehitatud ratsionaalarvude fundamentaaljärjendi mõistel, mille erijuhtumiks on iga kümnendlähendite järjend; selle teooria üksikasjaliku käsitluse võib leida näiteks raamatust [III, 30 d], kuid keskkoolis on täiesti jõukohaseks ainult niisugune reaalarvu teooria käsitlus, mis on rajatud geomeetrilise materjali kasutamisele. Kõige loomulikum on positiivset reaalarvu keskkooli õpilastele arusaadavaks teha sirglõigu pikkusena, võttes aksioomina, et iga lõigu puhul leidub arv, mis meelevaldselt valitud pikkusühiku korral väljendab selle lõigu pikkust, ja et iga arvu puhul, mida saab esitada lõpliku või lõpmatu kümnendmurruna, leidub lõik, mille pikkust see arv väljendab (meelevaldse pikkusühiku korral). Kui mõõdetav lõik ja ühiklõik on ühismõõduga lõigud, siis pikkusmõõt väljendub ratsionaalarvuna, ja kui nad on ühismõõduta, siis irratsionaalarvuna, kusjuures see irratsionaalarv esineb kümnendsüsteemis mõõtmise tulemusena lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna. Koolile vastuvõetava ja lõigu mõõtmisel põhineva irratsionaalarvu teooria käsitluse võib leida artiklis [III, 2 c], mida lugejal soovitame kasutada. Näib, et geomeetrilist elementi saaks selles käsitluses veelgi tugevdada, defineerides kahe positiivse reaalarvu summa lõikude summa kaudu ja korrutise nendel lõikudel ehitatud ristküliku pindala kaudu, kuid need seisukohad vajavad veel üksikasjalikku läbitöötamist.

VIII klassi algebra programm näeb ette irratsionaalarvu mõiste tarvituselevõtmist ühenduses juurte tundmaõppimisega, mitte aga ühenduses lõigu mõõtmise ülesandega, kuigi «Seletuskirjas» on küllalt selgesti öeldud: «Käsitluse kõigil etappidel kasutatakse ulatuslikult geomeetrilist illustratsiooni ja irratsionaalarvude eneste kasutuselevõtmist motiveeritakse geomeetria vajadustega (ühismõõduta lõigud)» (lk. 11, 1952. a. trükk).

Arvu mõiste järkjärgulist laiendamist saab suurepäraselt illustreerida arvtelje punktide abil. Märkinud arvteljel punktid 0 ja 1, s. t. valinud alguse, pikkusühiku ja positiivse suuna, vaatleme esmalt kõigi täisarvuliste punktide hulka, s. o. punkte abstsissidega 0, ± 1, ± 2, ± 3, ..., millega saame täisarvude hulga kujutise. Edasi jaotame iga vahemiku kahe täisarvulise abstsissiga naaberpunkti vahel 2-ks, 3-ks, 4-ks, 5-ks ... võrdseks osaks ja, märkinud jaotuspunktid, saame telje kõigi ratsionaalsete punktide hulga, mis on kõigi ratsionaalarvude hulga kujutiseks.

Sel ajal kui täisarvuliste punktide hulk koosneb üksikuist, üksteisest isoleeritud punktidest, millest igaühel leidub nii ühel kui ka teisel pool lähim naaberpunkt, omab ratsionaalsete punktide hulk uut omadust, mida nimetatakse «tiheduseks iseendas» ja mis seisneb selles, et iga kahe ratsionaalse punkti vahel leidub veel vahelmisi ratsionaalseid punkte. Seejuures ratsionaalsed punktid ei täida arvtelge täielikult, nagu kerge on tõestada. See tähtis matemaatiline fakt ei mahu hästi algajate pähe, sest punkte mõeldakse väga väikestena, kuid siiski teatavat ulatust omavaina, millest tuleneb veendumus, et lõpmatu hulk ratsionaalseid punkte peab lõigu täitma täielikult, ja tuleb kulutada õige palju aega selleks, et saavutada ratsionaalarvude hulga katkevuse tunnustamine.

Küsimuse aritmeetiline külg, nimelt see lause, et iga ratsionaalse punkti abstsiss on väljendatav lõpliku kümnendmurruna või lõpmatu perioodilise

kümnendmurruna ja iga irratsionaalse punkti abstsiss — lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, on pärast seda võrratult kergemini kättesaadav. Kuid tehete definitsioonid irratsionaalsete arvude puhul, mis on rajatud puuduga ja liiaga võetud nende arvude ligikaudsete väärtuste järjendite vaatlemisele, on nähtavasti keskmisele VIII klassi õpilasele talumatult raske. Artikkel [III, 2 c] annab need definitsioonid niisugusel kujul, et vaevalt on käsitluse edasine paremaks muutmine võimalik, kuid ka selles on tunnustatud otstarbekohaseks anda põhiteoreemid kahe reaalarvu summa ja korrutise olemasolu kohta ilma tõestuseta. Seetõttu tekib küsimus: kas pole parem anda teissugused, kergemad definitsioonid, kasvõi liigsete geomeetrilise sisuga aksioomide tarvituselevõtmise arvel?

Näib mõistlikuna piirata VIII klassis irratsionaal- ja reaalarvude kohta õpitav materjal järgmiste punktidega, taotelles täielikku selgust nende mõistmises ja suuremat kindlust nende meelespidamises.

1. Ratsionaalarvude hulk, mis sisaldab kõik positiivsed kui ka negatiivsed täis- ja murdarvud ja arvu null, ei ole küllaldane lõikude täpseks mõõtmiseks. Koos lõpmatu, iseendas tiheda ratsionaalsete punktide hulgaga leidub arvteljel veel samuti lõpmatu irratsionaalsete punktide hulk, s. t. niisuguste punktide hulk, kus iga punkti kaugus algusest väljendub irratsionaalarvuga. Nii on irratsionaalne punkt näiteks teljel asetsev punkt, mille kaugus algusest võrdub ruudu diagonaaliga, kui ruudu külg on võrdne ühikuga.

2. Iga ratsionaalarvu saab anda lõpliku kümnendmurruna või lõpmatu perioodilise kümnendmurruna ja iga irratsionaalarvu lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, mis saadakse lõigu kümnendsüsteemis mõõtmise tulemusena. Ratsionaalarvude hulk annab pärast irratsionaalarvude hulga ühendamist temaga reaalarvude hulga. Iga reaalarvu, nii ratsionaalset kui ka irratsionaalset saab ligikaudselt esitada kahe ratsionaalarvu abil kui tahes suure täpsusega, kusjuures üks neist arvudest on lähendiks puuduga, teine liiaga.

3. Reaalarvude hulga kohta kehtib järgmine aksioom: kui arvteljel on antud alguspunkt ja ühikpunkt, s. o. punktid abstsissidega 0 ja + 1, siis telje igale punktile vastab üks reaalarv, mis väljendab selle punkti kaugust alguspunktist (tema abstsissi) ja igale reaalarvule vastab üks ja ainult üks punkt, mis asetseb alguspunktist selle arvuga väljendatud kaugusel (s. o. punkt antud abstsissiga).

4. Kõik neli tehet reaalarvudega, nii ratsionaalsete kui ka irratsionaalsetega, on teostatavad samal määral kui üksinda ratsionaalarvudega: iga kaht reaalarvu saab liita, lahutada, korrutada ja jagada (välja arvatud üks erand: nulliga jagada ei saa), saades tulemuseks igakord mingi reaalarvu. Teiste sõnadega: reaalarvude hulk moodustab «korpuse», samuti kui ratsionaalarvude hulk.

Reaalarvudega teostatava tehte tulemuse saab kui tahes suure täpsusega esitada kahe ratsionaalarvu abil, mis väljendavad seda tulemust puuduga ja liiaga ja mis saadakse, kui antud arvude ligikaudsete väärtustega teostada samad operatsioonid.

Tarvitatavate terminite täpse tähenduse selgitamisel ja küllaldasel hulgal geomeetrilisi illustratsioone kasutades võib kindlus-

tada neis neljas punktis loetletud matemaatiliste faktide teadliku omandamise, kusjuures mõned nimetatud lausetest tõestatakse, teised võetakse vastu ilma tõestuseta, kuid kontrollides neid sellekohaste näidete varal.

§ 29. Imaginaararvude tarvituselevõtmine. Kompleksarvude hulk.

Ka kompleksarvude tundmaõppimisega X klassis ei ole olukord tänini korras, kuid mõnevõrra teises mõttes kui reaalarvude tundmaõppimisega. Programmile vastav materjal Kisseljovi õpikus ei ole suur ning on õige lihtsalt käsitletud; keskkoolilõpetajail on see harilikult üsna hästi meeles, kuid kompleksarvude õiget mõistmist esineb nende juures ainult haruldasel erandjuhtumil. Nad näevad imaginaararvudes ainult reaalset sisu mitteomavaid matemaatilisi sümboleid. Püüdes mõista, miks ruutjuure leidmist negatiivsest arvust vaadeldi VIII klassis võimatu tehtena, aga X klassis see tehe osutub võimalikuks ja selle tulemus kuulutatakse mingiks eriliseks uueks, «imaginaarseks» arvuks, ei leia teadmishimulisemad õpilased enamikul juhtumeil neid rahuldavat seletust ei õpikust ega õpetajalt ja jõuavad kõige kahjulikumale järeldusele, et siin on tegemist asjadega, mis ei ole kättesaadavad nende mõistusele. Võib kindlalt väita, et niisugune kompleksarvude tundmaõppimine toob ainult kahju. Kui sellest kõneldakse ja kirjutatakse võrratult vähem kui reaalarvude tundmaõppimise olukorrast koolis, siis ainult sellepärast, et teema «Kompleksarvud» on teistest isoleeritud ja nende arvude halb mõistmine ei peegeldu kuigi tunduvalt lõpetanute ettevalmistuses kõrgemas koolis töötamisel, kus see peatükk võetakse läbi harilikult uuesti, kui üldse võetakse, kasutamata seda, mis sel alal on pakutud keskkoolis. Enamikus koolides praktiseeritavast kompleksarvude puhtformaalsest käsitlusest tulenev kahju seisneb moonutatud kujutluse loomises neist arvudest, mis mõtliku õpilase silmis heidab teatava varju kogu matemaatikale.

Olukord muutub oluliselt, kui kohe algusest peale seada küsimus mingi reaalsuse peegeldamisest arvudega, kusjuures selleks reaalarvudest üksinda on vähe. On võimalikud kolm teed: tasapinna punktide hulga vaatlemine; alguspunktist väljuvate ja tasapinna igasse punkti minevate vektorite vaatlemine; pöörd- ja venitamisoperatsiooni vaatlemine, mis võimaldavad ühikvektorist saada iga vektori. Minnes esimest teed mööda, saame kompleksarvude sama geomeetrilise interpretatsiooni, mis programmis on ette nähtud; erinevus on ainult selles, et hariliku käsitlusjärjekorra puhul õpilastele tundmatu mõiste — kompleksarv — tuleb primaarsena, ja seda iseloomustav tasapinna punkt tuletatuna, sekundaarsena, sel ajal kui õige oleks just vastupidine järjekord. Uurides arvtelje punktide hulka, iseloomustame igaüht neist mingi reaalarvuga:

igale punktile vastab üheselt reaalarv ja igale reaalarvule vastab üheselt telje kindel punkt, võimalikele telje kahe punkti vahelistele relatsioonidele «ühtib», «eelneb» ja «järgneb» vastavad jällegi üheselt relatsioonid «on võrdne», «on vähem» ja «on suurem» vastavate arvude vahel (need kaks hulka on «isomorfsed»). Idee konkreetse reaalsuse — sirgjoone punktide hulga — peegeldamisest selle abstraktsiooni abil, mida kujutavad endast reaalarvud, annab meile võimaluse arvudega opereerides kaudsel teel kindlaks teha selle reaalsuse niisugused omadused, mida muidu saaks kindlaks teha ainult raskusega. Teades näiteks kahe punkti abstsisse x_1 ja x_2 võime saada teada nendevahelise lõigu pikkuse ilma selle otsese mõõtmiseta, teostades ainult ühest arvust teise lahutamise. Loomulikult tekkivale küsimusele, kas analoogilisel viisil ei ole võimalik ka tasapinna iga punkti väljendada arvuga, saab järgmise vastuse: iga arvupaari x ja y, mis Cartesiuse ristkoordinaatides iseloomustab punkti asukohta tasapinnal, saab vaadelda ühe arvuna z, mida tuleb nimetada «ühendarvuks» ehk «liitarvuks» ehk üldtunnustatud ladinakeelset terminit kasutades, «kompleksarvuks». Iga niisugune arv on samas mõttes tasapinna punkti asukoha karakteristikuks, nagu reaalarv on sirgjoone punkti asukoha karakteristikuks, tasapinna punktide hulk ja kompleksarvude hulk on isomorfsed. Kompleksarvud kaotavad, kui neid vaadelda tasapinna punktide täiesti reaalse hulga peegeldusena, õpilaste silmis oma salapärase iseloomu. Täieliku selguse saab ka kõigist kompleksarvu mõiste kohta käivatest definitsioonidest ja terminitest. Kaks kompleksarvu $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ on võrdsed siis ja ainult siis, kui eraldi võrdsed on nende esimesed elemendid ja teised elemendid, s. t. eeldusel, kui $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$. Teisiti ei saa ju ollagi, sest ainult sel eeldusel esindavad arvud z_1 ja z_2 üht ning sama punkti. Kompleksarvud liigitatakse reaalseiks kompleksarvudeks, mis esindavad abstsisstelje punkte ja mille teine element on võrdne nulliga, kusjuures kirjutis $(x, 0)$ asendatakse lühemaga — üksinda esimese elemendiga x, nii et reaalne kompleksarv $(x, 0)$ on samane reaalarvuga x, ja imaginaarseiks kompleksarvudeks, mis esindavad tasapinna kõiki ülejäänud punkte, s. o. väljaspool abstsisstelge olevaid punkte, ja mille teine element on nullist erinev. Imaginaarsete kompleksarvude hulgas paistavad silma puhtimaginaarsed kompleksarvud, mis esindavad Y-telje punkte (peale alguspunkti) ja mille üldkuju on $(0, y)$, kus $y \neq 0$. Sümboliga i tähistatavaks imaginaarseks ühikuks nimetatakse puhtimaginaarset kompleksarvu $(0, 1)$, mis esindab Y-telje ühikpunkti; valemid $i^2 = -1$ ja $\sqrt{-1} = \pm i$ ilmuvad alles hiljem, pärast kompleksarvude korrutise mõiste selgitamist. Kompleksarvu (x, y) tavaline kirjutusviis $x + iy$ on kuni kompleksarvude summa mõiste selgitamiseni ainult siis õigustatud, kui tehakse märkus, et selles esinev märk pluss ei ole liitmismärk. Kuna hiljem selgub, et ta lõpuks siiski on liitmismärk, sest $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$, siis on parem algul kasutada kirjutusviisi (x, y) ja alles pärast kahe kompleksarvu liitmise

ning kompleksarvu reaalarvuga korrutamise mõiste selgitamist üle minna harilikule kirjutusviisile.

Sama loomulikult saadakse ka kompleksarvu trigonomeetriline kuju kui punkti asukoha karakteristik punkti polaarkoordinaatide r ja α abil.

Kompleksarvude tarvituselevõtmine tasapinna punktide hulga vaatlemise teel kujutab endast kõige loomulikumat ja lihtsamat teed nende mõistmiseks. Kuid tuleb näidata ka, et teised kaks teed on võimalikud. Arvestades seda, et kompleksarv (x, y) esindab mitte ainult punkti, mille koordinaadid on x ja y, vaid ka koordinaatide algusest sellesse punkti minevat vektorit, missugune vaade täiesti vastab vaatele ratsionaalarvust kui suuruse muutumise väljendusest (vt. lk. 206), saame võimaluse defineerida kahe kompleksarvu summat liidetavaile vektoreile ehitatud rööpküliku diagonaalina. Selgitanud aga, et kompleksarvu on võimalik vaadelda selle pöörde- ja venitamisoperatsiooni väljendusena, mis teisendab ühikvektori (1; 0) meelevaldselt antud vektoriks mooduliga r ja argumendiga α, saame võimaluse defineerida kahe kompleksarvu korrutamist niisuguse pöörde- ja venitamisoperatsioonina, mis on samaväärne kahe järjestikku teostatava operatsiooniga, mida väljendavad tegurid.

Kui kompleksarvude tundmaõppimisel minna näidatud teed, lähtudes reaalseist geomeetrilisist kujundeist, siis arusaamine kompleksarvude mõttest ja tähtsusest on tagatud. Õpilastele arusaamatute definitsioonide ja teoreemide päheõppimine ei too peale kahju midagi, kuid asja õige korralduse puhul tõstab kompleksarvude teooria elementide omandamine keskkooli lõpetajad kõrgemale matemaatilise kultuuri astmele.

Kui õpetaja ei tunne ennast küllalt kindlana selleks, et julgeda teha eespool näidatud küllaltki suur murrang traditsioonilises käsitluses, siis võib temale soovitada detailselt uurida seda käsitlust, mille annab raamatu [III, 33 a] peatükk VII. Täielikult seda käsitlust X klassis kasutada pole võimalik, kuid ta võimaldab õpetajal vältida kompleksarvude käsitlemisel puhtmatemaatilisi vigu.

Lõpuks mõni sõna ühest raskusest, millega õpetaja võib mõnikord kokku puutuda: kus peitub viga järgmise võrduste reaga väljendatud arutluses: $i^2=(+\sqrt{-1})^2=(+\sqrt{-1})\cdot(+\sqrt{-1})=+\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=+\sqrt{+1}=+1$? Selle vea võib leida alles pärast kompleksarvust ruutjuure võtmise võimalikkuse ja kahesuse selgitamist (siin peitub veel üks argument selle vastu, et imaginaarset ühikut algusest peale defineerida kui ruutjuurt arvust -1). Kindlaks teinud, et ruutjuurel igast kompleksarvust on kaks vastandlikku väärtust, tuleb selgitada, missugune väärtus on kahe ruutjuure korrutisel, kus kummalgi teguritest on üks kindel väärtus. Reaalarvude puhul kehtib lihtne reegel: kui korrutada kaks ühesuguste märkidega võetud ruutjuurt mingist kahest arvust, siis saab positiivse ruutjuure nende korrutisest; kui aga korrutada kaks erinevate märkidega ruutjuurt, siis saab negatiivse ruutjuure korrutisest: $(+\sqrt{a})\cdot(+\sqrt{b})=+\sqrt{ab}$; $(-\sqrt{a})\cdot(-\sqrt{b})=+\sqrt{ab}$; $(+\sqrt{a})\cdot(-\sqrt{b})=-\sqrt{ab}$. Kuid selle reegli lihtne ülekandmine kompleksarvudele ei ole võimalik: on ju meil korduvalt olnud võimalus veenduda, et üleminekul ühe arvuhulga juurest teise (laiendatud) hulga juurde mõned tehete omadused

säilivad, teised aga muutuvad; meenutame näiteks, et positiivsete arvude puhul õige võrratus $a + b > a$ ei ole pärast üleminekut ratsionaalarvude juurde enam alati õige. Kompleksarvude korrutamist tuleb teostada valemi $r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \cdot r_2\ (\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = r_1 r_2\ [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$ järgi, ja see ütleb, et $i \cdot i = (\cos 90° + i\sin 90°) \cdot (\cos 90° + i\sin 90°) = \cos 180° + i\sin 180° = -1$. Niisiis, viga ülalpool antud võrduste reas on seal, kus korrutis $(+\sqrt{-1}) \cdot (+\sqrt{-1})$ on asendatud arvuga $+\sqrt{(-1)^2} = +1$, sellal kui see korrutis võrdub $-\sqrt{(-1)^2} = -1$.

VII peatükk.

SAMASUSTEISENDUSED KESKKOOLI VANEMAIS KLASSIDES.

§ 30. Keskkoolide vanemais klassides tundmaõpitavad uut liiki samasusteisendused.

Tehted astmetega, mille astendajad on naturaalarvud ja millega VIII klassis tuleb kohe algebra kursuse alguses tegemist teha, ei paku sisuliselt midagi uut võrreldes sellega, mida õpiti juba VI ja VII klassis. Siin on tegemist varem õpitud reeglite kordamisega, mis on ühendatud nende hoolika põhjendamisega astme definitsiooni ja samuti korrutise vahetuvuse ja ühenduvuse omaduse alusel.

	a	b	c	d
a	a^2	ab	ac	ad
b	ab	b^2	bc	bd
c	ac	bc	c^2	cd
d	ad	bd	cd	d^2

Joon. 10.

Enam uut on hulkliikme ruudu küsimuses, s. o. kahe arvu summa ja vahe ruudu valemi üldistamises mis tahes mitme arvu algebralise summa juhtumiks. Lisaks sellele, mis selles küsimuses on kõneldud Kisseljovi õpikus, on väga kasulik anda veel geomeetriline illustratsioon ruudu näol, mille iga külg on n lõigu summa (joonis 10). Selle joonisega tutvunud õpilastel jääb hulkliikme ruudu valem võrratult paremini meelde.

Kaksliikme ruudu valemi teiseks üldistuseks on Newtoni binoomivalem, mis annab kaksliikme n-nda astme ja mida õpitakse X klassis.

Keskkooli vanemais klassides õpitavate samasusteisenduste tähtsaimaks ja raskeimaks liigiks on radikaale sisaldavate avaldiste teisendamine. Neid käsitleme üksikasjalikult järgmises paragrahvis.

Logaritmide tundmaõppimisel tekib vajadus teisendada tähtedest ja arvudest korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise teel koostatud avaldise logaritm teatavate kordajatega varustatud logaritmide algebraliseks summaks, s. t. selles avaldises esinevate suuruste logaritmide lineaarseks funktsiooniks, kui ka vajadus teostada pöördteisendus, s. t. üle minna logaritmide lineaarse

funktsiooni juurest ühe keerukama avaldise logaritmi juurde. Need mõlemad operatsioonid (logaritmimine ja potentseerimine) toimuvad ilma raskusteta, kui logaritmimise põhivalemid, nimelt valemid korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmi kohta on kindlalt omandatud. Algul tuleb nende rakendamist teostada üksikasjaliku üleskirjutamisega ja põhjendavate viidetega iga sammu juures, hiljem lühendatakse üleskirjutust järk-järgult; paljudel juhtumitel võib lõpptulemuse kirjutada otsekohe. Logaritmides näiteks avaldist $x = \frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}$ kirjutame esialgu nii:

$$\log x = \log(ab^2) - \log \sqrt[3]{c} \text{ (teoreem jagatise logaritmist)} =$$
$$= \log a + \log b^2 - \log \sqrt[3]{c} \text{ (teoreem korrutise logaritmist)} =$$
$$= \log a + 2 \log b - \log \sqrt[3]{c} \text{ (teoreem astme logaritmist)} =$$
$$= \log a + 2 \log b - \frac{1}{3} \log c \text{ (teoreem juure logaritmist),}$$

kuid hiljem teostame kõik vahepealsed teisendused peast ja kirjutame otsekohe lõpptulemuse. Potentseerimisülesande puhul, s. t. soovides avaldist, nagu $\log a + 2 \log b - \frac{1}{3} \log c$, esitada mingi uue avaldise logaritmina, läheme vastupidises järjekorras ja jõuame $\log \frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}$ juurde, kusjuures esialgu toimub see aeglaselt ja järk-järgult, kuid hiljem korraga. Aegsasti tuleb hoiatada koolis nii sageli esineva vea tegemise võimaluse eest, kus $\log(a + b)$ asendatakse summaga $\log a + \log b$. Ei tohi enne üle minna keerukamate logaritmimis- ja potentseerimisülesannete juurde, kuni pole veel selget kujutlust lihtsamaist seda liiki teisendustest. Teisendustehnika harrastamine asja sisust arusaamise arvel annab siin eriti ebameeldivaid tulemusi. Juhtub, et ülesannete kogus toodud õige keerukaid logaritmimis- ja potentseerimisülesandeid õnnelikult lahendavad õpilased satuvad ummikusse, kui küsitakse seost arvude a, b ja c vahel juhtumil, kui nende logaritmid on seotud võrdusega $\log a + \log b = \log c$.

Progressioonide tundmaõppimine on seotud mõnede hulkliikmete samasusteisendustega, millest kõneldakse § 38, ja ülesanded kompleksarvudele nõuavad paljude varem õpitud teisenduste teostamist, millega kaasub i^2 asendamine arvuga — 1. Samasusteisendusi, mis on ühenduses jagamisega $(x - a)$-kujulise kaksliikmega, on vaadeldud tagapool (§ 37).

§ 31. Radikaale sisaldavate avaldiste teisendamine.

Töö radikaale sisaldavate avaldiste teisendamise tundmaõppimise alal algab loomulikult selle selgitamisega, mida kujutab endast $\sqrt[n]{a}$, kus a on mis tahes reaalarv ja n on mingi naturaalarv, mis on suurem kui 1. Kuid üksinda definitsioonist, mis sisaldub valemis $(\sqrt[n]{a})^n = a$, on siin vähe: on vaja mõista, milliseil juhtumeil on olemas üksainus seda juurt väljendav reaalarv, milliseil teda pole olemas ja milliseil ta on olemas, kuid ei ole ühene. Lihtsaim on olukord kompleksarvude korpuses: missugune ka oleks nullist erinev kompleksarv a ja missugune ka oleks arvust 1 suurem naturaalarv n, alati leidub n ja ainult n erinevat kompleksarvu, mis rahuldavad seatud tingimust ja mida kõiki väljendab sümbol $\sqrt[n]{a}$. Kuid reaalarvude korpuses on olukord keerulisem ja VIII klassis tuleb hoolega vahet teha juhtumite vahel, kus n on paarisarv ja kus n on paaritu: paarisjuurijaga juur mis tahes positiivsest reaalarvust on olemas ja omab kaht vastandlikku väärtust, kuid sama juurt negatiivsest reaalarvust ei ole olemas, paaritu juurijaga juur mis tahes reaalarvust on olemas ja omab ühtainsat väärtust. Tingimata tarvilik on saavutada selle fakti kindel tundmine, fakti, mis rea näidete vaatlemise teel on täiesti omandatav õpilaste poolt, kuigi selle tõestusest, mis on rajatud juure esitamisele kümnendmurruna, saadakse raskusega jagu. Positiivse arvu paarisjuurijaga juure kahesus kujuneb suureks ebamugavuseks, mille kõrvaldamiseks võetakse tarvitusele juure aritmeetilise väärtuse, s. o. tema mittenegatiivse (positiivse või nulliga võrduva) väärtuse mõiste. Niiviisi omandab sümbol $\sqrt[n]{a}$, kus a on mis tahes mittenegatiivne arv ja n on ühest suurem mis tahes naturaalarv, täiesti määratud tähenduse. Ta väljendab seda ainsat mittenegatiivset arvu, mis $a > 0$ korral on positiivne ja $a = 0$ korral on 0 ja mis astendamisel arvuga n annab a. Siiski ei tohi unustada, et paarisjuurijaga juure leidmise ülesanne on ainult reaalarvudega tegelemise korral teostamatu juhtumil, kui $a < 0$, ja teostatav, kuid annab kaks väärtust, $+\sqrt[n]{a}$ ja $-\sqrt[n]{a}$ juhtumil, kui $a > 0$.

Pärast juure aritmeetilise väärtuse mõiste selgitamist asume vaatlema tema mõnd omadust: juure omadust jääda muutumatuks juurija ja juuritavas leiduva astendaja üheaegsel korrutamisel ühe ja sama arvuga (analoogia põhjal murdudega nimetatakse seda omadust juure põhiomaduseks), siis omadusi, mis on ühenduses korrutise, jagatise, astme ja juure juurimisega. Kisseljovi õpikus antud nende omaduste tõestused võivad tekitada arusaamatusi, kui mitte pöörata tähelepanu positiivse arvu astme muutumise monotoonsusele astendatava muutumisel. Tõepoolest, võrduse $\sqrt[n]{abc} =$

$= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$ tõestamiseks soovitatakse tema mõlemad pooled (mille kohta veel ei ole teada, kas nad on võrdsed või mitte) astendada arvuga n, ja, saanud vasakul ning paremal ühe ja sama avaldise abc, järeldatakse, et ka antud võrduse pooled on võrdsed. Kuid niiviisi arutades saame tõestada, et -5 ja $+5$ on võrdsed: on ju $(-5)^2 = 25$, $(+5)^2 = 25$, $(-5)^2 = (+5)^2$, järelikult $-5 = +5$! Siin on vaja toonitada, et kuna kõnes on ainult positiivsed arvud, siis võrratusest $a > a_1$ järeldub võrratus $a^n > a_1{}^n$ ja seetõttu oletusest, et $\sqrt[n]{abc} > \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$ järelduks, et $(\sqrt[n]{abc})^n > (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c})^n$ ehk $abc > abc$, mis on absurdne. Teise täiesti õige tõestusviisi võib leida raamatus [III, 34 a].

Sellal kui täis- ja murdratsionaalseil avaldistel on olemas omad kanoonilised kujud (peatähe alanevate astmete järjekorras korraldatud hulkliige ja kahe niisuguse hulkliikme jagatis), ei ole radikaale sisaldavail avaldistel sellist normaalkuju olemas, ja see loob irratsionaalsete avaldiste samasusteisenduste küsimuses raskusi. Nii kalduvad õpilased näiteks $\sqrt{75}$ esitama kujul $5\sqrt{3}$ ja õpetaja mõnikord isegi visalt nõuab seda teisendust, kuid on ilmne, et see on üleliigne, kui peetakse silmas ainult arvulise väärtuse saamist: väärtuse $\sqrt{75} \approx 8{,}660$ saab otseselt tabelist, kuid $5\sqrt{3}$ väärtuse saamiseks tuleb tabelist võtta $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ ja korrutada see 5-ga. Omandanud teguri juurimismärgi alt väljatoomise operatsiooni ja selle pöördoperatsiooni — teguri viimise juurimismärgi alla, tuleb igal üksikjuhtumil selgitada, kumb kuju on kasulikum: $a\sqrt[n]{b}$ või $\sqrt[n]{a^n b}$. Seda valemit rakendades ei tohi unustada mõnd tarvilikku kitsendust. Näiteks, kui a on negatiivne arv ja n paarisarv, siis juure aritmeetiliste väärtuste puhul võrdus $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ ei ole kehtiv.

Õige palju aega pühendatakse VIII klassis teisendustele, mille eesmärgiks on irratsionaalsuse kaotamine murru nimetajast, kuid mitte kaugeltki alati ei mõista õpilased selle operatsiooni eesmärki, nagu sellest juba kõneldi eespool (§ 5, III osa), ja tuleb hoolitseda selle eest, et see eesmärk saaks selgeks.

Paljudel juhtumitel kasulik liitradikaali valem $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{0{,}5(A + \sqrt{A^2 - B})} \pm \sqrt{0{,}5(A - \sqrt{A^2 - B})}$ ei ole kehtivas programmis ette nähtud, kuid mõnikord esineb ülesandeid, kus ta võimaldab teisendusi oluliselt lihtsustada. Näiteks ringisse, mille raadius on r, joonestatud korrapärase 12-nurga külje avaldist $r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ saab selle valmi abil teisendada lihtsamaks avaldiseks $0{,}5r(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; selle tõestus, et funktsioonil $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ on juhtumil, kui $1 \leqq x \leqq 2$ konstantne väärtus 2, ja juhtumil, kui $\leqq 2 x < +\infty$, teda saab esitada lihtsama valemiga $y = 2\sqrt{x-1}$, muutub väga lihtsaks. Kisseljovi algebra õpiku viimased trükid ei sisalda midagi liitradikaali

valemi alalt ja temaga tutvuda soovival lugejal soovitame pöörduda raamatu [III, 33 a] poole.

Ühenduses iga irratsionaalse tähtavaldisega tekib, nagu ühenduses iga ratsionaalse avaldisegagi, küsimus selle kohta, missugused on tähtede lubatavad väärtused selles, või teiste sõnadega: missugusel arvuhulgal on defineeritud temaga väljendatud funktsioon. Näiteks avaldis $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$ omab mõtet üksinda võrratusi $0<x^2\leqq 1$ rahuldavate x väärtuste puhul, sest vaadeldakse ainult reaalarve; teiste sõnadega: see funktsioon on defineeritud ainult poolintervallil (0; 1), mis sisaldab arvu 1, kui ei sisalda 0, ja poolintervallil (— 1; 0), mis sisaldab arvu — 1, kuid ei sisalda 0. Seetõttu ülesandel — arvutada selle avaldise väärtus juhtumil, kui $x=0{,}5\sqrt{3}\approx 0{,}8660$ — on olemas mõte; tal puuduks mõte, kui oleks tulnud võtta näiteks $x=\sqrt{3}$. Nõutud väärtuse arvutamist on soovitav teostada kaks korda: esiteks asendades x otseselt antud avaldises väärtusega $0{,}5\sqrt{3}$, mis pärast õige pikki teisendusi annab arvu 1, siis pärast eelnevat antud avaldise teisendamist kujuks $\sqrt{1+x}\cdot(1:x+1)+\sqrt{1-x}\cdot(1:x-1)-2$ ehk kujuks $[(\sqrt{1+x})^3+(\sqrt{1-x})^3]:x-2$, mis kergendab asendamist ja viib samale arvule 1, kuid nõuab ka õige palju tööd. Kui asendamist tuleb teostada korduvalt, siis on kasulikum teine tee.

Nimetame järgmist kaht, koolis sageli esinevat viga, mis on ühenduses radikaalidega ning väärivad tähelepanelikku suhtumist. Õpilased arvavad mõnikord, et juur summast (või vahest) on võrdne liidetavate (või vähendatava ja lahutatava) juurimisel saadud juurte summaga (või vahega). Vea selgitamiseks on vaja tuua arvulisi näiteid, nagu ruutjuure leidmine summast $9+16=25$, ja näidata, missuguseil juhtumeil jaotuvuse omadus kehtib, missuguseil mitte. Arvatakse ka, et arvu ruudu ruutjuure aritmeetiline väärtus on alati võrdne selle arvuga, s. t. et $+\sqrt{a^2}=+a$, sellal kui see on õige ainult $a\geqq 0$ korral, kuna $a\leqq 0$ korral kehtib valem $+\sqrt{a^2}=-a$. Valem $+\sqrt{a^2}=|a|$ haarab mõlemad juhtumid.

VIII peatükk.

VÕRRANDID JA VÕRRATUSED KESKKOOLI VANEMAIS KLASSIDES.

§ 32. Ruutvõrrandid ja neile taanduvad võrrandid.

Ruutvõrrandite osa on üheks paremini õnnestunud osadest algebra koolikursuses: VIII klassi õpilased saavad ruutvõrrandite lahendamisega harilikult hästi hakkama ja ülesanded nende võrrandite koostamisele tekitavad hoopis vähem raskusi kui ülesanded lineaarvõrrandite koostamisele VII klassis. Ühenduses sellega on ka nõuded asja teoreetilise külje suhtes siin kehtiva programmi kohaselt suuremad: on ette nähtud vaadelda kõiki juhtumeid, mis võivad esineda üldise ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendamise puhul, kui $a\neq 0$; programm peab tarvilikuks ruutvõrrandi lahendite uurimise tema diskriminandi ja kordajate järgi (sellal kui sellest kergem lineaarse võrrandi uurimise küsimus on viidud X klassi). Aega selle peatüki õppimiseks reserveerib programm täiesti küllaldaselt: koos irratsionaalsete võrranditega, millele tuleb pühendada 5—6 tundi, on meil kasutada 42 tundi. Kõik programmis näidatud

küsimused on valgustatud stabiilses õpikus täielikult ja selgesti ning stabiilne ülesannete kogu pakub harjutusteks materjali küllaldaselt.

Selle osa käsitlemisel tekib raskusi ainult siis, kui õpilaste eelnevas ettevalmistuses on olemas tõsiseid lünki, ja õpetaja, kes VIII klassis harilikult alustab tööd temale uue ja tihti õige kirju õpilaste kollektiiviga, peab kordamisele osutama palju tähelepanu: avastades mõne õpilase juures ühe või teise defekti VI ja VII klassi algebra tundmises, tuleb iga hinna eest hoolitseda selle kõrvaldamise eest, näidates täpselt, mis nimelt tuleb teha, ja määratud ajal kontrollides, kas see ülesanne on täidetud.

Iseenesest mõistetav on, et õpilased peavad ruutvõrrandi lahendite leidmise valemeid mitte ainult teadma, vaid ka oskama tuletada. Töö tavaline järjekord on: esmalt lahendatakse kaheliikmeline võrrand $ax^2 + c = 0$ (eristatakse kolm juhtumit: kui a ja c on ühe ning sama märgiga ja võrrandil lahendeid ei ole, kui a ja c on erinevate märkidega ja võrrandil on kaks, vastandarvudega väljendatavat lahendit, kui $c = 0$ ja võrrandil on üksainus lahend, nimelt null), siis mittetäielik võrrand $ax^2 + bx = 0$, mille vasaku poole tegureiks lahutamine annab kaks lahendit: $x_1 = 0$ ja $x_2 = -b : a$, selle järel täielik taandatud võrrand $x^2 + px + q = 0$ ja lõpuks üldine võrrand $ax^2 + bx + c = 0$. Kogu aeg on jutt ainult reaalseist lahendeist, sest VIII klassi õpilased ei tunne veel mingeid muid arve ja parem on neid mitte viia segadusse mingisuguste imaginaarsete lahendite olemasolu mainimisega, millega nad omal ajal tutvuvad X klassis. Samuti on esialgu parem mitte kõnelda kahest võrdsest lahendist: algaja jaoks on võrrandil $ax^2 = 0$, kus $a \neq 0$, üks ja ainult üks lahend $x = 0$, kuna termini «võrdsed lahendid» ehk «kordsed lahendid» mõttest arusaamine tuleb alles ühenduses võrrandi vasaku poole lahutamisega lineaarseiks tegureiks.

Kisseljovi õpikus lahendatakse kaheliikmeline võrrand $ax^2 + c = 0$, mida seal nimetatakse mittetäielikuks (kuigi parem oleks seda terminit kasutada ainult $ax^2 + bx = 0$ kujuliste võrrandite kohta), ruutjuure võtmisega võrduse $x^2 = -c : a$ mõlemast poolest. Selles on üks hädaoht: õpilased arvavad mõnikord, et kahekordne märk on ruutjuure võtmisel tarvilik ka vasakul poolel, ja võtavad võrduses $\pm x = \pm \sqrt{-c : a}$ korraga mõlemad ülemised märgid ja korraga mõlemad alumised märgid ning jõuavad mõlemal puhul ühe ja sama lahendi juurde. Siin on vaja näidata, et märgid tuleb vasakul ja paremal võtta teineteisest sõltumatult, et siin saab üldse neli märkide kombinatsiooni, millest kaks taanduvad ülejäänud kahele ja tulemuseks saadakse kaks lahendit. Seetõttu on parem eelistada tuletamisviisi, mis põhineb vasaku poole tegureiks lahutamisel pärast murru $-c : a$ asendamist arvuga $(\sqrt{-c : a})^2$ ja selle üleviimist vasakule poolele. Sama märkus käib ka taandatud ruutvõrrandi lahendite valemi tuletamise kohta: parem on läbi ajada ilma juure võtmiseta võrduse pooltest, teisendades vasaku

poole ruutude vaheks $(x+0{,}5p)^2-(\sqrt{(0{,}5p)^2-q})^2$ ja lahutades selle tegureiks. Siis toimub lahendite valemi tuletamine kõigil kolmel juhtumil, nimelt kaheliikmelise võrrandi, mittetäieliku võrrandi ja taandatud võrrandi puhul ühe ning sama võtte abil. Kasuliku harjutusena võib sama võtte abil lasta tuletada lahendite valemi võrrandile $ax^2+bx+c=0$ ja võrrandile $ax^2+2kx+c=0$ (siin on soovitav alata võrrandi liikmete a-ga korrutamisega). On oluline, et õpilased selgesti mõistaksid, missugust ruutvõrrandi kolmest lahendite valemist on kõige kasulikum rakendada missugusel juhtumil: taandatud võrrandi lahendite valemit, kui $a=1$ ja b on paarisarv; teist valemit, kui a on mis tahes arv ja b on paaritu arv; kolmandat, kui a on erinev ühest ja b on paarisarv.

Järgmine teoreetiline küsimus, mille omandamine on VIII klassi õpilastele ka täiesti jõukohane, on Viëta teoreemi (ruutvõrrandi lahendite summa ja korrutise omaduse) tõestus. Arusaamatuste vältimiseks on parem formuleerida see teoreem kohe üldise võrrandi jaoks ja nõuda õpilastelt ühe paari valemite meelespidamist: $x_1+x_2=-b:a$ ja $x_1x_2=c:a$, mitte aga stabiilses õpikus näidatud kahe paari meelespidamist. Soovitav on praktiseerida täisarvuliste kordajatega ruutvõrrandite lahendamist peast kahe arvu leidmise teel nende antud summa ja korrutise järgi.

Nagu võrrandite lahendamisel alati, on soovitav ka ruutvõrrandi lahendamisel leitud lahendid kontrollida. Asendamise asemel on kasulikum leida saadud lahendite summa ja korrutis ning võrrelda neid suhetega $-b:a$ ja $c:a$. See kontrollimisviis põhineb lausel, mis on Viëta teoreemi pöördteoreemiks ja mis tuleks täpselt sõnastada ning tõestada: kui kaks arvu x_1 ja x_2 rahuldavad tingimusi $x_1+x_2=-b:a$ ja $x_1x_2=c:a$, siis nad on võrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendeiks.

Ruutkolmliikme lahutamine tegureiks kutsub mõnikord esile raskusi ühenduses sellega, et siin on jutt mitte võrrandist, vaid funktsioonist. Täiesti sobiv on tarvitusele võtta funktsiooni nullkoha mõiste, mõeldes selle all tema argumendi niisugust väärtust, mille puhul funktsioon saab väärtuse null, ja sõnastada lõpptulemus nii: «ruutfunktsiooni ax^2+bx+c saab esitada, juhtumil, kui $b^2\geqq 4ac$, kolme teguri korrutisena kujul $a(x-x_1)(x-x_2)$, kus x_1 ja x_2 on selle ruutfunktsiooni nullkohad» või teisiti: «iga ruutfunktsioon ax^2+bx+c on $b^2-4ac\geqq 0$ korral kahe lineaarse funktsiooni korrutis» (jääva teguri a võib ühendada ükskõik kummaga tegureist $x-x_1$ ja $x-x_2$). Juhtumil, kui $b^2=4ac$, on $x_1=x_2$ ja tegurid $x-x_1$ ja $x-x_2$ muutuvad võrdseiks, kuid tegureiks lahutamine jääb püsima ja sellega ühenduses saab arusaadavaks ka väide kahe võrdse lahendi olemasolust sel puhul.

Kuigi programmi vastava osa pealkirjas kõneldakse üldiselt «ruutvõrrandeile taanduvaist kõrgema astme võrrandeist,» näeb programm ise ette ainult nende võrrandite ühe liigi tundmaõppimist, nimelt ainult biruutvõrrandeid, s. o. neljanda astme võrrandeid, mis ei sisalda tundmatut esimeses ja kolmandas astmes. Kolmanda,

neljanda ja kuuenda astme kaheliikmeliste võrrandite ja samuti kolmeliikmeliste võrrandite lahendamine on viidud X klassi, sümmeetrilised võrrandid on aga programmist nüüd üldse välja jäetud.

Pärast järgmise teema juurde kuuluva ruutfunktsiooni graafiku tundmaõppimist on väga kasulik tagasi pöörduda ruutvõrrandi lahendamise juurde ja vaadelda võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendeid parabooli ja X-telje lõikepunktide abstsissidena. Märgime, et ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ graafilist lahendamist on kõige parem teostada lineaarse funktsiooni $y = -px - q$ graafiku ja parabooli $y = x^2$ ehitamise teel. See parabool joonestatakse suures mastaabis kord alatiseks ja lineaarse funktsiooni graafik saadakse pinguletõmmatud niidi abil. Praegu ruutvõrrandi lahendamisel ruutfunktsiooni graafikut ei kasutata ja see on muidugi täiesti ebanormaalne.

§ 33. Võrrandid, mis sisaldavad tundmatut juuremärgi all.

Nende võrrandite lahendamise küsimus pakub huvi selles mõttes, et ühenduses nendega tuleb tagasi pöörduda võrrandite samaväärsuse teooria juurde, nagu see on toonitatud ka programmis. Tõstes võrrandi mõlemad pooled ruutu eesmärgiga kaotada sellest isoleeritud ruutjuur, saame võrrandi $f_1(x) = f_2(x)$ asemel uue võrrandi $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ ehk $[f_1(x) + f_2(x)] \cdot [f_1(x) - f_2(x)] = 0$, mida rahuldavad kõik antud võrrandi lahendid, kuid millel peale selle on veel võõrlahendeid, nimelt võrrandi $f_1(x) + f_2(x) = 0$ lahendid. Võõrlahendite tekkimisega puututakse kokku juba VII klassis võrrandi vabastamisel nimetajaist, mis sõltuvad tundmatuist, kuid seal pööratakse sellele vähe tähelepanu.

Võõrlahendi tekkimise võimalus saab eriti hästi selgeks, kui kasutada graafikuid. Lahendanud harilikul viisil näiteks võrrandi $x + 1 = +\sqrt{x+7}$ ja veendunud, et saadud kahest lahendist $+2$ ja -3 kõlbab ainult esimene, asendame selle võrrandi süsteemiga $y = x + 1$ ja $y = +\sqrt{x+7}$ ning ehitame funktsiooni $y = x + 1$ graafiku (sirge, mis X-telge lõikab punktis $x = -1$ ja Y-telge punktis $y = +1$) ja funktsiooni $y = +\sqrt{x+7}$ graafiku (üks haru paraboolist, mille sümmeetriatelg on X-teljel ja tipp on punktis $x = -7$). Need kaks joont lõikuvad ühesainsas punktis $x = 2$, $y = -3$, ja on selge, et teine leitud lahend $x_2 = -3$ vastab sama sirge $y = x + 1$ lõikumisele funktsiooni $y = -\sqrt{x+7}$ graafikuga.

Harilikult vaadeldakse selles osas ainult võrrandeid, mis sisaldavad üht, kaht või kolme ruutjuurt, mis on täiesti küllaldane, sest selle õige väikese osa väärtuseks on nimelt tema seos võrrandite samaväärsuse teooriaga, kuid selle seose selgitamiseks ei ole mingit vajadust võtta väga keerukaid juhtumeid. Selle asemel et raisata aega keerukamate ülesannete lahendamisega, on parem osutada graafikutele suuremat tähelepanu.

§ 34. Esimesest astmest kõrgemate võrrandite süsteemid.

Viimane peatükk VIII klassi algebra kursuses on pühendatud esimesest astmest kõrgemate võrrandite süsteemide lahendamisele; vaadeldakse süsteemi, mis koosneb ühest esimese astme võrrandist ja ühest teise astme võrrandist kahe tundmatuga ja siis kahest kahe tundmatuga teise astme võrrandist koosneva süsteemi erijuhtumite lahendamist. Ühest lineaarsest võrrandist ja ühest ruutvõrrandist koosneva süsteemi lahendamine on VIII klassi õpilastele jõukohane täies ulatuses: tavaline asendamisviis viib alati ruutvõrrandile ühe tundmatuga, kuid lahendi uurimine üldkujul on liiga raske selleks, et anda seda selles klassis. Kuid kahest kahe tundmatuga ruutvõrrandist koosneva süsteemi lahendamine viib üldjuhtumil täieliku ühe tundmatuga neljanda astme võrrandi lahendamisele ja seetõttu tuleb piirduda ainult niisuguste süsteemide erijuhtumite lahendamisega. Väga soovitav on joonestada kasvõi niisuguste lihtsate juhtumite jaoks, nagu $y = x^2$ ja $y = x + a$ (parabool ja sirge) või $xy = 9$ ja $(y - ax)^2 = 1$ (hüperbool ja paralleelsete sirgete paar), graafikud, mis illustreerivad sõltuvalt parameetri a väärtusest mitmesuguseid esineda võivaid juhtumeid (kus leidub 0, 1, 2 või 4 lahendit). On vaja saavutada mõne erikujulise süsteemi kunstliku lahendamisvõtte täielik omandamine, eeskätt süsteemi $x + y = a$, $xy = b$ juhtumil, lahendades selle esiteks üldise, siis kunstliku võtte abil, näidates viimase eeliseid ja hoolitsedes selle eest, et teisendamiste puhul mitte kaotada lahendeid. Näiteks süsteem $x^2 + 4xy + 4y^2 = 64$, $x^2 - 6xy + 9y^2 = 49$ asendub nelja lineaarse süsteemiga ja omab neli lahendisüsteemi, mitte aga üht, nagu võiks arvata, kui juurimist ettevaatamatult teostada.

Kolme ja enama võrrandi süsteemi lahendamine sama tundmatute arvu juures ei ole programmis ette nähtud, kuid geomeetriliste ülesannete lahendamisel ei ole võimalik läbi saada ilma niisuguste süsteemideta, mistõttu neid tuleb lahendada ka algebra kursuses, seda enam, et midagi oluliselt uut siin ei esine ja ülesannete kogus leidub suur valik sobivaid ülesandeid. On tarvis ainult igati ergutada mitmesuguste kunstlike võtete kasutamist (kõrvuti nende ülesannete üldise lahendusvõtte, s. o. asendusmeetodi kasutamisega), millised õpilased leiutavad ise, kui neid juhtida nende võtete otsimisele. Kui klassis kõik lahendasid süsteemi üldise võttega ja üks leidis erivõtte, siis on vaja see võte kõigile teatavaks teha, selgitades tema hüvesid ja puudusi. Näiteks süsteemi $x + y = 2axy$, $y + z = 2byx$, $z + x = 2czx$ võrrandite liikmeti jagamine vastavalt avaldistega xy, yz ja zx ja sellele järgnev nende liikmeti liitmine ja lahutamine annab otsekohe lahendi $z = 1 : (-a + b + c)$, $x = 1 : (a - b + c)$ ja $y = 1 : (a + b - c)$. Kogu see lahendus on niivõrd lihtne, et seda saab täielikult teostada peast, üles kirjutades ainult lõpptulemuse, kuid ta ei ole täielik: jagamine korrutistega xy, yz ja zx eeldab, et ühegi tundmatu väärtuseks ei ole null, ja seetõttu tuleb lisada veel ilmselt õige lahend

$x = y = z = 0$, mis jagamisel läks kaduma. Peale selle esimesena leitud lahend omab mõtet ainult eeldusel, et ükski kolmest summast $-a+b+c$, $a-b+c$ ja $a+b-c$ ei ole võrdne nulliga ja kerge on veenduda, et kui kasvõi ainult üks neist on null, siis süsteemil ei ole muid lahendeid peale triviaalse null-lahendi.

§ 35. Võrratused.

Võrratuste süstemaatilisele tundmaõppimisele (koos võrrandite uurimisega, millest jutt tuleb edaspidi) on pühendatud X klassi algebra kursuse eelviimane peatükk, kuid võrratustega on tegemist igas klassis alates VI, kus esmakordselt ilmuvad märgid $>$ ja $<$. VII klassi programmi peatükis, mis on pühendatud esimese astme võrranditele ühe tundmatuga, mainitakse võrratuste omadusi, nii et jõudes X klassi peab õpilastel juba olema kujutlus võrratuste tähtsamaist omadusist. X klassis neid omadusi süstematiseeritakse ja täiendatakse. Suurepärane käsitlus peaaegu kõigest sellest, mis siin on vaja tundma õppida, leidub artiklis [III, 2b]. Sellele lisaks on vaja anda: 1) esimese astme täheliste võrratuste lahendamine, mis on küllaldasel määral valgustatud Kisseljovi algebra õpikus, 2) võrratuse $ax^2+bx+c \gtrless 0$ lahendamine, s. o. ruutkolmliikme uurimine (vt. näiteks [III, 21]) ja 3) ühe tundmatuga teise astme võrratuste lahendamine (piirdudes sellega, mis leidub artiklis [III, 21]).

Ruutkolmliikme uurimine ja teise astme võrratused on käsitletud Kisseljovi algebra õpiku täienduste peatükis (2. osa 1949. a. tr., §§ 182—187).

Selle teema materjali omandamisel otsustava tähtsusega on, nagu ikka, põhiliste mõistete kindel omandamine. Kahest arvust a ja b esimene on teisest suurem, võrdne sellega või vähem sellest sõltuvalt sellest, kas vahe $a-b$ on positiivne, võrdne nulliga või negatiivne. See kogu võrratuseõpetuse lähtepunkt tuleb omandada kõige põhjalikumal kujul, tuleb teha selgeks ka selle geomeetriline tõlgendamine arvteljel: $a > b$, siis ja ainult siis, kui lõik, mis läheb punktist abstsissiga b punkti abstsissiga a, on positiivse suunaga, s. t., kui rõhttelje hariliku orientatsiooni korral punkt a asetseb punktist b paremal jne. Seda põhidefinitsiooni tulebki kasutada võrratuste kõigi omaduste tuletamisel. Soovides tõestada näiteks, et võrratuse $a > b$ korrutamisel arvuga c jääb võrratusmärk püsima, kui $c > 0$, asendub võrdsusmärgiga, kui $c = 0$ ja märgiga $<$, kui $c < 0$, võrdleme korrutisi ac ja bc, vaadeldes nende vahet $ac - bc = (a-b) \cdot c$.

Võrratuste lahendamise eduks aitab palju kaasa ettetulevate lihtsaimate võrratuste geomeetrilise tõlgendamise harjumus. Näiteks võrratus $x > 5$ esindab kõiki X-telje punkte, mis asetsevad punktist 5 paremal, kahe võrratuse süsteem $x > 5$, $x < 6$ ehk, mis on sama, kahekordne võrratus $5 < x < 6$ esindab kõiki punkte, mis leiduvad punktide 5 ja 6 vahel, kahe võrratuse süsteem $x < 5$, $x > 6$

ei esinda midagi (süsteem on vastuoluline), võrratus $|x| < 2$ on samaväärne kahekordse võrratusega $-2 < x < +2$, võrratus $|x - 5| < 2$ on samaväärne võrratustega $-2 < x - 5 < +2$ ehk, mis on sama, $3 < x < 7$.

Ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ uurimist ei tohi teostada eraldatult funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ geomeetrilisest tõlgendamisest paraboolina, mis oluliselt tõstab kogu töö efekti: kõik muutub piiritult selgeks, kõik jääb võrratult paremini meelde. Kuid ei tule unustada, et kõik järeldused tehakse mitte joonise alusel, vaid algebralise avaldise vaatlemise põhjal, joonis ainult illustreerib neid järeldusi, teeb need näitlikuks.

Võrratuste põhjalikum tundmaõppimine on suurepäraseks teemaks matemaatika ringi töös. Soovitav on kasutada raamatuid [III, 34, 25] ja ülesandeid kogudest [III, 24, 35].

§ 36. Võrrandite uurimine.

Väljendit «võrrandi uurimine» kasutatakse kahes tähenduses. Uurida võrrandit või võrrandisüsteemi kitsamas tähenduses tähendab ilma neid lahendamata selgitada, kas lahend on olemas, ja kui on olemas, siis kas see on ühene; seejuures seatakse sageli lisaküsimusi lahendeid väljendavate arvude omaduste kohta, näiteks küsimus selle kohta, kas need arvud on ratsionaalsed või irratsionaalsed, reaalsed või imaginaarsed, positiivsed või negatiivsed või võrdsed nulliga. Laiemas tähenduses «võrrandit uurida tähendab vaadelda kõiki erijuhtumeid, mis võivad esineda võrrandi lahendamisel ja selgitada nende erijuhtumite tähendust ülesande seisukohalt, mille tingimuste kohaselt võrrand koostati» (Kisseljovi õpik, 2. osa, § 123 1949. a. trüki järgi). Saades näiteks võrrandi $5x^2 - 140x - 834 = 0$, võime seda lahendamata väita, et ta omab kaht reaalset lahendit, millest suurema absoluutväärtusega lahend on positiivne ja teine negatiivne. Et selgitada, kas need lahendid on ratsionaalsed, tuleb arvutada diskriminant $70^2 + 5 \cdot 834$ ja vaadata, kas ta on täpne ruut. Mingisuguseid «erijuhtumeid» ei saa selle võrrandi lahendamisel olla, sest kõik tema kordajad on kindlate, meile teadaolevate arvuliste väärtustega. Kuid kui on antud näiteks võrrand $5x^2 - 140x + a = 0$, mis sisaldab määramata parameetri a, siis on võimalik uurimine teises, laiemas tähenduses, ja viimane näitab, et tuleb vahet teha kolme juhtumi vahel: kui $a < 980$, siis mõlemad lahendid on reaalsed ja erinevad, kui $a = 980$, siis nad on reaalsed ja võrdsed, kui $a > 980$, siis lahendid on imaginaarsed. Võib pakkuda huvi küsimus selle kohta, missugused märgid on lahenditel, kas nad väljenduvad ratsionaalsete või irratsionaalsete arvudena, täis- või murdarvudena — kõik sõltuvalt selle ülesande iseloomust, mille lahendamiseks ta on koostatud. Võib ütelda, et võrrandi uurimisega teises, laiemas tähenduses tuleb tegemist teha alati siis, kui võrrand sisaldab peale tundmatut väljendava tähe

(või tähtede) veel tähti, mille väärtused loetakse antuiks (parameetrid).

Võrrandi uurimine selles laiemas tähenduses on tarvilik koostisosa iga võrrandi lahendamisel, kui see sisaldab kasvõi ainsa parameetri, nagu seda asjaolu oleme eespool korduvalt märkinud. Lahendades x suhtes näiteks võrrandit $ax + b^2 = bx + a^2$ ja leides, et $x = a + b$, ei saa lahendust lugeda lõpetatuks: on tarvilik selgitada, missuguste a ja b väärtuste puhul meie arutlus on kehtiv. Märgates, et lahenduskäigus tuli meil võrrandi mõlemad pooled jagada vahega $a - b$, mis on seaduslik ainult eeldusel, et $a - b \neq 0$, saame, et näidatud lahendi väärtus on õige ainult juhtumil, kui $a \neq b$. Juhtumit $a = b$ tuleb vaadelda eraldi; sel puhul võrrand taandub samasuguseks $ax + a^2 = ax + a^2$ ja rahuldub x meelevaldse väärtusega.

Kui iga ülesande puhul leiab alati täitmist see nõue, et lahendus oleks ammendava iseloomuga, millest kõneldi eespool (I osa § 19) ja mis kogu õppeajal on võimalik, kui ülesande tingimusi formuleerida teatava ettevaatusega, siis töö võrrandite uurimise küsimuste alal taandub lihtsalt mõnede kokkuvõtete tegemiseks, rea tuntud juhtumite süstematiseerimiseks. Kui aga asja sellele küljele ei ole varem tähelepanu pööratud, siis tekivad tõsised raskused: õpilased peavad lahti saama tähelistesse avaldistesse formaalselt suhtumise harjumustest, peavad lühikese aja kestel õppima eristama neid erijuhtumeid, mis lahendamisel võivad esineda. Siit tulenevad õpetajate sagedased kaebused selle osa raskusest, tema ebamäärasusest. Selles osas tuleb läbi töötada need mõned uurimised, mis on toodud Kisseljovi stabiilses õpikus niisuguste tähtsate juhtumite kohta, nagu võrrandite $ax = b$ ja $ax^2 + bx + c = 0$ lahendamine, nagu süsteemi $ax + by = c$ ja $a_1x + b_1y = c_1$ lahendamine, seejuures läbi töötada täiesti teadlikult, mõistes arutluse iga lüli tarvilikkust; kuid sellest ei ole kaugeltki küllalt: on vaja luua oskus teostada iga parameetreid sisaldava võrrandi lahendi uurimist. Uurimine kujuneb seda raskemaks, mida enam on parameetreid, seetõttu tuleb alustada küsimustega, kus esineb ainult üks parameeter. Juhtumeil, kus esineb enam kui üks parameeter, pakub suuri raskusi kõigi võimalike, läbivaatamist vajavate juhtumite klassifitseerimine.

§ 37. Teoreem jäägist, mis tekib hulkliikme jagamisel $(x - a)$-kujulise vahega, ja järeldused sellest.

See lühike peatükk, millega lõpeb X klassi algebra kursus, sisaldab mõned võrrandite teooria seisukohalt tähtsad teoreemid täisratsionaalse ühe argumendi funktsiooni omadustest.

Sõnastades ja tõestades teoreemi jäägist, mis tekib hulkliikme jagamisel $(x - a)$-kujulise vahega, kasutatakse Kisseljovi õpikus äärmiselt ebakohast sümboolikat. Käsitlus võidab tunduvalt, kui hulkliikme $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ lühendatud kirjutisena

tarvitusele võtta üldtunnustatud funktsioonisümbol $f(x)$. Tõestades, et $f(x)$ jagamisel avaldisega $x - a$ saadav jääk R on $f(a)$, on tarvilik põhjendada R sõltumatust suurusest x, vastasel korral jääb küsimus õpilastele ebaselgeks; mõnikord võib kuulda, et $R = f(a)$ ainult $x = a$ korral, aga x teiste väärtuste juures on arvul R teised väärtused. Kui teoreem on tõestatud, siis on kasulik arvutada kahel viisil jääk R, mis tekib mingi antud arvuliste kordajatega hulkliikme jagamisel mingi vahega $x - a$, nimelt esiteks otsese jagamise teel, siis teoreemi rakendamisel, ja võrreldа vajalike arvutuste hulka.

Peale teoreemi nende järelduste, mis on näidatud Kisseljovi algebras, on kasulik selle teoreemi abil valgustada võrrandi astme alandamise võtet juhtumil, kui on teada selle mingi lahend. Kui a on n-nda astme võrrandi $f(x) = 0$ lahend, siis $f(x)$ jagamine vahega $x - a$ annab jagatisena hulkliikme $f_1(x)$, mille aste on $n - 1$, ja jäägi R, mis jäägi kohta käiva teoreemi põhjal on null, ja seetõttu $f(x) = (x - a) \cdot f_1(x)$, nii et meie võrrand võtab kuju $(x - a) \cdot f_1(x) = 0$ ja jaguneb kaheks, nimelt võrranditeks: $x - a = 0$ ja $f_1(x) = 0$. Niiviisi n-nda astme võrrandi $f(x) = 0$ teiste lahendite otsimine taandub $(n - 1)$-se astme võrrandi $f_1(x) = 0$ lahendite otsimisele: kui a_1 on viimase võrrandi lahend, s. t. kui $f_1(a_1) = 0$, siis arv $f(a_1) = (a_1 - a) \cdot f_1(a_1)$ on ka võrdne nulliga, s. t. a_1 on antud võrrandi $f(x) = 0$ lahendiks. Seesama arutlus esineb õpikus toodud tõestuses selle kohta, et $f(x)$ on võimalik esitada n lineaarse teguri korrutisena, kuid selle seos võrrandite lahendamisega jääb õpilastele tavaliselt ebaselgeks.

Märgime, et kompleksarvude algebra põhiteoreemi formulatsioon, mis esineb õpikus («igal algebralisel võrrandil on reaalne või kompleksne lahend»), on vastuolus selle õige juhisega termini «kompleksarv» tähenduse kohta, mille annab programmi «Seletuskiri» (lk. 13 1952. a. trükis) ja mille kohaselt reaalarvu mõistet ei vastandata kompleksarvu mõistele, vaid ta on selle erijuhtumiks. Õigem oleks ütelda: «igal algebralisel võrrandil, mille aste ei ole madalam ühest, on kompleksne lahend, reaalne või imaginaarne.»

IX peatükk.

JÄRJENDID JA PROGRESSIOONID. PIIRVÄÄRTUSTE TEOORIA ELEMENDID.

§ 38. Progressioonide tundmaõppimise tähtsus algebra kursuses.

Progressioonide tundmaõppimine moodustab algebra üldhariduskiku kursuse olulise osa, kuid see peatükk seisab mõnevõrra isoleeritult, kuulumata ühessegi neljast algebra koolikursuse põhilisest arenemisjoonest. Kuid progressioonide tundmaõppimine on siiski tihedalt seotud kolme arenemisjoonega neist koolialgebra neljast põhilisest arenemisjoonest.

Aritmeetiline ja geomeetriline progressioon kujutavad endast

suuruste kahe õige levinud muutumisliigi kvantitatiivseid karakteristikuid. Tehes tegemist ükskõik millise ühtlaselt kulgeva protsessiga, näiteks teatud produktsiooni jääva ühikute hulga tootmisega iga päev või liikumisega jääva kiiruse puhul ja arvutades selle protsessi summaarse tulemuse 1, 2, 3, 4, ... ajaühiku möödumisel, jõuame arvudeni, mis kujutavad endast aritmeetilise progressiooni järjestikuseid liikmeid; selle progressiooni liikmed on liikme numbri lineaarsed funktsioonid. Kuid kõrvuti muutumisega selle lihtsaima seaduse järgi esineb väga sageli ka niisuguseid protsesse, kus juurdekasv ise saab uue juurdekasvu allikaks. Näiteks, kui selektsionäär, üles kasvatanud ühest seemneterast 50 tera, kogub järgmisel aastal saagi mitte enam ühest terast, vaid kõigist 50 esimese lõikuse terast ja taimede samasuguste elutingimuste juures saab juba $50 \cdot 50$ tera ning edasi see protsess kordub, siis siin meil on tegemist suuruse muutumise uue seadusega, mida matemaatiliselt saab formuleerida geomeetrilise progressiooni seadusena; selle progressiooni liikmed on liikme numbrist sõltuva eksponentfunktsiooni väärtused.

Niisiis progressioonide tundmaõppimine on ühenduses kahe funktsiooniga, mis kujutavad kaht tähtsat suuruste muutumise seadust.

Progressioonide tundmaõppimine on ühenduses ka samasusteisendustega. Kummagi progressiooni tuntud summavalemid ei ole midagi muud, kui paljude praktiliste rakenduste puhul õige kasulikud samasusteisenduste valemid, sest nad võimaldavad teatud liiki hulkliikmeid asendada hoopis kompaktsemate ja seetõttu mõnusamate avaldistega: $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+[a+(n-1)d]=0{,}5\,[2a+(n-1)d]\,n$ ja $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=a(q^n-1):(q-1)$. Märgime, et esimene neist valemeist on kehtiv temas esinevate tähtede igasuguste väärtuste juures, kuid teine ainult siis, kui $q \neq 1$. Seda kitsendust tuleb valemi tuletamisel silmas pidada, mis Kisseljovi stabiilses õpikus on, kahjuks, vahele jäänud.

Progressioonide üldliikme ja liikmete summa valemeis esinevate suuruste vaheliste seoste lihtsus teeb progressioonid rikkalikuks ülesannete allikaks, millest ammendatavaid ülesandeid saab anda keskkooli õpilastele tähtsama algebrameetodi — võrrandite meetodi — paremaks omandamiseks. Tegeldes ülesannete lahendamisega progressioonidele, koostavad õpilased ja lahendavad võrrandeid ning sellega treneerivad endid suuruste tundmatute väärtuste kaudse määramise oskuses, lõpetades töö vastava kontrolliga. Niisiis progressioonide tundmaõppimine osutub ühenduses olevaks ka algebra kolmanda põhilise arenemisjoonega — võrrandite tundmaõppimisega.

Märgime veel progressioonide kui kahe lihtsama arvujärjendi liigi tundmaõppimise tähtsust, mis on tingitud sellest olulisest osast, mida progressioonid etendavad piirväärtuste teooria tundmaõppimisel: iga lõpliku hulga liikmetega progressiooni saab lõpma-

tult pikendada ja loomulikult tekib iga progressiooni puhul küsimus üldliikme piirväärtuse kui ka liikmete summa piirväärtuse kohta. Seetõttu progressioonide tundmaõppimine moodustab esimese sammu ridade, selle, nagu matemaatilise analüüsi kursusest on teada, nii võimsa funktsioonide esitamisvahendi tundmaõppimise alal. Mõnd edasist sammu ridade tundmaõppimise alal võib tungivalt soovitada individuaalseiks ülesandeiks ja ringide tööks, tuginedes näiteks raamatuile [III, 30a, e].

Kehtivas programmis (1949. a. trükis) peatükk, milles kõneldakse progressioonidest, on saanud pealkirja «Arvujärjendid» ja algab küsimustega: «arvujärjendi mõiste, arvujärjendite näiteid, arvujärjendi üldliige», millele järgneb progressioonide kui järjendite erijuhtumi tundmaõppimine.

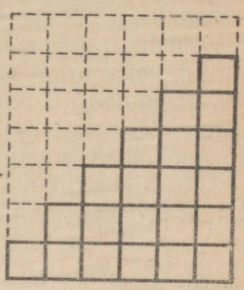
Kehtiv programm reserveerib järjendite, nende seas ka progressioonide tundmaõppimiseks 19 tundi IX klassi algebra kursuse algul, kusjuures ei vaadelda mitte ainult lõpliku arvu liikmetega progressioone, vaid ka lõpmatuid progressioone, s. o. järjendeid selle sõna päristähenduses; siia kuuluvad ka elementaarsed teadmised piirväärtuste teooria alalt. Järjendi piirväärtuse küsimus, mis varem kuulus geomeetria kursusse, kuulub 1949. aastast alates õigusega algebra kursusse.

§ 39. Progressioonid lõpliku arvu liikmetega.

Olemasolev programm määrab progressioonide alal omandamisele kuuluvate teadmiste ulatuse täpselt ja Kisseljovi stabiilses õpikus leiduv nende teadmiste käsitlus on täielik ja selge. Märgime seda suurt väärtust, mis on Kisseljovi õpikus antud ühe ja teise progressiooni võrdlemisel, mida selgitab liikmete kasvamise graafiline kujutamine. On soovitav tarvitusele võtta termin «ühtlane kasvamine» ja «kiirendatud kasvamine» ning vaadelda analoogilisel viisil ka kaht kahanevat progressiooni: negatiivse vahega aritmeetilist progressiooni ja arvust 1 vähema positiivse teguriga geomeetrilist progressiooni; siia sobivad terminid «ühtlane kahanemine» ja «aeglustatud kahanemine». Kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmete asümptootiline lähenemine nullile saab siis täiesti selgeks, esile kutsudes ikka õpilaste suure huvi.

Nimetame mõnusaid sümboleid $\div$ ja $\div\!\div$, mida sageli kasutatakse vastavalt aritmeetilise ja geomeetrilise progressiooni tähistamiseks. Kirjutised $\div 5, 10, \ldots$ ja $\div\!\div 5, 10, \ldots$ teevad igasugused muud näpunäited üleliigseks. Naturaalarvude rea esimese n arvu liitmist on soovitav illustreerida geomeetriliselt. Selleks võetakse hulknurkne treppkujund, mis $n = 6$ puhul on joonisel 11 kujutatud jämedate joontega, ja küsitakse, kuidas võimalikult kiiresti leida selles sisalduvate ruutude arv S_n. Ühendades selle kujundiga temale võrdse kujundi, mis joonisel on näidatud punktiirjoontega, saame ristküliku, mis sisaldab üldse $n(n+1)$ ruutu ja millest järeldub,

et $S_n = 0{,}5\,n(n+1)$. Niiviisi saab aritmeetilise progressiooni liikmete summa valemi ühel erijuhtumil tuletada geomeetriliselt ja selle abil on kerge saada ka üldine valem (kasutades summa vahetuvuse omadust ja ühenduvuse omadust).



Joon. 11.

Huvi pakuvad ka järgmised küsimused, mis asjale kasuks olles süvendavad peatüki «Progressioonid» teoreetilist külge.

1. Geomeetrilise progressiooni esimeste liikmete korrutise $P_n = a \cdot aq \cdot aq^2 \ldots aq^{n-1}$ valemi tuletamine, mida saab teostada täiesti analoogiliselt aritmeetilise progressiooni liikmete summa valemi tavalise tuletamisega, kui vaadelda enne progressiooni algusest ja lõpust võrdseil kaugustel asetsevate liikmete korrutist. Selle tuletamise teostavad õpilased kergesti täiesti iseseisvalt.

2. Iga kasvava aritmeetilise progressiooni liikmete tõkestamata kasvamise tõestus. Selle täpne formulatsioon on järgmine: missugune ka oleks kasvav aritmeetiline progressioon a, $a+d$, $a+2d, \ldots$, mille liikmete arv pole tõkestatud, ja kui suur ka oleks meelevaldne arv $A > 0$, alati saab näidata niisuguse naturaalarvu n, et progressiooni kõik liikmed, alates n-ndast liikmest, on suuremad kui A.

3. Iga kasvava geomeetrilise progressiooni liikmete (absoluutväärtuste) tõkestamata kasvamise tõestus. Selle täpne formulatsioon on järgmine: missugune ka oleks kasvav geomeetriline progressioon a, aq, $aq^2, \ldots$, mille liikmete arv pole tõkestatud, ja kui suur ka oleks meelevaldne arv $A > 0$, alati saab näidata niisuguse naturaalarvu n, et progressiooni kõik liikmed, alates n-ndast liikmest, on absoluutväärtuselt suuremad kui A.

Selle arvu n tegelik arvutamine mingil konkreetsel juhtumil ei ole midagi muud, kui võrratuse $|aq^{n-1}| > A$ lahendamine ja nõuab logaritmide rakendamist.

4. Kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmete tõkestamatult nullile lähenemise tõestus. Selle täpne formulatsioon on järgmine: missugune ka oleks kahanev geomeetriline progressioon a, aq, $aq^2, \ldots$, mille liikmete arv pole tõkestatud, ja kui väike ka oleks meelevaldne arv $A > 0$, saab alati näidata niisuguse naturaalarvu n, et progressiooni kõik liikmed, alates n-ndast liikmest, on absoluutväärtuselt vähemad kui A.

Nende teoreemide tõestamine ei paku raskusi. Tuleb kasutada võrratust $(1+x)^n > 1+nx$, mis on õige iga $x > 0$ ja iga naturaalse $n \geqq 2$ korral.

Lõpmatult kahanevate progressioonidega tegelemine kuulub peatükki «Piirväärtused».

5. Suurepäraseks individuaalsete ülesannete ja ringi töö teemaks on kõrgemat järku aritmeetiliste ridade vaatlemine: I järku aritmeetiliseks reaks nimetatakse iga aritmeetilist progressiooni; II järku aritmeetiliseks reaks nimetatakse arvujärjendit $a_1, a_2, a_3, \ldots$, milles vahed $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots$, moodustavad I järku aritmeetilise rea ja $(m+1)$-st järku aritmeetilise rea moodustavad arvud, mille vahed kujutavad endast m-ndat järku aritmeetilist rida. Nende ridade kohta leidub materjali raamatus [I, 18].

§ 40. Mitmesugused ülesanded progressioonidele.

Ülesannetes lõplikule aritmeetilisele progressioonile on tegemist viie arvuga: a_1 (esimene liige, teisiti a), d (vahe), a_n (viimane liige, teisiti u), n (liikmete arv) ja s_n (kõigi liikmete summa, tei-

siti s). Progressiooni iga ülejäänud liige avaldub kergesti sõltuvana suurustest a, d ja oma numbrist k valemiga $a_k = a + d(k - 1)$. Summa jaoks saame valemi $s_n = (a + \frac{n-1}{2} d)n$. On tarvilik märkida, et a_n on n-i lineaarne ja s_n selle ruutfunktsioon.

Põhiülesandeiks aritmeetilisele progressioonile nimetatakse ülesandeid, kus neist viiest arvust mingid kolm on antud ja ülejäänud kaks tuleb leida. Õige kerge ja õpetlik on koostada kõik põhiülesanded ja selgitada nende lahendusviisid, teostades igal juhtumil ka vajaliku uurimise, s. t. leides lahenduse võimalikkuse tingimused ja lahendite arvu.

Järgmises tabelis leidub täielik loetelu põhiülesandeist aritmeetilisele progressioonile:

Nr. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antud	a, d, n	a, d, u	a, d, s	a, n, u	a, n, s	a, u, s	d, n, u	d, n, s	d, u, s	n, u, s
Leida	u, s	n, s	n, u	d, s	d, u	d, n	a, s	a, u	a, n	a, d

Kontrolliks paneme tähele, et igas ülesandes on andmeiks kolm meelevaldselt valitud arvu viiest arvust a, d, n, u ja s, kuid niisuguse valiku saab teha, nagu ühendite teooria ütleb, üldse $C_5^{(3)} = C_5^{(2)} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ viisil.

On kasulik ja õige kerge läbi arutada iga ülesande lahendus neist kümnest. Näitena vaatleme ülesannet Nr. 9: teades suurusi d, u ja s, a ja n. Saame kahe võrrandi süsteemi kahe tundmatuga: $u = a + (n - 1)d$ ja $2s = (a + u) \cdot n$; elimineerides a, saame ruutvõrrandi ainsa tundmatu n suhtes, nimelt $2s = [2u - (n - 1)d] \cdot n$, ja veendume, et ülesandel võib olla kas kaks või üks või null lahendit. Võttes näiteks $d = 2$ ja $u = 10$ on kerge näidata niisuguseid s väärtusi, mille puhul saab igaühe neist kolmest juhtumist. Nii saame $s = 28$ juhtumil, et $n_1 = 7$ ja $n_2 = 4$. Leides esimese liikme vastavad väärtused, nimelt -2 ja $+4$, kirjutame välja need kaks progressiooni (-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10 ja 4, 6, 8, 10), mis rahuldavad ülesande kõiki tingimusi ja teeme endale sellega täiesti selgeks kahe lahendi võimalikkuse põhjuse.

Analoogiliselt leiame 10 põhiülesannet geomeetrilisele progressioonile, kusjuures üldkujuline lahendus mõnel neist osutub IX klassi õpilastele mittejõukohaseks ja tuleb piirduda nende lahendamisega andmete mõnede sobivate eriväärtuste puhul.

Kõrvuti niisuguste abstraktsete ülesannetega, mille väärtust ei tule alahinnata, saab progressioonide kohta näidata mitmeid õige konkreetse ja reaalelule lähedase sisuga ülesandeid. Neid ülesandeid tuleb siiski valida õige ettevaatlikult, et õpilased ei saaks reaalselt toimuvaist protsessidest moonutatud kujutlust.

Nimetame järgmist head ülesannet, mis rakendustes esineb õige sagedasti (näiteks mitmesuguste regulaatorite arvutamisel): kahe antud arvu a ja $b > a$ vahele paigutada k aritmeetilist või geomeetrilist keskmist, s. t. k niisugust arvu, mis koos kahe antud arvuga moodustaksid aritmeetilise või geomeetrilise progressiooni. Teine ülesanne nõuab valemit, mis sisaldab $(k+1)$-st juurt ning on üldjuhtumil lõpuni lahendatav ainult logaritmide abil. Samuti nõuavad logaritmide kasutamist ka ülesanded liitprotsentidele, mille lahendamine toimub valemi järgi $A = aq^t$, kus $q = 1 + 0{,}01p$ (vt. Kisseljovi algebra õpiku § 122). Nimetame veel ülesandeid tähtajalistele sissemaksetele ja tähtajalistele kustutusmaksetele, mis vanades ülesannete kogudes sageli figureerivad ja mõnikord veel nüüdki ilmuvad päevavalgele. Ülesanne tähtajalistest sissemaksetest — see on ülesanne selle summa A arvutamisest, mis koguneb hoiukassasse, kui n aasta kestel maksta hoiukassasse üks ning sama summa a rubla. Eeldades, et sissemakse tehakse iga aasta 1. jaanuaril ja et selle eelpäeval hoiukassa arvab hoiusele kogu kogutud summa pealt $p\%$ aastas juurde, jõuame kergesti valemi $A = aq(q^n - 1):(q - 1)$ juurde. Ülesanne tähtajalistest kustutusmaksetest seisneb selle summa a määramises, mis on vaja n aasta jooksul iga aasta tasuda, et kustutada laen A rubla, mis on tehtud $p\%$-ga aastas. Eeldades, et esimene kustutusmakse on tehtud aasta pärast laenu saamist, jõuame valemi $Aq^n = a(q^n - 1):(q - 1)$ juurde.

Märgime veel ühe geomeetrilise sisuga õpetliku ülesande, mis viib neljast liikmest koosneva geomeetrilise progressiooni vaatlemisele: leida kaks teineteisega sarnast mittevõrdset kolmnurka, millest ühe kaks külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega. Esimesel pilgul näib, et niisuguseid kolmnurki ei leidu, kuid tähelepanelikum vaatlus näitab, et see ei ole nii: ühe kolmnurga küljed peavad olema a, aq ja aq^2 ning teise küljed aq, aq^2 ja aq^3, kus a on mis tahes arv, mis on suurem kui 0, ja $q - 1$ rahuldab võrratust $1 + q > q^2$, millest $1 < q < 0{,}5(1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}618$. Niisiis on olemas lõpmatu hulk niisuguste kolmnurkade paare.

Rea raskemaid ülesandeid progressioonile ühenduses üleminekuga mõnede teiste ridade summeerimisele võib leida raamatust [III, 24].

Tähelepanu väärib samasus:

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1} = (a^n - b^n):(a - b),$$

mis on kehtiv kõigi teineteisega mittevõrdsete a ja b väärtuste ja iga naturaalse n juures ja mille kergesti saab geomeetrilise progressiooni liikmete summa valemi rakendamisel. See samasus annab tähtsa valemi vahe $a^n - b^n$ tegureiks lahutamiseks, üldistades ruutude vahe ja kuupide vahe tegureiks lahutamise valemeid.

§ 41. Piirväärtuse mõiste asukohast matemaatika koolikursuses.

Piirväärtuse mõiste on matemaatika üheks põhiliseks mõisteks ja tema tarvituselevõtmine elementaarmatemaatika kursuses on täiesti tarvilik: ilma selleta ei saa vajalikul kujul käsitleda tervet rida küsimusi algebrast ja geomeetriast, nimelt küsimusi lõpmatu perioodilise murru, lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni, ringjoone pikkuse ja ringi pindala, püramiidi ruumala ning ümarkehade ruumalade ja pindalade kohta. Tunginud keskkooli juba XIX sajandil, jäid piirväärtuse teooria elemendid seal kindlalt püsima, kuigi nende tundmaõppimine toimub käesoleval ajal hoopis teisiti kui revolutsioonieelses koolis.

Ühenduses sellega, et piirväärtuste teooria tähtsaimad rakendused koolis on seotud ringjoone pikkuse ja ringi pindala küsimusega, said keskkooliõpilased, kooskõlas kuni 1949. a. kehtinud program-

miga, piirväärtuse mõiste IX klassis geomeetria õppimisel. Muidugi oleks loomulikum olnud võtta peatükk piirväärtustest algebra kursusse, sest seal on juba olemas peatükk «Funktsionaalne sõltuvus», mis kujutab endast matemaatilise analüüsi propedeutika esimest sammu. Piirväärtuste teooria elementide tundmaõppimine oleks olnud teiseks sammuks selles suunas. Seda tundmaõppimist on loomulik korraldada algebra koolikursuse selles osas, kus see leiab kasutamist. Lülitades selle algebra kursusse, on soovitav ta paigutada otse progressioonide tundmaõppimise järele, selleks et lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni küsimust täisväärtuslikult läbi töötada (ja sellega ühenduses lõpule viia perioodiliste kümnendmurdude tundmaõppimise küsimus). Seda on tehtud 1949. a. programmis ja see on jäänud edasi püsima.

Peatükk «Piirväärtused» on üks raskemaid ja loomulik on, et võitlus käsitluse teaduslikkuse püüde ja püüde vahel teha ta maksimaalselt kättesaadavaks ja näitlikuks viis tema käsitluse mitme variandi loomisele.

XIX sajandi teisel poolel töötati välja piirväärtuste teooria elementide käsitlusviis, mis paistis silma oma lühiduse, näitlikkuse ja kättesaadavuse poolest, kuid mis tähelepanelikumal vaatlusel kutsus esile rea tõsiseid kahtlusi ja vastuväiteid. Nii on A. Davidovi õpikus [IV, 22] piirväärtuste peatüki kogu teoreetiline osa käsitletud kolmel leheküljel, mis sisaldavad jääva ja muutuva suuruse definitsiooni, muutuva suuruse piirväärtuse definitsiooni, lõpmatult kahaneva suuruse definitsiooni ja kaht teoreemi piirväärtustest («kui kaks muutuvat suurust on kõigi oma muutumiste juures teineteisega võrdsed, siis on võrdsed ka nende piirväärtused» ja «kui kaks muutuvat suurust säilitavad kõigi oma muutumiste puhul ühe ning sama suhte, siis nende piirväärtused suhtuvad niisamuti») [1]. Õpilased said selge ja näitliku kujutluse muutuva suuruse piirväärtusest, said enamiku rakenduste jaoks hea baasi, kuid juba tugevamaile õpilastele paistsid silma puudujäägid käsitluse teoreetilises küljes. Nii näiteks piirväärtuse definitsioon oli rajatud tõkestamatu lähenemise mõistele, kuid selle tõkestamatu lähenemise definitsiooni ei antud, ei antud tunnuseid, mille põhjal oleks võinud veenduda piirväärtuse olemasolus — kõik põhines näitlikul kujutlusel, intuitsioonil.

Piirväärtuste teooria sellise primitiivse käsitluse täieliku vastandina võib nimetada tema kaasaegset teaduslikku käsitlust V. Nemõtski, M. Slutskaja ja A. Tšerkassovi raamatus «Matemaatilise analüüsi kursus» (I k., 1944), kus piirväärtustele on pühendatud peatükid III ja VII, kokku 27 leheküljе, mis käsitlevad järjendi piirväärtuse mõistet ja funktsiooni piirväärtuse mõistet koos rea nende omadustega, mille alusel osutub võimalikuks laitmatult käsit-

[1] Need «teoreemid» ei ole formuleeritud täpselt; täpne formulatsioon oleks pidanud sisaldama veel piirväärtuse olemasolu tingimust ühel neist muutuvaist suurustest. Kuid pärast sellist täpsustamist nad muutuvad tautoloogilisteks järeldusteks teoreemist koonduva järjendi piirväärtuse ühesuse kohta.

leda kõiki rakendusi. Piirväärtuste teooria õppimisel selle raamatu järgi valmistab algajale raskusi mitte niivõrd käsitluse ulatus, kuivõrd selle iseloom, mis eeldab kaunis kõrget matemaatilise kultuuri üldist taset.

Nimetatud kahe äärmusliku piirväärtuste teooria käsitlusviisi kõrval võib näidata suure hulga vahepealseid käsitlusviise, mis erinevalt püüavad rahuldada teaduslikkuse ja keskkooli õpilastele jõukohasuse nõuet. Ühed toetuvad pideva suuruse piirväärtuse mõistele, kuigi pidevuse mõistet ei valgustata, teised — arvujärjendi piirväärtuse mõistele, mis väärib eelistamist, sest järjendi piirväärtuse mõiste on palju lihtsam. Ühtedel juhtumitel enne defineeritakse lõpmatult kahaneva (lõpmatu väikese) suuruse mõiste ja siis juba piirväärtuse mõiste, nii et iga muutuv suurus, mille piirväärtuseks on a, esitatakse kujul $a + \alpha$, kus α on lõpmatult kahanev suurus, teistel vastupidiselt: antakse üldine piirväärtuse definitsioon ja siis alles ilmuvad lõpmatult kahanevad suurused kui niisugused muutuvad suurused, mille piirväärtuseks on null. Kummalgi neist kahest käsitlusviisist on omad eelised, kumbagi saab teostada laitmatult, ja raske on ütelda, kumb väärib eelistamist.

Keskkooli õpikuis leidub kaks piirväärtuste teooria käsitlust, mis oluliselt erinevad teineteisest ega ole seotud teineteisega. Kisseljovi algebra õpiku (II o., 1949. a. trükk) §§ 179—181 antakse piirväärtuste teooria lühike käsitlus, mis kaldub kuuluma vanemate käsitlusviiside hulka: järjendi piirväärtuse mõiste puudub; on vaadeldud rida abstraktseid ülesandeid piirväärtuse leidmisele, ülesandeid, mis ei ole ühenduses piirväärtuste teooria rakendustega keskkooli kursuses. Geomeetrilise progressiooni liikmete summa piirväärtuse ja perioodilise kümnendmurru küsimus on käsitletud varem (§§ 86—88), sõltumatult sellest üldisest teooriast. Lähemal kaasaegsele käsitlusele seisab piirväärtuste teooria elementide käsitlus Kisseljovi geomeetria õpikus, kus aluseks on võetud järjendi piirväärtuse mõiste ja vaadeldakse kasvava ülalt tõkestatud järjendi piirväärtuse olemasolu kriteeriumi (§§ 227—231, 1948. a. trüki j.).

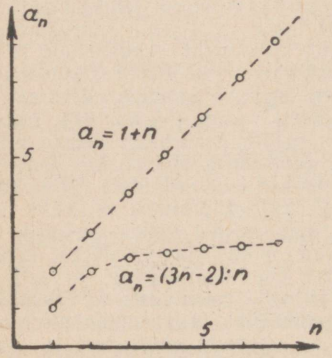
See ebakõla kooli algebra ja geomeetria õpiku vahel tekkis seetõttu, et Kisseljovi vanu õpikuid töötasid ümber erinevad isikud ja vajalikku kooskõlastamist ei olnud. Õpetaja peab ise valima ühe käsitlusjoone ja sellest kinni pidama piirväärtuste teooria elementide ja selle rakenduste käsitlemisel nii algebras kui ka geomeetrias. IX klassi geomeetria programmis oli kuni viimase ajani punkt «Põhiteoreemid lõpmatult kahanevaist suurustest ja piirväärtustest», kuid 1948. a. alates on lõpmatult kahanevate suuruste mainimine välja jäetud. «Seletuskirjas» (1952. a. trükk) antakse järgmine näpunäide (lk. 10): «Teoreeme piirväärtuste kohta võib aja puudusel ainult formuleerida ja kasutada ilma tõestuseta. Materjali ei tule eriti süvendada ja laiendada, kuid on tarvis, et õpilased õigesti mõistaksid kasutuselevõetud mõisteid, saaksid hästi aru vaadeldavaist piirväärtuse omadustest (mida saavutatakse vastavate näidete vaatlemisega) ja et edaspidi kõigi järelduste puhul, mis nõuavad piirväärtuste teooria rakendamist, õpilased kindlalt tugineksid nende poolt tundmaõpitud teoreemidele.»

§ 42. Piirväärtuste teooria elementide tundmaõppimine IX klassis.

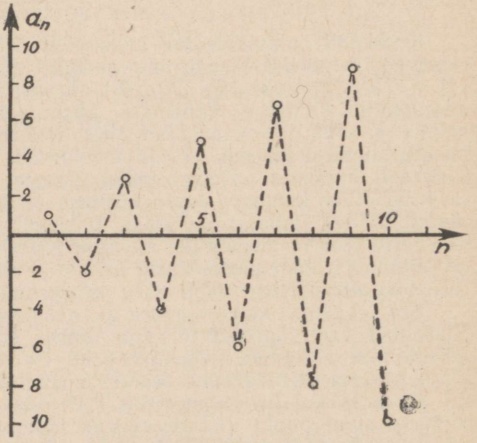
Peatükile «Arvujärjendid», kuhu piirväärtuse mõiste nüüd kuulub, reserveerib programm üldse 19 tundi tööd klassis; neist vähemalt 6 tundi tuleb võtta arvujärjendi üldise mõiste ja järjendi

piirväärtuse tundmaõppimisele. Esitame materjali näidisjaotuse, püüdes tagada piirväärtuste teooria ideelise sisu selget ja kindlat omandamist.

Esimene tund kulub selleks, et täpsustada arvujärjendi mõistet, tarvitusele võtta järjendi üldliikme mõiste, kasvava ja kahaneva järjendi mõiste, ülalt ja alt tõkestatud järjendi mõiste. Antakse täpsed definitsioonid ja tuuakse mitmesuguseid näiteid. On soovitav kasutusele võtta termin «monotoonne järjend» kasvava ja kahaneva järjendi ühise nimetusena ja iga vaadeldav konkreetne järjend kujutada näitlikult graafiku punktidena ristkoordinaatides. Iga vaadeldava järjendi puhul leitakse üldliikme valem, arvutatakse algusest mõnede liikmete väärtused, tehakse graafik, selgitatakse, kas see järjend on monotoonne või mittemonotoonne, siis kas kahanev või kasvav, kas järjend on ülalt või alt tõkestatud või ei ole tõkestatud (ülalt või alt). Viimane järeldus tehakse esmalt oletusena, mis põhineb arvuliste väärtuste ja graafiku vaatlemisel saadud muljetel, ja siis tingimata tõestatakse, lähtudes üldliikme valemist. Näiteks joonisel 12 on graafiliselt kujutatud järjend $a_1 = 2$,



Joon. 12.



Joon. 13.

$a_2 = 3$, $a_3 = 4, \ldots$, mille üldliige on $a_n = n + 1$ (monotoonselt kasvav järjend, ei ole tõkestatud ülalt, kuid on tõkestatud alt), ja järjend $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2\frac{1}{3}$, $a_4 = 2\frac{1}{2}$, $a_5 = 2\frac{3}{5}$, $a_6 = 2\frac{2}{3}, \ldots$, mille üldliige on $a_n = \frac{3n-2}{n}$ (ka monotoonselt kasvav järjend, kuid on tõkestatud mitte ainult alt, vaid ka ülalt, mida tõestab see, et üldliiget on võimalik esitada kujul $a_n = 3 - \frac{2}{n}$). Järjend $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$, $a_4 = -4, \ldots$ üldliikmega $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$ kujutab endast lihtsat mittemonotoonse järjendi näidet, kusjuures ta ei

ole tõkestatud ei alt ega ülalt (graafik on näidatud joonisel 13, kus telgedel n ja a_n on kasutatud erinevaid mastaape).[1] Niisuguseid näiteid, seejuures õige mitmekesiseid, võib leida kui palju tahes: järjend ei ole ju midagi muud kui naturaalarvude hulgal defineeritud funktsioon.

Teine tund tuleb tervikuna pühendada koonduva järjendi ja hajuva järjendi piirväärtuse mõiste selgitamisele. Piirväärtuse definitsioon on parem anda enne eraldi kasvava järjendi jaoks ja alles siis näidata üldist definitsiooni, mis kõlbab iga monotoonse kui ka mittemonotoonse järjendi puhul, kusjuures selle üldistuse võib ka tegemata jätta, sest kõige järgneva jaoks ta ei ole tarvilik. Võetakse tarvitusele sümbol $a_n \to a$ ja sümbol $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.[2] Õpilaste poolt juba vaadeldud koonduvate kui ka hajuvate järjendite konkreetsete näidete suur hulk lubab neil kõrvuti täpsete definitsioonide omandamisega saada ka selged kujutlused järjendite piirväärtustest (mida väga soodustab graafikute ehitamine). Teise tunni võib lõpetada selle mainimisega, et oleks soovitav leida piirväärtuse olemasolu tunnus ning teha ettepanek otsida niisugune tunnus eraldi kasvavate järjendite ja kahanevate järjendite jaoks.

Kolmas tund algab monotoonse järjendi koonduvuse piisava tunnuse formuleerimisega («kasvav järjend omab piirväärtust, kui ta on ülalt tõkestatud, kahanev järjend omab piirväärtust, kui ta on alt tõkestatud»), millele õpilased, omandanud eelmise kahe tunni materjali nagu vaja, jõuavad kergesti iseseisvalt ja näevad neis lauseis aksioome. Nagu teada, neid lauseid saab tõestada, kuid üksikasjalikku reaalarvu teooriat keskkoolis ei saa anda, ja seepärast on tarvis selle teooria lõpptulemus tarvitusele võtta aksioomina. Eespool sõnastatud Weierstrass'i printsiip ongi lihtsaim võimalik aksioom. Edasi tuleb lahendada rida ülesandeid nende tunnuste rakendamisele, näiteks ülesanne: «on antud järjend $a_1 = 0{,}6$, $a_2 = 0{,}66$, $a_3 = 0{,}666$ jne. (üldliige a_n on kümnendmurd, mida kujutavad null tervet ja n järjestikku kirjutatud kuut); kas see järjend koondub, ja kui koondub, siis mis on ta piirväärtus?» Tähele pannes, et see järjend on kasvav, sest tema iga järgnev liige a_{n+1} saadakse eelnevast, liites sellega positiivse arvu $6 \cdot 10^{-(n+1)}$, ja et ta on ülalt tõkestatud, sest alati $a_n < 0{,}7$, järeldame, et ta koondub ja et on olemas teatav piirväärtus a, millele liikmenumbri n tõkestamatul kasvamisel arvud a_n tõkestamatult lähenevad. Samal tööperioodil leidub palju õpilasi, kes iseseisvalt jõuavad järeldusele, et see piirväärtus on võrdne $\frac{2}{3}$, kuid selle väite täpne põhjendamine

[1] Siin on sobiv mainida, et Kisseljovi «Algebra» II osas leidub viganejoonis, milles progressioonide graafikuina esinevad mitte punktide read, vaid pidevad jooned (§ 81).

[2] Originaalis on пред $\cdot\, a_n = a$, sest ei leiduvat mingisuguseid mõistlikke põhjendusi eelistada välismaise termini «limes» või «limite» lühendit vene termini предел lühendile.

on parem edasi lükata kuni viienda tunnini. Väga soovitav on kasutada geomeetrilise sisuga ülesandeid, näiteks niisugust: on antud järjend, mille liikmeteks on täisnurksed kolmnurgad AB_1C, AB_2C, AB_3C, ... ühise kaatetiga AC, kusjuures teiste kaatetite CB_1, CB_2, CB_3, ... pikkused moodustavad mingi tõkestamatult kasvava järjendi; kas nurkade järjendid $\alpha_n = \angle B_nAC$ ja $\beta_n = \angle AB_nC$ koonduvad või mitte? On soovitav vaadelda ka mõnd hajuva järjendi näidet, näiteks järjendit, mille üldliikmeks on $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, mis esimesel pilgul näib olevat koonduv.

Neljas tund tuleb pühendada põhiteoreemidele piirväärtustest.

Edasises käsitluses leiavad tegelikult kasutamist teoreemid summa, vahe, korrutise ja jagatise piirväärtuse kohta, ja neid ongi vaja vaadelda. Rakendustes osutub kasulikuks teoreem kahest monotoonsest järjendist: kui on antud kaks järjendit a_1, a_2, a_3, ... ja b_1, b_2, b_3, ..., kusjuures 1) esimene järjend on kasvav ja teine kahanev, 2) esimese järjendi iga liige on vähem teise sama numbriga liikmest ja 3) vahed $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$, ... moodustavad koonduva järjendi, mille piirväärtus on null, siis antud järjendeil on üks ja sama piirväärtus L.

Nende teoreemide tõestamine pakub IX klassi õpilastele tunduvaid raskusi ja harilikult ei anna midagi lisaks sellele intuitiivsele veendumusele nende õigsuses, mis tekib õpilastel otsekohe nende sisu mõtestamisel, eriti kui kasutada ka geomeetrilist illustratsiooni. Olgu näiteks antud kaks koonduvat järjendit $a_n \to a$ ja $b_n \to b$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Vaatleme järjendit, mille liikmeiks on ristkülikud $AB_nC_nD_n$ külgedega $AB_n = a_n$ ja $B_nC_n = b_n$. Tõestame, et pindalade järjend a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ... koondub, ja püstitame oletuse, et $a_nb_n \to ab$, mis viib teoreemi $\lim (a_nb_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$ sõnastusele. Kehtiva programmi «Seletuskiri» ütleb selgesti (lk. 12, 1952. a. trükk), et «teoreeme piirväärtuste kohta võib ajapuudusel ainult formuleerida ja kasutada ilma tõestuseta». Soovitame seda teha ka sõltumatult ajapuudusest, sest kogemused näitavad, et nende tõestuste omandamine õpilaste poolt toimub valdaval enamikul juhtumeil ainult formaalselt.

Viies tund tuleb pühendada lõpmatult kahanevale geomeetrilisele progressioonile ja perioodilistele murdudele, kuues — ülesannete lahendamisele kogu piirväärtuste kohta läbivõetud materjali alalt. Väga soovitav on vaadelda mõnd vigast arutlust, mis viib väärjäreldusele piirväärtuse mõiste ebaõige kasutamise tõttu, näiteks Zenoni tuntud sofismi Achilleusest ja kilpkonnast [vt. I, 15, § 30, pt. II, §§ 20, 30 pt. III jt.]. Õpetlik on näidata, kuidas ainult sirklit ja joonlauda kasutades saab nurga tõkestamatult korduva poolitamise teel jaotada kolmeks võrdseks osaks $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^n} = S_n,\ S_n \to \frac{1}{3}\right)$.

