

TIHU PAAS

**ÖKONOMEETRIA:
ULESANDEID SEMINARIDEKS JA
PRAKTIKUMIDEKS I**

TARTU ÜLIKOOL • MAJANDUSTEADUSKOND

Rahvamajanduse instituut

TIIU PAAS

**ÖKONOMEETRIA:
ÜLESANDEID SEMINARIDEKS JA
PRAKTIKUMIDEKS I**

Tartu 1997

Retsenseerinud TTÜ statistikaproffessor majandusdoktor Vello
Vensel ja matemaatikakandidaat Toomas Raus

Keeletoimetaja Mati Pütsepp

Käesolev väljaanne on kirjastatud Avatud Eesti Fondi toetusel

© Tiiu Paas, 1998

© Kaas: Tartu Ülikooli Kirjastus, 1997

ISBN 9985-4-0012-7

 AS YÖRU TÄHT

SISUKORD

Sissejuhatus	7
1. Ökonomeetria mõiste ja ülesanded	11
2. Ökonomeetriline modelleerimine	15
3. Andmed ökonomeetrilistes mudelites	18
4. Statistilised jaotused	20
5. Statistilised hüpoteesid	23
6. Lineaarne regressioonimudel	27
7. Korrelatsioon ja regressioon.....	37
8. Mitmene regressioonimudel	41
9. Erikujulised regressioonimudelid.....	49
10. Multikollineaarsus	58
11. Autokorrelatsioon.....	64
12. Heteroskedastiivsus	74
13. Fiktiivsete muutujatega regressioonimudelid.....	86
14. Dünaamilised mudelid	101
15. Mudelite valik	112
16. Faktoranalüüsi kasutamine ökonomeetrilisel modelleerimisel	124
17. Ökonomeetriline projekt	130
Soovitav kirjandus	134
Lisa 1. Normaaljaotus	136
Lisa 2. Korrelatsioonikordaja kriitilised väärtused	137
Lisa 3. Studenti t-jaotus.....	142

Lisa 4. F-jaotus	143
Lisa 5. Durbin-Watsoni kriteerium: d-statistiline alumine (d_l) ja ülemine (d_u) tase olulisuse nivool 0,05	149
Lisa 6. Swed-Eisenharti kriteerium olulisuse nivool 0,05	152

SISSEJUHATUS

Ökonomeetria on piirteadus, mis on kujunenud majandusteaduse, matemaatika ja statistika integreerumisel. Majandusteadus esitab ökonomeetria teoreetilisi kontseptsioone ja probleemipüstitusi nende kvantitatiivseks hindamiseks ja alternatiivsete lahendusvariantide väljatöötamiseks. Statistika kogub, töötleb ja analüüsib massnähtuste andmeid ökonomeetriliste uuringute tarvis. Matemaatikast ja matemaatilisest statistikast tulenevad meetodid ja võtted ökonomeetriliste mudelite parameetrite hindamiseks. Ökonomeetria koht teiste teaduste süsteemis määrab ka tema peamised ülesanded, mis on eelkõige suunatud majandusteadusest ja majanduspraktikast kerkivatele probleemidele lahenduste otsimisele.

Ökonomeetria peamisteks ülesanneteks on majandusteoreetiliste hüpoteeside ja kontseptsioonide empiiriline kontrollimine, majandusprotsesside arengu analüüsimine ja prognoosimine ning erinevate majanduspoliitiliste ja ärimajanduslike otsusevariantide võimalike tagajärgede kvantitatiivne hindamine. Nimetatud ülesannetega toimetulek on olulise tähtsusega nii teoreetiliste kui praktiliste majandusprobleemide lahendamisel ja seda nii riigi kui ettevõtte tasandil. Seetõttu on ökonomeetria iseseisva ainekursusena lülitatud ülikoolide majanduserialade bakalaureuse- ja magistriõppe õppeprogrammide koosseisu.

Ökonomeetria õpetamine tugineb arvutite, tarkvara ja statistiliste andmebaaside kasutamisele. See võimaldab tunduvalt paremini ja sügavamalt omandada ökonomeetria meetodeid ja võtteid ning arendada nende praktilise kasutamise oskusi. Ökonomeetria kasutamise võimalused avarduvad seoses rahvusvaheliste andmebaaside üha enam kättesaadavamaks muutumisega Internet'i vahendusel. Ka Eesti statistikasüsteemi areng ja Statistikaameti poolt pa-

kutava info kvaliteedi tõus aitavad kaasa ökonomeetria võimaluste kasutamisele teoreetiliste ja praktiliste majandusprobleemide lahendamisel.

Parim viis ökonomeetria omandamiseks on õppida mitmesugustest praktilistest majandussituatsioonidest kerkivate küsimuste ja ülesannete lahendamise najal. Seetõttu kuulub ökonomeetria ainekursuste õppimisel ja õpetamisel oluline koht seminaridele ja praktikumidele. Käesolev kogumik on koostatud eesmärgiga kasutada selles formuleeritud probleeme ja ülesandeid abimaterjalidena ökonomeetria õpetamisel ja õppimisel. Kogumiku koostamisel on arvestatud, et selle kasutamine õppetööks eeldab eelnevat tööd õpikutega *T.Paas "Sissejuhatus ökonomeetriasse"* ja *D.Gujarati "Essentials of Econometrics"*. Ka osa kogumikus toodud ülesandeid on koostatud nende õpikute materjalide põhjal. Mõlemad õpikud on olemas Tartu Ülikooli ja Euroteaduskonna raamatukogudes ning ökonomeetria õppetoolis. Loomulikult on soovitatav kasutada õppimiseks ka teisi õpikuid. Soovitatav õpikute nimekiri on toodud raamatu lõpus.

Ökonomeetria kursuse õppimisel tuleb eesmärgiks seada aine olemuse ja selles kasutatavate statistiliste meetodite ja võtete omandamine tasemel, mis lubaks iseseisvalt majandusteooriast ja -praktikast tulenevaid probleeme näha ja selliselt formuleerida, et nende lahendamisel saaks efektiivselt kasutada ökonomeetria poolt pakutavaid ulatuslikke võimalusi ja ideid majandusprotsesside arengu süvaanalüüsiks ja prognoosimiseks ning majanduspoliitiliste ja ärimajanduslike otsuste kavandamiseks. Püstitatud eesmärgi saavutamisele aitab kahtlematult kaasa töötamine ökonomeetrilise projekti kallal (*learninig by doing*), mille koostamise juhend on toodud õpiku "*Sissejuhatus ökonomeetriasse*" 8. peatükis. Mõned võimalikud probleemipüstitused ökonomeetrilise projekti tarvis on esitatud käesoleva kogumiku viimase teema all. Neid võiks eelkõige siiski võtta kui näidiseid, mis suunavad projekti koostajat teda huvitava probleemi nägemisele ja formuleerimisele.

Edu ja viljakaid ideid selleks! Hästi formuleeritud probleem on eduka lahenduse alus.

Kogumiku valmimisel on palju abi olnud Tartu Ülikooli rahvamajanduse instituudis töötavate kolleegide kompetentsetest nõuanne- test. Kogumiku koostaja tänab südamlikult kõiki kaasaitajaid! Kõik märkused ja ettepanekud on siira tänuga oodatud Tartu Üli- kooli ökonomeetria õppetooli Tartu Nooruse 9, tel (3727) 380 292; e-mail tpaas@ut.ee

Tiiu Paas

Ökonomeetria õppetooli professor

1. ÖKONOMEETRIA MÕISTE JA ÜLESANDED

1.1. Mis iseloomustab piirteadust?

1.2. Milliseid teadusi integreerib ökonomeetria?

1.3. Millised on ökonomeetria kui piirteaduse iseloomulikud jooned?

1.4. Milline on teooria, andmete ja meetodite roll ökonomeetrites uurimustes?

1.5. Mis on ökonomeetria peamised ülesanded?

1.6. Kuidas saab ökonomeetria kasutada majanduspoliitika ja majandusarengu toetamiseks?

1.7. Mida mõistate prognoosi all?

1.8. Milline on info roll majandusarengu prognoosimisel? Tooge näiteid.

1.9. Mida mõistate entroopia all?

1.10. Selgitage prognoosi entroopiat. Tooge näiteid.

1.11. Mida mõistate otsustusprotsessi all?

1.12. Otsustusprotsessi võimalikud etapid. Tooge näiteid majandusjuhi praktikast otsuse langetamisele eelnevatest otsustusprotsessi etappidest.

1.13. Majandusministeeriumis on kaalumisel ettepanek kehtestada sisseveetavatele toidukaupadele kõrgendatud tollimaksud. Otsuse langetamiseks on vaja hinnata sellega kaasnevaid võimalikke tagajärgi. Millised ökonomeetrilised uuringud viiksite läbi oma seisukohtade põhjendamiseks?

1.14. Kohalikel omavalitsustel on võimalik tõsta kinnisvara maksu. Millised hinnamuudatused võivad sellega kaasneda Eesti kinnisvaraturul? Esitage ökonomeetrilise modelleerimise võimalikud etapid kinnisvara maksu tõstmisega kaasnevate hinnamuutuste analüüsimiseks ja prognoosimiseks Eesti kinnisvaraturul.

1.15. Eesti Panga majandusnõunikule esitati küsimus, kuivõrd ja kuidas raha pakkumise suurendamise kaudu on võimalik toetada majanduse arengut. Millised ökonomeetrilised uuringud tuleks läbi viia püstitatud probleemide lahendamiseks?

Tabelis 1.1 on toodud andmed pereliikmele osanevate tarbimiskulude (Y) ja sissetulekute (X) kohta USA-s aastatel 1979–1988.

Tabel 1.1

**Tarbimiskulud ja sissetulekud USA-s ühe pereliikme kohta
1979.–1988.a. (\$, 1982.a. hindades)**

Aasta	Y	X
1979	8904	9829
1980	8783	9722
1981	8794	9769
1982	8818	9725
1983	9139	9930
1984	9489	10 419
1985	9840	10 625
1986	10 123	10 905
1987	10 303	10 970
1988	10 546	11 337

Allikas: Economic Report of the President, 1990, Table c-27, p. 325.

- a) Millise seose olemasolu eeldate tarbimiskulude ja sissetulekute vahel?
- b) Esitage tabelis 1.1 toodud andmed graafiliselt. Analüüsige joonist. Kas tegemist on sama- või vastassuunalise seosega?

1.16. Analüüsige tarbimise ja elanike sissetulekute vahelisi seoseid Eestis. Võrrelge analüüsi tulemusi ülesande 1.15 tulemustega. Eesti olukorra analüüsimisel tuginege tabelites 1.2 ja 1.3 ning Eesti Statistikaameti kuukirjades toodud andmetele perede tulude ja kulude kohta.

Tabel 1.2

Eesti elanike rahalised sissetulekud 1992.–1995. a.

(aastas kokku leibkonnaliikme kohta, krooni)

	1992	1993	1994	1995
Töötasu (bruto)	2703	5821	9060	10 789
Tulu tootmistegevusest	230	477	741	757
Tulu sotsiaalkindlustusest	306	762	959	2278
Tulu raha paigutamisesest	273	502	755	1014
Välisvaluutatulud	339	146	160	93
Muud sissetulekud	370	655	665	1043

Tabel 1.3

Eesti elanike tarbimiskulud 1992.–1995. a.
(aastas kokku leibkonnaliikme kohta, krooni)

	1992	1993	1994	1995
Toiduained	570	2807	3879	5190
Alkohoolsed joogid	102	149	198	338
Tubakas	57	83	116	181
Kangad	16	22	32	33
Garderoobi-kaubad	349	529	807	1065
Püsikaubad	155	141	231	363
Eluase	463	1089	1596	2694
Kultuur ja hobid	165	339	486	515
Haridus ja tervishoid	61	174	310	372
Transport	361	629	917	1014
Teenindus	33	76	112	161
Muud kulutused	324	557	636	939

Allikas: Eesti statistika aastaraamat 1996. Tallinn: Eesti Statistikaamet, 1996

2. ÖKONOMEETRILINE MODELLEERIMINE

2.1. Mida mõistate mudeli all? Tooge näiteid erinevatest mudelitüüpidest.

2.2. Konstrueerige mõni verbaalloogiline mudel. Analüüsige seda.

2.3. Pakkuge välja mõne majandusprotsessi analüüsimiseks füüsilise mudeli konstrueerimise idee.

2.4. Mille poolest erineb ökonomeetriline mudel determineeritud matemaatilisest mudelist?

2.5. Millistest komponentidest koosneb ökonomeetriline mudel? Millised on nende omavahelised seosed?

2.6. Mida mõistate viitajaga endogeense (sõltuva) ja eksogeense (sõltumatu) muutuja all?

2.7. Mis on ökonomeetrilise mudeli peamised omadused?

2.8. Mida mõistate tarbimise piirkalduvuse all?

2.9. Leidke tarbimise piirkalduvus, kui seos tarbimiskulude (Y) ja sissetulekute (X) vahel on esitatav ruutfunktsioonina:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + B_2 X_i^2 + u_i \quad (2.1)$$

Analüüsige eratarbimiskulude piirkalduvust Eestis, kui sisemajanduse koguprodukt on 8800 mln. krooni ning sisemajanduse koguprodukti (X_i) ja eratarbimiskulude (Y_i) vahelist seost kirjeldava ruutfunktsiooni parameetrite B_1 ja B_2 hinnangud on vastavalt 18,3 ja $-0,001$.

2.10. Eeldusel, et Eesti majandust võib käsitleda tasakaalustatud süsteemina ($Y = C + G$, kus Y – sisemajanduse koguprodukt, C –

eratarbimiskulud, G – valitsemiskulud) ning eratarbimiskulude ja sisemajanduse koguprodukti vaheline seos on esitatav mudelina

$$C(\hat{Y}_t) = 645,3 + 0,512Y_t, \quad (2.2)$$

leidke multiplikaator, mis väljendab seost tarbimise piirkalduvuse ning valitsuskulude ja sisemajanduse koguprodukti vahel (*ceteris paribus*).