Esitame lõpuks ühe õpilaste hulgas kaunis populaarse ülesande,

mille õige lahendamine nõuab piirväärtuste teooria rakendamist: leida $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$ ehk täpsemas formulatsioonis: selgitada, kas on koonduv järjend $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ..., mille liige a_n sisaldab n ruutjuurt. Leides neljakohaliste ruutjuurte tabeli abil esimeste liikmete väärtused, saame: $a_1=1{,}414$, $a_2=\sqrt{3{,}1414}=1{,}848$, $a_3=\sqrt{3{,}848}=1{,}961$, $a_4=\sqrt{3{,}961}=1{,}990$, $a_5=\sqrt{3{,}990}=1{,}997$, $a_6=\sqrt{3{,}997}=1{,}999$. Näib, et see järjend koondub, ja selle arvamuse õigsuse iseseisev tõestamine on IX klassi õpilastele täiesti jõukohane (esiteks tõestatakse, et see järjend on kasvav, $a_n<a_{n+1}$, siis, et ta on ülalt tõkestatud, nimelt $a_n<2$). Tõestanud, et piirväärtus on olemas, tähistame selle tähega x ja saame võrrandi $x=\sqrt{2+x}$, mille lahendamine näitab, et $x=2$. Üleminek võrduse $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ juurest võrduse $a^2_{n+1}=2+a_n$ ja edasi võrduse $x^2=2+x$ juurde on heaks illustratsiooniks teoreemidele summa ja korrutise piirväärtusest.

X peatükk.

LOGARITMID.

§ 43. Astendaja mõiste üldistamine ja eksponentfunktsioon.

Kui IX klassi õpilased on kindlalt omandanud arvu naturaalse astendajaga astme definitsiooni ja neli seadust tehete kohta astmetega, mis väljenduvad valemitega $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$, $a^n:a^k=a^{n-k}$, $(a^n)^k=a^{nk}$ ja $\sqrt[k]{a^n}=a^{n:k}$, ning teavad, et esimene ja kolmas valem on õiged meelevaldse a ja mis tahes naturaalsete n ja k väärtuste korral, teine — ainult $a\neq 0$ ja $n>k$ korral ja neljas — meelevaldse a ja mis tahes n puhul, mis on k kordne, tutvuvad nad astme mõiste laiendamisega — nullilise, negatiivse täisarvulise ja ratsionaalse astendajaga. Siin tuleb kõigepealt hoiatada definitsiooni ja tõestuse segamise ohu eest: ei saa olla juttugi valemite $a^0=1$, $a^{-k}=1:a^k$ ja $a^{k:n}=\sqrt[n]{a^k}$ tõestamisest, sest enne kui midagi tõestada niisuguste uute objektide, nagu a^0, a^{-k} ja $a^{k:n}$ kohta, on tarvis anda neile definitsioonid, s. t. määrata nende uute sümbolite täpne tähendus, mis neil puudub, kui juhinduda ainult naturaalse astendajaga astme definitsioonist.

Loomulikult tekib küsimus: kas uut sümbolit a^0 saaks defineerida nii, et astmete korrutamise seadus jääks kehtima puhul, kui üks astendajaist on null? Eeldades, et $a\neq 0$, saame võrdusest $a^n\cdot a^0=a^{n+0}=a^n$, et $a^0=a^n:a^n=1$. Niisiis, soovides astmete korrutamise seaduse püsimajäämist astendaja väärtusel null, peame vastu võtma ainsa võimaliku definitsiooni, et $a^0=1$: iga nullist erinev arv astmes null võrdub ühega. Õige lihtne kontroll näitab, et selle

definitsiooni juures jäävad püsima ka ülejäänud kolm seadust (teisiti ei saa ju ollagi, sest nad on järeldused esimesest).

Definitsiooni $a^0 = 1$ juurde saab jõuda ka teisiti: astmete jagamise seaduse vaatlemise teel, nagu algebra õpik seda teebki.

Et saada negatiivse täisarvulise astendajaga astme definitsioon, võib nõuda samuti, et astmete korrutamise seadus jääks kehtima ka niisuguste astendajatega astmete puhul. Kui valemis $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ võtta $k = -n$, siis saame valemi $a^n \cdot a^{-n} = 1$, mis näitab, et $a^{-n} = 1 : a^n$. Sümboli $a^{n:k}$ tähenduse puhul, kui n ei ole k kordne, määrame astme astendamise seaduse kehtima jäämise nõude põhjal. Asendades valemis $(a^n)^k$ astendaja n arvuga $n : k$, saame $(a^{n:k})^k = a^n$, millest näeme, et $a^{n:k}$ tuleb lugeda võrdseks arvuga, mille k-s aste on a^n, s. t. võrdseks k-nda juurega arvust a^n. Kõik, mis eespool (§ 31) on öeldud k-nda juure väärtuste arvu kohta, jääb kehtima ka astme $a^{n:k}$ kohta, kuid harilikult tähistab see sümbol, kui pole öeldud teisiti, juure aritmeetilist väärtust.

Väga soovitav on kontrollida ülejäänud seadusi tehete kohta astmetega. Seame näiteks küsimuse selle kohta, kas ratsionaalsete astendajatega astmete puhul kehtib korrutamise seadus, mis väljendub valemiga $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, ja lahendame selle, teisendades avaldisi $a^{n:k} \cdot a^{p:q}$ ja $a^{n:k+p:q}$ ja taandades küsimuse hästi tuntud tehetele radikaalidega.

Niisiis tõestatakse mitte üldistatud astmete tähendust määravaid valemeid endid, vaid nende kui definitsioonide tarvilikkust selleks, et seadused tehete kohta astmetega jääksid püsima.

Andnud need definitsioonid, tuleb rea näidete varal näidata kasu, mida toob üldistatud astmete rakendamine: murdratsionaalseile avaldistele täisavaldise kuju andmine, radikaalide kõrvaldamine murruliste astendajate kasutamisel.

Kehtivas programmis sisaldub punkt: «Irratsionaalse astendajaga astme mõiste.» Peab tunnistama, et selle küsimuse põhjalik tundmaõppimine ei ole IX klassi õpilastele jõukohane: ta nõuab eelnevat tutvumist piirväärtuste teooriaga ja funktsiooni pidevuse mõistega. Vaadeldava küsimuse alal tuleb IX klassis piirduda selle vähesega, mida sisaldab Kisseljovi algebra õpik (§ 97 1949. a. trüki j.). Õpilastel tuleb omandada seal antud definitsioon, osata seda rakendada igal erijuhtumil, näiteks $2^{\sqrt{2}}$ puhul, ja võtta ilma tõestuseta vastu järeldus selle kohta, et irratsionaalsete astendajatega astmete puhul kehtivad endised neli seadust tehete kohta astmetega.

Astme mõiste üldistamise loomulikuks lõpuleviimiseks on vaja tutvuda eksponentfunktsiooniga. Teostada seda kuigi põhjalikult ei ole IX klassis võimalik, kuid täiesti võib kindlustada järgmist: 1) omandada funktsiooni a^x definitsioon, mille kohaselt jääv alus $a > 0$ erineb arvust 1 ja muutuja x läbib kõik väärtused $-\infty$-st kuni $+\infty$-ni, 2) osata iga antud a korral joonestada selle funktsiooni graafikut ristkoordinaatides, tuginedes rea punktide ehitamisele ja eeldades, et selle rea tihendamisel läheneme ikka enam ja enam teatavale pidevale kõverale, s. o. kõverale, mille joonestab pliiatsi teravik ilma seda

paberilt ära võtmata, kusjuures x kasvamisel a^x väärtus püsivalt kasvab, kui $a > 1$, ja püsivalt kahaneb, kui $0 < a < 1$; 3) mõista selle graafiku ühe haru X-teljele lähenemise asümptootilist iseloomu; 4) tunda eksponentfunktsiooni neid väheseid omadusi, mis on näidatud Kisseljovi õpikus. Tähtsaim on kindlustada funktsiooni 10^x pideva muutumise mõistmist, sellega ette valmistades iga positiivse arvu kümnendlogaritmi olemasolu küsimuse õiget lahendamist.

Eksponentfunktsiooni tundmaõppimist on soovitav siduda näidetega reaalseist protsessidest, milles mingi suuruse muutumine toimub eksponentfunktsiooni seaduse järgi (õpikus neid näiteid vaadeldakse peatükis geomeetrilise progressiooni kohta, kuid argumendi pideval muutumisel ulatub küsimus juba selle peatüki raamidest välja). Kuid ajapuudus kahjuks ei luba IX klassis peatuda sellel küsimusel nii üksikasjalikult nagu oleks vaja. Siiski on soovitav vaadelda vähemalt kaht näidet, kasvõi orgaanilise kasvamise seadust ja radioaktiivse lagunemise seadust (esimesel puhul on tegemist kasvava, teisel kahaneva eksponentfunktsiooniga). Rea huvitavaid seda liiki näiteid võib leida raamatust [III, 11]. Selliste pidevate protsesside tundmaõppimise vajadus nimelt õigustab täielikult astme väärtuste vaatlemist igasuguste, nende hulgas ka irratsionaalsete astendaja väärtuste puhul.

§ 44. Logaritmi definitsioon. Logaritm kui eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon. Logaritmide üldised omadused.

Ajalooliselt on logaritmi mõiste ja tema rakendamine arvutuste lihtsustamiseks tekkinud kahe progressiooni — aritmeetilise ja geomeetrilise — kõrvutamisel. See viib mõttele alustada logaritmide tundmaõppimist koolis sellest, et vaadelda reegleid, mille järgi toimuvad tehted arvudega, mis on mingi geomeetrilise progressiooni liikmed, näiteks arvu 2 järjestikused astmed, ja näidata võimalust tehted arvudega asendada tehetega nende arvude kui progressiooni liikmete vastavate numbritega. Kõrvutame näiteks järgmised kaks arvude n ja 2^n väärtuste rida.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2^n	8 192	16 384	32 768	65 536	131 072	262 144	524 288	1 048 576	2 097 152

Nimetades ülemisi arve alumiste logaritmideks alusel 2, püstitame kergesti mõned reeglid tehete kohta alumiste arvudega, alustades järgmisega: et korrutada kaks arvu, näiteks 32 ja 128, on vaja leida nende logaritmid (5 ja 7), liita need $(5+7=12)$ ja leida arv, mille logaritm on 12 (4096). See reegel järeldub võrdsete alustega astmete korrutamise seadusest: $32 \cdot 128 = 2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12} = 4096$. Niisama lihtsalt toimub ka 2^n-kujuliste arvude jagamine, astendamine ja juurimine. Torkab silma esmajärgulise täht-

susega fakt: logaritmide kasutamine võimaldab alumiste arvude korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise asendada vastavalt ülemiste arvude, s. o. logaritmide, liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamisega. Kuid halb on see, et meie väike tabel sisaldab ainult õige väheste arvude logaritmid. Kas ei saaks teda täiendada nii, et ta sisaldaks kõigi naturaalarvude logaritmid (mingite tõkete vahelt)? Asi taandub küsimusele, kas kõiki naturaalarve on võimalik esitada ühe ja sama aluse astmetena, s. o., kas võrrandit $a^x = b$ on võimalik antud a ja b väärtuste korral lahendada x suhtes.

Üksikasjalikumaid seisukohti niisuguse sissejuhatuse kohta logaritmide tundmaõppimisel, kus kohe algul õpilastele näidatakse logaritmide suurt praktilist väärtust, võib lugeda mitmes raamatus, näiteks raamatus [III, 42]. Logaritmide käsitlemiseks on õpetajal kasutada õige palju aega (koos eksponentfunktsiooniga on neile reserveeritud 36 tundi) ja 2—3 tundi pühendada niisugusele sissejuhatusele on täiesti võimalik.

Logaritmide edasisel tundmaõppimisel tuleb kõigepealt omandada nende üldine definitsioon. Selle sõnaline formulatsioon tuleb siduda valemitega $\log_a b = c$ ja $a^c = b$ või, ühendades need üheks, valemiga $a^{\log_a b} = b$. Sageli tuleb ette, et õpilased teades logaritmi sõnalist definitsiooni, satuvad raskustesse, kui on vaja leida näiteks arv $x = 2^{\log_2 13}$, kuigi järeldus, et $x = 13$, tuleneb otseselt sellest definitsioonist. Siin on kahtlemata tegemist definitsiooni üksnes pinnalise, pealiskaudse, formaalse omandamisega.

On soovitav päris algusest peale kinni pidada sümbolite üldtarvitatavast standardist: kasutada sümbolit log logaritmi märkimiseks mis tahes aluse puhul, näidates seda alust indeksina ($\log_2 8 = 3$), ja sümbolit lg kümnendlogaritmi märkimiseks, kusjuures viimase puhul alust 10 juba ei näidata ($\lg 100 = 2$).

Õppekirjanduses on levinud vananenud vaade logaritmimisele kui ühele kahest astendamise pöördoperatsioonist (teiseks pöördoperatsiooniks on juurimine). Sellisest vaatest tuleb tänapäeval täielikult loobuda, sest ta viib väärale kujutlusele logaritmimisest kui mingist algebralisest operatsioonist. Kuid põhiline viga seisneb siin selles, et ei ole olemas mingit algebralist operatsiooni, mida võiks nimetada astendamiseks meelevaldse astendajaga. Astendamine täisarvuga on algebraline (ratsionaalne) operatsioon, mis taandub korduvaks korrutamiseks (kui astendaja on positiivne) ja millega kaasub jagamine (kui astendaja on negatiivne); algebraliste operatsioonide hulka võib lugeda astendamist meelevaldse ratsionaalse astendajaga, kus sisuliselt on tegemist kaheliikmelise algebralise võrrandi lahendamise ülesandega. Kuid meelevaldse reaalse astendajaga astme definitsioon, mis tugineb piirile üleminekul, viib meid otseselt transtsendentse (mittealgebralise) eksponentfunktsiooni $y = a^x$ juurde. Sellel funktsioonil on olemas pöördfunktsioon, mis ongi logaritm: $x = \log_a y$. Mingisugusest «kahest pöördoperatsioonist» ei saa siin rääkida.

Kõrvuti eksponentfunktsiooniga tuleb vaadelda üldist astme-

funktsiooni $y = x^b$, mis on samuti transtsendentne juhtumil, kui b on irratsionaalne (x loeme positiivseks). Siin pöördfunktsiooniks on uuesti astmefunktsioon $x = y^{\frac{1}{b}}$.

Küsimust selle kohta, kas igal arvul on olemas logaritm iga positiivse alusega, mis erineb ühest, on parem edasi lükata kuni kümnendlogaritmide vaatlemiseni; enne tuleb tundma õppida logaritmi definitsioonist otseselt järelduvaid logaritmide üldisi omadusi. Need omadused, mis on väljendatavad valemitega $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a (N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$, $\log_a (N_1 : N_2) = \log_a N_1 - \log_a N_2$, $\log_a N^k = k \log_a N$, $\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k} \log_a N$, moodustavad logaritmide koolikäsitluse aluse ja nõuavad hoolikat omandamist. Nende tundmaõppimine koordineerub suurepäraselt selle vilumuse omandamisega, mis on vajalik keerukamate algebraliste avaldiste logaritmimisel ja potentseerimisel, s. o. niisuguse, liitmis- ja lahutamistehet mittesisaldava avaldise logaritmi esitamisel selles avaldises esinevate arvude logaritmide lineaarse funktsioonina, ja vastupidisel operatsioonil. Nende kahe operatsiooni praktiline tähtsus nõuab, et neile pühendataks palju tähelepanu. On tarvis saavutada seda, et õpilased, jaotades esialgu iga niisuguse operatsiooni üksikuiks sammudeks ja andes igale sammule põhjenduse, õpiksid lõpuks seda jaotamist teostama peast ja otsekohe kirjutaksid lõpptulemuse.

§ 45. Kümnendlogaritmid.

Pärast logaritmide üldiste omaduste selgitamist vaadeldakse paremust, mis on alusel 10: iga kümnendsüsteemis kirjutatud arvu logaritmi täisosa (karakteristikut) on võimalik määrata tuntud reegli põhjal lihtsalt tema numbrite loendamise teel. Edasi kasutatakse keskkoolis ainult kümnendlogaritme; ainult neist tulebki kõnelda, et mitte killustada õpilaste tähelepanu. Varem esines programmis küsimus ülemineku kohta logaritmidelt ühel alusel samade arvude logaritmidele teisel alusel, kuid nüüd on see välja jäetud. Kuid naturaalsete logaritmidega tutvumine on suurepärane teema individuaalseiks ülesandeiks ja ringitööks, mille puhul on soovitav kasutada raamatuid [III, 30a] ja [III, 1], ja ülesanded arvude logaritmide arvutamisest meelevaldsel alusel, kui on antud nende kümnendlogaritmid, lahendatakse kui ülesanded eksponentvõrranditele (vt. § 49).

Niipea, kui õpilased on tutvunud kümnendlogaritmi mõistega, tekivad neil küsimused: kas positiivsel arvul, näiteks arvul 3, leidub kümnendlogaritm? Kuidas leida arvu kümnendlogaritmi, kui ta on olemas? Vastused neile küsimustele saab loomulikult kümnendlogaritmi kui eksponentfunktsiooni $y = 10^x$ pöörde definitsioonist: asi on selles, et x kasvamisel 0-st kuni 1-ni funktsioon 10^x kasvab väärtuselt 1 kuni 10-ni, omandades ainult ühe korra iga vahepealse väärtuse; seetõttu on olemas üks ja ainult üks (irratsionaalne ja

järelikult lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna väljenduv) arv x, mille puhul 10^x on võrdne 3; see ongi arvu 3 logaritmi väärtus. Teda saab väljendada lõpliku kümnendmurru abil ainult ligikaudselt, kuid kuitahes suure täpsusega. Nende väidete tõestust on IX klassis raske anda, kuid täiesti võimalik on näidata vähemalt üht kahest järgnevast kümnendlogaritmi tegelikust arvutamisviisist.

Neist esimene viis, mida kasutati juba XVII sajandil esimeste logaritmide tabelite koostamisel, põhineb võrduse $10^x = b$ poolte astendamisel küllalt suure arvuga k ja arvu b^k numbrite arvu määramisel. Kui selle arvu täisosas on $n+1$ numbrit, siis $10^n < b^k < 10^{n+1}$, $10^n < 10^{xk} < 10^{n+1}$, $n < xk < n+1$, $\frac{n}{k} < x < \frac{n+1}{k}$ ja $\lg b = x$ on määratud täpsusega $\frac{1}{k}$. Kui astendamist arvuga k teostada järjestikusel ruutu või kuupi võtmisel ruutude või kuupide tabelit kasutades, siis toimub see väga kiiresti. Kasutades neljakohalist kuupide tabelit, saame näiteks arvu $\lg 3$ arvutada kolme kümnendkohaga järgmiselt:

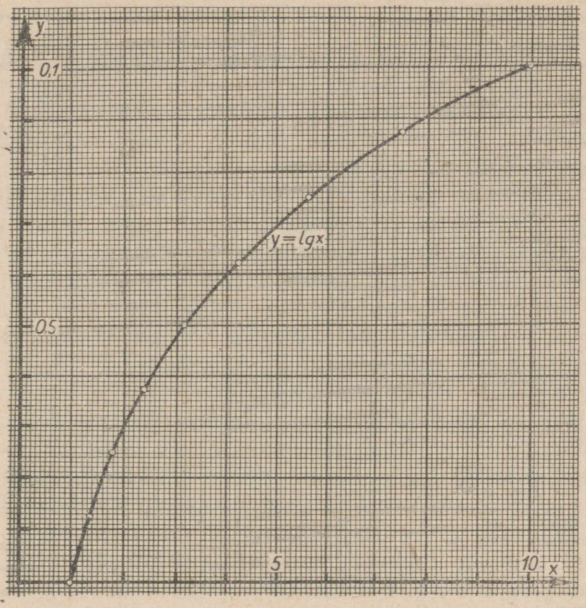
k	1	3	9	27
3^k	3	27	$1{,}968 \cdot 10^4$	$7{,}622 \cdot 10^{12}$

k	81	243	729	2187
3^k	$4{,}429 \cdot 10^{38}$	$8{,}688 \cdot 10^{115}$	$6{,}588 \cdot 10^{347}$	$2{,}820 \cdot 10^{1043}$

Arvus 3^{2187} on 1044 numbrit, $n = 1043$ ja seetõttu $\frac{1043}{2187} < \lg 3 < \frac{1044}{2187}$, $0{,}4769\ldots < \lg 3 < 0{,}4773\ldots$ Arvu 3 kolmekohaline logaritm on määratud: $\lg 3 = 0{,}477$. On arusaadav, et järjestikuse kuupi võtmise jätkamisel võib $\lg 3$ saada kuitahes suure täpsusega.

Teine viis — viis, mis võimaldab korraga leida terve arvude seeria kümnendlogaritmide ligikaudseid väärtusi, seisneb funktsiooni $y = \lg x$ ehk $x = 10^y$ graafiku ehitamises punktide abil, mis vastavad y-i väärtustele 0; 0,5; 0,25; 0,75; 0,125; 0,325; 0,625; 0,875 jne. Poolitades järjest vahemikku 0-st kuni 1-ni saadakse $x = 10^y$ väärtused lihtsalt ruutjuure võtmise teel, sest $10^{(a+b):2} = \sqrt{10^{a+b}} = \sqrt{10^a \cdot 10^b}$; $10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$, $10^{0,25} \approx \sqrt{3{,}162} \approx 1{,}778$, $10^{0,75} \approx \sqrt{3{,}162 \cdot 10} \approx 5{,}623$ jne. Kandes punktid koordinaatidega x ja $y = \lg x$ millimeeterpaberile näiteks X-teljel mõõdus 1 mm on 0,1 ja Y-teljel mõõdus 1 mm on 0,01 ning ühendades need punktid sujuva kõveraga, saame joonisel 14 kujutatud graafiku, mis lubab kõigi naturaalarvude 2 kuni 99 kümnendlogaritmide väärtusi ära lugeda kahe kümnendkohaga. Selleks, et saada logaritmide täpsemaid väärtusi, tuleb graafik joonestada suuremas mastaabis, mis on täiesti teostatav, kui seda teha osade kaupa.

Olles andnud mis tahes naturaalarvu kümnendlogaritmi ligikaudse väärtuse arvutamise võtte, oleme sellega õpilastele täiesti veenvalt näidanud iga positiivse ratsionaalarvu logaritmi olemasolu, sest selle logaritm on lugeja ja nimetaja logaritmide vahe, kuid ühtlasi näidanud ka iga positiivse reaalarvu, logaritmi olemasolu, sest ratsionaalarvude abil saab jõuda sellele kui tahes lähedale. Kui aga ei ole näidatud mingit logaritmi arvutamisvõtet, siis logaritmi olemasolu tõestuse puudumine jätab õpilaste teadmistesse olulise lünga. Kisseljovi stabiilses õpikus teoreem logaritmi olemasolust ei ole isegi formuleeritud, kuigi osas «Logaritmide põhiomadused» oleks tal loomu-



Joon. 14.

lik koht. Seal on näidatud, et positiivse aluse puhul negatiivseil arvudel ei ole logaritme, et arvu 1 logaritm on 0 iga aluse puhul, mis erineb 1-st jne. ja tuleks juurde lisada veel järgmine teoreem: missugused ka oleksid arvud $a > 0$, $a \neq 1$ ja $b > 0$, alati leidub üks ja ainult üks niisugune reaalarv x, et $a^x = b$. Tõestus sellele teoreemile leidub näiteks raamatus [III, 33a], kuid kindlalt tuleb toonitada, et kahest ülalpool antud primitiivsest logaritmide arvutamisvõttest ühegi võtte näitamine annab õpilastele rohkem kui neile liiga raske tõestuse õppimine.

§ 46. Logaritmide tabelid.

Eespool, § 44 kirjeldatud töö tulemusena selgub iseenesest, et logaritmide omaduste praktiliseks kasutamiseks arvutamisel on tarvilik logaritmide tabel. On olemas mitmeid tabeleid, mis sisaldavad harilikult naturaalarvude 10^n kuni 10^{n+1} kümnendlogaritme, arvutatud teatud kümnendkohtade arvuga, kõige sagedamini kolme, nelja, viie või seitsme kümnendkohaga. Raamatus [III, 41] võib

leida 12-kohalisi ja isegi 40-kohalisi logaritme, kuna Callet'i tabelite kogus, mis esmakordselt ilmus 1795. a., on esimese tuhande piiris algarvude kümnendlogaritmid arvutatud 61 kümnendkohaga. Iga k-kohaliste logaritmide tabel, mis on küllalt mahukas, s. t. millel n on küllalt suur, võimaldab leida korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise tulemusi k tüvenumbriga, kusjuures viimane number ei ole päris täpne. Leides näiteks $x = 104 : 11$, kasutades k-kohalisi logaritme, saame

kui $k =$	3	4	5	6	7
siis $x =$	9,46	9,454	9,4545	9,45455	9,454544,

kuna x täpne väärtus väljendub lõpmatu perioodilise kümnendmurruga 9,45454545... Niisiis tabeli poolt antavate logaritmi kümnendkohtade arvu suurenemisega kasvab ka selle tabeli abil saadavate tulemuste täpsus, kuid ühtlasi kasvab ka, ja seejuures väga ruttu, tabeli maht ja tabeliga töötamiseks kuluv aeg. Nagu kogemused näitavad, kulub mingi tulemuse arvutamiseks 5-kohalise tabeli abil ligikaudu kaks korda enam aega, kui sama tulemuse saamiseks 4-kohalise tabeli abil, ja 7-kohaline tabel nõuab 5-kohalisega võrreldes kolmekordset ajakulu. Praktiliste arvutuste valdaval enamikul on nii andmed kui ka tulemused 2—3, harva 4 tüvenumbriga, mistõttu koolis on 4-kohaliste tabelite kasutamine põhitabelitena täiesti õigustatud. Kuid mõnikord harva esinevad siin juhtumid, kus nendega tagatud täpsus ei ole küllaldane, ja on väga soovitav, et õpilased saaksid aimuse ka täielikumate, kõige parem 7-kohaliste tabelite ehitusest ja kasutamisest, tutvudes meil levinud tabelitega [III, 13].

Õpilased, kes on harjunud kasutama 4-kohalist ruutude tabelit, omandavad kergesti ka 4-kohalise logaritmide tabeli kasutamise oskuse. Mõlemal korral peamine raskus seisneb lineaarse interpolatsiooni teostamises. Lineaarse interpolatsiooni abivahendeid (võrdelisi osi, valmis parandusi), mis tabelites on toodud, tuleb rakendada alles pärast seda, kui õpilased on õppinud arvutama ka ilma nendeta, s. t. oskavad teostada interpolatsiooni võrde abil või ühiku kaudu arvutades.

Neljakohaliste logaritmide tabeliga käib harilikult kaasas antilogaritmide tabel, s. o. eksponentfunktsiooni $y = 10^x$ väärtuste tabel. Vajadust selleks ei ole, sest logaritmide tabel võimaldab leida ka arvu tema antud logaritmi järgi, s. o. 10^x väärtust antud x järgi (pöördülesanne). Kuid kahe tabeli kasutamine toob ühtlust nende kahe ülesande lahendusse (antud arvu logaritmi leidmine ja antud logaritmile vastava arvu leidmine) ja, nagu kogemused näitavad, tõstab tunduvalt nii arvutamise kiirust kui ka õigsust. Tõsi, kahe kõrvutiasetseva tabeli, logaritmide ja antilogaritmide tabeli esinemine toob mõnikord enesega kaasa nende tabelite äravahetamisest tingitud vigu. Viimaste vältimiseks trükitakse antilogaritmide tabel mõnikord teist värvi paberil või varustatakse mingi muu eritunnusega. Nii on V. Bradise «Neljakohalistes matemaatilistes tabe-

lites» leiduva antilogaritmide tabeli esimese veeru kahekohaliste arvude ette pandud komad, mis meenutavad, et iga antud logaritmi täisosa on selle tabeliga töötades meelevaldne.

Koolis kasutamisele võetud 4-kohaliste tabelite täpsus osutub kahel puhul mitteküllaldaseks: kui astendatakse väga suure arvuga ja kui arvutatakse kahe, teineteisest vähe erineva arvu vahet. Soovides leida näiteks $x = 1{,}04^{100}$ võtame arvu 1,04 4-kohalise logaritmi, mis on 0,0170, ja saame pärast selle korrutamist 100-ga, et $\log x \approx 1{,}70$, milles on ainult kaks kümnendkohta; kolmas ja neljas kümnendkoht jäävad siin täiesti tundmatuks, nii et parem on kirjutada $\lg x \approx 1{,}70$?? või veel parem: $1{,}6950 < \lg x < 1{,}7050$. Kuid antilogaritmide tabelist leiame, et 1,6950 on arvu 49,55 logaritm ja 1,7050 on arvu 50,70 logaritm, nii et $49{,}55 < x < 50{,}70$, millest $x \approx 50{,}125 (\pm 0{,}575)$ ehk, lõpuks, $x \approx 50{,}1 (\pm 0{,}6)$. Kontrolliks 7-kohalise tabeli abil teostatud arvutus annab $x \approx 50{,}504$ ja garanteerib, et viga ei ületa arvu 0,002. «Täpsuse kadu lahutamisel» esineb näiteks $x = (\sqrt{2} - 1)^8 = 577 - 408\sqrt{2}$ arvutamisel. Siin $y = 408\sqrt{2}$ arvutamine 4-kohalise tabeli abil annab $y \approx 577{,}1$, kusjuures viimane number, nagu ikka ei ole täiesti usaldatav, ja $x = 577 - y$ väärtusena saadakse $-0{,}1$, kuna selge on, et $x > 0$. Seitsmekohaliste logaritmide tabel annab $y \approx 576{,}9992$ ja seetõttu $x \approx 0{,}0008$, aga arvutamine ilma logaritmideta annab $\sqrt{2} = 1{,}41421356$, $y = 408\sqrt{2} = 576{,}999132$ ja $x \approx 0{,}000868$.

§ 47. Logaritmidega arvutamise praktika.

Kui mis tahes arvu logaritmi leidmise võte (tabeli abil) ja pöördülesande lahendamine on omandatud, siis jääb veel ära õppida logaritmide praktiline rakendamine arvutuste lihtsustamiseks. Siin tuleb eristada järgmisi momente:

a) sobivaima kuju andmine valemile, mille järgi nõutav arvutamine tuleb teostada;

b) arvutamisskeemi koostamine, s. t. arvutuste üleskirjutamiseks määratud pinna niisugune jaotamine, mille puhul oleks tagatud võimalikult hõlpus ja ökonoomne arvutuste üleskirjutus;

c) selle skeemi täitmine, s. t. vajalike väärtuste leidmine tabeleist ja kõigi skeemis ettenähtud operatsioonide teostamine;

d) saadud tulemuse oludekohane ümardamine andmete täpsuse kriitilise vaatluse ja tabelist leitud väärtuste ligikaudsusest tingitud võimalike arvutusvigade alusel;

e) kogu teostatud arvutuse kontrollimine.

Selleks, et näite varal demonstreerida kõiki neid arvutuse etappe, teostame täielikult $a = 4\pi^2 R : T^2$ arvutamise puhul, kui $R = 60, 27r$, kus r on Maa raadius, mis võrdub 6371 km, ja $T = 27{,}32$ ööpäevaga, kusjuures R tuleb väljendada sentimeetrites ja T sekundites. Siit saame valemi: $a = \frac{4\pi^2 \, 60{,}27r \cdot 10^3 \cdot 10^2}{(T \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}$, millele anname järgmise, arvutamiseks enam sobiva kuju: $a = 602{,}7\, rz^2$, $z = \pi : (T \cdot 12 \cdot 36) = \pi : (432\, T)$.

Edasi koostame arvutamisskeemi:

$\lg T$	
$\lg \pi$	
$-\lg 432$	
$-\lg T$	
$\lg z$	

$\lg 602{,}7$	
$\lg r$	
$2\lg z$	
$\lg a$	
a	

Teostades arvutusi 4-kohaliste logaritmide abil, ei ole vajadust teha mingisuguseid üleskirjutusi väljaspool seda skeemi. Interpolatsioon toimub (valmis paranduste kasutamisel) peast ja leitud väärtused märgitakse otse skeemi. Selle asemel et liita $\lg 432$ ja $\lg T$ ja siis nende summa lahutada arvust $\lg \pi$, on lihtsam kasutada nende lahutatavate logaritmide kunstlikku kuju, mida nimetatakse täienduslogaritmiks.

Pärast skeemi täitmist on tal järgmine kuju:

$\lg T$	$1{,}4365$
$\lg \pi$	$0{,}4971$
$-\lg 432$	$\bar{3}{,}3645$
$-\lg T$	$\bar{2}{,}5635$
$\lg z$	$\bar{4}{,}4251$

$\lg 602{,}7$	$2{,}7801$
$\lg r$	$3{,}8042$
$2\lg z$	$\bar{8}{,}8502$
$\lg a$	$\bar{1}{,}4345$
a	$0{,}2719$

Vastus:
$a \approx 0{,}2719 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$.

Ligikaudsed andmed R ja T omavad 4 tüvenumbrit, mistõttu ka tulemuses võib jääda 4 tüvenumbrit, kuid 4-kohaliste logaritmide rakendamise tõttu ei ole viimane (neljas tüve-)number täiesti usaldatav ja leitud a väärtus on parem ümardada kolme tüvenumbrini. Lõppvastusena saame: $a \approx 0{,}272$. Sama skeemi kohaselt teostatud kontrollarvutus 7-kohaliste logaritmide abil annab $a \approx 0{,}2720694$, mis viimast järeldust suurepäraselt kinnitab.

Kui avaldis, mille järgi arvutamist teostatakse, sisaldab liitmis- või lahutamistehet, siis tuleb ta arvutada ositi. Algajad teevad väga sageli selle vea, et $\lg(a+b)$ asendavad summaga $\lg a + \lg b$, mida tuleb püüda vältida selle õigeaegse vaatlemisega. Arvutades logaritmide abil avaldist, mis sisaldab kahe, samuti arvutamisele kuuluva arvu summa või vahe, on kasulik eelnevalt rakendada teisendust, mis muudab ühe neist kahest arvust võrdseks ühega. Selleks, et leida näiteks $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{3}}$, võtame $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8}(1+y)}$, eeldades, et $y = \sqrt[4]{3} : \sqrt[5]{8}$, ja teostame arvutused järgmise skeemi kohaselt:

$\lg 3$	0,4771	$\frac{1}{4}\lg 3$	0,1193	$\lg(1+y)$	0,2715
$\lg 8$	0,9031	$\frac{1}{5}\lg 8$	0,1806	$\frac{1}{5}\lg 8$	0,1806
		$\lg y$	$\overline{1},9387$	$\lg x^3$	0,4521
		y	0,8684	$\lg x$	0,1507
		$1+y$	1,8684	x	1,415

Tulemus on sama mis on saadud Kisseljovi õpikus (II osa, § 119, 1949. a. trüki j.) valemi $x = \sqrt[3]{y+z}$, $y = \sqrt[5]{8}$ ja $z = \sqrt[4]{3}$ järgi arvutades.

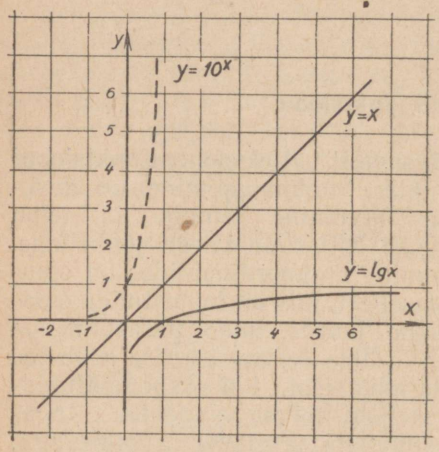
§ 48. Logaritmfunktsioon.

Logaritmfunktsiooni $y = \log a^x$, samuti kui eksponentfunktsiooni $y = a^x$, mille pöördeks ta on, põhjalik tundmaõppimine on keskkoolis raske, kuid teatav algeline tutvumine temaga ja tema praktiliste rakendustega on IX klassi õpilastele täiesti jõukohane. Logaritmfunktsiooni graafiku ehitamine ristkoordinaatides on omamoodi kokkuvõtte tegemine kõigest sellest, mis on logaritmide omaduste kohta kindlaks tehtud, ja selle juurde tuleb pärast nende omaduste tundmaõppimist tagasi pöörduda (esimest korda peab see graafik ilmuma ühenduses logaritmfunktsiooni kui eksponentfunktsiooni pöörde definitsiooniga). Kisseljovi õpikus vaadeldakse logaritmfunktsiooni isoleeritult, ilma sidumata järgneva ja eelnevaga, kusjuures kolme logaritmfunktsiooni $y = \log_2 x$, $y = \log_{0,5} x$ ja $y = \lg x$ üheaegne vaatlemine õige lühikese aja jooksul, mis selleks reserveeritakse, annab õpilastele õige ebamäärase kujutluse asja sisust; õpilased, muide, sageli ei taipa seost eksponentfunktsiooni graafiku ja logaritmfunktsiooni graafiku vahel, ei saa aru, et antilogaritmide tabel, mida nad alatasa kasutavad, on eksponentfunktsiooni $y = 10^x$ väärtuste tabel. Suurepäraseks ettevalmistuseks logaritmfunktsiooni tundmaõppimisele on tutvumine selle kümnendlogaritmide graafilise leidmise võttega, mille eespool andsime (§ 45). Kolmest algebra õpikus vaadeldud logaritmfunktsioonist on parem välja valida üks, näiteks $y = \lg x$, ja pühendada sellele rohkem aega ja ainult mainida, missuguseid muudatusi kutsub esile üleminek teisele alusele.

Eksponentfunktsiooni ja logaritmfunktsiooni graafikute vahelise seose küsimusest ei saa jagu ilma raskuseta, kuid selles on vajalik ja võimalik saavutada täit selgust. Eksponentfunktsioon $y = 10^x$ määrab seose kõigi reaalarvude — argumendi x väärtuste — ja kõigi positiivsete reaalarvude — funktsiooni $y = 10^x$ väärtuste — vahel. Selle seose teeb näitlikuks graafik, mille ehitame erinevalt joonise 15 graafikust mitteühesuguse mastaabiga X-teljel ja Y-teljel: X-telje meelevaldsest punktist, mis kujutab ju mingit reaalarvu x,

püstitame ristsirge lõikumiseni joonisel 15 punktiiris näidatud kõveraga ja saadud lõikepunktist laseme ristsirge Y-teljele, saades nii positiivse arvu y, mis kujutabki võetud x-i väärtusele vastavat funktsiooni $y = 10^x$ väärtust.

Kuid sama kõver lubab teostada ka vastupidist üleminekut — Y-telje positiivse (ülemise) pooltelje mis tahes punkti juurest, mis kujutab ju mingit positiivset arvu y, sellele vastava X-telje teatava kindla punkti juurde, mis kujutab endast (positiivset või negatiivset või nulliga võrduvat) reaalarvu $x = \lg y$. Niisiis üks ning sama kõver on graafikuks nii eksponentfunktsioonil $y = 10^x$ kui ka logaritmfunktsioonil $x = \lg y$, kusjuures esimesel puhul argumendi x väärtuste hulk on X-telje kõigi punktide abstsisside hulgaks ja funktsiooni y väärtuste hulk on positiivse Y-pooltelje kõigi punktide ordinaatide hulgaks, kuid teisel puhul argumendiks on y, tema väärtuste hulk on positiivse Y-pooltelje kõigi punktide ordinaatide hulgaks, ja funktsiooniks on x, mille väärtuste hulk on X-telje kõigi punktide abstsisside hulgaks. Et üle minna argumendi harilikule tähistusele tähega x ja funktsiooni tähistusele tähega y, tuleb vahetada telgede X ja Y asendid, tehes positiivse Y-pooltelje positiivseks X-pooltelje ja ümberpöördult. Seda on võimalik saavutada joonise peegeldamisega nurga XOY poolitaja suhtes, kusjuures joonisel 15 punktiiris näidatud kõver teisendub kõveraks, mis on näidatud pideva joonega. See ongi logaritmfunktsiooni $y = \lg x$ graafik (ja ühtlasi eksponentfunktsiooni $x = 10^y$ graafik).



Joon. 15.

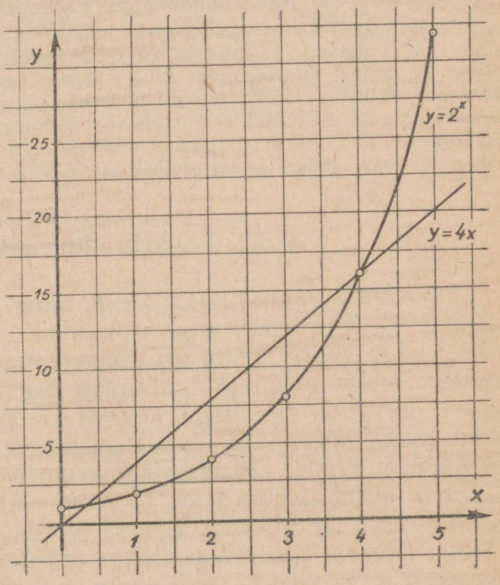
Eksponentfunktsiooni $y = 10^x$ asümptootilisele lähenemisele väärtusele 0, kui $x \to -\infty$, vastab jooniselt hästi nähtav logaritmi $y = \lg x$ absoluutväärtuse tõkestamatu kasvamine, kui $x \to 0$, ja eksponentfunktsiooni $y = 10^x$ kiirele kasvamisele väärtustel $x \to +\infty$ vastab x samal muutumisel funktsiooni $y = \lg x$ õige aeglane kasvamine. Joonisel 15 kasutatud mastaabi puhul (2 ühikut ühes sentimeetris) tõuseb logaritmikõver X-teljest kõrgusele 0,5 cm, 1 cm, 1,5 cm, 2 cm jne., kui eemalduda paremale vastavalt 5 cm, 50 cm, 5 m, 50 m jne., saavutades kõrguse 10 cm alles eemaldumisel $0{,}5 \cdot 10^{20}$ cm $= 5 \cdot 10^{14}$ km võrra, s. o. eemaldumisel enam kui Maa orbiidi 3 miljoni läbimõõdu võrra.

Logaritmifunktsiooni tuntud omaduste niisuguses näitlikus esitamises seisnebki graafiku kogu väärtus. Õpilased peavad oskama seda graafikut ehitada ja sellel näha logaritmide omadusi.

§ 49. Eksponent- ja logaritmvõrrandid.

Eksponentvõrrand $a^x = b$, mis defineerib arvu b logaritmi alusel a, lahendub väga lihtsalt logaritmimisel, taandudes sel teel lineaarseks võrrandiks $x \lg a = \lg b$. Sel võrrandil leidub üksainus lahend juhtumil, kui $a \neq 1$, $a > 0$ ja $b > 0$, küid tal võib ka puududa lahend (näiteks, kui $a > 1$ ja $b < 0$) või olla lõpmatu hulk lahendeid (kui $a = b = 1$).

Keskkoolis pööratakse õige suurt tähelepanu mitmesuguseile võrrandeile, millele suurema või vähema vaevaga saab anda kuju $a^x = b$ või kuju $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$. Viimane võrrand annab juhtumil, kui $a \neq 1$ ja $a > 0$, temaga samaväärse võrrandi $f_1(x) = f_2(x)$. Nende võrrandite nii praktiline kui ka teoreetiline väärtus on tühine ja palju aega ei maksa neile kulutada. Täiesti küllaldane on, kui õpilased saavad hakkama nende eksponentvõrranditega, mida sisaldab P. Laritševi ülesannete kogu (II osa).



Joon. 16.

Tähelepanu väärivad need eksponentvõrrandid, millele ei saa anda kuju $a^x = b$, nagu näiteks võrrand $2^x = 4x$. Selle võrrandi üks lahend, nimelt $x = 4$, on kergesti nähtav, kuid tekib küsimus, kas tal on veel muid lahendeid. Kõige lihtsam on sellele küsimusele vastata graafilist võtet kasutades: joonistame funktsioonide $y = 2^x$ ja $y = 4x$ graafikud ja leiame nende lõikepunktide abstsissid. Joonis 16 näitab, et siin on kokku kaks lahendit: $x_1 = 4$ ja $x_2 \approx 0{,}3$. Teise lahendi täpsema väärtuse saamiseks teostame järgneva arvutuse, mis on arusaadav ilma seletusteta.

x	0,25	0,30	0,35	0,31	0,309	0,311
$\lg y_1 = x \lg 2$	0,0752	0,0903	0,1054	0,0933	0,0930	0,0936
$y_1 = 2^x$	1,190	1,231	1,275	1,240	1,239	1,241
$y_2 = 4x$	1,000	1,200	1,400	1,240	1,236	1,244
$y_1 - y_2$	+ 0,190	+ 0,031	— 0,125	0,000	+ 0,003	— 0,003

Niisiis $x_2 \approx 0{,}310 (\pm 0{,}001)$. Täpsema väärtuse saamiseks on vaja suurema kohtade arvuga logaritmide tabelit.

Samuti nagu eksponentvõrrandid on ka logaritmvõrrandid haaranud endale matemaatika koolikursuses koha, mis ei vasta nende vähesele tähtsusele. Sisuliselt seisneb siin asi üleminekus võrrandi $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x)$ juurest sellega samaväärse võrrandi $f_1(x) = f_2(x)$ juurde, mis on seaduslik kui, $a > 0$ ja $a \neq 1$. On tarvilik, et õpilased teeksid endale kõigepealt selle ülemineku hästi selgeks, arutades umbes nii: $a^{\log_a f_1(x)} = f_1(x)$ ja $a^{\log_a f_2(x)} = f_2(x)$, logaritmide võrdsusest järeldub astmete võrdsus ja seega $f_1(x) = f_2(x)$, või toetudes lihtsalt logaritmfunktsiooni monotoonsusele positiivse, arvust 1 erineva aluse a puhul. Kõik muu on logaritmimise pöördoperatsiooni — potentseerimise — tehniline külg, s. o. logaritmide lineaarse funktsiooni asendamine üheainsa logaritmiga.

Nimetame üht õige levinud viga. Lahendades näiteks võrrandit $0{,}5 \lg (x - 9) + \lg \sqrt{2x - 1} = 1$ ja andes sellele kuju $\lg \sqrt{(x - 9)(2x - 1)} = \lg 10$, kõnelevad õpilased: «Taandan mõlemaid pooli lg-ga ja saan pärast juurimismärgi kaotamist ruutvõrrandi $(x - 9)(2x - 1) = 100$.» Mingit taandamist, s. t. võrrandi mõlema poole jagamist nende ühise teguriga, siin ei ole, vaid on ainult ülalpool näidatud seaduspärane üleminek logaritmide võrdsuselt arvude võrdsusele. Väljenduse ebatäpsus võib endaga kaasa tuua ja tõepoolest toobki jämedaid vigu (nagu üleminek võrduselt $2 \lg x = \lg b$ võrdusele $2x = b$).

§ 50. Logaritmiline arvutuslükati.

Juba XVII sajandil leiutatud lihtne, kuid õige kasulik arvutusvahend — logaritmiline arvutuslükati — sai XIX sajandi lõpust alates väga suure leviku osaliseks. Lükati mehhaniseerib rea tehete teostamise arvudega (korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise) ja võimaldab väga kiiresti ning praktiliste arvutuste enamiku jaoks küllaldase täpsusega saada paljude keerukate operatsioonide tulemusi. «Normaalse» arvutuslükati pikkus on 250 mm ja ta sobib taskus kandmiseks. Ta annab tulemused 3—4 tüvenumbriga ja kiirendab arvutamist 10—15 korda võrreldes hariliku arvutamisega paberil, kuid «massiliste» arvutuste puhul, s. o. arvutamisel ühe ning sama valemi järgi andmete mitmesuguste väärtuste korral, veelgi enam. Näiteks selleks, et saada kui tahes palju funktsiooni $y = ax^2$ väärtusi mis tahes konstantse a ja x mis tahes väärtuste seeria korral, on tarvis teostada lükati keele üksainus seade, asetades lükati kaks skaalat vastamisi, milleks kulub ainult mõni sekund. Kõik muu seisneb lihtsalt otsitavate väärtuste lugemises ühelt skaalalt. Tänapäeval ei ole inseneri või tehniku ükski tõsisem töö mõeldav ilma arvutuslükati kasutamiseta. Väga suure leviku

osaliseks on ta saanud ka sõjaasjanduses, kus arvutamise kiirust väga hinnatakse.

Igal kõrgema tehnilise õppeasutuse üliõpilasel on tarvis osata arvutuslükatiga töötada ja näib, et keskkool peaks oma kasvandikke sellega tutvustama, seda enam, et lükati õige lihtne teooria on logaritmfunktsiooni tundmaõppimisega väga tihedalt seotud ja tema praktiline kasutamine võimaldab juba keskkoolis tunduvalt säästa arvutamisele kuluvat aega. Alates XX sajandi algusest hakkasid algebra uutesse õpikutesse ilmuma peatükid, mis olid pühendatud arvutuslükatile, ja kolmekümnendais aastais võeti lükati tundmaõppimine meie kooli IX klassi programmi sisse. Kuid heade ja ühtlasi odavate lükatite müügilt puudumine, peamiselt aga matemaatika õpetajate tunduva massi poolt lükati mittetundmine viisid edaspidi sellest punktist loobumisele. Praegu kehtiva programmi «Seletuskirjas» on lükati jälle nimetatud. Programmi 1952. a. trükis on öeldud nii: «On soovitav, et õpilased teeksid väljaspool õppetunde läbi rea harjutusi logaritmilise lükatiga arvutamises.» Iseenesest mõistetav on, et enne tuleb omandada lükati õige lihtne teooria.

Sageli võib kuulda arvamust, et vajaduse korral omandavad noored lükatiga töötamise teooria ja praktika ise, ilma õpetaja abita. See on õige, kuid tuleb silmas pidada, et selleks on vaja aega, mida kõrgema tehnilise õppeasutuse üliõpilase käsutuses on nii vähe, ja pealegi, mis on hoopis tähtsam, on niisugune iseseisev õppimine harva täisväärtuslik: õpitakse tundma ainult lihtsamaid operatsioone, kuna mitmed lükatil arvutamise võimalused jäävad kasutamata.

Elu nõuded on arvutuslükati tundmise suhtes niivõrd tungivad, et IX ja X klassi õpilased, kuuldes oma vanemailt seltsimeestelt, kõrgemate tehniliste õppeasutuste üliõpilastelt, arvutuslükatiga töötamise oskuse tähtsust, paluvad matemaatika õpetajat ise aidata neid selles lisatundide korras. Õpetaja kohustuseks on sel puhul tulla õpilaste soovidele vastu ja teha nendega mõned tunnid, kus arutatakse läbi lükati õige lihtne teooria ja töötatakse välja täisväärtuslikud võtted sellega töötamiseks. Lihtsamate operatsioonide äraõppimiseks (korrutamine, jagamine, ruudu ja kuubi arvutamine, ruut- ja kuupjuure võtmine, võrrete lahendamine) piisab 8—10 tunnist; soovides omandada võtteid, mis võimaldaksid korraga saada keerulisemate operatsioonide tulemusi, tuleb seda tundide arvu veel mõnevõrra suurendada. Asja eduks on absoluutselt tarvilik, et õpetaja ise tunneks hästi lükati teooriat, õppides seda tundma mingi käsiraamatu järgi paljude olemasolevate hulgast (soovitame raamatuid [III, 37] ja [II, 9]), ja oskaks lükatit kasutada.

Võib arvata, et arvutuslükati koos hariliku (vene) arvelauaga (ja edaspidi koos aritmomeetriga) tõrjub tunduval määral koolist logaritmide tabelid välja ja kujuneb põhiliseks arvutusvahendiks koolis.

KOMBINATOORIKA. NEWTONI BINOOM.

§ 51. Ühendite teooria ja tõenäosuse teooria.

Ühendite teooria ehk kombinatoorika kujutab endast omapärast matemaatika osa, mis on tarvilik mitmete küsimuste edukaks lahendamiseks nii algebras kui ka teiste matemaatiliste distsipliinide alal. Keskkoolis esineb ühendite teooria seoses Newtoni binoomivalemi käsitlemise vajadusega, kuigi seda õige tähtsat samasusteisenduse juhtumit kujutavat valemit on võimalik tuletada ka ilma kombinatoorika kasutamiseta. Permutatsioonide mõistet ja omadusi on vaja, nagu teada, determinantide teoorias ja neil on tähtis koht ka rühmateoorias. Kuid kõige laialdasemat rakendamist leiavad mitmesugust liiki ühendid tõenäosuse teoorias, teaduses, mis uurib massiliselt toimuvate nähtuste seadusi, kus iga nähtus eraldi on määratud arvestamisele mittealluvate, nn. «juhuslike» tingimustega. Tõenäosuse teoorial on tänapäeval tohutu tähtsusega praktilisi rakendusi. Ta on vajalik ka artilleristidel, sest iga lasu tulemus sõltub mitte ainult teatud kindlaist tingimustest (suurtüki kaliibrist, tema telje ja rõhttasapinna vahelisest nurgast, algkiirusest jne.), vaid ka paljudest asjaoludest, mis muutuvad lasult lasule ega ole täpselt arvestatavad, nagu näiteks väikesed püssirohu hulga ja mürsu kaalu kõikumised, atmosfääriliste tingimuste mõju jne.; ta on vajalik füüsikuile ja keemikuile, kes uurivad aine ehitust, mille iga tükikene koosneb kujuteldamata suurest arvust osakestest; ta on vajalik ühiskondliku elu paljude ürituste õigeks planeerimiseks, nagu näiteks kindlustusasjanduses. Tõenäosuse teooria on ammu juba omandanud nii suure tähtsuse, et korduvalt on üles tõusnud küsimus tema elementide lülitamisest keskkooli kursusse.

Kujutlus tõenäosuse teooria elementidest peab olema igal õpetajal. Selle võib saada raamatute [III, 16] ja [III, 39] järgi. Tõenäosuse teooria mõnede küsimuste metoodiline käsitlus, mis sobib keskkoolile, leidub õpikus [III, 6].

Ühendite ja Newtoni binoomi käsitlemiseks reserveerib kehtiv programm üldse 12 tundi (aasta algul X klassis). Programmi selle õige väikese osa omandamine õpiku poolt pakutud ulatuses läheb harilikult ilma raskuseta, kuid kogemused näitavad, et see omandamine on sageli ainult formaalne, isegi veel enam: ülesandeid mitut liiki ühendite arvu leidmisele, mis ei vii õpitud valemite rakendamisele, vaid nõuavad teatavat, kasvõi väga väikest iseseisvat mõttetööd, lahendavad õpilased, kes ühendite teooriat pole õppinud ja juhinduvad lihtsalt tervest mõistusest, paremini kui X klassi õpilased, kes iga hinna eest püüavad igale niisugusele ülesandele läheneda tundmaõpitud permutatsioonide, variatsioonide ja kombinatsioonide valemitega. Siin tuleb mainida üht ebaõnnestunud formulatsiooni Kisseljovi algebra õpikust: «Ühendeid on kolme liiki:

variatsioonid, permutatsioonid ja kombinatsioonid» (§ 155, 1949. a. trüki järgi). See lause sisendab õpilastele mõtte, et nende kolme liigiga on ammendatud kõik ühendid, mis muidugi ei ole õige. Võtame näiteks ülesande trammivagunitele (eri marsruutide vagunite pimedas eraldamiseks) seatavate värviliste signaaltulede arvu määramisest eeldustel, et on kasutada n eri värvi klaasi ja et iga värvipaar tähendab kaht eri marsruuti sõltuvalt sellest, milline värv on vasakul, milline paremal. Seda ülesannet lahendavad IX klassi õpilased harilikult X klassi õpilastest paremini, leides otsese loendamise teel, et juhtumil, kui $n = 1, 2, 3, 4$, saab 1, 4, 9, 16 paari signaallaternaid, ja et üldjuhtumil, kui on kasutada n eri sorti klaasi, saab teha n^2 niisugust paari.

Niisuguse olukorra vältimiseks on vaja: 1) hoolitseda, et iga valemi tuletamine toimuks täiesti teadlikult; 2) toonitada, et permutatsioonide, variatsioonide ja kombinatsioonidega ei ole ammendatud kõik ühendite liigid, vaid need on ainult lihtsamad ja tähtsamad neist; 3) anda kõrvuti tuletatud valemite rakendamiseks antavate harjutusülesannetega ka niisuguseid ülesandeid, mis nõuavad iseseisvat arutelu. Rea niisuguseid tõsisemaid ülesandeid võib leida raamatus [III, 24].

Tuleb märkida, et sageli kaheldakse kombinatoorika keskkoolis õppimise otstarbekohasuses. Kombinatoorika väljajätmise tagajärjel matemaatika koolikursus kahtlemata põrmugi ei kannataks ja sellega vabanevaid tunde võiks kasutada tähtsamate küsimuste jaoks.

§ 52. Permutatsioonid.

Permutatsioonide, variatsioonide ja kombinatsioonide tundmaõppimise järjekord võib olla mitmesugune. Kisseljovi õpik vaatleb esmalt variatsioone, s. t. niisuguseid ühendeid, mis saadakse, kui kõigi olemasoleva n elemendi hulgast igal võimalikul viisil mingi $k (k \leq n)$ elementi välja valitakse, kusjuures võetakse arvesse mitte ainult saadud ühendi koosseis, vaid ka elementide järjekord selles. Permutatsioonid osutuvad sel puhul lihtsalt variatsioonide erijuhtumeiks, kus $k = n$, ja pärast seda vaadeldakse kombinatsioone, mis erinevad ju variatsioonidest ainult sellega, et neis ei arvestata elementide järjekorda. Kuid on võimalik ka nende tundmaõppimise teine järjekord: vaadelda esmalt lihtsaimat liiki ühendeid — permutatsioone ja siis siirduda permutatsioonide moodustamise ülesannet üldistades variatsioonide juurde. Permutatsiooni mõiste on lihtsam ja olulisem kui variatsiooni mõiste, mistõttu seda teist järjekorda tuleb eelistada. Seades küsimuse selle kohta, mitmel viisil on võimalik ritta asetada n erinevat elementi juhtumeil, kui $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, teostame faktiliselt kõik need järjestused ja loeme nad üle, s. t. leiame permutatsioonide arvu 1, 2, 3, 4, ... elemendist. Saadakse umbes järgmine tabel, kus sümbol P_n tähendab permutatsioonide arvu n elemendist:

n	Elemendid	Permutatsioonid	P_n
1	a	a	1
2	a, b	ab, ba	2
3	a, b, c	$abc, acb, bac, bca, cab, cba$	6
4	a, b, c, d	$abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb$ $bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca$ $cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba$ $dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba$	24
5	a, b, c, d, e	24 permutatsiooni, mis algavad tähega a, ja samuti 24 permutatsiooni, mis algavad vastavalt tähtedega b, c, d ja e.	120

Selle tabeli koostamisel tuleb erilist tähelepanu pöörata sellele, et mitte vahele jätta ühtki võimalikku permutatsiooni ja ühtki mitte korrata kaks korda. Kirjutades näiteks $n = 5$ korral tähe a esimesele kohale, jääb veel üle 4 tähte, mida saab paigutada järgmisele neljale kohale nii mitmel viisil, mitu permutatsiooni on võimalik neljast elemendist, s. o. 24 viisil. Taibanud, kuidas tabel on koostatud, jätkavad õpilased seda kergesti iseseisvalt, leides et $P_6 = 120 \cdot 6 = 720$, $P_7 = 720 \cdot 7 = 5040$ jne., mille järel saab kergesti ka üldise valemi $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$, mida lühemalt kirjutatakse kujul $P_n = n!$ ja väljendatakse terminiga «n-faktoriaal». Lõpuks antakse tõestus täieliku (matemaatilise) induktsiooni meetodil.

§ 53. Variatsioonid ja kombinatsioonid.

Tutvumisel variatsioonide ja kombinatsioonidega pakuvad nende mõistete definitsioonid mõningaid raskusi, mille ületamiseks tuleb analüüsida vastavaid lihtsaid näiteid. Oletame, et koosolekul, millest võtab osa 4 isikut, on vaja valida kahest isikust koosnev presiidium, näidates, kes peab olema koosoleku juhataja ja kes sekretär. Mitmel viisil saab seda teha? On kerge näha, et siin on üldse 12 võimalikku presiidiumi koosseisu, mis on näidatud järgmises tabelis (kus koosolekust osavõtjad on märgitud tähtedega A, B, C ja D):

Kui kohal on mitte 4, vaid n inimest, siis presiidiumi (juhataja ja sekretäri) valimine on võimalik juba $n(n-1)$ viisil.

Nr. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Koosoleku juhataja	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
Sekretär	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C

Kui kahest isikust koosnev presiidium valitakse, ilma et määratakse, kes peab olema juhataja ja kes sekretär, siis võimaluste arv väheneb kaks korda, sest niisugused juhtumid, nagu A, B ja B, A ei ole enam erinevad. Esimese valimisviisi puhul on meil tegemist variatsioonidega ($A_4^{(2)} = 12$), teise puhul — kombinatsioonidega ($C_4^{(2)} = 6$).

Sellele, mis variatsioonide ja kombinatsioonide küsimuse kohta on antud Kisseljovi õpikus, on kasulik lisada veel valemiga $C_n^{(k)} + C_n^{(k+1)} = C_{n+1}^{(k+1)}$ väljendatava, niinimetatud «kombinatsioonide teise omaduse» käsitlemise. See omadus tõestatakse kahel viisil: esiteks lihtsalt summa $C_n^{(k)} + C_n^{(k+1)}$ arvutamise ja selle arvuga $C_{n+1}^{(k+1)}$ võrdlemise teel ja teiseks kõigi $n+1$ elemendist $k+1$ elemendi kaupa moodustatud kombinatsioonide jaotamise teel kaheks rühmaks, kusjuures ühte rühma arvatakse kõik kombinatsioonid, mis sisaldavad üht teatud elementi, näiteks elementi a (neid on üldse $C_n^{(k)}$), ja teise rühma — kõik ülejäänud, s. o. kõik kombinatsioonid ilma selle elemendita a (neid on üldse $C_n^{(k+1)}$).

Kombinatsioonide õppimisel on kasulik koostada tabel, mis annab mõnedele väikestele n väärtustele vastavad $C_n^{(k)}$ väärtused kõigi võimalike k väärtuste korral, s. t. niinimetatud «Pascali kolmnurk», mis muide ammu enne Pascali oli avastatud keskaegsete matemaatikute poolt, kes elasid praeguste nõukogude Kesk-Aasia vabariikide territooriumil, ja veel varem hindude poolt (vt. [I, 59b]).

Siin on see tabel n väärtuste jaoks 1 kuni 10.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Selle tabeli koostamisel on kasutatud «kombinatsioonide esimest omadust», mis väljendub valemiga $C_n^{(k)} = C_n^{(n-k)}$ ja võimaldab iga rea teise poole kirjutada lihtsalt korrates tema esimest poolt vastupidises järjekorras (arvestada ridade erinevust paaritu- ja paarisarvulise n väärtuse korral!). Igal real saab täieliku sümmeetria, kui vasakule lisada üks veerg $k = 0$, mis koosneb ainult ühtedest, mida kokkuleppeliselt vaadeldakse «kombinatsioonide arvuna 0 elemendi kaupa». Tõepoolest, kui valemis $C_n^{(k)} = C_n^{(n-k)}$ võtta $k = 0$,

saame seose $C_n^{(0)} = C_n^{(n)}$, millest $C_n^{(0)} = 1$. Viimane võrdus on sümboli $C_n^{(0)}$ definitsiooniks, kuna esialgse definitsiooni järgi tal mõte puudub.

Võrreldes Pascali kolmnurgas mis tahes rea arve vahetult selle peal oleva rea arvudega, märkame järgmist lihtsat seadust: alumise rea iga arv on võrdne ülemise rea kahe arvu summaga, kusjuures üks liidetavaist on otse üleval ja teine sellest vasakul, mis vastab kombinatsioonide teist omadust väljendavale valemile. See asjaolu võimaldab Pascali kolmnurga koostamist jätkata ainult liitmist kasutades.

Kasulik on seada küsimus ridades seisvate arvude summa kohta: $1+1=2$, $1+2+1=4$, $1+3+3+1=8$, üldiselt $C_n^{(0)} + C_n^{(1)} + C_n^{(2)} + \ldots + C_n^{(n)} = 2^n$. Tõestada seda, et see seadus on kehtiv iga n korral, on võimalik matemaatilise induktsiooni meetodi abil, kui kasutada kombinatsioonide teist omadust. Veel lihtsama tõestuse saab, kui kombinatsioonide arve käsitada binoomikordajatena.

§ 54. Newtoni binoom.

Matemaatikas nii sageli kasutatavat Newtoni binoomivalemit:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^{(1)} a x^{n-1} + C_n^{(2)} a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{(n-1)} a^{n-1} x + C_n^{(n)} a^n \qquad (1)$$

saab kirjutada hoopis lühemalt, kui samakujuliste liidetavate summa märkimiseks kasutada üldtarvitatavat tähist $\sum$ («suur sigma»):

$$(x+a)^n = x^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^{(k)} a^k x^{n-k} \text{ ehk } (x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{(k)} a^k x^{n-k} \qquad (2)$$

Viimasel puhul on kasutatud ülalantud võrdust $C_n^{(0)} = 1$.

Üksikasjalikke andmeid selle, kuuendast klassist tuntud binoomi ruudu ja kuubi valemi üldistust kujutava valemi avastamise ajaloo kohta võib leida raamatust [III, 30a] ja artiklist [I, 59b].

Algebra koolikursuses rajatakse selle valemi tuletamine kaksliikmete korrutise $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots$ vaatlemisele, kuid õpetlikum on teine tee, nimelt tee, mida juba 1544. a. käis Michael Stifel ja sõltumatult temast 1665. a. Isaac Newton, kes vaatlesid binoomi astmeid järjestikuste astendajatega 2, 3, 4, 5...

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x+a)^3 = (x+a)^2(x+a) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x+a)^4 = (x+a)^3(x+a) = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$
$$(x+a)^5 = (x+a)^4(x+a) = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$$

. . . . . .

$$(x+a)^n = (x+a)^{n-1}(x+a) = x^n + B_n^{(1)} a x^{n-1} + B_n^{(2)} a^2 x^{n-2} + \ldots + B_n^{(n-1)} a^{n-1} x + B_n^{(n)} a^n$$
$$(x+a)^{n+1} = (x+a)^n(x+a) = x^{n+1} + B_{n+1}^{(1)} a x^n + B_{n+1}^{(2)} a^2 x^{n-1} + \ldots + B_{n+1}^{(n-1)} a^{n-1} x^2 + B_{n+1}^{(n)} a^n x + B_{n+1}^{(n+1)} a^{n+1}.$$

Sümbolid $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$, ... on siin lihtsalt tingmärgid arendi üksteisele järgnevate kordajate tähistamiseks ja ülesanne seisneb selles, et leida nende koostamise seadus. Juba Stifel märkas, et

$$B_n^{(k)} = B_n^{(n-k)} \text{ ja } B_{n+1}^{(k)} = B_n^{(k)} + B_n^{(k-1)} \tag{3}$$

mistõttu $(x+a)^{n+1}$ arendi kordajaid on kergesti võimalik saada $(x+a)^n$ arendi kordajaist. Newton läks kaugemale, näidates $(x+a)^n$ arendi kahe järjestikuse kordaja vahelist seost, mis väljendub valemiga:

$$B_n^{(k+1)} = B_n^k \cdot \frac{n-k}{k+1}. \tag{4}$$

Täiesti võimalik ja õige õpetlik on lasta õpilastel endil uuesti avastada seosed (3) ja (4), andes neile kaks vastavat ülesannet.

Varem või hiljem torkab silma seos binoomikordajate $B_n^{(k)}$ ja varem tundmaõpitud kombinatsioonide arvude $C_n^{(k)}$ vahel. Intrigeeriv küsimus selle kohta, mis põhjusel siin tulid esile kombinatsioonide arvud, millel näilikult ei ole midagi tegemist binoomi astmega, lahendub täielikult, kui Newtoni binoomi küsimuse käsitlemisel minna seda teed, mida on mindud Kisseljovi õpikus, kus esmalt vaadeldakse korrutist $(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)$ selleks, et siis lugeda $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ ja üle minna astme $(x+a)^n$ juurde. Veendunud, et $B_n^{(k)} = C_n^{(k)}$, jõuame valemite (1) ja (2) juurde.

Mil teel me ka tuleksime nende valemite juurde, igal juhtumil on tarvis täieliku induktsiooni meetodil tõestada nende üldkehtivust (mis tahes naturaalse n korral). Oletades, et valem (1) on õige n mingi väärtuse puhul, veendume, et ta on õige ka $n' = n+1$ puhul, milleks arvutame $(x+a)^{n+1}$ kui korrutise $(x+a)^n(x+a)$, kasutades kombinatsioonide teist omadust. Kuid valem (1) on ilmselt õige juhtumil, kui $n = 1$, järelikult on ta õige ka juhtumil, kui $n = 1+1 = 2$; kuid kui ta on õige $n = 2$ korral, siis, tähendab, ta on õige ka $n = 2+1 = 3$ korral jne. lõpmatult. Tuleb taotleda, et õpilased hästi mõistaksid seda märkimisväärset tõestusmeetodit ja ta kindlalt omandaksid, vähemalt ühenduses selle lihtsa näitega.

Märgime veel, et Newtoni binoomi tundmaõppimist saab kergemini kui paljusid teisi osi käsitleda heuristilise meetodi laialdase rakendamisega, andes õpilastele korduvalt võimalusi avastusrõõmu läbielamiseks. Selleks tuleb ainult küsimused seada sobival viisil. Näiteks, binoomikordajate summa omaduse andmise asemel valmis kujul tarvitseb vaid panna ette leida tegelikult see summa juhtumeil $n = 1, 2, 3, 4$ jne. ja valemi $\sum_{k=0}^{n} C_n^{(k)} = 2^n$ avastamine on kindlustatud, nii et õpetajal jääb üle ainult aidata leida valemi üldkehtivuse tõestust, viidates võrdsuse $x = a = 1$ võimalusele valemis (1):

Newtoni binoomivalemi edasiarendamine üleminekuga negatiivsete täisarvuliste ja murruliste astendajate juurde kujutab endast suurepärast materjali põhjalikumaks ringitööks. Siin tuleb üleminek

lõplike polünoomide juurest lõpmatute ridade juurde, mispuhul soovitame eeskätt kasutada raamatut [III, 30a].

Stabiilses ülesannete kogus on Newtoni binoomi kohta antud vähe harjutusi ja needki on üksluised. Väga soovitav on nende täiendamine ühelt poolt teoreetilise iseloomuga küsimustega, nagu näiteks «Fermat' väikese teoreemi» tõestamisega, mis väidab, et iga naturaalarvu a ja iga algarvulise astendaja p korral vahe $a^p - a$ jagub arvuga p, ja teiselt poolt Newtoni binoomivalemi ligikaudseks arvutamiseks rakendamise võimaluste selgitamisega (mõned seda liiki ülesanded leiduvad Kisseljovi stabiilses õpikus).

NELJAS OSA

GEOMEETRIA ÕPETAMISE METOODIKA.

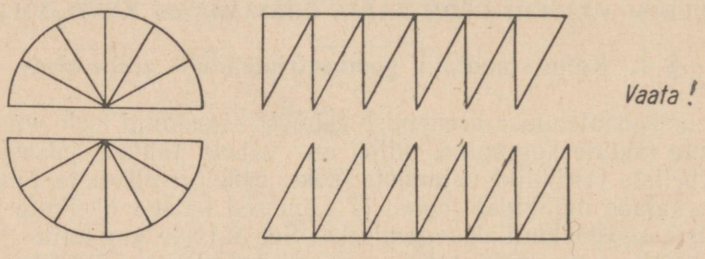
I peatükk.

ÜLDISI VAATEID GEOMEETRIA ÕPETAMISEST KESKKOOLIS.

§ 1. Kolm staadiumi geomeetriateaduse arenemises.

Geomeetriateaduse arenemise esimest staadiumi iseloomustavad üksikute faktide kogumine, millel on vahetu tähtsus peaasjalikult elutarbeliste ja riiklike vajaduste jaoks, eelkõige pikkuste, pindalade ja ruumalade mõõtmise jaoks, ja esimesed katsed üksikute faktide vaheliste seoste kindlakstegemiseks. See faktide kogumine toimus, nagu võib arvata, kõikjal, kus arenes inimkultuur, kuid kõige kindlamad ajaloolised teated selle üle on meil kolme maa: Babüloonia, Egiptuse ja India kohta. Siin on katkend ühest esimestest teostest matemaatika ajaloo alalt, mis omistatakse Eudemosele Rhodosest (IV — III saj. e. m. a.): «Et meil on siin tarvis üle vaadata teaduste ja kunstide algus, siis teeme teatavaks, et geomeetria on väga paljude tunnistuste järgi alguse saanud egiptlaste juures ja tekkinud maamõõtmisel. See mõõtmine oli neil tarvilik Niiluse jõe üleujutuste tõttu, mis alati uhtis ära piirid. Ei ole midagi imestusväärset selles, et see teadus nagu teisedki tekkis inimese vajadustest» (vt. [IV, 34b]). Egiptlased püstitasid palju praktilisi reegleid, millest osa olid täpsed, nagu näiteks täisnurga ehitamine kolmnurga abil, mille küljed on 3, 4 ja 5, osa vaid ligikaudsed, nagu ringi pindala arvutamine sellise ruudu pindala arvutamise kaudu, mille külg on $^8/_9$ ringi diameetrist, milline viis annab ringi pindala väärtuseks $\frac{256}{81} r^2 = 3{,}1604 \ldots r^2$ täpse $3{,}1415 \ldots r^2$ asemel. Väidete õigsus tehti kindlaks katselisel (induktiivsel) teel vaatluste ja mõõtmiste abil. Loogilised tõestused puudusid, kuid juba sellel geomeetria arengustaadiumil kerkisid esile püüded teha kindlaks üksikute geomeetriliste faktide vahelisi seoseid, tuletada ühtesid reegleid teiste, varem kindlakstehtute põhjal. Nii näiteks väidab üks hindu matemaatikuist, et ringi pindala on võrdne ringjoone pikkuse ja ringi raadiuse poole korrutisega, lisades sellele joonise, mis on kujutatud joon. 17, ja juhise «vaata!». Sellega taandus raskem

ülesanne, arvutada ringi pindala, kergemale — ringjoone pikkuse arvutamisele, aga seda viimast oskasid hindud lahendada suure täpsusega: nad teadsid, et iga ringjoon on oma läbimõõdust pikem ligikaudu $3927 : 1250 = 3{,}1416$ korda. Siin ei ole veel loogilist tõestust, mis lubaks tuletada uusi fakte varem püstitatud lauseist, kuid siiski tõuseb hindu matemaatik kõrgemale vahetust kontrollist mõõtmise abil, mis on alati paratamatult ligikaudne, pöördudes intuitsiooni poole, inimmõistuse võime poole vaadelda paljudel juhtumitel tõde vahetult, ilma loogilise analüüsita, teostada katse niiütelda mõttes. Antud juhtumil poolringide tükeldamisel saadavad sektorid erinevad kõrval näidatud saetaoliste kujundite hammastest, kuid on silmanähtav, et sektorite arvu suurenemisel see erinevus muutub ikka vähem ja vähem märgatavaks ning koondub nulliks sektorite arvu tõkestamatul kasvamisel.



Joon. 17.

Geomeetria esimest arengustaadiumi — üksikute faktide kogumine ja esimesed katsed nende-vaheliste seoste kindlakstegemiseks — võib leida paljudes maades, kuid ainult Kreekas võrsus sellest VI — III saj. e. m. a. teine staadium, mida iseloomustab kogu kogutud materjali süstematiseerimine.

Mõisted (välja arvatud mõned algmõisted) omandasid täpsuse, mille andsid neile vastavad definitsioonid, eraldusid laused, mille õigsus oli väljaspool kahtlust ja mis leidsid kinnitust igapäevase kogemuse poolt (aksioomid), leiti teed teiste geomeetria lausete (teoreemide) loogiliseks tuletamiseks nende aksioomide põhjal.

Geomeetria teist arengustaadiumi võib nimetada «eukleidiliseks» «Elementide» autori Aleksandria õpetlase Eukleidese (III saj. e. m. a.) nime järgi. Peatumata «Elementide» iseloomustamisel, mis on antud piisava täielikkusega «Geomeetria aluste» kursuses, soovitame lugejal tundma õppida «Elemente» kui klassikalist teost, mis on avaldanud suurt mõju nii teaduse arenemisele kui ka geomeetria õpetamisele [IV, 4].

Geomeetria kolmandat, kaasaegset arengustaadiumi tuleb nimetada meie suure kaasmaalase N. Lobatševski nime järgi, kes tegi kindlaks, et reaalse maailma ruumiliste vormide ja vahekordade tundmaõppimine ei vii üksnes ainsale tema ajani tuntud Eukleidese geomeetriale ja sellega seotud eukleidilise ruumi mõistele, vaid ka

teistele geomeetriatele ja teistele ruumi mõistetele, eelkõige sellele geomeetriale ja ruumi mõistele, mis hiljem sai Lobatševski geomeetria ja Lobatševski ruumi nime.

Lobatševski elu, tegevuse ja ideedega võib tutvuda raamatute [IV, 4, 34a] järgi. Tema teoste täieliku kogu viies köites annab välja Riiklik Tehnilis-teoreetilise Kirjanduse Kirjastus.

Neist on geomeetriale pühendatud esimesed kolm köidet [IV, 42]. Alates Lobatševski avastustest toimus geomeetriateaduse arenemine kui eri geomeetriate arenemine, mille uurimisele viisid matemaatika ja füüsika probleemid. See arenemine nõudis iga geomeetrilise distsipliini põhiprintsiipide täpset väljendamist, iga geomeetrilise distsipliini aksiomaatilist ülesehitamist. Seejuures muuseas selgus lõplikult, et geomeetria esitus Eukleidese «Elementides» ei rahulda mingil määral aksiomaatilise ülesehituse nõudeid. Käesoleval ajal on niisuguse ülesehituse printsiibid täielikult selgunud. Geomeetria esitust kujul, mis enam või vähem rahuldab neid nõudeid, sisaldavad raamatud [IV, 34c, 18] ja osaliselt [IV, 48]. Esimesest neist on siiski väga raske aru saada, sest ta haarab küsimust äärmiselt üldisel kujul (n-dimensionaalne geomeetria), teine on jõukohasem, kuid sisaldab ainult põhimõttelist külge ilma detailide läbitöötamiseta. Kõige arusaadavam on raamat [IV, 48]. Algmõistete ja aksioomide süsteemi õnnestus mainitud teostes viia väga väikese arvuni; nii on D. Hilbertil [IV, 18] kõigest 20 aksioomi ja 8 algmõistet, ja nimelt: punkti, sirge ja tasapinna mõisted, punkti ja sirge intsidentsi ning punkti ja tasapinna intsidentsi mõisted, mõiste «vahel» ja lõikude kongruentsuse ning nurkade kongruentsuse mõisted. Paljud laused, mida tavaliselt esitamisel võetakse ilma tõestuseta, nende lihtsuse ja ilmse õigsuse tõttu, tõestatakse aksiomaatilise esituse puhul üsna pikkade ja raskete arutluste abil. Niisugune on näiteks teoreem selle kohta, et ringjoonel, mille keskpunkt on teisel ringjoonel ja mis läbib selle keskpunkti, on teise ringjoonega kaks ühist punkti. Eukleidesel pole seda lauset ei aksioomide süsteemis ega teoreemide seas, kuid ta kasutab seda tõestades juba oma esimest teoreemi, mis väidab võrdkülgse kolmnurga ehitamise võimalikkust mis tahes antud lõigule. Aksiomaatilise esituse puhul tõestatakse see lause, viidates peale kõige muu pidevuse aksioomile; tõepoolest, kui ringjoon ei oleks pidev, võiksid ühised punktid kahel nimetatud viisil asetseval ringjoonel ka puududa.

Ühemõõtmelise eukleidilise geomeetria populaarse aksiomaatilise esituse katse leidub artiklis [IV, 12]. Kogu eukleidilise geomeetria aksiomaatiline esitus, mis on määratud keskkooliõpetajale, sisaldub raamatus [IV, 13].

Oma kolmes arengustaadiumis on geomeetrial oluliselt erinevad jooned. Esimeses staadiumis on ta peamiselt eksperimentaalteadus, mis oma meetodilt erineb füüsikast ja astronoomiast vähe. Teises staadiumis kitseneb geomeetria eksperimentaalne baas oluliselt: konstrueerimiste ja mõõtmiste asemel nihkub esiplaanile loogiline

arutlus, mis sageli pöördub intuitsiooni poole, geomeetriliste kujundite «silmanähtavate» omaduste poole, näiteks selle poole, et iga kinnine ja iseennast mittelõikav joon, mis on joonestatud tasapinnale, jaotab tasapinna kaheks piirkonnaks: seesmiseks ja väliseks; algmõistete nende omaduste analüüs, millel põhinevad kõik järeldused, pole kaugeltki täielikult läbi viidud. Kolmandas staadiumis, mis uuesti laiendab eksperimentaalset baasi ja on tihedas seoses füüsika ja astronoomia edusammudega, kerkivad eukleidilise geomeetria kõrval esile ka teised geomeetriad; aksioomide arv igaühes neist viiakse miinimumini ja aksioomide nimestikku jäävad ainult need, mille suhtes on tõestatud, et neid tõepoolest ei saa tõestada teiste aksioomide abil. Kõik muud laused tõestatakse, toetudes aksioomidele ja varem tõestatud teoreemidele, tõestustes ei ole lubatud mingisugust pöördumist intuitsiooni, silmanähtavuse poole. Niisuguseid mõisteid, nagu «seespool», «väljaspool», «vahel», «ühel pool», «erinevatel pooltel» jne., ei loeta enam igaühele arusaadavaiks ja selgitusi mittevajavaiks, mõned neist kantakse algmõistete nimestikku, nagu näiteks mõiste «vahel», kusjuures mõiste sisu avatakse eri aksioomide abil, teised aga defineeritakse juba olemasolevate mõistete — algmõistete ja defineeritavate mõistete abil.

§ 2. Geomeetria õppimise eesmärgid keskkoolis.

Geomeetria õppimise põhiliseks eesmärgiks koolis on selle teaduse aluste omandamine. Kuid missugust neist kolmest eespool mainitud geomeetria arengustaadiumist peab silmas pidama keskkool? Väga soovitav oleks kuulutada geomeetria õppimise eesmärgiks keskkoolis selle teaduse omandamine tema kõrgeimal, kõige täielikumal kujul, aksiomaatilise geomeetria omandamine. Kuid viimase keerulisus ja ebaküllaldane väljaarendus käesoleval ajal teevad selle võimatuks; «tuua elementaargeomeetria õpetamisse Hilberti aksiomaatika ja aksiomaatiline meetod otsesel kujul oleks meeletus» (vt. [IV, 62, § 14]). Oleks ülimal määral huvitav ja õpetlik proovida aksiomaatilise meetodi vaimus läbi töötada mõni väike geomeetria osa tema õppimise eesmärgil X klassis, et õpilased saaksid konkreetse materjali varal kujutluse sellest meetodist, kuid seni ei ole selliseid katseid veel olnud. Pole mingit kahtlust, et geomeetria tundmaõppimise objektiks keskkoolis peab olema geomeetria oma teises, eukleidilises arengustaadiumis, kuid sellegi omandamine tekitab tõsiseid raskusi. Algajad peavad eelkõige hästi kodunema suure hulga geomeetriliste faktidega, saama selge kujutluse tähtsamaist geomeetrilisist kujundeist ja omandama vastava terminoloogia. Alles pärast niisugust eeltööd geomeetria esimese arengustaadiumi vaimus saab viljakalt kulgeda töö geomeetria tundmaõppimisel tema teises (eukleidilises) staadiumis; siit järeldub näitliku geomeetria propedeutilise kursuse vajalikkuse tunnustamine, mis eelneb geomeetria põhikursusele (süstemaatilisele).

Käesoleval ajal kehtivad õppeplaanid ei näe ette sellist kursust, kuid aritmeetika kursuse programm sisaldab rea osi, mis kuuluvad geomeetriasse. Algkoolis tuleb tundma õppida pikkusmõõte, sirglõigu ja murdjoone mõõtmist, täisnurka, teravnurka, nürinurka ja nende konstrueerimist, paralleelseid sirgeid ja nende konstrueerimist joonlaua ja kolmnurga abil, ristkülikut ja ruutu, pindalamõõte, risttahukat ja kuupi, ruumalamõõte. V klassi aritmeetika programm sisaldab järgmisi punkte, mis kuuluvad geomeetriasse, nagu näiteks «ülesanded lihtsamate kujundite ümbermõõtude arvutamisele, ruudu ja ristküliku pindala arvutamisele; ülesanded kuubi ja risttahuka ruumala arvutamisele»; «kuubi ja risttahuka pindala arvutamine; kolmnurga pindala ja nelinurga pindala»; «ringjoone pikkuse ja ringi pindala, silindri pindala ja ruumala arvutamine». Tundma õppinud kogu selle materjali geomeetria esimese arengustaadiumi vaimus, ja nimelt vaatluste ning mõõtmiste põhjal, saavad õpilased töö õige korraldamise puhul juba vajaduse selle materjali edaspidiseks loogiliseks töötlemiseks ja on selleks töötlemiseks piisavalt ette valmistatud. Oluline tähtsus on ka asja teisel küljel. Geomeetria põhikursuses (süstemaatilises kursuses) on paljud praktiliselt tähtsad küsimused, nagu näiteks pindalade ja ruumalade mõõtmine, ringjoone pikkuse arvutamine, paratamatult viidud väga kaugele (näiteks pindalad VIII klassi programmi), ja need noored, kes pärast seitsmeklassilise kooli lõpetamist lähevad praktilisele tööle, ei õpi neid küsimusi tundma. Seepärast on eriti tähtis kindlustada täisväärtuslikud teadmised ja vilumused geomeetria propedeutilise kursuse neis küsimustes, mis on ette nähtud algkooli ja V klassi programmis.

Õpetusliku eesmärgi kõrval, mis seisneb geomeetria põhikursuse faktilise materjali ja tema loogilise arendamise selle meetodi omandamises, mis on iseloomulik geomeetria eukleidilisele arengustaadiumile, taotleb geomeetria õppimine ka kasvatuslikku eesmärki, arendades õpilaste loogilise mõtlemise oskust ja nende ruumikujutluse võimet. Õigesti arutlema nad õpivad õppeplaani mis tahes aine tundides, kuid mitte üheski teises distsipliinis ei ole arutlustel niivõrd suurt ja silmapaistvat kohta kui geomeetrias. Õppides tundma geomeetriat, õpivad õpilased õigesti defineerima, õigesti liigitama mõisteid, eraldama eeldust ja väidet igas lauses, eraldama otsest, pöörd- ja vastandlauset, mõistma nende vastastikust olenevust, püstitama tarvilikke ja piisavaid tingimusi, kasutama mitmesuguseid tõestusmeetodeid jne.

Loogika valitsemine geomeetria tundmaõppimisel tema eukleidilises arengustaadiumis ei ole siiski kaugeltki jaotamatu. Erinevalt aksiomaatilisest esitusest, kus näitlikel kujutistel ei ole tähtsust, viiakse siin iga arutlus läbi näitliku geomeetrilise kujutise varal, ja geomeetria õppimise käigus õpilased arendavad välja võime kujutleda ikka enam ja enam keerukaid geomeetrilisi objekte. Esialgu õpilased reprodutseerivad kujundeid jooniste ja mudelite näol, õppides neid jooniseid ja mudeleid mõttes täiustama, üle minnes

punktidele ilma ulatuseta, joontele ilma laiuseta, pindadele ilma paksuseta jms. Edaspidi tugevneb niisuguse «vaimse nägemise» võime veelgi, vajadus joonise ja mudeli järgi väheneb, aegamööda kujuneb välja oskus selgesti ja kõigis üksikasjades kujutleda keerukamaid geomeetrilisi kujundeid, mis rahuldavad esitatud tingimusi. See oskus on suureks väärtuseks mehhaanika, astronoomia, füüsika ja enamiku tehniliste distsipliinide õppimisel, ja seoses sellega on ruumikujutluse arendamist peetud alati üheks tähtsamaks geomeetria õppimise eesmärgiks keskkoolis.

Omandades geomeetriateaduse teoreetilist sisu, peavad õpilased nägema ka tema praktilisi rakendusi, harjutades nende teostamist kogu kursuse kestel. Sellega kindlustatakse ka paljude üksikasjade parem omandamine ja huvi tõstmine töö vastu.

Praegu kehtiva keskkooli matemaatika programmi «Seletuskirjas» öeldakse: «Geomeetria õpetamise eesmärgiks on tasaste ja ruumiliste kujundite omaduste süstemaatiline tundmaõppimine ja nende omaduste rakendamise õppimine arvutusliku ja konstruktiivse iseloomuga ülesannete lahendamiseks, õpilaste loogilise mõtlemise arendamine ja oskuse arendamine rakendada omandatud teadmisi praktiliste tööde täitmisel: mõõtmised maastikul, mitmesuguste ehituste pindalade ja ruumalade määramine, lihtsamad topograafias kasutatavad mõõtmised jne.»

Nende kolme külje: ruumikujutluse arendamise, loogilise mõtlemise arendamise ja praktilise rakendamise oskuse väljakujundamise harmoonilises arendamises peitubki õppetöö edu pant geomeetria alal. Edukaks tööks VI klassis on väga tähtis, et õpilased tõepoolest valdaksid neid väheseid geomeetrilisi teadmisi ja oskusi, mis on ette nähtud aritmeetika programmis. Alustades õppetööd geomeetria alal VI klassis, on vaja kontrollida nende teadmiste ja oskuste olemasolu ja täiendada neid, kui neis on lünki. Aeg, mis sellele kulub, korvatakse edaspidi küllaga, tänu kursuse loogilise külje paremale omandamisele.

§ 3. Geomeetria koolikursuse sisu.

Geomeetria teooria tundmaõppimine taandub rea ruumikujundite omaduste tundmaõppimisele, alates lihtsaimatest — punktist, sirgest, lõigust jne. Näidates neid kujundeid meid ümbritseva tegelikkuse asjade juures, luues neile enam või vähem täpseid lähendusi jooniste ja mudelite näol, saavutab õpetaja eredaid ja selgeid kujutlusi, selgitades, missugune abstraheerimise, loobumise protsess nende asjade, jooniste ja mudelite mõnede omadustega tuleb teostada, et saada tõelisi geomeetrilisi kujundeid. Nende geomeetria objektide näitlike kujutluste väljaarendamise kõrval käib ka vastavate mõistete sisu avamine, algmõistete puhul nende aksioomide vaatlemise teel, mis on nende algmõistete kaudseiks definitsioonideks, kõigi ülejäänute puhul — definitsioonide kaudu. Kujutluse sirgest annab kõvasti pingutatud peenike niit või valguskiir, mis tuleb

läbi väikese ava, või kahekorra kokkupandud paberilehe murdejoon; kujutluse punktist — nõela või pliiatsi teravik või see jälg, mis jääb paberile, kui teda puudutada selle teravikuga. Seejuures on tingimata tarvilik selgitada seda piirile üleminekut, mille kaudu need lähendid muutuvad täpseiks geomeetrilisteks objektideks. Õige kujutluse omandamisele geomeetrilisest sirgest ja punktist aitab palju kaasa niisuguste aksioomide arutamine, nagu aksioom sirge määramisest kahe punktiga ja aksioom sirge pikendamise võimalikkusest ükskõik kummale poole. Kõigi mõistete definitsioonid peavad rahuldama nõudeid, millest kõneldi eespool, esimese osa § 5. Tähtsaim on taotleda seda, et iga õpilane annaks endale aru iga tema poolt tarvitatud termini täpsest tähendusest, et ta oskaks nii õigesti sõnastada definitsiooni kui ka tuua tema kohta näiteid, aga samuti ka näidata objekte, mis on sarnased defineeritavaga, kuid mingis suhtes erinevad temast.

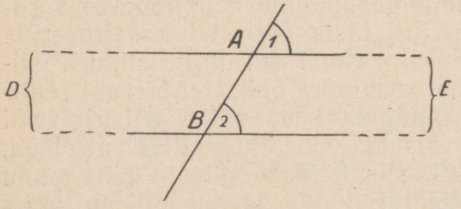
Rööbiti geomeetriliste mõistete tundmaõppimisega toimub tutvumine geomeetria lausete, aksioomide ja teoreemidega, mis määravad kindlaks nende mõistete omadused. Tihti juhtub, et õpilane püüab aru saada tõestusest või, mis on veel halvem: teda selgeks õppida, kujutlemata selgesti, milles seisneb õpitava lause sisu. Eelkõige on tarvis kindlustada iga lause õige mõistmine, oskus eraldada temas eeldust ja väidet, arusaamine kõigi temas tehtud kitsenduste tarvilikkusest. Antud lause tähtsuse mõistmine üheks või teiseks praktiliseks otstarbeks kindlustatakse ülesannete lahendamisega, millega tegeldakse pärast lause täielikku tundmaõppimist, s. o. pärast tema tõestuse tundmaõppimist, kuid mõnikord on soovitav alata just selliste ülesannete lahendamisest, edasi lükates loogilise tõestuse, mis lahendab siis õpilastel nende ülesannete lahendamise käigus tekkivad kahtlused. Nagu näitavad kogemused, parandab teatava geomeetrilise omaduse praktilise väärtuse mõistmine oluliselt seda omadust väljendava lause omandamise kvaliteeti ja kergendab seetõttu ka loogilise tõestuse õppimist. Olgu näiteks päevakorras teoreemi tundmaõppimine kolmnurkade võrdsuse kohta kolme külje järgi. Kui lasta õpilastel konstrueerida (kodus) kolmnurk külgedega 5 cm, 6 cm, 7 cm ning nelinurk külgedega 5 cm, 6 cm, 7 cm ja 8 cm, kasutades õpilastel olevaid sentimeeter-joonlaudu ja sirkleid, ja lõigata need välja paberist või kartongist, klassi tulekul aga võrrelda oma kujundeid nendega, mida toovad kaasa kaasõpilased, siis köidab õpilaste tähelepanu fakt, et kolmnurk on üheselt määratud oma kolme küljega, kuna nelinurgal see omadus puudub, ja seepärast läheb ka loogiline tõestus paremini. Kujutluse selgus võidab veelgi, kui näidata kolmnurga ja nelinurga mudelit liigenditega ühendatud varrastest.

Kui geomeetria lause sisu on täiesti tajutud, asutakse, kui ainult see lause ei kuulu aksioomide hulka, tema loogilisele (deduktiivsele) tõestamisele. On väga hea, kui õpetaja tekitas oskuslikult asetatud küsimustega kahtluse selle lause täielikus õigsuses. Näiteks soovides tõestada teoreemi kahe sirge paralleelsuse kohta sel puhul, kui

nende sirgete ja mingi lõikaja poolt moodustatavad kaasnurgad on võrdsed, tuletame algul meelde joonlaua ja kolmnurga abil paralleelsete sirgete konstrueerimise viisi, mille õpilased pidid omandama juba algkoolis (aga kui ei omandanud, siis tuleb seda viisi näidata nüüd), sõnastame teoreemi ja esitame küsimuse, kas saab meie joonise põhjal tagada, et need kaks sirget ei lõiku tõepoolest iialgi, kui palju me neid ka pikendaksime. Saab ju sirgeid pikendada nii meetri võrra, kilomeetri võrra kui ka saja miljoni kilomeetri võrra; kas võib olla kindel, et nad tõepoolest iialgi ei lõiku? Kohane on vaadelda kaht sirgjoont, mis moodustuvad klassitoa esiseina lõikumisel kahe külgseinaga. Seinad laotakse loodi järgi, need sirged on püstloodsed (ehk vertikaalsed). Kas nad on paralleelsed? Esimese mulje järgi annavad tavaliselt kõik jaatava vastuse, millest tuleb loobuda, kui on selgitatud sõnade «vertikaalne sirge» täpne mõte: see on sirge, mis läheb läbi maakera keskpunkti, ja seepärast kõik vertikaalsed sirged lõikuvad.

Siin on tarvilik rõhutada, et jutt on absoluutselt täpseist (idealiseeritud) vertikaalsirgeist: kui need sirged on tõepoolest vertikaalsed, s. t. lähevad tõepoolest läbi maakera keskpunkti, siis nad muidugi mõista ei ole paralleelsed.

Olles äratanud vajaduse tõestuse järgi, rahuldatakse see, viies tõestuse läbi kõigi tarvilike viidetega aksioomidele ja varem tõestatud teoreemidele, samuti aga ka meenutades nende terminite definitsioone, mida tuleb kasutada. Tõestusmeetoditest on piisavalt räägitud eespool, esimese osa § 7. Märgime ära ainult selle suure abi, mida algajaile annab enam või vähem pika arutluse jaotamine üksikuiks punktideks («sammudeks»), mida on kerge teostada läbiarutatud tõestuse vormistamisel vihikusse kirjutamiseks. Siin on antud näidisena see üleskirjutus, mis saadakse äsjamainitud paralleelsuse tunnuse tõestuse jaotamisel. Märkused tuuakse väga üksikasjalistena, neid võib lühendada.



Joon. 18.

Eeldused. 1) sirged a ja b lõikuvad sirgega c punktides A ja B (joon. 18); 2) kaasnurgad 1 ja 2 on võrdsed.

Väide. Sirged a ja b on paralleelsed.

Tõestus.

1. Oletame, et a ei ole $\parallel b$; siis a lõikab b-d kas punktis E paremal pool või punktis D vasakul pool (definitsiooni põhjal: kaks sirget on paralleelsed, kui nad asetsevad ühel ja samal tasapinnal ega lõiku, kui palju me neid ka pikendaksime).

2. Oletanud, et a ja b lõikumine toimus paremal pool, punktis E, saame $\triangle ABE$, milles $\angle 2$ on üheks sisenurgaks ja $\angle 1$ välisnurgaks, mis pole selle sisenurga kõrvunurgaks.

3. $\angle 1 > \angle 2$ (teoreemi järgi: välisnurk...).

4. Punkti 3 järeldus on vastuolus eeldusega, et $\angle 1 = \angle 2$; see vastuolu tõestab, et tehtud oletus sirgete a ja b lõikumise kohta punkis E ei ole õige.

5. Oletanud, et a ja b lõikumine toimus vasakul pool, punktis D, veendume, et ka see viib vastuoluni eeldusega.

6. Ei niisiis a ei saa lõikuda b-ga ja asetseb b-ga ühel ja samal tasapinnal, siis $a \parallel b$.

Geomeetria koolikursuse sisu ei ammendu kaugeltki mitte oma definitsioonide, aksioomide ja teoreemidega; selle kursuse kohta tuleb lahendada palju mitmekesiseid ülesandeid kolmest põhiliigist: arvutusülesandeid, konstruktsioonülesandeid ja tõestusülesandeid. Geomeetria õppimine on täisväärtuslik ainult sel tingimusel, kui ülesannete lahendamisele osutatakse küllalt tähelepanu kursuse iga osa õppimisel, kuid õpetamise praktikas tegelevad õpilased geomeetria ülesannetega kahjuks palju vähem kui aritmeetika, algebra ja trigonomeetria ülesannetega. Õpetaja räägib sageli, et kogu aeg või peaaegu kogu aeg, mis on määratud geomeetria õppimiseks, kulub teoreetilise külje tundmaõppimiseks, ülesannete lahendamiseks aga ei jatku aega. Töö normaalse käigu puhul aga tuleb ülesannete lahendamiseks eraldada üks kolmandik kuni pool sellest ajast, mis kulutatakse geomeetria õppimiseks.

Arvutusülesanded on enamalt jaolt aritmeetika ja algebra ülesanded, mis on üles ehitatud geomeetrilise materjali põhjal; neid ei tohi alahinnata, kuid nad kuuluvad oma olemuselt rohkem neile kahele distsipliinile kui geomeetriasse ja võimaldavad süvendada arvutamisoskust (ligikaudsed arvutused), algebraliste avaldiste teisendamise ja võrrandite koostamise ning lahendamise oskust. Geomeetria osa taandub harilikult sellele, et ta annab ülesannete lahendamiseks vajalikud valemid, kuid joonise uurimine, antud ja otsitavate elementide selgitamine, siia kuuluvate teoreemide meeldetuletamine, abijoonte tõmbamine — kõik see muidugi soodustab oluliselt geomeetrilise materjali paremat selgitamist ja kindlamat meelespidamist.

Konstruktsioonülesanded kuuluvad täielikult geomeetriasse. Neis on väga väärtuslik õpilaste eneste poolt konstrueeritud joonise abil teostuv näitliku geomeetrilise kujutamise ühendamine loogilise arutlusega, mida ei peeta meeles valmis kujul, nagu see toimub teoreemide õppimisel, vaid teostatakse õpilaste eneste poolt. Konstruktsioonülesandeid tuleb anda kogu geomeetria kursuse kestel, ja igal juhtumil on vaja taotleda nende ülesannete iseseisva lahendamise kunsti omandamist, osutades nõutavat tähelepanu lahenduskäigu kõigile neljale osale: analüüsile, s. o. lahendusviisi otsimisele; konstrueerimisele, mis faktiliselt teostatakse joonestusvahendite abil; selle tõestamisele, et konstrueeritud kujund tõepoolest rahuldab kõiki ülesandes esitatud nõudeid; kõigi lahendamisel esineda võivate juhtumite uurimisele. Tegeldes isegi kergemate konstruktsioonülesannete lahendamisega, lähevad õpilased valmis

materjali ja tema lihtsamate rakenduste tundmaõppimiselt üle iseseisvale, matemaatilise loomingu jooni kandvale tööle, mis teeb kursuse edaspidise omandamise märksa produktiivsemaks. Suurt kasu toob ühe ja sellesama ülesande lahendamine nii arvutamismeetodi kui ka konstrueerimismeetodiga, selgitades kummagi eeliseid ja puudusi; järgnevas esituses vaatleme mõned näited niisuguse ühe ja sellesama ülesande kahesuguse lahendamise kohta.