2.11. Tooge näiteid dünaamilise ja staatilise mudeli konstrueerimise võimaluste kohta Eestis.

2.12. Tabelis 2.1 on esitatud Eesti Statistikaameti poolt läbiviidava leibkondade uuringu andmed elanike rahaliste sissetulekute ja väljaminekute kohta Eesti maakondade lõikes 1996.aasta I kvartalis.

Tabel 2.1

Elanike rahalised sissetulekud ja väljaminekud maakonniti
1996. aasta I kvartalis (kuu keskmisena kroonides)

Maakond	Töötasu	Sotsiaal-kindlustus	Toidukulud	Kulud tööstuskaupadele ja teenustele
Harju	1007,98	286,22	573,70	815,00
Hiiu	623,58	275,78	403,34	503,72
Ida-Viru	673,37	279,61	461,94	919,65
Jõgeva	554,69	269,78	338,08	618,51
Järva	701,73	275,82	414,12	531,67
Lääne	667,26	209,08	414,12	629,74
Lääne-Viru	652,21	238,37	484,30	529,53
Põlva	396,38	303,42	350,33	444,73
Pärnu	665,49	358,36	449,46	557,04

Maakond	Töötasu	Sotsiaal-kindlustus	Toidukulud	Kulud töös- tuskaupadele ja teenustele
Rapla	923,64	246,25	474,80	644,37
Saare	667,63	280,25	390,51	578,22
Tartu	827,90	257,75	470,10	709,57
Valga	470,98	314,65	344,81	454,88
Viljandi	454,86	312,35	404,96	471,36
Võru	498,96	315,78	379,18	431,74

Allikas: Eesti statistika 1996. Kuukiri nr. 4 (52), Eesti Statistikaamet

Milliseid ökonomeetrilisi mudeleid soovitate konstrueerida Eesti regionaalpoliitika analüüsimiseks ja suunamiseks, tuginedes leibkondade uuringu andmetele. Tooge välja ökonomeetrilise modelleerimise võimalikud etapid.

2.13. Tooge näiteid ökonomeetriliste mudelite konstrueerimise kohta erinevate majanduspoliitiliste meetmete võimalike tagajärgede analüüsimiseks Eestis. Kasutage erinevaid lähenemisviise poliitika hindamiseks ja analüüsimiseks ökonomeetriliste mudelite abil.

3. ANDMED ÕKONOMEETRILISTES MUDELITES

3.1. Mis on peamisteks andmeallikateks ökonomeetriliste mudelite konstrueerimisel? Iseloomustage neid ja nendest saadava info kvaliteeti turumajandusele ülemineva Eesti tingimustes.

3.2. Mida loete olulisemateks majandusandmete spetsiifilisteks joonteks ning kuidas need võivad mõjutada ökonomeetriliste mudelite konstrueerimist?

3.3. Mis on iseloomulik majandusandmete aegridadele turumajandusele ülemineku tingimustes?

3.4. Millistest komponentidest võib koosneda aegrida? Iseloomustage neid komponente erinevate majandusandmete korral.

3.5. Millised on olulisemad tunnuste tüübid, mis võivad iseloomustada uurimisobjekti? Milliste tunnuste tüüpidega puututakse tavaliselt kokku ökonomeetrilistes uurimustes?

3.6. Iseloomustage olulisemaid tunnustevahelisi seoseid ning nende kvantitatiivse väljendamise võimalusi.

3.7. Milles avaldub andmeanalüüsi rakendamise spetsiifika ökonomeetriliste uuringute korral?

3.8. Analüüsige mõningaid arvutivõrgust saadavaid andmebaase. Millisteks ökonomeetrilisteks uuringuteks te neid kasutaksite?

3.9. Tuginedes Eesti Statistikaameti poolt avaldatavatele kuukirjadele, analüüsige Eesti pereelarve uuringuid ning nende põhjal saadava info ökonomeetrilisteks uurimusteks kasutamise võimalusi.

3.10. Analüüsige turumajandusele üleminekuperioodi iseloomulikke probleeme ökonomeetriliseks modelleerimiseks vajaliku andmekogumi komplekteerimiseks.

3.11. Analüüsige, tuginedes Eesti Statistika kuukirjadele, Eesti tööturгу iseloomustavaid andmeid ning nende kasutamise võimalusi tööturu probleemide lahendamist toetavates ökonomeetrilistes uuringutes.

4. STATISTILISED JAOTUSED

4.1. Millised olulisemad statistilised karakteristikud iseloomustavad üldkogumit ja valimit?

4.2. Mis on erinevus karakteristiku tegeliku väärtuse ja tema hinnangu vahel?

4.3. Kuidas leitakse üldkogumi ja valimi olulisemad karakteristikud?

4.4. Mida väljendab standardhälve?

4.5. Mis on usaldusvahemik ning usalduspiirid?

4.6. Milles seisneb piirteoreemi tähtsus statistikas ning ökonomeetrilistes uurimustes?

4.7. Mis on erinevus normaaljaotuse ja t-jaotuse vahel? Millal on otstarbekas kasutada t-jaotust?

4.8. Millal kasutatakse ökonomeetrilistes uurimustes F-jaotust?

4.9. Milline seos kehtib t-jaotuse ja F-jaotuse vahel?

4.10. Mis on vabadusaste?

4.11. Transpordifirma ühendab sadat allettevõtet, millede keskmine kasum on 1,5 miljonit krooni standardhälbega 120 000 krooni. Eeldusel, et transpordiettevõtte kasumijaotus vastab normaaljaotusele $N \sim (1,5; 0,120)$, hinnake, milline on tõenäosus, et

a) konkreetse ettevõtte kasum on väiksem kui 1 miljon krooni $P(X < 1 \text{ mln. EEK})$;

b) ettevõtte kasum on vahemikus 0,8–1,3 miljonit krooni $P(800\,000 \leq X \leq 1\,300\,000)$;

c) ettevõtte kasum on vahemikus 1,25–1,75 miljonit krooni
 $P(1\,250\,000 \leq X \leq 1\,750\,000)$.

Märkus. Transpordifirmat koos oma 100 allettevõttega käsitletakse kui üldkogumit.

4.12. Kui suur on kasumi tase, mille 10% transpordiettevõtetest ületavad (ülesande 4.11 tingimustel).

4.13. Jogurtitopsi keskmine kaal on 100 g ja standardhälve 12 g. Ühe jogurtitopsi keskmine tootmiskulu on 2 krooni. Kui kontrolli tulemusena leitakse, et jogurtitopsi sisu kaal on väiksem kui 95 grammi, tuleb topsi täiendavalt täita. Täiendava täitmise kulud on ca 50 senti ühe topsi kohta. Jogurtitopsi sisu kaalu 10% või suurem ületamine läheb firmale maksma keskmiselt 15 senti. Kontrolliti 1000 jogurtitopsi kaalu.

Analüüsige:

- mitme jogurtitopsi sisu kaal osutub keskmiselt väiksemaks kui 95 grammi ning kui suured on firma kulud seoses topside täiendava täitmisega;
- mitme jogurtitopsi sisu kaal osutub keskmiselt suuremaks kui 110 grammi ning millised on sellest tulenevad täiendavad kulud firmale.

Märkus: Eeldatakse, et keskväärtus ja standardhälve on leitud üldkogumi alusel, kuna 1000 ühikust koosnev valim vastab antud näite korral üldkogumi nõuetele.

4.14. Kaupluses kaaluti kümnet juhuslikult valitud viilutatud vorstipakki. Kaalumise tulemused osutusid järgmisteks (grammides): 160,3; 162,0; 159,0; 158,3; 160,4; 158,0; 161,2; 160,5; 159,6; 159,5.

Leidke:

- valimi keskväärtus ja standardhälve;
- vorstipaki keskmise kaalu usalduspiirid 95%-lise usaldusnivoo korral.

4.15. Ökonomeetria eksamitöö tulemused rahvamajanduse ja ettevõtetmajanduse eriala üliõpilaste gruppides kujunesid järgmisteks (hinnati saja palli süsteemis):

ettevõtetmajanduse erialal:

$$\bar{X}_1 = 75 \quad S_1^2 = 8,9 \quad n_1 = 100,$$

rahvamajanduse erialal:

$$\bar{X}_2 = 80 \quad S_2^2 = 7,4 \quad n_2 = 40.$$

Kuidas te kontrollite hüpoteesi, et tööde taseme varieeruvus mõlema rühma korral on sama.

Millist statistilist jaotust tuleks nende hüpoteeside kontrollimiseks kasutada?

5. STATISTILISED HÜPOTEESID

5.1. Mis on erinevus punkthinnangu ja vahemikhinnangu vahel?

5.2. Mis on alternatiivne hüpotees?

5.3. Mille poolest erinevad statistiliste hüpoteeside kontrollimisel tekkivad I ja II liiki vead?

5.4. Mis on nihketa hinnang (*unbiasedness*)?

5.5. Milliseid toodud väiteid loete õigeks? Põhjendage!

- parameetri hinnang on juhuslik suurus, parameetri väärtus ei ole juhuslik, vaid on fikseeritud;
- I liiki veaga on alati tegemist juhul, kui lükatakse tagasi nullhüpotees; -
- kui vabadusastmete arv suureneb, siis t-jaotus läheneb normaaljaotusele;
- piirteoreemi kohaselt valimi keskväärtuse jaotus vastab alati normaaljaotusele.

5.6. Keskmine kuupalk Eestis on 3000 krooni dispersiooniga 10 000.

Leidke:

- milline on tõenäosus, et konkreetse töötaja palk on vahemikus 2800 kroonist kuni 3200 kroonini;
- milline on tõenäosus, et töötaja palk on üle 3300 krooni;
- milline on tõenäosus, et palk on alla 2750 krooni;
- kas peab paika väide: tõenäosus, et palk on üle 10 000, on praktiliselt null.

Märkus: Lähtume eeldusest, et töötajate palga jaotus vastab normaaljaotusele. Nii keskmine palk μ kui dispersioon σ^2 on leitud üldkogumi alusel.

5.7. Pere-eelarve uuringute alusel on 1000 töötajast koosnevale valimile tuginedes saadud keskmiseks palgaks 2800 krooni. Üldkogumi andmetel on teada, et $\mu_X = 3000$ ning $\sigma^2 = 10\,000$ (ülesanne 5.6). Tegemist on normaaljaotusega juhusliku suurusega

$$\bar{X} \sim \left(3000, \frac{\sigma^2}{1000} = 10 \right).$$

Leidke:

- kas üldkogumi keskvärtus $\mu_X = 3000$ asub valimi alusel hinnatud keskvärtuse usalduspiirkonnas (usaldusnivooks võtke 0,95);
- kontrollige hüpoteesipaari ($\alpha = 0,05$)

$$H_0: \mu = 3000$$

$$H_1: \mu \neq 3000$$

Millist statistilist jaotust ja sellele vastavat kriteeriumi te kasutate hüpoteesipaari kontrollimiseks?

5.8. Eksperimentaalselt pakkeliinilt tulevate mehupakkide kaalu kontrollimisel selgus, et 5% neist kaalus vähem kui 650 grammi ja 10% rohkem kui 680 grammi.

Leidke:

- mehupakkide keskmine kaal ja selle standardhälve;
- milline on tõenäosus, et mehupaki kaal ületab 700 g.

5.9. Üldkogumi keskvärtusega μ ja dispersiooniga $\sigma^2 = 2$ põhjal on komplekteeritud valim 8; 9; 6; 13; 11; 8; 12; 5; 4; 14

Kontrollige olulisuse nivool 0,05 järgmisi hüpoteesipaare:

$$a) H_0: \mu = 5$$

$$H_1: \mu \neq 5$$

b) $H_0: \mu = 5$

$H_1: \mu > 5$

c) milline on olulisuse tõenäosus variandi (a) hüpoteesipaari korral?

5.10. Kümnest liikmest koosneva valimi keskvärtus on $\bar{X} = 8$ ja standardhälve $S = 4$. Valim on leitud normaaljaotusega $N \sim (\mu, \sigma)$ üldkogumi alusel. Leidke usaldusnivool 0,95 üldkogumi keskvärtuse usalduspiirid. Millist statistilist jaotust ning sellele vastavat kriteeriumi on otstarbekas kasutada?

5.11. Üldkogumist, keskvärtusega $\mu = 8$ ja dispersiooniga $\sigma^2 = 36$, on komplekteeritud 25 liikmest koosnev valim, mille keskvärtuseks on 7,5.

Leidke:

a) milline on tõenäosus, et selle valimi keskvärtus on 7,5 või väiksem;

b) kas valim keskvärtusega $\bar{X} \leq 7,5$ saab tuleneda normaaljaotusega üldkogumist $X \sim N(8; 36)$.

5.12. Kümnest firmast koosneva valimi puhul on firma keskmine kasum 900 000 krooni standardhålbega 100 000 krooni. Leidke valimi alusel hinnatud keskmise kasumi usalduspiirid.

5.13. Toidusegud A_1 ja A_2 sisaldavad B-grupi vitamiine. Analüüsitud on 16 paki mõlema toidusegu koostist. Analüüsi tulemused B-grupi vitamiinide sisalduvuse kohta on alljärgnevad:

	B-vitamiini sisaldus (mg)	Standardhälve
Segu A_1	1,075	0,5796
Segu A_2	1,159	0,6134

Kas segude varieeruvus B-vitamiini sisalduse suhtes on sama?
Millist statistilist jaotust on püstitatud probleemi puhul otstarbekas kasutada?