Tõestusülesandeid kasutatakse koolipraktikas kahjuks veel vähem kui konstruktsioonülesandeid. Kuid ainult need võimaldavad valmis tõestuste päheõppimiselt üle minna tõestusmeetodite mõistmisele ja oskusele rakendada neid meetodeid. Õpilastel, kes oskavad lahendada kas või lihtsaidki tõestusülesandeid, pole enam tarvis meeles pidada kõiki üksikasju õpikus antud teoreemide tõestustest: olles meelde jätnud tõestuse idee, tema «võtme», mis on iseloomustatav ühe-kahe fraasiga, viivad nad tõestuse läbi, arvates iseseisvalt ära tema üksikasjad.

Eriline koht on geomeetriliste kohtade leidmise ülesandeil, mis eriti arendavad nii näitliku kujutlemise võimet kui ka oskust loogiliselt arutleda: lahendades neid on vaja aimata, kuidas paiknevad need punktid, millel on näidatud omadus, missuguse kujundi nad moodustavad, ja seejärel alles anda tõestus, esiteks selle kohta, et kõigil selle kujundi punktidel on tõepoolest see omadus, ja teiseks, et ühelgi punktil, mis ei kuulu sellele kujundile, ei ole seda omadust. Geomeetriliste kohtade leidmise ülesanded on olemuselt tõestusülesanded, millel on see iseärasus, et tõestamisele kuuluv lause ei ole antud valmis kujul, vaid see on tarvis leida ja see teeb ülesande lahendamise veelgi väärtuslikumaks.

§ 4. Näitlikkus geomeetria õpetamisel.

Esimene tutvumine geomeetriliste kujunditega põhineb loomulikult asjade vaatlemisel, mis suurema või vähema lähendusega realiseerivad neid kujundeid, ja iga geomeetrilise objekti tundmaõppimine nooremais klassides peab algama selle objekti näitamisega meid ümbritseva maailma asjadel, eriliste geomeetria õppevahendite demonstreerimisega, millel neid objekte on eriti hea vaadelda ja seda objekti reprodutseerivate jooniste ja mudelite tundmaõppimisega. Aja jooksul kujuneb õpilastel välja oskus kujutleda endale küllalt selgesti geomeetrilisi objekte, vähemalt lihtsamaid neist, näha neid nii-ütelda «vaimusilmaga», kujuneb välja oskus õigesti otsustada asjade omaduste üle ka siis, kui neid ei ole silmade ees, kujuneb järk-järgult välja «abstraktne mõtlemine». Näitlikkus geomeetria õpetamisel omab esmajärgulist tähtsust õpetamise esimestel sammudel. Ei ole võimalik kindlustada tutvumist ringiga, kui ei pöörata laste tähelepanu ringidele, mida nad näevad klassis, tänaval ja kodus, kusjuures neile ringide otsimistele saab anda võistluse kaasakiskuva iseloomu: kes näitab kõige suurema

ringi asjadel, mida me vaatleme? kõige vähema? Teine samm tutvumisel ringiga on tema konstrueerimine mitmesuguseil viisidel: nii joone tõmbamisega ümber paberilehele asetatud silindrilise nõu põhja, ringide joonestamisega mitmesuguste sirklit asendavate vahenditega, näiteks tüki nööri ja kahe tikuga, millest üks lüüakse maasse ja teine jooni̇stab ringi maapinnale, kui ka tõelise sirkli abil paberile. Mida vanemad on õpilased, seda vähem tähtsus on näitlikel õppevahendeil, seda suurem on abstraktse mõtlemise osatähtsus, kuid jooniseid kasutatakse geomeetria õpetamise kõigil astmeil keskkoolis, kergendades oluliselt iga küsimuse omandamist.

Neile üldistele seisukohtadele näitlikkuse põhimõtte rakendamisest matemaatika õpetamisel üldse, mis olid esitatud eespool, esimese osa § 21, lisame veel järgmist.

Geomeetria üldtunnustatud jaotamisel planimeetriaks ja stereomeetriaks, mida õigustatakse vajadusega tundma õppida esialgu lihtsamaid, seejärel keerukamaid ja raskemaid küsimusi, on õige suurel määral kunstlik iseloom: me elame kolmemõõtmelises ruumis, ja tasapinnalised (kahemõõtmelised), seda enam aga lineaarsed (ühemõõtmelised) geomeetrilised kujundid saadakse ainult teatava abstraheerimise tulemusena; kõneldes näiteks ringist, mis on silindrilise plekknõu põhjaks, me koondame oma tähelepanu ainult sellele põhjale, unustades kogu plekknõu, kuigi põhi on plekknõu osa; võttes selle põhja ära ja vaadeldes teda eraldi, on meil siiski tegemist silindriga, millel on ainult väga väike kõrgus (võrreldes diameetriga). See kolmemõõtmeliste ruumikujundite primaarne iseloom ja kahemõõtmeliste tasapinnaliste ning ühemõõtmeliste lineaarsete kujundite sekundaarne iseloom viib mõttele loobuda geomeetria kunstlikust jaotamisest planimeetriaks ja stereomeetriaks ning õppida mõlemaid neid geomeetria osi koos. Siit on välja kasvanud terve vool geomeetria õpetamise metoodikas — «fusionism» (ladinakeelsest «fusio» — kokkuvoolamine, ühinemine), mis väärib igal juhtumil tähelepanu geomeetria õppimise esimestel sammudel, kus esiplaanile nihkub ülesanne varustada õpilased õigete, eredate ja kindlalt meeldejäävate näitlike kujutluste suure tagavaraga (vt. näiteks raamatut [IV, 38]).

•

Kehtiv keskkooli matemaatika programm realiseerib fusionismi selles väikeses geomeetria eelkursuses, mis on lülitatud algkooli ja keskkooli V klassi aritmeetika kursusse. Nii näiteks peatükis «Kümnendmurrud» (V klassi aritmeetika programmis) leiame järgmise punkti: «Geomeetrilise sisuga ülesannete lahendamine: ringjoone pikkuse ja ringi pindala, silindri pindala ja ruumala arvutamine». Kuid ka järgmistel aastatel, pöördudes näitlike vahendite juurde, peame rõhutama, et lineaarsed ja tasapinnalised kujundid kujutavad endast abstraktsiooni tulemusi, loobumist vaadeldavate kehade paljudest teistest omadustest, ja ei tule vältida rääkimast neist kehadest tervikuna.

Näitlikel õppevahendeil, mis on valmistatud õpilaste eneste poolt, on suurem väärtus kui valmina ostetuil, kuigi nad ei asenda viimaseid täielikult. Geomeetrias on palju mõisteid, mida saab illustreerida omatehtud vahenditega. Igal õpilasel peab olema hea joonlaud sentimeetriliste ja millimeetriliste jaotistega, kuid las igaüks teeb peale selle veel joonlaua, mis on jaotatud poole sentimeetri kaupa, kokku murdes tüki ruudulist vihikulehte. Piirdumata täis-

nurga kui poole sirgnurga või kui oma kõrvunurgaga võrdse nurga defineerimisega nõuame, et iga õpilane ise valmistaks täisnurga paberitüki kahekordse kokkumurdmisega, mis siiski ei kõrvalda igaühel hea vabrikus toodetud kolmnurga omamise tarvilikkust. Raskem on valmistada malli ja sirklit, kuid ka seda tööd tuleb soovitada: olles valmistanud enam või vähem jämedalt malli, kas või valmis eeskuju kopeerimisega, ja sirkli augukestega varustatud pabeririba näol, mis võimaldab joonestada ringjooni teatavate kindlate raadiustega, hindavad õpilased paremini vabrikus valmistatud abinõude väärtusi ja peavad kindlamini meeles kõik nende kohta käiva.

Mida enam näitlikke õppevahendeid, loomulikke ja kunstlikke, omatehtuid ja ostetuid, kasutatakse keskkooli nooremais, s. o. V—VII klassides, seda parem. Edaspidi näitlike õppevahendite tähtsus järk-järgult kahaneb, kuid isegi keskkooli viimase klassi geomeetria kursuse teatud küsimuste omandamise kvaliteet võidab väga palju vastavate näitlike vahendite, näiteks hulktahukate ja pöörkehade mudelite kasutamisel. Joonis ja iga liiki mõõtmised säilitavad oma tähtsuse keskkooli kõigis klassides.

Erilist mainimist väärivad tööd maastikul, s. o. maamõõtmise (geodeetilise, topograafilise) iseloomuga tööd. Neist on geomeetria välja kasvanud, neil on ka praegu esmajärguline praktiline tähtsus, ja paljusid sellistest töödest saab edukalt sooritada geomeetria koolikursuse tingimustes. Sedaliiki töödest on juttu järgneva käsitluse mõnedes paragrahvides, seni aga piirdume üksnes raamatu [IV, 29a] ja artiklite [IV, 29b, 17] soovitamisega, mis annavad õpetajale nende tööde korraldamiseks tarvilike teadmiste miinimumi.

§ 5. Geomeetria õppekirjandus.

Käesoleval ajal toimub geomeetria õppimine meie keskkoolides A. Kisseljovi ümbertöötatud õpiku järgi, mis esmakordselt anti välja 1882. a. ning oli revolutsioonieelses vene koolis kõige laialdasemalt levinud. Nõukogude koolis oli Kisseljovi õpik ajutiselt välja tõrjutud J. Gurvitsi ja R. Gangnusi «Geomeetria süstemaatilise kursuse» poolt, kuid 1938. aastast alates ta taastati. Need faktid räägivad selle õpiku silmapaistvaist väärtustest, kuid siiski pole ta kaugeltki täiuslik. Geomeetria põhikursust VI klassis õppima hakkajate jaoks on ta liiga raske ja vanemate klasside jaoks pole ta küllalt lähedal kaasaegseile vaadetele esituse võimaliku ja tarviliku ranguse mõttes. Õpiku üksikud puudused, mida õpetaja peab teadma esmajärjekorras, on näidatud edasise esituse vastavais kohtades.

Juba Kisseljovi õpiku väljaandmise uuendamisel 1938. a. tunnistati, et meie keskkoolile on tarvis uut geomeetria õpikut — ja selline õpik loodi Suure Isamaasõja aastail. See on N. Glagolevi «Elementaargeomeetria», mis on välja antud kahes osas (planimeetria — VI—VIII klassile, stereomeetria — IX—X klassile). Raamatul on rida kahtlematuid väärtusi, kuid otsustada tema sobilikkuse üle Kisseljovi õpiku vahetusena veel ei saa, sest pole küllaldaselt kogemusi temaga töötamisel. Retsensioon tema kohta on antud ajakirja «Математика в школе» esimeses numbris 1946. a.

Rohkearvulistest vanadest geomeetria õpikutest märgime ära ainult A. Davidovi «Elementaargeomeetria»; sellel raamatul, mis esitas geomeetriat teatavas mõttes Eukleidese-pärasemalt kui enamus teisi meie õpikuid, oli väga laialdane levik Vene keskkoolides XIX saj. lõpul ja XX saj. algul. Uuemate raamatute hulgast väärі-

vad õpetaja erilist tähelepanu N. Izvolski, J. Hadamard'i ja D. Perepjolkini õpikud (vt. [IV, 1, 31, 48]). Teine neist esitab elementaargeomeetriat täielikumalt kui ükski teine, ja keskkooliõpetaja leiab sealt palju kasulikku materjali. Viimane raamat on määratud pedagoogiliste instituutide üliõpilastele ja kujutab endast katset lähendada geomeetria esitust aksiomaatilisele, lihtsustades viimast oluliselt loobumisega aksioomide süsteemi sõltumatuse nõudest.

Kisseljovi geomeetria õpik koolidele, nagu teisedki eespool mainitud käsiraamatud, sisaldab suure hulga harjutusülesandeid, mida tavaliselt kaugeltki kõiki koolis ei kasutata. Süstemaatilisema valiku üsna mitmekesiseid (nii sisu kui ka raskuse astme poolest) geomeetria ülesandeid sisaldavad Rõbkini ülesannete kogud koolidele. Lisaks sellele võib soovitada raamatut [IV, 23], milles on hulk raskemaid, kuid keskkooli vanemate klasside õpilastele jõukohaseid geomeetria ülesandeid koolikursuse kõigi osade kohta; selle raamatu kasutamist kergendab kõigi ülesannete üksikasjaliste lahenduste olemasolu temas.

Hiljuti ilmus uus geomeetria ülesannete kogu õpetajate instituutide üliõpilastele [IV, 43], mis keskkoolis kasutamiseks on peaaegu tervenisti sobiv.

Kõigi loetletud geomeetria ülesannete kogude ühine puudus on — abstraktse iseloomuga ülesannete ülekaal ja selliste geomeetria ülesannete täielik või peaaegu täielik puudumine, mis tegelikult tekivad teaduse ja tehnika mitmesuguseis harudes. Geomeetria arvutusülesandeid, konstruktsioonülesandeid ja geomeetriliste kohtade leidmise ülesandeid lahendab nii maamõõtja, tüürimees, suurtükiväelane, astronoom, füüsik kui ka reatöötaja treial, hoonete või masinate ehitaja jne. ja igaühes neist erialadest võib anda küllalt ülesandeid, mis on õpilastele jõukohased erialaste seletuste miinimumi andmisel. Selliste ülesannete kasutamist (ilma nende ülemäärase harrastamiseta) tuleb tungivalt soovitada: nad toovad kaasa tublisti elevust, õpetavad orienteeruma mitmes elulises olukorras ja loovad õige vaate geomeetriale kui teadusele reaalselt eksisteerivate ruumiliste vormide omaduste kohta.

II peatükk.

ESIMESED SAMMUD GEOMEETRIA ÕPPIMISEL.

§ 6. Algkoolis omandatavad geomeetrilised teadmised ja oskused.

Algkooli aritmeetika programm näeb ette küllalt tähelepanuväärse töö geomeetria alal, mis on seotud meetermõõdustiku pikkus-, pindala- ja ruumalamõõtude tundmaõppimisega. Keskkooli matemaatika õpetajal tuleb olla teadlik sellest tööst, et kinnistada selle tulemusi ja tugineda neile geomeetria süstemaatilise kursuse õppimisel, ja kui tuleb ilmsiks, et üksikuil õpilastel selle töö jälgi

ei leidu, siis asuda nende lünkade täitmisele. Selleks kulutatud aeg tasub end kuhjaga, tänu lihtsamate geomeetriliste kujutluste varu suurenemisele, mis annab võimaluse kiiremini ja kindlamalt edasi minna.

Mõnede pikkusmõõtudega ja järelikult ka lõigu (sirglõigu) mõistega tutvuvad lapsed juba I ja II klassis. III õppeaasta lõpuks peavad nad juba tundma meetersüsteemi viit tarvitatavat pikkusmõõtu (mm, cm, dm, m, km), peavad oskama kasutada sentimeeter- ja millimeeterjaotistega joonlauda sirgete tõmbamiseks, lõikude mõõtmiseks ja antud pikkusega lõikude liitmiseks. Väga soovitav on ka oskus teostada sirglõikude mõõtmist maastikul (kasvõi sammudega, selgitades oma sammu pikkuse ja arvutades mõõdetud pikkuse ümber meetritesse). Mitmesuguste teede pikkuste mõõtmine maastikul ja kaardi järgi viib tutvumisele murdjoonega. III klassis õpitakse tundma ka ruutmõõte, mille teadlik omandamine on võimatu tutvumiseta täisnurga ja ruudu mõistega. Neid on kõige parem käsitleda paberi kokkumurdmise teel: omades kas või ebakorrapärase kujuga paberitükki, peavad lapsed oskama saada esimese murdmisega sirge serva, teise murdmisega — täisnurga, ja seejärel, paigutades selle haaradele antud pikkusega võrdsed lõigud ning teostades veel kaks kokkumurdmist täisnurga all, saama antud suurusega ruudu. Täisnurga mõiste saab täielikuma selguse, kui koos sellega võetakse tarvitusele terav- ja nürinurga mõiste ning õpitakse kasutama kolmnurka, mis on samuti ette nähtud III klassi programmis. Sellessamas klassis toimub täiesti loomulikult tutvumine paralleelsete sirgetega, kuna lapsed saavad kaks paari paralleelseid lõike juba mis tahes ruudu ehitamisel. Paralleelide konstrueerimine toimub joonlaua ja kolmnurga abil. Üleminek ristkülikule laseb end teostada üsna kergesti. Osates mitmel viisil ehitada ruute ja ristkülikuid, omandavad õpilased teadlikult nii pindalamõõdud kui ka ristküliku pindala määramise reegli (kui ristküliku külgede pikkused väljenduvad täisarvudega). Alaline jooniste tegemine joonlaua ja kolmnurga abil mitte üksnes ruudulisele, vaid ka muule paberile, kindlustab täieliku selguse rohkearvuliste ja mitmekesiste ülesannete püstitamisel ja lahendamisel ristkülikute pindala kohta, mis on praktiliselt nii tähtsad igaühe jaoks.

IV klassis minnakse üle raskema küsimuse — kuubi ja risttahuka («prussi») käsitlemise juurde. Omandamise edukus oleneb täielikult sellest, kuivõrd on kindlustatud näitlikkus; kasutades puust kuupi, veelgi parem: tervet nende kogu, on kerge taotleda seda, et lapsed saaksid selged kujutlused kuubi tahkudest, servadest ja tippudest, õpiksid mõttes tükeldama suurt kuupi, mille serv sisaldab täisarvu ühikuid, väikesteks kuupideks, mille servaks on ühik, omandaksid teadlikult kuubi ja prussi ruumala arvutamise reeglid.

IV klassi õpilane, kes on kindlalt omandanud ruut- ja kuupmõõdud, kes enesekindlalt konstrueerib kujundeid, mis koosnevad

ristkülikuist, kes vabalt lahendab tavalisi ülesandeid pindalade ja ruumalade mõõtmise kohta, omandab pärastpoole võrreldamatult paremini esimesed teadmised geomeetria süstemaatilisest kursusest. Kui õpilane ei tunne kindlalt ruut- ja kuupmõõte, siis nende juurde tagasipöördumine (tingimata täiesti näitlik, kõigi üksikasjade vastava selgitamisega ja kohustuslike konstrueerimistega) toob väga tunduvat kasu geomeetria õppimisele, rääkimata eelneva koolitöö sellise tähtsa defekti parandamise vahetust praktilisest kasust.

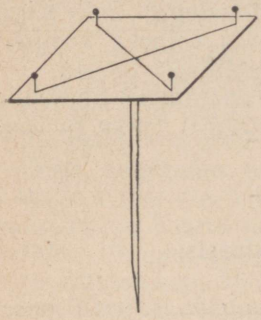
Tutvumiseks töö üksikasjadega geomeetria õpetamisel algkoolis on soovitav kõigepealt tutvuda algkoolis kasutatava õpiku ja raamatutega [IV, 6, 33].

§ 7. Geomeetria õpetamine V klassis.

Kehtivas V klassi aritmeetika programmis on rida geomeetriasse kuuluvaid punkte, mis osaliselt kordavad juba algkoolis õpitud materjali, osaliselt lähevad kaugemale. On välja valitud küsimused, millel on kõige laialdasem rakendus elus ning on seetõttu tarvilikud igaühele. Kõik need küsimused esinevad geomeetria süstemaatilises kursuses väga hilja, pärast VII klassi, ja see asjaolu teeb vajalikuks eriti tähelepanelikult suhtuda neisse küsimustesse, tegeldes aritmeetikaga V klassis: sellele osale noortest, kes pärast seitsmeklassilise kooli lõpetamist lähevad praktilisele tööle, võivad need teadmised pindalade ja ruumalade mõõtmisest osutuda ainsaiks.

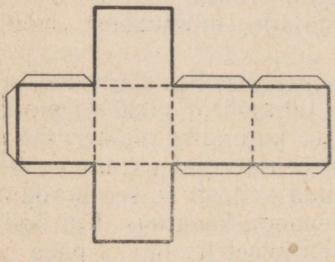
Aritmeetika tunnid V klassis algavad algkoolis läbivõetu kordamisega, kusjuures programmis on eri juhtnöörid pikkus-, pindala- ja ruumalamõõtude kohta, lihtsamate kujundite ümbermõõtude, ruudu ja ristküliku pindala ning kuubi ja risttahuka ruumala arvutamise ülesannete kohta. Tuleb hoiduda sellest, et see kordamine ei muutuks formaalseks ja järelikult peaaegu kasutuks. Kui õpilane teab, et ruutdetsimeetris on 100 ruutsentimeetrit, aga ei oska seletada, mispärast see nii on, ei oska joonestada ruutu, mille pindala on 1 dm^2, ja näidata, et seda on võimalik lõigata 10 täisnurkseks ribaks laiusega 1 cm, millest igaüht saab lõigata 10 ruutsentimeetriks, siis on õpetaja kohuseks taotleda, et kõik need algkooli töö puudujäägid saaksid kõrvaldatud. Seda kordamistööd saab teha lastele huvitavaks, isegi kaasakiskuvaks, kui rakendada laialdaselt joonestamist ruudulisel paberil (üksnes joonlaua kasutamisega) ja muul paberil (millimeeterjaotistega joonlaua, kolmnurga ja soovitavalt ka mõõdusirkli kasutamisega), kui teostada selliseid lihtsamaid töid maastikul, nagu pikkuse mõõtmine, sirgete märkimine, täisnurksete maatükkide tükeldamine ja täisnurksete kujundite pindalade mõõtmine. Töö juures maastikul mängib kolmnurga osa lihtne abinõu, niinimetatud «ekker», mida lapsed ise saavad kergesti valmistada: ruudukujulisele vineeri- või paksu kartongi tükile tõmmatakse kaks teineteisega ristuvat sirget, mis märgitakse ära

kahe paari nööpnõeltega (joon. 19), ja nende sirgete lõikepunktist lüüakse läbi nael, mis kinnitab lauakese kepi külge. See kepp torgatakse maasse antud sirge selles punktis, millest tuleb sirgele tõmmata ristsirge. Kui üks paar nööpnõelu suunata antud sirgele, siis teine paar näitab tema ristsirge sihti.

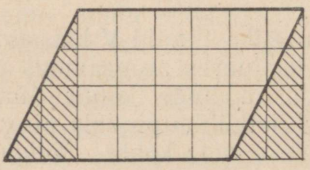


Joon. 19.

Ruutmõõtude kordamisel on väga kerge saavutada täielikku selgust arusaamises; raskem, kuid samuti täiesti võimalik ning täielikult mõõdapääsmatu on kindlustada see selgus kuupmõõtude kordamisel. Palju aitab kaasa valmis näitlike õppevahendite kasutamine; kuupdetsimeeter, mis on lõigatud risttahukaiks suurusega $10 \times 10 \times 1$ cm³ («plaadid») ja $10 \times 1 \times 1$ cm³ («prussid»), kusjuures vähemalt üks niisugune pruss peab olema lõigatud kuupsentimeetreiks. Lapsed ise valmistavad meeleldi selliseid mudeleid käepärasest materjalist, joonestavad ja lõikavad välja kuubi pinnalaotuse (joon. 20), ja järgneva kokkukleepimisega valmistavad kuubi. Hea mudel saadakse seejuures üksnes täpse töö tulemusena, ja sellise mudeli valmistamisel võib olla õige suur kasvatuslik tähtsus.



Joon. 20.



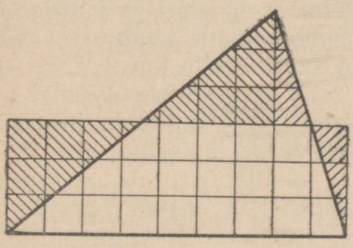
Joon. 21.

Edasisel aritmeetika õppimisel V klassis näeb programm ette ülesannete lahendamist rööpküliku ja kolmnurga pindala arvutamiseks. V klassi jaoks kõige loomulikum rööpküliku käsitlemine toimub täisnurkse kolmnurga vaatlemise kaudu, mis omakorda saadakse ristküliku lahtilõikamisel mööda diagonaali. Lõigates ristküliku küljest ära täisnurkse kolmnurga, mille üheks kaatetiks on üks ristküliku külgedest ja teiseks — osa selle naaberküljest, ning paigutades selle kolmnurga vastavalt ümber, muudame ristküliku rööpkülikuks (joon. 21). See muundamine ei muuda kujundi pindala; pole ju pindala algajate silmis midagi muud, kui kujundit täitvate ruutude hulk, mille küljeks on 1 cm (või mõni muu pikkus-

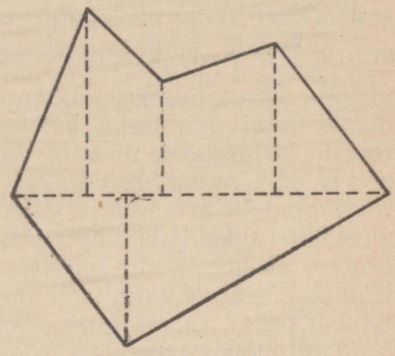
ühik). Siit on lihtne tuletada reeglit rööpküliku pindala arvutamiseks.

Analoogiliselt tuletatakse ka kolmnurga pindala arvutamise reegel. Paljudest võimalikest viisidest soovitatakse seda, mida näitab joonis 22.

Osates leida ruudu, ristküliku, rööpküliku ja kolmnurga pindala, võime leida ka mis tahes tasapinnalise kujundi pindala, mis on piiratud murdjoonega, samuti aga ka iga tasapinnalise kujundi pindala, kui tema kontuur ei ole ainult väga keeruline: iga kõverjoont saab asendada praktilisteks otstarveteks piisava täpsusega mingi murdjoonega. Oskus leida plaanile kantud või maastikul näidatud kujundi pindala on suure praktilise väärtusega, eriti maa-



Joon. 22.



Joon. 23.

kooli tingimustes, ja nendele ülesannetele tuleb osutada küllalt tähelepanu. Soovitame järgmist harjutust. Paksu paberi või õhukese kartongi tükist (näiteks postkaartidest) lõigatakse välja mitu võrdset kujundit, mis on joonisel 23 vähendatud kujul kujutatu taolised. Iga õpilane joonestab selle kujundi endale vihikusse (lihtsalt tõmmates joone tema kontuuri järgi) ja, tükeldades selle sobivaiks osadeks, mida saab teha mitmel viisil (üks nendest on näidatud punktiiriga), määrab tema pindala, teostades ise kõik vajalikud mõõtmised. Kõiki saadud vastuseid võrreldakse selle täpsemaga, mille enne sai õpetaja ja teostatakse mitmesuguste kasutatud viiside õpetlik analüüs.

Programmi järgmises osas («Kümnendmurrud») on punkt ringjoone pikkuse, ringi pindala ja silindri ruumala arvutamise kohta. Lapsed tutvuvad sirkli tarvitamisega ja rea terminitega: ringjoon, keskpunkt, läbimõõt (diameeter), ringjoone kaar, kõõl. Tähtsaim ja raskeim on katselisel teel kindlaks teha ringjoone pikkuse ja diameetri suhte jäävust ning veenduda, et see on ligikaudu $\frac{22}{7}$ või 3,14. Küsimus selle kohta, mis on ringjoone pikkus, lahendatakse siin näitliku kujutuse põhjal, kujutledes ringjoont venimatu

niidina, mida saab sirgestada; lastel lastakse mõõta mingi ringjoone pikkus (paela, nööri või pabeririba abil) millimeetrilise täpsusega ja samuti võetud ringjoone läbimõõt. Lastele teatatakse ette, et on soovitav võtta võimalikult suure raadiusega ringjooned; igaüks võtab mingi oma ringjoone, mille juures on võimalik teha taolist mõõtmist: konservikarbil, tassil, tünnil, rattal jne. Igaühe ülesandeks on välja arvutada (täpsusega kuni sajandikeni), mitu korda on tema poolt võetud ringjoone pikkus suurem tema läbimõõdust. Harilikult saadakse tulemuseks 3,10 kuni 3,18, kusjuures enamiku ausalt saadud kolme-neljakümne tulemuse keskmine on peaaegu alati 3,14. Teatanud, et see arv on ainult ligikaudne, kuid erineb täpsest alles tuhandikest alates, ja et täpsemat väärtust vaadeldakse palju hiljem — IX klassis, laseb õpetaja meelde jätta selle arvu 3,14 või sellega peaaegu võrdse mugavama «Archimedese arvu» $\frac{22}{7}$. Seda kasutades määratakse kindlaks reegel ringjoone pikkuse arvutamiseks, kui on antud tema diameeter, ja ringjoone diameetri arvutamiseks, kui on antud tema pikkus, kusjuures need reeglid kirjutatakse üles nii sõnades kui ka valemite kujul: $C = \pi d$, $d = C : \pi$, $C = 2\pi r$, $r = C : 2\pi$. Pärast seda ei valmista raskusi ka ringi pindala arvutamise valemi tuletamine, kui tugineda hindude meetodile: tükeldada ring paarisarvuliselt võrdseiks sektoreiks. Programm nõuab silindri ruumala küsimuse käsitlemist, mis on täiesti loomulik, sest silindri kuju on väga levinud, ja oskus arvutada kruusi, purgi, ümmarguse silotorni jne. ruumala on väga oluline. Muidugi mõista lahendatakse enne ülesandeid risttahuka («prussi») ja püstprisma ruumala arvutamise kohta. Kui lapsed on aru saanud, et iga püstprismat saab lõigata tasapindadega, mis paralleelsed tema põhjaga, ühesuurusteks «plaatideks» paksusega 1 cm, et iga sellist plaati saab lõigata kuupsentimeetriteks, mida tuleb välja täpselt nii palju, kui palju ruutsentimeetreid mahub prisma põhjale, siis saadakse täiesti loomulikult prisma ruumala arvutamise reegel, aga siit on üksainus samm püstringsilindri ruumala valemini $V = \pi r^2 h$. Selletaolised arutlused on täiesti arusaadavad ja veenvad 11—12 aasta vanuste laste jaoks, kusjuures arusaamise selgus ja omandamise kindlus võidavad väga palju, kui arvutustega kaasneb katseline kontroll, mida on nii kerge teostada ilma mingisuguste eriliste abinõudeta. Näiteks tõstetakse üles küsimus, mitu kruusi vett mahub pange, kusjuures nii kruus kui ka pang antakse laste käsutusse, kes algul teostavad vajalikud mõõtmised millimeeterjoonlauaga, siis arvutused (rakendades ratsionaalset ümardamist, millest oli juttu teise osa § 26) ja lõpuks kontrollimise vee faktilise ümbervalamisega. Et ei oleks tunglemist, tuleb võtta mitu paari sobivaid silindrilisi nõusid, jaotades klassi 5—6 õpilase kaupa lülideks, kuid nõudes iga osavõtja töös täielikku iseseisvust; võrreldakse ainult arvutuste ja katse lõpptulemusi. On hämmastama panev, kuidas tõuseb matemaatika reeglite omandamise kindlus, kui viiakse läbi sedaliiki nende reeglite tõeliselt praktilise raken-

duse harjutusi koos kontrollimisega katse varal! Tuleb ainult püsivalt ja süstemaatiliselt rõhutada kahe mõõtmismeetodi vahelist erinevust, erinevust otsese ehk vahetu mõõtmise (kui näiteks pange maht tehakse kindlaks tema tühjendamisel kruusiga) ja kaudse mõõtmise vahel (kui näiteks vahetult mõõdetakse ainult pange läbimõõt ja kõrgus, ruumala aga saadakse arvutuste teel) ja selgitada viimase eelised. On iseenesest arusaadav, et V klassis ei saa olla mingisugust juttu nendest loogilistest raskustest, mis on vältimatud ringjoone pikkuse, ringi pindala ja silindri ruumala küsimuse rangemal käsitlemisel.

Kui tihti tuleb kuulda õigustatud etteheiteid seitsmeklassilise kooli aadressil, kes sageli ei varusta teda lõpetanud noori kõige primitiivsemagi oskusega pindalade ja ruumalade mõõtmise alal! Olukorra radikaalne parandamine on võimalik ainult V — VII klasside geomeetria programmi tõsisel ümbertöötamisel, kuid ka kehtiva programmi raamides, osutades küllalt tähelepanu loetletud geomeetria küsimustele V klassi aritmeetika kursuses, saab õpetaja anda palju kasulikke teadmisi ja oskusi.

§ 8. Esimesed geomeetria tunnid VI klassis. Algmõisted ja aksioomid.

Geomeetria süstemaatilise kursuse õppimine algab programmi järgi osaga «Sissejuhatus», millele on määratud 10 tundi. Siin tuleb eristada kolme koostisosa: tutvumine algmõistetega, mille sisu avatakse aksioomide ja näitlike kirjelduste kaudu, mõne defineeritava mõiste tundmaõppimine ja mõnede esimeste teoreemide õppimine nende loogiliste tõestustega. Vaatleme igaüht neist kolmest osast eraldi.

Tuletame meelde, et geomeetria algmõisteteks on need mõisted, mida ei saa defineerida nende taandamise teel teistele, üldisemaile mõisteile. Aksiomaatilise käsitluse puhul avatakse nende sisu üksnes aksioomide kaudu: punktideks, sirgeteks ja tasapindadeks on mis tahes objektid, mis rahuldavad geomeetria aksioome. Koolikäsitluses antakse nendele mõistetele kitsam tähendus, millega õpilased tutvuvad vastavate kirjelduste kaudu. Neist ongi tarvis alata, kasutades sobivaid mudeleid ja selgitades neid piirile üleminekuid, mis on tarvilikud, et ebatäpselt lähenduselt üle minna täpsele kujundile.

Algmõistete (defineerimatute mõistete) hulga õnnestub geomeetria aksiomaatilise käsitluse puhul teha väga väikeseks. Koolikäsitluses nende arv suureneb tunduvalt. Kõigepealt kasutatakse mis tahes geomeetrilise kujundi kui kõva keha liikumise mõistet, ja see ei ole hoopiski mitte käsitluse puudus, vaid lihtsustab seda oluliselt, muuseas teeb defineeritavaiks lõikude ja nurkade võrdsuse mõisted. Selliseid geomeetrilisi mõisteid, nagu «seespool», «väljaspool», «ühel pool», «eri pooltel» ja paljud teised, ei defineerita, vaid selgitatakse näidete varal. Juba väikesed lapsed harjuvad igapäe-

vases elus kasutama tervet rida geomeetria mõisteid, ja geomeetria kursuses kasutatakse need mõisted laialdaselt ära. Mõned neist alistatakse vastavale loogilisele ümbertöötamisele, mis mõnel juhtumil teostub tunduvalt hiljem (näide — lõigu pikkus), kõigi ülejäänute suhtes aga tuleb hoolt kanda ainult selle eest, et õpilased neid õigesti kujutleksid ja õigesti tarvitaksid, ja seda ei kindlustata mitte katsetega anda neile definitsioonid, vaid konkreetsete näidetega nende realiseerimise kohta; siis muutuvad võimatuks selletaolised juhtumid, et õpilane, tutvudes aksioomiga kaht antud punkti läbiva sirge ühesuse kohta teatab, et see on ebaõige, sest kõik oleneb sellest, missugused punktid võtta: kui võtta punktid, millest kumbki on rusikasuurune, siis... Lõigu pikkuse mõistega on lapsed harjunud eelkoolieast peale. VI klassi õpilasele on lõigu pikkuseks sellesse lõiku mahtuvate pikkusühikute ja nende osade arv, s. t. ta on veendunud, et iga lõik on ühikuga ühismõõduline. Sellega pole midagi katki, lõigu pikkuse mõistet kasutatakse alati ja tuleb geomeetria esimestest tundidest alates kasutada nii, nagu seda varem kasutati aritmeetikas. Geomeetria praktilised rakendused ei kannata vähimalgi määral selle pikkuse mõistega tutvumise ebatäielikkuse all, sest iga lõiku, millel pole ühikuga ühismõõtu, saab kui tahes suure täpsusega asendada lõiguga, millel on ühikuga ühismõõt, ja pikkuse mõiste loogiline täpsustamine, selliste lõikude olemasolu selgitamine, millel pole ühikuga ühismõõtu, mis tahes lõigu pikkuse (reaal-) arvuga väljendamise võimalikkuse selgitamine kindlustatakse geomeetria kursuse edasisel arendamisel (VIII klassis).

Määratu suur tähtsus geomeetrilistest kujunditest õigete ning selgesti piiritletud kujutluste kujunemisele on kõrvuti meid ümbritseva tegelikkuse asjade ja spetsiaalsete näitlike õppevahendite vaatlemisega ka lihtsamate joonestusabinõude — joonlaua, kolmnurga, sirkli ja malli — kasutamise oskuse omandamisel. Kui pole võimalik saada neid abinõusid vabrikus valmistatuna, tuleb kasutada nende omatehtud asendajaid, mobiliseerides õpilasi nende valmistamiseks. On täiesti kohane näidata ka nende kontrollimise võtteid, sest eraldi joonestustunnid algavad alles VII klassis.

Kisseljovi geomeetriaõpikus koolidele ei osutata küllaldaselt tähelepanu defineerimatute mõistete õige käsitamise arendamisele kirjelduste varal: siin on ülekaalus katsed anda midagi definitsioonide taolist, ja õpetaja peab tundides täitma selle puudujäägi. Märksa parem on olukord N. Glagolevi õpikus [IV, 19]. Siin on kogu sissejuhatav osa (lk-d 5—10) täidetud näidetega, mis hästi selgitavad kasutatavate geomeetria terminite tähendust, mida ei saa (või mida on äärmisel juhtumil ebaotstarbekohane) defineerida.

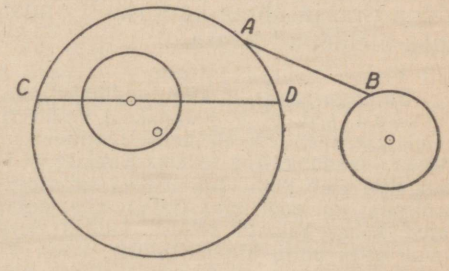
Oleks väga kasulik koostada geomeetria süstemaatilise kursuse esimestest sammudest peale faktiliselt kasutatavate aksioomide ammendav nimestik, mis annaks kindla baasi järgnevate loogiliste järelduste jaoks, kusjuures uued aksioomid võetakse tarvitusele üksnes tarviduse tekkimisel nende järele, kuid

meie kooliõpikuis seda ei tehta: ilmsi sõnastatakse ainult mõned aksioomid, ülejäänuid tuleb mõista, toetudes «tervele mõistusele». Muidugi oleks see «kooliaksioomide» nimestik palju ulatuslikum kui aksiomaatilise käsitluse puhul.

§ 9. Definitsioonide käsitlemine.

Kordamata seda, mis oli öeldud definitsioonide kohta eespool, esimese osa § 5, märgime, et mõistete defineerimise oskus, mis on nii tähtis iga teaduse jaoks, areneb eriti hästi nimelt geomeetria tundides. Juba geomeetria programmi esimese osa («Sissejuhatus») õppimisel VI klassis kohtame terve rea mõisteid, millest igaühe täpne tähendus määratakse hõlpsasti kindlaks selle üldisema («sugukonna») mõiste näitamisega, mille erijuhtumiks on vaadeldav mõiste, ja selle «liigitunnuse» näitamisega, mis sellel vaadeldaval mõistel on erinevad kõigist teistest. Sellisel defineerimisel sugukonna ja liigitunnuse andmise kaudu on suurim tähtsus koolis, ja iga VI klassi õpilane peab õppima seda teadlikult kasutama. Defineerides näiteks ringjoone kõõlu kui lõiku, mis ühendab ringjoone mis tahes kaht punkti, peab ta aru saama, et siin üldisemaks mõisteks on lõigu mõiste, et iga kõõl on lõik, kuid iga lõik ei ole kõõl, ja et kõõludeks nimetatavate lõikude eraldustunnuseks («liigitunnuseks») on see asjaolu, et nende mõlemad otsad on ühe ja sellesama ringjoone punktideks. Üle minnes diameetri kui keskpunkti läbiva kõõlu defineerimisel, on meil juba uus üldisem mõiste (kõõl) ja uus liigitunnus (keskpunkti läbimine): iga diameeter on kõõl, kuid iga kõõl ei ole diameeter.

Igast definitsioonist peab olema hästi aru saadud ja selleks on täiesti tarvilik taotleda näidete toomise oskust. Sellest on vähe, et õpilane õigesti sõnastab kõõlu ja diameetri definitsiooni: ta peab oskama joonestada ringjoont, näidates selles mõne kõõlu ja diameetri, peab oskama seletada, mispärast lõik *AB* ei ole kõõl, mispärast lõik *CD* ei ole diameeter (joon. 24). Suurimaks veaks on mõnede õpetajate veendumus, et kogu töö definitsioonidega seisneb nende päheõppimises: meeldejäämine tuleb peaaegu alati iseenesest, kui taotleda teadlikkust ja definitsioonide iseseisvat ülesehitamist. Ei ole viga, kui õpilased annavad definitsioone, mis erinevad oma sõnastuselt neist, mis on toodud õpikus, kuid on tarvis väga hoolikalt parandada kõik olulised puudused õpilaste sõnastustes. Sellest ei maksa rääkidagi, kuivõrd tähtis on, et õpetaja ise mõistaks, et on võimalikud ühe ning sama mõiste definitsioonid, mis ei erine üksnes sõnastuselt, vaid ka olemuselt, ega viiks õpilasi segadusse, tarvita-



Joon. 24.

des vahet tegemata kord üht, kord teist. Nii defineeriti varemail aastail nurka kui tasapinna osa, mis asetseb kahe, ühise otspunktiga kiire vahel, nüüd aga peetakse paremaks defineerida teda lihtsalt kui ühise otspunktiga kiirte paari, ja see on õigem, sest ta kõrvaldab raskused nurga mõiste edasisel üldistamisel (400°-line nurk ei ole enam tasapinna osa). Täisnurka defineerib Kisseljovi õpik kui 90°-list nurka, tuginedes sellele, et nurgakraadi mõiste on antud varem, aga Glagolevi õpik pöördub tagasi vana eukleidilise definitsiooni juurde, defineerides täisnurka kui nurka, mis on võrdne oma kõrvunurgaga. See viimane definitsioon väärib otsustavat eelistamist, sest ta on «konstruktiivne»: kokku murdes tüki paberit, saab õpilane hõlpsasti täisnurga mudeli, nurgakraadi konstrueerimine pole temale aga jõukohane. Juhtumil, kui on olemas mingi mõiste oluliselt erinevaid definitsioone, tuleb välja valida üks neist ja sellest edaspidi rangesti kinni pidada, kuid kordamisel võib tutvustada ka teisi definitsioone, selgitades nende iseärasusi, samuti ka nende vastastikuseid suhteid.

Tuleb pidada alalist võitlust õpilaste vigadega defineerimisel, kõigepealt aga «pahelise ringiga»: tihti näiteks ütleb õpilane, et täisnurgaks nimetatakse nurka, mille moodustavad kaks teineteisega ristuvat sirget, aga küsimusele, missuguseid sirgeid nimetatakse ristuvaiks, vastab: neid, mis moodustavad täisnurga. Sageli lülitatakse definitsioonidesse ekslikult neid omadusi, mis järelduvad definitsiooni aluseks olevaist omadustest: näiteks «kaht võrdset nurka nimetatakse tippnurkadeks, kui ühe haarad on teise haarade pikendusteks». Sagedamini aga, vastupidi, jäetakse definitsiooni oluliselt tähtsad küljed vahele, definitsioon antakse ebatäielikult; defineerides näiteks kõrvunurki, öeldakse, et need on nurgad, millel on ühine tipp ja ühine haar, kuid unustatakse ütelda, kuidas asetsevad kaks ülejäänud haara.

On väga tähtis, et kõik tundmaõpitavad definitsioonid oleksid k o n s t r u k t i i v s e d, s. t. et nad annaksid defineeritava geomeetrilise kujundi ehitamise võimaluse, sest selle ehitamise faktiline teostamine tõstab nii arusaamise selgust kui ka omandamise kindlust. Kahjuks ei pea Kisseljovi õpik sellest põhimõttest kaugeltki alati kinni. Nii näiteks defineerides (§ 15 1949. a. trüki järgi) nurgapoolitajat kui poolsirget (kiirt), mis jaotab nurga pooleks, ei räägi õpik nimetatud kohas midagi sellest, kuidas nurgapoolitajat ehitada, konstrueerimine ilmub alles palju hiljem (§ 64), kuigi § 38 vaadeldakse juba teoreemi võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja omadusest. Niisuguseil juhtumeil soovitatakse tarvitada viise, mis lubavad defineeritava geomeetrilise kujundi realiseerida eri vahendite abil. Nii saame paberist väljalõigatud nurga poolitaja lihtsalt kokkumurdmise teel.

Koolilaste üldise matemaatilise kultuuri taseme määrab suuresti see, kuivõrd teadlikult nad tarvitavad matemaatilisi termineid, ja võitlus kultuuri selle külje tõstmise eest on võitlus definitsioonide omandamise eest. On halb, kui õpilased tarvitavad termineid, mille täpne tähendus pole nendele selge; õigesti talitab see õpetaja, kes nõuab näiteks selliste kooli geomeetrias alati rakendatavate terminite, nagu vertikaalne sirge, horisontaalne sirge (oma olemuselt

kuuluvad need terminid geograafiasse), täpseid definitsioone: vertikaalseks ehk püstsirgeks nimetatakse iga sirget, mis läbib maakera keskpunkti, horisontaalseks ehk rõhtsirgeks — iga sirget, mis on sellega risti.

§ 10. Esimeste teoreemide tundmaõppimine ja rakendamine.

Osas «Sissejuhatus» on meil tegemist suure hulga teoreemidega, mis on niivõrd hõlpsasti tõestatavad, et tihti kerkib isegi üles küsimus, kas need on teoreemid või aksioomid. Niisugune on näiteks lause «kahe kõrvunurga summa on 180°», mille tõestuseks on vastava fraasi esimene pool Kisseljovi geomeetriaõpiku paragrahvis 22 (1949. a. trüki järgi). Sellised «tõestused» ei ole raskemad harilikest järeldustest, mida lapsed teevad igal sammul igapäevases elus, ja selliste teoreemide omandamine ei kujuta enesest mingisugust raskust, kui on ainult hästi omandatud need mõisted, millest neis on juttu. Õpilaste raskused töötamisel nende lihtsate teoreemidega algavad siis, kui õpetaja hakkab näilise ranguse tagaajamisel tarvitama pikki arutlusi, mis nagu tõestaksid neid teoreeme, nagu seda mitte väga ammu tehti näiteks teoreemiga täisnurkade võrdsuse kohta. Enneaegseks tuleb tunnistada ka teoreemi tõestuse õppimist, mis räägib ristsirge tõmbamise võimalikkusest mis tahes antud sirgele läbi mis tahes antud punkti (õpiku § 24), ja mis on esimeseks VI klassis ettetulevaks keerulisemaks tõestuseks. Olles tutvunud kolmnurgaga ja selle kontrollimise viisiga, annavad õpilased ilma igasuguste kahtlusteta jaatava vastuse küsimusele ristsirge tõmbamise võimalikkusest mis tahes sirgele läbi mis tahes punkti: tuleb võtta ainult küllalt suurte mõõtmetega kolmnurk. Kahtlusi selle väite õigsuses VI klassi õpilastel veel ei ole, järelikult ei ole tarvidust ka erilise loogilise tõestuse järele; N. Glagolevi õpik [IV, 19] teeb õigesti, loobudes sellest antud juhtumil, seda enam, et pärast paralleelide teooria tundmaõppimist saadakse see teoreem lihtsa järeldusena teistest teoreemidest.

Sageli võib kuulda, et VI klassi õpilased ei ole veel suutelised aru saama loogilistest tõestustest. On kerge veenduda, et see pole õige, et raskused esimeste geomeetria teoreemide omandamisel ei olene õpilaste mittesuutelisusest, vaid ebaõigest lähenemisest teoreemidele. Tarvitseb anda õpilastele ülesandeks tõestada mingi kerge lause, mille nad ise avastavad, näiteks ülesanne selle kohta, missuguse nurga moodustavad kõrvunurkade poolitajad, ja osutub, et enamik avastab, et see nurk on täisnurk, kontrollib seda oma avastust kolmnurga või malli abil, leiab ka õige loogilise tõestuse. On tarvis ainult, esiteks, et õpilased kindlasti teaksid kõike seda, mis on selleks tõestamiseks tarvilik (kõigepealt kõrvunurkade mõistet, nurgapoolitaja mõistet ja täisnurga mõistet); teiseks on tarvis neile ette ütelda, et nõutakse mitte selle nurga ligikaudset väärtust, mida mõõtmine ainult annabki, vaid absoluutselt täpset järeldust, missugune on kahe kiire poolt moodustatava nurga täpne

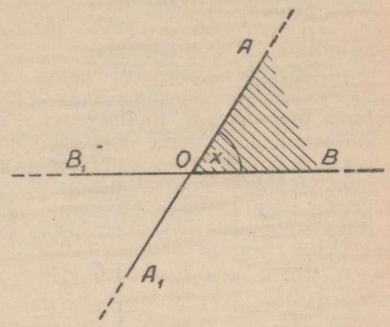
suurus, kui kumbki neist kiirtest on täpne nurgapoolitaja ühele kõrvunurkadest? Olles mõõtmise teel veendunud, et kõrvunurkade poolitajad on ligikaudu risti, jõuavad õpilased loomulikult küsimusele, kas see nurk on täpselt täisnurk, ja püüe lahendada seda küsimust viib nad loogilisele tõestusele. Õpetaja peab oskama äratada kahtlust seal, kus õpilastel veel ei ole seda, rõhutades täpsuse ja üldisuse nõuet, ja siis alles andma tõestuse, mis kõrvaldab need kahtlused. Geomeetria õpetamisel pole midagi kurvemat, kui tõestuste päheõppimine õpilaste poolt seal, kus neil pole mingit kahtlust. «Enne selle teoreemi tõestamist», ütles üks õpilane, «sain ma temast väga hästi aru, kuid pärast tõestust ma enam ei saanud temast aru».

Lahti mõtestades uut teoreemi, tuleb täpselt kindlaks teha, mis selles on antud (tema eeldus või eeldused) ja mida väidetakse ning tõestatakse (tema väide). Väga kasulik on selgitada väite katselise kontrollimise võimalikkust ja selle ebapiisavust. Edasi toimub kogu arutluse jaotamine üksikuiks järeldusteks (etappideks, sammudeks) igaühe täpse põhjendamisega (iga sammu puhul esitatakse küsimus «mispärast?» ja antakse vastav vastus viite näol mingile aksioomile või varem tõestatud teoreemile), muidugi kui kogu tõestus ei taandu üheks ainsaks järelduseks (kuid viide niisuguse järelduse alusele on tingimata vajalik). Kõneldes mingist konstruktsioonist või liikumisest, mis on tõestuseks tarvilik, tuleb nõuda selle konstruktsiooni või liikumise faktilist teostamist, kasutades paberist väljalõigatud mudeleid ja alles järk-järgult üle minnes nende teostamisele mõttes koos iga üksikasja täpse kirjeldamisega. Näiteks, kui tõestada ristsirge olemasolu ja ühesuse teoreemi sel viisil, nagu ta on tõestatud Kisseljovi õpiku § 24, on vaja nõuda, et iga õpilane viiks tegelikult läbi seal näidatud joonise kokkumurdmise, teostades selle eri paberitükil, ja pärast juba annaks kogu protseduuri seostatud kirjelduse, ära näidates täpselt kõik selle järjestikused sammud. Geomeetria esimestes tundides õnnestub see ainult tugevamail õpilastel, kuid kordamisel aasta lõpus tuleb sellega toime juba enamus.

Parimaks esimeste teoreemide omandamise kvaliteedi tõstmise vahendiks on ülesannete lahendamine nende rakendamisele, ja suure vea teevad õpetajad, kes kulutavad kogu aja teooria omandamisele, üldse tegelemata ülesannetega. Ülesandeid saab anda ja peab andma iga läbivõetud teoreemi rakendamise kohta. Peale harjutusülesannete, mis lahendatakse hõlpsasti ja meelsasti iga nõrgimagi õpilase poolt ja mida on külluses Rõbkini geomeetria ülesannete kogus, tuleb anda ka ülesandeid, mille lahendamine nõuab juba teatavat enam või vähem iseseisvat mõttetööd.

Toome näitena ülesande, mida võib soovitada anda VI klassis enne kõrvunurkade ja tippnurkade mõiste tarvituselevõtmist. «Kaks aeda *OA* ja *OB* jooksevad kokku nurga x all, mis erineb täisnurgast (joon. 25). Kuidas malli abil ära mõõta see nurk, ilma sellesse nurka minemata?» On kasulik näidata mudelit, mida on hõlpus valmistada, kui kinnitada «maad» kujutavale kartongitükile kaks «aeda» kujutavat paksu paberitükki, kusjuures nende ülemised

ääred võib hambuliseks teha. Tavaliselt esitavad õpilased kolm viisi: 1) «võtta mõõt» sellelt nurgalt, s. o. valmistada tema täpne koopia kahest latist, mis asetatakse vastu plangu külgi ja kinnitatakse seejärel liikumatult teineteise külge, või tehes vastava väljalõike kartongitükki, milline viis nõuab järkjärgulist sobitamist, ning pärast seda mõõta nurk selle «mõõdu» järgi, 2) pikendada joonlaua abil nurga AOB üht haara, näiteks OB, üle tema tipu O ja mõõta malliga nurk AOB_1, seejärel aga lahutada saadud kraadide arv 180°-st, 3) pikendada mõlemaid haaru OA ja OB üle tipu O ja mõõta nurk A_1OB_1, mis on võrdne otsitavaga. Järeldused, et nurkade AOB ja AOB_1 summa on 180° ja et nurgad AOB ja A_1OB_1 on võrdsed, tehakse õpilaste poolt hõlpsasti ning igasuguste kõhklusteta, ja see annab suurepärase aluse kõige selle tundmaõppimiseks, mis puutub kõrvunurkadesse ja tippnurkadesse. Huvi ülesande lahendamise vastu tõuseb veelgi, kui õpetaja valmistab ette paksust paberist väljalõigatud nurga, kirjutab selle mudeli ühele küljele nurgas sisalduvate kraadide arvu ja riputab ta klassitahvlile nii, et õpilased ei näeks seda kirjutist. Malliga mõõtmine on lubatud, kui seda mitte asetada mudelile. Mõõdetakse otsitava nurga kõrvunurk ja tippnurk, tehakse järeldus mudeli nurga suuruse kohta ja kontrollitakse tulemuse õigsust, lugedes pealkirja mudeli tagaküljelt.



Joon. 25.

Märgime ära veel mõned olulised asjaolud.

1. Kogemused näitavad, et üldiseid teadmisi teoreemi koosseisust, pöördteoreemist ja vastandteoreemist on kursuse algul raske anda, edaspidi aga seda kergem, mida rohkem teoreeme on tundma õpitud. Kisseljovi õpiku §§ 28—31 läbivõtmise võib seetõttu viia järgmise osa õppimise lõppu, s. t. esimese poolaasta lõppu.

2. Edukas töö geomeetria kursuse esimese osa omandamisel VI klassis on võimatu tarvitamata lihtsaimaid joonestus- ja mõõtmisabinõusid, mille kogu peab olema igal õpilasel (joonlaud sentimeeter- ja millimeeterjaotistega, kolmnurk, sirkel, mall).

3. Õige mõtlemise oskust võib kasvatada mitte üksnes geomeetria kursuse materjali varal, vaid ka mitmekesise materjali varal igapäevasest elust ja teistest distsipliinidest. Sedaliiki harjutuste rikkaliku kogu sisaldab artikkel [IV, 52]. Toome paar näidet: 1) «Kastis on kolme sorti õunu. Missugune on vähim õunte arv, mida tuleb võtta kastist huupi, et nende hulgas oleks vähemalt kaks õuna ühest sordist? Vähemalt kolm õuna ühest sordist?» Vastused (4 ja 7) tuleb anda koos nende õigsuse tõestamisega. 2) «Arv a on vähem kui 25, arv b on 20 võrra suurem kui a. Mida võib väita arvu b kohta?» Vastusega (b on vähem kui 45) peab kaasnema tõestus. Sedaliiki «loogiliste» ülesannete lahendamine arendab kahtlematult õpilasi ja kergendab neil geomeetria süstemaatilise kursuse omandamist.

4. Iga kogenud õpetaja töötab välja kindla vormi õpitava materjali kohta õpilaste poolt vihikuisse tehtavate märkmete jaoks, ja niisugusest vormist kinnipidamine soodustab töö edukust. Toome näitena ühe esimese geomeetria teoreemi niisuguse vormistamise, mida soovitatakse artiklis [IV, 30].

T e o r e e m. Kaks kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga üks külg ja selle kaks lähisnurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külje ja selle kahe lähisnurgaga.

Antud on $\triangle ABC$ ja $\triangle A_1B_1C_1$ ja neis
1) $AB = A_1B_1$; 2) $\angle A = \angle A_1$; 3) $\angle B = \angle B_1$.
Tuleb tõestada, et $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

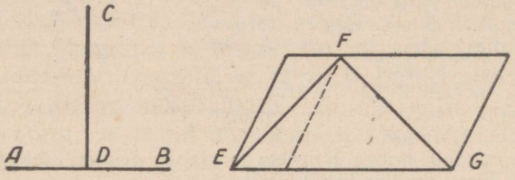
Tõestus.

I. Ise teeme: asetame kolmnurga ABC kolmnurgale $A_1B_1C_1$ nii, et 1) tipp A ühtiks tipuga A_1; 2) kiir AB ühtiks kiirega A_1B_1.

II. Siis juhtub tingimata järgmist: 1) punkt B ühtib punktiga B_1 (sest eelduse järgi $AB = A_1B_1$); 2) kiir AC ühtib kiirega A_1C_1 (sest eelduse järgi $\angle A = \angle A_1$); 3) kiir BC ühtib kiirega B_1C_1 (sest eelduse järgi $\angle B = \angle B_1$); 4) tipp C ühtib tipuga C_1 (selle põhjal, et «kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis», vt. Kisseljovi geomeetria õpiku § 4).

III. Järeldus: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, s. t. kolmnurgad on võrdsed, sest pealepaigutamisel nad ühtisid.

Pöörame lugeja tähelepanu sellele, et üleskirjutuses on see, mida me oma meelevalla järgi teeme, teravalt eraldatud sellest, mis siis toimub juba vaatamata meie tahtele (õpilased ei eralda alati selgesti neid arutluse kaht külge). Näidanud teoreemide tõestuse taolist vormistamist mõne näite varal, nõuab õpetaja õpilastelt edaspidi järgnevate teoreemide tõestuse iseseisvat vormistamist, hoolikalt kontrollides ja parandades nende tööd. Suulisel esitamisel tuleb nõuda kõigi asjasse puutuvate aksioomide, teoreemide ja definitsioonide täielikke sõnastusi — see on heaks kordamiseks.



Joon. 26.

5. Rea geomeetria tundide detailseid plaane sisaldavad raamatud [IV, 32, 24], mida tungivalt soovitame algajale õpetajale.

6. Ei tohi kunagi unustada, et suulise väljenduse oskus ei ole VI klassi õpilastel kaugeltki veel välja arenenud ja et õigesti korraldatud geomeetria tunnid võivad oluliselt kaasa aidata selle parandamisel. Õpetaja peab piinlikult jälgima oma kõnet, peab kõigis üksikasjades läbi mõtlema kõik, mida ta tahab esitada, aegsasti ette valmistama kõik, mida ta mõtleb tahvlile kirjutada ja dikteerida, peab taotlema õpilastelt täielike, täpsete ja õigesti üleskehitatud vastuste saamist kõigile oma küsimustele.

7. Loogiliste järelduste väärtuse paremaks mõistmiseks on väga kasulik tutvustada õpilasi lihtsamate optiliste illusioonidega, mis näitavad selgesti, et mitte kaugeltki alati pole võimalik usaldada meie vahetuid nägemismuljeid.

Joonisel 24 me näeme kaht näidet sellistest illusioonidest. Horisontaalne lõik AB näib tunduvalt lühemana kui temaga risti olev lõik CD, kuigi mõõtmine näitab, et $AB = CD$. Täpselt samuti paistab vähema rööpküliku diagonaal EF olevat vähem kui kõrval asetseva suuremate mõõtmetega rööpküliku diagonaal FG, mis on temaga võrdne. Suure kogu selliseist optilistest illusioonidest leiab lugeja artiklis [IV, 60].

III peatükk.

GEOMEETRIA EDASINE ARENDAMINE SEITSMEKLASSILISES KOOLIS.

§ 11. Geomeetria õppimise üldine iseloom seitsmeklassilises koolis.

Meie kooli VI — X klassini õpitav geomeetria kursus kujutab endast ühtset tervikut, kuid tema õppimisel VI ja VII klassis on teissugune iseloom kui vanemais klassides, sest on tingimata vaja-

lik arvestada õpilaste vanuselisi iseärasusi, tugevdades loogilist elementi vaid pikkamisi. Kehtiva keskkooli programmi «Seletuskiri» ütleb järgmist: «... seitsmeklassilises koolis (VI ja VII klass) peavad geomeetria õpetamise meetodid tuginema peamiselt õpilaste intuitsioonile: tuleb laialdaselt kasutada näitlikkust materjali tundmaõppimise protsessis, võimalikult sagedamini kasutada geomeetriliste kujundite jooniseid ning samuti kasutada kujundite modelleerimist... On samuti vajalik näidata geomeetria praktilist rakendust, tõstes sellega õpilaste huvi aine vastu ja veendumust aine väärtusest. Siia kuuluvad iga liiki mõõtmised, muuseas ka mõõtmised maastikul, pindalade ja ruumalade mõõtmised jms.»

Kahjuks pole need «Seletuskirjas» esitatud vastuvaidlematud kaalutlused leidnud kajastust programmis endas, mis loetleb vaid geomeetria tavalise süstemaatilise kursuse materjali. Pindalade ja ruumalade mõõtmise küsimuses ei saa VI ja VII klassi õpilased teada absoluutselt mitte midagi uut võrreldes sellega, mida nad said teada juba algkooli ja V klassi aritmeetika kursuses: õpetus hulknurkade pindaladest kuulub täielikult VIII klassi, ringi pindalast — IX klassi, ruumaladest — X klassi. See on seda ebasoovitavam, et paljud õpilased, kes lähevad pärast seitsmeklassilise kooli lõpetamist praktilisele tööle, tunnevad eriti vajadust algteadmiste järele pindalade, ruumalade ja kujundite sarnasuse alalt. Praeguse olukorra oluline parandamine on võimalik vaid pärast kooli geomeetria kursuse programmi põhjalikku ümberkorraldamist, kuid kehtiva programmi raamideski saab õpetaja palju ära teha, juhindudes sellest, mis on väljendatud «Seletuskirjas».

Kokkuvõttes võib ütelda, et VI ja VII klassi geomeetria õpetaja peab alati meeles pidama seda, et alaealistel on kergem joonestada ja mõõta kui arutleda, ja et geomeetria kursuse loogilise külje saavad nad omandada vaid oma vaatluste, konstrueerimiste ja mõõtmiste põhjal.

§ 12. Õpetus kolmnurkadest.

Peale «Sissejuhatuse» tundmaõppimist, millest oli juttu II peatükis, näeb programm ette teema «Kolmnurk» tundmaõppimise, millele on reserveeritud 30 tundi, ja seejärele teema «Paralleelsed sirged» tundmaõppimise (26 tundi). Niisugune järjekord ei ole siiski tingimata tarvilik. Sellest peetakse kinni Kisseljovi geomeetria õpikus koolidele, kuid uues, N. Glagolevi õpikus on nende kahe osa tundmaõppimise järjekord vastupidine: esiteks õpitakse tundma sirgete paralleelsuse küsimust, mis kuulub kahe sirge vastastikuse asendi juurde ühel tasapinnal, ja alles pärast seda minnakse üle kolme sirge juurde, mille lõikumisel tekibki kolmnurk; tuleb välja võit kolmnurgaõpetuse esitamise suurema lõpetatuse näol, kuna alles pärast paralleelide omaduste tundmaõppimist muutub võimalikuks teoreemi tõestamine kolmnurga sisenurkade summa kohta.

Tõestades selle osa mitmesuguseid teoreeme, kasutatakse alatasa liikumist, tuginedes mitte täpselt sõnastatud aksioomidele, mis väljendavad liikumise omadusi, vaid näitlikele kujutlustele. Sisuliselt kasutatakse siin ära aksioom, mis on antud Kisseljovi õpiku § 3: «Tasapinna iga osa saab asetada kõigi tema punktidega sama tasapinna mõnele teisele osale või mõnele teisele tasapinnale, seejuures võib pealeasetatavat tasapinna osa ka ümber pöörata.» Siin tuleks juurde lisada, et sellisel pealeasetamisel saab ühe tasapinna mis tahes punkti ja mingit sellest lähtuvat kiirt ühtima panna teise tasapinna mis tahes punktiga ja mis tahes sellest lähtuva kiirega. Ei ole ju sümmeetriateisendus, millest kolmnurkade tundmaõppimisel tuleb möödapääsmatult rääkida, midagi muud kui selle aksioomi rakendamise erijuhtum: tasapind, olles ümber pööratud, pannakse ühtima iseenesega, kusjuures sümmeetriatelje meelevaldne punkt ja sellest lähtuv kiir, mis asetseb sellel teljel, ühtivad iseendaga. Rea teoreemide tõestuste kindlaks omandamiseks on tingimata vajalik selle aksioomi hea mõistmine, mis kindlustatakse mingi materiaalse tasapinna niisuguse teisele tasapinnale asetamise faktilise teostamisega iga õpilase poolt, kas või raamatu kaane tasapinna asetamisega laua tasapinnale.

Kolmnurga tundmaõppimine algab rea temaga seotud mõistete täpsustamisest. Piirdumata üksnes sõnaliste definitsioonidega, peab õpetaja nõudma, et iga õpilane illustreeriks uut mõistet konstrueerimisega paberil või mudeli valmistamisega, kusjuures on tarvis asi lõpuni viia, vaadeldes selle mõiste kõiki võimalikke realiseerimise juhtumeid. Halb on näiteks, kui õpilased, tutvunud kõrguse definitsiooniga, tõmbavad selle alati kolmnurga sisse, s. t. piirduvad vaid nende juhtumitega, kus kolmnurga aluse juures olevad nurgad on mõlemad teravnurgad; tuleb taotleda selle mõistmist, et juhtumil, kui üks neist nurkadest on nürinurk, on kõrgus väljaspool kolmnurka, ja kui see nurk on täisnurk, siis kõrgus ühtib küljega. Neid kolmnurkade liikumisi, mida tuleb teostada paljude teoreemide tõestamisel kolmnurkade kohta (pealeasetamine, juurdeasetamine, sümmeetriliselt asetamine), on soovitav esialgu saata paberist väljalõigatud mudelite faktilise liikumisega, tehes rangesti vahet, mida seejuures tehakse meie suva järgi ja mis juhtub iseenesest, meist olenemata, teoreemide ja aksioomide eelduste põhjal (vt. eespool lk. 330).

Kolmnurkade võrdsuse tunnuste tähendusest arusaamine ei tule õpilastel kaugeltki korraga. Edule aitab palju kaasa see töö kolmnurkade ehitamise kallal tema antud elementide järgi, millest oli juttu leheküljel ... ja mida tungivalt soovitame kolmnurkade võrdsuse iga juhtumi jaoks.

Osa «Kolmnurk» tundmaõppimisel kohtavad õpilased esmakordselt punktide geomeetrilise koha mõistet. Kõigepealt tuleb hoolt kanda selle õige mõistmise eest. Kui piirduda üksnes nende kolme näitega geomeetriliste kohtade kohta, mis on ära toodud kooliõpikus (ringjoon, lõigu keskristsirge, nurgapoolitaja), seovad

õpilased geomeetrilise koha mõistega need kolm kujundit, ja küsimusele, mida nimetatakse punktide geomeetriliseks kohaks, vastatakse sageli, et see on ringjoon, või lõigu keskristsirge, või nurgapoolitaja. Otsides mingit punktide geomeetrilist kohta, tuleb teada seda, et siin on jutt kõigi nende punktide hulga leidmisest, millel on antud omadus, nii et vastuse õigsuse kontrollimine seisneb kahe asjaolu selgitamises: esiteks, kas kõigil antud kujundi punktidel on see omadus, ja teiseks, kas ei ole punkte, mis ei kuulu sellele kujundile ja millel on samuti see omadus. Näiteks otsides tasapinna nende punktide geomeetrilist kohta, mis on antud sirgest kaugusel a, meie ei saa mitte ühe sirge, mis on antud sirgega paralleelne, vaid selliste sirgete paari; ruumis on selleks juba silindriline pind, mille teljeks on antud sirge. Veel üks hea näide: nende punktide geomeetriline koht, mille kaugus antud lõigust AB on vähem kui a, on kahe sirglõigu ja kahe poolringjoonega piiratud kujundi kõigi seesmiste punktide hulk.

Suur hulk selles osas tundmaõpitud teoreeme lubab kindlustada õiget arusaamist otsese teoreemi, pöördteoreemi, vastandteoreemi ja vastandteoreemi pöördteoreemi vahelistest vahekordadest. Tuleb kindlasti vaadelda rida näiteid, nagu seda on tehtud N. Glagolevi õpikus, piirdudes esialgu vaid nende teoreemidega, milles on ainult üks eeldus ja üks väide. Vahetanud eelduse ja väite kohad, saame pöördteoreemi, ning selgitame, kas ta on õige või mitte, s. t. kas antud teoreemil on olemas pöördteoreem. Eeldust ja väidet eitades tuleme vastandteoreemi juurde ning selgitame samuti välja, kas ta on õige, s. t. kas vastandteoreem on olemas. Nagu teada, on pöördteoreem ja vastandteoreem alati kas mõlemad õiged või mõlemad valed, ja seepärast tuleb tõestada ainult üks neist.

Kõik osas «Kolmnurk» läbivõetud materjal leiab endale suurepärast rakendust konstruktsioonülesannete lahendamisel, millega lõpebki selle osa tundmaõppimine. Neist kõneldakse § 15.

§ 13. Paralleelide teooria.

Osaga «Paralleelsed sirged» läheb töötamine harilikult palju paremini kui eelneva teemaga ja see on kahtlematult seotud sellega, et selles osas õpilased õpivad tundma hoopis rohkem uusi, nende jaoks kaugeltki mitte ilmselt õigeid teoreeme kujundite omadustest. Siin neil tekib tõepoolest tarvidus loogilise tõestuse järele; peale selle annab kehtiv programm siin palju tunde võrdlemisi vähese materjali tundmaõppimiseks: 26 tundi materjali jaoks, mida Kisseljovi kooliõpikus on kõigest 9 lehekülge (Glagolevi õpikus veelgi vähem)! On täiesti võimalik välja kujundada selgeid kujutlusi ja täpseid definitsioone, teostada rida vaatlusi, juurutada kindlaid oskusi konstrueerimises joonlaua, sirkli ja kolmnurga abil, taotleda üksikute teoreemide vaheliste seoste õiget mõistmist ja selgitada uue aksioomi tähendust. Õpilased peavad omandama vähemalt

kolm põhivõtet antud sirgega paralleelse sirge konstrueerimiseks läbi antud punkti: 1) kolmnurga kahekordse tarvitamisega, kus kasutatakse teoreemi ühele ja samale sirgele tõmmatud kahe ristsirge paralleelsusest, 2) konstrueerides joonlaua ja kolmnurga abil kaks sirget, mis lõikuvad kolmandaga võrdsete kaasnurkade all, kuid ei ole sellega risti, 3) kahe võrdse seesmise põiknurga konstrueerimisega joonlaua ja sirkli abil. Vastavate teoreemide tõestused toimuvad arutlustena, mis näitavad nende konstruktsioonide täpsust. Õpilased teostavad neid konstruktsioone, panevad tähele, et joonise piirides sirged ei lõiku, ja nõustuvad kergesti väitega, et on tarvilik selgitada, kas lõikumine ei toimu kuskil väga kaugel.

Nimetame paralleelsuse tunnuste tõestuste variante, mis põhinevad sümmeetria mõiste kasutamisel ega nõua üldse kolmnurga välisnurga kohta käiva teoreemi eelnevat tundmaõppimist: ühele sirgele tõmmatud kaks ristsirget ei saa lõikuda, sest tasapinna sümmeetria selle sirge suhtes näitab hõlpsasti, et kui nad lõikuvad ühel pool seda sirget, siis nad lõikuksid ka teisel pool teda; et analoogiliselt tõestada sirgete paralleelsust sel juhtumil, kui nad moodustavad kolmanda sirgega võrdsed põiknurgad, kasutatakse mitte teljelist, vaid tsentraalset sümmeetriat, s. o. tasapinna pööramist 180° võrra ümber punkti. Need variandid on hästi esitatud N. Glagolevi õpikus.

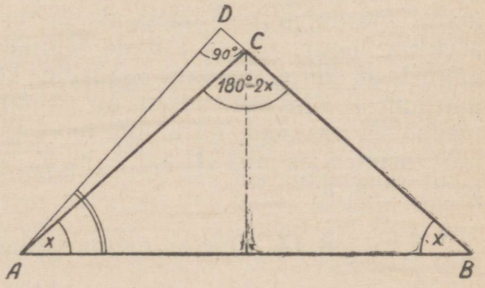
Selle osa paljud teoreemid lubavad nende iseseisvat avastamist õpilaste poolt, kui neid sõnastada esialgu ülesandena ning anda nad õpilastele lahendada (kodus), kasutades mis tahes vahendeid. Niisuguse heuristilise meetodi eelistest oli juttu eespool (esimese osa § 18). Võtame näiteks teoreemi kolmnurga sisenurkade summast. Kavatsedes sellega tegelda järgmises tunnis, annab õpetaja koduse ülesande: võtta vabalt mitu kolmnurka, mis on joonestatud paberile või kuhu tahes, kas või maa peale, mõõta hoolikalt malliga nende nurgad ja leida nende summa. Paberile joonestatud kolmnurkade kõrval soovitatakse võtta kolmnurkade mudeleid, mis on välja lõigatud paberist, kartongist, vineerist või plekist, ja leida nurkade summa mitte malli abil, vaid graafiliselt, asetades mudeli vastavalt paberile ja tõmmates nurkade järgi jooned. Järgmisel päeval võib alati klassis tähele panna head asjalikku elevust: õpilased räägivad üksteisele oma tulemustest, kõik on üllatatud sellest, et külgede ja nurkade mitmesuguste suuruste puhul nurkade summa tuli kõigil peaaegu üks ja seesama, kõikudes pisut 180° ümber. Sellega on pind teoreemi täisväärtuslikuks omandamiseks suurepäraselt ette valmistatud. Loogiline tõestus kõrvaldab kahtlused selles, kas väikesed tähelepandud kõrvalekaldumised 180°-st on põhjustatud vältimatuist joonestamis- ja mõõtmisvigadest, või on kolmnurga sisenurkade summa tõepoolest vaid 180° ligidal, mitte aga täpselt võrdne sellega.

Mõnikord kuuldub hääli niisuguse loogilise tõestuse katselise ettevalmistuse vastu. Räägitakse, et pärast teoreemi tõelisuse kergesti teostuvat katselist kontrollimist õpilased ei taha õppida sellest raskemat deduktiivset tõestust. Seda tuleb tõepoolest ette, kuid ainult asja oskamatul juhtimisel, ja nimelt siis, kui õpetaja ei selgita õpilastele katselise kontrolli nõrku külgi — täpsuse ja üldisuse

puudumist, kui ta kaotab silmist selle töö tähtsa külje: tekitada kahtlust teostatud kontrolli piisavuses, luua vajadus aksioomidele ja varem püstitatud teoreemidele tugineva tõestuse järele.

Natuke teist laadi heuristika on kohane järgmise teoreemi tundmaõppimise ettevalmistamisel, nimelt teoreemi ettevalmistamisel kumera hulknurga sisenurkade summa kohta. Esitanud ülesande nelinurga, viisnurga ja üldjuhtumil n-nurga sisenurkade summa leidmise kohta, hoiatab õpetaja, et siin pole mingit vajadust ühegi mõõtmise järele: taandades küsimuse kolmnurkadele, saab taibata, milline see summa peab olema. Rõhuv enamik õpilasi jõuab iseseisvalt, õpikusse vaatamata, valemini $S = 180° \cdot (n - 2)$. Mingisuguse hulknurga nurkade faktilist mõõtmist on siiski soovitav teostada, andes võimalike mõõtmisvigade suuruse ja ette näidates ära need tõkked, mille vahel peab olema summa S leitud ligikaudne väärtus. Nii võime korraliku töö puhul tagada, olles joonestanud mis tahes kaheksanurga ja mõõtnud tema sisenurgad tavalise koolimalliga, millel on kraadi jaotised, et ühegi nurga mõõtmisel viga ei ületa $^1/_4°$ ja seepärast 8 nurga summa saadakse veaga, mis ei ületa $^1/_4° \cdot 8 = 2°$; asudes mõõtmiste juurde, ennustame, et kõigi nurkade summa on vahemikust $180° \cdot 6 - 2° = 1078°$ kuni $180° \cdot 6 + 2° = 1082°$. Kõik teostavad nõutud konstruktsioonid ja mõõtmised suure huviga ning veenduvad, et ennustus osutub tõeks koguni paremini, kui oleks võinud oodata (toimub vigade osaline kompenseerumine, kuna ühtede nurkade mõõtmisel saadakse nende ligikaudsed väärtused puuduga, teistel liiaga). VII klassi õpilased elavad niisuguse ülesande eduka lahendamise läbi kui nende poolt õpitava teaduse iseliiki triumfi, ja pärast seda ei ole õpetajal tarvis rääkida sellest, et tema õpilastel pole vajalikku huvi geomeetria vastu.

Olles tundma õppinud osa «Paralleelsed sirged», omandavad õpilased suure tagavara teadmisi, mida tuleb kasutada nii kursuse loogilise olemuse paremaks selgitamiseks, tagasi pöördudes pöörd- ja vastandteoreemide küsimuse juurde ning selgitades iga tõestuse eeltingimused, kui ka suure hulga arvutus-, konstruktsioon- ja tõestusülesannete lahendamiseks. Väga õpetlik on ühe ja sellesama ülesande lahendamine nii arvutamiskui ka konstrueerimismeetodil.



Joon. 27.

Võtnud näiteks ülesande nr. 40 Rõbkini ülesannete kogu § 4, kus nõutakse võrdhaarse kolmnurga nurkade leidmist sel puhul, kui on teada haarale tõmmatud kõrguse ja aluse vaheline nurk ($\alpha = 48°$), saame hõlpsasti võrrandi $(\alpha - x) + 2x = 90°$ (vt. joon. 27), millest saame $x = 90° - \alpha$ või $\alpha = 48°$ puhul

$x = 42°$. Seejärel lahendame selle ülesande konstruktsioonülesandena: konstrueerida võrdhaarne kolmnurk, milles aluse ja haarale tõmmatud kõrguse vaheline nurk α on antud ($\alpha = 48°$). Joonestanud selle nurga α tipu A juurde, kanname tema ühele haarale mis tahes lõigu AB ja tõmbame punktist B ristsirge BD tema teisele haarale, selle järele tõmbame lõigu AB keskristsirge, mille lõikumisel sirgega BD saame tipu C. Mõlemate lahenduste tulemuste kõrvutamine annab võimaluse kontrollida nende õigsust ja tekitab õpilastes alati kõrgendatud huvi: kas konstrueerimisel saadud tulemus on samasugune kui see, mille andis arvutamine? Lahendamisest konstruktsiooni kaudu on isegi parem alata, sest töötamine selle kallal aitab paremini mõista ülesande sisu. Äsjatoodud näite puhul pakub huvi esitada lisaküsimus: milliste antud nurga väärtuste puhul on kõrgus AD, väljaspool kolmnurka ABC ja milliste väärtuste puhul selle sees? (esimene on $\alpha > 45°$ puhul, teine $\alpha < 45°$ puhul). Mõnikord on üks lahendustest, kas arvutuslik või konstruktiivne teisest tunduvalt raskem, mõnikord koguni pole VI klassi õpilastele jõukohane, ja selle konstateerimine on üsna õpetlik.

Selles klassis on paljud tõestusülesanded täiesti jõukohased, kusjuures ka siin on parem mitte ette ütelda, mida nimelt tuleb tõestada, vaid lasta selgitada, mida saab väita mingi punkti asendi, lõigu või nurga kohta, arendades sellega õpilaste initsiatiivi ja taiplikkust ning viies neid tõestuse kui saadud tulemuse õigsuses igasuguse kahtluse kõrvaldamise vahendi tähenduse mõistmisele. Nii on ülesannet nr. 42 Rõbkini ülesannete kogust § 4, milles tuleb tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi mediaan on võrdne poole hüpotenuusiga, parem sõnastada nii: leida, kui pikk on mis tahes täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud mediaan võrreldes selle hüpotenuusiga.

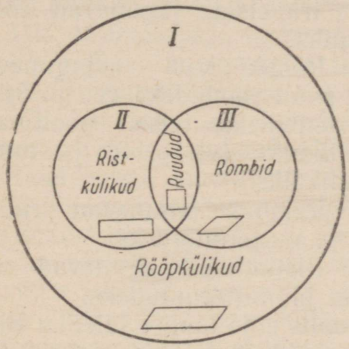
Paralleelide teooria elementidegi tundmaõppimisel on tarvis nimetada geniaalset vene matemaatikut Nikolai Ivanovitš Lobatševskit, kelle tööd viisid teatavas suhtes lõpule pika rea kõigi maade matemaatikute kahetuhande-aastase töö. Lobatševski avastuste tähtsust on VI klassi õpilastele võimatu näidata täies ulatuses, kuid asja üht külge nad taipavad suurepäraselt: ta näitas, et katsed tõestada paralleelide aksioomi teiste geomeetria aksioomide abil on täiesti lootusetud. Võib tuua sellise võrdluse: ühtki taandamatut murdu, mille nimetajas on mingi 2-st või 5-st erinev algarvuline tegur, ei saa esitada lõpliku kümnendmurruna; selle võimatust on kerge näidata igaühele, kellel on olemas algteadmised murdudest. Kuivõrd raskem on näidata, et paralleelide aksioom on tõepoolest aksioom, mitte aga teoreem, on näha sellest, et see küsimus tõsteti üles juba III saj. e. m. a., lahendati aga alles Lobatševski poolt 1824. a.

§ 14. Õpetus nelinurkadest ja ringjoontest.

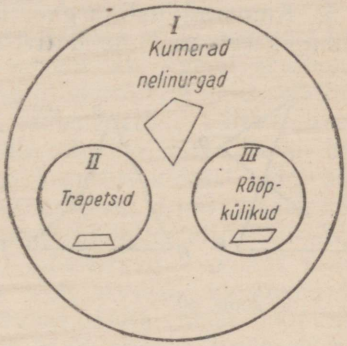
Nelinurkade ja ringjoonte tundmaõppimisega tegeldakse juba VII klassis, ja tähelepanu loogilistele elementidele võib siin kolmes järgmises suunas veelgi tugevdada (võrreldes VI klassiga).

I. Nõudes nagu alati oskust taandada iga uue mõiste defineerimine soo- ja liigitunnuse näitamisele, taotletakse mõistete alluvuse selget mõistmist: näiteks rööpkülik on nelinurga erijuhtum ehk

teiste sõnadega: kõigi rööpkülikute hulk on kõigi nelinurkade hulga osa («alahulk»); kõigi ristkülikute hulk on samuti kõigi nelinurkade hulga alahulk; kõigi ristkülikute hulk on samal ajal kõigi rööpkülikute hulga alahulk, kõigi rombide hulk — samuti; ruudud moodustavad ristkülikute hulga ja rombide hulga ühisosa (nende «lõike»). Kui defineerida trapetsit nii, nagu seda on tehtud Kisseljovi õpikus («nelinurka, mille kaks vastaskülge on paralleelsed ja ülejäänud kaks ei ole paralleelsed, nimetatakse trapetsiks»), siis rööpküliku ja trapetsi mõisted vastandatakse teineteisega, olles



Joon. 28.



Joon. 29.

mõlemad alistatud ühele üldisemale nelinurga (kumera) mõistele. Vahekorrad nende mõistete vahel on hästi illustreeritavad mitmesuguste skeemide abil. Näiteks, kui suure ringi iga punkt joonisel 28 kujutab mingit rööpkülikut, siis ristkülikud, olles eri liiki rööpkülikud, kujutuvad punktidena, mis kuuluvad mingile teisele, tervenisti esimese sees asetsevale ringile, ja rombid — mingi kolmanda ringi punktidena, mis samuti asetseb tervenisti esimese sees, kuid osaliselt katab teist; II ja III ringi ühisosa punktid kujutavad rööpkülikuid, mis on samaaegselt nii ristkülikud kui ka rombid, s. t. ruute. Teissugune on olukord joonisel 29, kus on näidatud kumera nelinurga, trapetsi ja rööpküliku mõistete vaheline seos. Siin II ja III ring asuvad samuti tervenisti I ringi sees, kuid enam ei kata teineteist. Kui aga defineerida trapetsit kui niisugust kumerat nelinurka, millel on üks paar paralleelseid külgi, midagi nõudmata kahe ülejäänud külje kohta (selle definitsiooni eeliste kohta vt. [IV, 10]), siis muutub joonis 29 oluliselt, ja nimelt tuleb III ring paigutada tervenisti II ringi sisse.

Soovides anda kõigi nelinurkade (tasapinnaliste) täielikku liigitust, on sobivaim rakendada dihhotoomiat (kahendamist, vt. eespool, esimese osa § 5). Toome ära ühe selliseist võimalikest liigitustest, jäädes kooliõpikus antud trapetsi definitsiooni juurde.

1. Kõik tasapinnalised nelinurgad jagunevad lihtsaiks, mille

külgedel ei ole peale tippude teisi ühiseid punkte (vt. edasi punkt 2), ja mittelihtsaiks, mille küljed lõikuvad (vt. joon. 30).

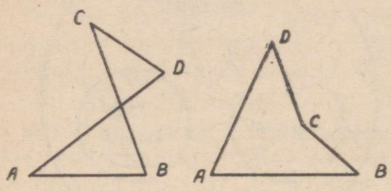
2. Lihtsad nelinurgad jagunevad kumeraiks (vt. p. 3) ja mittekumeraiks.

3. Kumerad nelinurgad jagunevad trapetsiteks (vt. p. 4) ja mittetrapetsiteks (vt. p. 6).

4. Trapetsid jagunevad võrdhaarseiks ja mittevõrdhaarseiks (vt. p. 5).

5. Mittevõrdhaarsed trapetsid jagunevad täisnurkseiks ja mittetäisnurkseiks.

6. Kumerad nelinurgad, mis pole trapetsid, jagunevad rööpkülikuiks (vt. p. 7) ja mitterööpkülikuiks.



Joon. 30.

7. Rööpkülikud jagunevad ühelt poolt rombideks (vt. p. 8) ja mitterombideks, teiselt poolt aga ristkülikuiks (vt. p. 9) ja mitteristkülikuiks.

8. Rombid jagunevad ruutudeks ja mitteruutudeks.

9. Ristkülikud jagunevad ruutudeks ja mitteruutudeks.

Koolis pole taolise täieliku liigituse tundmaõppimise järele vajadust, kuid õpetaja ise peab selles täiesti orienteeruma. Kui on tarvis sellesse liigitusse tuua deltoidi mõiste, s. o. niisuguse nelinurga mõiste, millel on kaks paari võrdseid lähiskülgi ja mis saadakse kahest võrdsete alustega võrdhaarsest kolmnurgast aluste kokkupaneku teel, siis tuleb märkida, et see on lihtsate nelinurkade eriliik, kuna deltoid võib olla nii kumer kui ka mittekumer.

Töötamisele definitsioonide ja sellega seoses ka liigituste alal ei osutata kahjuks nõutavat tähelepanu, kuigi see moodustab tähtsa osa õpilaste loogilise mõtlemise oskuse kasvatamises.

II. Paralleelselt tööga definitsioonide ja liigituste alal toimub töö geomeetria lausete omandamise ja nende sisu analüüsimise alal. Kõik, mis oli öeldud heuristilise käsitluse soovitavuse kohta esimesel tutvumisel uute faktidega, mida lapsed nii hõlpsasti avastavad, kui on antud vastavad ülesanded, jääb täielikult jõusse ka VII klassi jaoks, mille programm sisaldab palju teoreeme, mida on lihtsalt andestamatu teatada õpilastele valmis kujul, jättes neid ilma avastamise rõõmust ja neist viljakaist kahtlustest ning iseseisvaist mõtisklustest, mis põhjustavad tarviduse loogilise tõestuse järele. Näiteks teevad õpilased hõlpsasti kindlaks rombi diagonaalide omadused, või piirde- ja kesknurkade vahelise sõltuvuse, või kolmnurga kolme mediaani omaduse, kusjuures paljud osutuvad võimeliseks mitte üksnes kindlaks tegema iga niisugust fakti, vaid ka taandama seda teistele, varem kindlaks tehtud faktidele, s. o. andma tema loogilise tõestuse. Sõltumata sellest, kas õpilased ise avastasid mingi nende jaoks uue geomeetrialause või oli see nen-

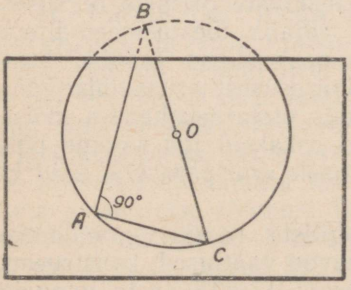
dele antud valmis kujul, peavad nad oskama välja tuua eeldust ja väidet, peavad õppima sõnastama pöördteoreeme ja vastandteoreeme iga kord selgitades, kas need on õiged.

Geomeetria teoreemide sisu omandamine võidab oluliselt, kui tutvustada õpilasi nende rakendamisega, mida võib teha otse iga teoreemi järel (mõnikord koguni enne selle teoreemi tõestamist). Eriti jõukohased on rakendused geomeetrilistes konstruktsioonides. Nii on tarvis teoreemi «kui kahel ringjoonel on ühine punkt nende keskjoonel, siis nad puutuvad» saata ülesandega: konstrueerida antud raadiusega r ringjoon, mis puutub antud ringjoont K tema antud punktis A: 1) seesmiselt, 2) väliselt.

III. Kolmanda ja teatavas suhtes tähtsaima külje loogilise mõtlemise oskuse kasvatamise töö alal moodustab õigesti arutlemise oskuse kasvatamine. See töö saab olla produktiivne vaid sel tingimusel, kui esimesele kahele küljele pühendatakse küllalt tähelepanu: tõestuse tundmaõppimisest saab inimene enese jaoks kasu vaid sel puhul, kui tal on täiesti selge kujutlus kõigist neist asjadest, millega tuleb tegemist teha selles tõestuses, ja kui ta saab hästi aru sellest lausest, mida ta tõestab, eraldades selles nii kõiki eeldusi kui ka väidet. Seda täiesti iseenesest mõistetavana näivat vaadet ei võeta kahjuks õpetamise praktikas alati arvesse: tõestused õpitakse tihti pähe ilma küllaldase arusaamiseta neist. Õpilased reprodutseerivad vahel täpselt õpikus toodud joonise, kordavad peaaegu sõna-sõnalt neid fraase, mis seal on trükitud, kuid tarvitseb vaid teha näiteks mingi ebaoluline muudatus joonises, ja nad lähevad segi ning jäävad vait. Tarvis on taotleda mitte valmis tõestuste päheõppimist, vaid on vaja välja arendada iseseisva tõestuse oskus. VII klassi programm sisaldab suure hulga lauseid, mille iseseisev tõestamine on täiesti jõukohane selle klassi õpilastele, kui anda need tõestused ülesannetena, tehes vahel mõne näpunäite tõestusmeetodi kohta. Kõige tähtsam on äratada õpilastes tarvidus loogilise tõestuse järele, luua neis püüe kõrvaldada kahtlused iseseisvate lahenduste otsinguil tekkivate oletuste õigsuses. Valmis tõestuste tundmaõppimine on vajalik tõestusmeetoditega tutvumiseks, kuid see tundmaõppimine peab olema teadlik, sealjuures mitte üksnes iga sammu seaduspärasusest arusaamise mõttes, mis on ka väga tähtis, vaid ka selle otstarbekohasuse mõistmise mõttes: tuleb taotleda, et õpilased oskaksid iga sammu põhjendamisel vastata mitte üksnes küsimusele «mispärast?», vaid ka küsimusele «milleks?».

Kandes hoolt lausete vaheliste loogiliste seoste omandamise eest, ei tohi unustada, et VII klassis peavad vaatlused, konstrueerimised ja mõõtmised mängima suurt osa: 13—15 aasta vanustel noorukitel on abstraheerimise võime juba tunduvalt suurem kui oli aasta või kaks tagasi, kuid siiski nemadki meelsamini joonestavad ja mõõdavad kui arutlevad. Normaalseks tuleb tunnistada niisugust iga uue teoreemi tundmaõppimise korda, kus esialgu tehakse vaatlused, konstrueerimised ja mõõtmised, mis viivad tea-

tavate, esialgu samuti katselisel teel kontrollitavate oletusteni, ja alles siis järgneb loogiline tõestus. Toome näite, kuidas võib teostada piirdenurga kohta käiva teoreemi tundmaõppimist. Olles püstitanud piirdenurga mõiste ja selgitanud, missugusele kaarele see nurk toetub, ning meelde tuletanud, mida nimetatakse antud kaarele vastavaks kesknurgaks, anname õpilastele järgmise koduse ülesande: 1) võtta vabalt kesknurk AOB, mõõta see ning seejärel konstrueerida ja mõõta mõned piirdenurgad, mis toetuvad nurgale AOB vastavale kaarele AB, ning väljendada oletus kesknurga suuruse ja samale kaarele toetuvate piirdenurkade suuruse vahelise seose kohta; 2) konstrueerinud vabalt piirdenurga AMB, mille üheks haaraks on diameeter MA, tõmmata raadius OB ning kindlaks teha nurkade AMB ja AOB suuruste vaheline seos ilma mõõtmiseta, tuginedes teoreemile, et kolmnurga välisnurk on võrdne kahe temaga mitte kõrvuti oleva sisenurga summaga; 3) üldistada saadud tulemus esiteks sellisele vabalt võetud piirdenurgale, mille haarad asetsevad üks ühel, teine teisel pool keskpunkti, pärast sellisele piirdenurgale, mille haarad asetsevad ühel pool keskpunkti. Ülesande esimese osa teostavad kõik õpilased (neile, kellel ei ole malli, kui selliseid on olemas, tuleb soovitada kesk- ja piirdenurga väljalõikamist paberist ning nende võrdlemist pealeasetamise või kokkumurdmisega), teise osa — peaaegu kõik, kolmanda — tugevamad õpilased, kuid järgmine geomeetria tund, kus on vaatluse all teoreem piirdenurga mõõdust, möödub kõigil hoopis produktiivsemalt ja huvitavamalt, kuna õpetaja abiga viiakse lõpuni kõigi poolt alustatud töö. Olles mõõtmiste abil iseseisvalt avastanud, et piirdenurk moodustab poole samale kaarele toetuvast kesknurgast, peab inimene seda geomeetrilist fakti võrreldamatult kindlamini meeles kui sel puhul, kui ta saab sellest teada raamatust või õpetaja käest, ja ei ole kimpus loogilise tõestuse reprodutseerimisega, kui mäletab, missuguseid kolme juhtumit tuleb seejuures vaadelda.



Joon. 31.

Olles uue teoreemi tundma õppinud, tuleb kohe anda näiteid selle praktilise rakendamise kohta. Nii on hea pärast piirdenurga kohta käiva teoreemi käsitlemist anda niisugune ülesanne: joonisel on osa ringjoonest ja sirge, mis lõikab seda ringjoont punktis A, kusjuures teine lõikepunkt B on väljaspool joonise piirkonda (joon. 31); tuleb tõmmata diameeter BC. Soovitanud eelnevalt selgitada, missuguseks osutub seejuures nurk BAC, kindlustame ülesande iseseisva lahendamise kõigi õpilaste poolt. Hea on anda ka niisugune ülesanne: kõõlud AB ja CD lõikuvad ringi sees punktis E; leida nurk AEC teades, et kaared AC ja BD on vastavalt α ja β. Näpunäide abikõõlu AD tõmbamise ja

teoreemi kasutamise kohta kolmnurga välisnurgast lubab ka siin rõhuval enamikul õpilastest ülesandega iseseisvalt toime tulla, kindlustades sellega teoreemi omandamise nurgast, mille tipp on ringi sees. Analoogiliselt valmistatakse ette ka teoreem nurgast, mille tipp on väljaspool ringi.

§ 15. Konstruktsioonülesanded.

Mitmesuguste ülesannete lahendamine, kus kasutatakse neid teoreetilisi teadmisi, mida sisaldab geomeetria kursus, on koolis geomeetria tundmaõppimise alal tehtava töö hädavajalikuks koostisosaks, kuid kõige väärtuslikumaiks ja samal ajal raskeimaiks ülesandeiks on konstruktsioonülesanded.

Konstruktsioonülesannete lahendamise oskust ei too õpilased koolist kaugeltki alati kaasa, ja selle põhjuseks on suuremalt jaolt lihtsalt õpetaja oma puudulik geomeetriliste konstruktsioonide teooria ja praktika tundmine kas või selleski tagasihoidlikus ulatuses, mis on vajalik Kisseljovi geomeetria õpikusse harjutusmaterjalina paigutatud rohkearvuliste konstruktsioonülesannete täisväärtuslikuks lahendamiseks. Geomeetria kursuse edukaks läbitöötamiseks VIII klassis on hädasti vajalik, et õpetaja valitseks geomeetrilisi konstruktsioone, õppides neid tundma vähemalt selles ulatuses, nagu nad on esitatud M. Bergi väikeses raamatukeses [IV, 8]. Nimetame üksikasjalisemad tööd [IV, 58a, 2], mida võib tungivalt soovitada õpetajale, ja samuti eri ülesannete kogu [IV, 5], rääkimata juba varem mainitud ülesannete kogust [IV, 23], mis sisaldab mitmekesiseid ülesandeid geomeetria kursuse kõigi osade kohta, sealhulgas ka konstruktsioonülesandeid.

Konstruktsioonülesannete lahendamise põhimeetodiks VI ja VII klassis on geomeetriliste kohtade meetod, mida kui meetodit õpitakse tundma alles teisel poolaastal VII klassis, kuid faktiliselt kasutatakse juba VI klassis. Samuti kasutatakse faktiliselt paralleellüket, sümmeetriat ja pööret, kuid vastavate meetodite tundmaõppimist ei nõuta.

Iga konstruktsioonülesanne kujutab endast väikest, seitsmeklassilise kooli õpilastele jõukohast uurimust, mille teostamisel (analüüsi osas, s. t. lahendusviisi otsimisel) õpilased mobiliseerivad kõik oma teoreetilised teadmised, õpivad igakülgselt tundma kujundi antud ja otsitavate elementide vahelisi seoseid. Leides õige tee, realiseeritakse konstruktsioon: soovitav on, et iga samm täpselt fikseeritaks. Lõpetanud konstruktsiooni, kontrollitakse hoolikalt tema õigsust vastava tõestuse varal, mis peab ilmsiks tegema, et konstrueerimisel teostatud lihtsamate operatsioonide ideaalselt täpse teostamise puhul tulemus vastab tingimustele absoluutselt täpselt. Lõpuks toimub töö lõpposa, raskeim osa — kõigi nende juhtumite uurimine, mis võivad ülesande lahendamisel esineda. Kogu lahendus vormistatakse korralikult, konstruktsioon teostatakse

instrumentide abil, tehakse lühikesed, kuid kõike tarvilikku sisaldavad selgitused. Ei kõlba kuhugi, kui konstruktsiooni faktilise teostamise asemel õpilane ainult jutustab sellest. Juhime tähelepanu täieliku, igakülgse ja ammendava uurimise tarvilikkusele. Kui see antud klassi õpilastele osutub liiga raskeks, siis on parem tuua ülesande tingimustesse vastavad kitsendused, mis lihtsustavad uurimist, kui rahule jääda ebatäieliku uurimisega, mis alati õpetab õpilastele räpakust arutlustes, rikkudes seda kasulikku loogilise mõtlemise oskust, mida annab teooria.

Toome ühe VII klassile sobiva konstruktsioonülesande lahenduse vormistamise näidise.

Ülesanne. Tasapinnal on antud kolm erinevat punkti: O, A ja B; konstrueerida ringjoon K_1, mis läbiks punktid A ja B ning puutuks punktis A ringjoont K, mille keskpunktiks on O (ja mis läbib punkti A).

Lahendus.

I. Analüüs. Kui punkt X on otsitava ringjoone keskpunkt (vt. joon. 32), siis see punkt X asetseb esiteks sirgel OA (teoreemi põhjal: kui kaks ringjoont puutuvad, siis puutepunkt asetseb nende keskpunktide joonel), ja teiseks lõigu AB keskristsirgel, sest see keskristsirge on geomeetriliseks kohaks punktidele, mis on punktidest A ja B võrdseil kaugustel.

II. Konstrueerimine.

1. Joonestame lõigu AB keskristsirge CD (kahe ringjoone abil, millel on sama raadius ja mille keskpunktideks on A ja B; ringjooned pole joonisel näidatud).
2. Joonestame raadiuse OA ning pikendame teda mõlemale poole.
3. Leiame sirgete CD ja OA lõikepunkti X.
4. Joonestame ringjoone K_1, mille keskpunktiks on X ja mis läbib punkti A.

III. Tõestus.

Läbi punkti A joonestatud ringjoon K_1 läbib ka punkti B, sest $AX = BX$ lõigu keskristsirge omaduse põhjal. Ringjoon K_1 puutub ringjoont K punktis A teoreemi põhjal «kui kahel ringjoonel on ühine punkt A nende keskpunktide joonel, siis nad puutuvad». Sel viisil K_1 ongi otsitavaks ringjooneks.

IV. Uurimine.

Ülalpool näidatud konstruktsiooni punktid 1 ja 2 on alati teostatavad, kuid punkt 3 ainult sel tingimusel, et sirge CD ei ole paralleelne sirgega OA, s. t. kui sirge AB ei ole risti sirgega OA. Kui see tingimus on täidetud, on olemas üks ja ainult üks ringjoon K_1, mis rahuldab ülesande tingimusi, sõltumata sellest, kas antud punkt B on väljaspool ringjoont K (joon. 32*a*), seespool ringjoont K (joon. 32*b*), või ringjoonel K (joon. 32*c*). Viimasel juhtumil otsitav ringjoon ühtib antud ringjoonega.

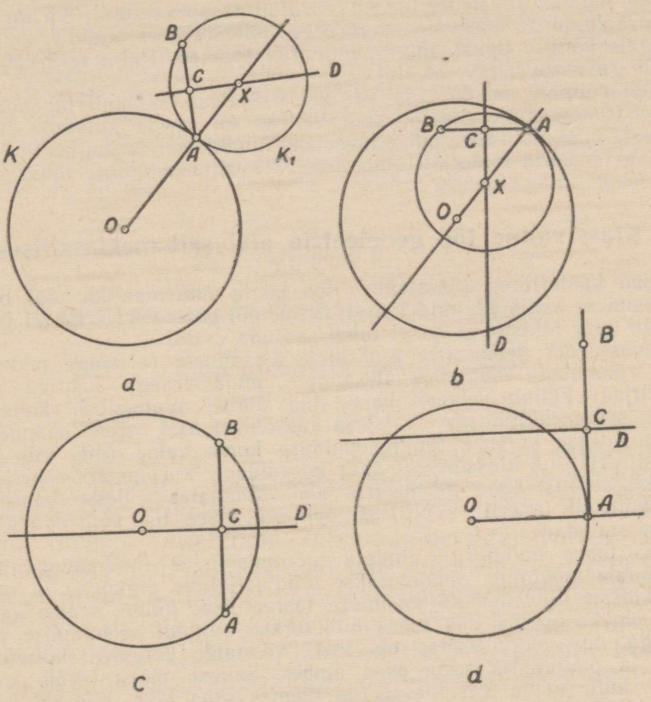
Kui AB on risti sirgega OA (joon. 32*d*), siis ülesandel lahendit ei ole, sest ei ole olemas niisugust punkti, mis asetseks samaaegselt sirgeil OA ja CD. Siiski, tõmmates läbi punkti A ringjooni keskpunktidega, mis asetsevad sirgel OA ja piiramatult kaugenevad punktist A, tulevad need ringjooned punktile B järjest lähemale ja lähemale, sattudes sellele punktile kuitahes lähedale, ja see annab aluse väita, et ka sel erijuhtumil on olemas lahend, kuid kõdunud lahend: ringjoon K_1 kõdub sirgeks, mida võib vaadelda kui lõpmatu suure raadiusega ringjoont.

Ülesande tekstis antud juhtnöör selle kohta, et on antud kolm erinevat punkti A, B ja O, vabastab lahendaja vajadusest täiendada uurimist nende juhtumitega, kus kaks nendest punktidest või koguni kõik kolm ühtivad, mis pakub samuti huvi ja võib olla edasise töö objektiks. Näiteks A ja B ühtimisel on ülesandel lõpmatu palju lahendeid: ringjooneks K_1 on iga ringjoon, mille

keskpunkt on sirgel OA ja mis läbib punkti A; kõik need ringjooned moodustavad niinimetatud paraboolse ringjoonte kimbu.

Teise näitena võtame veel ühe ülesande: konstrueerida täisnurkne kolmnurk tema antud hüpotenuusi c ja kaatetite summa s järgi.

Kõigepealt märgime, et ülesandel pole lahendit, kui $c \geqslant s$, sest kolmnurga kahe külje summa on alati suurem kolmnurga kolmandast küljest. Tingimus $c < s$ on seega tarvilik ülesande lahendamise võimalikkuseks. Kas see on piisav? On selge, et antud hüpotenuusi puhul ei saa kaatetite summa olla kuitahes suur, kuid täpse vastuse küsimusele summa s võimaliku suurima väärtuse kohta annab ainult detailne uurimine.



Joon. 32.

Analüüsimisel veendume hõlpsasti, et ülesanne taandub abikolmnurga konstrueerimisele kahe antud külje c ja s ning külje c vastas asetseva 45°-lise nurga järgi. Konstrueerimine ja tõestus ei paku pärast seda mingisuguseid raskusi. Uurimisel tuleb eristada kolm juhtumit, võrreldes lõiku c täisnurkse võrdhaarse kolmnurga kaatetiga h, kui hüpotenuusiks on s: kui $c < h$, siis lahendit ei ole; kui $c = h$, on olemas üks kolmnurk (võrdhaarne), mis rahuldab ülesande tingimusi; kui $c > h$, on olemas kaks kolmnurka, mis erinevad ainult oma asetuselt ja rahuldavad ülesande tingimusi. Seega on lahendi olemasolu tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks võrratuse $h \leqslant c < s$ kehtimine.

VIII klassis on soovitav tagasi pöörduda selle ülesande juurde ja vaadelda selle lahendamist algebraliselt, saades otsitava kolmnurga kaatetite jaoks avaldise kujul $0{,}5s \pm \sqrt{0{,}5c^2 - 0{,}25s^2}$. See valem annab ülesande täpse analüütilise lahendi, kuid sellel põhinev konstruktsioon osutub keerulisemaks kui eespool näidatu.

Märgime ära ühe huvitava järelduse, mis tuleneb võrratusest $h \leqslant c < s$. Et $h = s : \sqrt{2}$, siis $c < s \leqslant c\sqrt{2}$, s. t. ühegi täisnurkse kolmnurga kaatetite summa, olles hüpotenuusist suurem, ei ole kunagi suurem sellise ruudu diagonaalist, mille küljeks on see hüpotenuus. Seega on antud hüpotenuusiga täisnurkse kolmnurga kaatetite muutuval summal miinimum, mis on võrdne selle hüpotenuusiga ja mis saavutatakse ainult kolmnurga kõdumisel sirglõiguks, ja on ka maksimum, mis saavutatakse võrdhaarses täisnurkses kolmnurgas ja mis on võrdne hüpotenuusi pikkuse ja $\sqrt{2}$ korrutisega. Tüüpiline matemaatilise analüüsi ülesanne ekstreemväärtuste leidmisele osutub antud juhtumil nii lihtsalt lahenduvaks elementaarsete vahenditega.

Märgime suurt huvi, mida alati tekitavad «takistustega» konstruktsioonülesanded, näiteks konstrueerimised piiratud tasapinnatükil. Nii on hea pärast tutvumist kolmnurga kõrguste omadusega, lõikuda ühes punktis, lasta tõmmata kolmnurgale kõrgus tipust, mis pole juurdepääsetav. Palju selliseid ülesandeid võib leida raamatuist [IV, 56, 15].

Täiesti võimalik on õpetada VII klassi õpilasi täielikult lahendama lihtsamaid konstruktsioonülesandeid, kuid selleks on tarvis kulutada umbes 25% kogu ajast, mis on määratud geomeetria tundidele. Niisugust kulu õigustab täielikult geomeetria materjali omandamise kvaliteedi üldine tõus.

§ 16. Klassiväline töö geomeetria alal seitsmeklassilises koolis.

Üldised kaalutlused klassivälise töö kohta matemaatika alal on esitatud eespool, esimese osa § 22, kuid klassivälisel tööl geomeetria alal VI ja VII klassis on eriti suur tähtsus ja sellel tuleb peatuda eraldi.

Mittevastavust geomeetria praktiliste ülesannete (eelkõige pikkuste, pindalade ja ruumalade mõõtmise ülesannete, mida praegu kehtiva programmi «Seletuskirjas» küllalt selgesti kajastatud üldise tunnustuse kohaselt tuleb lahendada seitsmeklassilises koolis) ja käesoleval ajal tavaks saanud geomeetria süstemaatilise kursuse tundmaõppimise korra vahel (mis viib kõik need mõõtmised VIII — X klassidesse) saab kõrvaldada, kui õpetaja oskab hästi korraldada klassivälist tööd geomeetria alal, tõmmates sellesse kaasa kõik või peaaegu kõik VI ja eriti VII klassi õpilased. See töö võib edukalt toimuda järgmistes suundades.

I. Mis tahes hulknurga pindala mõõtmisviiside tundmaõppimine. Ristküliku pindala mõõtmine omandatakse kindlasti juba algkoolis ja seda korratakse V klassis. Süvenemata küsimuse teoreetilisse külge, seame enesele eesmärgiks selgeks õppida mis tahes hulknurkse kujundi asendamise võrdpindse ristkülikuga, mis, nagu teada, on alati võimalik, lõigates kujundi lihtsalt tükkideks ja paigutades tema osad ümber. Sellest mõiste võib olla antud V klassis, kuid VI ja VII klassis on olemas juba kõik, mis on tarvilik rea teoreemide täisväärtuslikuks tõestamiseks erinevate hulknurkade ja ristküliku võrdpindsuse kohta, nagu näiteks teoreem ühesuuruste aluste ja kõrgustega rööpküliku ja ristküliku võrdpindsusest. Klassivälise töö korras võivad VII klassi õpilased tundma õppida iga hulknurga pindala mõõtmise küsimust ja lahendada hulga praktilisi ülesandeid, eriti maakooli töötingimustes.

II. Ringjoone pikkuse ja ringi pindala mõõtmise alal ei ole VII klassis võimalik minna kaugemale võrreldes sellega, mis oli võimalik juba V klassis (vt. eespool, § 7), kuid täiesti tarvilik on tagasi pöörduda valemite $C = 2\pi r$, ja $K = \pi r^2$ juurde ja muuta need õpilaste kindlaks omanduseks.

III. Pindalade tundmaõppimisel jõutakse möödapääsmatult mis tahes kõverjoonelise piiriga maatüki pindala määramise ülesandeni. Klassivälisek tööks annab palju head materjali raamat [IV, 46].

IV. Kehade ruumalade mõõtmise viiside tundmaõppimine pakub seitsmeklassilise kooli lõpetajaile suurt huvi. Tuginedes oskusele leida iga risttahuka ruumala, pole raske jõuda mis tahes püst- ja koguni kaldprisma ruumala valemini, võttes ilma tõestuseta, et igas prismast (prisma põhjaga paralleelsete tasapindadega) lõigatud pikkuseühiku paksuses «plaadis» on nii mitu kuupühikut, kui mitu ruutühikut sisaldab prisma põhi, ja samuti silindri ruumala

valemini. Manipulatsioonid prisma, silindri, püramiidi ja koonuse õõnsate mudelitega, millel on võrdpindsed põhjad ja võrdsed kõrgused, viivad ruumalade määramise reegliteni, mis on seitsmeklassilise kooli lõpetajaile huvitavad ja kasulikud ja mida teoreetiliselt põhjendatakse alles X klassis. Siia on hea juurde lisada ka ühest küljest tasapinnaga piiratud keha ruumala ligikaudne arvutamine, mis toimub põhja pindala korrutamise teel reast põhja punktidest tõmmatud kõrguste aritmeetilise keskmisega; sellisel viisil arvutatakse harilikult teostatud mullatööde mahtu.

Praktilist huvi pakub tüvikoonuse (pütt, puutüvi), tünni ja heinakuhja ruumala arvutamise oskus. Rohkearvulisi siia kuuluvaid ligikaudseid reegleid võib leida põllumajanduslikus kolhoosniku teatmik-kalendris.

V. Väärtuslikku materjali klassiväliseks tööks geomeetria alal VII klassis annavad lihtsamad konstrueerimised ja mõõtmised maastikul, alates kauguste määramisest silma järgi jalutuskäikude ajal (kontrollides sammudega mõõtmisega) ja lõpetades lihtsate plaanide koostamisega (mis on kõige lihtsam bussoolkompassi abil). Koolis on eriti hõlpsasti rakendatavad sõjalise topograafia võtted, mille tundmine on õpetajale väga kasulik.

Seega avanevad klassiväliseks tööks geomeetria alal VI ja VII klassis määratu suured võimalused, ja kui õpetaja kasutab nendest ära kas või väikesegi osa, tõstab ta oluliselt oma õpilaste praktilise ettevalmistuse taset.

IV peatükk.

GEOMEETRILISTE SUURUSTE MÕÕTMINE.

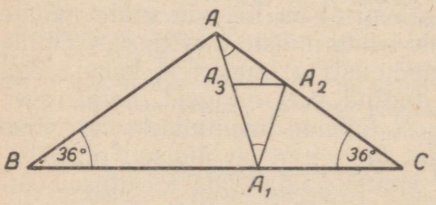
§ 17. Lõigu pikkus ja lõikude suhe.

Kujutlus sirglõigu pikkusest kui arvust, mis näitab, mitu korda pikkusühik või selle mingi osa mahub sellesse lõiku (sisaldub selles), on omane õpilastele juba alates algkoolist ning täiesti kooskõlas igapäevase praktikaga. See veendumus, et iga lõigu pikkust on võimalik täpselt väljendada ratsionaalarvuga, võttes ühikuks mis tahes teise lõigu, ei vasta reaalsusele, kuid see ei takista sugugi geomeetria esimeste peatükkide käsitluse täiesti õiget ülesehitamist, kus lõigu pikkuse mõiste on tegelikult üleliigne: lõikude võrdlemine ja neli tehet lõikudega (liitmine, lahutamine, korrutamine naturaalarvuga ja jagamine naturaalarvuga) on teostatavad puhtkonstruktiivsel teel, nende pikkust väljendavaid arve üldse mitte kasutades. Kuid juba sarnaste kujundite vaatlemisel on lõikude suhte mõiste tarvilik. Eukleidesel toimub lõikude suhte mõiste tarvituselevõtmine ka puhtgeomeetriliselt, lõikude mõõtmist ta kunagi ei kasuta ega saagi kasutada, sest tol ajal ei tuntud veel mingeid muid arve peale ratsionaalarvude, kuid see, et lõikude mõõtmiseks ei piisa ratsionaalarvudest, oli hästi teada. Meie ajal on üldiselt otstarbekohaseks tunnustatud teine tee: irratsionaalarvude tarvituselevõtmine ja mis tahes lõigu mõõtmise võimalikkuse selgitamine meelevaldse pikkusühiku korral, kusjuures lõigu pikkus väljendub ikka mingi reaalarvuga, olgu ratsionaalse või irratsionaalsega. Olemasolev programm määrab täpselt kindlaks selle kohta käiva õige vähese materjali, mis tuleb tundma õppida VIII klassi geomeetria kursuse päris alguses; Kisseljovi õpik käsitleb seda materjali täiesti vastavalt programmile. Õigusega loetakse seda osa üheks raskemaks

elementaargeomeetria kursuses ja selle raskuse põhjus on täiesti selge: üldine lõigu pikkuse mõiste määratakse reaalarvu mõiste abil, kuid see viimane mõiste, nagu nägime eespool (III osa § 28), omandatakse koolis sageli halvasti. Tuleb taotleda reaalarvu mõiste täpsemat omandamist kujul, mil ta VIII klassi õpilastele on jõukohaseim, nimelt kui lõpmatu kümnendmurd, mis väljendab ratsionaalarvu, kui ta on perioodiline (lõplikku kümnendmurdu vaadeldakse perioodilisena perioodiga, mis koosneb ühest ainsast numbrist 0), ja irratsionaalarvu, kui ta ei ole perioodiline, kusjuures lõpmatu kümnendmurru moodustumise protsess saab täiesti selgeks, kui seda illustreerida nimelt lõigu mõõtmisega, nii et on tarvis koos vaadelda lõigu mõõtmise küsimust ja tavaliselt algebra kursusse kuuluvat reaalarvu küsimust. Teatava määrani läheb seda teed ka Kisseljovi geomeetria õpik, kus peenes kirjas on antud rida lauseid reaalarvude kohta (§§ 151—154 1949. a. trüki j.); järjekindlamalt, täielikumalt ja õpilastele jõukohasemalt on niisugune ühine käsitlus antud artiklis [III, 2c], mida lugejale soovitame tungivalt.

Mingi lõiguga ühismõõdulise ja ühismõõduta lõigu mõiste antakse nii Kisseljovi geomeetria õpikus kui ka nimetatud artiklis ühismõõdu mõiste abil, kusjuures artiklis on ruudu külje ja diagonaali ühismõõdutus tõestatud lihtsamalt ja selgemalt kui õpikus, kasutamata seda kahe lõigu suurima ühismõõdu leidmise võtet, mis on tuntud «Eukleidese algoritmi» nime all. Sellega on siin märgitud kogu küsimuse käsitluse teatava muutmise võimalus, mis on realiseeritud N. Glagolevi õpikus [IV, 19], kus isegi ühismõõdu mõiste on kõrvale heidetud: lõiku nimetatakse teise lõiguga ühismõõduliseks, kui viimase ühikuks võtmisel saab esimese pikkuse jaoks ratsionaalarvu, ja teisega ühismõõdutuks kui see arv on irratsionaalne. Selle käsitluse puhul on geomeetriliste tulemuste sõltuvus aritmeetilistest mõistetest veelgi tugevam.

Jäädes programmis ettenähtud käsitluse juurde ja sisse lülitades nii ühismõõdu mõiste kui ka Eukleidese algoritmi, võib ruudu külje ja tema diagonaali ühismõõdutuse küsimuse vaatlemise kõrval soovitada vaadelda veel üht näidet kahest ühismõõduta lõigust, nimelt võrdhaarse kolmnurga alust ja haara, kui alusnurk on 36° (joonis 33), mille ühismõõdutust saab veel lihtsamalt kindlaks teha kui ruudu puhul: kandnud selle kolmnurga haara AB tema alusele BC, märkame, et ta mahub sellesse üks ja ainult üks kord, kusjuures jääk A_1C koos lõikudega $AA_1 = A_1C$ ja AC moodustab võrdhaarse kolmnurga samasuguste nurkadega, nagu on antud kolmnurgal. Operatsiooni kordamine annab niisuguste kolmnurkade lõpmatu järjendi ABC, A_1AC, A_2AA_1, A_3AA_2, A_4AA_3 jne., sellal kui lõikudel AB ja BC ühismõõdu leidmise korral jääkide A_1C, AA_2, ... hulk oleks lõplik. Lõikude ühismõõdutuse näidete vaatlemine, kui seda teostada küllalt täielikult ja selgesti, on õpilastele kogu selle osa kõige väljapaistvamaks ja meeldejäävamaks punktiks ja sellele tuleb pühendada



Joon. 33.

küllaldaselt tähelepanu. Ainult see annab õpilastele selle, mis antud juhtumil on kõige tähtsam — veendumuse selles, et edaspidi kõrvuti lõikude ühismõõdulisuse juhtumiga on tarvilik vaadelda ka nende ühismõõdutuse juhtumit.

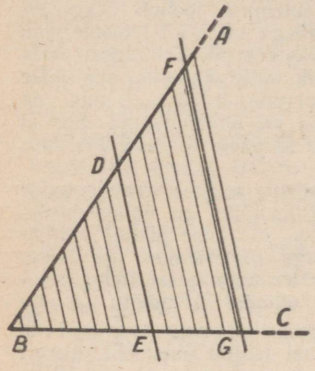
Aritmeetiliste mõistete osa tugevdamise otstarbekus lõigu pikkuse ja samuti teiste geomeetriliste suuruste mõõtmise küsimuse vaatlemisel, eriti üldtarvitatava kümnendnumeratsiooni osa tugevdamise otstarbekohasus on veenvalt näidatud raamatus [IV, 41], mis sisaldab üldse palju õpetlikku, kuid täielikult nõustuda tema tulemustega ei saa. Jälgides neid tulemusi, loobub Glagolevi õpik, nagu juba märgitud, ühismõõdu mõistest, ja sellega tuleb küsimusele, kas lõigud 1 cm ja $^1/_3$ cm on ühismõõduga või mitte, vastata nii, kui täpselt käia selles õpikus näidatud teed mööda: kui esimene lõik võtta ühikuks, siis teise pikkus väljendub lõpmatu perioodilise kümnendmurruna 0,333..., mis on võrdne ratsionaalarvuga $^1/_3$, ja seetõttu need lõigud on ühismõõduga. See ei ole lihtsustamine, vaid küsimuse tavalise, ühismõõdu mõistele toetuva käsitluse keeruliseks tegemine!

Nimetame üht õpilaste juures väga levinud viga, mis seisneb irratsionaalse lõigu ja ühismõõduta lõikude mõiste segamises. Kaks lõiku on ühismõõduta, kui neil ei ole ühismõõtu; kui üks neist võtta ühikuks, siis teise pikkus väljendub irratsionaalarvuga. Irratsionaalseks lõiguks aga nimetatakse iga lõiku, millel antud pikkusühikuga ei ole ühismõõtu. Kaks irratsionaalset lõiku, olles eraldi kumbki ühikuga ühismõõduta, võivad siiski omada ühismõõtu ja olla omavahel ühismõõdulised: niisugused on näiteks lõigud pikkusega $2\sqrt{2}$ ja $3\sqrt{2}$, mis ühikuga ei oma ühismõõtu, kuid millel omavahel leidub ühismõõt, nimelt lõik pikkusega $\sqrt{2}$.

Teades kahe lõigu pikkusi, mis on mõõdetud ühe ning sama pikkusühikuga, saab alati leida nende kahe pikkuse jagatise, s. t. nende kahe lõigu suhte. Tähtis on näidata, et lõikude suhe ei muutu pikkusühiku muutumisel. Lihtsaim on ühikuks võtta teine neist lõikudest; siis esimese lõigu pikkus ja esimese lõigu suhe teisega väljendub ühe ja sama arvuga, mis on ratsionaalne sel puhul, kui lõigud on ühismõõduga, ja irratsionaalne, kui nad on ühismõõduta. Esitades selle arvu kümnendmurruna, saame esimesel juhtumil lõpmatu perioodilise murru (erijuhtumil on võimalik lõplik murd kui perioodiline, mille periood koosneb ühest ainsast numbrist 0) ja teisel juhtumil lõpmatu mitteperioodilise murru.

Täieliku selguse saamine kõigist neist üksikasjadest on mitme, lõikude suhtest kõnelevate teoreemide tõestuste omandamiseks tingimata tarvilik. Vaatleme üht neist, nimelt teoreemi paralleelsete sirgete ja nurga haarade lõikumisel saadud nelja lõigu võrdelisuse kohta. Olgu antud kaks paralleeli DE ja FG, mis lõikavad nurga ABC haaradelt neli lõiku BD, BF, BE ja BG (vt. joonis 34), ja tuleb tõestada, et esimese kahe lõigu suhe on võrdne teise kahe lõigu suhtega. Sel puhul, kui lõigud BD ja BF on ühismõõduga, ei teki mingisuguseid raskusi; paigutame nende lõikude ühismõõdu k kiirele BA alates punktist B ja tõmbame läbi saadud punktide DE-ga paralleelsed sirged. Nurga ABC teisel haaral saame võrdsed (omavahel, kuid mitte lõiguga k) lõigud, millest igaüks on lõikude BE ja BG ühismõõduks. Tähistades selle ühismõõdu tähega k_1, saame, et $BF = nk$, $BD = mk$, $BG = nk_1$ ja $BE = mk_1$, kus m ja n on teatavad naturaalarvud, ja siit leiamegi suhted $BF : BD = n : m$ ja $BG : BE = n : m$, näidates sellega nende võrdsust. Hoopis raskem on teine juhtum,

kus lõigud BF ja BD on ühismõõduta, kuid ka siin võib saavutada täie selguse, kui õpetaja ise on kõik küsimuse üksikasjad endale selgeks teinud. Soovides leida suhet $BF : BD$, võtame BD ühikuks ja jaotame selle esiteks 10-ks võrdseks osaks, nagu näidatud joonisel 34. Tähistanud iga osa tähega k (nii et $BD = 10k$), saame $mk < BF < (m+1)k$, kus m on teatav naturaalarv (võrdus $BF = mk$ ei ole võimalik, sest siis lõigud BD ja BF oleksid ühismõõduga). Tõmmates paralleelid saame, et $BE = 10k_1$, kus k_1 on teatud lõik, $mk_1 < BG < (m+1)k_1$, ja edasi järeldame, et $m \cdot 0{,}1 < BF : BD < (m+1) \cdot 0{,}1$ ja $m \cdot 0{,}1 < BG : BE < (m+1) \cdot 0{,}1$, s. t. suhteid $BF : BD$ ja $BG : BE$ väljendavate arvude ligikaudsed väärtused, mis on võetud puuduga täpselt kuni kümnendikeni, on võrdsed; teiste sõnadega: neil on ühesugused täisosad ja ühepalju kümnendikke. Edasi jaotame BD juba mitte enam 10-ks, vaid 100-ks võrdseks osaks ja veendume, korrates kogu operatsiooni, et ka nende suhete sajandike numbrid on ühesugused; edasi jaotame BD 1000-ks, 10 000-ks, 100 000-ks jne. võrdseks osaks ning teeme kindlaks, et ka tuhandike, kümnetuhandike, sajatuhandike jne. numbrid on ühesugused, millest järeldubki nende suhete võrdsus. See tõestus nimelt ongi antud nii Kisseljovi ja Glagolevi õpikuis, kuid ainult vähemate üksikasjadega, mis selguse saamiseks on tingimata tarvilikud.



Joon. 34.

§ 18. Nurkade ja ringjoone kaarte mõõtmine.

Sirgjoone lõikude pikkuse mõõtmine on tunduvalt lihtsam kui kõverjoone pikkuse või pindalade ja ruumalade mõõtmine; see seletub sellega, et sirgjoone lõikude puhul mõisted kongruentsed ja võrdsed kattuvad, kuid teistel juhtumitel niisugust kattumist ei ole. Kahel sirglõigul on üks ning sama pikkus siis ja ainult siis, kui nad on kongruentsed, s. t. kui nad üksteisele paigutamisel ühtivad, sellal kui kahel kujundil võib olla üks ning sama pindala ilma, et nad oleksid kongruentsed, kahel kõverjoone kaarel võib olla üks ning sama pikkus, olles kujult täiesti erinevad. Sama omadusega mis sirgjoone lõigud on ka nurgad ja ühe ning sama ringjoone kaared (või võrdsete raadiustega ringjoonte kaared), mistõttu nurkade mõõtmise teooriat ja kaarte mõõtmise teooriat on võimalik üles ehitada täiesti analoogiliselt sirglõikude mõõtmise teooriaga. Geomeetria aksiomaatilisel käsitlemisel kõik need kolm mõõtmise teooria juhtumit kattuvad täielikult, mis põhineb nende kolme geomeetriliste objektide kategooria pidevuse omadusel, mis väljendub

sirge puhul Archimedese aksioomiga ja Cantori aksioomiga ning nurkade ja kaarte puhul vastavate teoreemidega. Kaks nurka võivad olla ühismõõduga, nagu näiteks teravnurgad täisnurkses kolmnurgas, mille kaatet võrdub poolega hüpotenuusist, ja võivad olla ka ühismõõduta, nagu teravnurgad egiptuse kolmnurgas, s. o. kolmnurgas külgedega 3, 4 ja 5 pikkusühikut (tõestuse võib leida artiklist [IV, 57]). Võttes mingi nurga, näiteks täisnurga või nurgakraadiks nimetatava ühe üheksakümnendiku täisnurgast nurkade mõõduühikuks, saab iga teise nurga mõõdu täpselt väljendada reaalarvuga — ratsionaalse või irratsionaalsega. Olulist tähtsust omab ringjoone kaarte ja neile toetuvate kesknurkade võrdelisus; selle võrdelisuse tõestus toimub kahes osas: eraldi ühismõõduga ja ühismõõduta kaarte puhul. Geomeetria koolikursuses seda tõestust harilikult üldse ei anta, kuid kaarte ja nurkade võrdelisus leiab praktilist kasutamist (mallil) juba geomeetria esimestest tundidest alates.

Nurkade ja kaarte mõõtmist vaadeldes tuleb silmas pidada üht raskust. Sellal kui õpilased VII klassis tutvuvad lõigu jaotamisega mis tahes n võrdseks osaks, piirduvad nad nurkade jaotamisel juhtumitega, kus $n = 2, 4, 8, \ldots$ üldiselt 2^n. Nurga jaotamisel teissuguseks arvuks võrdseiks osadeks tuleb VII klassis kasutada peale sirkli ja joonlaua veel muid riistu, kõige lihtsam malli, ja teostada konstruktsioon ainult ligikaudselt.

Suuruste mõõtmise sedasama liiki (võrdsuse ja kongruentsuse mõiste kattumise juhtumit) näeme ka stereomeetrias, nimelt kahetahuliste nurkade mõõtmisel.

Ringjoone ja ringjoone kaare pikkuse mõõtmine toimub piirväärtuste teooria alusel ja tuleb vaatlemisele järgmises peatükis.

§ 19. Hulknurkade pindala.

Esialgne kujutlus kujundi pindalast kui ühikulise küljega ruutude ja selliste ruutude osade arvust on täiesti rakendatav ratsionaalsete küljepikkustega ristkülikute puhul ja rakendatuna ristkülikuile, mille küljed väljenduvad täisarvudega, omandavad õpilased selle juba algkoolis. V klassis vaadeldakse juba ristkülikuid, mille külgede pikkused väljenduvad mis tahes ratsionaalarvudega. Pindala mõiste kõik praktilised rakendused on selle primitiivse kujutlusega pindalast juba täielikult kindlustatud, ja asudes VIII klassi geomeetria kursuses pindalaküsimuse süvendatud õppimisele, tuleb alustada sellega, et tuletatakse meelde ristküliku pindala arvutamise reegel sel puhul, kui selle küljed on pikkusühikuga ühismõõdulised. Kisseljovi geomeetria õpikus see meeldetuletamine toimub § 246, kusjuures juhtum, kus küljed väljenduvad täisarvudega, vaadeldakse üldkujul (oletatakse, et alus võrdub täisarv b pikkusühikut, ja kõrgus — täisarv h sama ühikut), ja juhtumit, kus küljed väljenduvad murdarvudega — ainult erijuhtumil

(kui alus on $\frac{1}{32}$ pikkusühikut ja kõrgus $\frac{3}{45}$ sama ühikut). On soovitav anda valemi $S = bh$ tõestus ka teisel juhtumil üldkujul, mida ei ole sugugi raske teha: kui nii b kui ka h on ühikuga ühismõõdulised, siis on olemas lõik k, mis mahub täisarv korda nii lõikudesse b ja h kui ka ühikusse, nii et $b = mk$, $h = nk$, $1 = lk$, kus tähed m, n ja l tähendavad naturaalarve. Võttes selle lõigu k ajutiselt uueks pikkusühikuks ja ehitades uue pindalaühiku, saame täisarvuliste külgedega ristküliku juhtumi ja tema pindala on $m \cdot n$ uut ja seetõttu otsitav pindala endistes ruutühikutes väljendub valemiga $S = \frac{m \cdot n}{l^2} = \frac{m}{l} \cdot \frac{n}{l} = \frac{mk}{lk} \cdot \frac{nk}{lk} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1} = bh$. Ei ole üleliigne toonitada, et valem $S = bh$ väljendab ristküliku pindala eeldusel, et pikkused b ja h on väljendatud samades pikkusühikuis ja pindala S — vastavais ruutühikuis; esineb ju vanemais klassides sageli selliseid vigu, nagu ristkülikul külgedega 3 cm ja 4 dm tuleb pindala võrdseks $3 \cdot 4 = 12$ (teadmata missugust ühikut). On tarvis saavutada täit selgust küsimuses selle kohta, mis on antud pikkusühikule vastav ruutühik (pindalaühik): see on ühikupikkuse küljega ruudu pindala. Ainult niisuguse ühikute valiku korral kehtib valem $S = bh$ ja teised tavalised kujundite pindala valemid.

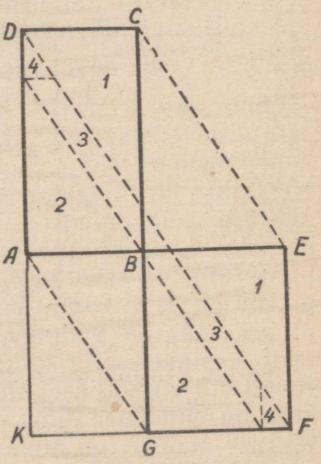
Niisiis juhtumil, kui ristküliku külgede pikkused väljenduvad ratsionaalarvudega, lahendub tema pindala küsimus koolis laitmatult nii teaduslikust küljest kui ka arusaadavuse mõttes. Kuid edasi algavad olulised raskused: programm nõuab VIII klassis hulknurkade pindala küsimuse ammendavat tundmaõppimist ja Kisseljovi õpikus vaadeldakse seda küsimust pärast piirväärtuste teooria elemente käsitlevat peatükki, teostades ristküliku pindala valemi $S = bh$ tõestamist juhtumil, kui tema külgedel ei ole ühikuga ühismõõtu, viitega teoreemile korrutise piirväärtusest, sellal kui õpilased piirväärtuse mõistega tutvuvad alles IX klassis. Õpetaja tavaliselt saab sellest raskusest üle sel teel, et üldse ei vaatle valemi $S = bh$ tõestust ühismõõdutuse juhtumil, vaid lihtsalt nimetab, et selle tõestamine on võimalik ka sel puhul.

Ristküliku pindala mõõtmise küsimust saab käsitleda ka piirväärtuste teooria abi kasutamata (vt. näiteks raamatuid [IV, 1, 22]), ei nõua seda ka, nagu edasi näeme, mis tahes hulknurga pindala mõõtmine, kuid temata ei saa läbi ringi pindala mõõtmisel, samuti ka meelevaldse kontuuriga kujundi pindala küsimuse püstitamisel. Nimetatud raskuse paremaks ületamiseks ristküliku pindala valemi tuletamisel on järgmine: läbi arutanud hoolega esimesed kaks juhtumit, kus küljed väljenduvad naturaalarvude ja ratsionaalarvudega, jätab õpetaja valemi $S = bh$ tõestamise irratsionaalsete külgede puhul IX klassi, kuni peatükk piirväärtustest on õpitud, märkides aga nüüd juba, et see tõestamine on võimalik.

Kui ristküliku pindala küsimus on nii või teisiti lahendatud, siis hulknurkade pindala küsimuse käsitlemine toimub ilma

mingi takistuseta. Kasulik on võtta tarvitusele järgmine aksioom, mis loomulikult tuleneb eespool näidatud primitiivsest kujutlusest kujundi pindala kohta: kujundi pindala ei muutu, kui tema osad meelevaldselt ümber paigutada. Kui enne võtta tarvitusele kergesti defineeritavad kujundite tükeldusvõrdsuse ja võrdpindsuse mõisted, siis sellele aksioomile saab anda lühema sõnastuse: tükeldusvõrdsed kujundid on võrdpindsed. Geomeetria aksiomaatilisel käsitlemisel see aksioom osutub teoreemiks (vt. näiteks Lisa D raamatus [IV, 1]), kuid koolitöös pole mingit vajadust kõnelda tema tõestamisest. Tuginedes sellele aksioomile, taandame iga sirglõikudega piiratud kujundi pindalateoreemi tõestamise selle kujundi ja teatud ristküliku tükeldusvõrdsuse tõestamisele.

Väga soovitav on saavutada täielik selgus terminite «võrdsus» (kongruentsus), «tükeldusvõrdsus», «võrdpindsus» ja nende vastastikuse suhte mõistmises. Kaks kujundit on võrdsed, kui neid saab üksteise peale paigutamisel ühtivaiks teha; nad on võrdpindsed, kui neil on üks ning sama pindala; nad on tükeldusvõrdsed, kui üht neist saab lõigata lõplikuks arvuks osadeks nii, et nende ühendamine mingis teises järjekorras annab teise kujundi, ehk teiste sõnadega: kui neid kujundeid saab lõigata lõplikuks arvuks paariti võrdseiks osadeks. Kui kaks kujundit on võrdsed, siis nad ühtlasi on ka võrdpindsed ja tükeldusvõrdsed. Kui kaks kujundit on tükeldusvõrdsed, siis nad võivad olla mittevõrdsed, kuid tingimata on võrdpindsed. Kui kaks hulknurka on võrdpindsed, siis nad võivad olla mittevõrdsed, kuid tingimata on tükeldusvõrdsed: iga kaht hulknurka, millel on üks ning sama pindala, saab lõigata lõplikuks arvuks paariti võrdseiks osadeks. Selle huvitava teoreemi tõestuse võib leida näiteks V. Kagani brošüürist [IV, 34d]. Näiteks kaks võrdpindsed ristkülikut on alati tükeldusvõrdsed. Joonis 35, kus $AB \cdot BC = GF \cdot FE$, näitab, kuidas tuleb ristkülik $ABCD$ lõigata osadeks nii, et saaks neli osa, millest võib koostada antuga võrdpindse ristküliku $GFEB$. Joonis on võetud raamatust [IV, 19], kus see üldise teoreemi erijuhtum mängib tähtsat osa (joonis on trükitud ka kaanele).



Joon. 35.

Meelevaldse kontuuriga piiratud kujundi pindala küsimust vaadeldakse järgnevas peatükis ja kehade ruumalade ning pindalade küsimust VI peatükis.

V peatükk.

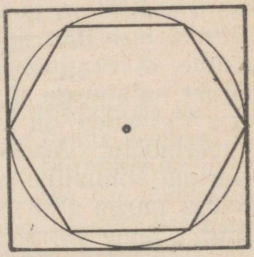
PIIRVÄÄRTUSTE TEOORIA GEOMEETRILISI RAKENDUSI.

§ 20. Ringjoone pikkus.

Tegelikult iga kõvera kaare pikkus tehakse kindlaks ligikaudselt sellesse kaaresse joonestatud murdjoone pikkuse mõõtmise teel; kui kaar on kumer, siis see viis annab lähenduse puuduga; lähenduse liiaga saab sel puhul kaare ümber joonestatud, s. o. puutujate lõikudest koosneva murdjoone pikkuse mõõtmisel (kummagi murdjoone otsad peavad muidugi antud kaare otstega ühtima). Intuitiivselt on selge, et tavalise «sujuva» kõvera korral ideaalselt täpse murdjoonte konstrueerimise ja nende kõigi lülide niisamuti täpse mõõtmise korral saab kaare pikkust määrata seda täpsemalt, mida lühemad on need lülid ja, järelikult, mida suurem on nende arv; katse näitab siiski, et nende mõõtmiste tegelikul teostamisel ei ole kasulik võtta väga väikesi lülisid, sest siis hakkavad tulemusele tunduvalt mõju avaldama üksikute lülikeste mõõtmisel paratamatult tehtavad vead. Kitsendav tingimus kõvera «sujuvuse» kohta on tarvilik, sest küsimuse detailsem analüüs näitab, et leidub pidevaid kõveraid lõpmatu pika kaarega; selline on näiteks kõvera $y = x \sin \frac{1}{x}$ iga kaar, mis sisaldab punkti $x = 0$ ja $y = 0$.

Soovides seda primitiivset pikkuse mõõtmisviisi täpsustada, satutakse kõigepealt vajadusele täpselt määrata, mis on kõvera kaare pikkus, eriti, mis on ringjoone kaare pikkus. Ühikuga ühismõõdulise sirglõigu pikkus on arv, mis näitab, mitu korda pikkusühik või selle mingi osa mahub sellesse lõiku. Samasugune lähenemine kaare pikkuse küsimusele ei ole võimalik, sest ühtki sirgjoone lõiku ei saa kaarega ühtivaks teha. Kui ütelda, et kaare pikkus on selle kaare sirgestamisel saadava lõigu pikkus eeldusel, et see kaar on painduv ja venimatu, siis paratamatult otsekohe tekib küsimus selle kohta, mis on venimatu kaar. Kui ütleme, et mingi niit või pillikeel on painduv, kuid venimatu juhtumil, kui selle kuju on muudetav ilma et pikkus muutuks, siis eeldame, et kõvera pikkuse mõiste on juba määratud ja satume niiviisi «pahelisse ringi». Kõvera kaare pikkus defineeritakse piirväärtusena, millele läheneb kaare sisse joonestatud ja sellega ühiseid otspunkte omava murdjoone pikkus juhtumil, kui murdjoone iga lüli pikkus lüheneb nullile (muidugi eeldusel, et see piirväärtus on olemas). Ringjoone pikkuse küsimuse tavaline käsitlus lähtubki sellest definitsioonist: esmalt tõestatakse tuntud laused hõlmavast murdjoonest ja kumerast hõlmatavast murdjoonest, siis lause antud kaare sisse joonestatud korrapäraste murdjoonte pikkuste järjendi monotoonsusest eeldusel, et nende lülide arv järjest kahekordistub, ja lõpuks lause selle kohta, et nende pikkuste järjend on ülalt tõkestatud. Järeldades siit, et sel järjendil on olemas piirväärtus, nimetatakse see selle kaare pikkuseks, s. t. kaare pikkuse mõiste defineeritakse selle

piirväärtusena, märkides antud definitsiooni täielikku kooskõla selle intuitiivse kujutlusega kaare pikkusest, millest kõneldi eespool. Et käsitlus oleks täielik, on tarvis veel tõestada, et see piirväärtus ei sõltu sellest, mitu lüli on korrapärasel murdjoonel, mille pikkus oli järjendi esimeseks liikmeks: esimese korrapärase murdjoone võime võtta meelevaldse lülide arvuga ja alustada selle kahekordistamisest; kõigil niisuguseil järjendeil on üks ning sama piirväärtus, nagu saab tõestada. Koolikäsitlusest jäetakse see tõestus välja, piirdudes ainult selle võimalikkuse märkimisega, samuti nagu jäetakse välja tõestus selle kohta, et sama piirväärtust omab mitte ainult korrapäraste, vaid igasuguste antud kaare sisse joonestatud murdjoonte pikkuste järjend, kui ainult nende iga lüli tõkestamatult läheneb nullile. See lause on tarvilik selleks, et näidata kaare pikkuse aditiivsuse omadust (kui kaar AB jaotada kaheks osaks: AC ja CB ning leida kaarte AC, CB ja AB pikkused, siis selgub, et pikkus AB on võrdne pikkuste AC ja CB summaga). Peale sissejoonestatud murdjoonte on väga soovitav vaadelda veel ka ümberjoonestatud murdjooni. Nii saadakse kaks järjendit: üks kasvav ja ülalt tõkestatud, teine kahanev ja alt tõkestatud, mille ühine piirväärtus loetaksegi kaare pikkuseks. Edasi läheb kõik ilma eriliste raskusteta: näidatakse, et ringjoone pikkuse suhe tema diameetriga on jääv, tuletatakse ringjoone ja tema kaare pikkuse valemid ja antakse π arvutamise idee. Ringjoone kaare pikkuse küsimuse laitmatut käsitlust ei ole IX klassis täielikult võimalik teostada. On soovitav siiski anda kõigi siia kuuluvate lausete täpsed formulatsioonid koos nende mõtte selgitamisega näitlike erinäidete varal. Asja sisu selgitamisele ja meelespidamise püsivusele aitab väga kaasa kasutatud järjendite esimese kahe-kolme liikme tegeliku arvutamise teostamine. Kui võtta ringjoone sisse joonestatud korrapärane kuusnurk ja ümber joonestatud ruut (joonis 36), siis otsekohe jõuame võrratuste $3 < \pi < 4$ juurde. Kasutades valemeid:



Joon. 36.

$$a_{2n}^{n} = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - 0{,}25a_n^2} \text{ ja } b_n = a_n r : \sqrt{r^2 - 0{,}25a_n^2},$$

mis väljendavad kahekordistatud külgede arvuga korrapärase sissejoonestatud hulknurga külje pikkust ja endise külgede arvuga korrapärase ümberjoonestatud hulknurga külje pikkust, võtame järjestikku $n = 6, 12, 24, \ldots$ ja saame, eeldusel, et $r = 1$:

$a_6 = 1{,}0000\ldots$	$b_6 = 1{,}1547\ldots$	$3{,}000\ldots < \pi < 3{,}464\ldots$
$a_{12} = 0{,}5176\ldots$	$b_{12} = 0{,}5358\ldots$	$3{,}105\ldots < \pi < 3{,}214\ldots$
$a_{24} = 0{,}2610\ldots$	$b_{24} = 0{,}2632\ldots$	$3{,}132\ldots < \pi < 3{,}158\ldots$
$a_{48} = 0{,}1308\ldots$	$b_{48} = 0{,}1310\ldots$	$3{,}139\ldots < \pi < 3{,}144\ldots$
$a_{96} = 0{,}0654\ldots$	$b_{96} = 0{,}0654\ldots$	

Sellega on otsitava arvu π tervete, kümnendike ja sajandike numbrid täiesti määratud: täpsusega kuni sajandikeni on see arv 3,14. Arvutamist tuleb siin teostada vigade range arvestusega, leides küllaldase arvu varunumbreid täpsuse kadu vältimiseks lahutamisel. Kui esimeste sammude täpsust küllaldaselt tõsta, siis saab arvutamist ka jätkata; π jaoks saab väärtuse 3,14159265... Täiesti piisav on meeles pidada tema ümardamise tulemus viie tüvenumbriga (nelja kümnendkohaga), nimelt $\pi \approx 3{,}1416$. Sellele arvule vastab J. Perelmani poolt näidatud kergesti meeldejääv fraas: «Что я знаю о кругах?» Loendades tähtede arvu selle lause järjestikustes sõnades, saame π ligikaudse väärtuse järjestikused numbrid. Selle lähendi täpsus on õige suur ja ületab tavalise praktika nõuded kaugelt. Arvutades selle π väärtuse abil näiteks 10-meetrise diameetriga ringjoone pikkust, saame vea, mis on vähem kui 0,08 mm. Tuleb meeles pidada ka mõnus «Archimedese» π väärtus $\left(3\frac{1}{7}\right)$, mis nii väikese nimetaja juures annab isegi mitte 0,002-ni küündiva vea.

Mõned õpetajad praktiseerivad arvu π ligikaudset arvutamist trigonomeetriliste funktsioonide rakendamisega. Ringjoone sisse raadiusega 1 joonestatud korrapärase n-nurga külg võrdub $2 \sin \alpha$, kus $\alpha = 180° : n$, ja ümber joonestatud n-nurga külg $2 \tan \alpha$. Võttes näiteks $n = 100$, saame $\alpha = 1°48'$ ja neljakohalise tabeli järgi leiame, et ringjoone, mille raadius on 1, sisse joonestatud korrapärast sajanurga poolümbermõõtu on ligikaudu võrdne 3,14, millega ligikaudu on võrdne ka ümberjoonestatud sajanurga poolümbermõõtu. Arvestades neljakohalistes tabelites antud väärtuste suurima võimaliku veaga, jõuame järeldusele, et $3{,}135 < \pi < 3{,}145$. Leides nurga $1°48'$ siinuse ja tangensi täpsemate tabelite [V, 18] järgi, saame võrratused $3{,}14105 < \pi < 3{,}14855$. Sel π ligikaudsel arvutusviisil on ülalpool vaadelduga võrreldes kahtlemata eeliseid, sest ta on hoopis lühem ja täielikult teostatav õpilaste endi poolt. Tema vastu vaieldes näidatakse, et ta sisaldab «pahelist ringi»: π arvutamine toimub enne trigonomeetriliste tabelite koostamist. Ajalooliselt on see nii, kuid nende tabelite koostamine on võimalik ka ilma eelneva π arvutamiseta (vt. esimest kolmest viisist, mis on käsitletud tagapool, viienda osa § 24).

Koolipraktikas tuleb õige tihti arvutada avaldisi, mille kuju on $a\pi$ või $a : \pi$, kus a on mingi antud arv, ja andestamata on, kui õpetaja ei kasuta ära seda ökonoomiat, mida neil juhtumeil annab π korrutiste tabeli, s. o. ringjoone pikkuste tabeli kasutamine, mis leidub IX klassi õpilastel olevas tabelite kogus.

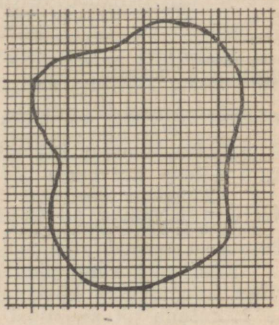
Ringjoone pikkuse küsimuse täielik käsitlus, mis on mõeldud mitte õpilase, vaid õpetaja jaoks, leidub artiklis [IV, 55]. Käsitlus, mis pole rajatud piirväärtuse mõistele, vaid Cantori aksioomi rakendamisele, on antud raamatus [IV, 48].

Pöörame õpetaja tähelepanu sellele, kui tulus on ringjoone kaare pikkusele ülesandeid lahendades kasutada radiaanmõõdu tabelit,

millega õpilased tavaliselt tutvuvad alles trigonomeetria kursuses. Tähistades n-kraadise kaare radiaanmõõdu sümboliga Arc $n°$, saame Arc $n° = \frac{\pi n°}{180°}$ ja valem $s = \frac{\pi r n°}{180°}$, mis seob raadiust r, kaare pikkust s ja selle kraadimõõtu n, võtab lihtsama kuju $s = r \text{ Arc } n°$. Võtame näitena ülesande, mis on lahendatud Kisseljovi geomeetria õpikus koolidele (§ 240 1948. a. trüki j.): «Arvutada täpsusega kuni 1 mm niisuguse ringjoone raadius, mille kaar, mis sisaldab 81°21′36″, võrdub 0,452 m″. Neljakohalise radiaanmõõdu tabeli järgi leiame, et Arc 81°21′36″ = 1,4200, ja seetõttu $0{,}452 = 1{,}4200\,r$, millest $r = 0{,}452 : 1{,}42 = 0{,}318$ m. Siin oleks nurk tulnud anda mitte sekundeis, vaid ainult minuteis (81°22′), mis lõppvastust ei oleks mõjutanud (Arc 81°22′ = 1,4201, $r = 0{,}452 : 1{,}4201 = 0{,}318$ m), kuid oleks kõrvaldanud ülesandes esineva terava mittevastavuse täpsuste vahel, millega on antud kaare pikkus ja selle radiaanmõõt (0,0005 moodustab arvust 0,452 ligikaudu 0,1%, kuid 0″,5 arvust 81°21′36″ ainult 0,00016%). Keskkooli õpilastel ei tule kunagi mõõta nurka täpsusega kuni sekunditeni; juba täpsust kuni kraadi kümnendikuni on koolis raske saavutada ja peaaegu kõigi koolis esinevate arvutuste puhul on täiesti võimalik mitte minna minuteist kaugemale.

§ 21. Ringi pindala.

Isegi ristküliku pindala valemi üldistamine juhtumile, kus tema küljed on ühikuga ühismõõduta, nõuab, nagu nägime eespool, § 19 korrutise piirväärtuse teoreemi rakendamist. Piirväärtuse mõiste on tarvilik ka selleks, et vastata küsimusele, mis on meelevaldse kontuuriga piiratud kujundi pindala. Ka siin on aluseks primitiivne kujutlus selle kontuuri sees olevate ruutühikute ja nende osade arvust. Milline ka oleks see kontuur, teda saab alati katta ruutude võrguga, kus ruudu külge on 1 cm, ja loendada kontuuri sees täielikult asetsevate ruutude arv s_1 ja ka vähemalt osaliselt kontuuri sees olevate ruutude arv S_1 (joonisel 37 $s_1 = 4$ ja $S_1 = 16$). Siirdudes ruutsentimeetreilt ruutmillimeetrite juurde, saame kaks uut arvu: s_2 ja S_2, millest esimene näitab, mitu ruutu pindalaga 1 mm² asetseb täielikult kontuuri sees, ja teine näitab, mitu samasugust ruutu on vähemalt osaliselt kontuuri sees (joonisel 37 $s_2 = 711$ ja $S_2 = 813$). Kasutades edasi ruute külgedega 0,1 mm, 0,01 mm jne., saame kaks arvude järjendit, millest üks s_1, s_2, s_3 ... — on kasvav ja ülalt tõkestatud, teine — S_1, S_2, S_3, ... — kahanev ja alt tõkestatud. Mõlemad järjendid koonduvad, ja kui neil leidub ühine piirväärtus A, siis



Joon. 37.

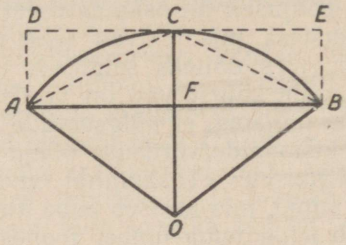
see piirväärtus loetaksegi vaadeldava kontuuri sees oleva tasapinna osa pindala mõõduks. Et anda pindalade mõõtmise täielik teooria, on vaja kindlaks teha tingimus, mille puhul see ühine piirväärtus A on olemas, kindlaks teha tema sõltumatus sellest, kuidas oli ehitatud ruutude võrk kujundi suhtes, tuleb näidata, et lähtudes sellest uuest, üldistatud pindala mõistest saab ristküliku ja teiste hulknurkade puhul samad valemid, mis olid saadud varem, ja siis juba asuda ringi pindala arvutamisele. Samuti, nagu ringjoone pikkuse küsimuse tundmaõppimisel, käsitletakse keskkoolis ka ringi pindala küsimust ilma nende peensuste valgustamiseta. Vaadeldakse ringjoone sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade pindalade kasvavat järjendit, mis saadakse eeldusel, et hulknurga külgede arv kahekordistub, ja tehakse kindlaks, et ta on ülalt tõkestatud ning omab seega piirväärtust, mis definitsiooniga loetaksegi ringi pindalaks. Kui lisaks sellele tõestada, et ringjoone sisse joonestatud korrapärase hulknurga apoteem hulknurga külgede arvu tõkestamatul kahendamisel läheneb piirväärtusele, mis on võrdne raadiusega, siis korrapärase hulknurga pindala valemist saab piirile üleminekul otsekohe valemi $K = \pi r^2$. Selle praktilistes rakendustes on sagedamini antud või küsitud diameeter $d = 2r$ kui raadius r, mistõttu kõrvuti eelmisega on sobiv kasutada ka valemit $K = 0{,}25\,\pi d^2$. Lahendades ülesandeid ringi pindala arvutamiseks, võimaldab õpilastel käepärast olevas matemaatiliste tabelite kogus leiduva ringi pindala tabeli kasutamine suurt aja ja jõu kokkuhoidu. Olgu näiteks vaja leida ringi raadius r tema antud pindala $K = 45$ cm² järgi. Lihtne sellest tabelist otsimine annab otsekohe, et $d = 7{,}569$ cm, kust $r = 3{,}784$ cm. Tabeleid mitte kasutades tuleb teostada kaks tehet: 45 jagamine arvuga 3,142, mis annab $r^2 = 14{,}322$ cm², ja ruutjuure leidmine viimasest arvust, mis annab 3,785 cm, ja mõne sekundi asemele tuleb kulutada minuteid.

Lahendades ülesandeid ringi sektori pindala leidmiseks, saab arvutusi oluliselt lihtsustada, kui kasutada kesknurga radiaanmõõtu, s. t. kui valem $S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ}$ kirjutada kujul $S = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc} n^\circ$, kus $\operatorname{Arc} n^\circ$ on n-kraadise nurga radiaanmõõt, ja kasutada radiaanmõõdu tabelit.

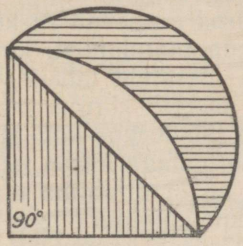
Kisseljovi geomeetria õpikus koolidele on ilma tuletamiseta antud kaks ligikaudset valemit ringi segmendi pindala arvutamiseks. Neist esimest, nimelt valemit $S_{seg} = \frac{2}{3} bh$ on kergeim tuletada selle kaalutluse alusel, et segment $AFBC$ (vt. joonist 38) sisaldab enam kui poole ristküliku $ABED$ pindalast, kuid vähem kui kogu see pindala; selle ligikaudseks väärtuseks on loomulik võtta $\frac{2}{3}$ ristküliku pindalast. Täpsemaid tulemusi annab matemaatilise analüüsi kursusest tuntud siinuse ja koosinuse ridade kasutamine.

Käsitledes ringi pindala küsimust, ei saa mööda minna väga populaarsest ringi kvadratuuri küsimusest, vaid tuleb näidata selle täpset küsimusseadet ja toonitada, et küsimust saab arvutusmeetodiga kergesti lahendada kuitahes suure täpsusega. Huvi ringi täpse kvadratuuri teostamise vastu konstruktsioonimeetodil ainult sirklit ja joonlauda kasutades tõuseb seetõttu, et juba antiik-

ajal oli teada, et niisugune kvadratuur on võimalik mõnede keerukamate kujundite puhul, mis on piiratud ringi kaartega. Näiteks kerge on veenduda, et viirutatud osade pindalad joonisel 39 on võrdsed ja seetõttu seal kujutatud «kuusirbi» täpne kvadratuur on sirkli ja joonlaua abil võimalik. Ringi kvadratuuri ülesande konstruktiivne lahendamine osutub võimalikuks, kui lubada



Joon. 38.



Joon. 39.

mingi muu sobiva riista kasutamist (peale sirkli ja joonlaua). Nii näitas juba Leonardo da Vinci, et omades silindrit põhja raadiusega r ja kõrgusega $\frac{1}{2}r$, on kerge konstrueerida ristkülikut külgedega $2\pi r$ ja $\frac{1}{2}r$, mille pindala on πr^2; selle ristküliku saab silindri veeretamisel ühe täispöörde võrra mööda tasapinda.

VI peatükk.

STEREOMEETRIA KÄSITLEMINE.

§ 22. Stereomeetriliste küsimustega töötamise iseärasused.

Õpilased tegelevad stereomeetria õppimisega IX klassis (pärast korrapäraste hulknurkade, ringjoone pikkuse ja ringi pindala kohta käivate planimeetria osade läbivõtmist) ja X klassis (kogu aasta). Pidades stereomeetria alal töötades silmas samu ülesandeid, mida planimeetria alal töötades, nimelt geomeetriliste faktide tundmaõppimist, loogilise mõtlemise harjumuste kasvatamist, ruumikujutluse arendamist ja oskust rakendada teoreetilisi teadmisi mitmesuguste praktilise elu ja teiste teaduste poolt seatud geomeetriliste ülesannete lahendamiseks, satub õpetaja seejuures selle kursuse järgmistele iseärasustele.

1. Stereomeetria kursuse ülesehitamine toimub eeldusel, et planimeetria kursus on täielikult omandatud. Muidugi toimub keskkooli matemaatika kursuse iga osa ülesehitamine kõige varem läbivõetu baasil, kuid kõik planimeetria õppimisel jäänud lüngad annavad end stereomeetria õppimisel eriti valusasti tunda, hoopis tugevamini kui näiteks lüngad aritmeetika tundmises algebra õppimisel. Õppides stereomeetriat tuleb kogu aeg tagasi pöörduda planimeetria juurde, nõudes, et õpilased kordaksid seda, mis on iga uue

küsimuse või ülesande mõistmiseks tarvilik. Õppides stereomeetriat peab IX ja X klassi õpilastel teatmete nõutamiseks alati olema käepärast planimeetria õpik.

Stereomeetriliste ülesannete lahendamisel taandub küsimus kõige sagedamini mingi planimeetrilise ülesande lahendamisele, ja õpilased tunnevad raskusi kahel põhjusel: nii oskamatusest teostada seda taandamist, kui ka raskustest, mis tekivad selle planimeetria ülesande lahendamisel. Soovides näiteks selgusele jõuda, kuidas asetseb kõrgus püramiidil, mille külgservad on võrdsed ja põhjaks täisnurkne kolmnurk, peame taipama, et külgservade võrdsus toob endaga kaasa nende projektsioonide võrdsuse põhja tasapinnal, nii et ülesanne taandub järgmisele: «Tasapinnal on antud täisnurkne kolmnurk ja tuleb leida punkt, mis asetseb tema kolmest tipust võrdseil kaugustel, s. t. tuleb leida tema ümber joonestatud ringjoone keskpunkt.» On selge, et õpilane, kellele selle lihtsa planimeetria ülesande lahendamine teeb raskusi, ei tule toime ka mainitud stereomeetrilise ülesandega, ja et stereomeetriliste ülesannete edukaks lahendamiseks on vaja tihti tagasi pöörduda planimeetria ülesannete juurde.

2. Tegeldes planimeetriaga kasutavad õpilased igal sammul jooniseid, mis annavad selge kujutluse tundmaõpitavaist objektidest. Olukord stereomeetrias oleks analoogiline, kui kasutaksime mudeleid niisama laialdaselt nagu jooniseid, mis siiski pole ei võimalik ega ka soovitav, sest ruumikujutlus areneks siis halvasti. Mudelite asemel kasutatakse püsivalt jooniseid, mis ei kujuta uuritavat objekti ennast, vaid tema kujutist tasapinnal, ja nii nende jooniste tegemisel kui ka nende kasutamisel tekib rida raskusi, millest kõneldakse järgmises paragrahvis. Mis puutub mudelite tarvitamisse, siis teoreetiliselt arutledes tuleb siin karta kaht vastandlikku äärmust: mudelite puudulik kasutamine, mille puhul õpilased ei saa tundmaõpitavaist objektidest selgeid kujutlusi ja kõik nende teadmised osutuvad vaid formaalseiks, mitterakendatavaiks ja ebapüsivaiks, ja ülemäärane mudelite rakendamine, mille puhul õpilased ei harjuta ega arenda oma võimet näha uuritava objekti kõiki detaile nii-ütelda vaimse pilguga. Teist ohtu tegelikult ei ole olemas, sest mudelite ehitamine ja valmis mudelite hankimine on ühenduses õige suurte raskustega, kuid esimene oht on õige reaalne. Tarvis on, esiteks, laialdaselt kasutada meid ümbritseva maailma esemeid, näidates tundmaõpitavaid ruumikujundeid nende juures. Veel tähtsam on välja kujundada oskus vajaduse korral kiiresti luua mudel käepärast olevast materjalist. Nii on kahe kiivsirge vahelise lühima kauguse küsimuse esmakordsel käsitlemisel väga kasulik kujutada üht neist sirgeist kriidiga tahvlil, teist sobival viisil paigutatud joonlaua serva abil, ja siis kasutada kartongi-, vineeri- või klaasitükke selleks, et näitlikult kujutada neid tasapindu, millest kõneldakse küsimuse lahendamisel. Toonitame, et see käib ainult antud küsimuse alase töö esimese staadiumi kohta; teine staadium — teha joonis, mis tasase kujundi abil annaks õige

kujutluse punktide, joonte ja tasapindade asetusest ruumis — kulgeb võrratult paremini sel puhul, kui esimeses staadiumis kasutati mudelit. Kolmas staadium, kus õpilased, kujutledes selgesti kogu ruumilist kujundit, ei kasuta ei mudelit ega joonist, viib lõpule küsimuse täisväärtusliku käsitluse, ja tuleb püüda viia kõik õpilased selle kolmanda staadiumini, mida muidugi kõik ei saavuta ühel ning samal ajal.

3. Planimeetriaga tegeldes teevad õpilased omad järeldused enamikul juhtumeil esmalt ainult intuitsiooni põhjal: loogiline arutlus asub oma õigustesse alles pärast seda, kui intuitsioon on ette ütelnud ühe või teise arvamuse, ja arutluse ülesandeks on kas tõestada selle arvamuse õigsust või see kummutada. Üldiselt sama vahekord intuitsiooni ja loogika vahel leiab aset ka stereomeetria õppimisel, kuid loogika osa on siin siiski juba mõnevõrra suurem, nagu see vastab ka IX ja X klassi õpilaste eale. Siin võib kogu töö loogilise külje suhtes esitada eelmiste klassidega võrreldes kõrgendatud nõudmisi, taotledes kõigi möödunud aastaist jäänud lünkade täielikku kõrvaldamist nii õigete definitsioonide andmise, klassifikatsiooni teostamise, iga lause sisu analüüsimise, põhjendatud järelduste tegemise, pikemate või lühemate arutluste õige läbiviimise ja eelduste täpse seadmise oskuse osas.

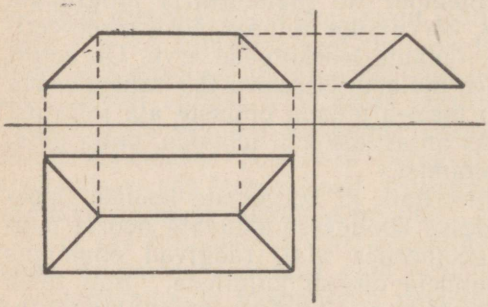
4. Stereomeetria kursuse programm eeldab uue materjali omandamise alal kiiremat töötempot kui planimeetria programm. Sellele järeldusele võib jõuda, kõrvutades selleks tööks reserveeritud tundide arvu ja vastavate õpikute lehekülgede arvu. On selge, et stereomeetria õppimisel tuleb õpilaste iseseisva töö suhtes seada suured nõudmised, kuid tuleb meeles pidada õpilaste aja piiratust ja väga hoolega kogu koduseks antav töö läbi mõtelda, mitte lubades kalli aja ebatootlikku kulutamist.

5. Kaebused, mis eksamineerijate ja kõrgemate koolide õppejõudude poolt esitatakse nendesse koolidesse astuvate noorte puuduliku ettevalmistuse kohta geomeetria alal, räägivad enamikus sellest, et ei osata ruumikujundeid õigesti kujutleda. Siin tuleb ette ka õpilaste poolt kasutatavate terminite täpse mõtte otse mittetundmist (näiteks sageli märgitakse, et ei teata, mida nimetatakse sirge ja tasapinna vaheliseks nurgaks), tuleb ette ka õige kujutluse puudumist vastavat definitsiooni formaalselt teades (näiteks teades, mida nimetatakse vertikaalseiks, mida horisontaalseiks sirgeiks ja tasapindadeks, ei osata ütelda, mitu vertikaalset ja mitu horisontaalset sirget saab panna antud vertikaalsel, horisontaalsel või kaldtasapinnal läbi antud punkti, või teades, mida nimetatakse teineteisega ristuvaiks tasapindadeks, ei osata ütelda, mitu tasapinda, mis on risti ühe või kahe meelevaldselt antud tasapinnaga, saab panna läbi meelevaldselt antud punkti). Niisugused olulised puudused õpetamises tuleb kõrvaldada.

6. Oluliselt teine kui planimeetrias on stereomeetrias küsimus konstruktsioonülesannete kohta, millest kõneldakse § 24.

§ 23. Stereomeetriline joonis.

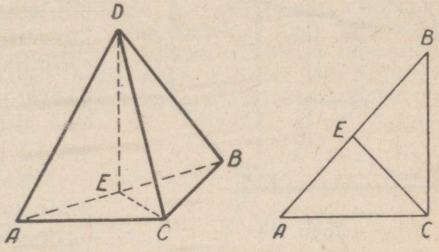
Kujutades tundmaõpitavat ruumilist kujundit tasapinnal, taotletakse seda, et esile kutsuda vaatlejas sama nägemismuljet, mille ta saaks seda kujundit otseselt vaadeldes. See kujutise näitlikkuse tagamise ülesanne astub õppetöös esikohale, kuna tehnilistes joonistes omab suurt tähtsust ka mõõtmiseks sobivuse tagamine: andmed joonisel kujutatud ruumilise kujundi kõigi detailide mõõtmete kohta peab enam või vähem lihtsalt saama mõõtmiste põhjal jooniselt. Seda mõõtmiseks sobivuse nõuet saab tagada, kui kasutada X klassi joonestamise kursuses tundmaõpitavaid ristprojektsioone (normaal- ehk ortogonaalprojektsioone) kahele või kolmele tasapinnale. Ristprojektsioonide kasutamine stereomeetria kursuses on väga soovitav; nende rakendamist kergendab veel see asjaolu, et Kisseljovi õpiku (II osa) viimaseis trükkides leidub neile pühendatud eri peatükk. Ülesannete lahendamisel saab kasutada ortogonaalset projekteerimist isegi mitte tegeldes küsimuse teoreetilise külje käsitlemisega, asendades vaadeldava ruumikujundi paljusõnalise kirjelduse vastava epüüriga, millest ülesande lahendajad võtavadki kõik vajalikud andmed. Kasutades näiteks nelja pinnaga katusega (kelpkatusega) hoone pööningu epüüri, mis on kujutatud joonisel 40, saab anda rea ülesandeid, näiteks ülesande katuse kõigi pindade üldise pindala kohta, nende joonestamise kohta loomulikul kujul (millega saab võimalikuks teha katuse mudel) ja pööningu ruumala kohta. Sedalaadi ülesannete lahendamine valmis epüüri põhjal ja samuti sõnalise kirjelduse abil antud ruumikujundi epüüri iseseisev valmistamine kahtlemata väga soodustab nii ülesande paremat mõistmist kui ka ruumikujutluse arenemist. Tegelikkuses võib sageli tähele panna stereomeetria kursuse ja joonestamiskursuse täielikku eraldatust X klassis (ja ka mujal), mis on õige kurb: nende kahe õppeaine õpetaja isegi lihtne vastastikune informatsioon töö käigust viib vastastikusele abistamisele ja mõlemapoolsele õppeedukuse tõusmisele; veel parem on, kui võetakse ühised õppeülesanded.



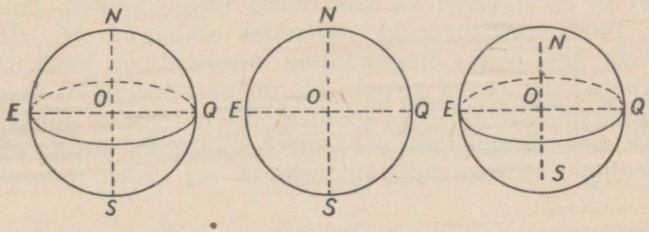
Joon. 40.

Ülimal määral saab ruumikujundi F' kujutise näitlikkust tagada tsentraalprojektsiooni kasutamisega: ruumi mingist punktist S, mis ei ühti kujundi F' ühegi punktiga ja mida nimetatakse kujutamiskeskpunktiks, tõmmatakse sirged kujundi F' kõigisse punktidesse ja pikendatakse neid kuni lõikumiseni joonisepinnaga, millel niiviisi saadakse teatav kujund F, mis vaatlemisel punktist S tekitab

sama nägemismulje, nagu kujund F'. Niisuguse perspektiivse joonise (joonistuse) valmistamine pakub teatavaid raskusi ja leiab geomeetria kursuses võrdlemisi harva rakendamist, seda enam, et mõõtmine sellise joonise järgi on kaunis raske. Peaaegu niisama näitlik nagu perspektiivne joonis on tavaliselt stereomeetria õpetamisel rakendatav «kabinetprojektsioon», mis kujutab endast nn. aksonomeetria erijuhtumit: joonisepinnaga paralleelsed lõigud ja nurgad kujutuvad selles loomulikus suuruses ühes sihi säilitamisega ja temaga ristuvad lõigud kujutuvad vähendatult (harilikult kaks korda) nurga alla 45° või 60°. Olukorda mõnevõrra lihtsustades võib asja kujutleda nii, nagu vaadeldav ruumikujund oleks valgustatud eest kõrvalt tulevate paralleelsete kiirtega ja heidaks ekraanile oma varikujutise, kusjuures ekraan ei asetse risti kiirtega, nagu ristprojektsiooni korral, vaid kaldu nende suhtes. Võimalus valida üht paljudest kujundi asenditest ekraani (joonisepinna) suhtes lubab saada võimalikult suurt näitlikkust tagava kujutise F. Joonisel 41 näeme vasakul selle püramiidi kujutist kabinetprojektsioonis, millest kõneldi eespool (§ 22 alguses). Kasutades ainult seda joonist võib ütelda, et selle püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk täisnurgaga tipu C juures, et püramiidi kõrgus DE läbib keskpunkti paremal eraldi loomulikus suuruses kujutatud põhja kolmnurga hüpotenuusil AB, et külgservade AD, BD ja CD projektsioonid põhja tasapinnale, s. o. lõigud AE, BE, CE on võrdsed ja et seetõttu ka kõik kolm külgserva on võrdsed.



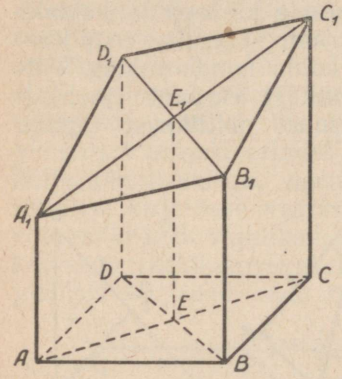
Joon. 41.



Joon. 42.

Ühtedes joonistes ristprojektsiooni ja teistes kabinetprojektsiooni ja teiste aksonomeetriliste projektsioonide kasutamine on täiesti lubatav ja soovitav, kuid ei ole hea, kui mingi joonise mõned elemendid on tehtud ühes, teised teises projektsioonis, või ühes ning

samas projektsioonis, kuid kujundi F' erinevais asendeis joonisepinna suhtes, nagu see õige sageli esineb. Nii on joonisel 42 vasakul kujutatud kera ühes tema ekvaatoriga EQ ja selle tasapinnaga ristuva teljega NS. Telje niisuguse kujutise võib saada ainult ristprojektsiooni korral, kusjuures telg peab asetsema joonisepinnaga paralleelselt. Võib lugeda, et kera on valgustatud joonisepinnaga ristuvate kiirtega; kera kontuur kujutub sel tasapinnal ringina ja kera iga diameeter, mis joonisepinnaga on paralleelne, kujutub ringi diameetrina. Kuid niisuguse projektsiooni korral ekvaator kujutub mitte ellipsina, nagu ta on kujutatud joonisel 42 vasakul, vaid diameetrina EQ, mis on risti teljega NS, nagu see on näidatud joonisel 42 keskel. Kuid see õige joonis ei ole ilmekas. Et ilmekust säilitades kõrvaldada viga, võib kasutada jällegi ristprojektsiooni, kuid kera diameeter NS võtta kaldu joonisepinna suhtes: tema ülemine ots N asetseb kera nähtaval, s. o. eesmisel poolel, alumine ots S — nähtamatul (tagumisel) poolel. Niisugust õiget ja küllalt ilmekat kujutist näeme joonisel 42 paremal.



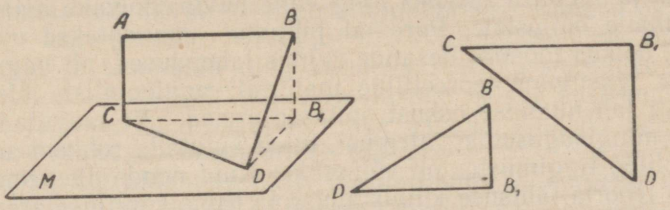
Joon. 43.

Üksikasju stereomeetriliste jooniste paremate valmistusviiside kohta õppetöös võib leida raamatus [IV, 58b, c], mille juurde lugeja juhimegi. Märgime veel ainult ühe vea, mis koolis joonistel esineb: sageli võetakse meelevaldselt joonise niisugused elemendid, mis on täiesti määratud tema teiste elementidega. Olgu nõutud kujutada näiteks hulktahukas, mille saab, kui risttahukas lõigata tasapinnaga, mis pole paralleelne põhjaga, ja üks osa risttahukast kõrvaldada. Külgservade ja lõiketasapinna kolm lõikepunkti, näiteks punktid A_1, B_1 ja C_1 joonisel 43 võib võtta meelevaldselt, kuid neljas punkt D_1 tuleb konstrueerida, tõmmates abilõigud AC, BD, A_1C_1, EE_1 ja B_1E_1, sest põhja diagonaalide lõikepunkt ja lõike diagonaalide lõikepunkt asetsevad sirgel, mis on paralleelne külgservadega. Midagi analoogilist esineb ka joonisel 42 (paremal); punkti N asukoha valik määrab täielikult nii punkti S asukoha kui ka ekvaatorit kujutava ellipsi väikese telje pikkuse.

Juhtumeil, kus on põhjust kahelda, kas õpilased täiesti selgesti kujutlevad üht või teist ruumilist kujundit, on väga soovitav mitte piirduda joonisega, mis kujutab kujundit mingis ühes projektsioonis, vaid teha mitu joonist kujundi erinevate asendite juures joonisepinna suhtes või isegi erinevate projekteerimisviiside juures. Eriti aitavad kujutluste selgust tagada eri joonised, mis moonutamata kujul kujutavad üldise joonise detaile (näiteks üksikuid tahke või lõikeid). Lahendades näiteks ülesannet nr. 22 Rõbkini ülesannete kogust § 3 (II osa, 1948. a. trükk), on soovitav mitte piirduda seal toodud selgitava joonisega, mis on reprodutseeritud joonisel 44 (vasakul), vaid soovitada

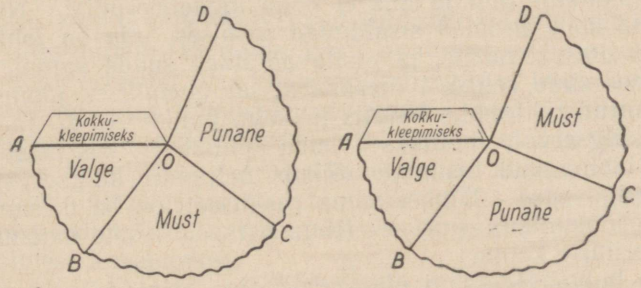
õpilastel joonestada ilma perspektiivi moonutusteta kolmnurgad BB_1D ja B_1CD, nagu see on näidatud joonisel 44 (paremal).

Tuleb siiski tunnistada, et olgu ruumikujundeid tasapinnal kujutavad joonised kui tahes head, ikka esineb õpetamispraktikas küllalt juhtumeid, kus



Joon. 44.

kujutluse täit selgust saab tagada ainult mudeli vaatlemisega. Selline on olukord näiteks kolmetahuliste nurkade võrdsuse ja sümmeetria küsimuse selgitamisel. Ükski joonis ei anna siin seda, mis annavad kaks primitiivset paberist mudelit, mille õpetaja (ja hiljem ka iga õpilane) valmistab tugevamast paberitükist mõne minutiga: joonestanud sellel kaks joonisel 45 kujutatud pinnalaotust, lõigatakse need välja, murtakse kokku ja kleebitakse (või õmmel-



Joon. 45.

dakse) kinni nii, et kiired OA ja OD ühtivad. Selle töö teinud õpilased veenduvad imestusega, et tasanurkade võrdsus ei taga veel kolmetahuliste nurkade võrdsust, ja peavad sümmeetriliste kolmetahuliste nurkade olemasolu võrdlematult kindlamalt meeles kui üksinda arutluse ja valmis joonise vaatlemise puhul.

§ 24. Konstruktsioonülesanded stereomeetrias.

Ülesanded, mida tavaliselt nimetatakse konstruktsioonülesandeiks ruumis, omavad planimeetrilisist konstruktsioonülesandeist oluliselt erinevat iseloomu. Nagu teada (vt. näiteks Kisseljovi geomeetria õpiku § 6, II osa, 1949. a. trükk) ei toimu nende tavalisel

lahendamisel tegelikult mingit konstrueerimist ja ainult asjakohase arutluse teel selgitatakse, kuidas küsimus taandada lõpliku arvu põhikonstruktsioonide teostamisele. Niisuguse küsimusseade puhul muutub ruumilise konstruktsioonülesande lahendamine õige abstraktseks ja seetõttu raskeks ning vähe huvipakkuvaks asjaks isegi tugevamaile õpilastele. Paremal juhtumil omandatakse mõne niisuguse, õpikus toodud ülesande valmis lahendused, nii nagu omandatakse igasugune teoreetiline materjal; analoogiliste ülesannete iseseisva lahendamise oskust õpilased ei saa. Et saavutada selles suunas mingisuguseidki tulemusi, tuleb kulutada rohkem aega, kui see koolitöö tingimustes on võimalik. Kuid nende ülesannete suur väärtus teooria tähtsuse kinnistamise ja ruumikujutluse arendamise seisukohalt on vaieldamatu ja neid võib tungivalt soovitada lisatööde materjalina tugevamaile õpilastele ja ettekannete teemadena matemaatikaringis, kusjuures töö eduks aitab palju kaasa ka kõige primitiivsemate mudelite valmistamine, s. t. nende tinglike konstruktsioonülesannete ka ainult osaline muutmine konstruktsioonülesandeiks selle sõna päristähenduses. Alustada võib kahe kiivsirge ühise ristsirge konstrueerimise ülesandega, mille lahendus on õpikus antud.

Kuid saab näidata kui palju tahes konstruktsioonülesandeid ruumis, mis tegelikult lahendatakse konstrueerimise teel tasapinnal sirkli ja joonlaua abil ja mis ei nõua modelleerimist. Niisuguste ülesannete kõik andmed sisalduvad joonises, mis on tehtud ühes või teises projektsioonis, ja otsitavad tuleb saada samal joonisel. Üks lihtne näide sellisest ülesandest on ühenduses joonisega 43, siin on antud risttahuka kujutis ja kolm punkti A_1, B_1 ja C_1 tema kolmel külgserval, nõutakse leida punkt D_1, kus neist kolmest punktist läbipandud tasapind lõikub neljanda külgservaga (või selle pikendusega). Umbes sama raskusega on ka ülesanne lõike $A_1B_1C_1D_1$ loomulikus suuruses (ilma perspektiivsete moonutusteta) konstrueerimise kohta.

Suure hulga sedalaadi ülesandeid õige erineva raskusega võib leida raamatuist [IV, 15, 25, 50] ja raamatuist ning artikleist [IV, 58].

Niisuguste ülesannete ühe eriliigi moodustavad kujutava geomeetria ülesanded, kus andmed on antud epüüril ja epüüril tuleb saada ka otsitavad. Mõned lihtsamad seda liiki ülesanded on lahendatud Kisseljovi geomeetria õpiku peatükis 2. Paljude niisuguste ülesannete lahendamine on ette nähtud joonestamise kursuse programmis ja vastastikune ülesannete vahetamine geomeetria õpetaja ja joonestamise õpetaja vahel on siin eriti soovitav.

Konstruktsioonülesannete lahendamine ruumis nõuab arusaadavalt hoopis enam pingutust kui tasapinnal. Kui õpilased ei tule nendega toime, siis tuleb kontrollida, kas nad oskavad lahendada vähemalt lihtsamaid konstruktsioonülesandeid tasapinnal, pühendada teatud aeg kordamiseks ja nende teadmiste ning oskuste täiendamisele selles osas, pöördudes siis juba suuremate väljavaadetega edule tagasi ülesannete juurde ruumis.

§ 25. Sirged ja tasapinnad ruumis.

Peatükk «Sirged ja tasapinnad» tuleb õppimisele IX klassis ning moodustab oma materjali ulatuse ja selle õppimiseks reserveeritud aja poolest peaaegu poole kogu stereomeetria kursusest. See tingimata tarvilik stereomeetria koolikursuse esimene osa kujutab endast kogumit suurest hulgast üksikküsimustest, mis puudutavad sirgeid ja tasapindu ning nende vastastikust asetust ruumis ning esitatakse tavaliselt nii, et õpilastele selget süsteemi nende õppimise järjekorrast ei kujune. See asjaolu oluliselt suurendab niigi suure materjali omandamise raskust.

Materjali korraldamine hästi ülevaatlikuks ja kergesti meeldejäävaks süsteemiks, kasvõi selle kordamiselgi, väga soodustab selle püsivat meelespidamist. Võib soovitada järgmist süsteemi: 1) sirge ruumis, 2) tasapind, 3) kahe sirge vastastikune asend, 4) kahe tasapinna vastastikune asend, 5) sirge ja tasapinna vastastikune asend, 6) kolme ja enama sirge vastastikune asend, 7) kolme ja enama tasapinna vastastikune asend.

Kui see süsteem vastu võtta, siis kogu õpikus esitatav materjal ei tekitaks enam muljet nagu süsteemitu küsimuste kogum, milles küsimused on küll üksteisega seotud, kuid ei tulene üksteisest paratamatult selles järjekorras; selguvad ka mõned lüngad tavalises käsitluses, näiteks niisugune: missugused on kolme tasapinna vastastikuse asendi kõik võimalikud juhtumid? Tavaliselt kuulevad õpilased alles hiljem, kõrgema kooli analüütilise geomeetria kursuses, et kolm erinevat tasapinda, mille hulgas ei leidu kaht paralleelset tasapinda, kas lõikuvad ühes punktis, moodustades kaheksa ühise tipuga kolmetahulist nurka, või lõikuvad mööda ühist sirget, moodustades kuus ühise servaga kahetahulist nurka, või lõikuvad mööda kolme paralleelset sirget, moodustades prismaatilise toru ja kaksteist kahetahulist nurka, neist neli nurka iga lõikejoone juures kolmest lõikejoonest.

Käsitledes üht eraldi võetud tasapinda, alustati varem tasapinna definitsiooniga, mille järgi selleks on pind, millega ühtib iga sirge, kui ta omab sellega kaks ühist punkti. Praegusel ajal eelistatakse mitte anda tasapinna definitsiooni, lugedes see algmõistete (mittedefineeritavate mõistete) hulka ja näidates aksioomidena tasapinna põhiomadusi. Tasapinna definitsiooni asemel tuuakse rida näiteid niisuguseist asjadest, mille pind meenutab geomeetrilist tasapinda. Kujutluste selgus võidab väga, kui vaadelda mitmesuguseid võtteid, mida enam tuntud tehnikaharudes tegelikult kasutatakse tasase pinna saamiseks ja selle tasasuse kontrollimiseks. Näiteks õpilaste püsiva huvi kutsub esile tee või väljaku tasase pinna saamisviiside käsitlemine. Tasase pinna horisontaalsuse kontrollimise küsimus kuulub juba ülalpool antud skeemi teise osasse — sirge ja tasapinna vastastikuse asendi juurde — ja tekitab noortes samuti suurt huvi, sest nad kohtuvad selle küsimusega oma sport-

likel üritustel (tasapind on horisontaalne, kui ta on vertikaalsirgega risti).

Eespool oleme korduvalt märkinud, kuivõrd geomeetriaalase õppetöö produktiivsus tõuseb, kui geomeetria mõisteid ja lauseid siduda meid ümbritseva tegelikkuse faktidega, eriti inimese tööalase tegevusega. Peatükk «Sirged ja tasapinnad ruumis» annab õpetajale selleks eriti palju võimalusi. Kuidas näiteks kontrollida, et post või raadiomast on asetatud vertikaalselt? Selle küsimuse seadmine on suurepäraseks alguseks sirge ja tasapinna ristseisu kohta käivate definitsioonide ja teoreemide käsitlemisel.

Märgime, et erilist tähelepanu nõuab sirge ja tasapinna vahelise nurga definitsiooni küsimus. On tarvis taotleda esiteks seda, et õpilased selgesti mõistaksid, et tasapinda lõikava sirge ja seda lõikepunkti läbiva ning tasapinnal asetseva sirge vahelisi nurki on lõpmatu hulk, teiseks, et nad teaksid, missugust neist nurkadest on hakatud nimetama sirge ja tasapinna vaheliseks nurgaks, s. t. et nad teaksid vastavat definitsiooni, ja kolmandaks, et omandataks lause selle nurga minimaalse suuruse kohta. Ühenduses sellega on hea anda niisugune ülesanne: missugune nurkadest, mille tasapinda lõikav sirge moodustab sirgetega, mis sellel tasapinnal on pandud läbi sirge ja tasapinna lõikepunkti, on suurem kõigist teistest sellistest nurkadest? On arusaadav, et vastus ei tohi seista lihtsalt selle nurga näitamises, mille moodustab sirge ja tema projektsioon tasapinnal teisel pool lõikepunkti, vaid selle väite tõestamises. Arusaamatuste vältimiseks tuleb kohe algul märkida, et vaadeldakse ainult seda ruumiosa, mis asetseb antud tasapinnast ühel pool ja et tegelikult jutt on mitte tasapinna antud punkti läbivaist sirgeist, vaid sellest lähtuvaist kiirtest.

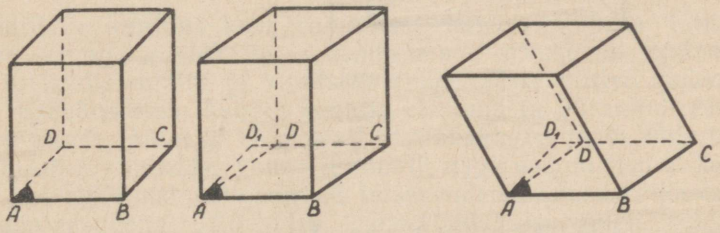
Hulktahulise nurga kohta käivate teoreemide õppimisel on väga kasulik rakendada mudelit, mille kergesti saab teha mõnest metall- või puuvardast, isegi harilikest tuletikkudest, mis on ühest kohast niidiga või kummirõngaga kinni seotud, või rakendada kasvõi hulktahulise nurga pinnalaotust paberil. Hulktahulise nurga tasanurkade summa kohta käiva teoreemi kehtivus saab ilmseks, kui pöörata tähelepanu tasanurkade suurenemisele varraste ühenduspunkti liikumisel allapoole tingimusel, et varraste alumised otsad liiguvad varraste projektsioonide pikenduste mööda tasapinnal, ja veel sellele, et kõigi, tasapinnal asetsevate ühistipuliste nurkade summa võrdub $4d$. On üllatav, kui kindlalt jäävad meelde niisugused teoreemide näitlikud illustratsioonid, mis on seotud igaühe enda poolt valmistatud primitiivse mudeli rakendamisega, eriti, kui seda mudelit vaadelda liikumises! Õpetlik on ka selgitada põhjusi, mis teevad tarvilikuks teoreemi loogilise tõestuse, vaatamata selle näitliku illustratsiooni olemasolule.

Stereomeetria esimeste peatükkide õppimisel tekkivad raskused on esile kutsunud rea metoodiliste artiklite ilmumise, milles käsitletakse mitmesuguseid abinõusid olukorra parandamiseks. Erilist tähelepanu väärivad artiklid [IV 36, 39, 54].

§ 26. Hulktahukad.

Kui kõrvale jätta küsimus hulktahukate ruumala kohta, millest kõneldakse järgmises paragrahvis, siis võib konstateerida, et X klassi kursuse osa, mis on pühendatud hulktahukaile, kulgeb tunduvalt kergemini kui stereomeetria teised osad. Tema sisu seisneb mõnede lihtsamate hulktahukate definitsioonide ja omaduste tundmaõppimises. See materjal on õige väike, lihtne ja rikas praktiliste rakenduste poolest.

Selle osa materjali suhteline lihtsus küllalt suure tundide arvu tõttu, mis on reserveeritud selle õppimiseks, teeb kergeks tema kõrgekvaliteedilise omandamise. Kõige enne tuleb tagada mõistete laitmatu tundmine ja nende vaheliste seoste mõistmine, illustreerides neid näidetega ümbritsevast tegelikkusest ja kasutades laialdaselt mudeleid ning jooniseid. Õpilased ei mõista kaugeltki alati, et rööptahukas on prisma erijuhtum (iga rööptahukas on prisma, kuid mitte iga prisma ei ole rööptahukas), sageli segavad ära püströöptahuka ja risttahuka mõisted. Viimase lünga kõrvaldamiseks võib peale definitsioonide kindla omandamise ja mudelite kasutamise veel kaasa aidata mitmesuguste rööptahukate küllalt ilmekate kujutiste kõrvutamine, nagu see on tehtud joonisel 46.



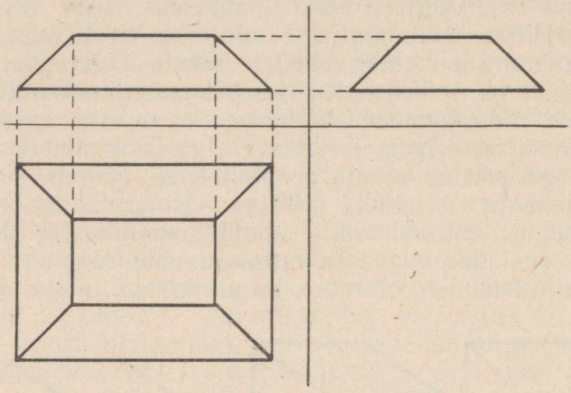
Joon. 46.

Määranud prisma, rööptahuka, püramiidi ja tüvipüramiidi mõiste, on hea vaadelda rida keerukamat liiki hulktahukate näiteid, tükeldades neid (mitmel viisil) nimetatud lihtsamat liiki kehadeks. Nii on joonisel 47 antud tee remondi puhul sageli näha oleva liivahunniku ristprojektsioonid kolmele tasapinnale ja soovitatakse veenduda, et see kuhi ei ole tüvipüramiid, nagu esimesel pilgul võib näida, kuid selle võib esitada risttahuka, nelja paariti võrdse kolmnurkse prisma ja nelja võrdse, ruudukujulise põhjaga püramiidi kombinatsioonina.

Praktiliselt tähtis küsimus hulktahukate pinna suuruse kohta lahendub üldisel juhtumil kui küsimus tema kõigi tahukate pindalade summast. Kolme teoreemi külgpindalade kohta (prisma, korrapärase püramiidi ja korrapärase tüvipüramiidi külgpindala) tuleb vaadelda selle üldise ülesande lahenduse erijuhtumeina; siis ei tule ette selliseid juhtumeid, kus ülesandele, leida antud korrapäratu püramiidi täis- või külgpindala, X klassi õpilane vastab, et nad

seda ei ole läbi võtnud. Ühenduses ülesannete lahendamisega hulktahuka pindala arvutamisele võib kasuliku harjutusena soovitada pinnalaotuste joonestamist.

Korrapäraste hulktahukate tundmaõppimine kulgeb alati erilise huviga, eriti siis, kui on võimalik demonstreerida kõigi viie keha korralikult valmistatud mudeleid. Kuid Kisseljovi geomeetria õpikus toodud küsimuse teoreetilise külje käsitlus kutsub esile õpilaste põhjendatud arusaamatuse: esmalt kõneldakse, et on kolm liiki



Joon. 47.

korrapäraseid hulktahukaid kolmnurksete tahkudega, üks liik nelinurksete tahkudega ja üks liik viisnurksete tahkudega, ning siis tõestatakse, et nad on tõepoolest olemas. Hoopis parem on, kui algul konstrueerimise teel näidata korrapäraste hulktahukate viie liigi olemasolu, alates kuubiga (jällegi on pinnalaotuste joonestamine väga kasulik), ja siis tõestada, et mingeid muid korrapäraseid hulktahukaid ei saa olla.

Ruumikujundite, eriti hulktahukate sümmeetria küsimust kehtivas programmis ei ole märgitud ja ajapuudusel teda koolis tavaliselt ei puudutata üldse, kuigi Kisseljovi õpikus seda küsimust on valgustatud; hoopis täielikumalt on ta käsitletud N. Glagolevi uues õpikus. Väga soovitav on seda materjali kasutada lisatööks tugevamaile õpilastele. Mitte vähem õpetlik ei ole ka küsimus, mis tahes kumera hulktahuka tippude arvu, servade arvu ja tahkude arvu seosest (Euleri teoreem hulktahukate kohta); Kisseljovi õpikus ei ole seda küsimust üldse puudutatud, kuid N. Glagolevi õpikus on teda vaadeldud hulktahukate kohta käiva peatüki päris algul. Huvitav on märkida, et X klassi õpilased alati avastavad selle teoreemi iseseisvalt, kui neile anda küsimus selle kohta, kas on võimalik mis tahes kumera hulktahuka tippude arvu ja tahkude arvu teades ütelda, kui palju tal on servi, ja soovitada neil teostada rea vaatlusi, koostades järgmisekujulise tabeli:

Hulktahukas	Tippude arv (I)	Tahkude arv (A)	Servade arv (E)
Kuup	8	6	12
Kolmnurkne prisma	6	5	9
n-nurkne prisma	$2n$	$n+2$	$3n$
Kolmnurkne püramiid	4	4	6
n-nurkne püramiid	$n+1$	$n+1$	$2n$
n-nurkne tüvipüramiid	$2n$	$n+2$	$3n$

Tabeli tähelepanelik vaatlemine näitab, et alati $I+A=E+2$, mis moodustabki Euleri teoreemi. Tähelepanu vääriv on selle-teoreemi üldisus: ta on õige mitte ainult kõigi kumerate hulktahukate puhul, nagu see on tõestatud näiteks raamatus [IV, 19], vaid ka kõigi «lihtsate» ehk «Euleri» hulktahukate puhul (üksikasju ja tõestust vt. näiteks raamatust [IV, 1, II osa]).

Palju häid ülesandeid sisaldub raamatuis [IV, 15, 23]. Esitame ühe neist. Puust kuup servaga 10 cm on igast küljest värvitud ja siis lõigatud kuupsentimeetriteks; mitu kuubikest saab, millel on 0, 1, 2, 3 värvitud tahku?

§ 27. Ruumalade mõõtmine. Cavalieri printsiip.

Primitiivne kujutlus keha ruumalast kui seda keha täitvate ühikulise servaga kuubikeste ja nende osade arvust on õpilastele omane algkoolist alates ja kinnistub selle mõiste püsiva rakendamisega tegelikus elus. Asudes peatüki «Prisma ja püramiidi ruumala» õppimisele, antakse kõigepealt risttahuka ruumala üldtuntud valemi tõestus, vaadeldes kolme juhtumit, nagu see on tehtud kooliõpikus: kui mõõtmed väljenduvad täisarvudena, murdarvudena ja irratsionaalarvudena. Kõneldes ruumalaühikuist tuleb peatuda nendel üksikasjalikumalt kui seda on tehtud õpikus, sest algkoolis nende kohta õpitu, isegi kui seda on V klassis korratud, on sageli põhjalikult unustatud. Muuseas on vaja nimetada, et kuupdetsimeeter praktiliselt on võrdne liitriga (täpse definitsiooni järgi liitriks nimetatakse ühe kilogrammi puhta vee ruumala 4° C juures, mis moodustab 1,000027 dm^3).

Nagu eespool juba märgitud, on olukord hulktahukate ruumaladega tunduvalt keerukam kui hulknurkade pindalade mõõtmisega, sest nende võrdruumsus ei tähenda ei võrdsust (kongruentsust) ega tükeldusvõrdsust: kaht hulktahukat, millel on üks ning sama ruumala, ei saa kaugeltki alati lõigata ühesuguseks arvuks paariti võrdseiks osadeks. Nii järeldub teoreemist, mis annab kahe hulktahuka tükeldusvõrdsuse tarviliku tingimuse, et korrapärane tetraeeder, s. o. kolmnurkne püramiid, mille kõik tahud kujutavad endast võrdseid korrapäraseid kolmnurki, ei ole risttahukaga tükeldusvõrdne (vt. näiteks raamatut [IV, 34d]). Seda silmas pidades on selge, et teed, mida oli võimalik käia kolmnurga pindala küsimuse lahendamisel, nimelt kolmnurga tükeldamine osadeks, mis teisiti

kokkupandult andsid ristküliku, ei saa kasutada püramiidi ruumala mõõtmise küsimuse lahendamisel.

Seda raskust prismade puhul siiski ei esine, mida koolikursuses kasutataksegi, tõestades kergesti mis tahes kaldprisma ja teatud püstprisma tükeldusvõrdsust ja tuletades siis niisama kergesti üldise prisma ruumala valemi. Sellega saab täieliku õigustuse see prisma ruumala arvutamise viis, mida V klassis soovitasime kasutada näitlike kujutluste alusel (püstprisma lõigatakse tasapindadega, mis paralleelsed põhjaga, plaatideks paksusega üks pikkusühik ja iga niisugune plaat sisaldab niimitu kuupühikut, kuimitu ruutühikut sisaldab prisma põhi).