6. LINEAARNE REGRESSIOONIMUDEL

6.1. Milles seisneb erinevus üldkogumi ja valimi regressioonimudelite vahel?

6.2. Milleks on üldkogumi regressioonimudeli käsitus vajalik, kui selle konstrueerimine ökonomeetrilistes uurimustes on enamasti võimatu?

6.3. Milliseid toodud väiteid loete õigeks:

- Stohhastiline komponent u_i ja jääkliige e_i on samad mõisted.
- Üldkogumi regressioonimudeli põhjal on võimalik leida üldkogumi sõltuvat muutujat Y_i , mis vastab sõltumatule muutujale X_i .
- Lineaarne regressioonimudel on lineaarne muutujate suhtes.
- Lineaarse regressioonimudeli korral sõltumatu muutuja väljendab põhjust ja sõltumatu muutuja tagajärgi.
- Üldkogumi regressioonimudeli $E(Y/X) = B_0 + B_1X$ regressioonikordaja B_1 väljendab sõltuva muutuja Y muutumist, kui sõltumatu muutuja X muutub ühe ühiku võrra.
- Igapäevases majanduselus ei oma lihtsa regressioonimudeli konstrueerimine mõtet, kuna majandusnähtuse kujunemist ei saa kunagi kirjeldada vaid ühe sõltumatu muutuja abil.

6.4. Millised esitatud mudelitest on lineaarsed regressioonimudelid?

- $Y_i = B_0 + B_1(1/X_i)$
- $Y_i = B_0 + B_1 \ln X_i + u_i$
- $\ln Y_i = B_0 + B_1 X_i + u_i$
- $\ln Y_i = B_0 + B_1 \ln X_i + u_i$

$$e) Y_i = B_0 + B_1 B_2 X_i + u_i$$

$$f) Y_i = B_0 + B_1^3 X_i + u_i$$

6.5. Milliseid toodud väiteid loete õigeaks:

- Vähimruutude meetodi kasutamisel regressioonimudeli parameetrite hindamiseks minimeeritakse juhusliku komponendi ruutude summa $\sum u_i^2$.
- Lihtsa regressioonimudeli parameetri B_1 hinnangu b_1 leidmisel vähimruutude meetodil on oluline, et juhuslik komponent u_i on normaaljaotusega.
- Vähimruutude meetodil leitud parameetrite hinnangud b_1 ja b_2 on normaaljaotusega vaid juhul, kui juhuslik komponent u_i on normaaljaotusega.
- Determinatsioonikordaja (R^2) väljendab koguhajuvuse (TSS) suhet regressioonimudeli poolt kirjeldatud hajuvusse (ESS).
- Kui etteantud olulisuse nivoo ja vabadusastmete $n - k$ korral t-kriteeriumi karakteristik absoluutväärtus on suurem kriitilisest väärtusest ($|t| > t_{\text{kriitiline}}$), siis tuleb jääda nullhüpoteesi juurde.
- Korrelatsioonikordaja ja parameetri B_1 märgid langevad alati kokku.

6.6. Tabelis 6.1 on toodud andmed elanike sissetulekute (X) ja tarbimiskulude (Y) kohta nädalas (kroonides). Samale sissetulekute tasemele vastavad erinevates peredes sageli erinevad tarbimiskulud.

Leidke:

- Keskmiised tarbimiskulud igal sissetuleku tasemel $E(Y/X_i)$.
- Joonistage graafik illustreerimaks keskmiste tarbimiskulude ja sissetulekute vahelist seost.
- Millist seose kuju eeldate perede sissetulekute ja tarbimiskulude vahel?

d) Esitage üldkujul tarbimiskulude ja sissetulekute vahelist seost iseloomustavad üldkogumi ja valimi regressioonimudelid.

Tabel 6.1

Sissetulek ühe pere- reliikme kohta (X)	Tarbimiskulud ühe pere liikme kohta (Y)								
80	55	60	65	70	75				
100	65	70	74	80	85	88			
120	79	84	90	94	98				
140	80	93	95	103	108	113	115		
160	102	107	110	116	118	125			
180	110	115	120	130	135	140			
200	120	136	140	144	145				
220	135	137	140	152	157	160	162		
240	137	145	155	165	175	189			
260	150	152	175	178	180	185	191		

6.7. Ülesandes 6.6 toodud andmete põhjal on komplekteeritud valim, mis iseloomustab tarbimiskulusid ja pere sissetulekuid konkreetsete juhuslikult valimisse sattunud pere korral. Valimi andmed on tabelis 6.2.

Tabel 6.2

Tarbimis- kulud (Y)	70	65	90	95	110	115	120	140	155	150
Sissetule- kud (X)	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260

- a) Joonistage graafik, mis iseloomustaks tarbimiskulude ja sissetulekute vahelist seost tabelis 6.2 toodud valimi korral. Millise seose olemasolu võib eeldada tarbimiskulude ja sissetulekute vahel?
- b) Leidke tarbimiskulude ja sissetulekute vahelist seost iseloomustava lineaarse regressioonimudeli parameetrite hinnangud.
- c) Kas üldkogumi ja valimi regressioonimudelid langevad kokku?

6.8. On konstrueeritud regressioonimudel, mis väljendab kohvi tarbimise (Y_t – ühe inimese kohta päevas joodud kohvitasside arv t-ndal perioodil) ja kohvi hinna (X_t – kohvi hind t-ndal perioodil) vahelist seost:

$$\hat{Y}_t = 2,6911 - 0,4795X_t \quad (6.1)$$

- a) Kas tegemist on staatilise või dünaamilise regressioonimudelliga?
- b) Tõlgendage regressioonimudeli parameetreid.
- c) Leidke kohvi tarbimise hinnaelastsus.

6.9. Tarbijahinnaindeksi ja aktsia börsihinna vahelist seost kirjeldab regressioonimudel

$$Y_t = -195,08 + 3,8211X_t, \quad (6.2)$$

kus

Y_t – börsihinna indeks aastal t ,

X_t – tarbijahinnaindeks aastal t .

Tõlgendage regressioonimudeli parameetreid.

6.10. Regressioonimudeli juhuslikule liikmele esitatavatest nõuetest lähtuvalt näidake toodud seoste paikapidavust.

- a) $\sum e_t = 0$ (järelilikult ka $\bar{e} = 0$)

$$b) \sum e_i X_i = 0$$

$$c) \sum e_i \hat{Y}_i = 0.$$

6.11. Tabelis 6.3 on esitatud andmed nominaalse intressimäära (Y) ja inflatsioonimäära (X) kohta üheksas arenenud turumajandusega riigis.

Tabel 6.3

Riik	Y (%)	X (%)
Austraalia	11,9	7,7
Kanada	9,4	4,0
Prantsusmaa	7,5	3,1
Saksamaa	4,0	1,6
Itaalia	11,3	4,8
Mehhiko	66,3	51,0
Inglismaa	10,3	6,8
USA	7,6	4,4
Šveits	2,2	2,0

Allikas: R. Dornbusch, S. Fischer. *Macroeconomics*. 5 th. ed. McGraw-Hill, New York, 1990.

- Joonistage graafik, mis iseloomustaks nominaalse intressimäära ja inflatsioonimäära vahelist seost. Millise seose olemasolu võib eeldada analüüsitavate näitajate vahel?
- Hinnake intressimäära (Y_i) ja inflatsiooni (X_i) vahelist seost iseloomustava regressioonimudeli $Y_i = B_0 + B_1 X_i + u_i$ parameetreid ning mudeli ja selle parameetrite statistilist olulisust.
- Analüüsige regressioonimudeli parameetreid. Kuidas on regressioonimudel kooskõlas makroteooriast (vt. Dornbusch &

Fischer) tuntud Fischeri võrrandiga, mille kohaselt ligilähedastelt kehtib seos: nominaalne intressimäär = eeldatav reaalne intressimäär + eeldatav inflatsioonimäär?

6.12. On konstrueeritud regressioonivõrrand

$$\hat{Y}_t = -66,105 + 0,0650X_t$$

(10,7509)	(...)	stan dardhälve (se)	(6.3)
(...)	(18,73)	t – kriteerium (t)	

$$R^2 = 0,9460, \quad n = 20$$

Täitke puuduvad lüngad. Analüüsi hüpoteesipari

$$H_0: B_1 = 0$$

$$H_1: B_1 \neq 0$$

6.13. Kuueteistkümne aasta andmetel sõiduautode müügi ja elanikkonna sissetulekute kohta on konstrueeritud regressioonimudel

$$\hat{Y}_t = 5807 + 3,24X_t$$

(1,634)	t – kriteerium	(6.4)
---------	----------------	-------

$$R^2 = 0,22$$

kus

Y_t – sõiduautode müük (tuhandetes);

X_t – realselt kasutatav sissetulek (miljonites dollarites).

a) Leidke parameetri B_1 95%-lised usalduspiirid.

b) Kontrollige hüpoteesipari: ($\alpha = 0,05$)

$$H_0: B_1 = 0$$

$$H_1: B_1 \neq 0$$

6.14. Investeeringute analüüsis kasutatakse regressioonimudelit

$$r_t = B_0 + B_1 r_{mt} + u_t, \quad (6.5)$$

kus

 r_t – aktsia dividendimäär; r_{mt} – aktsiaturuindeks e. börsiindeks.

Parameetrit B_1 tõlgendatakse investeeringute analüüsis *beeta koeffitsiendina*, millega väljendatakse tururiski. Finantsökonomeetriast on tuntud regressioonimudel, mis iseloomustab arvutifirma IBM aktsia kasumimäära kujunemist Chicago aktsiaturul. Mudel on konstrueeritud H. R. Fogleri ja S. Ganapathy poolt 1956.–1976. a. andmetel. Kasutatud on 240 ajamomenti.

$$\hat{r}_t = 0,7264 + 1,0598r_{mt} \\ (0,3001) \quad (0,0728) \quad \text{standardhälve} \quad (6.6)$$

$$R^2 = 0,4710$$

- Andke parameetritele B_0 ja B_1 majanduslik tõlgendus.
- Millist infot annab investeeringute analüüsiks determinatsioonikordaja R^2 ?
- Kui beetakoeffitsient on suurem kui üks, siis investeeringute analüüsis järeldatakse, et tegemist on agressiivse väärtpebriga. Konstrueerige hüpoteesipaar sellise järelduse kontrollimiseks. Kasutage statistilise hinnangu andmiseks t-kriteeriumi olulisuse nivool 0,05.

6.15. Sisemajanduse koguprodukti (SKP) ja raha pakkumise M_1 vahelist seost kirjeldab regressioonimudel

$$\begin{aligned}
 SKP_t &= -787,4724 + 8,0863M_{1t} \\
 se &= (\dots) \quad (0,2197) \\
 t &= (-10,10001) \quad (\dots) \\
 R^2 &= 0,9912; n = 14
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

- Täitke lüngad vabaliikme standardhälbe ja parameetri B_1 t-kriteeriumi kohta.
- Kontrollige hüpoteesi raha pakkumise olulise positiivse mõju kohta sisemajanduse koguproduktile.
- Kas negatiivne vabaliige omab antud mudeli korral sisulist tõlgendust?
- Prognoosige sisemajanduse koguprodukti suurust, juhul kui raha pakkumine M_1 on 552 miljonit krooni.

6.16. Et analüüsida, kas olukord majanduses mõjutab presidendivalimiste tulemusi, konstrueeris Ameerika poliitika- ja majandusteadlane Gary Smith USA 1928.–1980. a. presidendivalimiste tulemustele tuginedes regressioonimudeli ($n = 14$, kuna presidendivalimised toimuvad iga nelja aasta järel)

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}_t &= 53,10 - 1,70X_t \\
 t &= (34,10) \quad (-2,67) \\
 R^2 &= 0,37,
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

kus

\hat{Y}_t – valimistulemused (valitud presidendi poolt häälitanute %),
 \hat{X}_t – tööpuuduse taseme muutumine.

- Kas modelleerimise tulemused kinnitavad statistiliselt olulise seose olemasolu valimistulemuste ja tööpuuduse vahel ($\alpha = 0,05$)?

b) Leidke parameetrite B_0 ja B_1 hinnangute b_0 ja b_1 standardhälbed.

6.17. Tootmisvõimsuste kasutamise määra (Y) ja inflatsioonitase (X) vahel on kaheksateistkümne aasta andmete ($n = 18$) alusel konstrueeritud regressioonimudel

$$\hat{Y}_t = -70,85 + 0,8880X_t$$

$$t \quad (-5,89) \quad (5,90) \quad (6.9)$$

$$R^2 = 0,685,$$

kus

Y_t – tootjahinnaindeks t -ndal aastal,

X_t – tootmisvõimsuste kasutamise määr t -ndal aastal.

- Millise seose olemasolu eeldate analüüsitava näitajate vahel?
- Milline on parameetri B_1 majanduslik sisu? Kas parameetri hinnang $b_1 = 0,8880$ on statistiliselt oluline?
- Koostage hüpoteesipaar kontrollimaks, kas parameeter B_1 erineb statistiliselt olulisel määral ühest.
- Tootmisvõimsuste kasutamise määra loomulikuks tasemeks loetakse tootmisvõimsuste kasutamist olukorras, kus inflatsioon on null ($\hat{Y}_t = 0$). Leidke see.

6.18. Kolmeteistkümnest ettevõttest koosneva valimi alusel on konstrueeritud regressioonimudel kirjeldamiseks seost ettevõtte aktiivsetelt makstavate dividendide (Y) ja puhaskasumi (X) vahel.

$$\hat{Y} = 373,3014 + 0,4199X$$

$$se \quad (9523,08) \quad (0,1154)$$

$$t \quad (0,0392) \quad (3,6386) \quad (6.10)$$

$$R^2 = 0,546$$

- a) Andke parameetritele B_1 majanduslik tõlgendus.
 b) Kontrollige parameetri B_1 statistilist olulisust ning leidke usalduspiirid olulisuse nivool 0,05.