Võrratult raskemaks osutub püramiidi ruumala küsimuse lahendamine. Tavaline käsitlus, mis on rajatud võrdpindsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega kolmnurksete püramiidide võrdruumsuse lemma tõestusele, omandatakse õpilaste poolt alati ainult formaalselt, ja mõne aja pärast ei jää selle osa õppimisest midagi järele peale segase mälestuse «kuraditrepist», unustatakse isegi väga tähtis lõpptulemus — et iga püramiidi ruumala moodustab ühe kolmandiku sama põhja ja sama kõrgusega prisma ruumalast. Ometigi on selle praktiliselt tähtsa geomeetrilise fakti kindla tundmise tagamine ja ühtlasi tema loogilise põhjendamise vajaduse äratamine õpilastes väga lihtne. Võetakse kahe niisuguse keha õõnsad mudelid (mida plekist või paksemast kartongist on kerge oma jõududega valmistada) ja küsitakse, kuidas suhtuvad nende ruumalad. Kõigil on selge, et püramiidi ruumala on prisma ruumalast vähem, kuid kuuldub mitu erinevat arvamust selle kohta, mitu korda vähem. Paljud leiavad, et püramiidi ruumala peab olema täpselt kaks korda vähem vastava prisma ruumalast, põhjendades oma arvamist sellega, et kolmnurga pindala on kaks korda vähem sama aluse ja sama kõrgusega ristküliku pindalast (järeldus analoogia põhjal!); teised kinnitavad, usaldades rohkem silmamõõtu, et püramiidi ruumala on vähem kui pool prisma ruumalast, et ta on veerand või kolmandik prisma ruumalast. Tekkinud elava vaidluse lahendamiseks tehakse otsekohe ettepanekuid katselisel teel proovimise kohta — veega või kuiva peene (sõelutud) liivaga täitmise teel. Katse näitab selgesti, et ruumalade suhe on võrdne kolmega või on lähedal sellele arvule, analoogia põhjal otsustajad tunnistavad oma eksimust, ja loomulikult tekib küsimus selle kohta, millega siis see arv täpselt võrdub.

See katse poole pöördumine kutsub esile otsustava vastuvaidluse mõnede õpetajate ja metoodikute poolt, kes loevad niisuguse deduktsiooni matemaatilise meetodi «puhtuse» rikkumise lubamatuks. Ei ole siiski mingit kahtlust, et nimelt selline katse kasutamine võimaldab paremini selgitada mõlema meetodi (induktsiooni ja deduktsiooni) olemust ja nende võrdlevaid eeliseid, paremini hinnata deduktsiooni teel saadud järelduste täpsust ja üldisust. Katse ettevalmistamisele ja teostamisele ning selle tulemuste läbiarutamisele kulutatud pool klassitundi loob hea elevuse ja tagab saadud

tulemuse püsiva meelespidamise. Veel parem on, kui iga õpilane teeb katse kodus ja tunnis toimub vaid tulemuste läbiarutamine.

Et saada lõplik lahendus küsimuses püramiidi ruumala suhtes, s. t. et tõestada võrdpindsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega püramiidi ja prisma ruumalade suhte kohta katse poolt etteöeldud tulemuse täit täpsust, võib minna mitut teed. Kisseljovi õpikus koolidele, nagu see ka programmis on ette nähtud, tõestatakse esmalt (piirväärtuste abil) juba nimetatud lemma kahe võrdpindsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega püramiidi ruumvõrdsusest ja siis ka küllalt raske teoreem kolmnurkse püramiidi ja prisma võrdruumsusest juhtumil, kui prismal on sama põhi ja kolm korda vähem kõrgus kui püramiidil, mille järel tehakse üldistus mis tahes püramiidi juhtumile. Tunduva lihtsustuse võib saavutada valemi $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ rakendamisega, kui püramiidi ruumala käsitleda $(n+1)$-e tema sisse kujundatud võrdsete kõrgustega ja järk-järgult vähenevate põhjadega prismade ruumalade summa piirväärtusena (üksikasju võib leida raamatust [IV, 10]). Esimese n naturaalarvu ruutude summa valemi tõestus teostub kõige lihtsamini täieliku induktsiooni metoodil ja kujutab endast selle meetodi suurepärast rakendust.

Käsitlus võidab lihtsuse ja jõukohasuse suhtes veelgi enam, kui aksioomina võtta niinimetatud «Cavalieri printsiip», mis väidab, et kaks võrdsete kõrgustega keha on võrdruumsed juhtumil, kui on võrdpindsed nende mis tahes lõiked, mis on tehtud põhjadega paralleelselt ühel ja samal kaugusel neist. Seda lauset saab tõestada, mida tehaksegi matemaatilise analüüsi kursuses, kuid tema tõepärasus ei tekita kahtlust, kui vaadelda mõnd sobivat näidet, nagu näiteks ühesuguste klaasplaadikeste virna, mis esmalt on laotud püstprisma kujul, siis üksteise suhtes nihutatult nii, et tekib sama alusega ja sama kõrgusega kaldprisma teatav lähend. Mõned märkused Cavalieri printsiibi kohta on tehtud kooliõpikus, muuseas märgitud (§ 90, 1950. a. trükk), et lemma püramiidide ruumivõrdusest on lihtne järeldus temast. Cavalieri printsiibi üksikasjalikuma käsitluse võib leida artiklist [IV, 35].

Kooliõpikus toodud tüvipüramiidi ruumala valemi tuletamine, mis põhineb täienduspüramiidi kõrguse arvutamisel, on õpilastele jõukohasem kui puhtgeomeetriline tuletamine, mis põhineb tüvipüramiidi tükeldamisel kolmeks täispüramiidiks; viimase võib anda arvutusülesandena.

Juhime tähelepanu Rõbkini ülesannete kogu (II osa 1948. a. trüki j.) ülesandele Nr. 12 (1) § 19: tõestada, et kolmnurkse prisma tüvi (viltu lõigatud prisma) ruumala võrdub kolme külgserva pikkuse aritmeetilise keskmise ja ristlõike pindala korrutisega. Tõestus toimub ilma raskusteta, kui see prisma tüvi lõigata kolmeks osaks, ja nimelt prismaks, mille põhi on endine ning kõrgus võrdub lühima külgservaga, ja kaheks kolmnurkseks püramiidiks. Analoogilise teoreemi saab tõestada püströöptahuka tüve kohta: tema ruumala võrdub põhja pindala ja kahe vastaskülgserva pikkuse aritmeetilise keskmise või kõigi nelja külgserva pikkuse aritmeetilise keskmise korrutisega. Põhjaga mitteparalleelselt lõigatud püstprisma tüve kohta, kui põhjaks on meelevaldne

nelinurk või mingi suurema külgede arvuga hulknurk, analoogiline teoreem ei kehti: põhja pindala ja külgservade aritmeetilise keskmise korrutis väljendab püstprisma tüve ruumala vaid ligikaudselt. Soovitame ühe hea ülesande lahendamiseks konstruktiiv-arvutuslikul segaviisil: omades põhjaga mitteparalleelselt lõigatud hulknurkse püstprisma epüüri, arvutada selle ruumala esmalt ligikaudselt kui külgservade aritmeetilise keskmise ja põhja pindala korrutis, siis täpselt, tükeldades kogu keha kolmnurkseiks prismadeks, mis on lõigatud põhjaga mitteparalleelselt (kõik arvutamiseks vajalikud andmed võtta epüürist).

Nimetame, et mullatööde puhul tuleb sageli arvutada ruumala ebakorrapärase kujuga kehadel, mille põhjaks on tavaliselt tasane hulknurk. Pinnase väljavõtmisel jäetakse kindlate vahemaade tagant kontrolltulbad, mille kõrgused hiljem mõõdetakse. Väljavõetud maa ruumala loetakse võrdseks kõigi kontrolltulpade kõrguste aritmeetilise keskmise ja põhja pindala korrutisega.

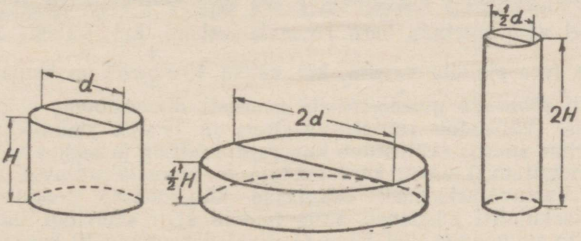
§ 28. Ümarkehad.

Geomeetria koolikursus lõpeb niinimetatud ümarkehade — silindri, koonuse, tüvikoonuse ja kera tundmaõppimisega. Need kehad omavad niivõrd suurt tähtsust nii teiste õppeainete kui ka praktilise elu seisukohalt, et tuleb kahetseda kaht asjaolu, mis takistavad nende teooria ja rakenduste põhjalikumat käsitlemist koolis: nende ilmumist alles geomeetria kursuse päris lõpul ja vähest tundide arvu, mis programm neile reserveerib (20 tundi).

Programm peab vajalikuks sirge liikumisel moodustuva silindrilise pinna ja koonilise pinna üldise mõiste selgitamist (esimesel puhul toimub liikumine paralleelselt iseendaga, teisel puhul nii, et sirge üks punkt jääb liikumatuks), kuid koolis õpitakse tundma ainult püstringsilindrit, püstringkoonust ja püstring-tüvikoonust, mida seal nimetatakse lihtsalt silindriks, koonuseks ja tüvikoonuseks. Neid kolme keha saab vaadelda pöördkehadena, mis tekivad lõigu pöörlemisel temaga ühel ja samal tasapinnal asetseva telje ümber: teljega paralleelne lõik tekitab silindri pinna; teljega mitteparalleelne lõik tekitab koonuse, kui tema ots asetseb teljel, ja tüvikoonuse, kui teljega lõikumine toimub vaid lõigu pikendamisel; kui lõigu mingi seesmine punkt asetseb teljel, siis tema pöörlemine tekitab korraga kaks koonust, ja kui lõik on risti teljega, siis tema pöörlemisel saadakse tasane kujund (ring või rõngaspind). Väärib märkimist, et keskkoolis ei käsitleta kõiki pindu, mida sirge pöörlemine tekitab: kui pöörlemistelg ei asetse pöörleva sirgega ühel ja samal tasapinnal, siis saadakse ühekattene hüperboloid, mida õpitakse tundma analüütilise geomeetria kursuses. Silindri ja koonuse pinna pindala küsimus, kui lähtuda kõvera pinna pindala üldisest definitsioonist, tekitab suuri raskusi. Koolis seda oluliselt lihtsustatakse, defineerides neid pindalasid piirväärtustena, millele lähenevad silindri (koonuse) sisse joonestatud korrapäraste prismade (vastavalt püramiidide) külgpindalad nende külgtahkude arvu tõkestamatul kahendamisel. Kõrvuti sellega on kasulik anda õpilastele kujutlus neist pindadest pinnalaotuste kaudu: silinder laotub tasapinnale, tekitades ristküliku, mille kõrgus võrdub silindri kõrgusega ja alus — silindri põhja ringjoone sirgestamisel saa-

dava lõiguga, nii et silindri külgpinna pindala S (ehk lühemalt: silindri külgpindala) väljendub valemiga $S = 2\pi RH$; koonuse pinnalaotuseks on ringi sektor, mille raadius võrdub moodustajaga l, ja kaar võrdub põhja ringjoone pikkusega $2\pi R$; selle sektori pindala S suhtub ringi (raadiusega l) pindalasse πl^2 samuti, nagu kaare pikkus $2\pi R$ suhtub ringjoone kogu pikkusse $2\pi l$, mis annab $S = \pi Rl$. Tüvikoonuse külgpinna pindala arvutamine taandub analoogilisel viisil rõngaspinna osa kujutava kujundi («kõverjoonelise trapetsi») pindala arvutamisele.

Pinnalaotusi käsitledes on hea lahendada niisugune ülesanne: on antud koonuse põhja raadius R ja kõrgus H; arvutada tema külgpinna laotuse elemendid ja välja lõigata see laotus. Suuruste R ja H arvulised väärtused tuleb anda koolis olemasoleva koonuse mudeli järgi ja valmistatavad pinnalaotused tuleb õpilastel soovitada järgmisel tunnil kaasa võtta. Tulemuste õigsust kontrollitakse otsese pealepaigutamisega ja see toimub ikka kõrgendatud huviga: selle näite varal veenduvad õpilased veel kord, et matemaatiline kalkulatsioon annab neile teatava reaalse võimu asjade üle, ja hindavad kõrgesti seda võimu.



Joon. 48.

Silindri, koonuse ja tüvikoonuse ruumala valemid tuletuvad piirile ülemineku teel kergesti sissejoonestatud prisma, püramiidi ja tüvipüramiidi ruumala valemeist.

Väga tähtis on ruumala, põhja raadiuse ja kõrguse vaheline sõltuvus: ruumala on võrdeline kõrgusega, kuid mitte põhja raadiusega, vaid raadiuse (või diameetri) ruuduga. Õpilased konstateerivad imestusega, et kolm silindrilist nõu, mis on kujutatud joonisel 48, ei ole kaugeltki ühesuguse ruumalaga, nagu tavaliselt esimesel pilgul näib. Niisuguste elementaarsete asjade koht on muidugi V klassi kursuses (esimesel tutvumisel silindriga) või VIII klassi kursuses (funktsionaalse sõltuvuse käsitlemisel), aga kui nendel ei ole enne peatutud, siis tuleb seda teha vähemalt X klassis.

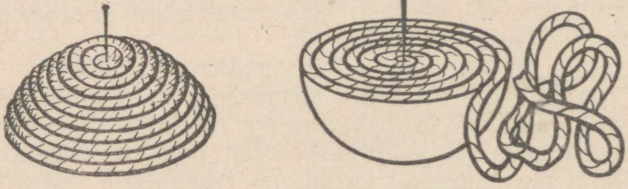
Kera (sfäär) esitab mõnevõrra enam raskusi. Programmiga ettenähtud ja Kisseljovi geomeetria õpikus esitatud teoreetilised teadmised (definitsioonid ja teoreemid), mis ei kujuta endast sisuliselt midagi eriti rasket, võetakse läbi tavaliselt ajapuudusel õige pealis-

kaudselt ja omandatakse õpilaste poolt kaugeltki mitte põhjalikult, ja siit tulenebki isegi niisuguste põhiliste valemite, nagu kera pindala ja ruumala valemid, õige pealiskaudne teadmine. Tähtsust omab ka see asjaolu, et väga vähe jääb aega selleks, et lahendada ülesandeid, kus neid valemeid tuleb rakendada. Paremas olukorras on trigonomeetria kursus: X klassis on teisel poolaastal geomeetriat ainult üks tund nädalas, trigonomeetriat aga kolm tundi, ja seetõttu tuleb programmi geomeetria osa õppimist kiirustada, kontsentreerides geomeetria tunde poolaasta algusesse selleks, et edaspidi oleks trigonomeetria tundides võimalik lahendada ülesandeid geomeetria kõigi osade peale (trigonomeetria rakendamisega).

Nimetame mõned üksikasjad. Cavalieri printsiibi rakendamine oluliselt lihtsustab kera ruumala valemi tuletamist, mistõttu võiks soovitada selle õppimist Kisseljovi geomeetria õpiku § 147 järgi (1950. a. trükk), kui poleks tarvis tuletada kera sektori ruumala valemit, milleks on vaja lemmat kolmnurga pöörlemisele tekkiva keha ruumala kohta (§ 141). Seetõttu saab selle lihtsa kera ruumala valemi tuletamise anda ainult õpetliku ülesandena.

Tähelepanu väärib õpiku § 145 märkuses toodud arutlus, mis annab seose kera ruumala V ja tema pinna (täpsemalt: tema pinna pindala) S vahel hästi meeldejääva toimingu alusel, mis seisneb kera tükeldamises elementaarosadeks, millel on teatud sarnasus püramiidiga; see seos väljendub valemiga $V = \frac{1}{3} RS$ ja selle alusel võib tuletada kera ruumala valemi, kui valem $S = 4\pi R^2$ on teada, kui ka kera pindala valemi, kui valem $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ on teada. Nagu ikka, on tarvis eriti rõhutada geomeetriliste suuruste dimensioone: S on kahemõõtmeline suurus (väljendub ruutsentimeetreis ja teistes ruutmõõtudes), V on kolmemõõtmeline suurus (väljendub kuupsentimeetreis ja teistes kuupmõõtudes).

Hoolsat selgitamist vajab kera pindala ja ruumala sõltuvus raadiusest ja diameetrist. Vastuvõtueksameil esitatakse kõrgemaisse koolidesse astujaile sageli järgmisekujulisi küsimusi: «Mis toimub kera suurringi ümbermõõduga, kera pindala ja ruumalaga, kui tema raadiust vähendada 10 korda? Kui tinast kera läbimõõduga 10 cm üles sulatada ja saadud massist valada 1000 võrdset kerakest, siis milline on nende diameeter? Miks veetilga langemise kiirus



Joon. 49.

õhus on seda vähem, mida vähem on selle läbimõõt?» Viimasele küsimusele vastamiseks on tarvis võtta arvesse seda, et veetilkade langemine õhus toimub ühtlaselt selle tasakaalu tõttu, mis tekib raskusjõu (s. t. tilga ruumalaga võrdeliselt muutuva kaalu) ja tilga pindalaga võrdeliselt muutuva õhutakistuse vahel.

Ajapuudus stereomeetria õppimisel X klassis ei luba pühendada puhtgeomeetrilistele ülesannetele ümarkehade kohta nii palju tähelepanu nagu peaks, ja ühenduses sellega omandab suurema tähtsuse geomeetrilise sisuga ülesannete

lahendamine trigonomeetria rakendamisega, millest kõneldakse viienda osa VII peatükis.

Nimetame kaht katset, mis soodustavad kera ruumala ja pindala valemi meelespidamist. Nende koht on näitlikus geomeetrias, kuid nad pakuvad huvi ka X klassi õpilastele (kas või individuaalse lisatöö teemana või ettekandeks matemaatika ringis). Esimene põhineb niinimetatud «Archimedese kehade» kasutamisel: kera mis tahes raadiusega R, silinder põhja raadiusega R ja kõrgusega $2R$ ning koonus niisamasuguse põhja raadiuse ja kõrgusega. Katselisel teel tehakse kindlaks, et silinder mahutab kolm korda enam kui koonus ja et ruum, mis silindris jääb vabaks pärast kera mahutamist sellesse, on koonusega ühesuurune. Siit järeldub, et kera ruumala võrdub koonuse kahekordse ruumalaga ehk silindri kahe kolmandiku ruumalaga, s. t. $V_{\text{kera}} = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot 2R = \frac{4}{3} \pi R^3$. Teine katse on labasema iseloomuga. Võetakse puust poolkera mudel, millesse on löödud üks nael ringikujulise lõike (põhja) keskpunkti ja teine nael selle lõikega ristuva raadiuse otspunkti. Edasi võetakse mitte väga peenike nöör, kinnitatakse selle ots sfääri pinnal leiduva naela külge ja mähitakse spiraalselt poolkera sfäärilisele pinnale, kattes selle tiheda «mütsikesena» (joonis 49). Siis korratakse sama operatsiooni poolkera põhjaga. Osutub, et poolkera põhja, s. o. raadiusega R ringi katmiseks kuluva nööri pikkus moodustab ligikaudu poole sellest pikkusest, mis kulus poolkera katmiseks; siit järeldub, et poolkera pinna pindala on kaks korda suurem selle ringi pindalast ning on seega $2\pi R^2$, mistõttu kogu kerapinna pindala võrdub avaldisega $4\pi R^2$. Õpilastele, kes on teostanud selle katse või vähemalt näinud selle demonstreerimist, ei tee valemi $S = 4\pi R^2$ õigesti kirjutamine kunagi raskust.

TRIGONOMEETRIA ÕPETAMISE METOODIKA.

I peatükk.

ÜLDISI VAATEID TRIGONOMEETRIA ÕPETAMISELE KESKKOOLIS

§ 1. Ajaloolisi andmeid. Nüüdisaegne trigonomeetria.

Trigonomeetria kursuse sisu kujunes tervikuna välja XVIII sajandi alguseks, kuid ta käsitluse nüüdisaegne kuju ja peamiselt praegu üldkasutatav sümboolika kehtestus alles Euleri ajal, s. o. XVIII s. teisel poolel. Võtame näiteks kolmnurga lahendamise kahe külje ja neist ühe külje vastasnurga järgi niisugusel kujul, nagu selle andis Vieta oma raamatus «Mitmesuguseist matemaatilistest küsimustest» (1593), vt. [V, 7]:

«Kui mingis tasapinnalises kolmnurgas on antud külgmised haarad ja aluse lähisnurk, siis saab leida ka aluse teise lähisnurga. Tõepoolest, kui külgmine haar, millele antud nurk toetub, lugeda esimeseks haaraks, siis nagu esimene haar suhtub teise, nii suhtub antud nurga siinus aluse juures oleva teise otsitava nurga siinusesse. Ehk nagu teine külgmine haar suhtub esimesse, nii suhtub antud nurga täiendusnurga seekans otsitava nurga täiendusnurga seekansisse.

Kui aga antud nurk on terav ja esimene, selle nurga poolt hõlmatav haar on teisest haarast vähem, nimelt, kui teise ja esimese haara suhe on vähem kui *sinus totus* ja antud nurga siinuse suhe, siis otsitava nurga väärtus võib olla kahesugune. Seepärast antud juhtumil võib võtta kas terava nurga, mis leidub kaanonis, või nurga, mis seda teravnurka täiendab kahe täisnurgani. Ülesande tingimustest ei saa järeldada, kumb neist nurkadest tuleb võtta.»

Väga õpetlik on seda katkendit analüüsida, mida on kerge teha, kui silmas pidada, et «haaraks» nimetatakse siin kolmnurga külge ja et siinuseks nimetati tol ajal siinuslõiku, ning *sinus totus* («täis siinus») tähendas 90° nurga siinuslõiku; «kaanon»-tabel: siin on mõeldud siinuste tabelit.

Nagu näeme, Vieta ei kasuta siin valemeid, samal ajal teistes oma töödes ta tarvitab neid rohkesti. Edaspidi hakati ka trigonomeetrias valemeid kasutama. Trigonomeetriliste joonlõikude täielike nimetuste asemel hakati neid lühendatult üles kirjutama.

Euleril (1707—1783) näeme juba tähistust $\sin \angle A \cdot Z$ (sinus arcus z, s. o. kaare Z siinus) ja veelgi lühemat tähistust $\sin \cdot z$; tuli veel ainult ära jätta punkt märgi sin järel, et saada praegusel

ajal üldkasutatav tähistus. Euleri töödest, eriti tema «sissejuhatusest lõpmatu väikeste analüüsi» (1748. a.), saabki alguse vahetegemine siinuslõigu ja siinuse kui siinuslõigu ja raadiuse suhte vahel (see käib ka teiste funktsioonide kohta).

Üleminek uuele käsitusele trigonomeetrilistest funktsioonidest kui lõikude suhetest oli suur samm edasi nii teoreetilises kui ka puhtpraktilises mõttes. See üleminek toimus väga aeglaselt ning viidi lõpule alles XIX s. keskpaiku.

Euler tähistab trigonomeetriliste funktsioonide argumenti kord kraadi-, kord radiaanmõõdus: üleskirjutuse $\sin \frac{m}{n} \cdot 90°$ kõrval esineb ka üleskirjutus $\sin(\frac{1}{2}\pi + Z)$, kusjuures öeldakse, et Z on ringjoone mingi kaar, mille raadius alati loetakse võrdseks ühega («sissejuhatus analüüsi», VIII peatükk). Argumendi radiaanmõõdus väljendamise ülekaal tähistab uut sammu edasi trigonomeetria muutmisel kolmnurkade lahendamise õpetusest analüüsi haruks, mis tegeleb trigonomeetriliste funktsioonide uurimisega. Euleri raamatu selles peatükis käsitletakse esimest korda trigonomeetriat analüütiliselt, ehk õigemini: goniomeetriat; Euler eeldab, et trigonomeetria kui õpetus kolmnurkade lahendamisest on tuntud, eeldatakse ka, et trigonomeetriliste funktsioonide üldised definitsioonid on teada, ja samuti, et on teada argumendi mis tahes väärtuste summa ja vahe siinuse ja koosinuse valemid; kõik taandamise valemid tuletatakse neist puhtanalüütiliselt. Valemite põhjal, mis väljendavad $\sin nz$ ja $\cos nz$ $\sin z$ ja $\cos z$ kaudu täisarvulise n korral, Euler tuletab tuntud read:

$$\sin v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \ldots \text{ ja } \cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \ldots$$

(nende valemite range elementaarse tuletamise võib leida raamatus [III, 30a]); ta tuletab valemi:

$(\cos Z \pm \sqrt{-1} \cdot \sin Z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1} \cdot \sin nz$, tähistust i sümboli $\sqrt{-1}$ asemel veel mitte kasutades (täht i tähendab tal lõpmatu suurt arvu), ja saab sellest valemi:

$$e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1} \cdot \sin v.$$

Märgime, et Eulerilt sai alguse kolmnurga külgede üldkasutatav tähistamine tähtedega a, b, c ja nende vastasnurkade tähistamine tähtedega A, B, C.

Käesoleval ajal käsitatakse trigonomeetriat kui distsipliini, mis uurib trigonomeetrilisi funktsioone ja nende rakendusi. Nende rakendused on geomeetrias eriti tähtsad, kuid hoopiski mitte ainsad. Meenutame seda suurt osa, mida trigonomeetrilised funktsioonid mängivad kompleksarvude uurimisel, võrrandite lahendamise alal, võnkumisprotsesside uurimise alal, väga üldise kujuga funktsioonide (Fourier' ridade) uurimisel jne.

Mõiste trigonomeetria nüüdisaegsest analüütilisest ülesehitusest võib saada raamatust [V, 16], kus sellele on pühendatud üks

paragrahv IV peatükis. Funktsioonid $\sin z$ ja $\cos z$ mis tahes kompleksarvulise argumendi väärtuse korral defineeritakse astmeridade abil, mis igasuguse z korral koonduvad. Siit järeldub kõigepealt, et need on tõesti uued funktsioonid, mis ei kuulu varemuuritud ratsionaalsete funktsioonide hulka, sest täisratsionaalsed funktsioonid väljenduvad lõplike hulkliikmeina, ja murdratsionaalsed funktsioonid lõpmatu ridadena, mis koonduvad lõpliku raadiusega ringjoonte sees. Edasi on kerge tõestada, et

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Pärast seda tõestatakse (ilma geomeetria abita) liitmislaused

$$\sin (z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

ja

$$\cos (z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

z_1 ja z_2 mis tahes väärtuste puhuks. Tõestades, et vahemikus (0; 2) $\cos z$ omab üheainsa lahendi, mis on võrdne arvuga 1,5707963 ..., ning tähistades selle arvu tähega ξ, tuletame kõik taandamisvalemid, mis võtavad järgmise kuju (n on mis tahes täisarv):

$$\sin(z+4n\xi) = \sin z;\ \sin[z+(4n+1)\xi] = \cos z;\ \sin[z+(4n+2)\xi] = -\sin z;\ \sin[z+(4n+3)\xi] = -\cos z;\ \cos(z+4n\xi) = \cos z;$$
$$\cos[z+(4n+1)\xi] = -\sin z,\ \cos[z+(4n+2)\xi] = -\cos z;$$
$$\cos[z+(4n+3)\xi] = \sin z.$$

Defineerides uue funktsiooni $\operatorname{tg} z$ jagatisena $\sin z : \cos z$, veendume, et

$$\operatorname{tg} (z + 2n\xi) = \operatorname{tg} z.$$

Niisiis funktsioonid $\sin z$ ja $\cos z$ on perioodilised perioodiga 4ξ, funktsioon $\operatorname{tg} z$ perioodiga 2ξ.

Arendades neid seisukohti edasi, võib saada täiesti sõltumatult geomeetrilisest tõlgendusest funktsioonide $\sin z$, $\cos z$ ja $\operatorname{tg} z$ kõik omadused, erijuhtumina nende omadused argumendi reaalarvulistel väärtustel (uurida «nende käitumist reaalteljel»), koostada nende väärtuste tabelid, joonestada nende graafikud. Ülejäänud kolm funktsiooni defineeritakse valemitega

$$\operatorname{ctg} z = 1 : \operatorname{tg} z,\quad \sec z = 1 : \cos z,\quad \operatorname{cosec} z = 1 : \sin z.$$

Üle minnes funktsioonide $\sin z$ ja $\cos z$ rakendustele (eukleidilises) geomeetrias, vaadeldakse kõige esmalt kõverat, mille joonestab punkt M ristkoordinaatidega $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ argumendi t muutumisel, kulgedes kõik võimalikud reaalarvulised väärtused (r tähendab meelevaldset positiivset arvu). Veendudes, et see kõver on ringjoon, teeme kindlaks, et $\sin t$ ja $\cos t$ kujutavad endast punkti M raadius-vektori koordinaattelgedel asuvate projektsioonide ja raadiuse pikkuse suhteid. Arvutades valemi

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

järgi kõverjoone pikkuse, leiame, et ringjoone pikkust väljendab valem $l = 4r\xi$; võrdlemine geomeetriast tuttava valemiga: $l = 2\pi r$ viib järeldusele, et $\xi = 0{,}5\pi$.

Trigonomeetria analüütilise käsitluse paremused on silmanähtavad: kõik läheb lihtsamaks, lühemaks, selgemaks. Peale selle, ja see on väga oluline, tagatakse trigonomeetriliste funktsioonide täielik sõltumatus igasugusest geomeetrilisest süsteemist. Näiteks, Lobatševski geomeetrias, kus sarnasus üldse puudub, on trigonomeetria tavaline käsitlus võimatu. Kas see tähendab, et seal nurga trigonomeetrilistest funktsioonidest ei saa rääkida? Analüütilisel käsitlusel selgub kõik.

Esimeseks tutvumiseks trigonomeetriaga tuleb muidugi valida tavaline tee, mis rajaneb geomeetrial. Kuid õige arusaamine trigonomeetria teaduslikust ülesehitusest aitab õpetajal teha rea parandusi ka sellel teel.

§ 2. Trigonomeetria õppeainena üldhariduslikus keskkoolis.

Sfääriline trigonomeetria uurib kolmnurki, mille külgedeks on kera suurringjoonte kaared. Ta on tarvilik astronoomile, kes uurib taevakehade liikumist kõigepealt niisugusel kujul, nagu ta projekteerub kujuteldavale taevaskerale, on tarvilik topograafile (maamõõtjale), kui ta vaatleb maapinna suuremaid osi, mil selle kõveruse mittearvestamine asjade tõelist olukorda märgatavalt moonutab, on tarvilik meremeestele ja lenduritele, kes ületavad tohutuid kaugusi maakera pinnal või selle lähedal. Kuid see inimeste hulk on ikkagi piiratud, ja sfäärilist trigonomeetriat üldharidusliku kooli õppeplaani ei ole võetud: teda õpivad ainult spetsialistid (kuid matemaatika õpetaja peab olema sellega tuttav). Teisiti on lugu tasapinnalise trigonomeetriaga; trigonomeetrilised funktsioonid, mille uurimine on trigonomeetria põhiliseks ülesandeks, leiavad kõige mitmekülgsemat ja ulatuslikku rakendamist nii matemaatikas endas (geomeetria, algebra ja teised matemaatilised distsipliinid, kaasa arvatud isegi arvuteooria), kui ka mehhaanikas ja kõigil füüsika aladel (rääkimata astronoomiast), ning seoses sellega ka mitmesuguseis tehnika harudes. Seda silmas pidades on tasapinnalise trigonomeetria õpetus saanud üldharidusliku matemaatika kursuse lahutamatuks osaks, mida käsitletakse keskkooli vanemais klassides, kus õpilastel on olemas säärased teadmised aritmeetikast, algebrast ja geomeetriast, ilma milleta ei saa trigonomeetriat õppida. Trigonomeetria õpetamise eesmärgid keskkoolis on täiesti selged: esiteks, õpilaste tutvustamine põhiliste trigonomeetriliste funktsioonidega, seejuures nii põhjalikult, et neil ei tekiks raskusi nende funktsioonidega kokkupuutumisel teistes distsipliinides, mida

õpetatakse kesk- ja kõrgemas koolis, ning teiseks, nii teoreetiline kui ka praktiline tutvumine nende funktsioonide geomeetriliste rakendustega, s. o. kõigepealt (tasapinnaliste) kolmnurkade lahendamisega. Programmid, mille järgi trigonomeetria õpetamine on toimunud mitut tüüpi koolides viimase poole saja aasta kestel, on üksteisest erinenud ainult teise järgu tähtsusega üksikasjade poolest.

Praegu kehtiv keskkooli matemaatika programm näeb trigonomeetria õppimiseks ette üldse 132 tundi, sealhulgas 12 algkursuse (trigonomeetria propedeutika) jaoks, mis moodustab VIII klassi geomeetria kursuse ühe peatüki, ja 120 tundi põhikursuse jaoks IX ja X klassis (Keskkooli programmid. «Matemaatika», 1949). Peale selle on mõned trigonomeetria rakendused ette nähtud ka teistes matemaatika kursuse osades: kompleksarvu trigonomeetriline kuju, geomeetriliste ülesannete lahendamine trigonomeetria rakendamisega, ülesanded pöördkehadele, kehade kombinatsioonidele, kehade lõigetele.

Õpetades trigonomeetriat võib õpetaja väga edukalt ära kasutada naaberdistsipliinid, mida tema õpilased õpivad. Selleks on eeskätt vaja huvi tunda selle vastu, mis neil on läbi võetud ja mis tuleb läbivõtmisele füüsikas, astronoomias, joonestamises. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikute ehitamine ja koos sellega ka nende funktsioonide definitsioonide omandamise püsivus võidab sellest, kui trigonomeetria tundides kasutada sinusoidi ja teiste kõverate ehitamiseks neid võtteid, millega õpilased on tutvunud joonestamise tundides. On kasulik lahendada mõned ülesanded jõudude liitmisele ja lahutamisele graafiliselt ja analüütiliselt. Suurt huvi äratab õpilastes konkreetsete astronoomiliste ülesannete lahendamine trigonomeetria abil.

Trigonomeetria kursusel on suur tähtsus ka loogiliste vilumuste kasvatamisel: uute mõistete täpsed definitsioonid, uute teoreemide ranged tõestused, kõigi otsustuste täieliku põhjendamise järjekindel nõue ülesannete lahendamisel, kõigeks selleks loob trigonomeetria kursus, mis viib keskkooli matemaatika lõpule, erakordselt soodsad tingimused. Kuid need tingimused leiavad realiseerimist ainult siis, kui õpetaja pidevalt hoolitseb aine laitmatu käsitlemise eest nii teaduslikust kui ka metoodilisest küljest õpetaja enda poolt ning on kõrvalekaldumatult nõudlik õpilaste vastu. Väga suur tundide arv, mis trigonomeetriale on ette nähtud, võimaldab seda väga põhjalikult käsitleda, korrates sealjuures kõiki küsimusi aritmeetikast, algebrast ja geomeetriast, mida siin tuleb puudutada.

§ 3. Trigonomeetria lineaarne ja kontsentriline käsitlus.

Enamikus trigonomeetria õpikutes, eriti vanades, näeme umbes järgmist materjali paigutust: pärast mõnd vajalikku sissejuhatavat näpunäidet (nurga ja kaare mõiste üldistamine, nurga mõõtmise viisid, Descartes'i märkide seadus teljel asuvate suunaga lõikude

jaoks) antakse kõigi kuue trigonomeetrilise funktsiooni definitsioonid, seejuures kõige üldisemad, s. o. argumendi mis tahes reaalarvulise väärtuse puhuks $-\infty$ kuni $+\infty$, ja selgitatakse nende funktsioonide väärtuste vahelised põhilised seosed vastavalt argumendi ühe ning sama väärtuse puhul. Siis vaadeldakse funktsioonide taandamist vähimale positiivsele argumendile, seejärel liitmislauseid ja nende järeldusi. Need teadmised trigonomeetrilistest funktsioonidest lubavad näidata, kuidas koostatakse nende väärtuste tabelid. Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide ja trigonomeetriliste võrrandite käsitlemisega lõpetatakse goniomeetria õppimine, edasi järgnevad trigonomeetria rakendused geomeetrias, eeskätt kolmnurkade lahendamine, esiteks täisnurksete, siis kaldnurksete kolmnurkade lahendamine, mis põhineb nende nurkade ja külgede vahelistel seostel.

Sellele «progressiivsele» või «lineaarsele» ainejaotusele, kus iga küsimus võetakse korraga kogu ta üldsuses ning vaadeldakse plaanitsetud programmi raamides täielikult, vastandatakse «kontsentriline» jaotus, kus trigonomeetrilisi funktsioone alguses defineeritakse ja õpitakse ainult argumendi väärtuste piiratud piirkonnas, siis võetakse nende geomeetrilised rakendused ning pärast tehakse üldistus: samu küsimusi vaadeldakse argumendi väärtuste laiemas piirkonnas. Praegu kehtivas keskkooli programmis esineb kaks kontsentrit: esimene, mis on võetud VIII klassi geomeetria kursusse ning tegeleb teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide ja nende rakendamisega täisnurksete kolmnurkade lahendamiseks (seda kontsentrit nimetatakse trigonomeetria «propedeutiliseks», s. o. ettevalmistavaks ehk algkursuseks; viimast nimetust me edaspidi kasutamegi), ja teine, kus trigonomeetriat õpitakse IX ja X klassis kui omaette matemaatilist distsipliini («trigonomeetria põhikursus»). Õieti ütelda, ka selle põhikursuse piirides on programmis tendents eraldada esmalt argumendi väärtuste piirkond 0° kuni 360°, kuid teravajoonelist jaotamist kontsentreiks siin ei ole.

Kontsentrite sissetoomisel on omad positiivsed ja negatiivsed küljed, millest oli juttu eespool (I osa § 13).

Küsimust trigonomeetria lineaarse ja kontsentrilise käsitlemise eelistest ei saa veel lõplikult lahendatuks lugeda. Kogemus teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide peatüki sissevõtmisest VIII klassi geomeetria kursusse seoses täisnurkse kolmnurga lahendamisega näitab selgesti, et raskuste märgatavat vähenemist põhikursuse omandamisel sellest ei tule. On siiski põhjust oletada, et natuke suurema aja kulutuse korral on trigonomeetria algteadmiste kindel omandamine võimalik, mille viivitamatu kasutamine aitab trigonomeetria põhikursust edaspidi paremini omandada. Mis aga puutub põhikursuse kontsentreiks jaotamisse, siis peab kindlalt ütlema, et see ei õigusta end: nii õpilaste kujutluste selgus kui ka töö kiirus võidavad, kui programmi iga küsimus arutatakse korraga lõpuni.

§ 4. Trigonomeetria õpikud.

Nõukogude keskkoolis õpitakse trigonomeetriat kuni viimase ajani N. Rõbkini õpiku järgi, mis esimest korda ilmus 1894. a. ning on sellest ajast peale mitu korda ümber tehtud. Edaspidi peame silmas selle õpiku 26-dat trükki, mis Utšpedgizi poolt kirjastatud 1948. a. See õpik ei vasta täiesti programmile: õpikus puudub programmis ettenähtud küsimuste «Trigonomeetriliste võrrandite lahendamine» üksikasjalik käsitlus, ning seal leidub mõnd (kasulikku), mis programmis ei ole ette nähtud, nagu näiteks mõiste «Trigonomeetriliste tabelite koostamisest», «Mõõtmisest maastikul». Selle õpiku väärtuseks on ta tihedus (ta on kõigest 104 lehekülge, kusjuures viimased $2\frac{1}{2}$ lehekülge sisaldavad valemeid, mis kuuluvad meelespidamisele), kuid peab märkima, et mõnes kohas see tihedus on liialdatud ja muutub juba puuduseks, nagu näiteks § 49, kus kõneldakse trigonomeetriliste funktsioonide peaväärtustest. Esitus on peaaegu kõikjal selge, õpilastele arusaadav. Teoreetiliste küsimuste vaatlemisega käib kaasas näidisülesannete lahendamine. Ülesandeid õpilastele iseseisvaks harjutamiseks õpikus kahjuks ei ole.

Õpetaja, kes töötab Rõbkini õpiku järgi, peab silmas pidama, et peale mõne küsimuse puuduliku käsitluse seal esineb ka täiesti vääri väiteid; õpikusse peab suhtuma kriitiliselt. Näiteks, mõned ebatäpsused on ajaloolises ülevaates: lk. 4 on öeldud, et «100 aastat enne meie ajaarvamist pani õpetlane Menelaos aluse sfäärilisele trigonomeetriale» (Menelaos Aleksandriast elas tegelikult I s. teisel poolel pärast meie ajaarvamise algust; ta süstematiseeris ja täiendas varem avastatud sfäärilist geomeetriat ja trigonomeetriat); Ptolemaios koostas ringi kõõlude tabelid, võttes raadiuseks 60 ühikut, mitte aga 1 ühiku, nagu seal kõneldakse, ja see tabel algab nurgaga $\frac{1}{2}°$, mitte aga nurgaga 1°; ei ole õige väide, et alates XVI s. omandavad trigonomeetrilised valemid oma nüüdisaegse ilme. Õpilased saavad väära ettekujutuse paaris- ja paaritufunktsioonidest, lugedes märkust § 34. Siin oleks pidanud mitte analoogiast kõnelema, vaid andma täpse definitsiooni: funktsiooni $f(x)$, mis rahuldab tingimust $f(x) = f(-x)$ või tingimust $f(x) = -f(-x)$ kõigi vaadeldavate x väärtuste puhul, nimetatakse vastavalt paaris- või paaritufunktsiooniks; paarisfunktsioonide näited: x^2, $\cos x$, $\sec x$, paaritufunktsioonide näited: x^3, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$; funktsioon $ax^2 + bx + c$ ei ole paaris ega paaritu: see on ühe paarisfunktsiooni $(ax^2 + c)$ ja ühe paaritufunktsiooni (bx) summa; soovi korral võib paaris- ja paaritufunktsiooni definitsiooni anda ka ilma funktsiooni sümboli $f(x)$ kasutamiseta.

Rõbkini õpiku suureks puuduseks on käsitletavate arvutuste täpsuse küsimuse täielik ignoreerimine. Peaaegu kõik ülesanded, mis on lahendatavad arvutusmeetodiga trigonomeetria abil, saab lahendada, ja seejuures veel palju lihtsamalt, graafilise meetodiga. Näib, et see kohustab trigonomeetria õpikut seadma ja lahendama

küsimusi arvutamise teel leitud tulemuste täpsuse kohta. Kuid õpik ei tee seda ka siis mitte, kui käsitletakse tabeli küsimust; ainsaks erandiks on § 82, kus käsitletakse nurga määramise täpsust 5-kohaliste tabelite abil, mis on esitatud ilma seoseta muude küsimustega ning vähe arusaadavalt. Ei tehta vahet täpsete ja ligikaudsete andmete vahel; ei peeta kinni ligikaudsete arvude üleskirjutamise põhilisest printsiibist (kirjutada kõik usaldatavad numbrid ning üks kahtlane number). Näiteks § 115 on toodud numbrilise harjutusülesande lahendus: antud külgede $a = 700$ ja $b = 650$ ning nurga $A = 40°25'$ järgi leitakse 4-kohaliste tabelite abil nurk B valemist:

$$\lg \sin B = \lg b + \lg \sin A - \lg a,$$

saadakse

$$\lg \sin B = \bar{1},7796,$$
$$B = 37°;$$

kui andmed lugeda täpseteks, siis tuleb vastus kirjutada kujul

$$B = 37°00',$$

sest $\lg \sin 37°00' = \bar{1},7795$, $\lg \sin 37°01' = \bar{1},7797$.

N. Rõbkini trigonomeetria õpiku puudustest on mitmel korral räägitud; vt. näiteks artiklit [V, 14]. Juba 1940. a. Utšpedgiz alustas tööd uue õpiku loomiseks. 1950. a. see kirjastus andis välja kolmanda proovitrükina A. Bermanti ja L. Ljusterniki trigonomeetria õpiku. Esimest korda ilmus ta proovitrükina 1940. a. ning ümbertöötatult 1947. a. Bermanti ja Ljusterniki trigonomeetria õpik on saanud õpetajate ja teaduslike töötajate tunnustuse ja kõrge hinnangu.

§ 5. Mõned teised trigonomeetria õpikud ja käsiraamatud.

Õppekirjandus trigonomeetria alal on väga rikkalik. Märgime ära mõned väärtuslikud raamatud; üksikasjalisem raamatute ja artiklite loetelu on antud käesoleva V osa lõpus.

Prževalski, E., Tasapinnaline trigonomeetria ja trigonomeetriliste ülesannete kogu, 1. trükk 1880. a., 10. trükk 1923. a.

Üks mitmest revolutsioonieelsel ajal levinud trigonomeetria õpikuist keskkoolile, väga üksikasjalik, pühendab palju tähelepanu arvutusküsimustele tabelite abil. Sisaldab suure hulga mitmesuguse sisuga ülesandeid harjutusteks.

Glasenapp S., Trigonomeetria, 1. jagu — täisnurksete kolmnurkade lahendamine (1915); 2. jagu — goniomeetria (1916).

Raamat on kirjutatud õpikuna reaalkoolidele ja annab hoolsalt läbimõeldud trigonomeetria käsitluse kahes kontsentris.

Piotrovski B., Trigonomeetria, 1925.

Eeldatakse, et mõned algteadmised trigonomeetriast on juba olemas, kuid trigonomeetria kursust käsitletakse neist sõltumata. Kõigis üksikasjus läbimõeldud käsitlus, mis ei jäta midagi selguseta, viib järk-järgult trigonomeetriliste funktsioonide graafikute teadlikule, täiesti põhjendatud ehitamisele, kui nende uurimise lõppkokkuvõttele. Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide ja trigonomeetriliste võrrandite käsitluses on palju niisugust, mida teistes keskkooli

õpikutes ei ole, nagu näiteks mõnede transtsendentsete võrrandite ($x^2 - \sin x = 0$; $1 : x - \sin x = 0$; $x - \operatorname{tg} x = 0$) graafiline lahendamine. Funktsioonid siinus ja koosinus defineeritakse kui raadiusvektori projektsioonide ja raadiuse pikkuse suhted; geomeetrilised rakendused on tagaplaanil; esiplaanil on trigonomeetriliste funktsioonide uurimine.

Weber H. ja Wellstein J., Elementaarmatemaatika entsüklopeedia (tõlge saksa keelest V. Kagani toimetusel, II k., 2. ja 3. raamat, 1910).

Sisaldab peatükid: «Tasapinnaline trigonomeetria ja geomeetria», «Sfääri geomeetria ja trigonomeetria», kus küsimust käsitletakse originaalselt ja sügavalt.

§ 6. Trigonomeetrilised ülesanded.

Kui aritmeetika ja algebra õpetamisel koolis on praktikal (ülesannete lahendamisel) teooria suhtes teatav ülekaal, ja geomeetria õpetamisel ümberpöördult: teooria ülekaal praktika suhtes, siis trigonomeetria õpetamisel on olukord peaaegu alati normaalsele lähedasem; asja eduks vajalik teooria ja praktika ühtsus on trigonomeetria õpetamisel kergem tagada kui teistes matemaatilistes distsipliinides. Kuid ka siin esineb õpilaste juures tendents lahendada ülesandeid mehhaaniliselt, harva naastes teooriasse, ja õpetaja kohus on pidevalt nõuda iga sammu täielikku põhjendamist vastavate viidetega definitsioonidele ja teoreemidele (sagedamini küsida «mispärast?») ning nõuda ammendavaid lahendusi.

Enesekontrolli peamise võttena enamiku trigonomeetriliste ülesannete lahendamisel on hea kasutada täpset joonist, s. o. graafilist lahendamist, millel on ka omaette väärtus. Olgu näiteks tarvis leida $\sin x$ ja $\cos x$, teades, et $\operatorname{tg} x = -2$. Kulutades minuti konstruktsiooniks, leiavad õpilased $\sin x \approx \pm 0{,}9$, $\cos x \approx \mp 0{,}4$, mõistes äärmise selgusega nii kahekordsete märkide vajalikkust kui ka nende vastavust (üheaegselt võetakse mõlemad ülemised või mõlemad alumised märgid), ja alles seejärel, kasutades tavalisi valemeid, leiavad otsitavate suuruste täpsed irratsionaalsed väärtused ($\sin x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \pm \sqrt{0{,}8}$, $\cos x = \mp \frac{1}{\sqrt{5}} = \mp \sqrt{0{,}2}$), ja ka ligikaudsed ratsionaalsed väärtused

$$(\sin x \approx \pm 0{,}8944 \text{ ja } \cos x \approx \mp 0{,}4472)$$

ning veenduvad graafilisel ja analüütilisel teel saadud tulemuste kooskõlas.

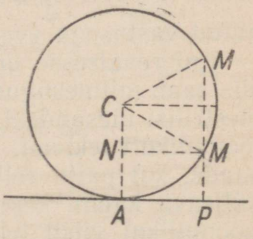
Kui ülesanne antakse üldkujul (andmed on väljendatud tähtedega), siis on väga kasulik pärast vastuse saamist tähtavaldisena võtta mingid sobivad arvulised väärtused ja teha nende järgi graafiline kontroll.

Sageli on hea kontrollida eri- ja piirjuhtumite vaatlemise teel. Olgu, näiteks, tarvis leida lõike pindala S, kui lõige läbib korrapärase nelinurkse püramiidi üht põhja tippu ning on risti vastasasuva külgservaga; kui on teada põhja serv a ning külgserva ja püramiidi kõrguse vaheline nurk α. Saades vastuse

$$S = a^2 \cos 2\alpha \sec \alpha,$$

kontrollime seda, tähele pannes, et 1) jääva a korral S kasvab võrdeliselt a ruuduga nagu peabki olema; 2) kui $a = \text{const}$ ja $a \to 0$, siis ka $S \to 0$, nagu peabki olema, sest $a \to 0$ korral lõike asend läheneb põhja asendile; 3) kui $a = \text{const}$ ja $a \to 45°$, siis $S \to 0$, mida pidigi ootama, sest sel korral lõige kõduneb külgservaks. Seda laadi kontroll näitab väga suure tõenäosusega saadud valemi õigsust ja omab kahtlemata ka omaette väärtust, harjutades õpilasi sügavamalt, mitte aga formaalselt, suhtuma leitud tulemustesse.

Väga sageli juhtub, et trigonomeetria võimaldab lahendada küsimust, mida saab lahendada ka ilma selleta. Peab igapidi kultiveerima mitmesuguste lahendamisvõtete kasutamist, selgitades nende eeliseid ja puudusi üksteise suhtes. Võtame, näiteks, ülesande: ehitada niisuguse ringjoone rida punkte, millel on antud raadius ning mis puutub antud sirgjoont selle antud punktis A. Konstruktiivne lahendus sirkli ja joonlaua abil on jõukohane juba VII klassi õpilasele, kuid see on teostatav ainult mitte väga suure raadiuse puhul. Kui aga r on niivõrd suur, et sirkli kasutamine saab võimatuks, näiteks kui $r = 10$ m, siis arvutame ringjoone punktide kaugused puutujast, võttes nende kaugused puutepunktist tõmmatud raadiusest meelevaldselt ($x = AP = NM$, $y = PM$, $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$, joon. 50), või jälle võtame meelevaldselt nurga $ACM = a$ ja leiame $x = r \sin a$, $y = r \cos a$. Arvutus trigonomeetriliste funktsioonide kaudu on kõige kasulikum, milles on kerge veenduda seda tegelikult teostades (võttes näiteks $r = 100$ mm, $x = 0$, 10, 20, ..., 90, 100 mm, $a = 0°$, 9°, 18°, ..., 81°, 90°). Lõpuks rakendades sirklit, veendume, et kõik nende tulemuste põhjal ehitatud punktid asuvad tõepoolest ringjoone veerandil; on huvitav märkida, et teise veerandi punktide saamiseks geomeetrilise lahendamisvõttega on vajalik juba teine valem ($y = r + \sqrt{r^2 - x^2}$), kuid trigonomeetrilise võtte puhul kasutatakse samu valemeid ($x = r \sin a$, $y = r \cos a$).



Joon. 50.

Keskkoolis kasutatakse N. Rõbkini «Trigonomeetria ülesannete kogu», mis 1948. a. ilmus 13. trükis ning sisaldab palju geomeetria ülesandeid, mis nõuavad trigonomeetria rakendamist. Eriti raskeid ülesandeid selles kogus ei ole, raskemate ülesannete puhul on enamasti antud näpunäiteid. Võib arvestada, et igaüks, kes on keskkooli lõpetanud, peab suutma toime tulla iga ülesandega sellest ülesannete kogust.

Paljudest revolutsioonieelseist trigonomeetria ülesannete kogudest märgime ära parima, mis on koostatud I. Vereštšagini poolt [V, 6]. Suuremal või vähemal määral leidub materjali harjutusteks igas trigonomeetria õpikus.

Õpetaja, kellel on soov rohkem saada praktilisi trigonomeetri-

lisi ülesandeid, leiab neid suures valikus õpikus [V, 13] ja väikeses raamatus [V, 22] ning detailses õpikus [III, 11].

Märgime veel, et teatav hulk mittegeomeetrilise sisuga raskemaid trigonomeetrilisi ülesandeid leidub raamatus [III, 24].

Väärtuslikku materjali leiab õpetaja raamatus [V, 35], mis klassifitseerib ja annab võtted kolmnurkade lahendamiseks mittepõhilistel juhtumitel.

Õpetaja peab oskama ka ise uusi ülesandeid koostada. Eriti hõlbus on saada uusi ülesandeid olemasolevaist ülesannetest pööramise teel, s. o. ühe andme asendamise teel otsitavaga ja otsitava ühe andmega. Näiteks, lahendanud ülesande kolmnurga pindala S leidmiseks antud nurkade A ja B ja ümbermõõdu $2p$ järgi, võib anda kaks uut ülesannet: leida $2p$ andmete A, B ja S järgi ja leida B andmete S, A, $2p$ järgi. Teine ülesanne on palju raskem kui esimene; enne on tarvis kindlaks teha samasus $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos 0{,}5\,A \cdot \cos 0{,}5\,B \cdot \cos 0{,}5\,C$.

Teiseks uute ülesannete tähtsaks allikaks on olemasolevate ülesannete üldistamine, sealhulgas olemasolevate geomeetriliste ülesannete üldistamine. Nii näiteks, võttes ülesande Nr. 19, § 9 N. Rõbkini «Geomeetria ülesannete kogust» keskkooli IX ja X klassile (II jagu, Stereomeetria, 1948) ja asendades selles antud nurga väärtuse 30° üldise väärtusega $0 < \alpha < 90°$, saame hea trigonomeetrilise ülesande püramiidi lõike pindala arvutamiseks, millele on osutatud eespool (lk. 384). Ta vastus ($S = a^2 \cos 2\alpha \cdot \sec \alpha$) redutseerub avaldiseks $S = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3}$, kui $\alpha = 30°$, ning ühtub raamatus antud vastusega (veel üks kontrollimise võte!).

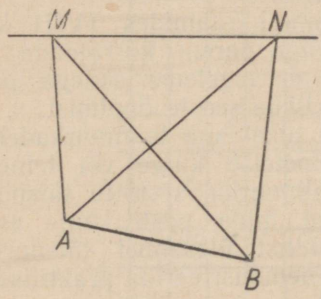
Kui reaalsesse ümbrusse teatava tähelepanelikkusega suhtuda, siis saab mitmesuguse sisu ja mitmesuguse raskusastmega trigonomeetrilisi ülesandeid koostada küsimuste alusel, mis õpilastel endil loomulikult tekivad. Seal on maas silindrikujuline vaat. Et teada saada, kui palju selles on põletisainet, pistab traktorist sellesse küljeava kaudu kepi ning vaatab, kui suur on vedeliku sügavus. Loomulikul viisil tekib ülesanne: leida antud raadiuse ja antud kõrgusega silindri osa ruumala V, mille silindrist lõikab ära tasapind, mis on paralleelne teljega ja asub teljest kaugusel h. V väärtuste tabel erinevate h väärtuste puhul ja vastav graafik eviksid koguni praktilist tähtsust. Ülesanne, millele õpilased saavad vastuse oma mõõtmise teel saadud andmete järgi ja mida, võib-olla, kontrollitakse oma algatusel eksperimentaalsel teel, avaldab hoopis teissugust mõju kui valmis ülesanne Nr. 29, § 21 N. Rõbkini ülesannete kogust. Peaasi, niisugused ülesanded jäävad püsivalt meelde.

Säärased ülesanded, mis tekivad õpilaste silma all (ja sageli nende enda algatusel) ümbritseva tegelikkuse küsimustest, äratavad alati erilist huvi. Neid on vaja igapidi kultiveerida, viies nende lahenduse numbrilise resultaadini, mille katseline kontroll on lahenduse loomulikuks lõpetuseks. Eriti palju sääraseid trigonomeetrilisi ülesandeid tekitavad geodeesia alased küsimused. Need on niinimetatud ülesanded maastikul, kõigepealt ülesanded ligipääsmatute

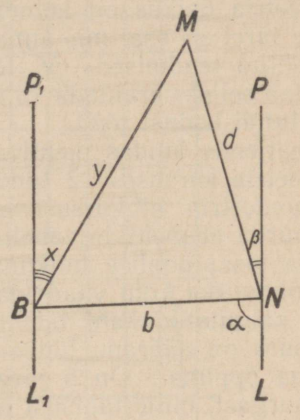
kauguste ja kõrguste kaudseks mõõtmiseks, mida vähemal või suuremal hulgal vaadeldakse igas trigonomeetria õpikus. Sääraste ülesannete suur tähtsus on kaheldamatu, kuid neid kasutatakse võrdlemisi vähe, osalt mõõtmisriistade puudumise ja organisatsiooniliste raskuste pärast (töö peab toimuma väljaspool klassi tavalist olukorda), osalt sellepärast, et õpetaja ise ei ole tuttav nende töödega. Siin võib soovitada järgmist:

1) lasta operatsioonid maastikul teostada õpilastel enestel, kas või üksikuil, ning arvutused nende operatsioonide alusel sooritada tavalise tunni ajal;

2) teostada tinglikud, «välimõõtmistööd» klassiruumis, näiteks mõõta seinal võetud märkide M ja N vaheline kaugus ilma nende juurde minemata, mõõtes otseselt kusagil põrandal võetud «baasi» AB ja neli nurka MAB, NAB, ABM, ABN (joon. 51). Täieliku efekti annavad säärased tööd sel puhul, kui on kasutada vähemalt ükski täpsem nurga mõõtmisriist; äärmisel juhtumil võib toime tulla tavalise klassi-malliga, mille läbimõõt on 25—30 cm ja mis hoolsal töötamisel võimaldab ära lugeda kraadi kümnendikke (mall asetatakse taburetile või lauale, viseeritavad kiired märgitakse nööpnõeltega või pingutatud peene niidiga)



Joon. 51.



Joon. 52.

Praktiliselt väga väärtuslikud ja huvitavad on ülesanded riigikaitse alalt. Toome näite.

Vaatleja N tegi kindlaks, et patarei B asub temast kaugusel $b = 850$ m suunas NB, mis põhja-lõuna sihiga moodustab nurga $\alpha = 13 - 20$ nurgamõõtja jaotust ida poole, kuid märk M asub kaugusel $d = 1100$ m suunas NM, mis põhja-lõuna sihiga moodustab $\beta = 3 - 45$ nurgamõõtja jaotust ida poole (joon. 52). Leida suund, milles patarei peab tulistama, et tabada märki, ja patarei kaugus märgist, s. o. nurk $P_1BM = x$ ja lõik $BM = y$.

Kahurväes on tavaks ringjoon jaotada 60 võrdseks osaks, mida nimetatakse «nurgamõõtja suurteks jaotusteks», ja igaüks neist osadest jaotatakse veel 100 võrdseks osaks, neid nimetatakse «nurgamõõtja väikesteks jaotusteks», nii et nurk, mis on nurgamõõtja 13—20 jaotust, võrdub $13 \cdot \frac{360}{60} + 20 \cdot \frac{360}{60 \cdot 100} = 78° + 1°12' = 79°12'$. Ülesanne on soovitav lahendada esmalt graafiliselt, kas või mõõdus 10 m ühes millimeetris, ning seejärel analüütiliselt.

Sõjaasjanduse küsimustega, mis trigonomeetria õpetamisel pakuvad huvi, võib tutvuda raamatu [V, 8] järgi.

II peatükk.

TRIGONOMEETRIA ALGKURSUS.

§ 7. Algkursuse mitmesugused variandid.

Üldised seisukohad iseseisva ja lõpuleviidud, s. o. praktiliste rakendusteni viidud trigonomeetria algkursuse soovitatavuse kohta on enamikus nüüdisaegseis programmides ja õpikuis pooldavad, kuid selle alg- ehk propedeutilise kursuse ülesehituse üksikasjades ilmneb suuri erinevusi. Praegu kehtiv keskkooli matemaatika programm eraldab VIII klassi geomeetria kursusest 12 tundi teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide õppimiseks veel enne seda, kui õpilased on tutvunud Pythagorase teoreemiga. A. Kisseljovi geomeetria õpikus on kolmnurga elementide vaheliste meetriliste seoste järel eri osa, mis annab nendest funktsioonidest programmis ettenähtud teadmised. V. Repjevi trigonomeetria metoodika õpik soovitab selleks eraldada 15 õppetundi klassis, arvestades seejuures 7—8 tundi kodust tööd.

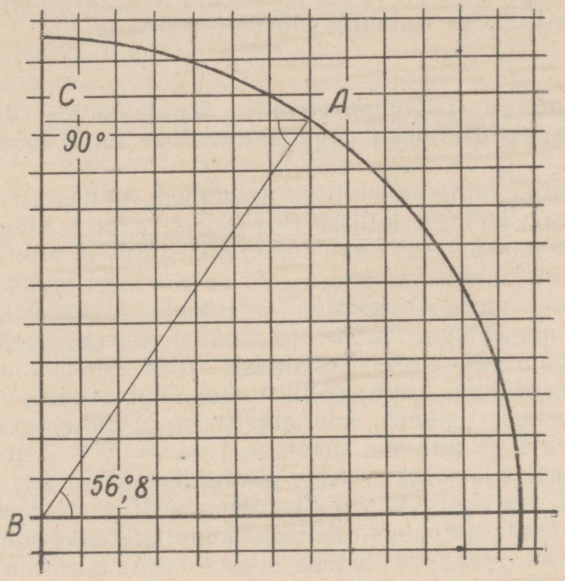
Vaatleme, kuidas kehtiva programmi raamides (VIII klassi geomeetria kursuses 12 tundi) on kõige parem korraldada seda trigonomeetria algkursust eeldades, et tegeleme sellega pärast kolmnurga elementide vaheliste meetriliste seoste õppimist.

Iga tasapinnalise hulknurga võib tükeldada kolmnurkadeks ja iga kolmnurka võib vaadelda kui teineteise külge või teineteise peale paigutatud kaht täisnurkset kolmnurka, seetõttu täisnurkne kolmnurk on säärane lihtsaim kujund, mida peab kõige esmalt tundma õppima. On 5 järgmist põhilist ülesannet täisnurksest kolmnurgast, mille tähtsust on kerge demonstreerida praktilise iseloomuga näidete varal.

1. On teada kaatetid a ja b; leida hüpotenuus c ning teravnurgad A ja B.
2. On teada kaatet a ja hüpotenuus c; leida teine kaatet b ning teravnurgad A ja B.
3. On teada hüpotenuus c ja üks teravnurk A; leida teine teravnurk B ning kaatetid a ja b.
4. On teada kaatet a ja selle vastas asuv teravnurk A; leida teine teravnurk B, teine kaatet b ja hüpotenuus c.
5. On teada kaatet a ja selle lähisnurk B; leida teine teravnurk A, teine kaatet b ja hüpotenuus c.

Kõiki neid ülesandeid saab kergesti lahendada graafiliselt mõõtjoonlaua, sirkli ja malli abil. Joonis on parem teha kas harilikus vihus ruudulisel paberil või spetsiaalsel millimeeterpaberil, mis annab suurema täpsuse. Joonise valmistamisel on täpsus väga tähtis: sirgjooned peavad olema võimalikult peened, teravaks teritatud pliiatsiga tõmmatud, mõõtmised teostatakse joonlaual ja mallil olevate vähimate jaotuste alajaotamisega silma järgi 5 või isegi 10 osaks.

Nõutagu, näiteks, leida maakera selle paralleeli raadius r, mis läbib Kalinini linna, teades maakera raadiust $R = 6370$ km ja selle linna geograafilist laiust 56°, 8. Küsimus taandub täisnurkse kolmnurga kaateti $AC = b$ leidmisele, kui hüpotenuus $AB = r$ ja teravnurk A on antud (joon. 53). Ehitades selle täisnurkse kolmnurga millimeeterpaberil, näiteks mõõdus 100 km ühes millimeetris, leiame otsese mõõtmise teel $b = 35$ mm, ning otsitav raadius on seega ligikaudu 3500 km.



Joon. 53.

Geomeetriliste ülesannete lahendamise graafilise meetodi tundmine omab suurt väärtust nii otseselt praktilises mõttes kui ka vahendina küsimuse sisu parimaks selgitamiseks algajaile; peab taotlema, et õpilased vabalt ja kindlalt seda oskavad kasutada.

Kuid see meetod, nagu näidete varal on kerge selgeks teha, annab esiteks piiratud täpsusega tulemused ja teiseks, teda ei saa alati kasutada. Täpsust saab suurendada mõõtkava suurendamisel, kuid siin tõkestavad meid joonise võimalikud mõõdud. Graafiline meetod ei ole üldse rakendatav, kui andmete ja otsitavate hulgas esinevad lõigud suuruselt üksteisest väga erinevad. Loomulikult tekib küsimus, kas ei saa eespool nimetatud 5 põhilist ülesannet lahendada arvutamisega.

Geomeetria annab kaks võrrandit, mis seovad täisnurkse kolmnurga elemente: üks väljendab Pythagorase teoreemi, nimelt $a^2 + b^2 = c^2$, ja teine väljendab teravnurkade vahelist seost, nimelt $A + B = 90°$. Kuid viies põhilises ülesandes on igaühes

kolm tundmatut. Nende leidmiseks on tarvis veel üks võrrand, mille saame, kui võtame tarvitusele niinimetatud teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid.

Trigonomeetria algkursusele määratud aja piiratuse tõttu peab õppimisele kuuluvat materjali väga hoolikalt valima.

Teravnurga trigonomeetrilisi funktsioone õpitakse trigonomeetria algkursuses ainult niivõrd, kuivõrd see on vajalik täisnurksete kolmnurkade lahendamiseks. Nimetatud viie põhilise ülesande lahendamise oskus peab olema teadlikult, kindlalt ja püsivalt omandatud, et seda oleks võimalik edaspidi kasutada.

§ 8. Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid. Kaks peamist ülesannet trigonomeetriliste funktsioonide kohta.

Olgu antud mingi täisnurkne kolmnurk, milles on teada teravnurk A. Tema kolmest küljest (kaatetitest a ja b ning hüpotenuusist c) saab moodustada kuus suhet, mis sõltuvad ainult nurgast A, kuid ei sõltu kolmnurga suurusest; seda väidet erilise teoreemina saab tõestada sarnaste kolmnurkade teatud omaduste põhjal, see õigustabki nende kuue suhte käsitamist nurga funktsioonidena: nurga A igale väärtusele vastab iga suhte täiesti kindel väärtus. Siis defineeritakse kuus põhilist trigonomeetrilist funktsiooni: siinus, koosinus, tangens, kootangens, seekans ja koosekans täisnurkse kolmnurga külgede suhetena.

Trigonomeetria algkursuses piirdutakse tavaliselt 4 funktsiooniga ($\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$); väga hästi saab läbi ka kolme esimesega. Õpilased peavad definitsioonid kindlalt omandama; peab rõhutama, et neis kõneldakse t e r a v n u r g a funktsioonidest, sest edaspidi tulevad vaatlusele uued, üldisemad definitsioonid. Eespool toodud trigonomeetriliste funktsioonide lühendatud tähised on praegusel ajal üldtunnustatud ja seetõttu ei tule neist kõrvale kalduda.

Nende definitsioonide esimese rakendusena võib tuletada valemid t ä i e n d u s n u r k a d e puhuks:

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A, \qquad \operatorname{tg}(90^\circ - A) = \operatorname{ctg} A,$$
$$\cos(90^\circ - A) = \sin A, \qquad \operatorname{ctg}(90^\circ - A) = \operatorname{tg} A.$$

Vastavalt definitsioonidele saame

$$\sin B = b : c, \qquad \operatorname{tg} B = b : a,$$
$$\cos B = a : c, \qquad \operatorname{ctg} B = a : b,$$

kuid $B = 90^\circ - A$, seetõttu $\sin(90^\circ - A) = \cos A$ jne.

Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide teiseks rakendamise võimaluseks on nende funktsioonide väärtuste arvutamine nurkadele 30°, 45°, 60° (Pythagorase teoreem on vajalik).

A	$\sin A$	$\cos A$	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{ctg} A$
0°	$\frac{1}{2}\sqrt{0}=0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$	0	∞
30°	$\frac{1}{2}\sqrt{1}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\approx 0{,}8660$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}\approx 0{,}5774$	$\sqrt{3}\approx 1{,}73205$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\approx 0{,}7071$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\approx 0{,}7071$	1	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\approx 0{,}8660$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}\approx 1{,}73205$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}\approx 0{,}5774$
90°	$\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}=0$	∞	0

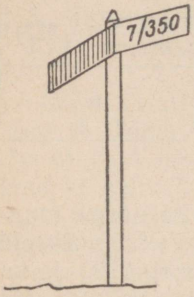
Edasi vaadeldakse siinuse ja koosinuse muutumist nurga muutumisel (võetakse rida võrdsete hüpotenuusidega täisnurkseid kolmnurki — esimene lähenemine trigonomeetrilisele ringile) ja ka tangensi muutumist (võetakse rida ühise kaatetiga täisnurkseid kolmnurki) ning tehakse kindlaks, et kui $A \to 0$, siis $\sin A \to 0$, $\cos A \to 1$, $\operatorname{tg} A \to 0$, ja kui $A \to 90°$, siis $\sin A \to 1$, $\cos A \to 0$, $\operatorname{tg} A \to \infty$; peab selgeks tegema viimase tähistuse tingliku tähenduse: kui $A \to 90°$, siis tangens kasvab tõkestamatult, kui $A = 90°$, siis tangensil pole väärtust olemas. Siin on soovitav esitada kõik liikumises: punkt B liigub ringjoone kaart mööda, mille keskpunktiks on A, punkt C liigub selle raadiust mööda jne. Tulemusena saadakse trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste tabel (vt. ülal); siinuse ja koosinuse väärtuste üleskirjutuste eriline kuju kergendab nende meelespidamist.

Märgime, et nurga kasvamisel 0° kuni 90° iga trigonomeetriline funktsioon muutub ainult ühes suunas (monotoonselt): kas ainult kasvab, nagu siinus ja tangens, või ainult kahaneb, nagu koosinus ja kootangens. Siit saame tähtsa järelduse: mitte üksnes et teravnurga igale väärtusele vastab iga trigonomeetrilise funktsiooni üks kindel väärtus, vaid ka ümberpöördult: mis tahes trigonomeetrilise funktsiooni igale väärtusele vastab teravnurga üks kindel väärtus. Sellega seoses võib teravnurga trigonomeetrilisi funktsioone vaadelda kui erilisi nurga mõõte, mida praktilises elus sageli kasutatakse. Nii, näiteks, pannakse raudtee äärde üles kallaku näitajad, nagu on kujutatud joonisel 54. Siin esimene arv ütleb, et tee kaldenurga (tee tasapinna ja rõhttasapinna vahelise nurga) tangens on 0,007: iga meetri ulatusel tee tõuseb 7 mm; teine arv (350) näitab niisuguse kaldega tee pikkust (meetrites).

Siis tuleb siirduda kahe põhilise ülesande käsitlemisele trigo-

nomeetriliste funktsioonide alal: 1) antud on teravnurk A; leida trigonomeetriliste funktsioonide vastavad väärtused; 2) antud on tundmatu nurga mingi trigonomeetrilise funktsiooni väärtus; leida nurga suurus.

Mõlema ülesande ligikaudsed lahendused saab kergesti vastava konstruktsiooni teel (mõõtjoonlaua, sirkli ja malli abil). Näiteks, et leida 35° nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtused, joonestame raadiusega $c = 100$ mm ringjoone kaare BD, millele vastav kesknurk on 35°, ning tõmbame kaare ühest otspunktist raadiusele AD ristsirge (A on keskpunkt). Mõõtmisel saame $a \approx 57$ mm, $b \approx 82$ mm. Siit järeldame, et $\sin 35°,0 \approx 0,57$, $\cos 35°,0 \approx 0,82$.



Joon. 54.

Väärtus $c = 100$ mm on võetud jagamise mugavuse pärast, selle asemel võib võtta mis tahes teise väärtuse. Jagades a arvuga b saame $\operatorname{tg} 35°,0 \approx 0,70$, b jagamine a-ga annab $\operatorname{ctg} 35°,0 \approx 1,44$. Tangensi saamiseks on mugavam ehitada antud teravnurgaga täisnurkne kolmnurk, mille kaatet $b = 100$ mm; vastaskaatet tuleb siis 70 mm, nii saame jälle sama tangensi väärtuse 0,70.

Samal viisil lahendatakse ka pöördülesanne. Kui näiteks on teada, et $\sin A = 0,61$, siis nurga A saamiseks ehitame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuus $c = 100$ mm ja kaatet $a = 61$ mm, malliga mõõtmisel saame nurga A väärtuseks 38°. Hüpotenuusi c pikkuseks on võetud 100 mm ainult mugavuse pärast, selle asemel võib võtta mis tahes teise pikkuse, muutes siis ka vastavalt kaateti a pikkust (silmas pidades, et peab olema rahuldatud seos $a : c = 0,61$), see käib ka kaateti a kohta. Kerge on näidata, kuidas samasuguse graafilise võttega saab teravnurga leida teiste trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste järgi, ning tuleb saavutada selle graafilise võtte täielik omandamine õpilaste poolt, pannes sellega kindla aluse kogu edaspidisele tööle.

§ 9. Trigonomeetriliste funktsioonide tabelid.

Kaks äsja vaadeldud põhilist ülesannet trigonomeetriliste funktsioonide peale lahendatakse praktikas alati eriliste tabelite abil, mida sageli nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide *loomulike* väärtuste tabeleiks ehk *loomulikeks* trigonomeetrilisteks tabeleiks (et neid eristada trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste *logaritmide* tabeleist, millega õpilased tutvuvad hiljem). A. Kisseljovi geomeetria õpikus on säärane tabel, mis annab iga 1° tagant võetud nurkade nelja funktsiooni väärtused 5 kohaga koma järel, ning Rõbkini trigonomeetria ülesannete kogus ka on niisugune tabel, mis annab funktsioonide väärtused ainult 3 kohaga koma järel. Kaks eri tabelit, üks siinuse ja koosi-

nuse, teine tangensi ja kootangensi jaoks, on V. Bradise matemaatiliste tabelite kogus; siin funktsioonide väärtused on antud 4 kohaga koma järel nurkadele iga $0°{,}1 = 6'$ tagant. Et neid tabeleid kasutavad IX ja X klassi õpilased, siis on otstarbekohane kasutada neid ka VIII klassis.

Oletades, et õpilased oskavad teadlikult kasutada peaaegu ühtlaselt muutuvate funktsioonide tabeleid (oskavad interpoleerida, oskavad kasutada lineaarse interpolatsiooni abivahendeid, millest oli juba juttu III osas), piirdume mõne näpunäitega loomulike trigonomeetriliste tabelite kohta.

Trigonomeetria algkursuses ei saa selgitada, kuidas tabelid on koostatud; tuleb piirduda seletustega, et trigonomeetriliste funktsioonide ligikaudsed väärtused 2 kuni 3 kohaga koma järel täiskraadides väljenduvate nurkade jaoks võib leida eespool kirjeldatud graafilise võttega, kuid mis tahes nurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamisest suurema täpsusega kõneldakse IX klassis.

On tähtis selgeks teha, et täiendusnurkade funktsioonide valemid võimaldavad läbi saada ainult kahe tabeliga, millest saame korraga nelja trigonomeetrilise funktsiooni väärtused: tabel, mis annab siinused nurkadele 0° kuni 90°, on ühtlasi koosinuste tabeliks nurkadele 90° kuni 0°; lahutamise (vahe 90° — A otsimise) vajadus kõrvaldatakse nurkade teise nummerdamisega. Sama lugu on $\operatorname{tg} A$ ja $\operatorname{ctg}(90 - A)$ korral.

Iga tabeliga töötades tuleb *interpoleerida*, s. o. leida tabelis antud kahe argumendi väärtuse vahel oleva argumendi väärtusele vastav funktsiooni väärtus («lugeda tabeli ridade vahelt»). Meenutame, et selle raamatu III osas oli juttu koolis ainsana kasutatava *lineaarse* interpolatsiooni lubatavuse tingimusest: on tarvilik ja piisav peaaegu ühtlane funktsiooni muutumine, täpsemalt üteldes, et kõrvuti olevad tabelivahede väärtused antud piirkonnas ei erineks teineteisest rohkem kui 4 viimase järgu ühiku võrra. Kui see vahe on 4-st suurem, siis tuleb tabeliväärtused ümardada ja interpoleerida vähema kohtade arvuga koma järel. Näiteks, A. Kisseljovi geomeetria õpikus toodud siinuste tabelis leiame $\sin 43° = 0{,}68200$, $\sin 44° = 0{,}69466$, $\sin 45° = 0{,}70711$, seega vastavad kõrvuti olevad tabelivahed on 1 266 ja 1 245; lineaarne interpolatsioon ei ole lubatav, kuid ta saab lubatavaks, kui tabeliväärtused eelnevalt ümardada 4 kohani koma järel: $\sin 43° = 0{,}6820$, $\sin 44° = 0{,}6947$, $\sin 45° = 0{,}7071$, tabelivahed on nüüd 127 ja 124. Neljakohalises siinuste tabelis argumendivahega 1° on lineaarne interpolatsioon igal pool lubatav: nagu tabeli ülevaatus või lihtne arvutus näitab, tabelivahed muutuvad kõige kiiremini niisuguste nurga väärtuste puhul, mis lähenevad 90°-le, kuid nende tabelivahede vahe ei ületa kusagil 4 viimase järgu ühikut ($4 \cdot 10^{-4}$). Tabelivahed ise on üsna suured, eriti tabeli alguses (175 — 174 jne.), see teeb interpolatsiooni raskemaks. Tabel argumendi-

vahega 6′ on sellest puudusest vaba, sest selles ei ole tabelivahesid, mis on suuremad kui 18.

Mõnevõrra keerulisem on lugu tangensite tabeliga: 90°-le lähenemisel tabelivahed muutuvad üha kiiremini (90° puhul funktsioon katkeb lõpmatu kauges punktis). Argumendi vahe puhul 1° on lineaarne interpolatsioon lubatav 3 kohani koma järel umbkaudu kuni $A = 60°$; N. Rõbkini ülesannete kogus leiduva tabeli järgi saame $\operatorname{tg} 59° = 1{,}664$, $\operatorname{tg} 60° = 1{,}732$, $\operatorname{tg} 61° = 1{,}804$, tabelivahed on 66 ja 72. V. Bradise tabelites on 60°-st suuremate nurkade tangensid antud 4 tüvenumbriga, lineaarne interpolatsioon ilma eelneva ümardamiseta on lubatav umbkaudu kuni 87°-ni ($\operatorname{tg} 87°06′ = 19{,}08$, $\operatorname{tg} 87°12′ = 19{,}74$, $\operatorname{tg} 87°18′ = 20{,}45$, tabelivahed on 66 ja 71), kaugemal on tarvis ümardada. Näiteks $\operatorname{tg} 89°00′ = 57{,}29$, $\operatorname{tg} 89°06′ = 63{,}66$, $\operatorname{tg} 89°12′ = 71{,}62$, tabelivahed on 6,37 ja 7,96, lineaarne interpolatsioon annab usaldatavad tulemused ainult täisarvudes arvutades. Sellepärast on tabeli lõpp vähema argumendivahega (6′ asemel ainult 1′), ning nurkade väärtuste ümardamisel minutiteni interpolatsioon ei olegi vajalik.

Puudutame veel üht raskust, millega õpilastel, kel varem on tegemist olnud ainult kasvavate funktsioonide (ruutude, ruutjuurte ja teiste) tabelitega, tuleb kokku puutuda koosinuse ja kootangensi väärtuste otsimisel tabelist: need funktsioonid argumendi kasvamisel ei kasva, vaid kahanevad, interpolatsiooni tegemisel tuleb parandus, mis vastab antud argumendist vähemale tabelis leiduvale antud argumendile lähima argumendi kasvule, lahutada sellele lähimale argumendile vastava funktsiooni väärtusest (kui tabelist võetakse antud argumendist suuremale antud argumendile lähimale argumendi väärtusele vastav funktsiooni väärtus, siis sellele funktsiooni väärtusele tuleb vastav parandus liita), s. o. tuleb toimida ümberpöördult sellele, kuidas toimiti kasvava funktsiooni puhul. Näiteks, et leida $\cos 27°14′$, võtame tabelist $\cos 27°12′ = 0{,}8894$ ja l a h u t a m e sellest valmis paranduse 3, mis vastab kasvule $27°14′ - 27°12′ = 2′$, saame 0,8891; et leida $\cos 27°17′$, võtame $\cos 27°18′ = 0{,}8886$ ja l i s a m e sellele valmis paranduse 1, mis vastab puudujäägile $27°18′ - 27°17′ = 1′$. Peab õpilasi harjutama igakord mõtlema sellele, mis suunas antud funktsioon muutub argumendi kasvamisel, ning võimalust mööda koosinus ja kootangens asendada täiendusnurga siinusega ja tangensiga. Pöördülesande lahendamisel, s. o. nurga otsimisel tema antud trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse järgi, on kasulik nõuda lähima vähema ja lähima suurema tabeliväärtuse üleskirjutamist (vähemalt alguses). Näiteks, et leida nurk A, teades, et $\sin A = 0{,}7038$, ning võttes tabelist $\sin 44°42′ = 0{,}7034$ ja $\sin 44°48′ = 0{,}7046$, peame teadma, et ülejääk $7038 - 7034 = 4$ (kümnetuhandikku) on parandus, mis vastab 2′-le, seepärast $A = 44°42′ + 2′ = 44°44′$; siin nurga kasvamisel funktsioon kasvab ja et saada suuremale funktsiooni väärtusele vastav nurk, peame need 2′ lisama (koosinuse ja kootangensi puhul oleks pidanud lahutama).

§ 10. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.

Pärast seda, kui õpilased on omandanud teravnurga 4 trigonomeetrilise funktsiooni definitsioonid ning õppinud tabelite abil lahendama kaks põhilist ülesannet nende kohta, peab tagasi tulema 5 põhilise ülesande käsitlemisele täisnurksetest kolmnurkadest (§ 7). Definitsioonidest tulenevad otseselt järgmised teoreemid.

1. Kaatet võrdub hüpotenuusi ja selle kaateti vastasoleva teravnurga siinuse või selle kaateti juures oleva teravnurga koosinuse korrutisega.

2. Kaatet võrdub teise kaateti ja esimese kaateti vastasoleva teravnurga tangensi või selle kaateti juures oleva teravnurga kootangensi korrutisega.

Need kahe teoreemi sõnastused väljendavad 8 järgmist võrdust:

$$a = c \sin A, \quad a = c \cos B, \quad b = c \sin B, \quad b = c \cos A.$$
$$a = b \operatorname{tg} A, \quad a = b \operatorname{ctg} B, \quad b = a \operatorname{tg} B, \quad b = a \operatorname{ctg} A.$$

Ühendades nendest 8-st võrrandist mis tahes võrrandi kahe varem tuntud võrrandiga, nimelt

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ ja } A + B = 90°,$$

saame kolm üksteisest sõltumatu * võrrandi süsteemi, millest piisab täisnurkse kolmnurga kolme elemendi leidmiseks kahe antud elemendi järgi igas ülesandes viie põhiülesande hulgast. Mõnikord on kasulikum võtta kaks võrrandit 8 uue võrrandi hulgast ja üksainus vanadest. Näiteks, lahendades täisnurkset kolmnurka kahe antud kaateti a ja b järgi, võib hüpotenuusi leida võrrandist $a^2 + b^2 = c^2$, teravnurga A võrrandist $a = b \operatorname{tg} A$, teise teravnurga võrrandist $A + B = 90°$, kuid ruutude tabeli puudumisel võib hüpotenuusi c leida võrrandist $a = c \sin A$ pärast seda, kui on leitud nurk A.

Toome näitena järgmise ülesande lahenduse: leida täisnurkse kolmnurga otsitavad elemendid teades, et ta hüpotenuus $c = 6370$ km ja teravnurk $A = 56°48'$.

Siin $B = 90° - A = 89°60' - 56°48' = 33°12'$. Graafiline lahendamine annab

$$a \approx 5300 \text{ km}, \quad b \approx 3500 \text{ km}.$$

Kontroll: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{28\,090\,000 + 12\,250\,000} = \sqrt{40\,340\,000} \approx 6351$ (6370 asemel). Erinevus kolmandas tüvenumbris on täiesti lubatav, sest a ja b on leitud joonise järgi ainult 2 tüvenumbriga.

Lahendamine arvutamise teel: $a = c \sin A = 6370 \cdot 0{,}8368 \approx \approx 5330$, $B = 90° - A = 33°12'$,

$$b = c \sin B = 6370 \cdot 0{,}5476 \approx 3488.$$

*) Meenutame, et süsteemi võrrandeid nimetatakse sõltumatuiks, kui neist ühtki ei saa teistest tuletada.

Kontroll:

$$c = \sqrt{2841 \cdot 10^4 + 1217 \cdot 10^4} = \sqrt{4058 \cdot 10^4} \approx 6370.$$

Märgime, et põhiülesandeid 4 ja 5, kus on antud kaatet ja selle lähisnurk või vastasnurk, ei tarvitse erinevaiks lugeda, sest niipea kui on antud üks teravnurk, võib kohe (peast) leida ka teise. Niiviisi saame ainult 4 põhilist ülesannet, ning juhtumil, kui teostatakse eespool mainitud eelnev ettevalmistus, saavutame ilma eriliste raskusteta kindla vilumuse nende lahendamises: selles seisab trigonomeetria algkursuse kogu ülesanne.

Õpetajal on kasulik omada kõigi 5 elemendi suurema täpsusega arvutatud väärtuste väike tabel mitme meelevaldse täisnurkse kolmnurga jaoks. Siis ta võib õpilastele anda mis tahes kaks elementi, teades seejuures ette, missugused on otsitavate väärtused. Säärane tabel on näiteks Rõbkini ülesannete kogus, teda ei ole raske ka ise valmistada.

Igas trigonomeetria õpikus ja ülesannete kogus leidub rida rakendusliku iseloomuga ülesandeid, mis on lahendatavad selle ülalnäidatud väikese teadmiste varu alusel trigonomeetriast. On väga soovitav lahendada ülesanne esmalt graafiliselt, saades iga otsitava väärtuse 2—3 esimest tüvenumbrit, ning seejärel analüütiliselt, piirdudes keskkoolis tavalise täpsusega, arvutades tulemused 4 tüvenumbriga. Et mitmekohaliste arvude korrutamisele ja jagamisele mitte palju aega kulutada, on parem võtta andmed väheste tüvenumbritega (1—2—3), jälgides seda, et andmete täpsus vastaks neile tingimusile, milles need andmed on saadud. On mõttetu näiteks anda tuletorni ja laeva vaheliseks kauguseks 5,2404 miili *, sest meremiil (Maa meridiaani kaare minut) on 1852 m ja selle kümnetuhandik on ainult 18,52 cm, kuid merel mõõdetakse kaugusi «kaabelmõõdu» (0,1 miili = 185,2 m) täpsusega.

§ 11. Trigonomeetria algkursus.

Trigonomeetria algkursuse õppimisel VIII klassis tuleb kasutada A. Kisseljovi geomeetria õpikut (I j.), kus sellele ainele on pühendatud (1949. a. trükis) 5 lehekülge teksti (§§ 203—208) ja üks tabel raamatu lõpus. Käsitlus on äärmiselt tihe, mõnes suhtes isegi puudulik; näiteks tähtsaimale küsimusele täisnurksete kolmnurkade lahendamisest on antud kõigest mõni rida § 208; 30°-, 45°- ja 60°-se nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtustest pole üldse midagi öeldud. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste tabeli ehitus ei ole sobiv; selle tabeli kasutamisel tuleb seal antud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused ümardada 4 tüve-

*) P. Zlottšanski, Tasapinnalise trigonomeetria harjutuste ja ülesannete kogu, 1915, lk. 104.

numbrini, tagades sellega lineaarse interpolatsiooni võimaluse (90°-le lähedaste nurkade tangensid tuleb veel rohkem ümardada).

Võib kindlasti ütelda, et kui piirduda selle materjaliga, mis selles õpikus on esitatud, siis õpilased trigonomeetria algkursuse õppimisel ei omanda mingeid kasulikke teadmisi ega vilumusi. Minimaalne ja 12—15 tunni kestel teostatav laiendamine on eespool (§§ 7—10) vaadeldud. Säärase laiendamise baasil on võimalik N. Rõbkini trigonomeetria ülesannete kogu § 6 toodud ülesannete lahendamine täisnurksete kolmnurkade kohta. See on miinimum; kui VIII klassi õpilane ei ole suuteline neid ja neile sarnaseid ülesandeid lahendama, siis teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide õppimisele kulutatud aeg selles klassis on olnud kasutu.

Sageli tuleb ette, et trigonomeetria algkursuse õppimisel VIII klassis omandatud teadmised trigonomeetriast jäävad edaspidises õppetöös hoopis kasutamata ja seetõttu muidugi ununevad, nii et IX klassis tuleb asjaga uuesti alustada. Säärane olukord on täiesti ebanormaalne. Täisnurkse kolmnurga külgede ja nurkade vahelised seosed annavad võimaluse uut moodi ja sageli palju paremini lahendada mitmeid geomeetria küsimusi. Näiteks, ülesanded, mis puhtgeomeetriliselt on lahendatavad ainult nurkade mõnede eriväärtuste (30°, 45°, 60°) korral, on lahendatavad nurkade mis tahes väärtuste puhul, ja pealegi veel lihtsamalt, kui kasutada trigonomeetrilisi funktsioone. Olgu antud näiteks ülesanne: avaldada ringi segmendi kõrgus ja pindala raadiuse r kaudu, kui segmendile vastav kesknurk on 60°. Selle ülesande lahendus (nurga eriväärtuse puhuks), mis on toodud täielikult A. Kisseljovi geomeetria õpikus, 1948. a. trükk, § 269, Nr. 13, haarab peaaegu terve lehekülje sellal, kui samas raamatus poolesaja lehekülje võrra varem tuletatud valemite abil lahendus nurga mis tahes väärtuse puhul on palju lihtsam. Teine näide: miks kolmnurga pindala vaatlemisel mitte anda kasulik valem $S = 0{,}5\,ab \sin C$, mis väga kerge on saada, kui $C < 90°$ ($S = 0{,}5\,bh_6$, $h_6 = a \sin C$)? Tuletamine ei ole raskem ka sel puhul, kui $C > 90°$, asendades ta sel korral valemiga $S = 0{,}5\,ab \cdot \sin (180° - C)$, sest VIII klassi õpilased ei tea veel, et $\sin (180° - C) = \sin C$.

Pärast teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide sissetoomist saab geomeetria käsitlust tunduvalt paremaks teha. A. Kisseljovi geomeetria õpikus ei ole seda tehtud. Varasemais trükkides selles õpikus trigonomeetriliste funktsioonide peatükki ei olnud; kui see võeti sisse, jäi järgnev materjal kahjuks ümber töötamata.

TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE ÜLDISED DEFINITSIOONID.

§ 12. Suunaga lõigud (vektorid). Projektsioonid.

Trigonomeetria ja selle geomeetriliste rakenduste käsitlemisel mis tahes meetodiga tuleb kasutada suunaga lõigu mõistet.

Suunaga lõik on niisugune lõik, mis kulgeb kindlas suunas, ja nimelt ta alguspunktist lõpp-punktisse. Suunaga lõigu üldkasutatavaks nimetuseks on «vektor». See ladinakeelne sõna on otseses tõlkes «vedaja», siin sobiks paremini ta tähenduseks «üleminek». Tähistades suunaga lõiku kahe tähega, mis osutavad ta algust ja lõppu, peame silmas pidama nende kindlat järjekorda: esimene täht tähistab algust, teine lõppu; lõikude AB ja BA suunad ei ole samad, vaid vastupidised. Suunaga lõigu mõistes on ühendatud kaks ideed: kaugus ja liikumine, õpetamisel on soovitav seda igati rõhutada. Suunaga lõike niiviisi mõistes on täiesti loomulik otsustus, et $AB + BA = 0$; üleminek punktist A punktisse B koos sellele järgneva üleminekuga punktist B punktisse A viib meid algpunktisse A, s. t. on samaväärne igasuguse ülemineku puudumisega ehk nullüleminekuga («null-vektoriga»), mida väljendab arv 0. Siit järeldub sama loomulikult otsustus, et $BA = -AB$: kui üleminekut AB iseloomustada positiivse arvuga a, mis ühtub (absoluutse, suunata) lõigu AB pikkust väljendava arvuga, siis vastupidine üleminek BA tuleb tähistada negatiivse arvuga $-a$. Vaadeldes kõiki võimalikke suunaga lõike ühel ning samal sirgel, määratakse nende märgid selle põhjal, kuidas see sirge on orienteeritud, s. o. missugune tema kahest võimalikust suunast on võetud positiivseks (meenutame, et iga orienteeritud sirget nimetatakse t e l j e k s): horisontaalselt asetseva telje positiivseks suunaks võetakse tavaliselt suund vasakult paremale, sellega ristiasetseval teljel suund alt üles. Vaadeldes kolme punkti, mis asetsevad ühel teljel, ning mõistes suunaga lõiku üleminekuna, saame, et $AB + BC = AC$, kuidas need kolm punkti ka asetseksid (Schali teoreem): üleminek punktist A punkti B koos sellele järgneva üleminekuga punktist B punkti C on samaväärne üleminekuga punktist A korraga punkti C (on kasulik vaadelda kõiki $3! = 6$ punktide A, B ja C teljel asetsemise juhtumit).

Teine mõiste, mida trigonomeetriliste funktsioonide üldistes definitsioonides ka kasutatakse kas ilmsel või varjatud kujul, on mõiste lõigu projektsioonist teljel. Selle mõistega õpilased on hästi tuttavad geomeetria kursusest, kuid trigonomeetria kursuses selle juurde tagasi tulles peab seda mitte üksnes meelde tuletama, vaid ka mõnevõrra laiendama, ja nimelt: peab vaatlema s u u n a g a lõigu (ortogonaalset) ristprojektsiooni. Kui on antud mingi telg X (s. o. sirge sellel näidatud positiivse suunaga ehk orienteeritud sirge) ja mingi suunaga lõik AB, mis ei tarvitse tingimata aset-

seda teljel, vaid kus tahes telje tasapinnal, siis ta projektsiooniks sellel teljel nimetatakse suunaga lõiku A_xB_x, mille otspunktideks on punktidest A ja B teljele tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Peab vaatlema rida erijuhtumeid, mis siinjuures võivad esineda: projektsioon A_xB_x võib olla positiivne või negatiivne lõik, absoluutselt vähem kui AB, võib olla võrdne lõiguga AB või lõiguga $-AB$, võib saada punktiks. On soovitav selgitada, et tasapinnal punkti M ristkoordinaadid x ja y ei ole midagi muud kui suunaga lõigu OM projektsioonide mõõdud telgedel X ja Y, kus O on koordinaatide algus. Edaspidi on vajalik ka mõiste murdjoonest, kui teda moodustavate suunaga lõikude ahelast, ja selle sulgejast, ning teoreem sulgeja projektsiooni võrdumisest moodustajate samal teljel võetud projektsioonide summaga, teoreem, mis väga kergesti on tõestatav Schali teoreemi abil. Võib piirduda kahest lülist koosneva murdjoonega: suuremat arvu trigonomeetria kursuses ei ole vaja.

§ 13. Kaare ja nurga mõiste üldistamine. Suunaga kaared ja nurgad.

Trigonomeetriliste funktsioonide üldiste definitsioonide ettevalmistamine nõuab kõrvuti suunaga lõigu ja selle teljel võetud projektsiooni mõistetega veel nurga ja kaare mõistete üldistamist. Geomeetrias õpilased harjusid tegelema ainult sääraste nurkadega, mis ei ületa sirgnurka, sest ainult sellised nurgad on vajalikud kolmnurkade ja kumerate hulknurkade õppimisel. Vaadeldes mittekumeraid, kuid l i h t s a i d hulknurki (s. o. sääraseid, mille kontuur ei lõiku iseendaga), kohtame k u m e r a i d nurki, s. o. nurki 180° ja 360° vahel. Võib ütelda, et geomeetrias õpilased käsitasid nurka tasapinna osana. Trigonomeetrias aga kohtame mis tahes suurusega nurki. Siin peab nurka vaatlema mitte kui tasapinna osa, vaid kui pöörlemise mõõtu. Näitliku ettekujutuse annab kella osutite vaatlemine. Märgime minuti-osuti seisundi kell 12, hakkame vaatlema nurki tema selle seisundi ja seisundi vahel mitmesuguseil aja momentidel: 15 minuti pärast see nurk on 90°, 30 minuti pärast 180°, tunni aja pärast 360°, poolteise tunni pärast 540° jne. Võimalus pöörelda kahes vastupidises suunas viib vajadusele vaadelda positiivseid ja negatiivseid nurki, kusjuures positiivseks suunaks loetakse tavaliselt kellaosuti pöörlemise suunale vastupidist suunda, negatiivseks — päripidist suunda. Peab märkima, et praktikas kasutatakse nurkade mõõtmisel kolme ühikut: täispööret, mis tekib nurga liikuva haara esimesel kattumisel liikumatu haaraga; täisnurka, s. o. nurka, mis on võrdne oma kõrvunurgaga või täispöörde veerandiga; nurgakraadi, s. o. 1 : 90 täisnurgast või 1 : 360 täispöördest.

Analoogiline olukord on kaartega (on silmas peetud ainult ringjoone kaari). Geomeetrias õpilased defineerisid kaart ringjoone osana ning vaatlesid kaari, mis ei ületanud tervet ringjoont, trigo-

nomeetrias aga tuleb tegelda kaartega, millel on mis tahes suurus $-\infty$ kuni $+\infty$. Niisugust kaart võib defineerida sellise punkti jäljena, mis liigub ringjoont mööda ühes või teises suunas alates mingist algseisust; säärast kaart võib kujutleda niidina, mida mähitakse ümmarguse silindri ümber (samuti nagu pööranöör mähib end võlli ümber). Kaari mõõdetakse tavaliselt kaarekraadidega; rakendades analoogiat nurkadega, selgitame, et kaari mõõdetakse ka täisringjoontega (näiteks öeldakse, et kaar on nii- ja niisugune osa ringjoonest, et kaar on nii- ja nii mitu ringjoont) ja kvadrantidega ehk ringjoone veerandite ga. Ei ole üleliigne ka seletada, mis tähendab väljend «n-da kvadrandi kaar (n-da veerandi kaar)»; nõnda nimetatakse kaart, mis on vähem kaarest n kvadranti, kuid on suurem kaarest n-1 kvadranti.

Kaarte mõõtmise teissugusest võttest, mida laialt kasutatakse trigonomeetrias ja analüüsis, ja nimelt kaarte mõõtmisest radiaanides, oli juttu eespool. Kasutades kaare radiaanmõõtu, s. o. tema pikkuse ja raadiuse suhet, vabaneme võrdsete osade arvu valiku meelevaldsusest, milleks ringjoon tuleb jaotada. Siinjuures on mõõduühikuks kaar, mille pikkus on võrdne ta raadiusega ja milles on $180 : \pi$ kaarekraadi, ehk 57°17′44″, 806 . . .

Huvitavat ja väga mugavat radiaanmõõdu teisendit kasutavad suurtükiväelased, võttes $\pi \approx 3$ ning arvestades sellest tulenevalt, et kaar, mille pikkus on võrdne raadiusega, on 60°; kaare mõõduühikuks on neil kaar, mille pikkus on võrdne raadiuse tuhandikuga ja mida nad nimetavad lihtsalt «tuhandikuks»; terve ringjoon on suurtükiväelastel 6000 «tuhandikku», veerand ringjoont on 1500 «tuhandikku».

Silmas pidades radiaanmõõdu laialdast kasutamist kõrgemas matemaatikas, on soovitav võimalikult sagedamini tarvitada teda koolis, seejuures mitte ainult asendades 180° arvuga π, 90° arvuga $\frac{1}{2}\pi$ jne., vaid kasutades tarvidust mööda muid arvulisi väärtusi (näiteks kaar 0,2 radiaani, s. o. ligikaudu 11°27′). Tähistades kaare kraadimõõdu tähega α, radiaanmõõdu tähega x, saame valemi $x = \frac{\pi\alpha}{180}$; mõnikord kasutatakse sümbolit $\operatorname{arc}\alpha$ («arcus α»), võttes $\pi\alpha : 180 = \operatorname{arc}\alpha$. Tuleb hoiatada väära arvamuse eest, et kaare radiaanmõõt on ta «abstraktne» mõõt(ta on täpselt samuti, nagu iga teine mõõt, «nimega»), ja üleskirjutuste eest nagu $\pi n + 30°$ (summa kõik liidetavad tuleb väljendada ühes ning samas mõõdus, kas radiaanmõõdus, nagu $\pi n + \frac{1}{6}\pi$, või kraadimõõdus, nagu $180° n + 30°$).