6.19. 1979.–1993. aastate andmetel (1983 = 0) on konstrueeritud regressioonimudel, kirjeldamaks keskmise tunnitasu (Y_t) ja tööviljakuse (X_t) vahelist seost.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= 70,9180 + 0,2700X_t \\ \text{se} & \quad (7,941) \quad (0,0782) \\ t & \quad (8,93) \quad (3,45) \\ R^2 &= 0,4786 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Kontrollige mudeli ja tema parameetri B_1 hinnangu statistilist olulisust ($\alpha = 0,05$). Andke parameetritele sisuline tõlgendus.

6.20. Tabelis 6.4 on toodud andmed aktsia dividendimäära (Y_t) ja aktsiaturuindeksi (X_t) kohta.

Tabel 6.4

Y_t	67,5	19,2	-35,2	-42,0	63,7	19,3	3,6	20,0	40,3
X_t	19,5	8,5	-29,3	-26,5	61,9	45,5	9,5	14,0	35,3

- a) Konstrueerige regressioonimudelid

$$\hat{Y}_t = b_1 X_t + u_t \tag{6.12}$$

ja

$$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 X_t + u_t \tag{6.13}$$

Määrake vabadusastmete arv kummagi mudeli korral.

- b) Kumba mudelit eelistate kasutada? Miks?
 c) Kas konstrueeritud mudelite determinatsioonikordajad on omavahel võrreldavad?

7. KORRELATSIOON JA REGRESSIOON

7.1. Mis on erinevus korrelatsioon- ja regressioonanalüüsi vahel?

7.2. Selgitage sümmeetriliste ja asümmeetriliste otsustuste olemust ning korrelatsioon- ja regressioonanalüüsi kasutamise võimalusi erinevate otsustuste tegemiseks.

7.3. Mis on väärkorrelatsioon? Tooge näiteid.

7.4. Milliseid toodud väidetest loete õigeteks? Põhjendage!

a) Valimi alusel leitud korrelatsioonikordaja on üldkogumi korrelatsioonikordaja statistiliseks hinnanguks vaid juhul, kui olulisuse nivoo on 0,05 või 0,001.

b) Lineaarne korrelatsioonikordaja on vahemikus $[0; +1]$.

c) Kui $r > 0$, siis võib järeldada, et X-i suurenedes suureneb ka Y.

d) Kui juhuslikud suurused X ja Y on mõlemad normaaljaotusega, siis $r = 1$ korral saab nendevaheline seos olla ainult lineaarne.

e) Kui kahe juhusliku suuruse X ja Y vaheline paariskorrelatsioonikordaja r_{xy} on väiksem korrelatsioonikordaja kriitilisest väärtusest, siis tuleb alati jääda nullhüpoteesi juurde, mille kohaselt kahe uuritava nähtuse vahel puudub statistiliselt oluline korrelatiivne seos.

f) Lineaarse korrelatsioonikordaja (r) ja regressioonimudeli mitmese korrelatsioonikordaja (R) absoluutväärtused langevad kokku.

7.5. Mida mõõdab osakorrelatsioonikordaja?

7.6. Millal langevad osakorrelatsioonikordaja $r(YX/Z)$ ja paaris-korrelatsioonikordaja $r(YX)$ väärtused kokku?

7.7. Mis juhtub juhuslike suuruste X , Y ja Z vahelise osakorrelatsioonikordajaga, kui Y ja Z vahel on range lineaarne seos?

7.8. Kahe juhusliku suuruse X_1 (toidukaupade tarbimine) ja X_2 (elanike tulud) vaheliste seoste uurimiseks on konstrueeritud regressioonimudelid

$$\hat{X}_1 = 180,4010 + 0,3005X_2$$

$$t = (2,26) \quad (15,09) \quad (7.1)$$

$$R^2 = 95,8 \quad \bar{R}^2 = 95,4$$

ja

$$\hat{X}_2 = -42,92 + 3,1874X_1$$

$$t = (-1,45) \quad (15,09) \quad (7.2)$$

$$R^2 = 95,8 \quad \bar{R}^2 = 95,4$$

Analüüsige kumbagi regressioonimudelit ning selgitage nende kasutamise võimalusi sümmeetriliste ja asümmeetriliste otsustuste tegemiseks.

7.9. Tabelis 7.1 on toodud andmed sõiduautode müügi ja seda mõjutavate tegurite kohta USA-s aastatel 1971–1986. Andmete esitamisel on kasutatud järgmisi tähistusi:

Y_t – sõiduautode müük (tuh. tk),

X_{1t} – uute autode hinnaindeks (1967 = 100),

X_{2t} – tarbijahinnaindeks (1967 = 100),

X_{3t} – isiklikult kasutatav tulu (biljon \$),

X_{4t} – intressimäärad (%),

X_{5t} – töötajate arv (tuh.).

Tabel 7.1

Aasta	Y_t	X_{1t}	X_{2t}	X_{3t}	X_{4t}	X_{5t}
1971	10 227	112,0	121,3	776,8	4,89	79 367
1972	10 872	111,0	125,3	839,6	4,55	82 153
1973	11 350	111,1	133,1	949,8	7,38	85 064
1974	8775	117,5	147,7	1038,4	8,61	86 794
1975	8539	127,6	161,2	1142,8	6,16	85 846
1976	9994	135,7	170,5	1252,6	5,22	88 752
1977	11 046	142,9	181,5	1379,3	5,50	92 017
1978	11 164	153,8	195,3	1551,2	7,78	96 048
1979	10 559	166,0	217,7	1729,3	10,25	98 824
1980	8979	179,3	247,0	1918,0	11,28	99 303
1981	8535	190,2	272,3	2127,6	13,73	100 397
1982	7980	197,6	286,6	2261,4	11,20	99 526
1983	9179	202,6	292,4	2428,1	8,69	100 834
1984	10 394	208,5	307,6	2670,6	9,65	105 005
1985	11 039	215,2	318,5	2841,1	7,75	107 150
1986	11 450	224,4	323,4	3022,1	6,31	109 597

Allikas: Business Statistics, 1986, A. Supplement to the Current Survey of Business, U. S. Department of Commerce.

- Leidke sõiduautode müügi (Y_t) ja seda mõjutavate võimalike tegurite (X_{it} , $i = 1, 2, \dots, 5$, $t = 1, 2, \dots, 17$) vaheline paariskorrelatsioonimaatriks.
- Hinnake lineaarsete korrelatsioonikordajate statistilist olulisust.
- Milliseid järeldusi saate teha korrelatsioonikordajate hinnangute alusel sõiduautode turu kohta USA-s analüüsitaval perioodil?

7.10. Leidke tabeli 7.1 andmetel järgmised osakorrelatsioonikordajad ja tõlgendage neid:

- a) tarbijahinnaindeksi (X_2) ja isiklikult kasutatava tulu (X_3) vahel, kui töötajate arv (X_5) ei muutu;
- b) autode müügi (Y) ja intressimäärade (X_4) vahel, kui tarbijahinnaindeks ei muutu;
- c) intressimäärade (X_4) ja tarbijahinnaindeksi (X_2) vahel, kui elanike tulud (X_3) ei muutu.

7.11. Tuginedes tabeli 7.1 andmetele ja ülesandes 7.9 leitud korrelatsioonimaatriksile, analüüsige, millised tegurid tuleks lülitada sõiduautode müüki iseloomustavasse regressioonimudelisse. Konstrueerige regressioonimudelid ning hinnake nende parameetreid.

7.12. Analüüsige sõiduautode müügiturgu Eestis. Millised tegurid mõjutavad autode müüki Eestis? Mis suunalised on sõiduautode müügi ja seda mõjutavate tegurite vahelise seosed?

8. MITMENE REGRESSIOONIMUDEL

8.1. Mida väljendab osaregressioonikordaja?

8.2. Mida iseloomustab mitmene determinatsioonikordaja R^2 ?

8.3. Mida iseloomustab korrigeeritud determinatsioonikordaja \bar{R}^2 (*adjusted R^2*)?

8.4. Kuidas kontrollida

- regressioonimudeli parameetrite (osaregressioonikordajate) individuaalset statistilist olulisust?
- osaregressioonikordajate koosmõju statistilist olulisust?

8.5. Kontrollige toodud väidete paikapidavust:

- R^2 ja \bar{R}^2 langevad kokku vaid juhul, kui nende mõlema väärtus on üks;
- kui osaregressioonikordaja t -kriteeriumi empiiriline väärtus ületab tabeliväärtust, siis järelikult omab ta regressioonimudeli kui terviku seisukohalt olulist mõju sõltuva muutuja koguvarieerimisele;
- kui $R^2 = 1$, siis $F = 0$ ning kui $R^2 = 0$, siis $F = \infty$;
- kui osaregressioonikordaja on statistiliselt oluline, siis tema väärtus peab olema suurem ühest;
- t -kriteeriumi tabeliväärtuse leidmiseks piisab, kui on teada vabadusastmete arv;
- sõltuva muutuja koguvarieeruvust iseloomustava suuruse (TSS) vabadusastmete arv on alati $n - 1$ sõltumata sellest, kui palju sõltumatuid muutujaid on regressioonimudelisse lülitanud.

8.6. Leidke Studenti t-kriteeriumi tabeliväärtused tabelis 8.1 esitatud situatsioonide korral.

Tabel 8.1

	Vabadusastmete arv	Olulisuse nivoo	Ühe- või kahepoolne hüpootees H_1
a)	12	5	kahepoolne
b)	20	1	ühepoolne (> 0)
c)	30	5	ühepoolne (< 0)
d)	200	5	kahepoolne

8.7. Leidke F-kriteeriumi väärtused tabelis 8.2 esitatud situatsioonide korral.

Tabel 8.2

	$n_1 = k - 1$	$n_2 = n - k$	α
a)	5	5	0,05
b)	4	19	0,01
c)	20	200	0,05

8.8. Elektripuhurite hinna (Y) määramisel lähtuti 19 puhurile antud kvaliteedihinnangust (X_1), nende kasutegurist elektri tarbimise suhtes (X_2) ning puhuri reguleerimise võimaluste arvust (X_3). Sõltuva muutuja Y_i ja sõltumatute muutujate $X_{j,i}$ ($j = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, 19$) vahelist seost kirjeldab regressioonimudel

$$\hat{Y}_1 = -68,236 + 0,023X_{1t} + 19,729X_{2t} + 7,653X_{3t}$$

$$\text{se} = \quad (0,005) \quad (8,992) \quad (3,082) \quad (8.1)$$

$$R^2 = 0,84$$

- Hinnake regressioonimudeli parameetrite (osaregressiooni-kordajate) statistilist olulisust olulisuse nivool 0,05.
- Hinnake sõltumatute muutujate koosmõju elektripuhurite hinna kujunemisele.
- Andke regressioonimudelile majanduslik tõlgendus.

8.9. Et analüüsida isiklikult kasutatava tulu ning depositeeritud intressimäära mõju tarbimiskuludele, on 1978. aasta I kvartali kuni 1996. aasta IV kvartali andmete põhjal konstrueeritud tarbimismudel ($n = 76$)

$$\hat{Y}_t = -10,96 + 0,93X_{1t} - 2,09X_{2t}$$

$$t = (-3,33) (249,06) (-3,09) \quad (8.2)$$

$$R^2 = 0,9996,$$

kus

\hat{Y}_t – isiklik tarbimine (tuh. kroonides),

X_{1t} – kasutatav tulu (tuh. kroonides),

X_{2t} – depositeeritud intressimäär (%).

- Milline on tarbimise piirkaldumus tulu suhtes? Hinnake selle statistilist olulisust.
- Hinnake hüpoteesipaari
 $H_0: B_1 = 1$
 $H_1: B_1 \neq 1$
 paikapidavust olulisuse nivool 0,05.
- Millise seose olemasolu eeldate tarbimise ja depositeeritud protsendimäära vahel?
- Kontrollige hüpoteesipaari

$$H_0: B_2 = 0$$

$$H_1: B_2 < 0$$

paikapidavust olulisuse nivool 0,05.

e) Hinnake regressioonimudeli statistilist olulisust $\alpha = 0,05$ ja $\alpha = 0,01$ korral.

f) Leidke osaregressioonikordajate standardhälbed (se (b)).

8.10. Kauba impordi mahu (\hat{Y}_t) kujunemine on 19 aasta andmetel kirjeldatav regressioonimudeliga

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= -58,9 + 0,20X_{1t} - 0,10X_{2t} \\ \text{se} &= \quad (0,0097) \quad (0,084) \\ t &= \quad (21,98) \quad (-1,1905) \\ R^2 &= 0,960; \quad \bar{R}^2 = 0,955, \end{aligned} \tag{8.3}$$

kus

Y_t – kauba impordi maht t-ndal aastal (tuh. kroonides),

X_{1t} – tarbimiskulud t-ndal aastal (tuh. kroonides),

X_{2t} – kauba impordihinna ja kodumaise hinna suhe t-ndal aastal

$$\left(\frac{\text{impordi hind}}{\text{kodumaine hind}} \right).$$

a) Kontrollige regressioonimudeli ja tema parameetrite statistilist olulisust $\alpha = 0,05$ korral.

b) Andke regressioonimudelile sisuline tõlgendus.

8.11. Tabelis 8.3 on toodud andmed tööhõive määra (Y_t), tööpuiduse taseme (X_{1t}), keskmise tunnipalga 1977. aasta hindades (X_{2t} ; 1977 = 100) ja keskmise tunnipalga jooksvates hindades (X_{3t} ; 1977 = 100) kohta USA põllumajanduses aastatel 1973–1987.

Tabel 8.3

Aasta	Tööhõive määr (%) (Y_t)	Tööpuuduse tase (%) (X_{1t})	Keskmise tunnipalga in- deks 1977.a. hindades (X_{2t})	Keskmise tun- nipalga indeks jooksvates hindades (X_{3t})
1973	60,8	4,9	101,1	74,1
1974	61,3	5,6	93,8	80,0
1975	61,2	8,5	97,6	86,7
1976	61,6	7,7	99,0	92,9
1977	62,3	7,1	100,0	100,0
1978	63,2	6,1	100,5	108,2
1979	63,7	5,8	97,4	116,8
1980	63,8	7,1	93,5	127,3
1981	63,9	7,6	92,6	138,9
1982	64,0	9,7	93,4	148,5
1983	64,0	9,6	94,8	155,4
1984	64,4	7,5	94,6	160,3
1985	64,8	7,2	94,1	165,2
1986	65,3	7,0	95,0	169,4
1987	65,6	6,2	94,0	173,5

Allikas: Economic Report of the President, 1989. Table B-37, Table B-39, Table B-44.

Märkus. Tööjõud = töötajad + töötud.

Toodud andmetel on konstrueeritud kaks regressioonimudelit.

$$\text{Mudel I} \quad Y_t = B_0 + B_1 X_{1t} + B_2 X_{2t} + u_t \quad (8.4)$$

$$\text{Mudel II} \quad Y_t = A_0 + A_1 X_{1t} + A_2 X_{3t} + v_t \quad (8.5)$$

- a) Milliste seoste olemasolu eeldate tabelis toodud näitajate vahel? Hinnake mõlema mudeli parameetreid.
- b) Hinnake mõlema mudeli ja nende parameetrite statistilist olulisust.
- c) Andke mudelitele (8.4) ja (8.5) majanduslik tõlgendus. Millise hinnangu annate toodud mudelite põhjal töökonoomikast tuntud hüpotesile, mille kohaselt kõrgema tööpuudusega kaasneb nn. heidutatud töötajate (*discourage workers*) arvu kasv. Heidutatuteks loetakse neid potentsiaalseid töötajaid, kes ei julge tulla tööturule konkureerima ega registreeri ennast seetõttu ka töötutena ning seega jäävad tööjõu arvestusest välja.

8.12. Tabelis 8.4 on esitatud andmed tööpuuduse määra (töötute % tööealisest elanikkonnast), tööealise elanikkonna ning elanike kuukeskmiste rahaliste sissetulekute ja mitterahaliste tulude kohta (mõlemad kroonides ühe elaniku kohta) Eesti maakondades 1996. aasta I kvartalis.

Tabel 8.4

Maakond	Tööpuuduse tase	Tööealine elanikkond	Rahalised sissetulekud	Mitterahalised tulud
Harju	1,6	333 787	1771,52	8,85
Hiiu	2,7	6 563	1139,18	2,22
Ida-Viru	3,8	117 790	1141,20	2,62
Jõgeva	3,0	22 942	1258,07	8,14
Järva	3,1	24 217	1286,83	3,71
Lääne	3,1	18 368	1222,67	2,07
Lääne-Viru	1,8	42 042	1200,89	7,97
Põlva	4,1	19 308	998,20	9,48
Pärnu	1,0	54 600	1311,73	6,29
Rapla	2,7	22 052	1579,50	4,84

Maakond	Tööpuuduse tase	Tööealine elanikkond	Rahalised sissetulekud	Mitterahalised tulud
Saare	3,8	22 505	1297,65	5,42
Tartu	1,6	87 351	1529,54	19,43
Valga	3,6	21 419	1049,21	13,98
Viljandi	3,4	34 557	1119,31	3,28
Võru	4,5	23 649	1089,28	4,49

Allikas: Eesti statistika 1996. Kuukiri nr.4 (52), Eesti Statistikaamet.

- Kas tabelis esitatud näitajate vahel esineb statistiliselt oluline korrelatiivne seos?
- Konstrueerige regressioonimudelid iseloomustamiseks tööpuuduse taseme erinevusi regioonide lõikes. Hinnake konstrueeritud mudelite statistilist olulisust ja kirjeldatuse taset.
- Millised tegurid mõjutavad Teie arvates tööturu olukorda Eesti maakondades kõige enam?

8.13. Tabelis 8.5 on toodud andmed mitmese determinatsioonikordaja (R^2), valimi mahu (n) ja mudeli parameetrite arvu (k) kohta.

Tabel 8.5

	R^2	n	k
a)	0,83	50	6
b)	0,55	18	9
c)	0,33	16	12
d)	0,17	1200	32

Leidke korrigeeritud determinatsioonikordajad \bar{R}^2 (*adjusted R²*). Võrrelge neid determinatsioonikordajatega R^2 , analüüsige tulemusi.

8.14. Näidake, et kehtib seos:

$$F = \frac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)} = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)(n-k)}. \quad (8.6)$$

9. ERIKUJULISED REGRESSIOONIMUDELID

9.1. Selgitage järgmiste mudelite olemust.

- log-log mudel (*log-log model*) e. logaritmmudel,
- log-lin mudel (*log-lin model*) e. loglineaarne mudel,
- lin-log mudel (*lin-log model*) e. lineaarne logaritmmudel.

9.2. Selgitage mõisteid “elastsuskoeffitsient” ja “keskmine elastsus”.

9.3. Millised on erinevate regressioonimudelite korral seosed parameetri B_1 ja elastsuskoeffitsiendi vahel?

9.4. Millal on soovitatav kasutada alljärgnevaid mudeleid?

a) $\ln Y_i = B_0 + B_1 \ln X_i + u_i$ (9.1)

b) $\ln Y_i = B_0 + B_1 X_i + u_i$ (9.2)

c) $Y_i = B_0 + B_1 X_i + u_i$ (9.3)

d) $Y_i = B_0 + B_1 \left(\frac{1}{X_i} \right) + u_i$ (9.4)

9.5. Mida väljendab lin-log mudeli parameeter B_1 ?

9.6. Millal võib väita, et kauba nõudlus hinna suhtes on elastne ja millal mitteelastne?

9.7. Milliseid toodud väiteid loete õigeks? Põhjendage!

- log-log mudeli korral mudeli parameeter B_1 ja elastsuskoeffitsient langevad kokku;
- lineaarse mudeli $Y = B_0 + B_1 X_i + u_i$ korral elastsuskoeffitsient on muutuv, log-log mudeli $\ln Y = B_0 + B_1 \ln X_i + u_i$ korral elastsuskoeffitsient on konstantne;

- c) determinatsioonikordajad R^2 on võrreldavad lin-log ja lin-lin mudelite korral, kuid ei ole võrreldavad log-log ja log-lin mudelite korral;
- d) determinatsioonikordajad R^2 on võrreldavad log-log ja log-lin mudelite korral, kuid ei ole võrreldavad log-lin ja lin-log mudelite korral.

9.8. Alljärgnevate mudelite korral on kasutatud tähistusi:

Y_t – kauba tarbimiskulud, X_t – elanike sissetulekud.

$$a) Y_t = B_0 + B_1 X_t + u_t \quad (9.6)$$

$$b) Y_t = B_0 + B_1 (1/X_t) + u_t \quad (9.7)$$

$$c) \ln Y_t = B_0 + B_1 \ln X_t + u_t \quad (9.8)$$

$$d) \ln Y_t = B_0 + B_0 (1/X_t) + u_t \quad (9.9)$$

$$e) Y_t = B_0 + B_1 \ln X_t + u_t \quad (9.10)$$

Mida väljendavad toodud mudelite parameetrid ning mudelite alusel leitud tarbimise elastsuskoeffitsiendid sissetulekute suhtes?

9.9. Poollogaritmudelina tuntud kasvumudel on esitatav kujul

$$\ln Y_t = B_0 + B_1 t + u_t \quad (9.11)$$

Tabel 9.1

Y_t	B_0	B_1	R^2
a) Rahvuslik koguprodukt (n = 34)	7,2492 (t = 529,29)	0,0302 (44,318)	0,9839
b) Tööhõive tase (n = 15)	4,1056 (t = 1290,8)	0,053 (15,149)	0,9464
c) Aktsiaturuindeks (n = 34; aastaandmed)	3,6960 (t = 57,408)	0,0456 (14,219)	0,8633
d) Aktsiaturuindeks (n = 166; kvartaliandmed)	3,7115 (t = 114,615)	0,0114 (27,819)	0,8524

Tabelis 9.1 on toodud erinevate kasvumodelite parameetrite B_0 ja B_1 hinnangud ning determinatsioónikordajad R^2 .

Leidke iga mudeli korral liit- ja lihtkasvu määrad. Analüüsi aasta- ja kvartaliandmetel saadud tulemuste erinevusi.

9.10. Ettevõtete kogukulud ($TC = Y$) on modelleeritavad järgmise mudeli abil:

$$Y_i = 141,7667 + 63,4776X_i - 12,9615X_i^2 + 0,9396X_i^3$$

$$se = (6,3753) \quad (4,7786) \quad (0,9857) \quad (0,0591) \quad (9.12)$$

$$R^2 = 0,9983,$$

kus

X_i – i -nda ettevõtte toodangu maht.

Leidke mudeli (9.12) põhjal:

- tootmise piirkulud (MC);
- keskmised muutuvad kulud (AVC);
- keskmised kulud (AC).

9.11. Kas allpooltoodud mudelid on lineaarsed parameetrite suhtes? Kui ei, siis teisendage nad kujule, mis vastab ökonomeetrilise mudeli lineaarsuse nõudele.

$$a) Y_i = \frac{1}{B_0 + B_1 X_i} \quad (9.13)$$

$$b) Y_i = \frac{X_i}{B_0 + B_1 X_i^2} \quad (9.14)$$

9.12. Kohvi tarbimise (Y – päevas joodavate kohvitasside arv ühe inimese kohta) ja kohvi hinna (X) vahelise seose modelleerimiseks on konstrueeritud kaks mudelit ($n = 50$).

Mudel I

$$\hat{Y}_t = 2,6911 - 0,4795X_t$$

$$se = (0,1216) (0,1140) \quad (9.15)$$

$$R^2 = 0,6628$$

Mudel II

$$\ln \hat{Y}_t = 0,7774 - 0,2530 \ln X_t$$

$$se = (0,0152) (0,0494) \quad (9.16)$$

$$R^2 = 0,7448$$

- Andke majanduslik tõlgendus mõlema mudeli parameetritele B_1 .
- Leidke mudeli I alusel kohvi tarbimise keskmine elastsus hinna suhtes, kui $\bar{Y} = 2,43$ ja $\bar{X} = 1,11$.
- Leidke elastsuskoeffitsient mudeli II alusel. Millise järelduse võib mudelite I ja II põhjal teha kohvi tarbimise elastsuse kohta hinna suhtes?
- Kas regressioonimudelite (9.15) ja (9.16) determinatsioonikordajad on võrreldavad? Kommenteerige väidet, et mudel II on statistilises mõttes parem.

9.13. On konstrueeritud tootmisfunktsioon

$$\ln \hat{Y}_t = -3,3385 + 1,4988 \ln X_{1t} + 0,4899 \ln X_{2t}$$

$$t = (-1,3629) (2,7765) (4,8005) \quad (9.17)$$

$$R^2 = 0,8890 ,$$

kus

 Y_t – toodangu maht, X_{1t} – tööjõud, X_{2t} – kapital, $n = 15$ (aastate arv, $t = 1, 2, \dots, 15$).

- a) Andke sisuline tõlgendus parameetritele B_1 ja B_2 ning kontrollige nende hinnangute b_1 ja b_2 statistilist olulisust.
- b) Kas vabaliikme hinnangule b_0 saab anda sisulise tõlgenduse?
- c) Kontrollige hüpoteesi $B_1 = B_2 = 0$.

9.14. 1950.–1966. a andmetel on Inglismaa majanduse kohta konstrueeritud regressioonimudel, mis on tuntuks saanud Phillipsi kõvera nime all (*Phillips curve*):

$$\hat{Y}_t = -1,4282 + 8,7243 \frac{1}{X_t}$$

$$\text{se} \quad (2,0675)(2,8478) \quad (9.18)$$

$$R^2 = 0,3849$$

$$F = 9,39,$$

kus

Y_t – keskmise palga muutus protsentides t-ndal aastal,

X_t – tööpuuduse tase t-ndal aastal.

- a) Tõlgendage parameetri hinnangut $b_1 = 8,7243$ ning hinnake tema statistilist olulisust.
- b) Leidke Y -i keskmine muutus X -i suhtes, kui $\bar{X} = 1,5\%$.
- c) Leidke palgamuutuste keskmine elastsus tööpuuduse taseme suhtes, kui $\bar{X} = 1,5\%$ ja $\bar{Y} = 4,8\%$.
- d) Kontrollige regressioonimudeli (9.18) statistilist olulisust.

9.15. Tabelis 9.2 on toodud andmed tarbijahinnaindeksi (Y_t) muutumise (1980 = 100) ja raha pakkumise (X_t) kohta Saksamaal aastatel 1971–1987.

e) Toodud andmete põhjal konstrueerige järgmised regressioonimudelid:

$$\text{Mudel I} \quad Y_t = B_0 + B_1 X_t + u_t \quad (9.19)$$

$$\text{Mudel II} \quad \ln Y_t = A_0 + A_1 \ln X_t + u_t \quad (9.20)$$

$$\text{Mudel III} \quad \ln Y_t = C_0 + C_1 X_t + u_t \quad (9.21)$$

$$\text{Mudel IV} \quad Y_t = D_0 + D_1 \ln X_t + u_t \quad (9.22)$$

Hinnake mudelite (9.19) – (9.22) parameetreid ja andke neile sisuline tõlgendus.