Geomeetrias tõestatud võrdelisus kaare ja sellele vastava kesknurga vahel kaarte ja nurkade puhul, mis ei ületa 360°, kehtib ka mis tahes kaarte ja neile vastavate kesknurkade puhul. Seepärast kaare radiaanmõõtu kasutatakse ka nurga mõõtmiseks: nurga radiaanmõõduks nimetatakse selle kaare radiaanmõõtu, mille suhtes antud nurk on kesknurgaks. Kui jutt on trigonomeetrilistest funkt-

sioonidest, siis terminid «kaar» ja «nurk» on täiesti samaväärsed, kuid kõige parem on kasutada terminit «argument».

Jääb veel märkida üks oluline asjaolu kaarte ja nurkade kohta. Sellal, kui mis tahes kaks punkti A ja B orienteeritud sirgel määravad üheselt suunaga lõigu AB, kaks punkti A ja B orienteeritud ringjoonel määravad mitte ühe, vaid lõpmatu hulga suunaga kaari, mis väljenduvad (radiaanmõõdus) valemiga $AB + 2\pi n$, kus AB on vähem positiivne kaar, n on mis tahes täisarv (positiivne, null, negatiivne). Seepärast iga võrdus, mis tõestatakse suunaga kaarte puhuks, tuleb varustada märkusega: «täpsusega täisarv ringjooni» («täpsusega täisarv korda 2π», kui kaar on mõõdetud radiaanides, «täpsusega täisarv korda 360°», kui mõõtmine toimus kraadides). Selle klausli vajadus ei vähene sugugi ka siis, kui kokku leppida, et sümbol $\overset{\frown}{AB}$ tähistab alati ainult vähimat positiivset kaart, mida mööda positiivses suunas liikudes jõutakse punktist A punkti B. Võtame näiteks orienteeritud ringjoonel kolm punkti: A, B ja C. Summeerides vähimad positiivsed kaared $\overset{\frown}{AB}$ ja $\overset{\frown}{BC}$, saame kas vähima positiivse kaare $\overset{\frown}{AC}$ või kaare $\overset{\frown}{AC} + 2\pi$. Seepärast seos $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC}$ kehtib suunaga kaarte puhul ainult eespool nimetatud klausliga. Kui AB tähistab lõpmatust kaarte hulgast mis tahes kaart, mis ühendab punkte A ja B, ja mis üksteisest erinevad ringjoone täisarv kordse võrra, siis $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC} + 2\pi n$, kus n on täisarv, ehk sõnades: kahe kaare $\overset{\frown}{AB}$ ja $\overset{\frown}{BC}$ summa on kas võrdne kaarega $\overset{\frown}{AC}$ või erineb sellest ringjoone täisarv kordse võrra.

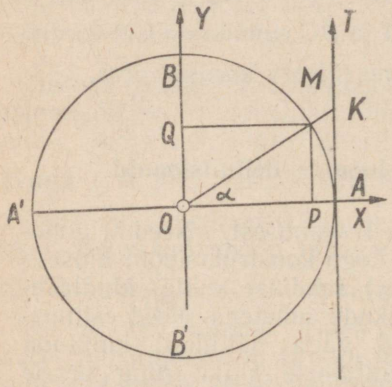
§ 14. Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid.

Räägime esmalt ainult siinusest ja koosinusest. Need trigonomeetrilised funktsioonid defineeritakse kogu konstruktsiooni aluseks võetud ringi («trigonomeetrilise ringi») raadiuse suhtes kindlaksmääratud viisil tõmmatud suunaga lõikude suhetena. Need «siinuslõik» ja «koosinuslõik» võimaldavad väga näitlikult kujutada funktsioonide $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ kogu muutumise käiku ning nende kasutamine on täiesti õigustatud, kuid on olemas kolm viisi nende lõikude defineerimiseks: esimene, mil neid lõike vaadeldakse liikuva raadiuse projektsioonidena kahel teineteisega risti asetseval diameetril (B. Piotrovski õpik, A. Bermanti ja L. Ljusterniki õpik ja mõned teised õpikud); teine viis lähtub võimalusest lugeda need lõigud lihtsalt liikuva raadiuse otspunkti ristkoordinaatideks teatava teljepaari suhtes, mis lõikuvad ringi keskpunktis (E. Boreli õpik), ja kolmas, mida kasutatakse N. Rõbkini õpikus, kirjeldab nende lõikude ehitamist, ignoreerides õpilaste tutvust projektsioonide ja koordinaatidega. Esimese ja teise viisi vahel olulist erinevust ei ole, sest ristkoordinaate võib vaadelda punkti raadius-

vektori projektsioonidena, ja nad mõlemad pälvivad kindlat eelistamist kolmanda suhtes.

Teeme mõne märkuse eespool soovitatud defineerimise viiside detailide kohta.

Kogu konstruktsiooni aluseks on trigonomeetriline ring, s. o. meelevaldse raadiusega ring, mis on orienteeritud ühel viisil kahest võimalikust, selle kontuuril vabalt valitud punktiga A, mis võetakse kaarte lugemise alguseks, ja kahe teineteisega ristuva teljega, mis on tõmmatud läbi keskpunkti O, mis neil mõlemal võetakse lõikude lugemise alguseks. Esimene neist telgedest läbib kaarte algust A ja on orienteeritud punktist O punkti A poole, nii et suunaga lõik OA, mida nimetatakse algraadiuseks ehk liikumatuks raadiuseks, on positiivne; teine telg lõikab ringjoont punktides B ja B', kusjuures $\widehat{AB} = +0{,}5\pi$ ja on orienteeritud punktist A punkti B poole. Esimesel ja teisel teljel asetsevad vastavalt trigonomeetrilise ringi «esimene» ja «teine» diameeter; neid diameetreid «horisontaalseks» ja «vertikaalseks» nimetada ei ole päris mugav, sest mõnikord tuleb nende asendit joonisel muuta. Esimest ja teist telge nimetatakse mõnikord «koosinuste teljeks» ja «siinuste teljeks» (E. Borel, B. Piotrovski), kuid parem on neile anda üldkasutatavad koordinaatide telgede nimed: abstsisside telg ehk X-telg; ordinaatide telg ehk Y-telg. On mugav kasutada termineid: positiivne ja negatiivne esimene pooltelg, positiivne ja negatiivne teine pooltelg.



Joon. 55.

Võttes ringjoonel punktist A (joon. 55) ühele või teisele poole liikuva punkti M, saame kaare AM kõik võimalikud väärtused 0-st kuni $+\infty$ ja $-\infty$. Punkti M nimetatakse kaare lõpuks, suunaga lõiku OM selle kaare lõppraadiuseks (ehk liikuvaks raadiuseks). Kaarele AM vastab kesknurk AOM, mis omab sama mõõtu nagu see kaar. Edaspidi võib täiesti ühesuguse õigusega kõnelda nii kaare AM funktsioonidest kui ka nurga AOM funktsioonidest.

Kaare AM koosinuslõiguks nimetatakse suunaga lõiku OP, mis on kaare lõppraadiuse projektsiooniks teljel X, ja ta siinuslõiguks suunaga lõiku OQ, mis on kaare lõppraadiuse projektsiooniks Y-teljel. Kaare AM koosinuseks ja siinuseks nimetatakse vastavalt koosinuslõigu ja siinuslõigu suhet trigonomeetrilise ringi raadiusse. Kaare α koosinuse ja siinuse üldkasutatavad tähistused on $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$. Niisiis

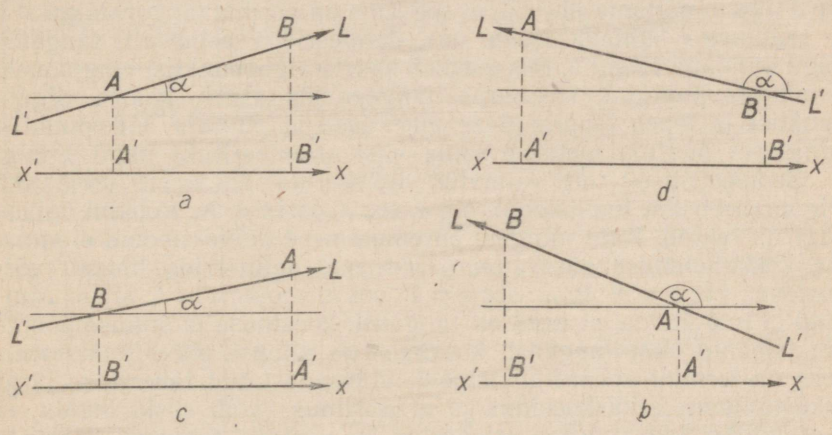
$$\cos\alpha = OP : r, \qquad \sin\alpha = OQ : r.$$

Lõigu OQ asemel võib siinuslõiguks võtta sellega võrdse lõigu PM, orienteerides ta ühtviisi lõiguga OQ.

Mõned autorid võtavad $r = 1$, tagades sellega koosinus- ja siinuslõikude arvulise võrdsuse koosinuse ja siinuse endaga. See tagab mõne valemi teatava lihtsustuse, kuid õpilastel tuhmub erinevus trigonomeetriliste lõikude ja trigonomeetriliste funktsioonide vahel, sellepärast on parem seda mitte teha.

Koosinuse definitsioonist järeldub otseselt järgmine tähtis teoreem:

lõigu projektsioon teljel võrdub lõigu ja telje ning antud lõigu suuna vahelise nurga koosinuse korrutisega.



Joon. 56.

Tõepoolest, kui antud positiivsel lõigul AB, mis asetseb teljel B, on teljel X projektsiooniks positiivne või negatiivne lõik $A'B'$ (vt. joon. 56, *a* ja joon. 56, *b*), siis definitsiooni põhjal $\cos \alpha = A'B' : AB$ (võib endale kujutleda trigonomeetrilise ringi keskpunktiga A ja raadiusega AB, tõmmata koosinuste telg läbi punkti A paralleelselt projektsioonide teljega X ja orienteerida ta ühtviisi teljega X), millest $A'B' = AB \cos \alpha$. Kui aga antud lõik AB on negatiivne, nagu joonisel 56, *c* ja joonisel 56, *d*, siis BA on positiivne, ning tõestatu põhjal saame: $B'A' = BA \cos \alpha$. Tähele pannes, et $BA = AB$, $B'A' = -A'B'$, saame ka siin sama valemi: $A'B' = AB \cos \alpha$.

Iga kord, kui üldistatakse mõnd varem defineeritud mõistet, peab selgitama, kas uus üldistatud definitsioon ei ole endise, kitsama definitsiooniga vastuolus. Varem, trigonomeetria algkursuses teravnurga koosinust ja siinust defineeriti täisnurkse kolmnurga külgede suhetena; nüüd peab näitama, et uus üldine definitsioon teravnurga puhul on kooskõlas endisega. Seda on väga kerge teha.

Siirdume t a n g e n s i vaatlemisele. Seda võib ka defineerida teatava suunaga lõigu suhtena raadiusse, kusjuures see lõik, mida nimetatakse t a n g e n s l õ i g u k s, asetseb puutujal AT (joon. 55), kuid võib võtta ka nii, et kaare tangens on selle kaare lõppraadiuse Y- ja X-teljel asetsevate projektsioonide suhe, või lõpuks, et kaare tangens ei ole muud kui selle kaare siinuse ja koosinuse suhe. Esimese definitsiooni leiame N. Rõbkini ja paljudes teistes õpikutes, teise A. Bermanti ja L. Ljusterniki õpikus, kolmanda B. Piotrovskil. Esimese, geomeetrilise definitsiooni eeliseks on näitlikkus: tangenslõiku näeme joonisel, mis kujukalt näitab kogu ta muutumise käiku. Viimasel (analüütilisel) definitsioonil sellist näitlikkust ei ole, kuid ta võimaldab paljude valemite tuletamist tunduvalt lihtsustada. Parimaks osutub niisugune tee: defineerides $\operatorname{tg} \alpha$ suhtena $\sin \alpha : \cos \alpha$, näitame ühtlasi, et see suhe on võrdne tangenslõigu AK ja raadiuse r suhtega (joon. 55), defineerides eelnevalt tangenslõigu suunaga lõiguna, mis asetseb kaarte alguspunktist ringjoonele tõmmatud puutujal, kusjuures tangenslõik algab kaarte alguspunktist ja lõpeb lõppraadiuse pikenduse ja puutuja lõikepunktis, siinjuures puutuja loetakse sama viisi orienteerituks nagu Y-telg.

Geomeetriliselt on võimalik defineerida ka kolm ülejäänud trigonomeetrilist funktsiooni: $\operatorname{ctg} \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$; N. Rõbkini õpikus ongi nii tehtud. Kuid mingeid paremusi need definitsioonid ei anna, aja kokkuhoidmise pärast on parem nad defineerida lihtsalt võrdustena: $\operatorname{ctg} \alpha = 1 : \operatorname{tg} \alpha$, $\sec \alpha = 1 : \cos \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha = 1 : \sin \alpha$. Muidugi ei tule ütelda, et need on tangensi, koosinuse ja siinuse pöördfunktsioonid, sest tangensi, koosinuse ja siinuse pöördfunktsioonideks on termini «pöördfunktsioon» üldtunnustatud tähenduse järgi arkustangens, arkuskoosinus ja arkussiinus (võib siiski ütelda, et kootangensi iga arvuline eriväärtus on vastava tangensi väärtuse pööre). Kerge on tõestada, et nende võrdustega defineeritud funktsioone võib vaadelda teatavate lõikude (kootangenslõigu, seekanslõigu, koosekanslõigu) ja raadiuse suhetena, kuid vaevalt tasub selleks aega kulutada.

§ 15. Trigonomeetriliste funktsioonide mõned omadused, mis otseselt järelduvad nende definitsioonidest.

Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid on aluseks kogu edaspidisele kursusele, ning seepärast on vaja kõige tõsisemat tähelepanu pöörata nende omandamise täpsusele ja kindlusele. Siin ei seisa asi mitte ainult selles, et pähe õppida vastavad sõnastused ja formuleeringud, kuigi ka see omab tähtsust, vaid täpsete ja selgete kujutluste omandamises. Nii ühe kui teise suhtes on väga kasulik vaadelda allpool järgnevaid küsimusi; seda on soovitav teha osalt õpetaja juhtimisel klassis, osalt iseseisvalt kodus harjutuste näol.

1. Leida kolme esimese trigonomeetrilise funktsiooni väärtused

kaartele 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315°, 330° ja ka kaartele 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Tulemusena saadakse tabel, mida on soovitav säilitada kasutamiseks edaspidises töös.

Sümbol $\pm\infty$, millega tähistatakse $\operatorname{tg} 90°$ väärtust, nõuab erilist selgitamist: $\alpha = 90°$ puhul $\operatorname{tg}\alpha$ väärtust pole olemas, aga kui α kasvades piiramatult läheneb 90°-le, siis $\operatorname{tg}\alpha$ kasvab tõkestamatult, omades kui tahes suuri positiivseid väärtusi (see on tangenslõigul hästi näha), kui α kahanedes järjest läheneb 90°-le, siis $\operatorname{tg}\alpha$ omab kui tahes suuri negatiivseid väärtusi.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	0,5	$0,5\sqrt{2}$	$0,5\sqrt{3}$	1	$0,5\sqrt{3}$	$0,5\sqrt{2}$	0,5	0
$\cos\alpha$	1	$0,5\sqrt{3}$	$0,5\sqrt{2}$	0,5	0	−0,5	$-0,5\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{3}$	−1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}:3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty-$	$-\sqrt{3}$	−1	$-\sqrt{3}:3$	0

α	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	−0,5	$-0,5\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{3}$	−1	$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5\sqrt{2}$	−0,5	0
$\cos\alpha$	−1	$-0,5\sqrt{3}$	$-0,5\sqrt{2}$	−0,5	0	0,5	$0,5\sqrt{2}$	$0,5\sqrt{3}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}:3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty-$	$-\sqrt{3}$	−1	$-\sqrt{3}:3$	0

2. Jälgida nendest kolmest iga trigonomeetrilise funktsiooni muutumist argumendi muutumisel 0° kuni 360°.

Kui silmade ees on joonisel 55 kujutatud pilt, siis laseme mõttes liikuda punktil M ringjoont mööda kellaosuti liikumisele vastupidises suunas ja jälgime siinuslõigu, koosinuslõigu ja tangenslõigu muutumist, ning järk-järgult täidame järgneva tabeli lahtrid, kus noolekesed ↗ ja ↘ asendavad sõnu «kasvab», «kahaneb».

Seda tööd tehakse tavaliselt natuke hiljem ühenduses graafikute ehitamisega. Kuid siin on ta täiesti sobiv funktsioonide definitsioonide kinnistamise vahendina.

Eriti tähelepanelikult tuleb suhtuda trigonomeetriliste funktsioonide märkidesse erinevais veerandeis, sest puuduliku kindlusega selle, nagu näib, lihtsa detaili omandamisest tulenevad vead esinevad väga sagedasti. On tarvis anda lühike, meelespidamiseks

mugav juhis, milles peetakse silmas telgede tavalist asendit, mil esimene telg on horisontaalne ja orienteeritud vasakult paremale, teine vertikaalne ja orienteeritud alt üles ja kus siinuslõik ja tangenslõik on positiivsed, kui nad asuvad esimesest teljest ülalpool, ning koosinuslõik on positiivne, kui ta asub teisest teljest paremal pool. Et seda reeglit paremini kinnistada, võib soovitada õpilastel joonestada endale midagi N. Rõbkini õpikus § 25 joonisel 19 esitatud kujutuse taolist ja nõuda, et nad mälu järgi, joonist vaatamata, teda ainult kujutledes vastaksid vastavaile küsimustele.

α	0°	↗	90°	↗	180°	↗	270°	↗	360°
$\sin\alpha$	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0
$\cos\alpha$	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	↗	$+\infty-$	↗	0	↗	$+\infty-$	↗	0

Funktsioonide $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ muutumist võib vaadelda mitte nii detailselt, et aega kokku hoida, kuid tuleb siiski veel kord rõhutada nende seost kolme esimese funktsiooniga.

3. Eespool vaatlesime trigonomeetriliste funktsioonide muutumist kaare muutumisel 0° kuni 360°. Mis võib ütelda nende edaspidise muutumise kohta, kui kaar kasvab üle 360°, ja nende muutumise kohta negatiivsete kaarte puhul? Õpilased jõuavad ise kergesti valemiteni:

$$\sin(\alpha \pm 360°) = \sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha \pm 360°) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm 360°) = \operatorname{tg}\alpha$$

ja ka üldisemate valemiteni:

$$\sin(\alpha + 360° \cdot n) = \sin\alpha \text{ jne.},$$

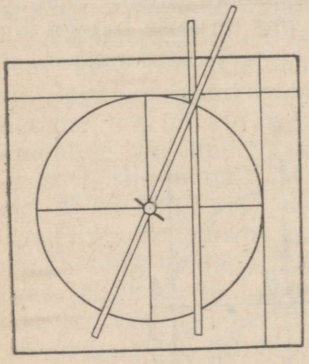
kus n on mis tahes täisarv, s. o. otsusele trigonomeetriliste funktsioonide perioodsusest. Põhiliseks perioodiks siinuse ja koosinuse puhul on kaar 360° (täis ringjoon), tangensi puhul aga 180° (poolringjoon); viimast asjaolu õpilased märkavad tavaliselt juba eespool mainitud tangensi väärtuste tabeli koostamisel.

Trigonomeetriliste funktsioonide perioodsus lubab nende uurimisel piirduda ainult argumendi väärtuste intervalliga (0°, 360°), ja tangensi korral koguni intervalliga (0°, 180°).

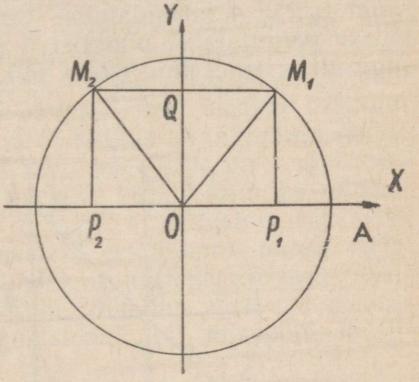
Rõhutame jälle, et kootangensi korral on lugu just samuti nagu tangensi korral ning seekansi ja koosekansi korral nagu koosinuse ja siinuse puhul.

4. Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide paremaks kinnistamiseks võib teatavat tähtsust omada joonisel 57 kujutatud riista taoline näitlik õppevahend «Trigonomeeter»; sellel on peale kahe liikumatu telje üks liikuv telg, mida liblikkruvi abil saab igas asendis keskpunktis kinnitada. See ligikaudu 400×400 mm suurune ja jaotustega varustatud riist võimaldab ka trigonomeetriliste funktsioonide arvulisi väärtusi leida kahe kohaga koma järel. Teatav kasu sellest riistast õpilastele on, aidates kujundada selgemat ja kindlamat visuaalset kujutlust, mis on eriti väärtuslik selle poolest, et siin esineb kõik liikumises ja muutumises. On endastmõistetav, et ei tule piirduda ainult selle riista demonstreerimisega, vaid tuleb anda võimalus õpilastel sellega ka töötada.

5. Definitsioonide paremat omandamist soodustab trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste leidmise kõrval antud argumendi jaoks ka ümberpöördud ülesande ehk pöördülesande lahendamine, mis sellel töö staadiumil on teostatav ainult graafi-



Joon. 57.



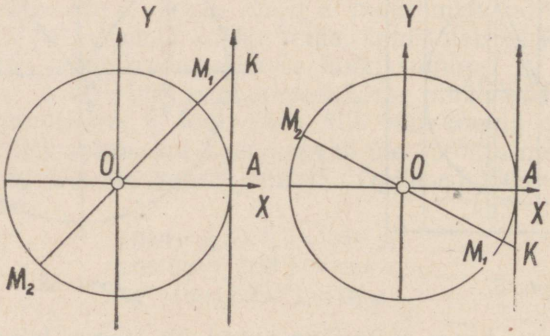
Joon. 58.

lisel teel, s. o. kaare ehitamine antud ühe tema trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse järgi. Olgu näiteks teada, et $\sin x = a$, ning nõutakse leida kaar x. Oletame esmalt, et $0 < a < 1$. Võtame vabalt trigonomeetrilise ringi raadiuse r pikkuse ning leiame siinuse definitsiooni põhjal korrutise ar, mis väljendab siinuslõigu pikkust ja on suuruselt 0 ja r vahel. Paigutades lõigu $OQ = ar$ positiivsele teisele poolteljele (joon. 58), tõmbame läbi Q paralleeli esimesele teljele ja märgime selle paralleeli ja ringjoone lõikepunktid M_1 ja M_2. Ükski kaar, mille siinus on a, ei saa lõppeda mujal, kui punktides M_1 ja M_2 (kaarte alguseks loetakse, nagu alati, punkt A). Kaartest, mis lõpevad punktis M_1, võtame vähima positiivse kaare $AM_1 = X_0$; kõik teised kaared, mis lõpevad punktis M_1, erinevad kaarest X_0 täisarv ringjoone võrra ja nad on väljendatavad valemiga $x = x_0 + 360° \cdot n$. Kaartest, mis lõpevad punktis M_2, on vähimaks positiivseks kaareks $AM_2 = 180° - X_0$; kõik teised kaared eri-

nevad sellest täisarvu ringjoone võrra ja väljenduvad valemis $x = 180° - x_0 + 360° \cdot n$. Nüüd teame kõik kaared, mille siinus on a. Erijuhtumil, kui $a = 0{,}5$, saame kaared $30°$, $30° + 360° = 390°$, $30° - 360° = -330°$, $30° + 720° = 750°$, $30° - 720° = -690°$ jne., ja ka kaared $180° - 30° = 150°$, $150° + 360° = 510°$, $150° - 360° = -210°$, $150° + 720° = 870°$, $150° - 720° = -570°$ jne. Oletades edasi, et $-1 < a < 0$, toimime samal viisil, kuid siinuslõik *ar* on nüüd negatiivse suunaga lõik ja ta tuleb paigutada negatiivsele teisele poolteljele. Juhtumid $a = 0$, $a = +1$ tuleb eraldi vaadelda. Märkides veel, et $a > 1$ ja $a < -1$ puhul ülesandel lahendeid ei ole, ammendamegi kõik võimalikud juhtumid.

Võrrandi $\cos x = a$ lahendamine toimub analoogiliselt ja võib väga hästi jääda õpilastele koduseks tööks (lõik *ar* paigutatakse nüüd esimesele poolteljele).

Kui tangens on defineeritud siinuse ja koosinuse jagatisena, nagu eespool soovitatud, ning on antud tõestus selle kohta, et ta väljendub samaaegselt tangenslõigu ja raadiuse suhtena, siis võrrandi $\operatorname{tg} x = a$ lahendamine toimub just samal viisil: suunaga lõik *ar* paigutatakse punktist A puutujale, mis on teise teljega ühesuguselt orienteeritud (joon. 59).



Joon. 59.

On olemas veel hulk küsimusi, mis lahenduvad ainult trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide teadmise põhjal; siia kuuluvad näiteks kõik taandamise valemite küsimused, mida vaadeldakse järgmises peatükis. Kuid käesolevas paragrahvis vaadeldud nelja küsimuse põhjalik õppimine tagab üldiste definitsioonide kindla teadmise ja selge arusaamise.

Mõned trigonomeetria õpikute autorid soovitavad funktsioone seekans ja koosekans üldse mitte võtta, sest neid kasutatakse väga vähe ja nad on väga lihtsalt seotud funktsioonidega koosinus ja siinus. Muidugi hoopis vaikida nendest ei saa; olgugi harva, nad ometi esinevad; nende väärtuste tabelid paigutatakse mõnikord (ja sugugi mitte harva) isegi trigonomeetriliste tabelite kogudesse (Glasenapi, Petersi tabelid); nad võimaldavad teisendada mugavamaiks täisavaldisteks säärased murdavaldised, mille nimetajas esinevad siinused ja koosinused. Just samasuguses olukorras on kootangens: ta mõte seisab ainult selles, et vältida jagamist tangensiga. Seetõttu osutub otstarbe-

kohaseks ja järjekindlaks üksikasjalikult õppida äinult kolm trigonomeetrilist funktsiooni: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, ning ülejäänud kolme («abifunktsiooni») puhul piirduda ainult nende definitsioonidega ja kasutada neid ainult jagatiste

$$1 : \operatorname{tg}\alpha, \qquad 1 : \cos\alpha, \qquad 1 : \sin\alpha$$

lühendatud üleskirjutustena.

§ 16. Side funktsiooni üldise mõistega.

Trigonomeetriliste funktsioonide õppimist on soovitav kasutada selleks, et korrata ja täpsustada ühe argumendiga funktsioonide üldmõistet, millega õpilased tutvuvad igal aastal üha sügavamalt ja täielikumalt. Soodsail tingimustel on IX klassis võimalik vaadelda ühe argumendiga ühese funktsiooni mõistet selle nüüdisaegses käsitluses kui ühe hulga v a s t a v u s t teisega: on olemas argumendi x arvuliste väärtuste hulk M, on olemas argumendi y arvuliste väärtuste hulk N, on olemas seadus, mis määrab hulga M iga elemendi vastavuse mingi ühe täiesti määratud elemendiga hulgast N (ümberpöördu ei ole tingimata tarvilik, vastavus peab olema ühene, kuid võib olla mitte üksühene). Õppides trigonomeetriliste funktsioonide definitsioone, peavad õpilased igal üksikul juhtumil seletama, mis on siin hulkadeks M ja N, kuidas on määratud nende elementide vaheline vastavus. Näiteks, kui juttu on teravnurga siinusest, siis hulgaks M on kõigi nurkade hulk 0 kuni $\frac{1}{2}\pi$, ja hulgaks N on kõigi reaalarvude hulk 0 kuni 1 inclusive; siirdudes teravnurga tangensile, peame hulgast M eemaldama nurga väärtuse $\frac{1}{2}\pi$ ning hulgana N peame võtma kõik mittenegatiivsed reaalarvud. Nurkade ja hulga N elementide vaheline vastavus määratakse kindlaks geomeetrilise konstruktsiooni abil, mis põhineb siinuse ja tangensi definitsioonil.

Trigonomeetrilisi funktsioone vaadeldakse tavaliselt nurga või kaare funktsioonidena: hulk M on mingi nurkade või kaarte hulk. Kuid trigonomeetriliste funktsioonide rakendused ei ammendu kaugeltki nende juhtumitega, kus argumendiks on nurk või kaar. Funktsiooni $y = \sin x$, nagu iga teisegi funktsiooni, füüsikaline tähendus võib olla missugune tahes. Näiteks, uurides punkti harmoonilist võnkliikumist sirglõigul, on meil tegemist funktsiooniga $y = a \sin (2\pi t : T)$, kus t tähendab aega; siin ei ole mingit nurka ega kaart. Tuleb kas ehitada mudel, kus on olemas muutuv nurk, mis kujutab vaadeldavat argumenti (näiteks punkti harmoonilise võnkliikumise uurimisel sirglõiku mööda vaadelda seda punkti ringjoonel ühtlaselt liikuva punkti projektsioonina, kusjuures ringjoone diameetriks on see sirglõik), või tunnustada, et trigonomeetrilise funktsiooni argumendiks on arv, mille tähenduseks võib olla mis tahes suurus, sealhulgas ka nurk või kaar. See viimane seisukoht omab palju paremusi ning seda tuleb seepärast süstemaatiliselt esile tõsta. Seda soodustab väga nurga radiaanmõõdu kasutamine. Asi on praktiliselt selles, et õpilane ei sattuks ummikusse, kui ta

kohtab avaldist sin 0,5, vaid mõistaks, et siin on tegemist 0,5 radiaanise kaare siinusega, ehk minutilise täpsusega, kaare 28°39′ siinusega.

IV peatükk.

TRIGONOMEETRILISED VÕRDUSED JA VÕRRATUSED.

§ 17. I veerandi kaarele taandamise valemid.

Taandamise valemid võimaldavad väga lihtsa kalkulatsiooni teel leida mis tahes kaarte trigonomeetriliste funktsioonide väärtused, teades I veerandi mis tahes kaarte funktsioonide väärtusi, ja nad mängivad trigonomeetria praktilistes rakendustes suurt osa juba seepärast, et tänu neile trigonomeetrilised tabelid koostatakse ainult I veerandi kaarte jaoks. Neid valemeid on palju ja neid on sageli tarvis, seepärast on õpetaja mureks mitte ainult nende tuletamine, vaid ka võtete näitamine nende kiireks reprodutseerimiseks.

Vaatleme esmalt ainult siinust ja koosinust.

Nende kahe funktsiooni jaoks taandamise valemite tuletamiseks kasutatakse mitmesuguseid võtteid. A. Bermanti ja L. Ljusterniki õpikus esitatud võte seisab selles, et alguses tuletatakse valemid $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ ja $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ teravnurkade puhuks ja valemid $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ja $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ mis tahes nurkade jaoks; seejärel laiendatakse valemid $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ ja $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ mis tahes nurkade puhuks projektsioonide teoreemi abil; lõpuks, saadud valemite korduv rakendamine võimaldab tuletada kõik teised taandamise valemid siinuse ja koosinuse jaoks. Kõige enne tuletatakse valemid:

$$\sin(90° + \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\cos(90° + \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

siis valemid:

$$\sin(180° - \alpha) = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;$$
$$\sin(180° + \alpha) = \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha \text{ j. t.}$$

Niiviisi on põhilisteks valemiteks, millest kõik teised tuletatakse lihtsate järeldustena, ainult neli valemit:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha;\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha.$$

Need valemid on tarvis otseselt põhjendada $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ definitsioonide põhjal mis tahes nurkade puhul.

Euleril leiame teissuguse võtte taandamisvalemite tõestamiseks: tema eeldab, et on tõestatud argumentide α ja β mis tahes väärtuste puhul summa $\alpha + \beta$ siinuse ja koosinuse valemid ja tuletab nendest lihtsate asenduste teel kõik taandamisvalemid.

Peatume veel E. Boreli õpikus [V, 4] näidatud võttel.

Olgu antud tavalisel viisil orienteeritud ringjoon: positiivseks

suunaks on kellaosuti liikumisele vastupidine suund, X-telg on horisontaalne ja orienteeritud vasakult paremale, Y-telg on vertikaalne ja orienteeritud alt üles. Võtame vabalt kaare $AM = \alpha$ ja ehitame ta siinuslõigu, s. o. lõppraadiuse OM projektsiooni OQ Y-teljel, ning koosinuslõigu, s. o. lõppraadiuse OM projektsiooni OP X-teljel. Sõltuvalt α suurusest need projektsioonid võivad olla missugused tahes; et oma arutlust mingi erijuhtumiga mitte siduda, on parem joonist üldse mitte teha. Vastavalt definitsioonile saame, et $\sin \alpha = OQ : r$, $\cos \alpha = OP : r$.

Kui pöörata ringjoone esialgne suund vastupidiseks, jättes X-telje muutmata, siis Y-telje suund tuleb ka muuta: sest positiivne Y-pooltelg peab lõikama ringjoont kaare $0{,}5\pi$ lõpp-punktis, aga see kaar ei lähe nüüd ülespoole, vaid kaarte alguspunktist A allapoole. Kaar AM, mille mõõduks oli enne α, saab pärast ringjoone suuna muutmist oma mõõduks $-\alpha$; ka projektsiooni OQ märk muutub, projektsioon OP jääb aga muutumatuks. Siit saame, et $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Meenutades termineid «paarisfunktsioon», «paaritufunktsioon», võime ütelda, et oleme tõestanud, et koosinus on paarisfunktsioon ja siinus on paaritufunktsioon.

Tulles tavaliselt orienteeritud lähte — trigonomeetrilise ringi juurde tagasi, pöörame mõlemad teljed positiivses suunas nurga π võrra keskpunkti O ümber, nii et nad mõlemad ühtuvad iseendaga, muutes ainult suuna; positiivne esimene pooltelg suundub nüüd paremalt vasakule, teine ülevalt alla, kaarte alguspunktiks saab punkt A'. Kaart $A'M$ mõõdab nüüd arv $\alpha - \pi$, sest nüüd saame võrduse (täpsusega täisarv korda 2π) $AM + MA' = AA'$ ehk $\alpha + MA' = \pi$, millest $MA' = \pi - \alpha$ ja $A'M = \alpha - \pi$. Kuid kaarte AM ja $A'M$ lõppraadius on ühine, ka selle projektsioonid telgedel OP ja OQ on ühised; vahe on ainult selles, et lõik OP on oma telje ühe suuna puhul positiivne, teise suuna puhul negatiivne; sama lugu on lõiguga OQ. Siit järeldame, et $\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$, $\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$, ehk arvestades seda, et siinus on paaritu ja koosinus on paaris, saame et $\sin(\pi - \alpha) = +\sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Kui säärane pööramine nurga π võrra, mille äsja teostasime telgedega X ja Y positiivses suunas, sooritada negatiivses suunas, siis saame valemid:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Pöörates nurka $+\frac{1}{2}\pi$ võrra, saame valemid:

$$\sin(\alpha - \tfrac{1}{2}\pi) = -\cos\alpha, \quad \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\pi) = +\sin\alpha$$

ehk:

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha,$$

ja pöörates nurka $-\frac{1}{2}\pi$ võrra, saame:

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha) = -\sin\alpha.$$

Nelja viimase taandamisvalemi (nurga $\frac{3}{2}\pi$ kaudu) tuletamiseks peab telgi pöörama $\pm \frac{3}{2}\pi$ võrra, aga võib ka läbi saada juba tuletatud valemite korduva rakendamisega:

$$\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\left[\tfrac{1}{2}\pi + (\pi + \alpha)\right] = \cos(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \text{ jne.}$$

Nii on kõik 14 taandamisvalemit siinuse ja koosinuse jaoks argumendi α mis tahes väärtuse puhul tuletatud.

Taandamisvalemite tuletamine tangensi jaoks ei tee mingeid raskusi, kui tangens on siinuse ja koosinuse suhtena defineeritud. Tõepoolest:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \sin(-\alpha) : \cos(-\alpha) =$$
$$= (-\sin\alpha) : \cos\alpha = -(\sin\alpha : \cos\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \text{ jne.}$$

Taandamisvalemeid $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ ja $\operatorname{cosec}\alpha$ jaoks ei ole üldse tarvis võtta. Vajaduse korral saab nad tuletada samal viisil nagu tangensi jaoks.

Õpetamise praktikas piirdutakse sageli taandamisvalemite tuletamisega teravnurga α jaoks, piirdudes väitega, et nende õigsust saab näidata ka nurga mis tahes väärtuse puhul. See ei ole muidugi hea. Tõestus on tarvis ühe või teise võttega teostada. Eelistamist väärib äsja täielikult käsitletud Boreli õpikus toodud võte.

Niiviisi saame üldse 21 taandamisvalemit (14 siinuse ja koosinuse jaoks ning 7 analoogilist valemit tangensi jaoks) ehk kõik kokku 42 valemit (kui siin lisada valemid kootangensi, seekansi ja koosekansi jaoks). On arusaadav, et neid kõiki ei ole kerge meeles pidada, kuid vajadus nende järgi esineb sageli. On olemas eriline m n e m o o n i l i n e reegel, mis paljudes õpikutes tuuakse mitmesuguseis variantides ning seisab järgmises: kui taandamisvalemi vasakul pool esineb poolringjoone täisarvu kordne kaar $(0, \pi, 2\pi)$, siis paremal pool tuleb kirjutada sama funktsioon, mis vasakulgi; muil juhtumeil tuleb paremal pool kirjutada k a a s f u n k t s i o o n (k o o f u n k t s i o o n), s. o. kui vasakul on siinus, koosinus, tangens, siis paremal on vastavalt koosinus, siinus, kootangens ja ümberpöördult; paremal pool kirjutatakse funktsiooni tähise ette märk pluss või miinus olenevalt sellest, kas vasakul kirjutatud funktsiooni väärtus on positiivne või negatiivne, sel puhul, kui kaar α kuulub I veerandisse. Et seda reeglit saaks kasutada ka negatiivsete kaarte taandamisvalemite korral, siis tuleb võtta $-\alpha = 0 - \alpha$.

N ä i t e d. Kui vasakul pool on $\cos(\pi + \alpha)$, siis tuleb paremal pool kirjutada $\cos\alpha$ märgiga miinus, sest kui kaar α kuulub I veerandisse, siis kaar $\pi + \alpha$ kuulub III veerandisse, ning III veerandis koosinus on negatiivne; seega

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Kui vasakul pool on $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)$, siis kirjutame paremal pool $\operatorname{ctg}\alpha$ märgiga pluss, sest kui α kuulub I veerandisse, siis kaar

$\frac{1}{2}\pi - \alpha$ kuulub ka I veerandisse, ning I veerandis tangens on positiivne.

Kuigi selle mnemoonilise reegli sõnastus on üsna pikk, jääb see õpilastele kergesti meelde, ja nad kasutavad teda meeleldi. Mingit tõestust selle reegli õigsuse kohta ei ole tarvis anda: ta tuleneb taandamisvalemite täieliku loetelu vaatlemisest, siia võib kanda ka valemid:

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$

mis väljendavad perioodsuse omadust, ja valemid

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha \text{ jne.}$$

Ülesannete lahendamisel taandamisvalemite rakendamise kohta on soovitav kasutada (enese kontrolliks) mitut viisi. Näiteks, kui meil on $\sin 250°$, võime 250° esitada summana $180° + 70°$ või vahena $270° - 20°$. Esimesel puhul saame:

$$\sin 250° = \sin(180° + 70°) = -\sin 70°,$$

teisel puhul:

$$\sin 250° = \sin(270° - 20°) = -\cos 20° = -\sin 70°.$$

Et tagada vastustes ühtsust, on soovitav eelistada siinust koosinusele ja tangensit kootangensile, kuid mõnikord tuleb sellest reeglist kõrvale kalduda. Märgime, et alati on võimalik taandamine I veerandi esimese poole kaare funktsiooniks, s. o. kaarele α, mis rahuldab tingimust

$$0° \leqslant \alpha \leqslant 45°.$$

Lõpuks nimetame mõned tarvitatavamad terminid. Kaari α ja $-\alpha$ nimetatakse *vastupidisteks* (ehk *võrdvastupidisteks*, ehk *sümmeetrilisteks alguse suhtes*): kaari α ja $\frac{1}{2}\pi - \alpha$, mille summa on $\frac{1}{2}\pi$, nimetatakse *täienduskaarteks* (ehk *teineteise täiendusteks*, ning kaari α ja $\pi - \alpha$ summaga π — *täiendajateks* (ehk *teineteise täiendajateks*).

§ 18. Ühe ning sama argumendi trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed.

Kui võtta kõigi 6 trigonomeetrilise funktsiooni väärtused ühe ning sama argumendi väärtuse puhul, siis ilmnevad nende vahel seosed, mida väljendab järgmine «põhiseoste süsteem»:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha : \sin\alpha,$$
$$\sec\alpha = 1 : \cos\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}\alpha = 1 : \sin\alpha.$$

Kui trigonomeetrilised funktsioonid defineerida nii nagu ülemal soovitatud, siis neist 5 võrdusest on tarvis tõestada ainult üks, sest ülejäänud on lihtsalt definitsioonid. Esimese tõestamiseks piisab Pythagorase teoreemi rakendamisest kolmnurga OPM kohta (joon. 55), mis sõltuvalt α väärtusest asetseb ringi ühes veerandis; suunaga lõikude mõõdud võivad olla kas positiivsed või negatiivsed, sest ruutu tõstmine kõrvaldab märkide erinevuse, ning me saame alati:

$$OP^2 + PM^2 = OM^2, \text{ ehk } OP^2 + OA^2 = OM^2,$$

ehk pärast jagamist r^2-ga:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Kui aga kõik 6 funktsiooni defineerida geomeetriliselt nagu seda teeb Rõbkini õpik, siis on tarvis tõestada kõik 5 võrdust, vaadeldes eraldi 4 juhtumit, kus α kuulub I, II, III, IV veerandisse. On kasulik eraldi märkida juhtumid, kus on täisarv veerandeid ning kolmnurk OPM kõduneb lõiguks ($\alpha = 0$ korral saab kontrollida esimest, teist ja neljandat valemit, kolmas ja viies aga kaotavad mõtte; $\alpha = 0{,}5\pi$ korral saab kontrollida esimest, kolmandat ja viiendat, teine ja neljas kaotavad mõtte jne.).

Nende 5 põhiseose väärtus seisab selles, et nad võimaldavad, kui lugeda 6 trigonomeetrilisest funktsioonist mingi ühe väärtus teada olevaks, väljendada 5 ülejäänud funktsiooni väärtused selle ühe kaudu. Heaks harjutuseks on õpilaste poolt tabeli koostamine, milles iga trigonomeetriline funktsioon on avaldatud iga ülejäänud funktsiooni kaudu ja milles on 30 valemit. Erilist tähelepanu nõuab märkide küsimus. Näiteks, tuletades valemi

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

paneme tähele, et on tarvis säilitada mõlemad märgid, sest I ja IV veerandis $\cos \alpha$ on positiivne, II ja III veerandis aga negatiivne. Kui on ära näidatud veerand, kuhu α kuulub, siis märgi kahesus jääb kõrvale. Muidugi mõista, et ole mingit tarvidust kõik 30 valemit meeles pidada: peab taotlema kõigi valemite kindlat ja teadlikku tuletamise oskust, ülesannete lahendamise tulemusena jäävad iseenesest meelde need valemid, mis väärivad meelespidamist.

Viiest põhiseosest on kasulik tuletada (puhtanalüütiliselt, joonist kasutamata) veel mõned valemid. Nendest on tähtsamad valemid:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha,$$

mis saadakse kergesti pärast $\operatorname{tg} \alpha$ ja $\operatorname{ctg} \alpha$ avaldamist $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ kaudu ning ilmuvad iseenesest 30 valemi tabeli koostamisel.

Uute trigonomeetriliste võrduste tõestamine põhiseoste abil, mis suurel hulgal on toodud õpikuis ja ülesannete kogudes, on suurepäraseks harjutusmaterjaliks. Peab siiski silmas pidama, et need trigonomeetrilised samasused enamal juhtumeil kaotavad kehtivuse argumendi mõnede «kriitiliste» väärtuste

puhul, ning peab tingimata nõudma, et õpilased asja selle külje suhtes annaksid endale selgesti aru. Näiteks, tõestades võrdust

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(N. Rõbkini ülesannete kogust ülesanne Nr. 64, § 3), peame eeldama, et $\sin\alpha\neq 0$, s. o. et kaare α otspunkt ei asu X-teljel (teist tingimust $\cos\alpha\neq 1$ ei ole vaja sisse võtta, sest $\sin\alpha\neq 0$ korral ikka $\cos\alpha\neq 1$).

Õpikuis ja ülesannete kogudes antakse sageli tõestada samasused, mis on õiged ainult teatavail kindlail tingimustel, kuid neid tingimusi ei nimetata. Näiteks E. Przevalski ülesannete kogus lk. 217 Nr. 126 all on toodud võrdus:

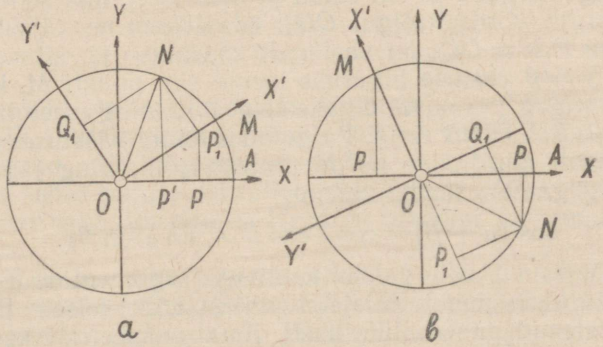
$$\cos A\operatorname{cosec}A\sqrt{\sec^2 A-1}=1,$$

mida nõutakse tõestada, ja ei ole tehtud märkust selle kohta, et ta on õige ainult siis, kui kaar A kuulub I või III veerandisse; kui A kuulub II või IV veerandisse, siis $\cos A$ ja $\operatorname{cosec}A$ on erimärgilised, parem pool on siis -1. On selge, kuivõrd lubamatu on säärane hoolimatus. Seda ülesannet on parem sõnastada nii: selgitada, kas osutatud võrdus on õige ja missuguste A väärtuste korral nimelt; mis peab muutma, et ta oleks õige ka teistel juhtumitel? (Vastus. Ta on õige siis ja ainult siis, kui kaar A kuulub I või III veerandisse; kui A kuulub II või IV veerandisse, siis paremal pool peab olema -1.).

§ 19. Liitmis- ja lahutamisvalemid.

Laitmatu ja üsna lühikese liitmis- ja lahutamisvalemite tuletamise saame projektsioonide teooria abil. Vaatleme seda üksikasjaliselt.

Seame endale ülesandeks avaldada $\cos(\alpha+\beta)$ funktsioonide $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ ja $\cos\beta$ kaudu, kus α ja β on mis tahes kaared.



Joon. 60.

Joonisel (joon. 60, a) mõlemad kaared $\alpha=AM$ ja $\beta=MN$ kui ka nende summa AN kuuluvad I veerandisse; kõrvaloleval joonisel (joon. 60, b) kaar $\alpha=AM$ kuulub II veerandisse, kaar $\beta=MN$ on π ja $\frac{3}{2}\pi$ vahel ja kuulub seega III veerandisse, nende summa AN aga kuulub juba IV veerandisse. Kuid kogu järgnev arutlus ei tugine joonisele, vaid varem selgitatud üldistele definitsioonidele

ja teoreemidele. Joonis on vajalik parema ettekujutamise vahendina. Teostanud selle arutluse, on kasulik teda veel kord korrata joonist hoopis kasutamata veendumiseks, et see arutlus on tõesti kehtiv igasuguste α ja β puhul.

Meenutades, mis varem on öeldud suunaga kaarte kohta, paneme tähele, et kaare $AN = AM + MN$ mõõt võrdub summaga $\alpha + \beta$ täpsusega kuni ringjoone täisarvu kordseni. Kuid huvitudes ainult selle kaare AN siinusest ja koosinusest, mis nende funktsioonide perioodsuse tõttu kaare muutumisel ringjoone täisarvu kordse võrra ei muutu, võime viimase reservatsiooni arvestamata jätta.

Kaarte AM ja AN alguspunktiks on punkt A, nende koosinuslõikudeks on lõppraadiuste OM ja ON projektsioonid X-teljel, s. o. suunaga lõigud OP ja OP', siinuslõikudeks aga samade raadiuste projektsioonid Y-teljel, s. o. lõigud OQ ja OQ', mis joonisel ei ole näidatud, või nendega (pikkuse ja märgi poolest) võrdsed lõigud PP' ja $P'N$. Kaare MN alguseks on punkt M; tema koosinuslõiguks on lõppraadiuse ON projektsioon X'-teljel, mis on tõmmatud läbi punkti M, s. o. suunaga lõik OP_1, kuid tema siinuslõiguks on raadiuse ON projektsioon Y'-teljel (mis on tõmmatud risti teljega X' ning orienteeritud nii, et kaare MB' mõõduks on $+0{,}5\pi$), s. o. suunaga lõik OQ, või sellega (pikkuse ja märgi poolest) võrdne lõik P_1N. Telgi X' ja Y' võib vaadelda kui telgi X ja Y, mis koordinaatide alguse O ümber on pööratud nurga α võrra. Murdjoone OP_1N ja ta sulgeja ON projektime teljele X; vastavalt teoreemile sulgeja projektsioonist saame, et ON pr. $= OP_1$ pr. $+ P_1N$ pr. ja vastavalt teoreemile lõigu projektsioonist saame ON pr. $= ON \cdot \cos(\alpha + \beta)$, OP_1 pr. $= OP_1 \cdot \cos\alpha$, P_1N pr. $= P_1N \cdot \cos(\alpha + 0{,}5\pi)$ sest suunaga lõigul P_1N on sama projektsioon, mis sellega pikkuselt ja märgilt võrdsel lõigul OQ_1; edasi paneme tähele, et lõigud OP_1 ja $P_1N = OQ_1$ on vastavalt koosinus- ja siinuslõikudeks kaarele $MN = \beta$ (kaarte alguseks loeme siin punkti M, koosinuste teljeks on telg X', siinuste teljeks telg Y'), ning seetõttu $OP_1 = ON\cos\beta$, $P_1N = ON\sin\beta$. Paigutades leitud väärtused võrdusse, mis väljendab murdjoone OP_1N projektsiooni, ning jagades kõik liikmed lõiguga ON, saame valemi:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

Olles tõestanud selle valemi kehtivuse argumentide α ja β igasuguste väärtuste puhul, tuletame sellest kõik teised liitmis- ja lahutamisvalemid puhtanalüütiliselt, ilma geomeetriat kasutamata.

Tõesti:

$$\cos\left[(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\pi\right] = \cos\left[\alpha+\left(\beta+\frac{1}{2}\pi\right)\right] =$$

$$= \cos\alpha\cos\left(\beta+\frac{1}{2}\pi\right) - \sin\alpha\sin\left(\beta+\frac{1}{2}\pi\right),$$

$$-\sin(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Edasi saame:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;\ \cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]=$$
$$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Summa ja vahe tangensi valemid saame veel lihtsamalt tuletatud summa ja vahe siinuse ja koosinuse valemitest.

Äsja esitatud liitmisvalemi tuletamisel koosinuse jaoks on kahtlemata paremusi võrreldes tuletamisega, mis on antud N. Rõbkini õpikus (mida harva täielikult õpitakse). Kui kasutada joonist, millel nurgad α ja β ja nende summa ei ületa 90°, nagu on tehtudki A. Bermanti ja L. Ljusterniki õpikus, siis kogu arutlus ei tule raskem kui N. Rõbkini õpikus jämedas kirjas antud mittetäielik tuletamine, millel on viimasega võrreldes see paremus, et ta ei vaja üldistamist. Ikkagi on soovitav saavutada, et õpilased veenduksid arutluse sõltumatuses kasutatud joonisest, korrates seda mitmesuguste veerandite kaarte puhul.

§ 20. Korrutamis- ja jagamisvalemid.

On soovitav tuletada ja meelde jätta 3 valemit:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha=2\operatorname{tg}\alpha:(1-\operatorname{tg}^2\alpha).$$

Neile võib lisada veel kaks:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Kuid viimaseid on harvem tarvis. Tuletamine on puhtanalüütiline, mis põhineb liitmisvalemeil. Talitades sel viisil edasi, on kerge saada valemid, mis väljendavad $\sin m\alpha$ ja $\cos m\alpha$ $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ kaudu mis tahes naturaalarvulise m väärtuse korral, kuid seda on parem hiljem teha, ühenduses Newtoni binoomi ja kompleksarvude õppimisega.

Keerulisem on lugu jagamisvalemitega, s. o. valemitega, mis argumendi murdosa funktsioone väljendavad täisargumendi funktsioonide kaudu. Lihtsaimal juhtumil, kui argument jagatakse kahega, saame:

$$\cos^2 0{,}5\alpha-\sin^2 0{,}5\alpha=\cos\alpha,$$
$$\cos^2 0{,}5\alpha+\sin^2 0{,}5\alpha=1$$

ning leiame kergesti, et

$$\sin 0{,}5\alpha=\pm\sqrt{0{,}5(1-\cos\alpha)},\ \cos 0{,}5\alpha=\pm\sqrt{0{,}5(1+\cos\alpha)},$$
$$\operatorname{tg} 0{,}5\alpha=\pm\sqrt{(1-\cos\alpha):(1+\cos\alpha)}.$$

Siin nõuab erilist tähelepanu küsimus märgist radikaali ees. Kaar α võib kuuluda mis tahes veerandisse, ning iga veerandi jaoks peab võtma oma märkide kombinatsiooni; $\cos\alpha$ väärtuse teadmine ei kõrvalda veel seda määramatust. Näiteks, $\cos\alpha > 0$ korral kaar α võib kuuluda kas I, IV, V või VIII jne. veerandisse, ning kaar $0{,}5\alpha$ kas I, II, III või IV jne. veerandisse; samasugune lugu on siis, kui $\cos\alpha < 0$. Niisiis, antud $\cos\alpha$ järgi igaüks funktsioonidest $\sin 0{,}5\alpha$, $\cos 0{,}5\alpha$, $\operatorname{tg} 0{,}5\alpha$ on määratud kaheselt. Kui aga peale $\cos\alpha$ väärtuse on teada veel $\sin\alpha$ väärtus, siis poolkaare tangens on määratud üheselt. Tõesti, jagades liikmeti võrdused $2\sin 0{,}5\alpha\cos 0{,}5\alpha = \sin\alpha$, $2\cos^2 0{,}5\alpha = 1 + \cos\alpha$, saame valemi:

$$\operatorname{tg} 0{,}5\alpha = \sin\alpha : (1 + \cos\alpha),$$

ehk pärast lugeja ja nimetaja korrutamist avaldisega $1 - \cos\alpha$ ja pärast sellele järgnevat taandamist avaldisega $\sin\alpha$ saame valemi:

$$\operatorname{tg} 0{,}5\alpha = (1 - \cos\alpha) : \sin\alpha.$$

Need kaks viimast valemit on kerge saada ka ülemal toodud valemist, mis väljendab $\operatorname{tg} 0{,}5\alpha$ ainult $\cos\alpha$ kaudu, kuid siis küsimus märgist jääb selgusetuks. Tekib küsimus, miks kaare α siinuse ja koosinuse etteandmine määrab poolkaare tangensi üheselt. Seletamiseks piisab, kui märkida, et $1 + \cos\alpha > 0$ (alati, välja arvatud juhtumid, kui $\alpha = (2n+1)\pi$ ja kui $\operatorname{tg} 0{,}5\alpha$ väärtust ei ole olemas), ja

$$\sin\alpha = 2\sin 0{,}5\alpha\cos 0{,}5\alpha$$

ning

$$\operatorname{tg} 0{,}5\alpha = \sin 0{,}5\alpha : \cos 0{,}5\alpha$$

on alati ühe ning sama märgiga, seetõttu valemil

$$\operatorname{tg} 0{,}5\alpha = \sin\alpha : (1 + \cos\alpha)$$

ei saa olla mingit kahesust.

Poolkaare valemite järjestikune rakendamine võimaldab avaldada $\alpha : 2^n$ kujuliste kaarte funktsioone $\cos\alpha$ kaudu, kus n on mis tahes naturaalarv.

Olgu märgitud veel kergesti tuletatavad valemid:

$$\sin\alpha = 2t : (1 + t^2),$$
$$\cos\alpha = (1 - t^2) : (1 + t^2),$$
$$\operatorname{tg}\alpha = 2t : (1 - t^2),$$

kus $t = \operatorname{tg} 0{,}5\alpha$, mis on tähtsad selle poolest, et nad väljendavad kaare α kõik trigonomeetrilised funktsioonid ratsionaalselt ühe ning sama arvu kaudu, nimelt poolkaare tangensi kaudu, ja mida seetõttu sageli kasutatakse matemaatilise analüüsi kursuses.

Et $\sin 0{,}5\alpha$ ja $\cos 0{,}5\alpha$ väljendada $\cos\alpha$-kaudu, selleks tuli meil lahendada kahe ruutvõrrandi süsteem. Avaldiste saamiseks $\sin\frac{1}{3}\alpha$ ja $\cos\frac{1}{3}\alpha$ jaoks $\cos\alpha$ kaudu tuleb lahendada kuupvõrrandite süsteem:

$$3\sin\frac{1}{3}\alpha - 4\sin^3\frac{1}{3}\alpha = \sin\alpha,$$
$$4\cos^3\frac{1}{3}\alpha - 3\cos\frac{1}{3}\alpha = \cos\alpha,$$

mida koolimatemaatika kursuses ei vaadelda.

§ 21. Trigonomeetriliste summade esitamine korrutistena.

Siinuse ja koosinuse nelja liitmis- ja lahutamisvalemi paariviisi liikmeti liitmine ja lahutamine annab neli uut tähtsat valemit:

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,\\ &\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta,\\ &\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,\\ &\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Neil valemeil on kahesugune tähendus. Esiteks, kui neid lugeda vasakult paremale, siis igaüks neist teisendab siinuste või koosinuste summa korrutiseks, on seega tegureiks lahutamise valemeiks. Võttes $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$, saame nad mugavamal kujul kirjutada:

$$\begin{aligned} &\sin x+\sin y=2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y),\\ &\sin x-\sin y=2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y),\\ &\cos x+\cos y=2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y),\\ &\cos x-\cos y=-2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y). \end{aligned}$$

Neid valemeid kasutatakse niivõrd sagedasti, et maksab neid meeles pidada, mis on kergem nende sõnastatud kujul: kahe kaare siinuste summa võrdub nende kaarte poolsumma siinuse ja poolvahe koosinuse kahekordse korrutisega jne. Neljas valem kirjutatakse sageli pisut teisiti, asendades $-\sin\frac{1}{2}(x-y)$ avaldisega $\sin\frac{1}{2}(y-x)$, ning loetakse nõnda: kahe kaare koosinuste vahe võrdub nende kaarte poolsumma siinuse ja poolvahe siinuse kahekordse korrutise vastandarvuga.

Teiseks, samad valemid (1), kui neid lugeda paremalt vasakule pärast liikmeti jagamist 2-ga annavad kahe siinuse korrutise, siinuse ja koosinuse korrutise, koosinuse ja siinuse korrutise, kahe koosinuse korrutise teisenduse siinuste või koosinuste summaks või vaheks. Enne logaritmide avastamist kasutati neid valemeid arvutamise vahendina (korrutamise asendamine liitmisega). Nüüd kasutatakse neid sageli matemaatilises analüüsis, sest mõnel puhul, näiteks funktsioonide integreerimisel, on summadega kasulikum opereerida kui korrutistega. Valemite (1) säärast kasutamist koolikursuses täiesti ignoreeritakse, mida tuleb kahetseda. Silmas pidades kõrgema kooli vajadusi, peaks teatavat tähelepanu pühendama ka niisuguseile valemeile, mis väljendavad siinuse ja koosinuse astmeid kordsete kaarte siinuste ja koosinuste algebraliste summade kujul, nagu näiteks:

$$\begin{aligned} &\sin^2\alpha=0{,}5-0{,}5\cos 2\alpha,\\ &\cos^2\alpha=0{,}5+0{,}5\cos 2\alpha,\\ &\sin^3\alpha=\tfrac{3}{4}\sin\alpha-\tfrac{1}{4}\sin 3\alpha \text{ jne.,} \end{aligned}$$

seda enam, et säärased valemid leiavad rakendamist ka trigonomeetriliste võrrandite lahendamisel.

Ülesanded mitmesuguste trigonomeetriliste avaldiste korrutisteks teisendamise kohta sobivad väga õpilastele iseseisvaks tööks («teisendamine logaritmitavaks»). Peab tagama oskuse kindlalt ja kiiresti tuletada niisugused valemid, nagu

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \sin(\alpha+\beta)\sec\alpha\sec\beta,$$
$$(\sin\alpha - \sin\beta):(\sin\alpha + \sin\beta) = \operatorname{tg}0{,}5(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{ctg}0{,}5(\alpha+\beta)$$

jne. On soovitav, et õpilased oleksid suutelised toime tulema ka keerulisemate ülesannetega, näiteks, et nad suudaksid tõestada valemi

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos 0{,}5\alpha\cos 0{,}5\beta\cos 0{,}5\gamma$, mis kehtib tingimusel $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Sääraseid ülesandeid on suurel hulgal N. Rõbkini ülesannete kogus. Seal toodud näpunäiteid raskemate ülesannete lahendamise kohta peab kasutama mõistlikult: mitte alustada nende näpunäidete järgi, vaid otsida esmalt ise oma lahendus, ning kasutada näpunäiteid alles pärast tagajärjetut katsetamist.

Seda laadi ülesannete lahendamisel on paljudel juhtumitel väga tulus abinurga sissetoomine. Näiteks, selleks, et teisendada korrutiseks summa

$$y = a\cos x + b\sin x,$$

võetakse $b:a = \operatorname{tg}\varphi$ ning saadakse

$$y = a\cos(x-\varphi)\sec\varphi.$$

Niisugust abinurga võtet kasutatakse laialt suurte arvutuste korral, näiteks astronoomias, see aitab arvutusi tunduvalt lihtsustada.

§ 22. Mõned tähtsad trigonomeetrilised võrratused.

Kuigi keskkooli programmis ei mainita kahekordset võrratust

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha, \qquad (1)$$

kuid et ta on edaspidi väga tähtis, esineb sagedasti rakendustes, on väga kerge tuletada, siis tuleb teda IX klassis võtta. Ta kehtib I veerandi iga kaare puhul, mis on väljendatud radiaanides, ja on kerge tõestada pindalade võrdlemise abil (vt. § 62 A. Bermanti ja L. Ljusterniki õpikus). Enne tõestuse andmist on soovitav õpilasi suunata võrratustele (1) siinuste, tangensite ja radiaanmõõtude tabelite vaatlemise kaudu (näiteks võtta)

$$\sin 10^\circ = 0{,}1736,\quad \operatorname{tg}10^\circ = 0{,}1763,\quad \operatorname{arc}10^\circ = 0{,}1745$$

ja ära märkida, et

$$\sin 10^\circ < \operatorname{arc}10^\circ < \operatorname{tg}10^\circ,$$

siis kontrollida seda tulemust teiste kaarte puhul.

Säärane tabelite vaatlemine, mis juhib võrratustele (1), lubab teha veel ühe tähtsa järelduse: mida vähem argument erineb nullist, seda lähemal arvule 1 on $\sin\alpha$ ja α suhe. Seda järeldust kinnitab uute võrratuste

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ ehk } \cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$$

tõestamine, mis toimub kergesti võrratustest (1) järeldamise teel. Argumendi α piiramatul lähenemisel 0-le $\cos\alpha$ järjest kasvab, lähenedes piiramatult arvule 1, sama toimub ka suhtega $\sin\alpha : \alpha$, mis on suurem kui $\cos\alpha$, kuid vähem kui 1. Seda olukorda iseloomustab, nagu teada, lühike väljend: kui $\alpha \to 0$, siis suhte $\sin\alpha : \alpha$ piirväärtus on 1.

Kahekordse võrratuse (1) esimene osa annab $\sin\alpha$ ülemtõkke (ÜT) α radiaanmõõdu kujul: I veerandi iga kaare siinus on selle kaare radiaanmõõdust vähem. Alamtõkke (AT) $\sin\alpha$ jaoks annab A. Bermanti ja L. Ljusterniki õpikus tõestatud teoreem: kui α on I veerandi kaare radiaanmõõt, siis

$$\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{4}\alpha^3. \qquad (2)$$

Kuid saab tõestada veelgi rangema võrratuse

$$\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3.$$

Teda nimetatakse «rangemaks» selles mõttes, et temast saab eelmise võrratuse kohe järeldada, sest kui $\sin\alpha$ on suurem kui $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$, siis $\sin\alpha$ on ammugi suurem vähemast arvust $\alpha - \frac{1}{4}\alpha^3$, ümberpöördud järeldamine on aga võimatu: sellest, et $\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{4}\alpha^3$, ei järeldu sugugi, et $\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$.

Veel rangem kahekordne võrratus:

$$S_n - r_n < \sin\alpha < S_n$$

(kus $S_n = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots + \frac{\alpha^{4n-3}}{(4n-3)!}$, $r_n = \frac{\alpha^{4n-1}}{(4n-1)!}$, n on mis tahes naturaalarv) tõestatakse teatavasti ridade teoorias. See annab $n = 1$ korral

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{6} < \sin\alpha < \alpha.$$

Mõned head ülesanded trigonomeetriliste võrratuste kohta leiduvad algebra ülesannete kogus [III, 24].

§ 23. Ligikaudsed trigonomeetrilised valemid.

Eelmise paragrahvi võrratustest (1) ja (2) järeldub otsekohe, et väikeste nurkade puhul kehtivad ligikaudsed valemid

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad \cos\alpha \approx 1, \quad \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha, \quad \ldots\ldots (1)$$

mis on seda täpsemad, mida vähem on α, ja mida rakendatakse väga laialt. Kahekordne võrratus

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{6} < \sin\alpha < \alpha$$

annab palju rangemad valemid

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3,\ \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^3}{2},\ \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 \ldots \quad (2)$$

Võttes $\sin\alpha \approx \alpha$, teeme vea, mis on vähem kui $\frac{1}{6}\alpha^3$, ja mis väikeste väärtuste korral on väga väike; kui $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots$, siis $\frac{1}{6}\alpha^3$ on vastavalt vähem kui $2 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-7}, 2 \cdot 10^{-10}, \ldots$.

On huvitav selgitada, missuguses vahemikus võib võtta α, et ligikaudne valem $\sin\alpha \approx \alpha$ annaks siinuse väärtused ette antud õigete numbrite arvuga koma järel. Võttes $\frac{1}{6}\alpha^3 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$, saame: $\alpha = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-k}}$, s. o. $k = 2$ korral $\alpha \approx 0{,}3107$, $k = 3$ korral $\alpha \approx 0{,}1442$, $k = 4$ korral $\alpha \approx 0{,}0669$. Üle minnes radiaanmõõdult kraadimõõdule leiame, et valem $\sin\alpha \approx \alpha$ tagab kaks õiget numbrit koma järel, kui α ei ületa 17°48′; kolm õiget numbrit koma järel, kui α ei ületa 8°15′; neli õiget numbrit koma järel, kui α ei ületa 3°50′. Saab näidata, et valem $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$ annab samasuguse täpsuse palju suuremais vahemikes: kaks kohta koma järel kuni 51°, kolm kohta kuni 32° ja neli kohta kuni 20°.

Ligikaudsed valemid koosinuse jaoks saame valemist

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

pärast väikese kaare siinuse asendamist selle kaare radiaanmõõduga: kõrvale jättes väga väikese arvu α^2, saame $\cos\alpha \approx 1$; säilitades α^2 ning kasutades valemit

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + 0{,}5x,$$

saame:

$$\cos\alpha \approx 1 - 0{,}5\alpha^2.$$

Valem $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha$ pärast $\sin\alpha$ asendamist arvuga α ja $\cos\alpha$ asendamist arvuga 1 annab

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha,$$

kui aga $\sin\alpha$ asendada arvuga $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$ ja $\cos\alpha$ arvuga $1 - 0{,}5\alpha^2$, ning jagamine katkestada pärast kahe liikme saamist jagatises, siis saame valemi:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3.$$

Alljärgnev tabel näitab, missuguses vahemikus võib võtta α, et nende ligikaudsete valemite kasutamisel tagada resultaadis k õiget numbrit koma järel.

Toome ühe näite nende ligikaudsete valemite kasutamise kohta. Oletame, et on tarvis määrata punktide A ja B (joon. 61, a) kõr-

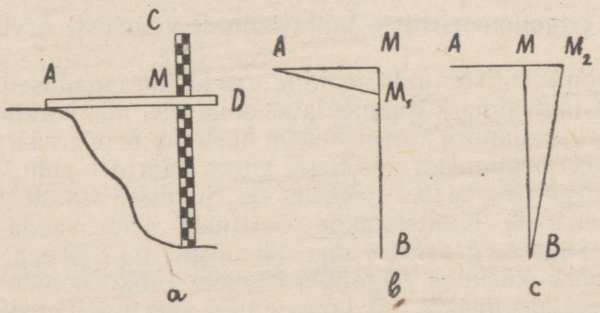
Valem	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\sin\alpha \approx \alpha$	17°48′	8°15′	3°50′
$\cos\alpha \approx 1$	5°43′	1°48′	0°34′
$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$	14°08′	6°25′	3°02′

Valem	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$	51°	32°	20°
$\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$	33°	18°	10°
$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$	29°	18°	11°

guste vahe vertikaalselt mõõtlatilt BC äralugemise teel selle alumisest otspunktist B kuni punktini M, mida märgib horisontaalne mõõtlatt AD. Tekib küsimus: kui palju mõjutab lugemit mõõtlati AD täpsest horisontaalsest asendist kõrvalekaldumine nurga α võrra ja mõõtlati BC täpsest vertikaalsest asendist nurga β võrra? Lugemi BM vastavad muutused on $MM_1 = AM \operatorname{tg}\alpha$ (joon. 61, b) ja $BM_2 - BM = BM \sec\beta - BM = BM(1 - \cos\beta)\sec\beta$ (joon. 61, c). Pannes $\operatorname{tg}\alpha$ asemele α ja $\cos\beta$ asemele 1, saame

$$MM_1 \approx MA \cdot \alpha,\ BM_2 - BM_1 \approx 0.$$

Nüüd saab selgeks, miks säärastel mõõtmistel soovitatakse horisontaalne latt seada vaaderpassi abil (siis nurk α on väga lähedane



Joon. 61.

0-le, paranduse MM_1 võib arvestamata jätta), aga püstlatt lihtsalt silma järgi (nurga β mõju ei ole märgatav).

Osutame veel ühele ligikaudsele valemile $\sin\alpha$ jaoks, mis kehtib mitte ainult väikese, vaid mis tahes teravnurga $\alpha°$ korral ning on väga kasulik väikese täpsusega ligikaudsete arvutuste puhul:

$$\sin\alpha \approx \frac{1}{60}\alpha, \quad \text{kui} \quad 0 \leqq \alpha \leqq 60°,$$
$$\sin\alpha \approx 1, \quad \text{kui} \quad 60° \leqq \alpha \leqq 90°.$$

Selle valemi viga saavutab suurima väärtuse $\alpha = 60°$ korral ja on siis $1 - 0{,}8660 = 0{,}1340$, keskmine viga aga, mida saab arvutada valemi

$$\sigma = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{3}\pi}(x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}(1 - \sin x)\,dx\right],$$

järgi, on kõigest 0,016.

Lõpuks tuletame valemi tangensi ligikaudse väärtuse arvutamiseks kaarele, mis on lähedane 90°-le. Võttes α radiaanmõõdu lähedase 0-le, saame

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = 1 : \operatorname{tg}\alpha \approx 1 : \alpha,$$

ehk täpsemalt:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \approx 1 : \left(\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3\right)\left(1 - \frac{1}{3}\alpha^2\right) : \alpha,$$

ning lõplikult:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \approx 1 : \alpha,\ \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \approx 1 : \alpha - \alpha : 3.$$

Mõlemad need valemid on seda täpsemad, mida lähedasem 90°-le on kaar α, s. o. mida lähedasem kaarele $0{,}5\pi$ on kaar $0{,}5\pi - \alpha$.

V peatükk.

TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE TABELID JA GRAAFIKUD.

§ 24. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamine.

Trigonomeetriliste funktsioonide vaadeldud omadused võimaldavad asuda tähtsaima küsimuse lahendamisele, mis kerkib nende iga praktilise rakendamise korral, see on küsimus nende väärtuste arvutamisvõtetest argumendi mis tahes antud väärtuse puhul. Kui argumendi (nurga või kaare) väärtus on joonisel antud, siis kõigi trigonomeetriliste funktsioonide väärtused võib saada mõõtmise teel. Kuid säärase graafilise meetodi täpsus on väike ning paratamatult tõuseb küsimus trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamisest argumendi mis tahes antud väärtuse korral, seejuures kui tahes suure täpsusega.

Kõigepealt märgime ära võimaluse küsimust mõnevõrra ahendada.

Esiteks, kui on olemas meetod $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ väärtuste arvutamiseks, siis $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ ja $\operatorname{cosec}\alpha$ väärtused saadakse lihtsalt jagamise teel. Võrdus

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

võimaldab neist kahest funktsioonist ühe väärtuse järgi leida teise vastava väärtuse. Seega ülesanne taandub lõppude lõpuks ainult ühe funktsiooni, kas siinuse või koosinuse, väärtuse arvutamisele. Teiseks, taandamisvalemid näitavad, et argumendi väärtuste võt-

misel võime piirduda vahemikuga 0° kuni 90°, isegi vahemikuga 0° kuni 45°. Liitmis- ja lahutamisvalemid

$$\sin(30° \pm \alpha) = 0{,}5 \cos \alpha \pm 0{,}5 \sqrt{3} \sin \alpha,$$
$$\cos(30° \pm \alpha) = 0{,}5 \sqrt{3} \cos \alpha \mp 0{,}5 \sin \alpha$$

ütlevad, et on võimalik vahemikku veelgi kitsendada, piirdudes ainult vahemikuga 0° kuni 15°.

Seega on meie üldine ülesanne taandunud kitsamaks: leida arvutamise võte $\sin \alpha$ või $\cos \alpha$ väärtuste leidmiseks kui tahes suure täpsusega argumendi α väärtustel vahemikus 0° kuni 15°.

Vaatleme paljude sääraste võtete hulgast kolme tähtsamat. 1. võte. Valemite kasutamine, mis väljendavad korrapärase n-nurga külje a_n ümberringjoone raadiuse r kaudu.

See võte oli eespool kasutatud, kuid nüüd võib edasi minna. Et $a_6 = r$, $a_{10} = \frac{1}{2} r(\sqrt{5} - 1)$, siis $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$,

$$\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + \sqrt{20}}.$$

Argumendi jagamisvalemite järgi leiame:

$$\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

$$\cos 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

ja lahutamisvalemite järgi

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°),$$
$$\cos 3° = \cos(18° - 15°).$$

Jagamisvalemite edasine rakendamine annab siinuse ja koosinuse kaartele

$1°30'$, $0°45'$, $0°22'30''$, $0°11'15''$ jne.

Kombineerides neid tulemusi liitmis- ja korrutamisvalemite abil, võime saada rea uusi $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ väärtusi, nimelt nende väärtused argumentidel:

$$h,\ 2h,\ 3h,\ 4h,\ \ldots,\ \text{kus } h = 30° : 2^n$$

ja $h = 18° : 2^n$ (n on mis tahes naturaalarv).

Teostades vastavad arvutused, saame vajadust mööda juurte ligikaudsed väärtused, ligikaudsed tulevad ka kõik tulemused. Et kindel olla saadud tulemuste numbrite arvu õigsuses, on soovitav rakendada tõkete arvutamist. Allpool on toodud täielikult kõik arvutused, mis on vajalikud siinuse ja koosinuse leidmiseks nurkadele $\alpha = 15°$, 18° ja 3° nelja kohaga koma järel. Arvutused on teostatud ühe tagavara numbriga, s. o. viie kohaga koma järel.

$$\sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ ja } \cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

arvutamine.

	AT	ÜT
$\sqrt{6}$	2,44948	2,44950
$\sqrt{2}$	1,41420	1,41422
$a = \sqrt{6} - \sqrt{2}$	1,03526	1,03530
$b = \sqrt{6} + \sqrt{2}$	3,86368	3,86372
$\sin 15° = a : 4$	0,25881	0,25883
$\cos 15° = b : 4$	0,96592	0,96593

Tulemus (4 õige numbriga koma järel):

$\sin 15° = 0{,}2588$
$\cos 15° = 0{,}9659$

$$\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \text{ ja } \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10 + \sqrt{20}}$$

arvutamine.

	AT	ÜT
$\sqrt{5}$	2,23606	2,23608
$a = \sqrt{5} - 1$	1,23606	1,23608
$\sin 18° = a : 4$	0,30901	0,30902

	AT	ÜT
$\sqrt{20}$	4,47213	4,47215
$b = 10 + \sqrt{20}$	14,4721	14,4722
$c = \sqrt{b}$	3,80421	3,80424
$\cos 18° = c : 4$	0,95105	0,95106

Tulemus (4 kohaga koma järel):

$\sin 18° = 0{,}3090$, $\cos 18° = 0{,}9511$.

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°) \text{ ja } \cos 3° = \cos(18° - 15°)$$

arvutamine.

	AT	ÜT
$a = \sin 18°$	0,30901	0,30902
$b = \cos 15°$	0,96592	0,96593
$c = \cos 18°$	0,95105	0,95106
$d = \sin 15°$	0,25881	0,25883
ab	0,29847	0,29849
cd	0,24614	0,24616
$\sin 3° = ab - cd$	0,05231	0,05235

	AT	ÜT
bc	0,91863	0,91865
ad	0,07997	0,07998
$\cos 3° = bc + ad$	0,99860	0,99863

Tulemus (4 õige numbriga koma järel):

$\sin 3° = 0{,}0523$;
$\cos 3° = 0{,}9986$.

Kontrolliks oleks võinud arvutada summa $S = \sin^2 3° + \cos^2 3°$ ja veenduda, et AT $s < 1$, ÜT $s > 1$. Neljakohalise tabeli järgi leiame just saadud väärtused, kuuekohaline (Petersi) tabel aga annab

$$\sin 15° = 0{,}258819, \quad \cos 15° = 0{,}965926,$$
$$\sin 18° = 0{,}309017, \quad \cos 18° = 0{,}951057,$$
$$\sin 3° = 0{,}052336, \quad \cos 3° = 0{,}998630,$$

mis meie tulemustega on täiesti kooskõlas (cos 3° täpsem väärtus on 0,99862995 . . .).

2. võte. Võrratuse $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha$ rakendamine, kus α on radiaanmõõt.

Äsja vaadeldud 1. võtte puuduseks on see, et ta ei ole (otseselt) rakendatav argumendi igasuguse väärtuse korral. Teine lugu on võttega, mis põhineb kahekordsel võrratusel:

$$\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha.$$

Kui radiaanmõõt α on lähedane nullile, siis arv $\frac{1}{6}\alpha^3$ on nullile veel palju lähedasem, ning see kahekordne võrratus annab $\sin\alpha$ jaoks teineteisest väga vähe erinevad tõkked. Vaatame näiteks, mis ta annab kaare 1° korral, mille radiaanmõõt on $\pi : 180$, kui lähtuda π väärtusest $\pi = 3{,}14159265 \ldots$, mis on ümardatud kuuekohaliseks.

sin 1° arvutamine võrratusest

$$\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha.$$

	AT	ÜT
π	3,14159	3,14160
$\alpha = \pi : 180$	0,0174532	0,0174534
α^3	0,0000053	0,0000054
$\alpha^3 : 6$	0,0000008	0,0000009
$\sin\alpha$	0,0174521	0,0174534

Tulemus (5 õige numbriga koma järel):

$$\sin 1° = 0{,}01745.$$

Selle võttega võib sin 1° saada ainult 5 kohaga koma järel; kontroll (Petersi) tabeli järgi annab $\sin 1° = 0{,}017452$. Vähemate α väärtuste korral tulemuse täpsus on suurem. Näiteks $\alpha = 10''$ korral saame niisugused tõkked:

$$0{,}0000484813680 < \sin 0°0'10'' < 0{,}0000484813682.$$

Teades mingi väikese nurga α siinust, võib liitmis- ja korrutamisvalemite abil leida siinuse ja koosinuse mis tahes nurgale, mis on α kordne. Näiteks, kasutades äsja leitud tõkkeid sin 1° jaoks, arvutame valemi $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ järgi cos 1° (0,999847 <

$< \cos 1° < 0{,}999848$, millest saame $\cos 1°$ väärtuseks 5 õige numbriga koma järel 0,99985), seejärel

$$\sin 2° = 2 \sin 1° \cos 1° (0{,}034896 < \sin 2° < 0{,}034901),$$
$$\cos 2° = 1 - 2 \sin^2 1° (0{,}999390 < \cos 2° < 0{,}999392),$$

millest $\sin 2° = 0{,}03490$, $\cos 2° = 0{,}99939$ (ka 5 õige numbriga koma järel), edasi $\sin 3° = \sin(2° + 1°) = 0{,}0523$ (nüüd juba ainult 4 õige numbriga koma järel, sest $0{,}052330 < \sin 3° < 0{,}052338$, ning kuigi 5-es number koma järel 3 on täiesti määratud, ei ole ometi selge, kuidas ümardada; kontroll kuuekohalise tabeli järgi annab $\sin 3° = 0{,}052336$ ja $\cos 3° = \cos(2° + 1°) = 0{,}99863$ (jällegi 5 õige numbriga koma järel kahekordse võrratuse $0{,}998628 < \cos 3° < 0{,}998632$ põhjal).

Kombineerides seda teist võtet, mis annab seda täpsemad tulemused, mida vähem on argument, esimese võttega, mis annab kui tahes suure täpsusega $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ väärtused α väärtuste korral, mis saadakse kaarte 30° ja 18° järkjärgulise poolitamise ja kombineerimise teel, võib saada $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ väärtused igale kaarele kui tahes kõrge täpsusega.

Siin äsja kirjeldatud teist võtet vaadeldakse tavaliselt trigonomeetria õpikutes.

Kui nurgad mõõta radiaanides, siis see võte võimaldab siinuste tabeli koostada lihtsamalt, kui ükski teine võte, kui aga nurgad väljendada kraadides, siis see võte eeldab π teadmist väga suure täpsusega, mis ei ole saavutatav ülemal IV jao § 21 vaadeldud Archimedese võtte abil, ning peab kasutama teisi, keerulisemaid võtteid, millega võib tutvuda, näiteks, raamatu [III, 30a] järgi. Sama märkus käib ka allpool vaadeldava siinuse arvutamise 3. võtte kohta.

3. võte. $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ arvutamine ridade abil.

Eespool oli juba osutatud kahekordsele võrratusele

$$S_n - r_n < \sin \alpha < S_n,$$

kus

$$S_n = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots + \frac{\alpha^{4n-3}}{(4n-3)!},$$

$r_n = \frac{\alpha^{4n-1}}{(4n-1)!}$, n on mis tahes naturaalarv; see võrratus saadakse tuntud reast

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots,$$

mis on koonduv igasugusel α väärtusel: missugune α väärtus ka oleks, $n \to \infty$ korral $r_n \to 0$. Kasutades seda võrratust võib α igasuguse väärtuse korral arvutada $\sin \alpha$ väärtuse kui tahes kõrge täpsusega ja seejuures vähema arvutuste hulgaga, kui 1. ja 2. võttega. Keskkoolis ei saa selle tuletamist anda, kuid ta rakendamist näidetel on väga soovitav näidata. Kasvõi niisugune näide:

sin 3° arvutamine võrratuse $S_n - r_n < \sin\alpha < S_n$ abil sel puhul, kui $n = 2$.

	AT	ÜT
π	3,14159	3,14160
$\alpha = \pi : 60$	0,0523598	0,0523600
α^3	1435	1436
α^5	3	4
α^7	0	1
$\frac{1}{6}\alpha^3$	239	240
$\frac{1}{120}\alpha^5$	0	1
$r_2 = \frac{1}{7!}\alpha^7$	0	1
$S_2 = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120}$	0,0523358	0,0523361
$\sin\alpha$	0,0523357	0,0523361

Tulemus (6 õige numbriga koma järel):

$$\sin 3° = 0{,}052336.$$

Sama mugavalt võib saada koosinuse väärtused kahekordsest võrratusest

$$C_n - r_n < \cos\alpha < C_n,$$

kus

$$C_n = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots - \frac{\alpha^{4n-2}}{(4n-2)!} + \frac{\alpha^{4n}}{(4n)!},$$

$r_n = \frac{\alpha^{4n+2}}{(4n+2)!}$, n on mis tahes naturaalarv. See võrratus tuletatakse tuntud reast

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots,$$

mis ka koondub igasuguse α väärtuse korral.

Eriti kiiresti läheb $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ arvutamine ridade abil selliseil juhtumeil, kui radiaanides väljendatud α väärtus on kahe-kolme kohaline.

Toome näitena $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ arvutused $\alpha = 0{,}5$ korral, s. o. $\alpha = 28° 38' 52'', 4 \ldots$, mis on teostatud vea range arvestamiseta 5-kohaga koma järel ning lõpptulemuste ümardamisega 4-kohaliseks:

$$\sin 0{,}5 = 0{,}5 - \frac{1}{3!} \cdot 0{,}5^3 + \frac{1}{5!} \cdot 0{,}5^5 - \frac{1}{7!} \cdot 0{,}5^7 =$$

$$= 0{,}50000 - 0{,}02083 + 0{,}00026 - 0{,}00000 = 0{,}47943,$$

ehk lõplikult:

$$\sin 0{,}5 = 0{,}4794;$$

$$\cos 0{,}5 = 1 - \frac{1}{2!} \cdot 0{,}5^2 + \frac{1}{4!} \cdot 0{,}5^4 - \frac{1}{6!} \cdot 0{,}5^6 =$$

$$= 1{,}00000 - 0{,}12500 + 0{,}00260 - 0{,}00002 = 0{,}87758,$$

ehk lõplikult $\cos 0{,}5 = 0{,}8776$.

Kontroll radiaanides väljendatud argumendi trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste tabeli järgi annab $\sin 0{,}5$ ja $\cos 0{,}5$ jaoks just need väärtused; meie poolt kõrvale jäetud 5-es number koma järel, kui mitte usaldatav, osutub mõlemal juhtumil õigeks.

Trigonomeetria õpikuis käsitletakse mis tahes argumendi trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamist väga skemaatiliselt, koolis aga seda küsimust vaevalt puudutatakse või ei puudutata üldse. Ometi on väga tähtis, et õpilased teaksid, kuidas tabelis toodud arvud on saadud. Siin vaadeldud näited näitavad selgesti, et $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ väärtuste arvutamine on IX klassi õpilastele täiesti jõukohane ning suurepäraseks materjaliks harjutusteks aritmeetiliste arvutuste alal, mida peab oskama iga keskkooli lõpetaja. Enamvähem keeruliste arvutuste teostamine vea range arvestamisega on oma töö tulemuste eest vastutustunde kasvatamise väga mõjuvaks vahendiks, ning ei tohi mööda lasta sel alal treenimise võimalusi, mida pakub äsja vaadeldud küsimus.

Kui tegemist on mitte üksikute $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ väärtuste arvutamisega, vaid nende funktsioonide väärtuste tabuleerimisega, s. o. nende väärtuste tabeli koostamisega võrdkaugusel seisvate argumendi väärtuste jaoks, siis kasutatakse muid võtteid, mis arvutusi väga lihtsustavad. Neid võtteid ei ole tarvis keskkooli kursuses puudutada. Säärased tabelid on koostatud, kontrollitud, tarvis ainult teada, kuidas nad on ehitatud, et neid teadlikult ja kindlalt kasutada. Selle küsimuse vaatlemisele siirdumegi.

§ 25. 4-kohaliste trigonomeetriliste tabelite ehitus ja kasutamine.

Trigonomeetria õppimisel keskkoolis peale nende tabelite, mida õpilased on kasutanud juba enne seda, nimelt peale ruutude, kuupide, ruutjuurte, kuupjuurte, pöördarvude, radiaanmõõtude ja logaritmide tabelite kasutatakse pidevalt veel trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste tabeleid, niinimetatud trigonomeetriliste funktsioonide loomulike väärtuste tabeleid, mis annavad funktsioonide eneste väärtused, ja trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide tabeleid, mis annavad trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste kümnendlogaritmid. Põhilisteks tabeliteks, mis viimaseil aastail on nõukogude keskkoolis laialt levinud, on neljakohalised tabelid, mis praktilistes rakendustes annavad enamail juhtumeil küllaldase täpsuse ning on mugavamad kasutada kui suurema kohtade arvuga tabelid, kuid on väga soovitav, et keskkooli lõpetajad oleksid tuttavad matemaatiliste tabelite ehituse ja kasutamise tähtsamate üldiste printsiipidega, ning vajaduse korral oskaksid kasutada ka muid, suurema täpsusega tabeleid.

V. Bradise 4-kohaliste matemaatiliste tabelite kogus, mis meie keskkoolis on tarvitusele võetud, leidub siinuste tabel, mis sisaldab $\sin\alpha$ väärtused vastavalt argumendi väärtustele $0°$ kuni $90°$ iga $0°$, $1 = 6'$ tagant. Valemi

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

kehtivuse tõttu see tabel annab ka samadele argumendi väärtustele vastavad koosinuse väärtused. Et vältida lahutamist, kasutatakse teist numeratsiooni (all ja paremal). Tabeli säärase tiheduse valik (iga $6'$ tagant) tagab nii lineaarse interpolatsiooni

võimaluse kogu tabeli ulatuses (sest tabelivahed muutuvad väga aeglaselt) kui ka mugavuse, sest need tabelivahed ei ole suured, mitte üle 18 kümnetuhandiku. Selle tabeli kasutamise tehnika on selle lisas antud seletustes piisavalt selgitatud ning omandatakse õpilaste poolt kergesti. Kuid on siiski tarvilik mõni sõna ütelda selles tabelis antud «valmis paranduste» kohta, mida õpilased kasutavad mõnikord mitte päris teadlikult.

Et naabertabelivahed on kas võrdsed või erinevad ainult viimase järguühiku ühelise võrra, siis on võimalik leida vahepealsetele argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused lineaarse interpolatsiooni teel. Näiteks soovides leida $\sin 25°38'$, võtame tabelist $\sin 25°36' = 0{,}4321$ ja

$$\sin 25°42' = 0{,}4337,$$

ning leiame tabelivahe $4337 - 4321 = 16$ viimase järgu ühikut. Veendudes, et naabertabelivahed ($4321 - 4305 = 16$ ja $4352 - 4337 = 15$) osutavad küllalt ühtlast siinuse muutumist (võetud täpsuse puhul 4 kohta koma järel ja 6′-se tiheduse puhul), leiame paranduse x, mis vastab antud argumendi väärtuse (25°38′) l i i a l e tema tabelis leiduva lähima vähema väärtuse (25°36′) suhtes võrdest:

$$x : 16 = 2 : 6$$

ning saame:

$$x = 16 : 3 \approx 5,$$

seejärel leiame:

$$\sin 25°38' = 0{,}4321 + 0{,}0005 = 0{,}4326.$$

Tähele pannes, et tabelivahed tabeli terve rea ulatuses, kus leiduvad siinused kaartele alates 25° kuni 26°, muutuvad väga vähe, olles kord 15, kord 16, võtame kogu selle rea jaoks k e s k m i s e tabelivahe $(\sin 26° - \sin 25°) : 10$, mis on $4384 - 4226 : 10 = 15{,}8$, ning arvutame (selle rea jaoks) keskmised parandused 1′, 2′ ja 3′ kohta, saades pärast ümardamist 3, 5, 8. Need ongi valmis parandused, mis tabelis on trükitud samas reas ja mille kasutamine töötamist tabeliga väga hõlbustab. Parandusi 4′ ja 5′ kohta ei ole toodud, sest paranduste liitmise 4′ ja 5′ puhul võib asendada vähemate (seega ka täpsemate) paranduste lahutamisega funktsiooni suuremast lähimast tabeliväärtusest vastavalt 2′ ja 1′ puhul.

Et tagada teadlikkust valmis paranduste kasutamisel, tuleb nõuda, et õpilased oskaksid toime tulla ka ilma nendeta, lahendades vastava võrde, ja et nad selgesti mõistaksid, et lineaarne interpolatsioon põhineb oletusel funktsiooni kasvamise ühtlusest ühe rea ulatuses (ehk teiste sõnadega: oletusel argumendi muutuse ja funktsiooni muutuse vahelisest võrdelisusest).

Tangensite tabel (seesama on ka kootangensite tabel) argumendi väärtustele 0° kuni 75° on ehitatud siinuste tabeliga üht moodi (ainult selle vahega, et alates $\operatorname{tg} 60°$ lineaarse interpolatsiooni võimaluse tagamiseks funktsioonide väärtused on võetud

mitte 4 kohaga koma järel, vaid 4-kohaliselt). 75°-st suuremate väärtuste korral tabeli tihedus on suurendatud 1′-ni, sest endise tiheduse 6′ korral tabelivahe muutus ühe rea ulatuses saab tunduvaks, ning valmis parandusi terve rea jaoks ei saa anda.

Nagu kõigis matemaatilistes tabelites nii ka trigonomeetrilistes tabelites toodud $\sin \alpha$ ja $\operatorname{tg} \alpha$ väärtused ei ole täpsed, vaid omavad viga, mis ei ületa viimase järgu ühiku poolt. Näiteks võttes tabelist $\sin 77°36' = 0{,}9767$ ja $\operatorname{tg} 64°18' = 2{,}078$, võib vastutada, et.

$$0{,}97665 < \sin 77°36' < 0{,}97675$$

ja

$$2{,}0775 < \operatorname{tg} 64°18' < 2{,}0785.$$

Lineaarse interpolatsiooni teel leitud väärtuste viga on pisut suurem, sest juba paranduse ümardamine võib anda viimase järgu poole ühikuni küündiva vea, ja peale selle on olemas veel viga funktsiooni mitte täiesti ühtlase muutumise tõttu, mis on väga väike sel juhtumil, kui naabertabelivahed teineteisest vähe erinevad. Rõhuval enamikul juhtumeil sääraste interpoleeritud väärtuste vead on viimase järgu ühikust vähemad, ainult erakordseil juhtumeil, väga harva, võivad seda väga vähe ületada. Selles võib veenduda vastava analüüsimise abil, mis on väga vaevanõudev ja keskkoolile mitte sobiv, või lihtsalt nende väärtuste võrdlemise teel teistest tabelitest võetud täpsemate väärtustega.

Toome säärase võrdlemise näite

α	20°01′	20°02′	20°03′	20°04′	20°05′
4-kohalise tabeli järgi $a = \sin \alpha$	0,3423	0,3425	0,3428	0,3432	0,3434
6-kohalise tabeli järgi $b = \sin \alpha$	0,342293	0,342567	0,342840	0,343113	0,343387
vahe $(a - b) \cdot 10^4$	+ 0,07	— 0,67	— 0,40	— 0,87	+ 0,13

Kui vajatakse suuremat täpsust, siis peab kasutama täpsemaid tabeleid, või arvutama trigonomeetriliste funktsioonide väärtused ise, kasutades § 24 vaadeldud 3. võtet. Vaatleme eraldi olukorda 90°-le lähedase nurga tangensi leidmisel, kus lineaarne interpolatsioon annab väga vigased tulemused. Nõutagu näiteks leida $\operatorname{tg} 89°52'30''$. Tabelist võtame $\operatorname{tg} 89°52' = 429{,}7$ ja $\operatorname{tg} 89°53' = 491{,}1$, ning leiame tavalisel viisil paranduse $[(491{,}1 - 429{,}7) : 60] \cdot 30 = 30{,}7$; saades otsitud väärtuse $429{,}7 + 30{,}7 = 460{,}4$, pärast kontrollimist täpsemate tabelite järgi veendume, et see tulemus on väga umbkaudne (tõeliselt $\operatorname{tg} 89°52'30'' = 458{,}4$), mis on täiesti arusaadav, sest tabelivahe muutub siin väga kiiresti:

$$\operatorname{tg} 89°53' - \operatorname{tg} 89°52' = 61{,}4, \quad \operatorname{tg} 89°54' - \operatorname{tg} 89°53' = 81{,}9.$$

Ligikaudne valem $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - \alpha) \approx \frac{1}{\alpha}$ (vt. eespool lk. 424) annab siin

palju parema tulemuse: kui antud on kaar $89°52'30'' = 90° - 0°7'30''$, väljendame kaare $0°7'30''$ radiaanides, ning saame $\operatorname{tg} 89°52'30'' = 1 : 0{,}002181 = 458{,}5$.

Kaare otsimisel tabelist, kui siinus või tangens on antud (niinimetatud «pöördülesanne»), peab endale aru andma, missuguse täpsusega tulemus saadakse. Selle asemel, et siin küsimust üldiselt käsitleda, millest õpilastel on raske aru saada, võib piirduda mõne näite vaatlemisega, mis täie selgusega veenavad selles, et *mida suurem on tabelivahe, seda täpsemalt lahendub pöördülesanne*. Olgu näiteks tarvis leida α, teades et $\sin \alpha = 0{,}1456$. Arvestades seda, et see antud $\sin \alpha$ väärtus on ta ligikaudne väärtus 4 kohaga koma järel, on meil tegemist kahekordse võrratusega

$$0{,}14555 < \sin \alpha < 0{,}14565.$$

Tabel ütleb, et $\sin 8°22' = 0{,}1455$, $\sin 8°23' = 0{,}1458$, ja me võime väita, et otsitav α väärtus on $8°22'$ ja $8°23'$ vahel, seejuures esimesele neist arvudest lähemal, nii et lõpuks saame $\alpha \approx 8°22'$ (puuduga, veaga mitte üle poole minuti). Kui aga $\sin \alpha = 0{,}9997$, siis

$$0{,}99965 < \sin \alpha < 0{,}99975,$$

tabelis aga on kolm kaart:

$$88°30',\ 88°36',\ 88°42',$$

mille siinused on 0,9997, millest saab otsitava kaare jaoks järeldada teineteisest üsna kaugel seisvad tõkked:

$$88°24' < \alpha < 88°48',$$

millest $\alpha \approx 88°36'$, võimaliku veaga kuni $12'$.

Tabelite läbivaatamine annab järgmise väga tähtsa praktilise järelduse: 90°-le lähedast kaart saab tema siinuse järgi määrata väga ebatäpselt; samasugune lugu on 0°-le lähedase kaare määramisega tema koosinuse järgi; I veerandi iga kaart saab tangensi järgi täpsemalt määrata kui siinuse ja koosinuse järgi.

Neljakohalised trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide tabelid on ehitatud analoogiliselt loomulike väärtuste tabelitele. Et α lähenedes 0-le nii $\lg \sin \alpha$ kui ka $\lg \operatorname{tg} \alpha$ absoluutväärtuselt kasvavad tõkestamatult, jäädes negatiivseiks, siis vahemikus 0° kuni 14° on tabeli tiheduseks võetud $1'$; sama on tehtud ka $\lg \operatorname{tg} \alpha$ jaoks vahemikus 76° kuni 90°. Kaare α väärtuste jaoks 14° kuni 76° on tiheduseks võetud 0°,1 ja on antud valmis parandused.

Kui tegemist on 0°-le või 90°-le lähedaste kaartega, mis ei ole täisarv kraade ja minuteid, siis valmisparanduste puudumise tõttu tuleb need leida tavalisel viisil lineaarse interpolatsiooni teel, kui see on lubatav. Näiteks, leiame $\lg \sin 5°24'20''$, liites tabeli väärtusele $\lg \sin 5°24' = \overline{2},9736$ võrdest $x : 14 = 20 : 60$ leitud paranduse 5, saame $\lg \sin 5°24'20'' = \overline{2},9741$; seda tulemust võib pidada täiesti

usaldatavaks, sest tabelivahed selles osas on peaaegu muutumatud (14 — 13 — 13). Tõepoolest, täpsemais tabeleis leiame

$$\lg \sin 5°24'20'' = \overline{2},9740732.$$

Kui lineaarne interpolatsioon ei ole lubatav, siis kasutame § 24 vaadeldud ligikaudseid valemeid.