- f) Analüüsige iga mudeli korral, kuidas muutub tarbijahinnaindeks (Y_t) raha pakkumise (X_t) muutumisel.
- g) Leidke iga mudeli korral elastsuskoeffitsiendid.
- h) Millist regressioonimudelit loete statistilises mõttes parimaks?

Tabel 9.2

Aasta	Tarbijahinnaindeks	Raha pakkumine (mln. DM)
1971	64,1	110,02
1972	67,7	125,02
1973	72,4	132,27
1974	77,5	137,17
1975	82,0	159,51
1976	85,6	176,16
1977	88,7	190,80
1978	91,1	216,20
1979	94,9	232,41
1980	100,0	237,97
1981	106,3	240,77
1982	111,9	249,25
1983	115,6	275,08
1984	118,0	283,89
1985	121,0	296,05
1986	120,7	325,73
1987	121,1	354,93

Allikas: International Economic Conditions, June, 1988. The Federal Reserve Bank of Louis.

9.16. Hinnake tabelis 9.3 toodud andmete alusel alljärgneva mudeli parameetreid.

$$\frac{1}{Y_i} = B_0 + B_1 X_i + u_i \quad (9.23)$$

Tabel 9.3

Y_i	86	79	76	69	65	62	52	51	51	48
X_i	3	7	12	17	25	35	45	55	70	100

- Kuidas tõlgendate parameetrit B_1 ?
- Leidke Y -i elastsus X -i suhtes.
- Kui samade andmete alusel on konstrueeritud mudel

$$Y_i = B_0 + B_1 \frac{1}{X_i} + u_i, \quad (9.24)$$

kas mudelite (9.23) ja (9.24) statistilisel võrdlemisel saab tugineda determinatsioonikordajatele R^2 ?

- Mis võiks olla muutujate Y_i ja X_i majanduslik sisu?

9.17. On konstrueeritud kaks kasvumudelit:

Mudel I

$$\ln \hat{Y}_t = 12,007 + 0,0946 t$$

$$t = (376,17) (26,954) \quad (9.25)$$

$$R^2 = 0,9824$$

Mudel II

$$\hat{Y}_t = 98084 + 35289 t$$

$$t = (4,2470) (13,893) \quad (9.26)$$

$$R^2 = 0,9369$$

Kas regressioonimudelite (9.25) ja (9.26) determinatsioonikordajad on võrreldavad, kui mõlemad mudelid on konstrueeritud sama valimi alusel? Analüüsige mudeleid.

9.18. Rahvamajanduse koguprodukti (Y_t) ja raha pakkumise (X_t) vahelise seose uurimiseks on konstrueeritud erikujulised regressioonimudelid. Mudelite parameetrid ja statistikud on koondatud tabelisse 9.4.

- Andke mudelite parameetrite B_1 hinnangutele sisuline tõlgendus.
- Leidke erinevate mudelite alusel rahvamajanduse koguprodukti elastsus raha pakkumise suhtes, kui $X = 1755,67$ ja $Y = 2791,47$.
- Võrrelge erinevate mudelite determinatsioonikordajaid.
- Monetaarteooria seisukohalt rahvamajanduse koguprodukt ja raha pakkumine suurenevad proportsioonis 1 : 1. Kontrollige toodud mudelite põhjal selle majandusteoreetilise seisukoha paikapidavust.

Tabel 9.4

Mudel	Vabaliige (B_0)	B_1	R^2
1. log-log mudel	0,5531 $t = (3,1652)$	0,9882 (41,889)	0,9926
2. log-lin mudel	6,8616 $t = (100,05)$	0,00057 (15,597)	0,9493
3. lin-log mudel	-16329,0 ($t = -23,494$)	2584,8 (27,549)	0,9832
4. Lineaarne mudel	101,20 $t = (1,369)$	1,5323 (38,867)	0,9915

9.19. Kasutades Eesti Statistikaameti ja Eesti Panga andmeid konstrueerige tööpuuduse ja inflatsiooni vahelisi seoseid iseloo-

mustavad mudelid. Hinnake nende statistilist olulisust ja kirjeldatuse taset. Kas Phillipsi kõvera nime all tuntud seaduspära peab paika ka Eesti siirdemajanduses?

9.20. Kasutades Eestis tegutsevate kommertsbankade andmeid, konstrueerige kasvumudelid iseloomustamiseks pangaintresside liht- ja liitkasvumäärasid. Hinnake konstrueeritud mudelite statistilist olulisust ja kirjeldatuse taset.

10. MULTIKOLLINEAARSUS

10.1. Mida mõistate täieliku (otsese) kollineaarsuse (*perfect collinearity*) ja mittetäieliku (kaudse) kollineaarsuse (*imperfect collinearity*) all?

10.2. Mis on multikollineaarsuse peamisteks tunnusteks?

10.3. Mis on dispersiooni inflatsioonitegur e. VIF (*variance inflation factor*)?

10.4. Kuidas hindate järgmisi väiteid? Põhjendage!

- a) Vähimruutude meetodil leitud parameetrite hinnangud on parimad lineaarsed nihketa hinnangud vaatamata sellele, et konstrueeritud mudeli korral on tegemist tugeva multikollineaarsuse ohuga;
- b) tugeva multikollineaarsuse korral ei ole võimalik leida statistiliselt olulisi hinnanguid osaregressioonikordajatele;
- c) kui abiregressioonimudel is R_i^2 on suur, siis võib eeldada tugeva multikollineaarsuse olemasolu;
- d) tugev paariskorrelatsioon sõltumatute muutujate vahel ei viita alati veel tugevale multikollineaarsusele;
- e) multikollineaarsus ei ole probleemiks, kui regressioonimudeli konstrueerimise eesmärgiks on prognoosimine;
- f) multikollineaarsuse probleem ei ole tavaliselt aktuaalne aegridade korral.

10.5 Kas mudeli (10.1) puhul võib esineda multikollineaarsuse probleemi?

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + B_2 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + u_t, \quad (10.1)$$

kus

Y_t – tarbimine,

X_t – tulud,

t – aeg.

10.6 Kas allpooltoodud mudeli puhul võib olla tegemist täieliku kollineaarsusega?

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + B_2 X_t^2 + B_3 X_t^3 + u_t, \quad (10.2)$$

kus

Y_t – tootmiskulud i -ndas ettevõttes,

X_t – toodangu maht i -ndas ettevõttes.

10.7. Tabelis 7.1 on toodud andmed sõiduautode müügi ja seda mõjutavate võimalike tegurite kohta.

a) Konstrueerige tabeli 7.1 andmetel regressioonimudel

$$\ln Y_t = B_0 + B_1 \ln X_{1t} + B_2 \ln X_{2t} + B_3 \ln X_{3t} + B_4 \ln X_{4t} + B_5 \ln X_{5t} + u_t, \quad (10.3)$$

kus

Y_t – sõiduautode müük (tuh. tk),

X_{1t} – uute autode hinnaindeks (1967 = 100),

X_{2t} – tarbijahinnaindeks (1967 = 100),

X_{3t} – isiklikult kasutatav tulu (biljon \$),

X_{4t} – intressimäärad (%),

X_{5t} – töötajate arv (tuh.).

b) Põhjendage sõltumatute muutujate $X_1 \dots X_5$ lülitamise vajadust regressioonimudelisse.

c) Mida väljendavad mudeli (10.3) parameetrid?

d) Hinnake mudeli ja mudeli parameetrite statistilist olulisust.

e) Kas mudelis (10.3) võib eeldada olulist multikollineaarsust? Kui jah, siis milles avaldub multikollineaarsuse mõju?

10.8. Konstrueerige tabeli 7.1 andmetel abiregressioonimudelid.

Mudel I

$$\ln X_{1t} = B_0 + B_2 \ln X_{2t} + B_3 \ln X_{3t} + B_4 \ln X_{4t} + B_5 \ln X_{5t} + u_t \quad (10.4)$$

Mudel II

$$\ln X_{2t} = B_0 + B_1 \ln X_{1t} + B_3 \ln X_{3t} + B_4 \ln X_{4t} + B_5 \ln X_{5t} + u_t \quad (10.5)$$

Mudel III

$$\ln X_{3t} = B_0 + B_1 \ln X_{1t} + B_2 \ln X_{2t} + B_4 \ln X_{4t} + B_5 \ln X_{5t} + u_t \quad (10.6)$$

Mudel IV

$$\ln X_{4t} = B_0 + B_1 \ln X_{1t} + B_2 \ln X_{2t} + B_3 \ln X_{3t} + B_5 \ln X_{5t} + u_t \quad (10.7)$$

Mudel V

$$\ln X_{5t} = B_0 + B_1 \ln X_{1t} + B_2 \ln X_{2t} + B_3 \ln X_{3t} + B_4 \ln X_{4t} + u_t \quad (10.8)$$

Leidke dispersiooni inflatsioonitegurid (VIF) iga abiregressioonimudeli (10.4-10.8) korral. Milliseid järeldusi saab konstrueeritud abiregressioonimudelite ning dispersiooni inflatsioonitegurite alusel teha multikollineaarsuse kohta?

10.9. Leidke tabeli 7.1 andmetel ülesandes 10.7 konstrueeritud regressioonimudeli (10.3) sõltumatute muutujate X_1, \dots, X_5 logaritmid (\ln) vaheline paariskorrelatsioonimaatriks ning analüüsige seda. Milliseid järeldusi saab teha sõiduautode müügi ja seda mõjutavate tegurite ning nende omavaheliste seoste kohta?

10.10. Tuginedes ülesannete 10.8 ja 10.9 lahendamise tulemustele, selgitage, milliseid sõltumatuid muutujaid peate otstarbekaks lülitada sõiduautode müüki iseloomustavatesse regressioonimudelitesse? Miks?

10.11. Tuginedes ülesande 7.12 lahendamise tulemustele, konstrueerige regressioonimudelid Eesti autoturu kohta. Hinnake modelleerimiseks vajalike andmete kättesaadavust ja usaldusväärsust. Kas konstrueeritud mudelite puhul esineb multikollineaarsuse oht?

10.12. Ehitustööstuse toodangu mahu modelleerimiseks on konstrueeritud kaks tootmisfunktsiooni:

Mudel I

$$\log \hat{Q} = -5,04 + 0,887 \log K + 0,893 \log H$$

$$se = (1,40) \quad (0,087) \quad (0,137) \quad (10.9)$$

$$R^2 = 0,878$$

ja

Mudel II

$$\log \hat{Q} = -8,57 + 0,0272 t + 0,460 \log K + 1,285 \log H$$

$$se = (2,99) \quad (0,0204) \quad (0,333) \quad (0,324) \quad (10.10)$$

$$R^2 = 0,889,$$

kus

Q – tootmise maht,

K – kapital,

H – tööjõud,

t – aeg,

n = 21 (ettevõtete arv).

- Hinnake mudelite I ja II ning nende parameetrite statistilist olulisust olulisuse nivool 0,05. Tõlgendage tootmisfunktsioonide parameetreid.
- Millise järelduse saab teha multikollineaarsuse olemasolu kohta mudelis II?
- Kas mudeli I puhul on tegemist konstantse asendatavusega tootmisfunktsiooniga?

10.13. Tabelis 10.1 on toodud andmed kauba tarbimiskulude (Y_1), isiklikult kasutatava tulu ($X_{1,1}$) ja elanike sissetulekute ($X_{1,2}$) kohta (kroonides pereliikme kohta nädalas).

Tabel 10.1

Y_i	X_{1i}	X_{2i}
49	298	297,5
45	296	294,9
44	294	293,5
39	292	292,5
38	290	290,2
37	288	289,7
34	286	285,8
33	284	284,6
30	282	281,1
29	280	278,8

a) Konstrueerige regressioonimudel

$$Y_i = B_0 + B_1 X_{1i} + B_2 X_{2i} + u_i \quad (10.11)$$

Hinnake mudeli parameetreid ja nende statistilist olulisust. Analüüsige multikollineaarsuse probleemi mudelis.

b) Konstrueerige abiregressioonimudel sõltumatute muutujate omavaheliste statistiliste seoste hindamiseks. Leidke dispersiooni inflatsioonitegur (VIF_i) ja analüüsige seda.

c) Millist regressioonimudelit loete tarbimiskulude modelleerimiseks sobivaimaks, tuginedes tabelis 10.1 toodud andmetele?

d) Eeldusel, et on teada seos

$$Y^* = Y - 0,9X_2, \quad (10.12)$$

tehke tabelis 10.1 toodud andmetega vajalikud teisendused, et konstrueerida regressioonimudelit, kus algandmete omavahelisest sõltuvusest tulenevat multikollineaarsuse ohtu on vähendatud.

10.14. Konstrueerige tabeli 2.1 andmetele tuginedes Eesti olukorda iseloomustavad tarbimismudelid:

Mudel I

$$\ln X_1 = B_0 + B_3 \ln X_3 + B_4 \ln X_4 + u_1 \quad (10.12)$$

Mudel II

$$\ln X_2 = B_0 + B_1 \ln X_1 + B_3 \ln X_3 + B_4 \ln X_4 + u_2 \quad (10.13)$$

Mudel III

$$\ln X_1 = B_0 + B_2 \ln X_2 + B_3 \ln X_3 + B_4 \ln X_4 + u_3 \quad (10.14)$$

Mudel IV

$$\ln X_2 = B_0 + B_3 \ln X_3 + B_4 \ln X_4 + u_4, \quad (10.15)$$

kus

X_1 – toidukulud,

X_2 – kulutused tööstuskaupadele ja teenustele,

X_3 – töötasu,

X_4 – tulud sotsiaalkindlustusest.

- a) Hinnake mudelite I – IV ning nende parameetrite statistilist olulisust olulisuse nivool 0,05 ($n = 15$).
- b) Milliseid järeldusi teete multikollineaarsuse olemasolu kohta mudelites I – IV? Põhjendage!
- c) Millist regressioonimudelit loete sobivaimaks tarbimiskulude modelleerimiseks Eestis?

11. AUTOKORRELATSIOON

11.1. Mis on autokorrelatsioon?

11.2. Millal on tegemist esimest järku autokorrelatsiooniga (*first-order autocorrelation*)?

11.3. Mis on ruumiline korrelatsioon (*spatial correlation*)?

11.4. Millal on tegemist esimest järku autoregressiivse mudeliga?

11.5. Milles avaldub autokorrelatsiooni olemasolu mudelis ?

11.6. Millal saab aegridades sisalduva autokorrelatsiooni kõrvaldamiseks (vähendamiseks) kasutada üldistatud diferentside meetodit?

11.7. Milliseid võtteid kasutatakse autokorrelatsiooni parameetri ehk autokorrelatsioonikordaja ρ hindamiseks?

11.8. Milliseid meetodeid kasutatakse autokorrelatsiooni olemasolu selgitamiseks mudelis?

11.9. Mis komplitseerib Durbin-Watsoni kriteeriumi praktilist kasutamist?

11.10. Milliseid toodud väiteid loete õigeteks? Põhjendage!

- Autokorrelatsiooni korral vähimruutude meetodil saadud hinnangud on nihkega ja ei ole parimad.
- Durbin-Watsoni kriteerium ei ole sobiv kasutamiseks autoregressiivsete mudelite korral.
- Durbin-Watsoni kriteeriumi kasutamisel eeldatakse, et juhusliku liikme u_t puhul on täidetud homoskedastiivsuse nõue.

- d) Esimest järku diferentside meetodi kasutamisel autokorrelatsiooni kõrvaldamiseks eeldatakse, et autokorrelatsioonikordaja $\rho = -1$.

11.11. Millal kasutatakse Prais-Winsteni teisendusi?

11.12. Tabelis 11.1 on toodud Durbin-Watsoni d-statistiku hinnangud, mis on leitud erinevate valimite ja regressioonimudelite põhjal. Hinnake autokorrelatsiooni olemasolu võimalust d-statistiku alusel ($\alpha = 0,05$).

Tabel 11.1

Valimi maht	Sõltumatute muutujate arv (ilma vabaliikmeta)	d-statistik
a) 25	2	0,83
b) 30	5	1,24
c) 50	8	1,98
d) 60	6	3,72
e) 200	20	1,61

11.13. Swed-Eisenharti tabelleid kasutades analüüsige autokorrelatsiooni olemasolu võimalusi alljärgnevate tabelis 11.2 toodud olukordade puhul ($\alpha = 0,05$).

Tabel 11.2

Valimi maht	“+” märgiga jäakliikmete arv	“-” märgiga jäakliikmete arv	Jäakliikmete märkide vahetumise kordade arv
a) 18	11	7	2
b) 30	15	15	24
c) 38	20	18	6
d) 15	8	7	4
e) 10	5	5	1

11.14. Tabelis 11.3 on toodud andmed keskmise tunnitasu (Y_t – keskmise tunnitasu muutus t-ndal aastal, %) ja tööpuuduse taseme (X_t – tööpuuduse tase t-ndal aastal, %) kohta USA-s aastatel 1958–1969.

Tabel 11.3

**Keskmise tunnipalga muutumine (Y_t)
ja tööpuuduse tase (X_t) USA-s 1958.–1969. a. (%)**

Aasta	Y_t	X_t
1958	4,2	6,8
1959	3,5	5,5
1960	3,4	5,5
1961	3,0	6,7
1962	3,4	5,5
1963	2,8	5,7
1964	2,8	5,5
1965	3,6	4,5
1966	4,3	3,8
1967	5,0	3,8
1968	6,1	3,6
1969	6,7	3,5

Allikas: Economic Report of the President, 1989. Table B-39 p. 352, Table B-44 p. 358.

Konstrueerige tabeli 11.3 andmetel Phillipsi kõverana tuntud regressioonimudel

$$Y_t = B_0 + B_1 \frac{1}{X_t} + u_t \quad (11.1)$$

Hinnake regressioonimudeli parameetreid ning analüüsi saadud mudelit.

- Kas mudel sisaldab esimest järku autokorrelatsiooni?
- Leidke autokorrelatsioonikordaja ρ hinnang d -statistiku alusel.
- Kasutades autokorrelatsioonikordaja hinnangut $\hat{\rho}$ ning tuginedes tabelis 11.3 toodud andmetele leidke üldistatud diferentside meetodil teisendatud regressioonimudel

$$(Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}) = B_0(1 - \hat{\rho}) + B_1(X_t - \hat{\rho}X_{t-1}) + v_t \quad (11.2)$$

Mudeli (11.2) parameetrite hindamisel kasutage kahte lähenemist:

- aegridade esimesed liikmed X_1 ja Y_1 jäävad vaatluse alt välja;
- aegridade esimesed liikmed jäävad alles (kasutatud on Prais-Winsteni teisendust).

- Kontrollige autokorrelatsiooni mõlema lähenemise korral saadud teisendatud regressioonimudelites (11.2). Kasutage selleks Swed-Eisenhart'i tabelit.

11.15. Selleks, et modelleerida tööjõuga seotud kulude osatähtsuse muutumist sisemajanduse koguproduktis (Y_t – palkade ja töötasude osatähtsus sisemajanduse koguproduktis t -ndal aastal)

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= 0,4529 - 0,0041t \\ t &= \quad \quad \quad (-3,9608) \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$R^2 = 0,5284 \quad d = 0,8252$$

ja

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= 0,4786 - 0,00127t + 0,0005t^2 \\ t &= \quad \quad \quad (-3,2724) \quad (2,7777) \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$R^2 = 0,6629 \quad d = 1,82$$

Analüüsi, kas mudelid (11.3) ja (11.4) sisaldavad autokorrelatsiooni.

11.16. Tabelis 11.4 on toodud andmed impordikulude (Y_t) ja isiklikult kasutatava tulu (X_t) kohta USA-s 1968–1987. a (bilj. \$).

Tabel 11.4

Aasta	Y_t	X_t	Aasta	Y_t	X_t
1968	135,7	1551,3	1978	274,1	2167,4
1969	144,6	1599,8	1979	277,9	2212,6
1970	150,9	1668,1	1980	253,6	2214,3
1971	166,2	1728,4	1981	258,7	2248,6
1972	190,7	1797,4	1982	249,5	2261,5
1973	218,2	1916,3	1983	282,2	2331,9
1974	211,8	1896,9	1984	351,1	2469,8
1975	187,9	1931,7	1985	367,9	2542,8
1976	229,9	2001,0	1986	412,3	2640,9
1977	259,4	2066,0	1987	439,0	2686,3

Allikas: Economic Report of the President, 1989. Table B-21 p. 331, Table B-27 p. 333

- Konstrueerige impordikulude ja isiklikult kasutatava tulu vahelisi seoseid iseloomustav regressioonimudel. Hinnake mudeli parameetreid ja analüüsige saadud mudelit.
- Kas mudel sisaldab autokorrelatsiooni? Põhjendage!
- Kui mudel sisaldab autokorrelatsiooni, siis kasutage Durbin-Watsoni kahesammulist meetodit uue teisendatud regressioonimudeli saamiseks. Kontrollige, kas teisendatud mudel sisaldab autokorrelatsiooni.

11.17. On konstrueeritud regressioonimudel 25 aasta andmete ($n = 25$) põhjal:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t &= -49,4664 + 0,8854X_{1t} + 0,0925X_{2t} \\ t &= (-2,2392)(70,2936) \quad (2,6933) \quad (11.5) \\ R^2 &= 0,8755 \quad d = 0,8755,\end{aligned}$$

kus

Y_t – tarbimiskulud,

X_1 – isiklikult kasutatavad tulud,

X_2 – Dow Jones'i börsiindeks.

- Kas mudel (11.5) sisaldab autokorrelatsiooni?
- Durbin-Watsoni kahesammulise meetodi kasutamise tulemusena on saadud uus teisendatud regressioonimudel:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t &= -17,97 + 0,89X_{1t}^* + 0,09X_{2t}^* \\ t &= (1,645) \quad (30,72) \quad (2,66) \quad (11.6) \\ R^2 &= 0,9816 \quad d = 2,28\end{aligned}$$

Kas statistiku $d = 2,28$ alusel võib väita, et mudelis ei ole autokorrelatsiooni? Milline meetod sobib autokorrelatsiooni olemasolu hindamiseks teisendatud mudelis paremini kui Durbin-Watsoni meetod? Miks?

- Võrrelge esialgse mudeli (11.5) ja teisendatud mudeli (11.6) t-kriteeriumide väärtusi. Milliseid järeldusi võib nende põhjal teha?

11.18. Sularaha pakkumise (M_t), pikaajaliste intressimäärade (R_t) ja agregeeritud rahvatulu (Y_t) vahelisi seoseid on kirjeldatud regressioonimudeliga ($t = 1, 2, \dots, 17$):

$$\ln \hat{M}_t = 1,6027 - 0,1024 \ln R_t + 0,6869 \ln Y_t + 0,5284 \ln M_{t-1}$$

$$se = (1,2404) (0,3678) \quad (0,3427) \quad (0,2007) \quad (11.7)$$

$$R^2 = 0,9227 \quad d = 1,8624.$$

- a) Kas autokorrelatsiooni olemasolu hindamiseks sobib antud mudeli puhul kasutada Durbin-Watsoni d-statistikut?
- b) Kasutage autokorrelatsiooni olemasolu hindamiseks Durbini h-statistikut.

11.19. Tabelis 11.5 on toodud andmed aktsiaturuindeksi (Y_t , 1965 = 100) ja rahvusliku koguprodukti (X_t , biljonites \$) kohta USA-s aastatel 1970–1987. Konstrueerige tabeli 11.5 andmetel regressioonimudel

$$Y = B_0 + B_1 X_t + u_t \quad (11.8)$$

Hinnake mudeli parameetreid ning analüüsige mudelit.

Tabel 11.5

Aasta	Y_t	X_t	Aasta	Y_t	X_t
1970	45,72	1015,5	1979	58,32	2508,2
1971	54,22	1102,7	1980	68,10	2732,0
1972	60,29	1212,8	1981	74,02	3052,0
1973	57,42	1359,3	1982	68,93	3166,0
1974	43,84	1472,8	1983	92,63	3405,7
1975	45,73	1598,4	1984	92,46	3772,2
1976	54,46	1782,8	1985	108,09	4019,2
1977	53,69	1990,5	1986	136,00	4240,3
1978	53,70	2249,7	1987	161,70	4526,7

Allikas: Economic Report of the President, 1989. Table B-94, B-1.

- a) Kas regressioonimudel (11.8) on esimest järku autokorrelatsioon?
- b) Leidke autokorrelatsioonikordaja ρ hinnang, kasutades selleks d -statistiku hinnangut.
- c) Teisendage andmeid selliselt, et oleks võimalik konstrueerida mudel

$$(Y_t - \rho Y_{t-1}) = B_0(1 - \rho) + B_1(X_t - \rho X_{t-1}) + v_t \quad (11.9)$$

Mudeli (11.9) parameetrite hindamiseks kasutage alapunktis (b) leitud autokorrelatsioonikordaja hinnangut. Mudeli parameetreid hinnake nii juhul, kui esimese liikme lülitamiseks mudelisse on kasutatud Prais-Winsteni teisendust, kui ka juhul, kui esimesed aegrealiikmed on kõrvale jäetud.

- d) Hinnake mudeli (11.9) parameetreid (nii esimeste liikmetega kui ilma) kasutades autokorrelatsioonikordaja hinnangu $\hat{\rho}$ leidmiseks jääkliikmete tuginevat võrrandit

$$e_t = \hat{\rho} e_{t-1} + v_t \quad (11.10)$$

- e) Konstrueerige mudel

$$\Delta Y_t = B_1 \Delta X_t + v_t \quad (11.11)$$

Võrrelge erinevaid mudeleid ning nende kasutamisel saadud tulemusi. Kasutage teisendatud mudelites autokorrelatsiooni selgitamiseks Swed-Eisenhart'i kriteeriumi.

11.20. Tabelis 11.5 toodud andmetele tuginedes konstrueerige regressioonimudel

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + B_2 X_t^2 + u_t \quad (11.12)$$

- a) Hinnake mudeli ja mudeli parameetrite statistilist olulisust.
- b) Kas mudelis on esimest järku autokorrelatsioon?

- c) Võrrelge ruutliikmega mudelit ülesandes 11.19 konstrueeritud mudeliga (11.8) ning analüüsige tulemust.
- d) Milliseid järeldusi võib teha sellest, kui ruutmudelis X_t -le vastav parameeter on negatiivne, kuid X_t^2 -le vastav positiivne?

11.21. Eeldame, et mudeli

$$Y_t = B_0 + B_1 X_{1t} + B_2 X_{2t} + B_3 X_{3t} + u_t \quad (11.13)$$

korral on tegemist autokorrelatsiooni sisaldava mudeliga, mille juhuslik liige on esitatav järgmiselt:

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t \quad (11.14)$$

Tegemist on AR(1) skeemile vastava mudeliga, kusjuures ρ on autokorrelatsioonikordaja. Esitage teisedatud mudeli kuju, mille korral võib eeldada, et autokorrelatsiooni oht on oluliselt väiksem.

11.22. Eeldusel, et suurte valimite puhul $\sum e_t^2 \approx \sum e_{t-1}^2$ ning autokorrelatsioonikordaja hinnang $\hat{\rho} = \frac{\sum e_t \cdot \sum e_{t-1}}{\sum e_t}$, näidake, et $d \approx 2(1 - \hat{\rho})(d - \text{Durbin-Watsoni } d\text{-statistik})$.