Käesolevat paragrahvi lõpetades puudutame veel küsimust sellest, milliseid, kas loomulike väärtuste või logaritmilis-trigonomeetrilisi tabeleid on koolis parem kasutada. Siin tuleb silmas pidada arvutustöö ratsionaliseerimise üldist printsiipi: igal üksikul juhtumil peab kasutama neid, arvutajale kättesaadavaid, arvutamise abivahendeid, mis maksimaalselt hõlbustavad arvutusi, tagades nõutava täpsuse. Keskkooli vanemais klassides tavaliselt eelistatakse logaritmilis-trigonomeetrilisi tabeleid, kuid ei ole mingit kahtlust, et loomulike väärtuste tabelid annavad paljudel juhtumitel tulemuse kiiremini ja mõnikord ka täpsemalt; mõnikord on kasulik koos tarvitada nii ühtesid kui teisi. Toome näitena $x = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ väärtuse arvutuse antud α ja β väärtuste järgi kahel viisil, kusjuures logaritmilis-trigonomeetriliste tabelite rakendamiseks teisendame antud avaldise kujuks

$$x = \cos(\beta - \alpha) \cdot \sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\beta.$$

1. võte			2. võte		
α	32°17′	α	32°17′	$\lg\cos(\beta-\alpha)$	$\overline{1},9950$
β	40°56′	β	40°56′	$\lg\sec\alpha$	0,0729
$\operatorname{tg}\alpha$	0,6318	$\beta-\alpha$	8°39′	$\lg\operatorname{cosec}\beta$	0,1836
$\operatorname{ctg}\beta$	1,1530	$\lg\cos\alpha$	$\overline{1},9271$		
$x = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$	1,7848	$\lg\sin\beta$	$\overline{1},8164$	$\lg x$	0,2515
				x	1,784

Avaldiste $\sec\alpha$ ja $\operatorname{cosec}\beta$ logaritmid on siin võetud kui $\cos\alpha$ ja $\sin\beta$ logaritmide vastandarvud.

Kui nõutakse arvutada

$$x = \frac{\lg\sin\alpha \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha}$$

siis, muidugi mõista, on parem enne arvutada $s = \sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha$, rakendades ruutjuurte ja tangensite loomulike väärtuste tabeleid, ning seejärel leida $x = \lg\sin\alpha \cdot \sqrt{2} : s$ logaritmide abil, kui sisse tuua abinurk võrrandi $\operatorname{ctg}^2\varphi = \operatorname{tg}\alpha : \sqrt{2}$ järgi ja arvutada x valemist $x = \lg\sin\alpha \sin^2\varphi$, nagu seda soovitab N. Rõbkini ülesannete kogu (lk. 129, Nr. 7).

§ 26. Mõned teised tabelid.

Nagu eespool mitmel puhul märkisime, oskus kasutada mitmesuguseid matemaatilisi tabeleid on väga tähtis. Õppetöö trigonomeetrias annab sageli põhjust kasutada tabeleid, mis erinevad nendest 4-kohalistest tabelitest, mida keskkooli õpilased pidevalt kasutavad. Kuid tavaliselt, kahjuks, neid võimalusi ei kasutata, ning keskkooli lõpetanu, kohates kõrgemas koolis või praktikas teisi tabeleid, jääb nendega töötamisel raskustesse.

On soovitav õpilastele näidata peale 4-kohaliste tabelite veel mõnede teiste tabelite ehitust ja selgitada nendega töötamise üldisi printsiipe, eriti lineaarset interpolatsiooni. Teatav hulk sääraseid tabeleid, kas või üksikuis eksemplarides, peab leiduma kooli matemaatika kabinetis, ning õpilastel peab olema võimalus vajaduse korral neid kasutada. Nimetame mõned tabelid, mis väärivad erilist tähelepanu.

J. Peters, Trigonomeetriliste funktsioonide kuuekohalised tabelid GTTJ. 1932. Sisaldavad oma põhiosas kõigi 6 trigonomeetrilise funktsiooni väärtused (loomulikud väärtused, mitte logaritmid!) kaartele 0° kuni 90° iga 10″ tagant 6 kohaga koma järel (tangensid kaartele üle 60° kuue tüvenumbriga). Kaartele 0° kuni 2° on antud ctg α ja cosec α väärtused iga 1″ tagant, mis on ühtlasi tg α ja sec α väärtusteks kaartele 88° kuni 90°. Lineaarse interpolatsiooni hõlbustamiseks, mis on peaaegu kõikjal võimalik, on antud tabelivahed.

E. Prževalski, Viiekohalised logaritmide tabelid, Utšpedgiz. Need tabelid olid Venemaal suurima levikuga XIX sajandi lõpul ja XX sajandi algul, on mitmes trükis ilmunud ka nõukogude keskkooli jaoks. Sisaldavad 4 trigonomeetrilise funktsiooni viiekohalisi logaritme kaartele iga 1′ tagant. On näidatud tabelivahed *d*, on antud *P. P.* (Partes Proportionales) tabelid, s. o. väärtused 0,1*d*, 0,2*d*, 0,3*d*, ..., 0,9*d*, mis tunduvalt kergendavad lineaarset interpolatsiooni.

S. Glasenapp, Viiekohalised logaritmide tabelid, 7. trükk, 1932.

On antud kõigi 6 trigonomeetrilise funktsiooni logaritmid iga 1′ tagant, on näidatud *d* ja P. P. väärtused. Mõnevõrra ümbertöötatud kujul need tabelid trükiti uuesti 1946. ja 1953. aastal Sõjaväe kirjastuse poolt, kusjuures neile on lisatud 4-kohalised trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide tabelid nurkadele, mis on väljendatud nurgamõõtja jaotustes 0—00 kuni 7—50 iga 0—01 tagant.

Georg Vega, Logaritmilis-trigonomeetriline käsiraamat.

Oli enne revolutsiooni, eriti XIX sajandil, Venemaal väga levinud. Esimene nõukogude väljaanne ilmus 1932. a. Sisaldab 4 trigonomeetrilise funktsiooni 7-kohalisi logaritme kaartele iga 10″ tagant, annab tabelivahed ja P. P. Väikestele kaartele (kuni 5°) on antud lg sin α ja lg tg α väärtused iga 1″ tagant.

B. Segal ja K. Semendjajev, Viiekohalised matemaatilised tabelid, NSVL Teaduste Akadeemia trükk, 1950. Mahukas kogu, mis sisaldab radiaanides väljendatud argumendi trigonomeetriliste funktsioonide ja rea teiste elementaarsete ja mitteelementaarsete funktsioonide väärtusi.

Ei ole vaja püüda tutvustada paljusid tabeleid, kuid peab tagama õpilaste oskuse iseseisvalt selgeks teha iga säärase tabeli ehituse ja rakendamise, kasutades neil lisatud juhatusi. Erilist tähelepanu peab pöörama lineaarse interpolatsiooni võimalusele ja seda hõlbustavaile abivahendeile.

§ 27. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud.

Mis tahes ühe muutujaga funktsiooni õppimisel, nagu mitmel puhul oleme märkinud, omab suurt tähtsust selle graafiku ehitamine ristkoordinaatides, mis annab näitliku ülevaate kogu ta muutumise käigust. Vanad trigonomeetria õpikud, nähes trigonomeetria õppimise ülesannet kolmnurkade lahendamise oskuses, ei tõstnud üldse küsimustki trigonomeetriliste funktsioonide graafikuist. Enamik uutest õpikutest teeb seda, kuid ei seo graafikute ehitamist teiste osadega, ei kasuta neid. Näiteks, N. Rõbkini õpikus on graafikuile pühendatud kaks ja pool lehekülge, kuid edaspidises käsitluses neid üldse ei rakendata. Bermanti ja Ljusterniki raamatus on asi parem: siin kasutatakse graafikuid trigonomeetriliste pöördfunktsioonide küsimuse ja harmooniliste võnkumiste vaatlemisel. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikuid käsitletakse põhjalikult Piotrovski õpikus.

Nähes trigonomeetrias kõigepealt õpetust trigonomeetrilistest funktsioonidest, ei saa mööda minna nende graafikute küsimusest. Kuid ei saa arvestamata jätta seda, et liig varajase graafikute käsit-

lemise korral tuleb õpilastel tegelda korraga kahe geomeetrilise kujuga (trigonomeetriline ring ja graafikud), kusjuures mõlema üheks ja samaks eesmärgiks on trigonomeetriliste funktsioonide muutumise näitlik kujutamine ning nende mõlema omandamise kindlus seetõttu kannatab. Graafikute ehitamisega on parem mitte rutata, lükates ta selle ajani, kui hakatakse tabelite küsimust vaatlema.

Igasuguse ühe muutujaga funktsiooni näitliku kujutamise ideega ristkoordinaatide abil õpilased on juba tuttavad algebra kursusest, ning kolme uue funktsiooni graafikute ehitamise küsimus tõuseb loomulikult pärast tutvumist nende tabelitega. Nagu alati, tuleb graafiku ehitamist alustada mõõdu valimisega. Tavaliselt paigutatakse X-teljele vabalt valitud mõõdus kaarte väärtused kraadides, Y-teljel võetakse vabalt mingi lõik arvu 1 kujutuseks. Kõrvale jättes argumendi tõlgendamise kaarena või nurgana, parem võtta argument radiaanmõõdus ning kasutada üht ning sama mõõtu mõlemal teljel (kuigi mõne ülesande lahendamisel on kasulikum selle reegli järgi mitte talitada). Erinevate mõõtude korral mõned matemaatilises analüüsis tehtavad järeldused sinusoidi, tangensoidi ja teiste kõverate kohta vajavad eri reservatsioone (näiteks, puutuja kalde kohta X-telje suhtes, kõverjoonelise trapetsi pindala kohta, kõverusringjoone raadiuse kohta j. t.). Kõrgema kooli üliõpilane, analüüsi õppimisel teada saades, et sinusoid $y = \sin x$ ja tangensoid $y = \operatorname{tg} x$ lõikuvad X-teljega 45°-se nurga all, on hämmastanud vaadates nende kõverate kujutusi N. Rõbkini õpikus lk. 41 ja 42. Praktilistel kaalutlustel tuleb sageli X- ja Y-teljel võtta erinevad mõõdud, kuid see on juba komplikatsioon, mis igal üksikul juhtumil on eri tingimustega õigustatav, ning sellega ei tule alustada. Peale selle alatine kraadide paigutamine X-teljel arendab õpilastes väära kujutluse trigonomeetrilistest funktsioonidest kui ainult nurga või kaare funktsioonidest. Graafikute ehitamisel on eriti mõnus kasutada tabelit, milles trigonomeetriliste funktsioonide väärtused on antud radiaanides väljendatud argumendi järgi, näiteks tabelit, mis on toodud lk. 437—438.

Nii siis, oleme jõudnud järgmistele seisukohtadele:

1) trigonomeetriliste funktsioonide õppimisel, nagu kõigi ühe muutujaga funktsioonide puhul, koos nende definitsioonidega, nende omadustega ja nende väärtuste tabelitega tuleb vaadelda ka nende graafikuid ristkoordinaatide süsteemis;

2) need tabelid ehitatakse kõigepealt radiaanides väljendatud argumendi väärtuste puhul ühesuguste mõõtudega mõlemal teljel, edaspidi on sellest kõrvalekaldumine lubatav ainult tegeliku vajaduse järgi;

3) need graafikud ehitatakse alles pärast trigonomeetriliste funktsioonide tabelitega tutvumist;

4) edaspidises töös peab neid graafikuid kasutama (trigonomeetriliste pöördfunktsioonide õppimisel, trigonomeetriliste võrran-

sin x, cos x ja tg x väärtuste tabel radiaanides avaldatud argumentide järgi.

x	sin x	d	cos x	d	tg x	d
0,0	0,000	100	1,000	— 5	0,000	100
0,1	0,100	99	0,995	— 15	0,100	103
0,2	0,199	97	0,980	— 25	0,203	106
0,3	0,296	93	0,955	— 34	0,309	114
0,4	0,389	90	0,921	— 43	0,423	123
0,5	0,479	86	0,878	— 53	0,546	138
0,6	0,565	79	0,825	— 60	0,684	158
0,7	0,644	73	0,765	— 68	0,842	188
0,8	0,717	66	0,697	— 75	1,030	230
0,9	0,783	58	0,622	— 82	1,260	297
1,0	0,841	50	0,540	— 86	1,557	308
1,1	0,891	41	0,454	— 92	1,965	
1,2	0,932	32	0,362	— 94	2,57	
1,3	0,964	21	0,268	— 98	3,60	
1,4	0,985	12	0,170	— 99	5,80	
1,5	0,997	3	0,071	— 100	14,1	
1,6	1,000	— 8	— 0,029	— 100	— 34,2	
1,7	0,992	— 18	— 0,129	— 98	— 7,70	
1,8	0,974	— 28	— 0,227	— 96	— 4,28	
1,9	0,946	— 37	— 0,127	— 93	— 2,93	
2,0	0,909	— 46	— 0,416	— 89	— 2,19	
2,1	0,863	— 55	— 0,505	— 83	— 1,710	336
2,2	0,808	— 62	— 0,588	— 78	— 1,734	255
2,3	0,746	— 71	— 0,666	— 71	— 1,119	203
2,4	0,675	— 77	— 0,737	— 64	— 0,916	169
2,5	0,598	— 82	— 0,801	— 56	— 0,747	145
2,6	0,516	— 89	— 0,857	— 47	— 0,602	129
2,7	0,427	— 92	— 0,904	— 38	— 0,473	117
2,8	0,335	— 96	— 0,942	— 29	— 0,356	110
2,9	0,239	— 98	— 0,971	— 19	— 0,246	103
3,0	0,141	— 99	— 0,990	— 9	— 0,143	101
3,1	0,042	— 100	— 0,999	+ 1	— 0,042	100

x	$\sin x$	d	$\cos x$	d	$\operatorname{tg} x$	d
3,2	— 0,058	— 100	— 0,998	11	+ 0,058	102
3,3	— 0,158	— 98	— 0,987	20	0,160	104
3,4	— 0,256	— 95	— 0,967	31	0,264	111
3,5	— 0,351	— 92	— 0,936	39	0,375	118
3,6	— 0,443	— 87	— 0,897	49	0,493	132
3,7	— 0,530	— 82	— 0,848	57	0,625	149
3,8	— 0,612	— 76	— 0,791	65	0,774	173
3,9	— 0,688	— 69	— 0,726	74	0,947	211
4,0	— 0,757	— 61	— 0,654	79	1,158	266
4,1	— 0,818	— 54	— 0,575	85	1,424	354
4,2	— 0,872	— 44	— 0,490	89	1,778	
4,3	— 0,916	— 36	— 0,401	94	2,29	
4,4	— 0,952	— 26	— 0,307	96	3,10	
4,5	— 0,978	— 16	— 0,211	99	4,64	
4,6	— 0,994	— 6	— 0,112	100	8,86	
4,7	— 1,000	+ 4	— 0,012	100	+ 80,7	
4,8	— 0,996	14	+ 0,888	99	— 11,4	
4,9	— 0,982	23	0,187	97	— 5,27	
5,0	— 0,959	33	0,284	94	— 3,38	
5,1	— 0,926	43	0,378	91	— 2,44	
5,2	— 0,883	51	0,469	85	— 1,886	385
5,3	— 0,832	59	0,554	81	— 1,501	283
5,4	— 0,773	67	0,635	74	— 1,218	222
5,5	— 0,706	75	0,709	67	— 0,996	182
5,6	— 0,631	80	0,776	59	— 0,814	154
5,7	— 0,551	86	0,835	51	— 0,660	135
5,8	— 0,465	91	0,886	41	— 0,525	122
5,9	— 0,374	95	0,927	33	— 0,403	112
6,0	— 0,279	97	0,960	23	— 0,291	106
6,1	— 0,182	99	0,983	13	— 0,185	102
6,2	— 0,083	100	0,996	4	— 0,083	100
6,3	+ 0,017		1,000		+ 0,017	

dite lahendamisel, keerukamate funktsioonide graafikute ehitamiseks, harmooniliste võnkliikumiste õppimisel jne.);

5) on soovitav näidata seinatabeleid hästi väljajoonestatud graafikutega ja eeskujuliku graafiku ehitamine klassitahvlil õpetaja poolt, kuid peamine on, et iga õpilane joonestaks graafikud oma vihikus ruudulisel lehel, või veel parem: millimeeterpaberil.

Juba esimesel tutvumisel trigonomeetriliste funktsioonide graafikutega võib peatuda nende kahesugusel rakendamisel. Esiteks, lineaarse interpolatsiooni puhul ei toimu midagi muud, kui funktsiooni graafiku kaare asendamine vaadeldavas vahemikus sellele kaarele vastava kõõluga; seda selgitades mõistavad õpilased paremini lineaarse interpolatsiooni puhul tekkivate vigade kolme allikat: funktsiooni tabeliväärtuse ebatäpsus, paranduse ümardamine viimase järgu ühikuteni, kaare asendamine kõõluga. Ainus pilk siinuse graafikule ütleb, et see asendamine I veerandi kaare siinuse tõelist väärtust alati vähendab (tangensi korral, ümberpöördult: alati suurendab). Teiseks, on soovitav vaadelda funktsiooni graafikut, mis $0 \leqslant x \leqslant 60°$ korral on määratud valemiga $y = x : 60$ ja $60° \leqslant x \leqslant 90°$ korral valemiga $y = 1$ (vt. lk. 423), ja võrrelda seda sinusoidi $y = \sin x$ graafiku kaarega, mis on joonestatud samal joonisel ja samas mõõdus. Siin on kraadimõõdu, mitte aga radiaanmõõdu, kasutamine täiesti põhjendatud, kuid mõõdud on ikkagi parem võtta nii, et sinusoidi kaar ei saaks märgatavalt moonutatud.

Graafikute ehitamisel ei tule piirduda ainult 6 põhilise trigonomeetrilise funktsiooniga (või koguni kolmega nendest, nagu see on tehtud N. Rõbkini õpikus). Väga kasulik harjutuste liik, mis IX klassi õpilastele on täiesti jõukohane ja mis neid alati elavalt huvitab, on teiste funktsioonide graafikute ehitamine, mis saadakse põhiliste trigonomeetriliste funktsioonide kombineerimise teel.

VI peatükk.

TRIGONOMEETRILISED PÖÖRDFUNKTSIOONID. TRIGONOMEETRILISED VÕRRANDID.

§ 28. Trigonomeetriliste funktsioonide antud väärtustele vastavate argumendiväärtuste üldavaldised.

Tuleme tagasi ülesande juurde, milles nõutakse leida kõik sääraseid kaared, millel mingi trigonomeetriline funktsioon omab antud väärtust. Eespool me nägime, kuidas graafilise võttega trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide põhjal saab leida kõik need kaared. Siis õppisime, kasutades tabeleid, lahendama pöördülesannet, s. o. õppisime leidma I veerandi kaart ta antud trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse või selle logaritmi järgi. Nüüd võime selle ülesande lahendamise lõpule viia, leides üldavaldised argu-

mendi väärtustele, mis vastavad iga trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtustele. Olgu antud võrrand $\sin x = a$; kus $|a| \leqslant 1$ ($|a| > 1$ korral tal lahendeid ei ole). Esmalt leiame argumendi x absoluutväärtuselt vähima väärtuse x_0, mille siinus on a: kui $0 < a < 1$, siis saab selle leida otse tabelist, $0 < x_0 < 0{,}5\pi$; kui aga $-1 < a < 0$, siis kirjutame eelnevalt $\sin(-x) = -a$ ning tabelist leiame jälle $-x_0$, nii et nüüd $-0{,}5\pi < x_0 < 0$; kui $a = 0$, või $+1$, või -1, siis x_0 on vastavalt 0, või $0{,}5\pi$, või $-0{,}5\pi$. Seejärel leiame siinuse definitsiooni põhjal kõik samasuguse siinusega kaared, mis lõpevad punktides M_1 ja M_2. Need on esiteks kaared, mis väljenduvad valemiga:

$$x = x_0 + 2\pi n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

kus n on mis tahes täisarv (kas positiivne, või negatiivne, või null), ja teiseks, kaared, mis väljenduvad valemiga:

$$x = \pi - x_0 + 2\pi n,$$

ehk, mis on seesama, valemiga:

$$x = -x_0 + (2n + 1)\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Esimene valem väljendab kõik kaared, millel on kaarega AM_1 ühine algus A ja ühine lõpp M_1, teine väljendab kõik sama algusega kaared, mis lõpevad punktis M_2, mis tekib ringjoone lõikamisel punkti M_1 läbiva X-teljega paralleelse sirgega. Tähtis on aru saada, et need kaks valemit a m m e n d a v a d argumendi väärtuste kogu lõpmatu hulga, mis rahuldavad võrrandit $\sin x = a$. On kerge näha, et mõlemad valemid kehtivad ka siis, kui x_0 ei ole absoluutväärtuselt vähim kaar, vaid mis tahes kaar, millel on antud siinus. Väga kasulik on sellega ühenduses tagada nende sõnastuse omandamine umbes niisugusel kujul: s e l l e k s, e t k a h e l k a a r e l o l e k s ü k s n i n g s a m a s i i n u s, o n t a r v i l i k j a p i i s a v, e t n e n d e v a h e o l e k s p a a r i s a r v p o o l r i n g j o o n t v õ i n e n d e s u m m a o l e k s p a a r i t u a r v p o o l r i n g j o o n t.

Valemid (1) ja (2) võib ühendada üheks:

$$x = n\pi + (-1)^n \cdot x_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

kus n on mis tahes täisarv. Seda uut valemit on õpilastele raskem anda, kui kaht eelmist, seetõttu ei tule tema sissetoomisega tõtata. Tähtis on kindlustada valemite (1) ja (2) täielik omandamine, ning selgitada, et valem (3) on lihtsalt lühema üleskirjutuse vahendiks. Algajad õpetajad näevad mõnikord valemis (3) kogu asja sisu, ei pööra küllaldast tähelepanu valemitele (1) ja (2) ega rõhuta valemi (3) teisejärgulist abivalemi iseloomu, ilma milleta saab väga hästi läbi.

Vaadeldes analoogilisel viisil võrrandit $\cos x = a$, $|a| \leqslant 1$, saame kaks valemit:

$$x = x_0 + 2\pi n \ldots\ldots\ldots (4)$$

ja

$$x = -x_0 + 2\pi n, \ldots\ldots\ldots (5)$$

kus n on jälle mis tahes täisarv, ja x_0 on 0 ja π vahel ($0 \leqslant x_0 \leqslant 0{,}5\pi$, kui $a \geqslant 0$, $0{,}5\pi \leqslant x_0 < \pi$, kui $a \leqslant 0$). Tuleb selgitada, miks siin ei saa võtta x_0 vahemikus $(-0{,}5\pi, +0{,}5\pi)$, nagu võrrandi $\sin x = a$ korral. Tähele pannes, et valemid (4) ja (5) kehtivad igasuguse (ja mitte ainult vähima positiivse) x_0 väärtuse korral, mis rahuldab võrrandit $\cos x = a$, sõnastame nad umbes nii: selleks, et kahel kaarel oleks üks ning sama koosinus, on tarvilik ja piisa-v, et nende summa või nende vahe oleks paarisarv poolringjoont.

Valemid (4) ja (5) saab kergesti kokku võtta üheks valemiks:

$$x = 2\pi n \pm x_0 \ldots\ldots\ldots (6)$$

Võrrandil $\operatorname{tg} x = a$, $-\infty < a < +\infty$ on üldlahend, mis väljendub valemitega:

$$x = x_0 + 2\pi n \ldots\ldots\ldots (7)$$

ja

$$x = x_0 + \pi + 2\pi n; \ldots\ldots\ldots (8)$$

mida saab ka kergesti üheks kokku võtta:

$$x = x_0 + \pi n \ldots\ldots\ldots (9)$$

Nende valemite tuletamisel võib eeldada, et

$$-0{,}5\pi < x_0 < 0{,}5\pi,$$

kuid hiljem võib selle kitsenduse kõrvale jätta, ning saame teoreemi: selleks, et kahel kaarel oleks üks ning sama tangens, on tarvilik ja piisav, et nende vahe oleks täisarv poolringjoont.

N. Rõbkini õpikus on vaadeldud küsimusele liig vähe tähelepanu pühendatud (§ 26 ja § 47); seda enam on tarvis pärast eespool sõnastatud kolme teoreemi õppimist lahendada hästi põhjalikult (jooniste ja valemite abil) ülesanded Nr. Nr. 17—22 § 2 N. Rõbkini ülesannete kogus (kahjuks ei ole kõigile neile ülesandeile toodud vastuseid). Nende ülesannete arvu on kerge suurendada, koostades analoogilisi uusi ülesandeid. Rõhutame käesoleva paragrahvi materjali omandamise erilist tähtsust: see on võti paljude raskuste ületamiseks, mis on seotud trigonomeetriliste pöördfunktsioonide õppimisega. Eriti, on väga kasulik leida niisuguste võrrandite üldlahendid, nagu

$$\sin x = 0,\ \sin x = 1,\ \sin x = -1,\ \cos x = 0 \text{ jne.}$$

ilma üldiste valemiteta.

Võrrandid $\operatorname{ctg} x = a$, $\sec x = a$, $\operatorname{cosec} x = a$ võib vaatlemata jätta, sest nad on samaväärsed võrranditega $\operatorname{tg} x = 1 : a$ jne.

Kui antud trigonomeetriliste funktsioonide väärtustele vastavate argumendi väärtuste üldavaldised on kindlalt omandatud, siis võib siirduda programmi kahe küsimuse juurde, mis õpilastele on raskemad kui teised: trigonomeetriliste pöördfunktsioonide ja trigonomeetriliste võrrandite käsitlemisele. Nende vaatlemisega on loomulik lõpetada goniomeetria, millele järgnevad veel geomeetrilised ja muud rakendused. Kuid kehtiva programmiga on ette nähtud teine järjekord: esmalt kolmnurkade lahendamine, siis kaks nimetatud goniomeetria küsimust. Mingeid ebamugavusi sellest ei teki, kolmnurkade lahendamisele aga kindlustatakse suurem tähelepanu. Ei ole oluline ka küsimus sellest, kas õppida enne trigonomeetrilisi pöördfunktsioone ja siis trigonomeetrilisi võrrandeid, või ümberpöördult.

§ 29. Trigonomeetrilised pöördfunktsioonid. Nende mitmesus ja peaväärtused. Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide graafikud.

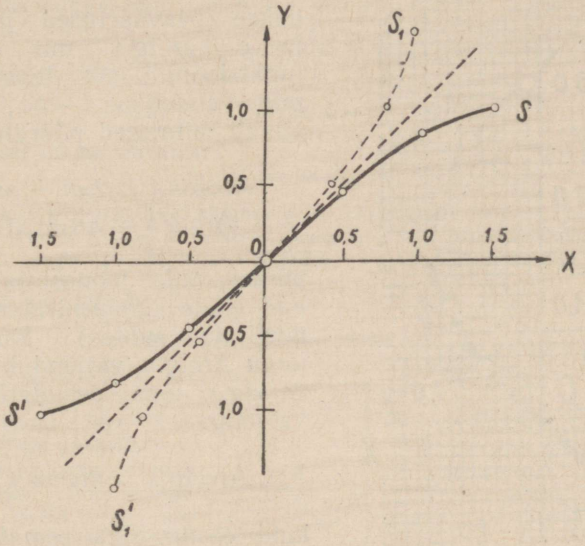
Mis tahes ühe muutujaga funktsiooni pööramise ideega ning funktsiooni ja pöördfunktsiooni graafikute koordinaatteljestiku nurga XOY poolitaja suhtes sümmeetriliselt asetsemise faktiga tutvuvad õpilased juba algebra kursuses (vt. eespool 3. osas), trigonomeetria kursuses on tarvis ainult neid üldisi seisukohti korrata ja rakendada neid funktsioonide $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ puhul. Võttes funktsiooni $y = \sin x$ ning piirdudes alguses x väärtustega ainult kinnisest vahemikust $[-0{,}5\pi, +0{,}5\pi]$, kasutame ära x väärtuste hulga M ja y väärtuste hulga N elementide vahelise üksühese vastavuse (M on kõigi reaalarvude hulk alates arvust $-0{,}5\pi$ kuni arvuni $+0{,}5\pi$, N on kõikide reaalarvude hulk arvust -1 kuni arvuni $+1$); seades nüüd hulga N elementidele vastavaiks hulga M elemendid, saame uue funktsiooni $x = \arcsin y$ (loetakse: x on arkus siinus y; eesti keeles: x on kaar, mille siinus on y). Selle pöördfunktsiooni graafikuks on sama kaar $S'OS$ (joon. 62), nagu «otsesel» funktsioonil $y = \sin x$, ainult selle erinevusega, et argument on nüüd tähistatud tähega y ja võetakse Y-teljel, funktsioon aga tähega x ja võetakse X-teljel. Tähistades, nagu tavaliselt, argumendi tähega x ja funktsiooni tähega y, saame uue üleskirjutuse:

$$y = \arcsin x,$$

ning teljed X ja Y vahetavad oma kohad, selle pöördfunktsiooni graafikuks on aga nüüd juba kaar $S_1'OS_1$, mis nurga XOY poolitaja suhtes on sümmeetriline kaarega $S'OS$.

On väga tähtis omandada kindlalt mõte üleskirjutuste $y = \sin x$ ja $x = \arcsin y$ kui ka üleskirjutuste $y = \arcsin x$ ja $x = \sin y$ täielikust samaväärsusest. Leida $\arcsin x$ antud x väärtuse järgi, pole midagi muud, kui lahendada võrrand $x = \sin y$ otsitava y suhtes antud x järgi, s. o. just sama ülesanne, millega tegelesime eelmises paragrahvis, piirdudes otsitava kaare y väärtustega vahemikus $[-0{,}5\pi, +0{,}5\pi]$.

Uus olukord tekib siis, kui antud väärtuse $y = \sin x$, järgi tahame leida argumendi x k õ i k väärtused, mitte enam piirdudes vahemikuga $[-0{,}5\pi, +0{,}5\pi]$. Nüüd x väärtuste hulk M on juba vahemik $(-\infty, +\infty)$ ja funktsioon $y = \sin x$ esitab seost selle hulga elementide ja hulga N (vahemik -1 kuni $+1$) elementide vahel üheselt, kuid mitte üksüheselt: kuigi kaare x igale väärtusele vastab üks ainus täiesti kindel y väärtus, aga y igale väärtusele vastab juba lõpmatu hulk x väärtusi, mis on määratud valemi-

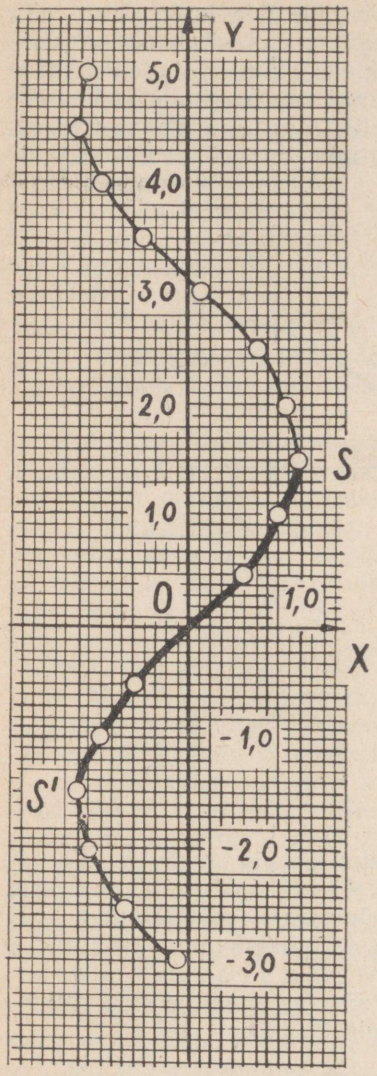


Joon. 62.

tega (1) ja (2) või valemiga (3) eelmises paragrahvis. Funktsiooni $y = \sin x$ pööramine viib käesoleval juhtumil mitmesele funktsioonile, mida tähistatakse sümboliga $x = \text{Arcsin}\, y$ või $y = \text{Arcsin}\, x$. Varem vaadeldud ühest funktsiooni $y = \arcsin x$ nimetatakse mitmese funktsiooni $y = \text{Arcsin}\, x$ p e a v ä ä r t u s e k s. Selle viimase funktsiooni ja tema peaväärtuse vaheline side väljendub vastavalt § 28 valemile (3) järgmisel viisil:

$$\text{Arcsin}\, x = \pi n + (-1)^n \arcsin x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

kus n on mis tahes täisarv. Selle mitmese funktsiooni graafik on kujutatud joonisel 63. See on just sama sinusoid, mis oli funktsiooni $y = \sin x$ graafikuks, mille teljeks ei ole aga X-telg, vaid Y-telg. Graafik näitab selgesti funktsiooni $y = \text{Arcsin}\, x$ mitmesust ja tema peaväärtuse $\arcsin x$ ühesust (selle viimase ühese funktsiooni graafikuks on jämedalt joonestatud kaar $S'OS$): iga sirge, mis on joonestatud paralleelselt Y-teljele ja sellest mitte kaugemal kui 1, lõi-



Joon. 63.

kab kaart $S'OS$ ainult ühes punktis, tervet sinusoidi aga lõpmata hulgas punktides.

Analoogilised arutlused teostatakse funktsioonide $y = \cos x$ ja $y = \operatorname{tg} x$ korral: esmalt teostatakse pööramine koosinuse puhul vahemikus $[0; \pi]$ ja tangensi puhul vahemikus $(-0{,}5\pi, +0{,}5\pi)$; saadakse peaväärtused $y = \arccos x$ ja $y = \operatorname{arctg} x$, mis on ühesed funktsioonid; siis tehakse pööramine vahemikus $(-\infty, +\infty)$, mis annab mitmesed pöördfunktsioonid

$$\operatorname{Arccos} x = 2\pi n \pm \arccos x,$$
$$\operatorname{Arctg} x = \pi n + \operatorname{arctg} x;$$

pärast seda joonestatakse graafikud (jälle sümmeetria nurga XOY poolitaja suhtes). Samal viisil nagu $\operatorname{Arctg} x$, väljendub funktsioon $\operatorname{Arcctg} x$ oma peaväärtuse kaudu valemiga

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n,$$

kuid eesmärgiga eemaldada pidevuse katkemine punktis $x = 0$ võetakse peaväärtus $\operatorname{arcctg} x$ vahemikus $(0; \pi)$.

See ongi kogu teoreetiline osa trigonomeetriliste pöördfunktsioonide küsimusest selles ulatuses, nagu teda keskkoolis vaadeldakse. Kõik muu taandub ülesannetele, mis lahendatakse eriliste raskusteta, kui see teoreetiline osa on kindlasti ja teadlikult omandatud. Vaatleme mõnd tüüpilisemat ülesannet.

§ 30. Mõned ülesanded trigonomeetrilistele pöördfunktsioonidele.

I. Teades $\arcsin x = u$, leida $\arcsin(-x) = v$. Siin u ja v kuuluvad vahemikku $[-0{,}5\pi, +0{,}5\pi]$, sest jutt on ainult peaväärtustest (mitte $\operatorname{Arcsin} x$, vaid $\arcsin x$). Küsimuse lahendamiseks piisab ainsast pilgust graafikule (joon. 63), kui arvestada selle sümmeetriat teljestiku alguse suhtes. Kuid on

kasulik vaadelda ka selle küsimuse puhtanalüütilist lahendust, mis kujuneb järgmiseks: vabanedes sümbolist arc, saame võrdused

$$\sin u = x, \quad \sin v = -x,$$

mis lisatingimuste

$$-0{,}5\pi \leqslant u \leqslant v \leqslant +0{,}5\pi \text{ ja } -0{,}5\pi \leqslant +0{,}5\pi$$

korral on samaväärsed antud võrdustega. Meenutades teoreemi kahest kaarest, millel on üks ning sama siinus, järeldame, et kas $v-(-u)=v+u=2\pi n$, või $v+(-u)=v-u=(2n+1)\pi$, kus n on mis tahes täisarv. Kuid u ja v puhul kehtivate kahekordsete võrratuste liikmeti liitmine annab kahekordse võrratuse

$$-\pi \geqslant u+v \leqslant +\pi,$$

ja samaväärsete võrratuste

$$-0{,}5\pi \leqslant v, \quad -0{,}5\pi \leqslant -n \leqslant +0{,}5\pi$$

liikmeti liitmisel saame võrratuse

$$-\pi \leqslant v-u \leqslant +\pi.$$

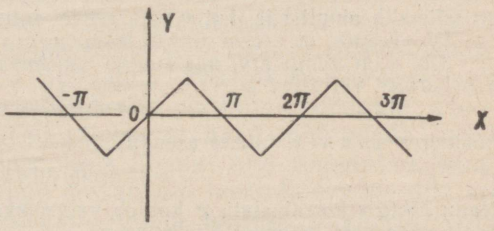
Seetõttu valemis $v+u=2\pi n$ sümbol n ei saa omada muud väärtust kui 0, järelikult $v+u=0$, $v=-u$. Ning valemis $v-u=(2n+1)\pi$ on võimalikud ainult $n=0$, seega $v-u=\pi$, $v=0{,}5\pi$, $u=-0{,}5\pi$, ja $n=-1$, seega $v-u=-\pi$, $v=0{,}5\pi$, s. o. jällegi $v=-u$.

Niisiis saame lõplikult

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,$$

s. o. funktsioon $\arcsin x$ on paaritu. Kordame veel, et selle järelduse võisime teha korraga, heites pilgu graafikule.

Kui peaväärtuste asemel võtta mitmesed funktsioonid $\operatorname{Arcsin} x$ ja $\operatorname{Arcsin}(-x)$, siis küsimus läheb hoopis keerulisemaks. Vaevalt tasub keskkoolis sellele aega kulutada.



Joon. 64.

II. Teades $\arcsin x=u$, leida $\arccos x=v$.

Lahenduse võib kirjutada järgmiselt:

$$v=\arccos(\sin u),$$

kuid talle võib anda lihtsama kuju. Tõepoolest, vabanedes arkustest, saame $\sin u=x$, $\cos v=x$, millest $\cos v=\sin u$, $\cos v=\cos(0{,}5\pi-u)$. Rakendades teoreemi võrdsete koosinustega kaartest, kirjutame: $v+0{,}5\pi-u=2\pi n$, $v-0{,}5\pi+u=2\pi n$
ehk

$$v-u=(2n-0{,}5)\pi, \quad v+u=(2n+0{,}5)\pi.$$

Selgitades, milliseid väärtusi võib n omada tingimustel

$$-0{,}5\pi \leqslant u \leqslant 0{,}5\pi, \quad 0 \leqslant v \leqslant \pi,$$

leiame, et võimalikud on ainult järgmised juhtumid:

$v=0$, $u=0{,}5\pi$ . . . . . (1)
$v=0{,}5\pi$, $u=0$ . . . . . (2)
$v=\pi$, $u=-0{,}5\pi$ . . . . . (3)
$v=0{,}5\pi-u$ . . . . . (4)

Seos (4), mis kehtib igasuguse u korral $-0{,}5\pi$ ja $+0{,}5\pi$ vahel, sisaldab endas seosed (1), (2) ja (3), on seega ülesande täielik lahend.

Seda võib kirjutada:

$$\arccos x = 0{,}5\pi - \arcsin x$$

ehk

$$\arcsin x + \arccos x = 0{,}5\pi.$$

Kasulik on vaadelda selle ülesande teist lahendust, mis rajaneb samasusel

$$\sin(0{,}5\pi - v) = \sin u$$

ja mis viib samale tulemusele.

III. Tõestada samasus $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = 0{,}5\pi$.

Siin x on mis tahes reaalarv, $\operatorname{arctg} x = u$ on vahemikus $(-0{,}5\pi, +0{,}5\pi)$, $\operatorname{arcctg} x = v$ vahemikus $(0,\pi)$. Tarvis tõestada, et $u + v = 0{,}5\pi$, s. o. et u ja v on teineteise täienduskaared. Vabanedes arkustest, saame $\operatorname{tg} u = x$, $\operatorname{ctg} v = \operatorname{tg}(0{,}5\pi - v) = x$, $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(0{,}5\pi - v)$. Rakendades teoreemi võrdsete tangensitega kaartest saame:

$$u - 0{,}5\pi + v = n\pi, \text{ ehk } u + v = (n + 0{,}5)\pi.$$

Kuid peaväärtused u ja v rahuldavad kahekordseid võrratusi

$$-0{,}5\pi < u < 0{,}5\pi,$$
$$0 < v < \pi,$$
$$\text{seega } -0{,}5\pi < u + v < 1{,}5\pi$$

(siin ranged võrratused, s. o. võrdsusmärgid, on eemaldatud $\operatorname{tg} u$ pidevuse katkemise tõttu $u = \pm 0{,}5\pi$ korral ja $\operatorname{ctg} v$ katkevuse tõttu $v = 0$ ja $v = \pi$ korral). Võrdus

$$u + v = (n + 0{,}5)\pi$$

on võimalik ainult siis, kui $n = 0$, seega antud samasus ongi tõestatud.

IV. Teades, et $\arcsin x = u$, leida $\operatorname{arctg} x = v$.

Siin u on mingi arv, mis kuulub vahemikku $[-0{,}5\pi, +0{,}5\pi]$, s. o. rahuldab kahekordset võrratust

$$-0{,}5\pi \leqslant u \leqslant +0{,}5\pi,$$

kusjuures $\sin u = x$. Lihtne asendus annab

$$v = \operatorname{arctg}(\sin u).$$

Nagu $\operatorname{arctg} x$ korral alati, v kuulub vahemikku $(-0{,}5\pi, +0{,}5\pi)$, kuid siin on peale selle veel tegemist kitsendusega:

$$-1 \leqslant \sin u \leqslant +1, \quad -1 \leqslant x \leqslant -1,$$

seepärast

$$-0{,}25\pi \leqslant v \leqslant +0{,}25\pi,$$

mistõttu otsitav väärtus $v = \operatorname{arctg}(\sin u)$ kuulub vahemikku $[-0{,}25\pi, +0{,}25\pi]$.

Kasulik on vaadelda selle üldise valemi rakendamist erijuhtumeil: näiteks, $u = 30°$ korral saame $x = \sin u = 0{,}5$, $v = \operatorname{arctg} 0{,}5 = 26°34'$; kui $u = 0{,}5$, siis $x = \sin 0{,}5 = \sin 28°39' = 0{,}4795 = \operatorname{tg} v$, $v = 25°37'$.

V. Ehitada funktsiooni $y = \arcsin(\sin x)$ graafik.

Kirjutades antud võrrandi kujul

$$\sin y = \sin x$$

ning arvestades tingimust

$$0{,}5\pi \leqslant y \leqslant +0{,}5\pi,$$

veendume, et funktsioon y on määratud vahemikus $(-\infty, +\infty)$, on ühene, omab perioodi 2π, on paaritu. Piisab, kui vaadelda ta muutumiskäiku vahemikus $[0,2\pi]$. Kui x kasvab 0 kuni $0{,}5\pi$, siis seos $y + x = (2n + 1)\pi$ on võimatu, seos $y - x = 2n\pi$ on rahuldatud ainult siis, kui $n = 0$, ning seetõttu $y = x$, funktsiooni y graafikuks $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5\pi$ korral on koordinaadistiku nurga XOY poolitaja lõik. Edasi, x muutumisel $0{,}5\pi$ kuni $1{,}5\pi$ seos $y - x = 2n\pi$ on võimatu, seos $y + x = (2n + 1)\pi$ kehtib ainult siis, kui $n = 0$, seega siin $y = \pi - x$, funktsiooni y graafikuks $0{,}5\pi \leqslant x \leqslant 1{,}5\pi$ korral on sirge lõik, mis on tõmmatud punktist $(0{,}5\pi, 0{,}5\pi)$ paralleelselt koordinaatteljestiku teise nurga

$X'OY$ poolitajaga. Lõpuks $1{,}5\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ korral on jälle võimalik ainult seos $y - x = 2n\pi$, kuid ainult siis, kui $n = -1$, graafikuks on sirge $y = x - 2\pi$ lõik, mis on tõmmatud punktist $(-1{,}5\pi, -0{,}5\pi)$ paralleelselt nurga XOY poolitajaga. Võttes arvesse funktsiooni y perioodilisust, saame graafiku, mis on kujutatud joonisel 64.

Üleminek ülesannetelt peaväärtuste $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ kohta ülesannetele mitmeste funktsioonide $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$ kohta toob kaasa palju komplikatsioone, seetõttu keskkoolis on parem piirduda peaväärtustega.

Kui soodsate tingimuste olemasolu korral õpetaja otsustab anda ülesandeid mitmeste funktsioonide kohta, siis ta peab arvestama artiklis [III, 30b] esitatud seisukohti võrduste mõtte kohta mitmeste funktsioonide puhul.

§ 31. Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide õppimisega seotud raskused koolis.

Algajad õpetajad pööravad sageli liig vähe tähelepanu trigonomeetriliste pöördfunktsioonide küsimuse põhiliste punktide omandamisele õpilaste poolt, enne kõike materjalile, mis on esitatud eespool paragrahvides 28—29, tõtates üleminekuga ülesannetele; sellest ei tule muidugi midagi head. Teine, õpetajate poolt mõnikord tehtav viga seisab katsetes arendada nende funktsioonide üksikasjalikku teooria õppimist. On vaieldamatu, et selles leidub palju huvitavat ja kasulikku, nagu näitab, näiteks, sisukas raamat [V, 17a]; õpetajal on väga soovitav seda raamatut üksikasjalikult tundma õppida, kuid vaevalt on võimalik teha kohustuslikuks selle teooria täisväärtuslik omandamine kõigile X klassi õpilastele. Praegu kehtiv keskkooli programm näeb ette trigonomeetriliste pöördfunktsioonide õppimiseks 14 tundi, millest täiesti piisab, et hästi omandada need vähesed teoreetilised teadmised, mis ülemal olid nimetatud, ning saavutada vilumused niisuguste ülesannete lahendamiseks, mis on toodud keskkooli õpikus. Kaugemale minna, näiteks, tundma õppida nimetatud S. Novosjolovi raamatut, on mõeldav ainult eriti soodsate tingimuste korral; kõige parem on seda teha individuaalsete tööde korras tugevamate õpilastega.

Õpetajad kurdavad sageli, et õpilastele on see osa eriti raske. Selleks on tõesti põhjusi; kõigepealt, trigonomeetriliste pöördfunktsioonide mitmesusest tekkivad raskused vähenevad tunduvalt, kui piirduda ainult üheste peaväärtustega. Selle osa edukas õppimine on ikkagi täiesti teostatav kolme tingimuse täitmise korral: 1) kui õpilased on kindlasti omandanud trigonomeetria kursuse eelnevad osad (näiteks, mitte teades, nagu kord ja kohus, põhiliste trigonomeetriliste funktsioonide siinuse jt. definitsioone, ei ole õpilane suuteline valdama pöördfunktsioone $\arcsin x$ jt.); 2) kui nad on hästi aru saanud funktsiooni pööramise ideest (kui nad, näiteks, selgesti saavad aru, et lineaarse funktsiooni

$$y = ax + b$$

pööre on jälle lineaarne funktsioon

$$y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a},$$

et funktsiooni $y = ax^2$ pööre on $y = \pm \sqrt{x : a}$, et eksponentfunktsiooni pööre on logaritmfunktsioon; funktsiooni pööramise tähtsa idee peab omandama esmalt lihtsamate näidete varal);

3) kui õpetaja ise hästi orienteerub neis küsimusis.

Hea, keskkoolile täiesti sobiv trigonomeetriliste pöördfunktsioonide küsimuse käsitlus on esitatud õpikus [V, 2]. Autorid ei eelda õpilastel mingeid eelteadmisi funktsiooni pööramisest, ning tutvustavad sellega, vaadeldes näidet varem õpitud ainest. Nii on $\operatorname{arctg} x$ mõiste tabavalt illustreeritud 4 $\operatorname{arctg} 0{,}2 - \operatorname{arctg} (1 : 239) = 0{,}25\pi$ väärtuse arvutamisega.

§ 32. Trigonomeetrilised võrrandid. Nende klassifikatsioon ja lahendamise meetodid.

Võrrandit nimetatakse t r i g o n o m e e t r i l i s e k s, kui selles esineb otsitava mingi trigonomeetriline funktsioon. Niisugused on näiteks võrrandid

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a,$$

mille formaalseiks lahendeiks on trigonomeetrilised pöördfunktsioonid

$$x = \operatorname{Arcsin} a \text{ jt.}$$

argumendist a, mille väärtus eeldatakse antuna. Seda lahendit nimetatakse «formaalseks» selles mõttes, et olles vormiliselt lahendiks, nimelt väljendades otsitava x antud a kaudu, ei anna ta sisuliselt midagi, enne kui ei ole õpitud trigonomeetrilisi pöördfunktsioone; see viimane nimelt ongi antud võrrandi sisuliseks lahenduseks.

Ülemal nimetatud kolme võrrandiga ja võrranditega

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad \sec x = a, \quad \operatorname{cosec} x = a$$

on ammendatud niinimetatud «trigonomeetrilised põhivõrrandid». Peale nende on olemas lõpmatu hulk teisi trigonomeetrilisi võrrandeid, mis jagunevad kaheks klassiks. Esimesse klassi kuuluvad need, milles otsitav esineb ainult trigonomeetriliste funktsioonide (kas ühe või mitme) argumendis, nagu näiteks võrrand

$$\cos 2x = 1 + \sin x;$$

teise aga need, milles otsitavad, esinedes trigonomeetriliste funktsioonide argumendis, esinevad peale selle aga ka väljaspool seda, nagu näiteks võrrand

$$x + a \sin x = b.$$

Esimese klassi võrrandeist omavad suurimat tähtsust säärased, milles tundmatu argumendi trigonomeetriliste funktsioonidega teostatakse ainult algebralisi operatsioone, need on nimelt: liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine, antud naturaalarvulise asten-

dajaga astendamine, antud naturaalarvulise juurijaga juure leidmine. Kõik niisugused võrrandid taanduvad vastavate teisendustega algebralisiks võrrandeiks ja trigonomeetrilisiks põhivõrrandeiks: näiteks, võrrand

$$\cos 2x = 1 + \sin x$$

taandub pärast asenduse $y = \sin x$ rakendamist algebraliseks võrrandiks

$$2y^2 + y = 0$$

lahenditega $y_1 = 0$, $y_2 = -0{,}5$ ja kaheks trigonomeetriliseks põhivõrrandiks:

$$\sin x = 0, \quad \sin x = -0{,}5,$$

mille ammendavad lahendid väljenduvad valemitega

$$x = n\pi, \quad x = n\pi + (-1)^n \cdot (-\tfrac{1}{6}\pi),$$

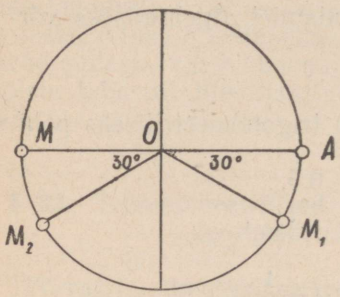
kus n on mis tahes täisarv. Teise klassi võrrandeid nimetatakse «transtsendentseiks»; saab näidata, et samuti nagu 3. osas vaadeldud eksponent- ja logaritmvõrrandid, ei taandu ka need algebralisteks.

Küsimus trigonomeetriliste põhivõrrandite lahendamisest on juba käesoleva peatüki §§ 28—31 trigonomeetriliste pöördfunktsioonide uurimisel ammendatud. Transtsendentseid võrrandeid vaatleme hiljem (§ 34). Keskkoolis mõistetakse trigonomeetriliste võrrandite all tavaliselt ainult sääraseid trigonomeetrilisi võrrandeid, mis taanduvad algebralisteks ja trigonomeetrilisteks põhivõrrandeiks, ainult säärastega siin tegeldaksegi. Selliste võrrandite lahendamise üldine võte seisab selles, et võrrandis esinevad kõik tundmatu argumendiga trigonomeetrilised funktsioonid avaldatakse mingi ühe trigonomeetrilise funktsiooni kaudu, siis see funktsioon asendatakse mingi uue tähega, ning lahendatakse saadud algebraline võrrand selle tähe suhtes, seejärel jääb veel lahendada üks või mitu trigonomeetrilist põhivõrrandit. Seda algebralisiks võrrandeiks ja trigonomeetrilisiks põhivõrrandeiks taandamist võib teha mitmel viisil, ning mugavaima võtte leidmine on heaks treeninguks trigonomeetriliste avaldiste teisendamise alal. Peale selle, trigonomeetriliste võrrandite ammendav lahendamine nõuab hoolsat tähelepanu võrrandite ekvivalentsuse suhtes; alati ei saa vältida teisendusi, mis rikuvad ekvivalentsust, peab kogu aeg arvestama võõrlahendite ilmumise võimalust ning mitte lubada lahendite kadumist. Ses suhtes on trigonomeetriliste võrrandite lahendamisel suur väärtus, olles tähtsaks vahendiks võrrandite ekvivalentsuse küsimuse süvendatud kordamisel algebra kursusest.

Rõhutame selle asjaolu tähtsust, et lõpptulemusena kõik koolis lahendatavad trigonomeetrilised võrrandid taanduvad algebralisiks võrrandeiks ja trigonomeetrilisiks põhivõrrandeiks. Enne kui siirduda peatükile «Trigonomeetrilised võrrandid», peab kindlustama

trigonomeetriliste põhivõrrandite täisväärtusliku lahendamise oskuse, mis toimub loomulikus seoses trigonomeetriliste pöördfunktsioonide küsimusega.

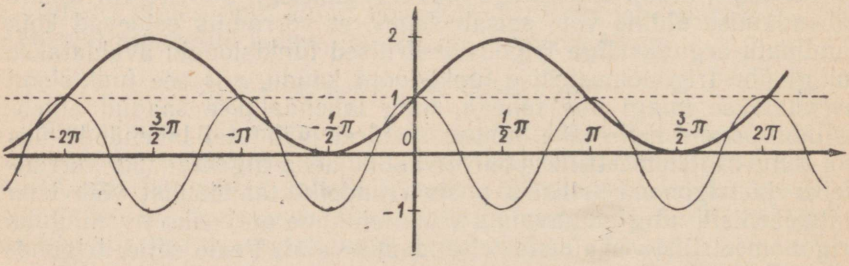
Trigonomeetriliste võrrandite lahendamine koolis toimub tavaliselt eranditult a n a l ü ü t i l i s e meetodiga. Kuid väga tähtis nii vigade vältimise vahendina parema näitlikkuse tõttu, kui ka selliste lahendite leidmise vahendina, mida analüütilise meetodiga leida ei saa (selles ulatuses, nagu õpilased seda valdavad), on graafilise meetodi rakendamine õpilaste poolt omandatud trigonomeetriliste funktsioonide geomeetrilise kujutamise mõlema viisi kasutamisega, s. o. trigonomeetrilise ringi ja ristkoordinaatides esitatud funktsioonide graafikute kasutamisega. Igal juhtumil on kasulik võtta reegliks lõpetada iga trigonomeetrilise võrrandi lahendamine trigonomeetrilisel ringjoonel nende punktide märkimisega, kus lõpevad otsitavad kaared, kusjuures iga punkt osutab lõpmatu hulga kaari, mis selles punktis lõpevad. Nii näiteks kogu lõpmatu hulga kaari, mis rahuldavad võrrandit



Joon. 65.

$$\cos 2x = 1 + \sin x,$$

saab ära märkida trigonomeetrilise ringjoone nelja punktiga, mis joonisel 65 on kujutatud väikeste ringikestega. Siin on meil tege-



Joon. 66.

mist valmis, mingisugusel viisil saadud trigonomeetrilise võrrandi lahendite mugava näitliku kujutamisega. Väga kasuliku ja huvitava võtte lahendite leidmiseks pakuvad funktsioonide graafikud. Näiteks, joonestades ühel ning samal joonisel funktsioonide

$$y = \cos 2x \text{ ja } y = 1 + \sin x$$

(vt. joonis 66) graafikud, saame võrrandi

$$\cos 2x = 1 + \sin x$$

graafilise lahenduse; selle võrrandi lahenditeks on need ja ainult need arvud, mis väljendavad mõlema kõverjoone ühiste punktide abstsisse.

Kehtiv keskkooli matemaatika programm määrab trigonomeetrilistele võrranditele üsna palju aega — 16 tundi. Seda aega ratsionaalselt kasutades võib palju saavutada nii nende võrrandite lahendamise võtete omandamise mõttes kui ka trigonomeetria aluste kordamise ja teadmiste kindlustamise alal üldse.

N. Rõbkini õpik annab küllaldase hulga näpunäiteid sääraste trigonomeetriliste võrrandite lahendamise suhtes, mis taanduvad algebralisiks võrrandeiks ja trigonomeetrilisiks põhivõrrandeiks (§§ 70—72), kuid ei rõhuta nende sidet trigonomeetriliste põhivõrranditega, ei kasuta ei lahendite geomeetrilist kujutamist ega nende leidmise graafilist meetodit, täiesti ignoreerib transtsendentseid võrrandeid. Õpikus teostatud trigonomeetriliste võrrandite vastandamise suhtes trigonomeetrilistele samasustele, mis defineeritakse argumendi kõigi väärtuste kehtivate võrdustena, peab märkima, et on olemas ka teine vaatepunkt, mis käsitleb tähelisi samasusi võrrandite eriliigina; näiteks võrdus

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

on võrrand, mille lahendiks on argumendi x iga väärtus; võrdus

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$$

on võrrand, mille lahendiks on iga arv, välja arvatud arvud kujuga $0{,}5\pi(2n + 1)$, kus n on täisarv. Õpikus antud definitsiooni täpse mõtte järgi viimast võrdust ei saa samasuseks nimetada, sest ta ei ole õige kõigi argumendi väärtuste puhul.

N. Rõbkini ülesannete kogus on üsna suur hulk trigonomeetrilisi võrrandeid (Nr. Nr. 1—95, § 14), kuid kahjuks ta ei anna ühtki ülesannet nende koostamiseks, ei anna ka ühtki transtsendentset trigonomeetrilist võrrandit. Tekstis antud näpunäiteisse ja raamatu lõppu paigutatud vastustesse peab suhtuma ettevaatusega: need ei ole alati laitmatud. Võtame näiteks ülesande Nr. 64, § 14. Siin nõutakse lahendada võrrand

$$\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0,$$

s. o. leida funktsiooni

$$f(x) = \cos 2x : (1 + \operatorname{tg} x)$$

argumendi need väärtused, mille puhul ta väärtus on null. Tähele pannes, et

$$f(x + \pi) = f(x),$$

järeldame kõigepealt, et piisab x väärtuste vaatlemisest ainult 0 kuni π: antud funktsioon on perioodiline, periood on π. Edasi veendume, et see funktsioon on määratud kõigi x väärtuste puhul 0 kuni π, välja arvatud $x = 0{,}5\pi$, kus $\operatorname{tg} x$ väärtust pole olemas, ja

ka $x = 0{,}75\pi$, kus jagaja $1 + \operatorname{tg} x$ saab nulliks. Kuid

$$\lim_{x \to 0{,}5\pi} f(x) = 0,$$

sest $x \to 0{,}5\pi$ korral lugeja läheneb -1, aga nimetaja absoluutväärtus kasvab tõkestamatult.

$$\lim_{x \to 0{,}75\pi} f(x) = \lim_{x \to 0{,}75\pi} (\cos x - \sin x) \cdot \cos x = 1.$$

Nii, siin on võimalik antud funktsiooni täiendav defineerimine, millest ülemal oli juttu. Võttes niisuguse täiendusdefinitsiooni korras, et $f(0{,}5\pi) = 0$ ja $f(0{,}75\pi) = 1$, saame funktsiooni, mis on määratud terves vahemikus 0 kuni π; muuseas leidsime ühe otsitava lahendi, nimelt $x = 0{,}5\pi$. Lihtsustades $f(x)$ avaldist leiame, et see funktsioon on samane funktsiooniga $(\cos x - \sin x) \cdot \cos x$, kusjuures täiendusdefinitsiooni tõttu argumendi väärtused $0{,}5\pi$ ja $0{,}75\pi$ ei moodusta erandit. Niiviisi taandub küsimus võrrandite

$$\cos x - \sin x = 0 \text{ ja } \cos x = 0$$

lahendamisele, mis annavad uue lahendi $x_1 = 0{,}25\pi$ ja veel kord juba leitud lahendi $x_2 = 0{,}5\pi$. Seega, vahemikus 0 kuni π antud võrrandil on kaks lahendit:

$$x_1 = 0{,}25\pi \text{ ja } x_2 = 0{,}5\pi,$$

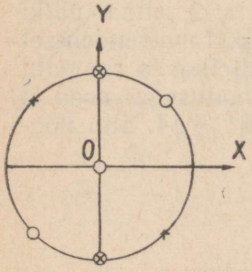
vahemikus 0 kuni 2π neli lahendit:

$$0{,}25\pi,\ 0{,}5\pi,\ 1{,}25\pi,\ 1{,}5\pi,$$

üldiselt reaalarvude hulgas lõpmata palju lahendeid, mis väljenduvad valemitega

$$x_1 = 0{,}25\pi + \pi n,$$
$$x_2 = 0{,}5\pi + \pi n,$$

kus n on mis tahes täisarv $(0, +1, +2, +3, \ldots)$.



Joon. 67.

Joonisel 67 on lahendeile vastavad punktid märgitud ringikestega, punktid aga, mis nõuavad erilist tähelepanu, ristikestega. Õpik annab vastusena ainult $x = x_1$.

Et kõrvaldada igasugune kahtlus meie lahenduse õigsuses ja õpikus antud vastuse puudulikkuses, joonestame funktsiooni

$$y = \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

graafiku, arvutades y väärtused, mis vastavad reale võrdkaugusel asetsevaile x väärtustele 0° kuni 360° kasvõi iga 15° tagant. Rakendades ratsionaalset tööjaotust õpilaste vahel ja piirdudes lõpptulemustes kolme numbriga koma järel, saame kergesti 25 väärtust

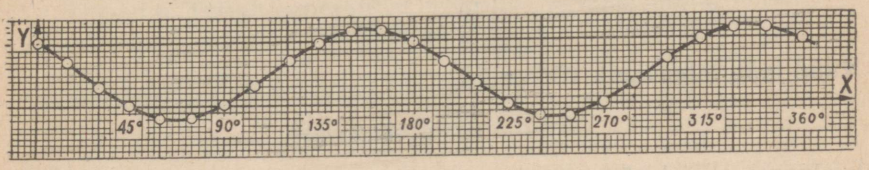
y jaoks, mis neile x väärtustele vastavad (kui kasutada logaritmilist arvutuslükatit, siis kogu allpool toodud arvutuse igaüks sooritab 15—20 minutiga), ning ehitame graafiku, mis on näidatud joonisel 68.

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$a = \cos 2x$	1,000	0,866	0,500	0,000	—0,500	—0,866	—1,000
$b = 1 + \operatorname{tg} x$	1,000	1,268	1,577	2,000	2,732	4,732	$+\infty$
$y = a : b$	1,000	0,682	0,317	0,000	—0,183	—0,183	0,000

Edasi toome ainult tulemused:

kui $x = 105°$ 120° 135° 150° 165°
siis $y = 0{,}317$ 0,683 1,000 1,182 1,183

Juhtumil, kui $x = 180°$, 195°, ... saame samad väärtused, nagu $x = 0°$, 15°, ... korral. Kui $x = 135°$ ja 315°, siis y eriväärtust pole olemas, kuid on olemas piirväärtus, mis on 1.



Joon. 68.

Nüüd ei jää enam mingit kahtlust: kõver, mis kujutab vasaku poole muutumist x muutumisel 0° kuni 360°, lõikab X-telge neljas punktis, nimelt: punktides abstsissidega 45°, 90°, 225°, 270°, mis täielikult kinnitab ülalöeldut.

Nagu näeme, funktsiooni

$$y = \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

graafik on väga sarnane sinusoidiga. Väga õpetlik on selgusele jõuda, kas ta on tõeliselt sinusoid, kui jaa, siis millest ta tekkis. Kõik selgub kohe, kui antud funktsioon teisendada kujuks

$$y = 0{,}5 - 0{,}5\sqrt{2}\sin(2x - 0{,}25\pi).$$

§ 33. Algebralisiks võrrandeiks ja trigonomeetrilisiks põhivõrrandeiks taanduvate trigonomeetriliste võrrandite lahendamise näited.

Kui meil on tundmatu argumendiga trigonomeetriliste funktsioonide suhtes algebraline võrrand, siis peame kõik need funktsioonid avaldama ühe funktsiooni kaudu, näiteks, $\sin x$ kaudu, ning

võttes $\sin x = y$, viima küsimuse algebralise võrrandi lahendamisele y suhtes. Leides ta lahendid $y_1, y_2, \ldots$, lahendame trigonomeetrilised põhivõrrandid

$$\sin x = y_1, \sin x = y_2, \ldots$$

ning leiamegi otsitava x väärtused. Funktsiooni y võib valida mitmeti, kusjuures sobivast valikust oleneb lahenduse lihtsus. Väga sageli esineb võrrandis mitte lihtsalt $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ..., vaid trigonomeetrilised funktsioonid x funktsioonidest, nagu näiteks

$$\sin 2x, \cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) \text{ jne.;}$$

siis tuleb rakendada veel täiendavaid teisendamisi, avaldades kõik valitud funktsiooni kaudu.

Arutame kõigis üksikasjades läbi võrrandi

$$2 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2{,}5$$

lahenduse mitmesuguste võtetega.

1. v õ t e. Võttes $\sin x = y$, leiame $\cos x = \pm \sqrt{1 - y^2}$, teeme asendused ja vabastame võrrandi radikaalist; saame algebralise võrrandi

$$28y^2 - 40y + 13 = 0$$

lahenditega

$$y_1 = \frac{13}{14} \text{ ja } y_2 = \frac{1}{2}.$$

Nüüd jääb lahendada võrrandid

$$\sin x = \frac{13}{14} \text{ ja } \sin x = \frac{1}{2},$$

kusjuures antud võrrandist saame esimesel juhtumil

$$\cos x = (2{,}5 - \tfrac{13}{7}) : \sqrt{3} > 0,$$

teisel juhtumil

$$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3} > 0.$$

Sellepärast ei kõlba nende võrrandite kõik lahendid, vaid ainult

$$x = \arcsin \frac{13}{14} + 2\pi n \text{ ja } x = \frac{1}{6}\pi + 2\pi n.$$

Niisiis, antud võrrandi lahendid on ammendatud valemitega

$$x = \arcsin \frac{13}{14} + 2\pi n, \; x = \frac{1}{6}\pi + 2\pi n,$$

ehk kraadides:

$$x = 68°13' + 360° n \text{ ja } x = 30° + 360° n,$$

neid lahendeid kujutavad kaks punkti trigonomeetrilisel ringjoonel (joon. 69).

Asendus $\cos x = y$ ei anna mingit paremust: saame samad lõpptulemused (selles on kasulik veenduda!).

2. võte. Meenutades, et $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ väljenduvad ratsionaalselt $\operatorname{tg} 0{,}5\alpha$ kaudu (vt. eespool lk. 418), võtame $\operatorname{tg} 0{,}5x = y$ ning saame algebralise võrrandi:

$$(5+2\sqrt{3})y^2 - 8y + (5-2\sqrt{3}) = 0$$

ja kaks trigonomeetrilist põhivõrrandit:

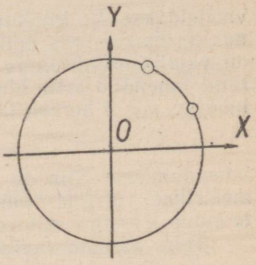
$$\operatorname{tg} 0{,}5x = (14-3\sqrt{3}):13, \quad \operatorname{tg} 0{,}5x = 2-\sqrt{3},$$

mis annavad

$$x_1 = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{13}(14-3\sqrt{3}) + 2\pi n,$$
$$x_2 = 2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}) + 2\pi n,$$

ehk kraadides:

$$x_1 = 68°12' + 360°\,n,$$
$$x_2 = 30° + 360°\,n.$$



Joon. 69.

Mitte rahuldudes sellega, et 1. ja 2. võttega leitud x väärtused ainult peaaegu ühtuvad, on õpetlik veenduda, et kehtib võrdus:

$$\arcsin\frac{13}{14} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{13}(14-3\sqrt{3}).$$

3. võte. Teisendame antud võrrandi vasakut poolt, võttes

$$0{,}5\sqrt{3} = \operatorname{tg}\varphi$$

(abinurga võte). Siis võrrand saab kuju

$$\sin(x+\varphi) = 1{,}25\cos\varphi,$$

ehk

$$\sin(x+\varphi) = \frac{5}{14}\sqrt{7} = \sin\psi,$$

kus $\psi = \arcsin\frac{5}{14}\sqrt{7} \approx \arcsin 0{,}9450 \approx 70°55'$, $\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}5\sqrt{3} \approx$ $\approx \operatorname{arctg} 0{,}8660 \approx 40°54'$; lahendid väljenduvad valemitega:

$$x+\varphi = \psi + 2\pi n,$$
$$x+\varphi = \pi - \psi + 2\pi n,$$

ehk kraadides:

$$x \approx 30°01' + 360°\,n,$$
$$x \approx 68°13' + 360°\,n.$$

Jälle hea ülesanne trigonomeetriliste teisenduste kohta: näidata, et

$$\arcsin\frac{5}{14}\sqrt{7} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\pi,$$

ja et

$$\pi - \arcsin\frac{5}{14}\sqrt{7} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\sqrt{3} = \arcsin\frac{13}{14}.$$

4. võte. Ehitades ringjoone $X^2+Y^2=1$ ja sirge $aX+bY=c$, kus X ja Y on punkti jooksvad ristkoordinaadid, tõmbame nende

lõikepunktidest raadiused: nurgad nende raadiuste ja X-telje vahel on võrrandi $a\cos x + b\sin x = c$ lahendeiks, sest $X = \cos x$, $Y = \sin x$. See suurepärane graafiline lahendamisvõte nõuab kahjuks mõningaid teadmisi analüütilisest geomeetriast, kuid õpetajale endale võimaldab ta kiiresti leida kaunis täpsed antud võrrandi lahendite väärtused, ja ka selgitada lahendite arvu (vahemikus 0° kuni 360°).

Võrrandit

$$a\cos x + b\sin x = c$$

vaadeldakse N. Rõbkini õpikus niivõrd skemaatiliselt, et kui piirduda sellega, mis on õpikus, siis õpilased saavad ainult formaalse tutvuse ta lahendamisega: on vajalik erijuhtumite üksikasjalik vaatlus. Märgime, et $c = 0$ korral see võrrand lahendub eriti lihtsalt: mõlema liikme jagamine avaldisega $\cos x$, mis on lubatav $b \neq 0$ korral, kui $\cos x \neq 0$, viib küsimuse võrrandi

$$\operatorname{tg} x = -a : b$$

lahendamisele. Siin on meil tegemist $\sin x$ ja $\cos x$ suhtes homogeense trigonomeetrilise võrrandi lahendamise näitega; iga säärase võrrandi lahendamine taandub $y = \operatorname{tg} x$ suhtes algebralise võrrandi lahendamisele.

Teise näitena vaatleme võrrandit

$$\sin 7x = \sin 5x.$$

Siin on hea rakendada uut võtet — võrrandi vasaku poole tegureiks lahutamist.

Tõesti,

$$\sin 7x - \sin 5x = 2\cos 6x \sin x,$$

ning antud võrrand asendub kahe lihtsama võrrandiga:

$$\sin x = 0, \quad \cos 6x = 0.$$

Ammendava lahenduse annavad valemid

$$x_1 = \pi n, \quad x_2 = \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{6}\pi n.$$

Antud võrrand lahendub veel lihtsamalt, kui rakendada teoreemi võrdsete siinustega kaartest:

$$7x - 5x = 2\pi n; \qquad 7x + 5x = (2n+1)\pi;$$

$$x_1 = \pi n; \qquad x_2 = \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{6}\pi n.$$

Lahendame veel võrrandi

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

Viies kõik liikmed vasakule poolele, anname talle kuju

$$\frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{\sin x \cos x} = 0,$$

ehk

$$\frac{\sin x}{\sin x \cos x} = 0, \text{ ehk } \frac{1}{\cos x} = 0,$$

ning veendume, et sel võrrandil ei ole ühtki lahendit. Teostatud taandamine teguriga $\sin x$ on lubatav ainult siis, kui $\sin x \neq 0$, see asjaolu kohustab meid täiendavalt selgitama, kas antud võrran-

dit ei rahulda need x väärtused, mille puhul $\sin x = 0$, s. o. arvud kujuga πn, kus n on mis tahes täisarv. Funktsioon

$$\frac{\sin 2x}{\sin x}$$

ei ole määratud, kui $x = n\pi$, kuid, võib-olla, on tal piirväärtus $x \to n\pi$ korral? Tähele pannes, et kui $x \neq n\pi$, siis

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = 2\cos x,$$

millest järeldame, et selline piirväärtus on tõesti olemas, ja ta on $2\cos n\pi = 2 \cdot (-1)^n$. Parem pool läheneb $x \to n\pi$ korral teisele väärtusele,

$$\frac{\cos 2\pi n}{\cos \pi n} = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n,$$

seepärast ükski arv kujuga πn ei rahulda seda võrrandit.

Tutvume ühe kunstliku võttega, millega on mugav lahendada võrrandit

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a,$$

eelnevalt selgitades muidugi, missuguste a väärtuste puhul lahendid on olemas. Võtame samasuse

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

ruutu tõstmisel, arvestades antud võrrandit, saame

$$a + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1, \text{ ehk } \sin^2 2x = 2(1 - a).$$

Et lahendamine oleks võimalik, on tarvilik ning piisav, et oleks rahuldatud kahekordne võrratus

$$0 \leqslant 2(1 - a) \leqslant 1,$$

millest $0{,}5 \leqslant a \leqslant 1$.
Selle tingimuse korral saame lõpmatu hulga lahendeid, mis väljenduvad valemiga

$$x = 0{,}5 \operatorname{Arcsin} [\pm \sqrt{2(1 - a)}].$$

Erijuhtumil, kui $a = 0{,}75$, saame

$$x = 0{,}5 \operatorname{Arcsin} (\pm 0{,}5\sqrt{2}) = 0{,}5\pi n \pm 0{,}125\pi.$$

Vahemikus $[0;\ 2\pi]$ saame 8 järgmist lahendit:

$$\frac{1}{8}\pi,\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \frac{9}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi.$$

Funktsiooni

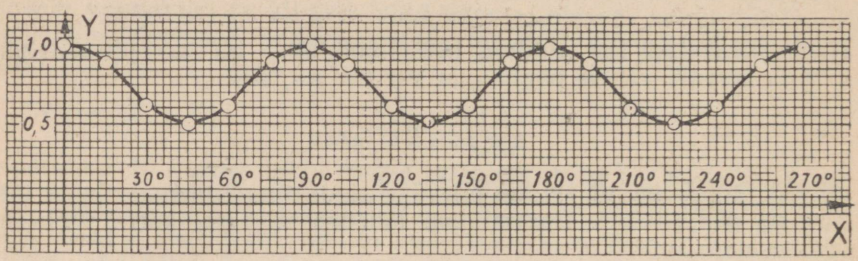
$$y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

graafikuks osutub joonestaja hämmastuseks kosinusoid, mis on nihutatud nõnda, et ta teljeks on sirge $y = 0{,}75$, periood ei ole 2π, nagu tavaliselt, vaid ainult $0{,}5\pi$, s. o. sinusoid, mis kujutab endast funktsiooni $\sin 4x$ graafikut, mis aga koordinaatide telgede suhtes on teataval viisil nihutatud. Kõik see selgub, kui arvestada, et

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$
$$= 1 - 0.5\sin^2 2x = 1 - 0{,}25(1 - \cos 4x) =$$
$$= 0{,}75 + 0{,}25\cos 4x = 0{,}75 + 0{,}25\sin(4x + 0{,}5\pi).$$

Ei ole huvituseta märkida, et joonisel 70 kujutatud graafiku ehitamine võimaldab antud võrrandi lahendamise i g a s u g u s e a korral (0,5 ja 1 vahel) jooni-

selt lihtsa äralugemise teel (iseendast mõista, nagu alati graafilisel lahendamisel, saadakse ainult lahendite ligikaudsed väärtused).
Joonisel 70 on tõmmatud katkev sirgjoon vastavalt väärtusele $a = 0{,}75$, ning kõik lahendid on esitatud selle sirge ja kosinusoidi lõikepunktide abstsissidena.



Joon. 70.

Viimase näitena vaatleme süsteemi

$$\sin x + \sin y = a,$$
$$\cos x + \cos y = b$$

lahendamist, kus a ja b on antud arvud.

Siin võib $\sin x$ ja $\cos x$ avaldada ratsionaalselt $u = \operatorname{tg} 0{,}5x$ kaudu, ning $\sin y$ ja $\cos y$ ratsionaalselt $v = \operatorname{tg} 0{,}5y$ kaudu ja taandada küsimus kahe algebralise võrrandi lahendamisele, kus tundmatuiks on u ja v, kuid paremad tulemused saame järgmise kunstliku võttega. Võttes $b \neq 0$, jagame esimese võrrandi liikmeti teisega, pärast taandamist avaldisega $\cos 0{,}5(x-y)$, mis $b \neq 0$ korral on lubatav, saame $0{,}5(x-y)$ määramiseks võrrandi

$$\operatorname{tg} 0{,}5(x+y) = a : b.$$

siis leiame $0{,}5(x-y)$ esimesest võrrandist, kirjutades ta kujul:

$$2 \sin 0{,}5(x+y) \cos 0{,}5(x-y) = a.$$

Et lahendamine oleks võimalik, on tarvilik ning piisav, et oleks täidetud tingimus:

$$-1 \leqslant 0{,}5a \operatorname{cosec} 0{,}5(x+y) \leqslant 1,$$

ehk

$$0 \leqslant 0{,}25a^2 \operatorname{cosec}^2 0{,}5(x+y) \leqslant 1,$$

ehk

$$0 \leqslant a^2 [1 + \operatorname{ctg}^2 0{,}5(x+y)] \leqslant 4,$$

ehk lõpuks:

$$0 \leqslant a^2 + b^2 \leqslant 4.$$

§ 34. Transtsendentsete trigonomeetriliste võrrandite näited.

Võrrandid, milles peale tundmatu argumendiga trigonomeetriliste funktsioonide esineb ka see tundmatu argument ise, on seotud tunduvate raskustega ja neid tavaliselt keskkoolis ei vaadeldagi. Kui aga õpilased on tundma õppinud trigonomeetriliste funktsioonide graafikuid, siis selliste transtsendentsete võrrandite ligikaudsete lahendite leidmine on neile täiesti jõukohane. Selgitame seda näidete varal.

I. Leida ringjoone kaare kraadimõõt teades, et selle kaare pikkus on $2a$ cm ja talle toetuv kõõl on $2b$ cm.

Võib arvestada, et $b < a$, sest $a \leqslant b$ korral säärast kaart pole olemas.

Tähistades otsitava kaare radiaanmõõdu sümboliga $2x$, ja ta raadiuse tähega r, saame süsteemi

$$2r \sin x = 2b,$$
$$2r\, x = 2a,$$

millest saame ühe otsitavaga võrrandi

$$\sin x = \frac{b}{a}\, x.$$

Ülesanne taandub niisuguse kaare x leidmisele, mille siinus on tema radiaanmõõdu ja $\frac{q}{a}$ korrutis. Kaare siinuse väärtusi kujutavad joonisel sinusoidi punktid, korrutise $\frac{b}{a}\, x$ väärtusi niisuguse sirgjoone punktid, mis läbib koordinaatide algust. Niiviisi, joonestades sinusoidi ja selle sirge, leiame x väärtuse nende lõikepunkti abstsissina. Asi viib niisiis funktsioonide

$$y = \sin x \text{ ja } y = \frac{b}{a}\, x$$

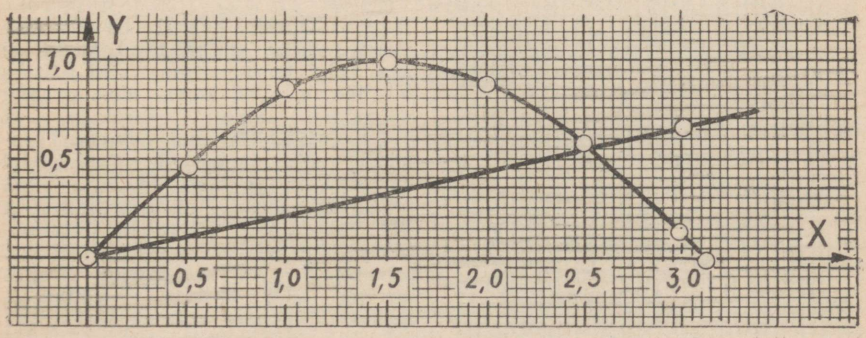
graafikute ehitamisele. Kaar $2x$ on suurem kui 0 ja vähem kui 2π, sest ta on osa ringjoonest, ning seetõttu

$$0 < x < \pi,$$

seega piisab, kui joonestame ainult sinusoidi poollaine. Joonisel 71 on võetud mõõduks 0,5 radiaani 1 sentimeetris ja konstruktsioon on tehtud eriväärtuste

$$2a = 290 \text{ cm ja } 2b = 64 \text{ cm}$$

puhuks. On võetud punkt abstsissiga $x = 3$ ja ordinaadiga $y = \frac{b}{a}\, x = \frac{64}{290} \cdot 3 = 0{,}662$, ja see on ühendatud koordinaatide algusega. Jooniselt saame lõikepunkti abstsissi $x \approx 2{,}54$.



Joon. 71.

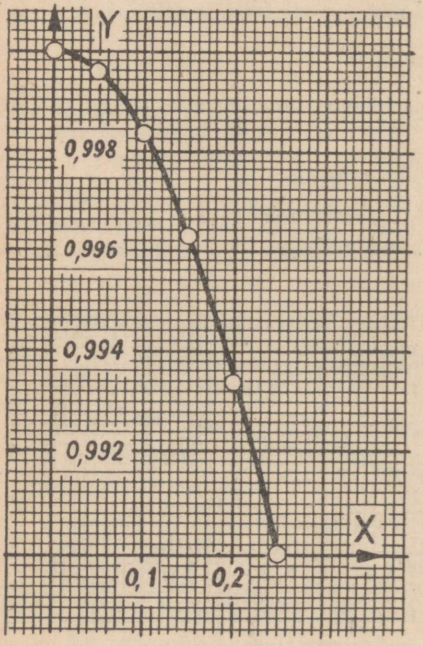
Kontrolliks kirjutame võrrandi ümber kujul

$$\sin x : x = b : a$$

ning arvutame funktsiooni $\sin x : x$ väärtused x väärtustel, mis on lähedased leitud väärtustele $\frac{b}{a} = \frac{32}{145} = 0{,}22068\ldots$

x x°	2,53 144°57′	2,54 145°32′	2,55 146°06′
lg sin x lg x	$\bar{1}$,7591 0,4031	$\bar{1}$,7527 0,4048	$\bar{1}$,7464 0,4065
lg (sin x : x) sin x : x	$\bar{1}$,3560 0,2270	$\bar{1}$,3479 0,2227	$\bar{1}$,3339 0,2187

Võrreldes leitud arve arvuga $\frac{b}{a} = 0{,}2207$ ning tähele pannes, et siin on lineaarne interpolatsioon lubatav (tabelivahed on -43 ja -40) leiame, et jagatis $\sin x : x$ saab väärtuse 0,2207 sel korral, kui $x = 2{,}545$; $x = 2{,}544$ korral on see jagatis 0,2211, s. o. liig suur, kuid $x = 2{,}546$ korral on ta juba 0,2203, s. o. liig väike. Niisiis, otsitava kaare radiaanmõõt on $2x \approx 5{,}090$ veaga alla 0,002, ning kraadimõõt on 291°38′ veaga mitte üle 7′.



Joon. 72.

Kui nõutakse suuremat täpsust, siis joonestame suuremas mõõdus sinusoidi kaare alates $x = 2{,}544$ kuni $x = 2{,}546$; kasutades seitsmekohalisi tabeleid leiame, et $x = 2{,}545164$ veaga alla 1 viimase järgu ühiku, ehk kraadimõõdus $x = 145°49'38''$. Selle leitud väärtuse 2,545 «täpsustamine» on teostatav ka ilma graafikuta, ainult tabelite abil.

Juhtumil, kui murd $\frac{b}{a}$ on lähedane 1-le, tuleb raskus: sirge $y = \frac{b}{a}x$ langeb sinusoidi kaarega terves vahemikus ühte, kindlat lõikepunkti ei saa, kuigi ta on olemas. Nii näiteks $b = 144$, $a = 145$ korral meie graafik võimaldab ainult järeldada, et $0 < x < 0{,}25$. Täpsema tulemuse saamiseks võib joonestada funktsiooni $y = \sin x : x$ graafiku ja leida tema niisugune punkt, mille ordinaat on $144 : 145 = 0{,}9931$. Parem on teha joonis Y-telje suunas suuremas mõõdus; joonisel 72 on Y-teljel võetud 1 sentimeetris 0,002, X-teljel 1 sentimeetris 0,1. Arvestame seda, et $x \to 0$ korral $\sin x : x \to 1$; joonestame kõverast ainult kaare punktist $x = 0$ kuni $x = 0{,}25$. Joonestame X-teljega paralleelse sirge 0,9931 kaugusel sellest ning veendume, et lõikepunkti abstsiss vaevalt ületab 0,20 ja on igal juhtumil vähem kui 0,21. Kontrolliks arvutame $\sin x : x$ väärtused $x = 0{,}19$, 0,20 ja 0,21 korral ning saame arvud 0,9940, 0,9933, 0,9927, mis kinnitavad, et 0,20 on tõesti otsitava lahendi ligikaudne väärtus sajandiku radiaani täpsusega. Funktsiooni $\sin x : x$ muutumise ühtlus vahemikus (0,19; 0,21) võimaldab kindlaks teha, et $x \approx 0{,}203$ ehk $x \approx 11°36'$.

II. Leida ringi niisuguse segmendi kaar, mille pindala võrdub veerandiga ringi pindalast.

Olgu α otsitava kaare radiaanmõõt. Küsimus taandub võrrandi

$$\alpha - \sin\alpha = 0{,}5\pi,$$

ehk, võttes $\alpha - 0{,}5\pi = x$, lihtsama võrrandi

$$\cos x = x$$

lahendamisele. Lahendamiseks on tarvis ainult joonestada funktsioonide $y = \cos x$ ja $y = x$ graafikud (kosinusoid ja sirge). Vastus: $x \approx 42°21'$, ehk 0,7391 radiaani (täpsemalt $42°20'47''$).

III. Lahendada Kepleri võrrand

$$x = a + e\sin x, \text{ kui } a = 2,\ e = 0{,}1.$$

Astronoomidel tuleb sageli lahendada seda võrrandit mitmesuguste a ja e väärtuste puhul, et kindlaks määrata planeedi asukoht tema orbiidil; on olemas mitu mugavat võtet selle lahendamiseks. Kõige lihtsam on talitada nii, et kirjutame ta ümber kujul:

$$\sin x = (x - a) : e,$$

ning leida sinusoidi $y = \sin x$ ja sirgjoone $y = (x - a) : e$ lõikepunkti abstsiss.

Vastus: $x \approx 119°35'$ ehk 2,0870 radiaani.

IV. Märgime siin ära veel mõned huvitavad võrrandid:
$\operatorname{tg} x = x$ (lõpmatu palju lahendeid, vähim positiivne lahend on 4,4934...);
$x^2 - \sin x = 0$ (lahendatakse sinusoidi ja parabooli joonestamise teel);
$\sin x = 1 : x$ (lahendatakse sinusoidi ja hüperbooli joonestamise abil). Niisugused lahendused neile kolmele võrrandile on antud Piotrovski õpikus.

On olemas rida muid võtteid transtsendentsete võrrandite ligikaudseks lahendamiseks (iteratsiooni võte, reaks arendamise võte jt.), kuid on juba suureks saavutuseks, kui õpilased omandavad hästi kasvõi ühegi vaadeldud graafilistest võtetest.

VII peatükk.

GEOMEETRILISED JA MUUD TRIGONOMEETRIA RAKENDUSED.

§ 35. Millal ja missuguses ulatuses vaadelda kolmnurkade lahendamist?

Kolmnurga lahendamine põhilisil juhtumeil, kus on antud tema kolm elementi, mille hulgas on vähemalt üks külg, ning tuleb leida kolm ülejäänud elementi, on tähtsaimaks trigonomeetriliste funktsioonide teooria rakenduseks, mida sageli kasutatakse teistes distsipliinides. Selle ülesande ammendav lahendamine on X klassi õpilastele täiesti jõukohane ning nad peavad selle hästi omandama. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine (põhilisil juhtumeil) nõuab trigonomeetriast nii vähe teadmisi ning on praktilistes rakendustes nii tähtis, et selle vaatlemine on soovitav ja võimalik juba VIII klassis, s. o. trigonomeetria algkursuses loomulike trigonomeetriliste tabelite kasutamise abil. IX klassis tuleb programmi järgi selle küsimuse juurde tagasi tulla trigonomeetriliste funksioonide logaritmide tabeli kasutamise abil. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine on programmi järgi viidud X klassi, kus sellele teemale on ette nähtud 18 tundi.

Oli aeg, kus kolmnurkade lahendamises nähti trigonomeetria peamist sisu ning pühendati sellele palju aega, vaadeldes mitte

ainult põhilisi juhtumeid, vaid hulgaliselt ülesandeid mitmesuguseile erijuhtumeile, kus andmeteks on mitte ainult küljed ja nurgad, vaid kolmnurkadega seotud mitmesugused geomeetrilised suurused.

Nüüd, kus esiplaanile on tulnud trigonomeetriliste funktsioonide õppimine, kaotab kolmnurkade lahendamine oma prevaleeriva tähtsuse. Kolmnurga elementide vaheliste seoste õppimist tuleb piirata sedavõrd, kuivõrd neid edaspidi tegelikult kasutatakse, ning seejärel anda praktiliselt tähtsad arvutamisvõtted, vaadeldes neid graafilise meetodi täpsustamisena, mis lubab tulemused saada kiireimalt ja näitlikemalt. Seejuures on tarvis teatavat tähelepanu pöörata saadud tulemuste täpsuse küsimusele, mida koolis, kahjuks, tavaliselt üldse ei tehta. Kolmnurkade lahendamise erijuhtumite vaatlemisest ei saa täiesti loobuda, kuid sääraste ülesannete arvu tuleb vähendada mõistliku miinimumini.

Kolmnurkade lahendamine on heaks treeninguks numbrilistes arvutustes, ning on soovitav ära kasutada need võimalused, mis siin on olemas, nõudes arvutustöö maksimaalset ratsionaliseerimist: mitmesuguste tabelite ja teiste arvutamise abivahendite rakendamist, mugavate arvutamise skeemide koostamist, arvutuste õigsuse kontrollimist, saadud tulemuste täpsuse selgitamist jne. Peab märkima, et kooli õpik ja ülesannete kogu asja sellele küljele ei osuta tähelepanu.

§ 36. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.

Kõik teoreetiline materjal, mis puudutab täisnurksete kolmnurkade lahendamise põhiliste juhtumite küsimust, on vaadeldud trigonomeetria algkursuse peatükis, mille peamiseks ülesandeks on nimelt selle küsimuse täielik omandamine. IX klassis tuleb seda materjali õppida ainult niivõrd, kuivõrd see VIII klassis jäi viimistlemata või kuivõrd ta on unustatud. Uudiseks on siin ainult trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide tabeli kasutamine.

Allpool on toodud täielikult ülesande lahendus, mis on vaadeldud N. Rõbkini õpikus § 90. Eeldame, et graafiline lahendamine on teostatud hariliku vihiku ruudulisel paberil (joon. 73).

Ülesanne. On antud hüpotenuus ja teravnurk: $c = 287{,}4$ m ja $A = 42°06'$. Leida selle kolmnurga kaatetid a ja b, teine teravnurk B ja pindala S.

Graafiline lahendamine.

(mõõt 1 cm → 50 m).

Mõõtmisel joonise järgi saame $a \approx 3{,}8$ cm, $b \approx 4{,}2$ cm.

Vastus: $a \approx 190$ m; $b \approx 210$ m.

Lahendamine arvutamise teel.

$$B = 90° - A = 47°54',\ a = c \sin A,\ b = c \cos A = c \sin B,$$
$$S = 0{,}5ab = 0{,}5\, c^2 \sin A \cos A = 0{,}25\, c^2 \sin 2A.$$

lg sin A	$\bar{1}$,8264
lg c	2,4585
lg cos A	$\bar{1}$,8704
lg a = lg c + lg sin A	2,2849
lg b = lg c + lg cos A	2,3289
a	192,7
b	213,2

$2A$	84°12′
2 lg c	4,9170
lg sin $2A$	$\bar{1}$,9978
lg 0,25	$\bar{1}$,3979
lg S	4,3127
S	20550 m²
ehk	2,055 ha

Kontroll — 4-kohaliste ruutude tabeli abil:

a^2	3713
b^2	4545
$a^2 + b^2$	8258
c^2	8260

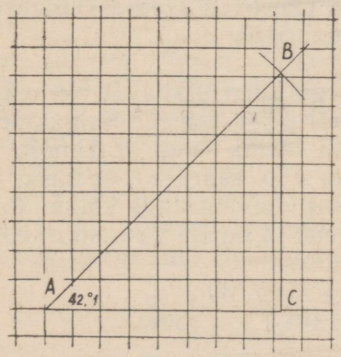
Kooskõla graafilise lahenduse ja arvutustulemuste vahel on rahuldav.

Kaalutlused täpsusest. Kui andmed on täpsed, siis 4-kohaliste tabelite abil saadud tulemuste vead on väga väikesed, mis ilmuvad ainult 4-das tüvenumbris, mida kinnitab ka $a^2 + b^2$ ja c^2 kontrollarvutus: tekkis erinevus 4-dal kohal 2 järguühiku võrra. Pindala $S = 20550$ m² väärtuses üheliste number, olles 5. tüvenumbriks, ei vääri mingit usaldust, ta on sellepärast hektariteks ülestamisel kõrvale jäetud. Kui aga andmed on ligikaudsed, siis selle selgitamiseks, missugused numbrid saadud tulemustes väärivad usaldust, missugused mitte, peab rakendama tõkete meetodit.

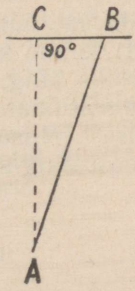
Vastus: $a \approx 192{,}7$ m; $b \approx 213{,}2$ m; $B = 47°54'$; $S = 2{,}055$ ha.

Kontrollimise eesmärgil on soovitav lahendada mingi pöördülesanne, näiteks, lugedes a ja b antuks, leida c, A, B. Kasutades valemeid

$$\operatorname{tg} A = a : b,$$
$$B = 90° - A,$$
$$c = a : \sin A,$$



Joon. 73.



Joon. 74.

saame jällegi 4-kohaliste tabelite abil samad c ja A väärtused, nagu olid antud.

Et nähtavaks teha komplikatsioonid, mis tekivad täisnurksete kolmnurkade lahendamise puhul juhtumil, kui üks antud või otsitavaist nurkadest on väga väike, selleks lahendame niisuguse ülesande. Leida püsttoe AC pikkus teades, et kaldtoe AB pikkus on 415 cm ja et selle ülemine ots B on punktist C 24 cm kaugusel, kusjuures lõik BC on horisontaalne, nii et nurk ACB on täisnurk (joon. 74). Küsimus taandub kaateti $b = AC$ arvutamisele antud hüpotenuusi $c = AB = 415$ cm ja teise kaateti $a = BC = 24$ cm järgi. Graafiline lahendamine ei anna siin midagi: näiteks, joonisel mastaabiga 1 : 100 ei õnnestu b ja c vahel mingit erinevust kindlaks teha. Arvutamine valemite

$$\sin A = a : c \text{ ja } b = c \cos A$$

järgi 4-kohaliste tabelite abil annab $b = 414{,}3$ cm, kus viimane number ei ole täiesti usaldatav; see tulemus ka ei rahulda ehitajat, kel on tarvis teada, kui palju peab tuge AB lühendama, et ta sobiks asendisse AC. Siin on parem kasutada Pythagorase teoreemi ning leida

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)} = \sqrt{439 \cdot 391}$$

5 õige tüvenumbriga (seega mitte 4-kohaliste, vaid 5-kohaliste tabelite abil, või otsese arvutamise teel), millest saame $b \approx 414{,}31$ cm; veel parem on arvutada kohe vahe

$$c - b = c - c\cos A = 2c\sin^2 0{,}5A,$$

arvutades enne A, kasutades valemit

$$\sin A = a : c.$$

Et nurk A on väga väike (umbes 3°), asendame $\sin A$ ja $\sin 0{,}5A$ radiaanmõõtudega, mis ei mõjuta isegi 4-dat numbrit koma järel, ning saame lõplikult:

$$c - b \approx a^2 : 2c,$$

ehk

$$24^2 : (2 \cdot 415) \approx 0{,}694 \text{ cm}.$$

Me saime tulemuse tuhandiku sentimeetri täpsusega, millel on mõtet ainult sel juhtumil, kui andmed 415 cm ja 24 cm on täpsed, kui nad on, näiteks, lähteandmed ehk projektandmed. Kui need andmed on aga mõõtmistulemused kümnendiku sentimeetri täpsusega, s. o. kui $a \approx 24{,}0$ cm ja $c \approx 415{,}0$ cm, siis vastus tuleb ümardada kümnendikeni.

§ 37. Külgede ja nurkade vahelised seosed kaldnurkses kolmnurgas.

Et leida kaldnurkse kolmnurga kolm otsitavat elementi (küljed ja nurgad) kolme antud elemendi järgi, millede hulgas peab olema vähemalt üks külg, selleks peab olema kolm võrrandit, seejuures üksteisest sõltumatud võrrandid, s. o. säärased, et ükski ei järeldu kahest teisest. Niisuguse süsteemi võib koostada kolme nurga vahelisest seosest ning seostest külgede ja nende vastasnurkade siinuste vahel:

$$A + B + C = 180°,$$
$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C. \qquad (1)$$

Selle «siinuste teoreemi» peabki kõige esmalt tõestama, mida saab kahel viisil teha: kas tõestades, et kolmnurga iga külje ja selle vastasnurga siinuse suhe võrdub ümberringjoone diameetriga, nagu see on tehtud õpikuis [V, 2, 26], või võrreldes ühe ning sama kõrguse jaoks saadud kaht avaldist, näiteks

$h_c = a \sin B = b \sin A$, millest

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Mõlemad võtted on väga lihtsad, kuid nad mõlemad nõuavad täisnurkse ja kaldnurkse kolmnurga eraldi vaatlemist. Teine on vähem kunstlik; selle tavaliselt «avastavad» õpilased, kui neile esitada see teoreem iseseisvalt tõestada. Hea on seada küsimus nõnda: külje

suurenedes vastasnurk suureneb; niisugune on kolmnurga külje ja vastasnurga vahelise sideme kvalitatiivne iseloomustus, mis juba geomeetria kursuses tõestati. Kuid missugune on selle sideme täpne kvantitatiivne iseloomustus? Võrdelisust siin ei ole; selles veendumiseks piisab, kui vaadelda mõnd näidet, kõige lihtsam on võtta täisnurkne kolmnurk nurgaga 30°, kus nurkade suhted on $30° : 60° : 90° = 1 : 2 : 3$, kuid vastaskülgede suhted on $a : a\sqrt{3} : 2a = 1 : \sqrt{3} : 2$. Kui viimased suhtearvud ümber kirjutada kujul $0{,}5 : 0{,}5\sqrt{3} : 1$, näevad õpilased kergesti külgede võrdelisust vastasnurkade siinustega, sest

$$\sin 30° : \sin 60° : \sin 90° = 0{,}5 : 0{,}5\sqrt{3} : 1.$$

Seda tähelepanekut kontrollitakse esmalt teistel erijuhtumitel, ning siis algab tõestuse otsimine. Tavaliselt õpilased ise taipavad tõmmata kõrguse ja jõuavad iseseisvalt võrduseni

$$a : \sin A = b : \sin B,$$

ning seejärel kahekordse võrduseni

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C.$$

Pärast seda on hea võtta ka teine tõestus, mispuhul muuseas tõestatakse kolmnurga külgede ja nurkade seos ümberringjoone raadiusega.

Süsteemi (1) on mugav kasutada kolmnurga lahendamiseks juhtumil, kui antud on kaks nurka ja külg, ja juhtumil, kui antud on kaks külge ja nurk, mis asub ühe antud külje vastas, kuid juhtumeil, kui antud on kaks külge ja nende vaheline nurk, ja kui antud on kolm külge, see süsteem viib trigonomeetrilistele võrrandeile, mis on raskemad lahendada. Neil juhtumeil on parem võtta teine süsteem, mis põhineb teoreemil, mida nimetatakse koosinuste teoreemiks ehk laiendatud Pythagorase teoreemiks:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{aligned} \qquad (2)$$

Ei ole huvitusetu märkida, et süsteemid (1) ja (2) on täiesti samaväärsed: kummagi süsteemi võib puht analüütiliselt, üldse ilma geomeetriata, tuletada teisest. Süsteemi (2) tuletamine süsteemist (1) on antud N. Rõbkini õpikus; ümberpöördult: süsteemi (1) tuletamine süsteemist (2), kus $0 < A \leqslant B \leqslant C < \pi$, on ainult vähe keerulisem. Tõepoolest, avaldades $\cos A$ külgede a, b, c kaudu, saame

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 4S^2 : (b^2c^2),$$

kus $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$,

$$2p = a + b + c,$$

ehk

$$\sin A : a = 2S : (abc),$$

ning siinuste teoreemi, s. o. süsteemi (1) kaks viimast võrrandit, saame nüüd kergesti (muuseas saame tähtsad valemid $S = 0{,}5\,bc \sin A$ ja $S = abc : (4R)$ kolmnurga pindala arvutamiseks).

Edasi saame

$$\sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C =$$

$$= \frac{2S}{ac} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{2S}{ab} \cdot \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} = \frac{2S}{bc} = \sin A.$$

Võrdus

$$\sin(B + C) = \sin A$$

ütleb, et $B + C - A = 2\pi n$ või $B + C + A = (2n + 1)\pi$, ja seepärast võrratuste tõttu, mis kehtivad iga kolmnurga nurkade kohta, saame

$$A + B + C = \pi.$$

Kolmnurkade lahendamiseks põhilistel juhtumitel piisab süsteemidest (1) ja (2) täiesti. Tangensite teoreemi

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{tg} 0{,}5(A + B)}{\operatorname{tg} 0{,}5(A - B)}$$

ja valemite, nagu

$$\operatorname{tg} 0{,}5\,A = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}}$$

kasutamine kergendab mõnel juhtumil arvutusi, kuid nad ei ole hoopiski tingimata vajalikud. Nende, kui ka rea teiste kolmnurga kohta kehtivate valemite (pindala S, sise- ja ümberringjoone raadiuste r ja R arvutamiseks jne.) tuletamine on heaks harjutusmaterjaliks, kuid ei ole mingit tarvidust neid pähe õppida; ei ole tarvis pähe õppida ka valemit

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos 0{,}5\,A \cos 0{,}5\,B \cos 0{,}5\,C$$

jt., mida Rõbkini õpiku § 97 soovitab meeles pidada. Piisab täiesti teadmisest, kust neid valemeid võib leida, näiteks, õpiku lõpus toodud valemite registrist, kuid veel parem on, kui õpilased ise koostavad säärase kasulike valemite registri, sedamööda, kuidas neid kogub. Igal juhtumil peab meeles pidama, et need valemid on abistava iseloomuga ja teise järgu tähtsusega, ning neile ei tule palju aega kulutada.

§ 38. Kolmnurkade lahendamise põhilised juhtumid.

Tuletame meelde, et põhilisteks nimetatakse kolmnurkade lahendamise neid juhtumeid, mil nii andmeiks kui ka otsitavaiks on nende küljed ja nurgad. Andmete hulgas peab olema vähemalt üks külg, seepärast on võimalikud ainult 5 järgmist põhilist juhtumit:

1) on antud külg ja selle kaks lähisnurka (NKN);

2) on antud külg ja kaks nurka, millest üks asub selle külje vastas (KNN);

3) on antud kaks külge ja nurk nende vahel (KNK);

4) on antud kaks külge ja nurk, mis asub ühe antud külje vastas (KKN);

5) on antud kolm külge (KKK); juhtumeid NKN ja KNN ei ole vaja eristada, sest kui kaks nurka on teada, siis saab kergesti kolmanda leida.

Ei ole huvituseta kindlaks teha, mitmel viisil üldse saab võtta mingid kolm elementi 6 elemendi a, b, c, A, B, C hulgast (kokku $C_6^3 = 20$) ning veenduda, et sisuliselt üksteisest erinevad on ainult 5 nimetatud juhtumit ja juhtum, kui on antud kolm nurka: A, B, C ning kolmnurk ei ole üheselt määratud.

Juhtumil KNN, teades nurki B ja C, leiame $A = 180° - (B + C)$, seejärel antud külje a järgi leiame $b = a \sin B : \sin A$ ja $c = a \sin C : \sin A$. Tingimuse $B + C \geqslant 180°$ korral lahendeid ei ole.

Vaatleme juhtumit KNK. Teades a, b, C leiame valemi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

järgi c ning seejärel valemite $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) : (2bc)$ ja $\cos B = (c^2 + a^2 - b^2) : (2ca)$ järgi A ja B. Ülesandel on igasuguste andmete korral üks ainus lahend. Õpikuis soovitatakse tavaliselt teist viisi, mis põhineb tangensite teoreemi kasutamisel ning on mitmekohaliste andmete korral mõnevõrra mugavam. Kuid esimesel võttel on oma paremus — võimalus kontrollida kõigi nurkade summa arvutamise teel (kohustusliku selgitamisega, kas esinev kõrvalekaldumine teoreetilisest summast 180° on tingitud paratamatuist arvutusvigadest, või ta osutab, et lahendamises on viga).

Juhtum KKK. Teades a, b, c, leitakse A, B, C jällegi kas laiendatud Pythagorase teoreemi abil või poolnurga tangensite valemite järgi. Kontroll teostatakse nii, nagu eelmisel juhtumil. Tingimuste

$$a \leqslant b \leqslant c, \qquad a + b > c$$

korral ülesandel on üks ainus lahendus.

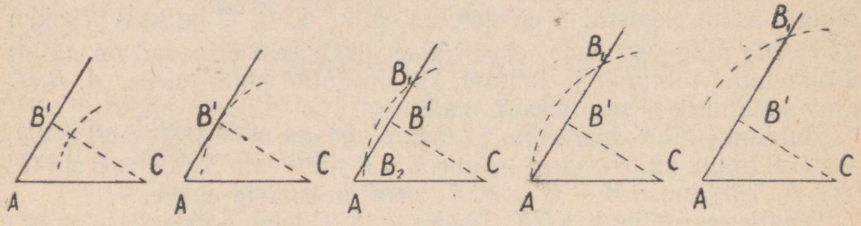
Juhtum KKN on kõige tülikam uurimise osas, ja teda vaadeldakse seepärast sageli viimasena. Teades a, b, A leiame B valemi $\sin B = b \sin A$ järgi, arvestades kahe lahenduse võimalust: teravnurk B_1 ja nürinurk $B_2 = 180° - B_1$, seejärel kasutame valemeid

$$C = 180° - (A + B) \text{ ja } c = a \sin C : \sin A.$$

On vajalik üksikasjalik uurimine, mis omandatakse kergemini, kui lähtuda konstruktiivsest lahendamisest joonlaua, sirkli, nurklaua ja malli kasutamisega. Kui $A < 90°$, siis on 5 võimalust (joon. 75), kus nurk $CB'A = 90°$; $CB' > a$ korral lahendeid ei ole, $CB' = a$ korral on üks lahend: täisnurkne kolmnurk ABC'; $CB' < a < b$ korral on kaks lahendust: kolmnurgad ACB_1 ja ACB_2; $CB' < a = b$ korral on üks lahend: võrdhaarne kolmnurk ACB_1; $CB' < a$, $b < a$ korral on üks lahend: kolmnurk ACB_1 (joon. 75). Kui aga $A > 90°$, siis neid samu 5 võimalust vaadeldes vastaval joonisel näeme, et lahen-

dus on võimalik ainult $a > b$ korral; sel korral on üks ainus lahend. Tähele pannes, et $CB' = b \sin A$, seome selle geomeetrilise uurimise valemi $\sin B = b \sin A : a$ uurimisega.

Seda uurimist peetakse sageli ülejõukäivalt raskeks ning jäetakse ära, kuid selle hea omandamine toob õpilastele kahtlemata rohkem kasu, kui suure hulga numbriliste andmetega ülesannete lahendamine.



Joon. 75.

Toome allpool ühe ülesande täieliku lahenduse juhtumi *KKK* üleskirjutuste paigutuse näidisena. Oletame, et graafiline lahendamine on teostatud harilikul ruudulisel paberil (joonis ta lihtsuse pärast jääb siin toomata).

Ülesanne. Leida kolmnurga nurgad, kui ta küljed on $a = 15{,}37$ m, $b = 21{,}42$ m, $c = 13{,}83$ m.

Graafiline lahendus (mõõt 1 cm $\rightarrow$ 2 m, nurkade mõõtmine malliga).

Vastus: $A \approx 45°{,}8$; $B \approx 94°{,}0$; $C \approx 40°{,}1$.

Kontroll: $A + B + C = 179°{,}9$.

1. lahendus arvutamise teel (laiendatud Pythagorase teoreemi abil):

$$\cos A = M_1 : N_1; \quad \cos B = M_2 : N_2; \quad \cos C = M_3 : N_3;$$
$$M_1 = b^2 + c^2 + a^2; \quad M_2 = c^2 + a^2 - b^2; M_3 = a^2 + b^2 - c^2;$$
$$N_1 = 2bc; \quad N_2 = 2ca; \quad N_3 = 2ab.$$

Kasutatakse ruutude ja logaritmide tabeleid.

a	15,37	a^2	236,3	lg a	1,1866	lg M_1	2,6168	lg M_3	2,7024
b	21,42	b^2	458,9	lg b	1,3308	lg N_1	2,7726	lg N_3	2,8184
c	13,83	c^2	191,2	lg c	1,1408				
				lg 2	0,3010	lgcos A	$\bar{1}$,8442	lgcos C	$\bar{1}$,8840
		M_1	413,8			A	45°41′	C	40°03′
		M_2	−31,4	lg N_1	2,7726	lg(− M_2)	1,4969		
		M_3	504,0	lg N_2	2,6284	lg N_2	2,6284		
				lg N_3	2,8184				
						lg(− cos B)	$\bar{2}$,8685		
						180° − B	85°46′		
						B	94°14′		

Vastus:

A	45°41′
B	94°14′
C	40°03′
Summa	179°58′ (kontroll)

2. Lahendus arvutamise teel (poolnurga tangensite valemite abil):

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\frac{k}{p-a},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\frac{k}{p-b},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{k}{p-c},\quad k=\sqrt{\frac{q}{p}},$$

$$q=(p-a)(p-b)(p-c).$$

a	15,37	$\lg(p-a)$	0,9974
b	21,42	$\lg(p-b)$	0,5899
c	13,83	$\lg(p-c)$	1,0599
$2p$	50,62	$\lg q$	2,6472
p	25,31	$\lg p$	1,4033
$p-a$	9,94	$\lg(q:p)$	1,2439
$p-b$	3,89	$\lg k$	0,6220
$p-c$	11,48		

$\lg k$	0,6220
$\lg(p-a)$	0,9974
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}A$	$\bar{1},6246$
$\frac{1}{2}A$	22°51′

$\lg k$	0,6220
$\lg(p-b)$	0,5899
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}B$	0,0321
$\frac{1}{2}B$	47°07′

$\lg k$	0,6220
$\lg(p-c)$	1,0599
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$	$\bar{1},5621$
$\frac{1}{2}C$	20°02′,5

Vastus:

A	45°42′
B	94°14′
C	40°05′
Summa	180°01′

Kõigi arvutuste tulemused on täiesti kooskõlas; otsitavad nurgad on leitud mõneminutilise veaga.

Et saada ettekujutus andmeis esinevate vigade mõjust, sooritame veel kord nurga A arvutuse, oletades, et andmete vead võivad küündida kuni 0,01. Rakendame tõkete võtet, kasutades laiendatud Pythagorase teoreemi ja jättes arvestamata tabeli andmeist põhjustatud arvutamisvead.

	AT	ÜT
a	15,36	15,38
b	21,41	21,43
c	13,82	13,84
a^2	236,0	236,6
b^2	458,4	459,3
c^2	190,9	191,6
b^2+c^2	649,3	650,9

	AT	ÜT
$\lg 2$	0,3010	0,3010
$\lg b$	1,3306	1,3310
$\lg c$	1,1405	1,1412
$\lg 2bc=\lg N_1$	2,7721	2,7732

	AT	ÜT
b^2+c^2	649,3	650,9
a^2	236,0	236,6
$b^2+c^2-a^2=M_1$	412,7	414,9
$\lg M_1$	2,6157	2,6179
$\lg N_1$	2,7721	2,7732
$\lg\cos A$	$\bar{1},8425$	$\bar{1},8458$
A	45°29′	45°55′

Vastus:

$45°29′ < A < 45°55′$,

ehk $A \approx 45°42′$ $(\pm 13′)$,

ehk $A \approx 45°,7$ $(\pm 0°,2)$.

§ 39. Kolmnurkade lahendamise erilised juhtumid.

Ülesanded kolmnurkade lahendamise eriliste juhtumite kohta, siis kui andmete hulgas on peale külgede ja nurkade veel muid kolmnurgaga seotud suurusi või mõned külgede ja nurkade vahelised seosed, on eriti väärtuslikuks harjutusmaterjaliks kogu õpitud trigonomeetria kursuse kordamisel, sest see sunnib õpilasi mobiliseerima kõik oma teadmised ning seab küsimuse ette, mida on kõige kasulikum rakendada. Keskkoolis ei tule püüda arendada sääraste ülesannete lahendamise mingit teooriat, neid klassifitseerida ning leida üldisi lahendamisviise: on palju muid trigonomeetria rakendusi, mis väärivad tähelepanu, ning kolmnurkade lahendamiseks liigne ajakulutamine ei ole otstarbekohane. Kuid õpetajale endale on säärane üldine teooria, nagu see on, näiteks, läbitöötatud raamatus [V, 35], väga kasulik, sest see võimaldab materjali täieliku valdamise ja hästi orienteeruda ülesannete valikul.

Õppetöös õpilastega on vaja erilist tähelepanu pöörata iga säärase ülesande lahendamise esimesele staadiumile, s. o. analüüsile, kus tehakse kindlaks lahendamise käik, kusjuures õiget teed sageli ei leita korraga, vaid alles pärast mitut ebaõnnestunud katsetamist. On soovitav näidata mõned lahendamise näidised, esmalt täielikult, seejärel piirdudes ainult analüüsiga ja jättes lõpuni lahendamise õpilasile endile, siis juba anda ka analüüs iseseisvalt teostada. On tungivalt soovitav võtta mitte ainult iga säärase ülesande lahendamine arvutamise teel, vaid ka konstruktsiooni teel, ning kõrvutada tulemused.

Toome kolm säärast näidislahendust.

Ülesanne I. Leida kolmnurga kolmas külg, teades, et üks nurk on teisest kaks korda suurem ning nende nurkade vastasküljed on $a = 32$ mm ja $b = 25$ mm.

See ülesanne on (mõnusas lühikeses esituses) N. Rõbkini ülesannete kogus (§ 13, nr. 47). Lahendame ta esmalt üldisel kujul, ja siis juba a ja b antud arvulistel väärtustel.

Võttes $\angle B = x$, saame $\angle A = 2x$. Küljed a ja b ning nende vastasnurgad on seotud siinuste teoreemiga. Rakendades seda teoreemi, saame võrrandi

$$\sin 2x : \sin x = a : b,$$

millest saame

$$\cos x = 0{,}5a : b.$$

Viimast võrrandit rahuldab üks ainus x väärtus, kui $a \leqslant 2b$; kui $a > 2b$, siis lahendeid ei ole; sobib ainult I veerandisse kuuluv x väärtus. Kui x on leitud, siis leiame kõik nurgad ($\angle B = x$, $\angle A = 2x$, $\angle C = \pi - 3x$) ja otsitava külje

$$c = b \sin 3x : \sin x = b(3 - 4\sin^2 x) = \\ = b(4\cos^2 x - 1) = (a^2 - b^2) : b,$$

ning veendume, et lahendi olemasoluks on peale tingimuse $a \leqslant 2b$ veel vajalik tingimus $a > b$. Kumbki neist kahest tingimusest on tarvilik, mõlemad koos aga lahendi olemasolu ja ühesuse piisavaks tingimuseks.

Veendudes, et antud arvulised väärtused $a = 32$ mm ja $b = 25$ mm rahuldavad neid tingimusi, leiame otsitava c arvulise väärtuse.

Graafiline lahendus nõuab lõigu $u = \sqrt{a^2 - b^2}$ ja lõigu $c = u^2 : b$ ehitamist, mis on näidatud joonisel 76. Esmalt on ehitatud täisnurkne kolmnurk BCD kaatetiga $CD = b$ ja hüpotenuusiga $BC = a$ loomulikus suuruses, seejärel on tõmmatud lõik $BE \perp BC$ kuni lõikumiseni CD pikendusega, nii on saadud otsitav lõik $DE = c$ (joonisel osutus $c \approx 15$ mm). Kontrolliks on ehitatud kolme külje järgi kolmnurk ABC ja on mõõdetud (malliga) selle nurgad. Selgus, et nurk $ABC \approx 50°$, nurk $BAC \approx 101°$.

Lahendamine arvutamise teel valemi

$$c = (a + b)(a - b) : b$$

abil annab

$$c = 399 : 25 = (400 - 1) \cdot 4 : 100 = 15{,}96 \text{ mm}.$$

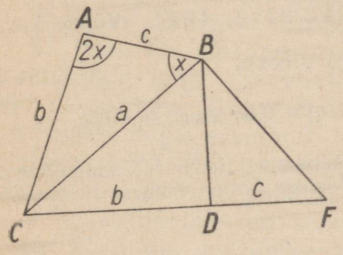
Kontrolliks leiame

$$x = \arccos(0{,}5a : b) = \arccos 0{,}64 \approx 50°12'; \quad 2x \approx 100°24';$$
$$\sin x : b = 0{,}7683 : 25 = 0{,}03073; \quad \sin 2x : a = 0{,}9836 : 32 = 0{,}03074,$$

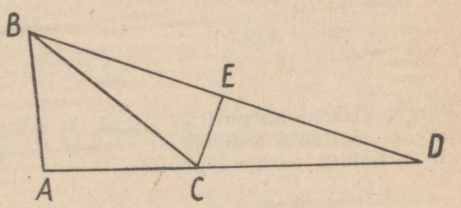
ning võime konstateerida, et tulemused on kooskõlas graafiliselt saadud tulemustega ja ülesande andmetega.

Ülesanne II. Joonisel on antud kaks erineva pikkusega lõiku ja nurk, mis on vähem kui 180°.

1) Nõutakse ehitada kolmnurk ABC, mille külgede summa on võrdne pikema antud lõiguga m, külg c aga on võrdne lühema antud lõiguga ja nurk A on võrdne antud nurgaga.



Joon. 76.



Joon. 77.

2) Leida arvutamise teel a, b, B, C, kui on teada antud lõikude pikkused $m = 14{,}31$ cm ja $c = 5{,}18$ cm ja antud nurga kraadimõõt $A = 102°38'$. Graafiline lahendus on näha joonisel joon. 77, kus $AD = m$, nurk $BAC = A$, $AB = C$. Millimeeterpaberil loomulikus suuruses tehtud jooniselt mõõtmise teel saadud vastus:

$$a \approx 8{,}57 \text{ cm}, \quad b \approx 5{,}77 \text{ cm}, \quad \angle B = 41°{,}1, \quad \angle C = 36°{,}2.$$

Tingimusel, kui $m > c$, on ülesandel üks ainus lahend, sest külje BD keskristsirge mittevõrdhaarses kolmnurgas ABD lõikab alati suuremat haara; $m \leqslant c$ korral lahendeid ei ole, sest kolmnurga kahe külje summa ei saa olla kolmanda küljega võrdne ega sellest vähem.

Lahendamine arvutamise teel. Võttes vaatluse alla ümberringjoone raadiuse R, saame

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C = 2R \sin(A + B);$$
$$a + b = m.$$

Selles süsteemis on 4 võrrandit ja just niisama palju otsitavaid: a, b, B, R. Elimineerides a, b ja R, saame võrrandi

$$(\sin A + \sin B) : \sin(A + B) = m : c,$$

millest

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\frac{m-c}{m+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}A,$$

ning $m>c$ korral leiame üheselt nurga B, seejärel arvutame

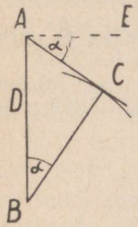
$$C=180^\circ-(A+B),\quad a=c\sin A:\sin C,\quad b=c\sin B:\sin C.$$

Antud arvulistel väärtustel saame:

$$a\approx 8{,}551\text{ cm},\quad b\approx 5{,}765\text{ cm},\quad B\approx 41^\circ 08',$$
$$C\approx 36^\circ 14'.$$

Kontroll: $a+b\approx 14{,}316$ cm (14,31 cm asemel).

Ülesanne III. Tõustes $h\approx 2{,}10$ km kõrgusele selgus, et nähtava vaatepiiri alangunurk sel kõrgusel oli $\alpha=1^\circ 28',5$ (nii nimetatakse nurka vaatleja silma läbiva horisontaaltasapinna ja nähtavale vaatepiirile suunatud kiire vahel). Leida maakera raadius R oletades, et h viga ei ületa 0,005 km ja α viga ei ületa 0′,5.



Joon. 78.

Küsimus taandub täisnurkse kolmnurga kaateti a leidmisele selle antud lähisnurga $A=\alpha$ ning hüpotenuusi c ja kaateti a antud vahe $h=AD$ järgi, sest $\angle ABC=\angle CAE=\alpha$ (joon. 78).

Graafiline lahendamine väga väikese antud α väärtuse korral ei anna mingit tulemust.

Lahendamine arvutamise teel. Võime kirjutada

$$R=(R+h)\cos\alpha,$$

millest

$$R=h\cos\alpha:(1-\cos\alpha)=0{,}5h\cos\alpha:\sin^2 0{,}5\alpha.$$

Pärast väikese nurga $0{,}5\alpha\approx 0^\circ 44',25$ siinuse asendamist tema radiaanmõõduga ja $\cos\alpha\approx 1^\circ 28',5$ asendamist arvuga 1, mis tulemuse kolme esimest tüvenumbrit ei mõjuta, saame lõplikult:

$$R\approx 2h:\operatorname{arc}^2\alpha,$$

kus $\operatorname{arc}\alpha$ on nurga α radiaanmõõt. Sooritame R arvutamise tõkete meetodiga ning saame vastuse:

$$R\approx 6336\ (\pm 90)\text{ km}\quad\text{ehk}\quad R\approx 6300\ (\pm 126)\text{ km}.$$

Niisiis, ülesandes antud andmete järgi maakera raadiuse pikkuseks tuleb ligikaudu 6300 km. Täpsemate meetoditega on kindlaks tehtud, et kaugenedes poolustest ekvaatori poole, maapinna (täpsemalt — ookeani nivoo) kaugus ta tsentrist muutub, kasvades 6356,911 km kuni 6378,388 km. Meie arvutamise tulemused on nende andmetega täiesti kooskõlas.

§ 40. Trigonomeetria muud geomeetrilised rakendused.

Keskkoolis ei piirduta ainult kolmnurkade lahendamisega, vaid lahendatakse mitmesuguseid ülesandeid trigonomeetria rakendamisega geomeetrias, nii tasapinnal kui ka ruumis. See on muidugi väga õige, sest see on parimaks teadmiste kinnistamise vahendiks mõlemas õppeaines. Maksimaalse efekti saavutamiseks peab arvestama järgmisi seisukohti.

1. Peab olema reegliks, et ülesanne tuleb lahendada üldkujul, tähelistel andmetel; siis teostatakse selle üldise lahenduse uurimine, s. o. tingimuste selgitamine, mille puhul ülesanne on lahenduv, kui ka lahendite arvu selgitamine; lõpuks tehakse numbrilised arvutused andmete mõnede eriväärtuste korral. Teisest küljest, ei tohi mööda minna ka tõestamisülesannetest, mis tavaliselt üldse ei nõua numbrilisi arvutusi, kuigi ka siin on soovitav üldiste väidete õigsuse kontrollimine andmete eriväärtustega näidete varal.

2. Koolis prevaleerib arvutamismeetod, graafilist meetodit peetakse mingiks primitiivseks, tähelepanu mitteväärivaks meetodiks, ning seda ei kultiveerita. See on suur viga. Konstruktiivse lahenduse täpsus on ikka ja alati täiesti piisav nendeks praktilisteks eesmärkideks, mille saavutamise pärast ülesannet lahendatakse, kuid selle lihtsus ja näitlikkus ületab peaaegu alati numbrilised arvutused. Peab tegema reegliks alustada alati konstruktiivse lahenduse kui esimese lähendi otsimisega, realiseerida see ja siis alles siirduda lahendamisele arvutamise teel. Peale parema orienteerimise on konstruktiivsel lahendamisel veel see suur paremus, et ta väga suurel määral aitab vältida jämedaid eksimusi ja vigu, mida õpilased nii sageli teevad. Näitlik konstruktiivne lahendamine on väga hea vahend võitluses formalismi vastu ülesannete lahendamisel.

3. Viies iga ülesande lahendamise numbrilise resultaadini, peab arvutustööd igati ratsionaliseerima: peab rakendama mitmesuguseid arvutamise abivahendeid, isegi kõige lihtsamaid ja kättesaadavamaid, nagu arvelaud, kasutama korralikke ja mugavaid üleskirjutusi (skeemide rakendamine!), silmas pidama saadud tulemuste täpsust. Eriti suur abi arvutamisel on tabeleist.

4. Ülesanneteks on soovitav kasutada mitmekülgset materjali, võttes küsimusi astronoomiast, füüsikast, rakendusmehhaanikast, sõjaasjandusest jne., kuid nende valikul peab olema teataval määral ettevaatlik, et mitte liiga palju aega kulutada nende küsimuste erialasele küljele.

5. Erilist tähelepanu väärivad t o p o g r a a f i a (maamõõtmise, geodeesia) küsimused. Igas trigonomeetria õpikus ja igas ülesannete kogus neid küsimusi enam-vähem vaadeldakse («ülesanded maastikul»), kuid koolis tegeldakse nendega üsna harva: ei ole õpetaja nendes alati küllalt orienteeritud ega ole koolis mõõtriistu. Märgime, et seda laadi ülesanded äratavad õpilastes alati suurt huvi, ja on seega väga heaks vahendiks trigonomeetria õpetamise paremustamisel.

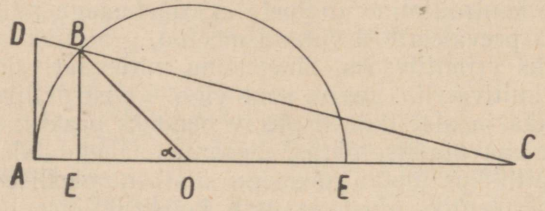
Kõige ülalöeldu illustreerimiseks vaatleme mõnd näidisülesannet trigonomeetria rakendamiseks geomeetrias.

Ü l e s a n n e I. Ringjoone kaare ligikaudseks sirgestamiseks kasutatakse võtet, mis seisab kaare AB (vt. joon. 79) asendamises puutepunkti A ja lõikaja BC vahelise puutuja lõiguga AD, kusjuures lõikaja BC läbib diameetri AE pikendusel asuvat punkti C, mis keskpunktist O asub diameetri kaugusel, nii et $AC = 3r$. On tõestatud, et AD erineb väga vähe kaare AB pikkusest, seejuures seda vähem, mida vähem on selle kaare radiaan- või kraadimõõt [III, 30-a].

Kontrollida seda väidet, arvutades AD pikkuse kaare AB väärtuste korral

$$\alpha = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8 \text{ ja } 1{,}0 \text{ radiaani.}$$

Lahendus. Tõmmates $BF \perp AC$, saame $AD : BF = AC : FC$, millest $AD = 3r \sin\alpha : (2 + \cos\alpha)$. Arvutame suhte $AD : r$ väärtused, mis sõltuvad ainult α väärtustest, ning võrdleme tulemusi suhte $\widehat{AB} : r = \alpha$ vastavate väärtustega



Joon. 79.

$\alpha = \widehat{AB} : r$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
α°	11°28′	22°55′	34°23′	45°50′	57°18′
$2 + \cos\alpha$	2,9801	2,9211	2,8253	2,6968	2,5402
lg 3	0,4771	0,4771	0,4771	0,4771	0,4771
lg sin α	$\bar{1}$,2984	$\bar{1}$,5904	$\bar{1}$,7518	$\bar{1}$,8557	$\bar{1}$,9251
$-\lg(2 + \cos\alpha)$	$\bar{1}$,5258	$\bar{1}$,5345	$\bar{1}$,5490	$\bar{1}$,5691	$\bar{1}$,5952
$\lg(AD : r)$	$\bar{1}$,3013	$\bar{1}$,6020	$\bar{1}$,7779	$\bar{1}$,9019	$\bar{1}$,9974
$AD : r$	0,2001	0,3999	0,5997	0,7978	0,9940
$(\widehat{AB} - AD) : r$	− 0,0001	+ 0,0001	0,0003	0,0022	0,0060

Viimase rea arvud ei ole täiesti usaldatavad: neid mõjutavad tabelist võetud väärtuste ebatäpsused. Kui arvutused teha 5-kohaliste tabelite järgi, siis oleksime saanud niisugused tulemused:

$\alpha = \widehat{AB} : r$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\beta = AD : r$	0,20000	0,39994	0,59955	0,79805	0,99373
$\alpha - \beta$	0,00000	0,00006	0,00045	0,00195	0,00627
$100(\alpha - \beta) : \alpha$	0%	0,015%	0,075%	0,248%	0,627%

Nagu näeme, mida vähem on α, seda vähem on mitte ainult vahe $\alpha - \beta$ absoluutväärtus, vaid ka selle vahe ja α suhte väärtus protsentides.

Ülesanne II. Moskva—Leningradi raudtee pikkus on 650 km. Oletades, et see raudtee kulgeb täpselt maakera suurringjoone kaart AB mööda, mis tegelikkusele on üsna lähedal, leida, kui palju lüheneb tee pikkus, kui A ja B ühendada sirgjoonelise tunneliga, ning arvutada selle tunneli suurim sügavus maapinnast. Maakera raadius R võtta 6400 km.

Graafiline lahendamine ei anna siin mitte midagi, sest joonisel kõõl ja kaar langevad ühte.

Lahendus arvutamise teel. Ringjoone kaarele s km vastab raadiuse korral R km kesknurk $\alpha = s:R$ radiaanides. Vastava kõõlu pikkus on $l = 2R \sin 0{,}5\alpha$. Niisugune on tunneli AB pikkus. Ta suurim sügavus maapinnast on $h = R - R\cos 0{,}5\alpha = 2R \sin^2 0{,}25\alpha$. Kui $s = 650$ km, $R = 6400$ km, saame $\alpha = 0{,}1016$ radiaani ehk 5°49′, $l = 649$ km, kus viimane number, kui 4-kohaliste tabelite järgi leitud tulemuse neljas tüvenumber, ei ole usaldatav, seetõttu vahe $s - l \approx 0{,}6$ km on leitud väga ebatäpselt. Et see vahe oleks täpsem, peab kasutama kas täpsemaid tabeleid või ligikaudset valemit $\sin\alpha \approx \alpha - \alpha^3 : 6$. Viimane annab $s - l = s^3 : (24R^2)$ ehk pärast arvutamist 4-kohaliste tabelite järgi: $s - l \approx 0{,}279$ km, kusjuures selle tulemuse kõigi numbrite täpsuse eest võib vastutada.

Sügavuse väärtus

$$h = 2R \sin^2 0{,}25\alpha \approx S^2 : (8R),$$

tuleb 8,252 km.

Niisiis, sirgjoonelise tunneli ehitamine lühendab Moskva ja Leningradi vahelist teed kõigest 279 m võrra; tunneli suurim sügavus maapinnast on 8,25 km.

Ülesanne III. Teades ringjoone sisse joonestatud kõõlnelinurga $ABCD$ külgi a, b, c, d, leida ta nurgad A, B, C, D, diagonaalid AC ja BD, pindala S ja ümberringjoone raadius R.

Jättes arutamata lahenduse üksikasjad, märgime ainult, et lihtsaim on alustada nii, et ühe diagonaali avaldame kahel viisil laiendatud Pythagorase teoreemi põhjal. Siit saame avaldada nurga koosinuse külgede kaudu, ja nimelt:

$$\cos A = 0{,}5(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) : (ad + bc),$$

saame veel mugavama valemi:

$$\operatorname{tg}^2 0{,}5A = (p - a)(p - d) : [(p - b)(p - c)],$$

kus $2p = a + b + c + d$.

Diagonaalide ruutude jaoks saame valemid:

$$AC^2 = (ad + bc)(ac + bd) : (ab + cd)$$

ja

$$BD^2 = (ab + cd)(ac + bd) : (ad + bc).$$

Pindala S määrab valem

$$S = 0{,}5(ad + bc)\sin A = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

Lõpuks

$$R = \sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) : (4S)}.$$

Ringi sisse joonestatud niisuguse kõõlnelinurga olemasoluks, mille küljed on a, b, c, d, nagu kerge näidata, on tarvilik ning piisav, et ta suurim külg oleks vähem kui kolme ülejäänud külje summa.

§ 41. Trigonomeetria ja algebra.

Vaevalt on võimalik nimetada niisugust matemaatilist distsipliini, kus ühel või teisel viisil ei esineks trigonomeetria rakendamist. Erakordselt rikkad ja mitmekülgsed on ta rakendused ka niisugustes teaduse harudes, nagu mehhaanika, füüsika, astronoomia, topograafia jne. Trigonomeetria koolikursus ei pea sääraseid õpilastele jõukohaseid lihtsamaid rakendamise juhtumeid ignoreerima. Vaatleme mõnd säärast rakendamist, alates algebrast.

Õppides algebras kompleksarve, ei saa mööda minna nende trigonomeetrilisest kujust ja eeskätt trigonomeetrilisest kujust

algebralisele kujule ülemineku ülesandest, mis viib $x = r\cos\alpha$ ja $y = r\sin\alpha$ arvutamisele antud r ja α järgi, mis ei tekita raskusi, kui ka ümberpöördud ülemineku ülesandest, s. o. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\alpha = \operatorname{arctg}(y : x)$ arvutamisest, mis kulgeb juba vähem ladusalt seoses veerandi valikuga. Need raskused on täiesti kõrvaldatavad, kui pidevalt nõuda eelnevat, kasvõi jämedatki, graafilist lahendamist. Praegu kehtiv programm sellega piirdubki, kuid päevakorras on ka trigonomeetrilises kujus antud kompleksarvudega tehete keskkooli kursusse lülitamine, kaasa arvatud Moivre'i [muaavr] valem, mis otseselt järeldub kompleksarvude korrutise definitsioonist ning annab kergesti mis tahes astme kaheliikmelise võrrandi üldise lahenduse. Märgime ära ka selle abi, mida trigonomeetria omakorda saab algebralt valemite tuletamisel $\sin mx$ ja $\cos mx$ avaldamiseks $\sin x$ ja $\cos x$ kaudu igasuguse naturaalarvulise m korral: võrreldes $(\cos x + i\sin x)^m$ kaht avaldist, mis saadakse Moivre'i valemi järgi ja Newtoni binoomvalemi järgi, saame pärast reaalosa ja puhtimaginaarosa eraldamist kaks valemit:

$$\cos mx = \cos^m x - C_m^{(2)}\cos^{m-2}x\sin^2 x + C_m^{(4)}\cos^{m-4}x\sin^4 x - \ldots,$$

$$\sin mx = C_m^{(1)}\cos^{m-1}x\sin x - C_m^{(3)}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \ldots,$$

mis $m = 2$ ja $m = 3$ korral annavad kahekordse ja kolmekordse kaare siinuse ja koosinuse jaoks tuntud avaldised.

Märgime veel trigonomeetria rakendamist mitmekohaliste kordajatega ruutvõrrandi lahendamiseks, mis on abinurga võtte kasutamise suurepäraseks näiteks. Detaile võib leida Prževalski trigonomeetria ülesannete kogus j. m.

§ 42. Trigonomeetria rakendused mehhaanikas ja füüsikas.

On üks mehhaanika küsimus, mida õpitakse keskkoolis füüsika kursuses, see on küsimus harmoonilisest võnkliikumisest, mis väärib tähelepanelikku vaatlemist trigonomeetrias. Küsimus taandub trigonomeetrilise funktsiooni

$$y = a\sin(kx + \varphi)$$

uurimisele, mille erijuhtumeiks on funktsioonid

$$\sin x,\ \cos x,\ a\sin x,\ \sin kx,\ \sin(x + \varphi)\ \text{jne.}$$

järjest kuni

$$a\sin x + b\cos x.$$

Peab selgitama geomeetrilist mõtet, mis on kordajal a (võnkumise «amplituud»), kordajal k (mis määrab «perioodi»), liidetaval φ («algfaas»). Siin on meil tegemist rikkaliku ideelise sisuga ja X klassi õpilastele täiesti jõukohase matemaatilise küsimusega, millel füüsikas ja mehhaanikas on esmajärguline tähtsus, millega väärib trigonomeetria kursus keskkoolis lõpetada. Ta on küllaldase üksikasjalikkusega vaadeldud Bermanti ja Ljusterniki trigonomeetria õpikus. Selle üksikasjalik metoodiline käsitlus leidub artiklis

[V, 10]. Juhatades lugejale seda kirjandust, märgime seda suurt huvi, mida äratab teoreem ühe perioodi harmooniliste võnkliikumiste liitmisest, s. o. teoreem võimalusest igasugune avaldis $a_1 \sin(kx + \varphi_1) + a_2 \sin(kx + \varphi_2)$ taandada kujule

$$y = a \sin(kx + \varphi)$$

tingimusel, et seda teoreemi õpetatakse metoodiliselt õigesti. Kõige parem on, kui ta «avastatakse» õpilaste endi poolt; näiteks, saades ülesande joonestada funktsiooni $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ graafik punktide järgi, märkavad õpilased hämmastusega, et y-telje sihis väljavenitatud kahe kõverjoone (sinusoidi ja kosinusoidi) liitmise tulemuseks saadakse jällegi sinusoid, mis ka on samas sihis venitatud ning X-telje suunas nihutatud, ning hakkavad sellele faktile seletust otsima.

Teistest trigonomeetria rakendustest mehhaanikas väärivad erilist tähelepanu jõudude liitmise ja lahutamise küsimused. Palju sääraseid ülesandeid leidub füüsika ülesannete kogudes ja ka mõnes trigonomeetria ülesannete kogus (näiteks, vanas Vereštšagini ülesannete kogus). Neid ülesandeid on kerge koostada, nad on väga näitlikud, on nii graafiliselt kui ka analüütiliselt lahendatavad, võivad olla väga erineva raskusega, äratavad õpilastes suurt huvi, ergutavad kergesti teostatavate katsete sooritamisele, mille abil saab kontrollida arvutuste õigsust. Siin algab juba matemaatika ja füüsika õpetaja koostöö, mis on alati väga viljakas mõlemale distsipliinile. Piirdume ühe näitega.

Antud on niit pikkusega $3a$; selle otsad on kinnitatud kahes horisontaalsel sirgjoonel asuvas punktis, mis teineteisest on kaugusel $b\,(b < 3a)$. Niidi külge on kinnitatud koorem P ühest otspunktist kaugusel a ja teisest otspunktist samal kaugusel kahekordne koorem $2P$. Leida nurgad, mille moodustavad tekkinud murdjoone lülid («niithulknurga» nurgad).

Trigonomeetriat kasutatakse rohkesti füüsika õppimisel, näiteks optikas (valguse murdumine, täielik sisepeegeldus j. m.). Matemaatika õpetaja peab olema huvitatud sellest, millega tegeldakse füüsika õppimisel, peab võtma ja süvendama seal puudutatud matemaatilisi küsimusi. Kui kasulik on, näiteks, vaadelda võrrandit

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

mis seob langemisnurka α, murdumisnurka β ja murdumisnäitajat n valguskiire üleminekul tühjusest mingisse keskkonda, võttes otsitavaks järgemööda igaühe kolmest suurusest α, β, n, ning uurida selle võrrandi lahendamise võimalikkust!

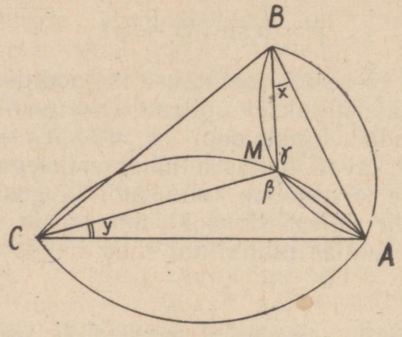
§ 43. Trigonomeetria, topograafia, astronoomia.

Eespool juba märkisime, kuidas trigonomeetria käsitlemisele koolis on kasulik, kui seda siduda topograafia (maamõõtmise, geodeesia) küsimustega, eriti trigonomeetria algkursuse käsitlemisel. Kuid ka edaspidisel trigonomeetria käsitlemisel on tulus kasutada rida ülesandeid, mida püstitab ja lahendab topograafia. Vaatleme üht kuulsaimat — «Potenot' ülesannet».

Ülesanne. On teada mingi kolmnurga ABC küljed ja nurgad, ka nurgad γ ja β, milles küljed $c = AB$ ja $b = CA$ on näha mingis seesmises punktis M. Leida lõigud AM, BM, CM (joon. 80). Nurgad β ja γ on suuruselt 0 ja π vahel.

Graafiline lahendamine. Joonestades kolmnurga ABC ehitame geomeetrilise koha punktile, millest antud lõik AB on näha antud nurgas γ, samuti geomeetrilise koha punktile, millest antud lõik AC on näha antud

nurgas β. Kaks kaart, mis moodustavad esimese geomeetrilise koha, ja kaks kaart, mis moodustavad teise geomeetrilise koha, ei saa lõikuda rohkemas kui ühes punktis M kolmnurga ABC sees (tõestada!). Kui konstruktsioon on teostatud, jääb ainult ära mõõta lõigud AM, BM, CM.



Joon. 80.

Lahendamine arvutamise teel. Hakkame otsima nurki $x = ABM$ ja $y = ACM$, sest teades neid nurki on kolmnurkadest ABM ja ACM kerge määrata ka lõigud AM, BM ja CM. Rakendades siinuste teoreemi ja teoreemi nelinurga sisenurkade summast, saame kaks võrrandit:

$$\sin x : \sin y = b \sin \gamma : c \sin \beta,$$
$$x + y = 2\pi - (A + \beta + \gamma) = 2\delta,$$

millest järeldame:

$$(\sin x - \sin y) : (\sin x + \sin y) = (b \sin \gamma - c \sin \beta) : (b \sin \gamma + c \sin \beta) = k,$$

$$\operatorname{tg} 0{,}5(x - y) = k \operatorname{tg} \delta, \quad x - y = 2\varepsilon$$

ja lõpuks saame:

$$x = \delta + \varepsilon, \quad y = \delta - \varepsilon.$$

Et selle ülesande lahendamine oleks võimalik, peab olema täidetud tingimus $x + y > 0$, s. o. $A + B + \gamma < 2\pi$. Oletades, et see tingimus on täidetud, ning tähele pannes, et $\pi < \beta + \gamma < 2\pi$, sest eelduse järgi punkt M asub kolmnurga ABC sees, järeldame, et $0 < \delta < 0{,}5\pi$. Kui $b \sin \gamma < c \sin \beta$, siis vahetame külgede b ja c ning nurkade β ja γ tähiste kohad, seetõttu võib arvestada, et $b \sin \gamma \geqslant c \sin \beta$ ja, järelikult, $0 \leqslant k < 1$. Mõlemad nurgad $0{,}5x$ ja $0{,}5y$ on vähemad kui $0{,}5\pi$, ja nende vahe ε ei ole negatiivne, ning on ka vähem kui $0{,}5\pi$ (ta on isegi vähem kui δ), nurgad x ja y on määratud üheselt. Ülesandel ei ole rohkem kui üks lahendus: üks lahendus on siis, kui selgub, et $x < B$ ja $y < C$, seega kui punkt M asub kolmnurga ABC sees, lahendust ei ole, kui $x \geqslant B$ või $y \geqslant C$, seega kui punkt M asub kolmnurga ABC kontuuril või sellest kolmnurgast väljaspool.

Ülesanne läheb raskemaks, aga ka palju huvitavamaks, kui loobuda nõudest, et punkt M asub kolmnurga ABC sees. Siis on võimalik, näiteks, määramatuse juhtum, sest võib olla, et $b \sin \gamma = c \sin \beta$ ja $\delta = 0{,}5\pi$, siis kaared AMB ja AMC kuuluvad ühele ja samale ringjoonele, mis on kolmnurga ABC ümberringjooneks, ning punkt M on selle ringjoone mis tahes punkt. Seda ülesannet käsitletakse üksikasjaliselt igas topograafia kursuses.

Vaadeldud ülesannet võib soovitada kasutada trigonomeetria käsitlemisel kui praktilist topograafia ülesannet. Kolmnurk ABC võetakse maastikul, kasvõi klassitoa põrandal, ta elemendid A, b ja c määratakse otsese mõõtmise teel; siis võetakse meelevaldne seesmine punkt M, kuulutades ta ligipääsmatuks, nurgad β ja γ mõõdetakse otseselt. Teostatakse lõikude AM, BM, CM pikkuste

arvutamine eespool näidatud valemite järgi ning lõpuks kontrollitakse tulemusi nende lõikude otsese mõõtmise teel, millal punkti M ei loeta enam ligipääsematuks.

Igas astronoomia õpikus leidub suur hulk (mitmesuguse raskusega) ülesandeid trigonomeetria rakendamise kohta astronoomias. Kuid astronoomia ei kasuta niipalju tasapinnalist kui sfäärilist trigonomeetriat. Sfäärilise trigonomeetria elementide tundmaõppimist võib soovitada suurepärase materjalina matemaatika ringile. Allikaks võib võtta mõne õpiku, näiteks, arusaadavalt kirjutatud ja palju rakendusi sisaldava õpiku [V, 12], või täielikuma õpiku [V, 29]. Palju õpetlikku sfäärilise trigonomeetria alalt leidub Weberi ja Wellsteini «Elementaarmatemaatika entsüklopeedias». Tähtsaimate valemite tuletamine on paljudes astronoomia õpikutes, näiteks [V, 21].

Sfäärilise trigonomeetria elementide tundmine võimaldab peale väga paljude astronoomiliste ülesannete lahendamise lahendada kergesti ka mitmesuguseid stereomeetrilisi ülesandeid, mida tasapinnalise trigonomeetria abil ei saa lahendada või on raske lahendada.

Teatava ettekujutuse trigonomeetria mitmekülgsest rakendamisest teaduse ja tehnika mitmes harus annab raamat [V, 22]. See väga lihtsalt kirjutatud VIII—IX klassi õpilastele täiesti jõukohane raamat sisaldab tasapinnalise trigonomeetria põhimõistete lühikese käsitluse, kui ka teaduse ja tehnika mitmest valdkonnast hulga ülesannete üksikasjalisi lahendusi, mis nõuavad trigonomeetria rakendamist. Soovitame väga seda raamatut igale õpetajale, kes tegeleb trigonomeetria õpetamisega.

I OSA KÜSIMUSTE JUURDE KUULUVATE DOKUMENTIDE, RAAMATUTE JA ARTIKLITE REGISTER.

1. Программы средней школы. «Математика». Утверждена Министерством просвещения РСФСР. Учпедгиз, 1949 и 1950 гг.

2. О преподавании математики в семилетней и средней школе. Методические указания Министерства просвещения РСФСР. Учпедгиз, 1947.

3. Положение и инструкции о переводных и выпускных экзаменах в начальной, семилетней и средней школах и экзаменах на аттестат зрелости, Учпедгиз, 1950.

4. Планирование работы в школе. Указания Управления школ Министерства просвещения РСФСР, Учпедгиз, 1950.

5. Нормы оценки успеваемости учащихся V—X классов средней школы по математике, Учпедгиз, 1948.

6. Домашние задания по математике и физике. Методическое письмо Управления школ Министерства просвещения РСФСР, Учпедгиз, 1951.

7. О повторении учебного материала в школе. Методическое письмо, изд. 2-е, Управление школ Министерства просвещения РСФСР, Учпедгиз, 1947.

8. Методика преподавания математики. Программы и методические указания для заочников педагогических и учительских институтов. Управление высшей школы НКП РСФСР, Научно-методический кабинет по заочному обучению учителей Учпедгиз, 1945. Автор методических указаний — доцент Зерчанинов Н. Т., редактор — проф. Перепёлкин Д. И.

Имеется обширная библиография.

9. Программы средней школы. Математика (V — X классы). Проект для обсуждения, изд. Академии педагогических наук РСФСР, М., 1953.

10. Андронов И. К., А. П. Киселёв (некролог), «Математика в школе». 1941, № 2.

11. Барыбин К. С. и Исаков А. К., Сборник задач по математике. Пособие для учителей VIII—X классов, Учпедгиз, 1952.

12. Беллюстин В. К., Как постепенно люди дошли до настоящей арифметики, Госиздат, 1922.

13. Библиотека математического кружка. Серия книг, выпускаемых Государственным издательством технико-теоретической литературы (ГТТИ) для учащихся средней школы, интересующихся более глубоким изучением математики. Вышли выпуски 1, 2, 4, 6 (1950—1952).

14. Бобынин В. В., Очерки по истории развития физико-математических знаний в России в XVII в., ч. 1 и 2, Москва, 1886—1893.

15. Брадис В. М. и Харчева А. К., Ошибки в математических рассуждениях. «Библиотека учителя средней школы», серия математическая, Учпедгиз, 1938.

16. Брадис В. М., Воспитание логических навыков при изучении математики, «Математика в школе», 1953, № 1.

17. Валецкий Г., Вопросы элементарной математики, Госиздат, 1926.

18. Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. I и II, Одесса, 1906—1910.

19. Воронец А. М., Очерки по методике математики в школах первой ступени, «Работник просвещения», изд. 5, 1928.
Имеется обширная и весьма тщательно составленная библиография.
20. Выгодский М. Я., Справочник по элементарной математике, ГТТИ, 1950.
21. Гатлих А., А. Ю. Давидов, «Математическое образование», 1912.
22. Гнеденко Б. В., а) Краткие беседы о зарождении и развитии математики, АПН РСФСР, 1946; в) Очерки по истории математики в России, Гостехиздат, 1946, изд. 2, ГТТИ, 1950.
23. Градштейн И. С., Прямая и обратная теорема.
24. Депман И. Я., а) Леонтий Филиппович Магницкий, «Математика в школе», 1940, № 5; в) Из истории математики. В помощь школьнику, Детгиз, 1950.
25. Зыкус А. И., Пути повышения успеваемости по математике в V—VII классах. Учпедгиз, 1952. Серия «Опыт передового учителя».
26. Игнатьев В. А., Пономарёв С. А., Обуховская Е. Н., Сборник задач и упражнений для устных занятий по математике. Пособие для учителей средней школы, Учпедгиз, 1952.
27. Игнатьев Е. И., В царстве смекалки, или арифметика для всех. Книга для семьи и школы. Книга 1, 2, 3, Госиздат, М., 1923.
28. Клейн Феликс, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I и II, ОНТИ, 1934.
29. Калашников А. Г., редактор, Вопросы политехнического обучения в школе, изд. Академии педагогических наук, 1953, Сборник статей.
30. Колмогоров А. Н., а) Математика (статья в т. 38 Большой советской энциклопедии, изд. 1; в) статьи: «Аксиома», «Алгебра в школе», «Величина» в т. I, II, VII Большой советской энциклопедии, изд. 2.
31. Компанийц П. А., О сознательности знаний учащихся по математике, Учпедгиз, 1953. Серия «Опыт передового учителя».
32. Крылов А. Н., Прикладная математика и её значение для техники, АН СССР, 1931.
33. Ланков А. В., а) К истории вопроса о реформе преподавания математики. «Математика в школе», 1949, № 6; в) К истории развития передовых идей в русской методике математики. Пособие для учителей. Учпедгиз, 1951.
34. Лурье С. Я., Архимед, АН СССР, 1945.
35. Ляпин С. Е., редактор, а) Учёные записки Ленинградского государственного педагогического института имени А. И. Герцена, т. 75, 1948. Кафедра методики математики (сборник статей); в) Методика преподавания математики. Пособие для учительских институтов. Авторы: Крельштейн Б. И., Гастева С. А., Шидловская М. М., Ляпин С. Е. и др.
36. Маргулис А. Я., Андрей Петрович Киселёв, «Математика в школе», 1948, № 4.
37. Маркушевич А. И., а) О математической литературе для учителя средней школы, «Математика в школе», 1947, № 1; в) О повышении идейно-теоретического уровня преподавания математики в средней школе. «Математика в школе», 1950, № 1.
38. Моденов П. С., Сборник конкурсных задач по математике с анализом ошибок, «Советская наука», М., 1950.
39. Нагибин Ф. Ф. и др., Опыт работы по математике в средней школе. Сборник статей, изд. Академии педагогических наук, 1949.
40. Никитин Н. Н., а) Преподавание математики в советской школе в 1917—1947 гг., «Математика в школе», 1947, № 5; в) «Из опыта работы передовых учителей математики». Издательство АПН РСФСР, 1950.
41. Опыт передового учителя. Из опыта работы учителей математики, не имеющих второгодников. Сборник статей Михайлова Г. А. и др., Учпедгиз, 1952.
42. Перельман Я. И., а) Живая математика. Гостехиздат, 1946; в) Занимательная арифметика, изд. «Время», 1932; с) Занимательная алгебра. ГТТИ, 1949 г.; d) Занимательная геометрия, ГТТИ, 1950 и др.
43. Пономарёв С. А., а) О коммунистическом воспитании на уроках

математики, «Математика в школе», 1951, № 3; в) К вопросу о политехническом обучении в преподавании математики, «Математика в школе», 1953, № 3.

44. Попов Г. Н., а) Сборник исторических задач по элементарной математике. ОНТИ, 1938; в) Памятника математической старины в задачах, ГИЗ, 1929.

45. Популярные лекции по математике. Серия брошюр, рассматривающих отдельные вопросы математики, выходящие за рамки школьного курса, но изложенные доступно для учащихся старших классов. Вышло 10 выпусков (1950—1952).

46. Прудников В. Е., Первый русский арифметик и геометр. К 250-летию со дня публикации «Арифметики» Л. Ф. Магницкого, «Математика в школе», 1953, № 2.

47. Рademахер Г. и Теплиц О., Числа и фигуры, ОНТИ, 1936.

48. Рупейко З., Критика как метод опроса и учёта знаний, «Математика в школе», 1953, № 6.

49. Рыбкин Г. Ф. и Юшкевич А. П., редактор, Историко-математические исследования, вып. I—V, ГТТИ, 1948—1952.

50. Сергеев Я. Из окна вагона, изд. Дома занимательной науки, Ленинград, 1940.

51. Хинчин А. Я., а) Основные понятия математики и математические определения в средней школе. Учпедгиз, 1940; в) О формализме в школьном преподавании математики, «Известия АПН РСФСР», вып. 4, 1946.

52. Фетисов А. И., Шевченко И. Н., Гончаров В. Л., Гибш И. А., Преподавание математики в школе в свете задач политехнического обучения, Академия педагогических наук, 1953.

53. Четверухин Н. Ф., О научных принципах преподавания геометрии в советской школе, «Математика в школе», 1950, № 1.

54. Чуканцов С. М., Статьи в журнале «Математика в школе»: a) Научить учиться (1938, № 5); в) К вопросу о политехническом воспитании учащихся (1939, № 6); c) Ближе к практике (1940, № 45); d) Задачи с конкретным содержанием (1940, № 2); e) Мой опыт борьбы с формализмом в преподавании математики (1941, № 2); f) О воспитании у учащихся чувства советского патриотизма и советской национальной гордости в связи с изучением математики в средней школе (1948, № 6).

55. Штейнгауз Г., Математический калейдоскоп, ГТТИ, 1949.

56. Шереметевский В. П., Очерки по истории математики, Учпедгиз, 1940.

57. Цейтен Г. Г., История математики в древности и в средние века. ГТТИ, 1932; История математики в XVI и XVII вв., ГТТИ, 1933.

58. Энциклопедия элементарной математики. Книги 1, 2, 3, ГТТИ, 1951—1952.

59. Юшкевич А. Н., а) Математика и её преподавание в России XVII—XVIII вв., «Математика в школе», 1947 и 1948.

в) Юшкевич А. П., Математика народов Средней Азии в IX—XV вв. Историко-математические исследования, вып. IV, ГТТИ, 1951.

60. Благовещенский Н. И., О книге В. М. Брадиса «Методика преподавания математики в средней школе», «Математика в школе», 1951, № 3.

61. Розенфельд Б. А., Математические трактаты Омара Хайяма (перевод с арабского). Историко-математические исследования, вып. VI, ГТТИ, 1953.

II OSA KÜSIMUSTE JUURDE KUULUVATE RAAMATUTE JA ARTIKLITE REGISTER.

1. Александров И. И. и Александров А. И., Методы решения арифметических задач, под редакцией И. К. Андронова, Учпедгиз, 1953.

2. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Свойства неравенств и понятие о приближённых вычислениях, «Математика в школе», 1941, № 2.

3. Андронов И. К., Арифметика натуральных чисел. Учпедгиз, 1953.

4. Андронов И. К. и Брадис В. М., Величина и её значение. «Математика в школе», 1951, № 2.

5. Арнольд И. В., а) Теоретическая арифметика, Учпедгиз, 1938; в) Теория чисел, Учпедгиз, 1939; с) Принципы отбора и составления арифметических задач, «Известия Академии педагогических наук РСФСР», 1946, вып. 6; d) Арифметика. Статья в III томе Большой советской энциклопедии, изд. 2.

6. Архимед, Исчисление песчинок (псаммит). Перевод, краткий обзор работ Архимеда и примечания проф. Попова Г. Н., ГТТИ, 1932.

7. Барсуков А. Н., К вопросу о порядке действий, «Математика в школе», 1941, № 3.

8. Белоновский П. Д., Основы теоретической арифметики, Учпедгиз, 1933.

9. Березанская Е. С., Методика арифметики, Учпедгиз, 1947.

10. Берман Г. Н., а) Счёт и число, Гостехиздат, 1949, издание третье; в) Число и наука о нём. Общедоступные очерки по арифметике натуральных чисел, Огиз, Гостехиздат, 1949; с) Приёмы счёта, Огиз, Гостехиздат, 1950.

11. Борель Э., Арифметика. Первый цикл, перевод Ал. Долгова под ред. Д. Л. Волковского, Госиздат, 1923.

12. Брадис В. М., а) Теория и практика вычислений, Учпедгиз, 1937; в) Средства и способы элементарных вычислений. Изд. Академии педагогических наук РСФСР, 1948.

13. Верещагин И., Сборник арифметических задач для средних учебных заведений мужских и женских. Ряд изданий XIX и начала XX вв.

14. Выгодский М. Я., Арифметика и алгебра в древнем мире, Гостехиздат, 1941.

15. Гончаров В. Л., а) Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика, «Известия Академии педагогических наук РСФСР», вып. 6, 1946; в) Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика в средних классах школы, изд. АПН РСФСР, 1947; с) Вычислительные и графические упражнения с функциональным содержанием в старших классах школы, изд. АПН РСФСР, 1948.

16. Гребенча М. К., К вопросу о понятии отношения в курсе арифметики. «Математика в школе», 1949, № 2.

17. Гребенча М. К. и Ляпин С. Е., Арифметика. Пособие для учительских институтов. Учпедгиз, 1952.

18. Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, АН СССР, 1947.

19. Депман И. Я., Меры и метрическая система. Детгиз, 1953.

20. Зайцева Н. Я., Планы уроков по арифметике в V классе. Учпедгиз, 1952.

21. Зайцева Н. Я., Зыкус А. И., Эрастова А. Н., Методические указания к преподаванию арифметики в V классе (из опыта работы). Изд. АПН РСФСР, 1953.

22. Игнатьев Е. И., Математическая хрестоматия, кн. I. Арифметика, изд. Сытина, Москва, 1913.

23. Кавун И. Н., Арифметические задачи в начальной школе. Учпедгиз, 1935.

24. Компанийц П. А., Очерки по методике преподавания математики в I—IV классах школы. Ленинградский гор. институт усовершенствования учителей, 1940.

25. Корницкий Н. Д., Производственные вопросы и задачи прикладной арифметики, ч. I (Целые числа. Десятичные дроби), Гиз, 1924; ч. 2 (Обыкновенные дроби. Арифметические правила. Технические приложения), Гиз, 1926.

26. Круповецкий Л., а) Задачи из современной жизни, «Математика в школе», 1939, № 1; в) Итоги послевоенной сталинской пятилетки на уроках арифметики, «Математика в школе», 1952, № 3.

27. Лобко П., Из истории установления метрических мер, «Математика и физика в средней школе», 1934, № 1.

28. Никитин Н. Н., а) Решение арифметических задач в начальной

школе. Учпедгиз, 1948; в) Устные вычисления на уроках арифметики в V—VII классах средней школы. АПН РСФСР, 1950.

29. Перельман Я. И., а) Быстрый счёт, изд. Дома занимательной науки, Ленинград, 1941; в) Арифметические ребусы, изд. там же, 1941; с) Хрестоматия-задачник по начальной математике. Гиз, 1925; d) Занимательная арифметика, изд. «Время», Ленинград, 1932.

30. Полак И. Ф., Время и календарь. Научно-популярная библиотека Гостехиздата, 1947.

31. Пономарёв С. А. и Сырнев Н. И., Сборник задач и упражнений по арифметике, 1954.

32. Тулинов Б. А. и Чекмарёв Я. Ф., Арифметика для педагогических училищ, Учпедгиз, 1953.

33. Филиппов А. О., Четыре арифметических действия. Числа натуральные. Изд. «Матезис», 1909.

34. Филичев С. В. и Чекмарёв Я. Ф., Сборник задач и упражнений по арифметике для V и VI классов неполной средней и средней школы. Учпедгиз, 1949.

35. Хинчин А. Я., О понятии отношения двух чисел, «Математика в школе», 1941, № 2.

36. Циглер Ф. Т., Арифметика. Общий курс математики для рабфаков и техникумов, ч. I, Учпедгиз. 1932.

37. Чекмарёв Я. Ф. и Филичев С. В., Сборник арифметических задач для педагогических училищ, изд. 4-е, Учпедгиз, 1945.

38. Чекмарёв Я. Ф. и Эменов В. Л., Сборник арифметических задач и упражнений для устного счёта. Пособие для учителей III и IV классов начальной школы. Учпедгиз, 1945.

39. Чичигин В. Г., Методика преподавания арифметики. Пособие для учительских институтов. Учпедгиз, 1949.

40. Широков В. Ф., Сборник арифметических задач на соображение. Пособие для учителей средних школ. Учпедгиз, 1949.

41. Шнирельман Л. Г., Простые числа, Гостехиздат, 1940.

42. Шор А. Я., О решении арифметических задач. Изд. АПН, 1951.

43. Шохор-Троцкий С. И., Методика арифметики. Пособие для учителей средней школы, Учпедгиз, 1935.

44. Азия А. П., К вопросу об элементах политехнизма на уроках математики. «Математика в школе», № 1 за 1954 г.

III OSA KÜSIMUSTE JUURDE KUULUVATE RAAMATUTE JA ARTIKLITE REGISTER.

1. Абельсон И. Б., Рождение логарифмов, Огиз, Гостехиздат, 1948.

2. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., а) Алгебра. Пособие для средних школ, ч. I, Учпедгиз, 1940; в) Свойства неравенств и понятие о приближённых вычислениях, «Математика в школе», 1941, № 2; с) Иррациональные числа, «Математика в школе», 1941, № 3.

3. Александров П. С. Научное содержание школьного курса алгебры, «Математика в школе», 1946, № 4—6 .

4. Арнольд И. В. а) Теория чисел, Учпедгиз, 1939; в) Отрицательные числа в курсе алгебры, изд. АПН РСФСР, 1947.

5. Барсуков А. Н., Уравнения 1-й степени в средней школе, Учпедгиз, 1952.

6. Бем Д. А., Волков А. А., Струве Р. Э., Сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры, ч. 1 и 2, 1916.

7. Бернштейн С. Н., Понятие функции в средней школе. Доклады, читанные на Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве. Москва, 1915.

8. Бондарёв А. Л., Несобственные корни уравнений, «Математика в школе», 1949, № 1.

9. Бертран Жозеф, Алгебра, ч. 1 и 2. Перевод с французского М. В. Пирожкова. 1908.

10. Бронштейн С. С., Методика алгебры. Пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы, Учпедгиз, 1937.

11. Брусиловский Г. К., Курс математики для индустриальных техникумов, ч. 1 и 2. ГТТИ, 1933.

12. Бычков Ф., Сборник примеров и задач, относящихся к курсу элементарной алгебры. Ряд изданий в конце XIX и начале XX в.

13. Вега Георг, Логарифмическо-тригонометрическое руководство, Горное издательство НКТП. В издании 1932 г. искажена фамилия автора — напечатано Вег вместо Вега.

14. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, вып. 1. Арифметика и алгебра. Перевод П. С. Юшкевича, ГТТИ, 1932.

15. Гибш И. А., а) Источники приобретения и потери корней при решении уравнений, «Математика в школе», 1947, № 6; в) Исследование решений задач с параметрическими данными, изд. АПН, 1952.

16. Гнеденко Б. В. и Хинчина А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей, Огиз, Гостехиздат, 1946.

17. Гончаров В. Л., а) Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика, изд. АПН РСФСР, 1947; в) Вычислительные и графические упражнения с функциональным содержанием, изд. АПН РСФСР, 1948; с) Алгебра для семилетней школы. Часть I, для VI класса. Учебный материал для опытной проверки, АПН, 1949

18. Давидов А. Ю., Начальная алгебра. Первое издание в 1865 г., переизданная вплоть до 1923 г.

19. Зетель С. И., Задачи на максимум и минимум, Огиз, Гостехиздат, 1948.

19а. Истомина Н. С., Планы уроков по алгебре в VI классе, Учпедгиз, 1953.

20. Каган В. Ф., Что такое алгебра? изд. «Матезис», 1910.

21. Кашин Н. И., О решении неравенств второй степени и исследовании квадратного трёхчлена, «Математика в школе», 1946, № 3.

22. Колмогоров А. Н., Алгебра в средней школе. Статья в Большой советской энциклопедии, т. 2, изд. 2.

23. Коровкин П. П., Неравенства, ГТТИ, 1951. Серия «Популярные лекции по математике», вып. 5.

24. Кречмар В. А., Задачник по алгебре, изд. 2, ГТТИ, 1950.

25. Крыжановский Д. А., Элементы теории неравенств, ОНТИ НКТП, 1936.

26. Кузьмин Р. О. и Фадеев Д. К., Арифметика и алгебра комплексных чисел, Учпедгиз, 1939.

27. Ларичев П. М., Сборник задач по алгебре, ч. 1 и 2, Учпедгиз, 1952.

28. Лебединцев К. Ф., а) Курс алгебры для средних учебных заведений, ч. 1 и 2, изд. «Сотрудник», 1913; в) Концентрическое руководство алгебры для средних учебных заведений, ч. 1, изд. «Сотрудник», 1916.

29. Ляпин С. Е., Задачи на доказательство по алгебре, Ленингадский гос. пединститут имени А. И. Герцена, «Учёные записки», т. 75, 1948 г.

30. Маркушевич А. И., а) Ряды, изд. 2-е, Гостехиздат, 1947; в) Понятие функции, «Математика в школе», 1947, № 4; с) Символ бесконечности и его употребление в математике, «Математика в школе», 1948, № 1; d) Действительные числа и основные принципы теории пределов, изд. АПН, 1948; е) Деление с остатком в арифметике и в алгебре, изд. АПН, 1948.

31. Матышук В. К., Учение об иррациональном числе в средней школе, «Математика в школе», 1947, № 5.

32. Межировский Я., Неравенства в средней школе, «Математика в школе», 1937, № 6.

33. Новосёлов С. И., а) Алгебра (из серии «Элементарная математика для учительских институтов»), Учпедгиз, 1947; в) Учение о функциях в средней школе, «Математика в школе», 1946, № 5—6; с) Специальный курс элементарной алгебры, изд. «Советская наука», 1951.

34. Невяжский Г. Л., Неравенства. Пособие для учителей. Учпедгиз, 1947.
35. Обер и Папелье, Упражнения по элементарной алгебре, Учпедгиз, 1941.
36. Панов Д. Ю., Счётная линейка, Огиз, Гостехиздат, 1946.
37. Погорелов А. И., Сборник задач по алгебре, Учпедгиз, 1949. Учебное пособие для учительских институтов.
38. Проскуряков И. В., Числа и многочлены, изд. АПН РСФСР, 1949.
39. Романовский В. И., Элементарный курс математической статистики, Гостехиздат, 1939.
40. Фадеев Д. К. и Соминский И. С., Алгебра, ч. 1. Пособие для учителей семилетней школы, Учпедгиз, 1951.
41. Субботин М. Ф., Многозначные таблицы логарифмов, изд. Академии наук СССР, 1940.
42. Чистяков И. И., Методика алгебры, Учпедгиз, 1934.
43. Шмидт О. Ю. и Курош А. Г., Алгебра. Статья в т. II Большой советской энциклопедии (изд. 2).
44. Эйлер Л., Универсальная арифметика. т. I и II, Петербург, 1768—1769 гг.

IV OSA JUURDE KUULUVATE RAAMATUTE JA ARTIKLITE REGISTER.

1. Адамар Ж., Элементарная геометрия, ч. 1, изд. 3, Учпедгиз, 1948; ч. 2, изд. 2, Учпедгиз, 1951.
2. Адлер А., Теория геометрических построений, Учпедгиз, 1940.
3. Александров А. Д., Геометрия. Статья в т. X Большой советской энциклопедии, изд. 2.
4. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Николай Иванович Лобачевский, Гостехиздат, 1943.
5. Александров И. И., Геометрические задачи на построение и методы их решения. Ряд изданий с 1882 по 1950 г.
6. Астряб А. М., Курс опытной геометрии. Индуктивно-лабораторный метод изложнеия, Гиз, 1925.
7. Барыбин К. С., Сборник геометрических задач на доказательство, Учпедгиз, 1952.
8. Берг М. Ф., Приёмы решения геометрических задач на построение, Учпедгиз, 1933.
9. Бернштейн М. С., Задачи на доказательство в курсе геометрии, «Математика в школе», 1941, № 4.
10. Бескин Н. М., Методика геометрии. Учебник для педагогических институтов, Учпедгиз, 1947.
11. Бончковский Р. Н., Площади и объёмы, изд. Академии наук СССР, 1937.
12. Брадис В. М., Евклидова геометрия в аксиоматическом изложении, ч. 1. Геометрия одного измерения. Калининский государственный педагогический институт имени М. И. Калинина. «Учёные записки», т. XII, вып. 1, 1949 г.
13. Богомолов С. А., Геометрия. Систематический курс. Пособие для учителей средней школы. Учпедгиз, 1949.
14. Владимирский Г., а) Каким должен быть чертёж преподавателя геометрии? «Математика в школе», 1941, № 3; в) Черчение. Пособие для учительских и педагогических институтов, Учпедгиз, 1952.
15. Гангнус Р. В. и Гурвиц Ю. О., Геометрия. Методическое пособие, ч. 1 и 2, Учпедгиз, 1934—1935.
16. Геометрия в школе. Статья в т. X Большой советской энциклопедии, изд. 2.
17. Герценштейн Я., Геодезические работы в средней школе, «Математика в школе», 1941, № 2.
18. Гильберт Д., Основания геометрии. Перевод с 7-го немецкого

издания И. С. Градштейна, под ред. и со вступительной статьей П. К. Рашевского, Огиз, Гостехиздат, М.— Л. 1948.

19. Глаголев Н. А., Элементарная геометрия, ч. 1 — Планиметрия, Учпедгиз, 1944; ч. 2 — Стереометрия, Учпедгиз, 1945.

20. Голубовская А. И., Геометрические задачи на построение. Сборник «Элементарная математика в средней школе», под ред. Ляпина С. Е., вып. 2., Учпедгиз, 1936.

21. Гуль И. М., а) Сборник геометрических задач (планиметрия), Учпедгиз, 1940; в) Геометрия Лобачевского, изд. АПН, 1947.

22. Давидов А. Ю., Элементарная геометрия, изд. 24, 1905.

23. Делоне Б. и Житомирский О., Задачник по геометрии, ОНТИ, 1935. Переиздан в 1949 г.

24. Денисова Т. Н., Планы уроков по геометрии в VII классе. Из опыта работы, Учпедгиз, 1953.

25. Дзык П. Г., Сборник стереометрических задач на комбинации геометрических тел, под редакцией В. И. Милинского, Учпедгиз, 1936.

26. Дорф П., Стереометрический ящик, «Математика в школе», 1940, № 1.

27. Дорф П. Я. и Румер А. О., Измерения на местности, изд. АПН, 1953.

27а. Дубнов Я. С., К истории постулата о параллельности в связи с практикой современного преподавания, «Математика в школе», 1950, № 5.

28. Загоскина Е. Д., Первые уроки геометрии в VI классе, «Математика в школе», 1947, № 4.

29. Знаменский М. А., а) Беседы по геодезии с учителями. Учпедгиз 1931; в) Работы на местности в средней школе, «Математика в школе», 1941, № 2.

30. Иванов М. И., Как оформлять в письменном виде доказательства геометрических теорем? «Математика в школе», 1937, № 2.

31. Извольский Н. А., Геометрия на плоскости. Геометрия в пространстве, изд. «Сотрудник школ», 1915.

32. Истомина Н. С., Планы уроков по геометрии в VI классе, под ред. В. М. Брадиса, Учпедгиз, 1953.

33. Кавун И. Н., а) Как обучать геометрии в четырёхлетней школе первой ступени? изд. «Сеятель», 1927; в) Начальный курс геометрии, Ленгиз, 1924.

34. Каган В. Ф., а) Лобачевский, изд. Академии наук СССР, 1948; в) Геометрия. Статья в т. XV Большой советской энциклопедии; с) Основания геометрии, т. I — Опыт обоснования евклидовой геометрии, Одесса 1905; т. II — Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии, Одесса 1907; d) О преобразовании многогранников, ГТТИ, 1933; е) Основания геометрии, ч. 1. Геометрия Лобачевского и её предистория, ГТТИ, 1949.

35. Кованько А. С., О принципе Кавальери. Сборник «Элементарная математика в средней школе», под ред. Ляпина С. Е., вып. 2, Учпедгиз, 1936.

36. КомпанийцП. А., Параллелепипеды четырёх видов. Ленинградский гор. институт усовершенствования учителей, 1940 .

37. Костин В. И., Основания геометрии, Учпедгиз, 1946.

38. Кулишер А. Р., Учебник геометрии, Гиз, 1922.

39. Крельштейн Б. И., Опыт особого построения отдела стереометрии в IX классе средней школы. «Учёные записки» Ленинградского государственного педагогического института имени Герцена, т. 75, 1948.

40. Кутузов Б. В., а) Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии, Учпедгиз, 1950. Пособие для учителей средней школы.

в) Геометрия. Пособие для учительских и педагогических институтов, Учпедгиз 1950.

41. Лебег Г., Об измерении величин. Перевод под ред. А. Н. Колмогорова, Учпедгиз, 1938.

42. Лобачевский Н. И., Полное собрание сочинений, т. 1. Сочинения по геометрии. Геометрические исследования по теории параллельных линий.

О началах геометрии, Гостехиздат, М.—Л. 1946; т. II. Геометрия. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных, ГТТИ, 1946—1949.

43. Назарьев С. В. и др., Сборник задач по геометрии для учительских институтов, Учпедгиз, 1948.

44. «Начала» Евклида. Книга I — IV. Перевод с греческого и коментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, Гостехиздат, М. — Л. 1948. Книги VII—X, 1949 г.

45. Никитин Н. Н., Начальный курс геометрии для семилетних школ. Учебный материал для VI класса, изд. АПН, 1952.

46. Панов Д. В., Вычисление площадей, Огиз, Гостехиздат, М. — Л. 1946.

47. Центковский М. В., Считающие чертежи, ГТТИ, 1953.

48. Перепёлкин Д. И., Курс элементарной геометрии, часть 1. Учебник для педагогических институтов, Гостехиздат, 1948; часть 2, 1949 г.

49. Петров М., О преподавании геометрии в VI классе, «Математика в школе», 1939, № 6.

50. Романовский Б. В., Задачи на построение в стереометрии, Учпедгиз, 1936.

51. Смогоржевский А. С., Метод координат, вып. 10, ГТТИ, 1952. Серии «Популярные лекции по математике».

52. Соминский И. С., О работе учащихся VI класса в связи с изучением первых теорем геометрии, «Математика в школе», 1947, № 4.

53. Сорокин П. И., Опыт изучения геометрического материала в IV классе, изд. АПН, 1950.

54. Столяр А. А., Первые уроки стереометрии в средней школе. Сборник «Из опыта работы передовых учителей математики», под ред. Н. Н. Никитина, изд. АПН, 1950.

55. Тарский А., Теория длины окружности в средней школе, «Математика в школе», 1937, № 1.

56. Цюльке, Геометрические построения на ограниченном куске плоскости, ОНТИ, 1935.

57. Чакалов Л., Несоизмеримые углы в треугольниках, «Математика в школе», 1948, № 1.

58. Четверухин Н. Ф., a) Методы геометрических построений, Учпедгиз, 1938; в) Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, Учпедгиз, 1946; c) Стереометрические задачи на проекционном чертеже. Позиционные задачи в курсе стереометрии, «Математика в школе», 1946, №№ 2 и 3; d) Стереометрические задачи на проекционном чертеже, изд. АПН РСФСР. М. — Л. 1947.

59. Шоластер Н. Н., Первые уроки по геометрии в VI классе, Учпедгиз, 1953.

60. Яковлев В., Преподавание геометрии и оптические иллюзии, «Математика в школе», 1940, № 3.

61. Шувалов Я. А., Основы топографии, Учпедгиз, 1951.

62. Депутатов В. Н., Основания геометрии, «Математика в школе», 1938, № 1—6.

V OSA KÜSIMUSTE JUURDE KUULUVATE RAAMATUTE JA ARTIKLITE REGISTER.

1. Берёзовский Б. Я., Сборник задач по прямолинейной тригонометрии, Учпедгиз, 1936.

2. Бермант А. Ф. и Люстерник Л. А., Тригонометрия, Учпедгиз, 1947.

3. Бончковский Р. Н., Пробный учебник по тригонометрии. Статья в журнале «Математика в школе», 1941 № 4.

4. Борель Э., Тригонометрия, изд. 1909.

5. Вебер Г. и Скобсталь В., Тригонометрия. Книга II, т. II «Энциклопедии элементарной математики» Вебера Г. и Вельштейна И. Перевод с немецкого под ред. проф. Кагана В. Ф.

6. Верещагин И., Собрание вопросов и задач прямолинейной тригонометрии для гимназий и реальных училищ, изд. 10, 1916.
7. Вилейтнер Г., Хрестоматия по истории математики, вып. 2. Геометрия и тригонометрия. Перевод П. С. Юшкевича, ГТТИ, 1932.
8. Внуков В. П. (редактор), Артиллерия, изд. Гостехиздат, 1942.
9. Глазенап С. П., Тригонометрия. ч. 1 — Решение прямолинейных треугольников, изд. 2, 1915; ч. 2—Гониометрия, изд. 2, 1916.
10. Гончаров Д., Элементы гармонического анализа в курсе тригонометрии средней школы, «Математика в школе», 1940, № 3.
11. Доброхотов Ф. В., Очерк аналитической теории тригонометрических функций. Статья в сборнике «Математическое просвещение», вып. 9, ОНТИ, 1936.
12. Кранц П., Сферическая тригонометрия, ГТТИ, 1932.
13. Крогиус В. А., Тригонометрия. Пособие для рабфаков, техникумов и школ взрослых повышенного типа. Учпедгиз, 1932.
14. Крогиус В. А., Программа тригонометрии и стабильный учебник Рыбкина, «Математика в школе», 1937, № 3.
15. Малинин А., Руководство прямолинейной тригонометрии для гимназий и реальных училищ, изд. 19.
16. Маркушевич А. И., Элементы теории аналитических функций, Учпедгиз, 1944.
17. Новосёлов С. И., а) Обратные тригонометрические функции, Учпедгиз, 1939 и 1950; в) Специальный курс тригонометрии, изд. «Советская наука», 1953.
18. Петерс И., Шестизначные таблицы тригонометрических функций, ГТТИ, 1932.
19. Пиотровский Б. Б., Тригонометрия, Госиздат, 1925.
20. Погорелов А. И., Сборник задач по тригонометрии. Пособие для учительских институтов, Учпедгиз, 1949.
21. Полак И. Ф., Курс общей астрономии, ГОНТИ, 1938.
22. Попов Г. Н., Как применялась и применяется тригонометрия на практике, Госиздат, 1931.
23. Пржевальский Е., Прямолинейная тригонометрия и собрание тригонометрических задач, Госиздат, 1923.
24. Рашевский К. Н., Тригонометрия, Учпедгиз, 1931.
25. Репьев В. В., Методика тригонометрии, Учпедгиз, 1937.
26. Рыбкин Н., Прямолинейная тригонометрия. Учебник для IX и X классов средней школы, изд. 26, Учпедгиз, 1948.
27. Рыбкин Н., Сборник задач по тригонометрии для VIII, IX и X классов средней школы, изд. 13, Учпедгиз, 1946.
28. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, изд. Академии наук СССР, 1950.
29. Серре Ж. А., Прямолинейная тригонометрия, Сферическая тригонометрия. Дополнение к теории круговых функций, 1902—1906.
30. Степанов Н. Н., Сферическая тригонометрия, ОНТИ, 1936.
31. Фетисов А. И., Учение о тригонометрических функциях в курсе средней школы. Статья в выпуске 6 «Известий Академии педагогических наук РСФСР» за 1946 г.
32. Хютте (Hütte). Справочник для инженеров, техников и студентов, т. 1, изд. 15, ОНТИ, 1934.
33. Цейтен Г. Г., История математики в XVI и XVII вв., ГТТИ, 1933.
34. Цейтен Г. Г., История математики в древности и в средние века.
35. Шапошников Н. А., Курс прямолинейной тригонометрии и собрание тригонометрических задач, изд. 25, Госиздат, 1923.
36. Шатуновский С. О., Методы решения задач прямолинейной тригонометрии, Госиздат, 1929.
37. Шмулевич П. К., Курс прямолинейной тригонометрии и методы решения тригонометрических задач (Энциклопедия тригонометрии), 1907.
38. Эйлер Леонард, Введение в анализ бесконечно малых, т. I. Перевод с латинского, ОНТИ, 1936.

SISUKORD

Lk.

Eessõna 3

ESIMENE OSA

ÜLDINE MATEMAATIKA ÕPETAMISE METOODIKA

I peaükk. **Matemaatika teadusena.**

§ 1. Matemaatika tekkimine. Matemaatika arenemise esimene põhietapp: matemaatika kui teadus arvudest, suurustest ja geomeetrilistest kujunditest 5
§ 2. Matemaatika arenemise teine põhietapp: matemaatika kui teadus suuruste muutumisest ja geomeetrilistest teisendustest 9
§ 3. Matemaatika arenemise kolmas põhietapp: matemaatika kui teadus reaalse maailma kvantitatiivseist suhetest ja ruumivormidest kogu nende üldsuses 12
§ 4. Matemaatika ja teised teadused. Matemaatika rakendused. Idealism matemaatikas 14
§ 5. Matemaatilised mõisted. Perekond ja liik. Definitsioonid ja kirjeldused. Klassifikatsioon 18
§ 6. Matemaatilised laused (teoreemid ja aksioomid). Pöördteoreemid vastandteoreemid, vastandteoreemide pöördteoreemid. Tarvilikud ja piisavad tingimused 25
§ 7. Induktsioon ja deduktsioon. Intuitsioon. Analoogia. Analüüs ja süntaks. Vastuväiteline tõestusviis. Tõestus täieliku induktsiooni meetodiga 28
§ 8. Matemaatiline süsteem. Rangus defineerimisel ja tõestamisel . . 34

II peatükk. **Matemaatika õppeainena.**

§ 9. Matemaatika õpetamise kaks eesmärki koolis 35
§ 10. Matemaatika õpetamine pärast ÜK(b)P Keskkomitee otsuseid kooli kohta. Matemaatika metoodika sisu ja ülesanded 37
§ 11. Tähtsaimad vene ja välismaa matemaatikud-metoodikud . . . 39
§ 12. Matemaatika õpetamise põhiprintsiibid 43
§ 13. Kooli matemaatika polütehnilise õpetuse ülesannete valgusel . . 49
§ 14. Propedeutiline ehk algkursus ja süstemaatiline ehk põhikursus 54
§ 15. Matemaatika õppeplaan ja programm keskkoolis 56
§ 16. Poliitilis-kasvatuse töö matemaatika tundides 56

III peatükk. **Matemaatika õpetamise meetodid ja vormid.**

§ 17. Materjali süstemaatiline käsitlus. Loeng ja tund 60
§ 18. Heuristiline meetod. Katehheetiline meetod 62
§ 19. Ülesannete lahendamine 63
§ 20. Õpilaste iseseisev töö 73
§ 21. Näitlikkus matemaatika õpetamisel 76
§ 22. Klassiväline ja koolivälise töö matemaatika alal 78

Lk

IV peatükk. **Matemaatika õpetamise organiseerimine.**

§ 23. Programmi materjali jaotus. Kalenderplaan 80
§ 24. Õpiku, teadusliku ja metoodilise kirjanduse tundmaõppimine. Õpetaja matemaatiline endaarendamine 83
§ 25. Õpetaja valmistumine tunniks 84
§ 26. Kodused ülesanded 87
§ 27. Kirjalikud kontrolltööd 90
§ 28. Kordamine 92
§ 29. Õppeedukuse arvestus. Kirjalikud ja suulised eksamid 95
§ 30. Abinõud mahajäämuse vältimiseks. Mahajääjate abistamine . . 98
§ 31. Eriti edukate lisatöö 99
§ 32. Matemaatika kabinet 100

V peatükk. **Formalism matemaatika koolikursuses ja võitlus sellega. Muud puudused matemaatika õpetamise alal.**

§ 33. Mis on formalism õpilaste teadmistes matemaatika alal . . . 101
§ 34. Formalismi nähtused matemaatika õpetaja töös 105
§ 35. Vead õppetöö planeerimisel matemaatika alal 107
§ 36. Õpilaste initsiatiivi mahasurumine ja mõned muud matemaatika õpetaja vead 108
§ 37. Mille eest peab algaja õpetaja eeskätt hoolitsema? 111

TEINE OSA

ARITMEETIKA ÕPETAMISE METOODIKA

I peatükk. **Üldisi vaateid aritmeetika õpetamisele keskkoolis.**

§ 1. Aritmeetika teadusena ja õppeainena koolis 113
§ 2. Algkoolis omandatud teadmised ja oskused aritmeetikast, mis tulevad edasi arendamisele ja kinnistamisele keskkoolis 115
§ 3. Aritmeetika kursuse ülesehitus keskkoolis. Õppekirjandus . . . 117
§ 4. Aritmeetilised ülesanded 120
§ 5. Aritmeetika ja teised matemaatilised distsipliinid 124

II peatükk. **Naturaalarvu õpetus.**

§ 6. Suuline ja kirjalik numeratsioon 125
§ 7. Neli aritmeetilist tehet 127
§ 8. Peast arvutamine 130
§ 9. Arvude jaguvusest 132
§ 10. Arvu mõiste esimene laiendamine: arv null 135

III peatükk. **Harilikud murrud.**

§ 11. Esialgne tutvumine lihtsamate murdudega 136
§ 12. Viienda klassi matemaatika programmis ettenähtud teoreetiliste teadmiste ulatus murdude alalt 137
§ 13. Arvu mõiste teine laiendamine: murd kui arv 139
§ 14. Murdude liitmine ja lahutamine 144
§ 15. Murdude korrutamine 144
§ 16. Murdude jagamine 148
§ 17. Ülesanded kõigi tehete jaoks murdudega 150
§ 18. Tüüpilised raskused ja tüüpilised vead. Järeldused 152

IV peatükk. **Kümnendmurrud. Protsendid.**

§ 19. Kümnendmurdude eelised. Meetermõõtude süsteem 153
§ 20. Järgnevad sammud kümnendmurdude tundmaõppimisel 155
§ 21. Protsendid ja promillid 158

LK.
§ 22. Harilike mittekümnendmurdude teisendamine kümnendmurdudeks 162
§ 23. Perioodilised murrud 163
§ 24. Mitmesugused arvutused harilike kümnend- ja mittekümnendmurdudega 165

V peatükk. **Ligikaudsed arvutused.**

§ 25. Suuruste täpsed ja ligikaudsed väärtused. Ümardamisreeglid . . 166
§ 26. Ligikaudse arvutuse teooria lihtsamad mõisted ja reeglid (teadmiste esimene kontsenter) 168
§ 27. Ülemtõke ja alamtõke (teadmiste teine kontsenter ligikaudsete arvutuste alalt) 171
§ 28. Absoluutsete ja relatiivsete vigade tõkked (teadmiste kolmas kontsenter ligikaudsete arvutuste alalt) 174
§ 29. Üldisi metoodilisi seisukohti ligikaudsetest arvutustest keskkoolis 176

VI peatükk. **Suhted ja võrded. Võrdelised suurused.**

§ 30. Kahe arvu suhte mõiste 177
§ 31. Võrded 179
§ 32. Võrdelisus ja pöördvõrdelisus 182
§ 33. Ülesanded võrdeliste ja pöördvõrdeliste suurustega. Kolmlaused 184
§ 34. Ülesanded võrdelise jaotamisega 187
§ 35 Aritmeetilised harjutused ja funktsionaalne propedeutika algebra kursuses 189

KOLMAS OSA

ALGEBRA ÕPETAMISE METOODIKA

I peatükk. **Üldisi seisukohti algebra õpetamisest keskkoolis.**

§ 1. Evolutsioon vaadetes algebrale kui teadusele 191
§ 2. Algebra koolikursuse põhilised arenemisjooned. Algebra kui õppeaine 193
§ 3. Koolialgebra õpetamise eesmärgid. Selle programm 196
§ 4. Õppe- ja metoodiline kirjandus algebra alalt 198
§ 5. Algebralised ülesanded 201

II peatükk. **Arvu mõiste arendamine seitsmeklassilises koolis.**

§ 6. Negatiivsete arvude tarvituselevõtmine. Ratsionaalarvude hulk . 204
§ 7. Ratsionaalarvude liitmine ja lahutamine 207
§ 8. Ratsionaalarvude korrutamine ja jagamine 209
§ 9. Ülesanded kõigi tehete kohta ratsionaalarvudega 211
§ 10. Ruutjuure leidmine. Arvude ruutude ja ruutjuurte tabel 212

III peatükk. **Samasusteisendused seitsmeklassilises koolis.**

§ 11. Täheline sümboolika 215
§ 12. Samasusteisenduste ülesanne ja liigid 220
§ 13. Sarnaste liikmete koondamine. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine 221
§ 14. Üksliikmete ja hulkliikmete korrutamine. Lühendatud korrutamise valemid 222
§ 15. Üksliikmete ja hulkliikmete jagamine 226
§ 16. Hulkliikmete lahutamine tegureiks 227
§ 17. Algebralised murrud 228

IV peatükk. **Esimese astme võrrandid ja nende süsteemid.**

§ 18. Võrrandite ja nende süsteemide elementaarne teooria 230
§ 19. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandite lahendamine ja ülesanded nende koostamisele 234

Lk.

§ 20. Kahest kahe tundmatuga esimese astme võrrandist koosneva süsteemi lahendamine ja ülesanded nende koostamisele 239
§ 21. Muud esimese astme võrrandite süsteemid 241
§ 22. Võrratuse mõiste ja selle kasutamine seitsmeklassilises koolis . . 243

V peatükk. **Funktsionaalne sõltuvus.**

§ 23. Funktsiooni idee lülitamine matemaatika üldhariduslikku kursusse 244
§ 24. Funktsioonide tundmaõppimise ülesanded keskkoolis 246
§ 25. Funktsionaalne propedeutika 248
§ 26. Peatükk «Funktsioonid ja nende graafikud» VIII klassis . . . 250
§ 27. Funktsioonide tundmaõppimine IX ja X klassis 252

VI peatükk. **Arvu mõiste arendamine keskkooli vanemais klassides.**

§ 28. Irratsionaalarvude tarvituselevõtmine. Reaalarvude hulk . . . 254
§ 29. Imaginaararvude tarvituselevõtmine. Kompleksarvude hulk . . . 257

VII peatükk. **Samasusteisendused keskkooli vanemais klassides.**

§ 30. Keskkooli vanemais klassides tundmaõpitavad uut liiki samasusteisendused 260
§ 31. Radikaale sisaldavate avaldiste teisendamine 262

VIII peatükk. **Võrrandid ja võrratused keskkooli vanemais klassides.**

§ 32. Ruutvõrrandid ja neile taanduvad võrrandid 264
§ 33. Võrrandid, mis sisaldavad tundmatut juuremärgi all 267
§ 34. Esimesest astmest kõrgemate võrrandite süsteemid 268
§ 35. Võrratused 269
§ 36. Võrrandite uurimine 270
§ 37. Teoreem jäägist, mis tekib hulkliikme jagamisel $(x - a)$-kujulise vahega, ja järeldused sellest 271

IX peatükk. **Järjendid ja progressioonid. Piirväärtuste teooria elemendid.**

§ 38. Progressioonide tundmaõppimise tähtsus algebra kursuses . . . 272
§ 39. Progressioonid lõpliku arvu liikmetega 274
§ 40. Mitmesugused ülesanded progressioonidele 275
§ 41. Piirväärtuse mõiste asukohast matemaatika koolikursuses . . . 277
§ 42. Piirväärtuste teooria elementide tundmaõppimine IX klassis . . 279

X peatükk. **Logaritmid.**

§ 43. Astendaja mõiste üldistamine ja eksponentfunktsioon 283
§ 44. Logaritmi definitsioon. Logaritm kui eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon. Logaritmide üldised omadused 285
§ 45. Kümnendlogaritmid 287
§ 46. Logaritmide tabelid 289
§ 47. Logaritmidega arvutamise praktika 291
§ 48. Logaritmfunktsioon 293
§ 49. Eksponent- ja logaritmvõrrandid 295
§ 50. Logaritmiline arvutuslükati 296

XI peatükk. **Kombinatoorika. Newtoni binoom.**

§ 51. Ühendite teooria ja tõenäosuse teooria 298
§ 52. Permutatsioonid 299
§ 53. Variatsioonid ja kombinatsioonid 300
§ 54. Newtoni binoom 302

NELJAS OSA

GEOMEETRIA ÕPETAMISE METOODIKA

I peatükk. **Üldisi vaateid geomeetria õpetamisest keskkoolis.**

Lk.

§ 1. Kolm staadiumi geomeetriateaduse arenemises 305
§ 2. Geomeetria õppimise eesmärgid keskkoolis 308
§ 3. Geomeetria koolikursuse sisu 310
§ 4. Näitlikkus geomeetria õpetamisel 314
§ 5. Geomeetria õppekirjandus 316

II peatükk. **Esimesed sammud geomeetria õppimisel.**

§ 6. Algkoolis omandatavad geomeetrilised teadmised ja oskused . . 317
§ 7. Geomeetria õpetamine V klassis 319
§ 8. Esimesed geomeetria tunnid VI klassis. Algmõisted ja aksioomid 323
§ 9. Definitsioonide käsitlemine 325
§ 10. Esimeste teoreemide tundmaõppimine ja rakendamine 327

III peatükk. **Geomeetria edasine arendamine seitsmeklassilises koolis.**

§ 11. Geomeetria õppimise üldine iseloom seitsmeklassilises koolis . . 330
§ 12. Õpetus kolmnurkadest 331
§ 13. Paralleelide teooria 333
§ 14. Õpetus nelinurkadest ja ringjoontest 336
§ 15. Konstruktsioonülesanded 341
§ 16. Klassiväline töö geomeetria alal seitsmeklassilises koolis . . . 344

IV peatükk. **Geomeetriliste suuruste mõõtmine.**

§ 17. Lõigu pikkus ja lõikude suhe 345
§ 18. Nurkade ja ringjoone kaarte mõõtmine 348
§ 19. Hulknurkade pindala 349

V peatükk. **Piiriväärtuste teooria geomeetrilisi rakendusi.**

§ 20. Ringjoone pikkus 352
§ 21. Ringi pindala 355

VI peatükk. **Stereomeetria käsitlemine.**

§ 22. Stereomeetriliste küsimustega töötamise iseärasused 357
§ 23. Stereomeetriline joonis 360
§ 24. Konstruktsioonülesanded stereomeetrias 363
§ 25. Sirged ja tasapinnad ruumis 365
§ 26. Hulktahukad 367
§ 27. Ruumalade mõõtmine. Cavalieri printsiip 369
§ 28. Ümarkehad 372

VIIES OSA

TRIGONOMEETRIA ÕPETAMISE METOODIKA

I peatükk. **Üldisi vaateid trigonomeetria õpetamisele keskkoolis.**

§ 1. Ajaloolisi andmeid. Nüüdisaegne trigonomeetria 376
§ 2. Trigonomeetria õppeainena üldhariduslikus keskkoolis 379
§ 3. Trigonomeetria lineaarne ja kontsentriline käsitlus 380
§ 4. Trigonomeetria õpikud 382
§ 5. Mõned teised trigonomeetria õpikud ja käsiraamatud 383
§ 6. Trigonomeetrilised ülesanded 384

II peatükk. **Trigonomeetria algkursus.**

Lk.

§ 7. Algkursuse mitmesugused variandid 388
§ 8. Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid. Kaks peamist ülesannet trigonomeetriliste funktsioonide kohta . . . 390
§ 9. Trigonomeetriliste funktsioonide tabelid 392
§ 10. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine 395
§ 11. Trigonomeetria algkursus 396

III peatükk. **Trigonomeetriliste funktsioonide üldised definitsioonid.**

§ 12. Suunaga lõigud (vektorid). Projektsioonid 398
§ 13. Kaare ja nurga mõiste üldistamine. Suunaga kaared ja nurgad 399
§ 14. Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid 401
§ 15. Trigonomeetriliste funktsioonide mõned omadused, mis otseselt järelduvad nende definitsioonidest 404
§ 16. Side funktsiooni üldise mõistega 409

IV peatükk. **Trigonomeetrilised võrdused ja võrratused.**

§ 17. I veerandi kaarele taandamise valemid 410
§ 18. Ühe ning sama argumendi trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed 413
§ 19. Liitmis- ja lahutamisvalemid 415
§ 20. Korrutamis- ja jagamisvalemid 417
§ 21. Trigonomeetriliste summade esitamine korrutistena 419
§ 22. Mõned tähtsad trigonomeetrilised võrratused 420
§ 23. Ligikaudsed trigonomeetrilised valemid 421

V peatükk. **Trigonomeetriliste funktsioonide tabelid ja graafikud.**

§ 24. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste arvutamine 424
§ 25. 4-kohaliste trigonomeetriliste tabelite ehitus ja kasutamine . . 430
§ 26. Mõned teised tabelid 434
§ 27. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud 435

VI peatükk. **Trigonomeetrilised pöördfunktsioonid. Trigonomeetrilised võrrandid.**

§ 28. Trigonomeetriliste funktsioonide antud väärtustele vastavate argumendiväärtuste üldavaldised 439
§ 29. Trigonomeetrilised pöördfunktsioonid. Nende mitmesus ja peaväärtused. Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide graafikud 442
§ 30. Mõned ülesanded trigonomeetrilistele pöördfunktsioonidele . . 444
§ 31. Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide õppimisega seotud raskused koolis 447
§ 32. Trigonomeetrilised võrrandid. Nende klassifikatsioon ja lahendamise meetodid 448
§ 33. Algebralisiks võrrandeiks ja trigonomeetrilisiks põhivõrrandeiks taanduvate trigonomeetriliste võrrandite lahendamise näited . . 453
§ 34. Transtsendentsete trigonomeetriliste võrrandite näited 458

VII peatükk. **Geomeetrilised ja muud trigonomeetria rakendused.**

§ 35. Millal ja missuguses ulatuses vaadelda kolmnurkade lahendamist? 461
§ 36. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine 462
§ 37. Külgede ja nurkade vahelised seosed kaldnurkses kolmnurgas . . 464
§ 38. Kolmnurkade lahendamise põhilised juhtumid 466
§ 39. Kolmnurkade lahendamise erilised juhtumid 470
§ 40. Trigonomeetria muud geomeetrilised rakendused 472
§ 41. Trigonomeetria ja algebra 475
§ 42. Trigonomeetria rakendused mehhaanikas ja füüsikas 476
§ 43. Trigonomeetria, topograafia, astronoomia 477

Lk.

I osa küsimuste juurde kuuluvate dokumentide, raamatute ja artiklite register 480
II osa küsimuste juurde kuuluvate raamatute ja artiklite register . . 482
III osa küsimuste juurde kuuluvate raamatute ja artiklite register . . 484
IV osa küsimuste juurde kuuluvate raamatute ja artiklite register . . 486
V osa küsimuste juurde kuuluvate raamatute ja artiklite register . . 488

Владимир Модестович Брадис

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

На эстонском языке

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе 10

*

Toimetaja Rich. Kress

Tehniline toimetaja L. Uuspõld

Korrektorid: L. Visnap ja O. Sepp

Ladumisele antud 17. XII 1956. Trükkimisele antud 12. III 1957. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 31. Arvutuspoognaid 37,72. Trükiarv 2000. Tellimise nr. 4171. Trükikoda «Tartu Kommunist», Tartu, Ülikooli 17/19.

Hind rbl. 11.20

6—7

Rbl. 11.20

A-21586

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00355179 5