11.23. Autokorrelatsioonikordaja ρ hindamiseks kasutatakse Theil-Nagari meetodit, mille kohaselt autokorrelatsioonikordaja hinnang $\hat{\rho}$ on leitav järgmiselt:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2(1 - d/2) + k^2}{n^2 - k^2}, \quad (11.13)$$

kus

n – valimi maht,

d – Durbin-Watsoni d -statistik,

k – regressioonimudeli parameetrite arv (k.a. vabaliige).

Näidake, et küllalt suure valimi korral $\hat{\rho}$ vastab hinnangule $(1 - d/2)$.

11.24. Leidke Eesti Statistikaameti ja Eesti Panga andmetele tuginedes mõni teid huvitav majandusprobleem, mille uurimiseks konstrueerite aegridadele baseeruvad regressioonimudelid (soovitav on kasutada kvartali või kuuandmeid). Analüüsige autokorrelatsiooni olemasolu konstrueeritud mudelites. Valige sobivaim meetod autokorrelatsiooni eemaldamiseks või tema mõju vähendamiseks Eesti siirdemajandust iseloomustavates lühikestele aegridadele tuginevates regressioonimudelites. Andke hinnang erinevate meetodite kasutamise tulemuslikkusele.

12. HETEROSKEDASTIIVSUS

12.1. Mis on heteroskedastiivsus?

12.2. Mis juhtub heteroskedastiivsuse korral vähimruutude meetodil leitud parameetrite hinnangutega ja nende standardvigadega?

12.3. Mis juhtub heteroskedastiivsuse korral usalduspiiridega ning t- ja F-kriteeriumidega?

12.4. Milliseid toodud väiteid loete õigeks. Põhjendage!

- a) Heteroskedastiivsuse korral vähimruutude meetodil leitud hinnangud on nihkega ning mitte parimad.
- b) Heteroskedastiivsuse korral t-kriteeriumi ja F-kriteeriumi hinnangud ei ole alati õiged.
- c) Heteroskedastiivsuse korral vähimruutude meetodi kasutamisel saadud hinnangud on tavaliselt suuremad.
- d) Kui vähimruutude meetodil hinnatud parameetritega regressioonimudeli jääkliikmed omavad graafilisel esitusel kuju, mis viitab heteroskedastiivsuse olemasolule, siis võib alati küllalt kindlalt väita, et regressioonimudelis on heteroskedastiivsus.
- e) Heteroskedastiivsuse olemasolu selgitamine ei ole võimalik uuritavate majandusnäitajate olemust ja kujunemist tundmata ning regressioonimudeli muutujate kohta eeldusi püstitamata.

12.5. Kas allpooltoodud muutujatega (tabel 12.1) regressioonimudelitel korral võib eeldada heteroskedastiivsuse probleemi?

Tabel 12.1

Y	X	Valim
(a) Tööstusharu kasumirentaabilus	Käibe maht	450 ettevõtet ettevõtete registrist
(b) Dow Jonesi börsiindeks	Aeg	1960.-1995. a. andmed (aastakeskmised)
(c) Keskmise eluea pikkus	Rahvamajanduse koguprodukt (RKP) ühe elaniku kohta	100 arenenud ja arengumaad
(d) Inflatsiooni tase	Tööpuuduse tase	USA, Kanada, Põhjamaad, 10 siirdemaad

12.6. Milles seisneb kaalutud vähimruutude meetodi olemus?

12.7. Selgitage järgmiste meetodite kasutamist heteroskedastiivsuse olemasolu testimisel:

- graafiline meetod;
- Park'i meetod;
- Glejser'i meetod.

12.8. Üldkogumi alusel konstrueeritud lihtsa regressioonimudeli juhusliku liikme dispersioon avaldub kujul

$$\sigma^2(u_i) = \sigma^2 X_i^4 \quad (12.1)$$

Kuidas tuleks muuta mudelit, et dispersioon vastaks homoskedastiivsuse nõudele?

12.9. USA ökonomeetrikud E. A. Hanushek ja J. G. Jackson on USA majanduse 1946.–1975. a. andmete alusel konstrueerinud järgmised mudelid:

Mudel I

$$\hat{C}_t = 26,19 + 0,6248\text{GNP}_t - 0,4398D_t$$

$$\text{se} = (2,73) \quad (0,0060) \quad (0,0736) \quad (12.2)$$

$$R^2 = 0,999$$

ning

Mudel II

$$\left(\frac{\hat{C}}{\text{GNP}} \right)_t = 25,92 \frac{1}{\text{GNP}_t} + 0,6246 - 0,4315 \frac{D}{\text{GNP}_t}$$

$$\text{se} = (2,22) \quad (0,0068) \quad (0,0597) \quad (12.3)$$

$$R^2 = 0,875,$$

kus

 C_t – agregeeritud tarbimiskulud, GNP_t – rahvamajanduse koguprodukt, D_t – kaitsekulud, t – aeg.

Mudelite konstrueerimise eesmärgiks oli analüüsida kaitsekulude mõju tarbimiskulude kujunemisele riigis. Mudel I on teisendatud uuele kujule (mudel II) põhjusel, et algandmete alusel sai eeldada heteroskedastiivsust (aegridade puhul esineb seda küll suhteliselt harva).

- Millise eelduse on mudelite autorid teinud esialgse mudeli juhusliku liikme dispersiooni kohta?
- Kui autorid lähtusid heteroskedastiivsuse olemasolu võimalusest esialgses mudelis (12.2), kas teisendamise tulemusena on jõutud mudelini, kus heteroskedastiivsust ei ole?
- Kas mudelite (12.2) ja (12.3) determinatsioonikordajad on võrreldavad?

12.10. Elanikkonna paiknemise tiheduse modelleerimiseks sõltuvana asukoha kaugusest keskusest on konstrueeritud järgmised mudelid

Mudel I

$$\begin{aligned} \ln \hat{Y}_i &= 10,093 - 0,24X_i \\ se &= (0,1845) (0,0195) \\ t &= (54,7) \quad (-12,28) \end{aligned} \quad (12.4)$$

ja

Mudel II

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} \right) &= 0,932 \frac{1}{\sqrt{X_i}} - 0,2258\sqrt{X_i} \\ t &= (47,87) \quad (-15,10) \end{aligned} \quad (12.5)$$

kus

Y_i – elanikkonna tihedus regioonis,

X_i – regiooni kaugus keskusest.

a) Andke mudelile (12.4) majanduslik tõlgendus.

b) Kas teisendatud regressioonimudeli (12.5) puhul, kus parameetrite hindamiseks on kasutatud kaalutud vähimruutude meetodit, võib arvata, et heteroskedastiivsuse oht on vähenenud?

12.11. Tabelis 12.2 on toodud andmed erinevates tootmisharudes (i) uurimis- ja arendustöödeks tehtud kulude (Y_i), käibe mahu (X_{1i}) ja kasumi suuruse kohta (X_{2i}) 1996. a. (tuh. kroonides).

Tabel 12.2

Tootmisharu	Kulutused uurimis- ja arendustöödeks	Käive	Kasum
Paberitööstus	62,5	6375,3	185,1
Ehitusmaterjalid	92,9	11 626,4	1569,5
Hotellindus	178,3	14 655,1	276,8
Metallitööstus	258,4	21 869,2	2828,1
Kergetööstus	1080,3	32 405,6	3751,9
Ehitus	494,7	26 408,3	225,9
Puidutööstus	1620,6	35 107,7	2884,1
Metsatööstus	421,7	40 295,4	4645,7
Toiduainetetööstus	509,2	70 761,6	5036,4
Farmaatsiatööstus	6620,1	80 552,8	13 869,9
Meditšiinitehnika	3918,6	95 294,0	4487,8
Autotööstus	1595,3	101 314,1	10 278,9
Elektri tootmine	6107,5	116 141,3	8787,3
Elektrotehnika	4454,1	122 315,7	16 438,8
Keemiatööstus	3163,8	141 649,9	9761,4
Mäetööstus	13 210,7	175 025,8	19 774,5
Põllumajandus- tehnika	1703,8	230 614,5	22 626,6
Gaasitööstus	9528,2	29 354,0	18 415,4

a) Konstrueerige tabelis 12.2 esitatud andmete alusel logaritmmudel

$$\ln Y_i = B_1 + B_2 \ln X_{1i} + u_i \quad (12.6)$$

Hinnake mudeli (12.6) parameetreid ning analüüsi mudelit.

- Kasutage Park'i ja Glejser'i meetodit heteroskedastiivsuse olemasolu selgitamiseks mudelis (12.6).
- Konstrueerige lineaarne regressioonimudel uurimis- ja arendustöödele tehtud kulutuste ja käibe mahu (X_{1i}) vahelise seose analüüsimiseks. Analüüsige graafiliselt heteroskedastiivsuse olemasolu võimalust mudelis.
- Kas konstrueeritud regressioonimudelite determinatsiooni-kordajad on võrreldavad? Millist mudelit soovitate kasutada uurimis- ja arendustöödele tehtavate kulude analüüsimiseks erinevates tootmisharudes?

12.12. Tuginedes tabelis 12.2 toodud andmetele, konstrueerige erinevates tootmisharudes uurimis- ja arendustöödele tehtavate kulude (Y_i) ja ettevõtete kasumi (X_{2i}) vaheliste seoste analüüsimiseks järgmised regressioonimudelid.

Mudel I

$$Y_i = B_0 + B_1 X_{2i} + u_i \quad (12.7)$$

ja

Mudel II

$$Y_i = A_0 + A_1 \ln X_{2i} + v_i \quad (12.8)$$

Hinnake mudelite (12.7) ja (12.8) parameetreid ning analüüsi mudelid.

- Kasutades Park'i ja Glejser'i meetodeid analüüsige heteroskedastiivsuse olemasolu võimalust kummaski mudelis.
- Millist lähenemist soovitate kasutada lineaarses mudelis (12.7) sisalduva heteroskedastiivsuse vähendamiseks?

12.13. Kasutades Spearmani korrelatsioonikordajat, analüüsige heteroskedastiivsuse olemasolu järgmises regressioonimudelil:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_i &= 192,99 + 0,0319X_{1i}, \\ t &= (0,1948) (3,8323) \\ R^2 &= 0,4783 ,\end{aligned}\tag{12.9}$$

kus

Y_i – kulutused uurimis- ja arendustöödeks i -ndas ettevõttes,

X_{1i} – i -nda ettevõtte käibe maht.

12.14. Tabelis 12.3 on toodud andmed töötajate keskmise palga (Y_i) ja tööviljakuse (X_i) kohta erineva suurusega ettevõtetes. Konstrueerige regressioonimudelid:

$$\hat{Y}_i = B_0 + B_1 X_i + u_i \tag{12.10}$$

ja

$$\hat{Y}_i / \sigma_i = B_0 \cdot \frac{1}{\sigma_i} + B_1 \frac{X_i}{\sigma_i} + \frac{u_i}{\sigma_i} \tag{12.11}$$

Tabel 12.3

Töötajate arv ettevõttes	Keskmine kuupalk (Y_i)	Keskmine tööviljakus (X_i)	Standardhälve (σ_i)
1–4	3396	9355	744
5–9	3787	8584	851
10–19	4013	7962	728
20–49	4104	8275	805
50–99	4146	8389	930
100–249	4241	9418	1081
250–499	4387	9795	1243
500–999	4538	10 281	1308
1000–2499	4843	11 750	1112

Hinnake mudelite (12.10) ja (12.11) parameetreid. Esimese mudeli puhul kasutage tavalist ning teise puhul kaalutud vähimruutude meetodit. Kas regressioonimudelite (12.10) ja (12.11) determinatsioonikordajad on võrreldavad? Analüüsige mudeleid.

12.15. Näidake, et regressioonimudel

$$\frac{Y_i}{X_i} = B_0 \frac{1}{X_i} + B_1 + \left(\frac{u_i}{X_i} \right) = B_0 \frac{1}{X_i} + B_1 + v_i \quad (12.12)$$

juhusliku liikme $v_i = \frac{u_i}{X_i}$ puhul on täidetud homoskedastiivsuse nõue.

12.16. Kolmekümne ettevõtte andmetel on töötajate keskmise palga (Y_i) ja töötajate arvu (X_i) vahelise seose analüüsamiseks konstrueeritud järgmised regressioonimudelid:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_i &= 7,5 + 0,009X_i \\ t &= (16,10) \end{aligned} \quad (12.13)$$

$$R^2 = 0,90$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{Y_i}{X_i} &= 0,008 + 7,8 \frac{1}{X_i} \\ t &= (14,43) (76,58) \end{aligned} \quad (12.14)$$

$$R^2 = 0,99$$

Analüüsige mudeleid (12.13) ja (12.14). Kas mudelid on võrreldavad kirjeldatuse taseme alusel?

12.17. Tabelis 12.4 on esitatud andmed töötajate keskmise vanuse ning nende aastakeskmise sissetuleku kohta (S -tes). Andmed on leitud 9000 töötajast koosneva valimi põhjal.

Tabel 12.4

Vanus (aastates)	Keskmine sissetulek aastas (\$)
20–24	7800
25–29	8400
30–34	9700
35–39	11 500
40–44	13 000
45–49	14 800
50–54	15 000
55–59	15 000
60–64	14 500
70–...	12 000

Tabeli 12.4 andmete alusel konstrueerige järgmised regressioonimudelid.

Mudel I

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + u_i \quad (12.15)$$

Mudel II

$$Y_i / \sqrt{X_i} = A_0 (1 / \sqrt{X_i}) + A_1 \sqrt{X_i} + v_i \quad (12.16)$$

Mudel III

$$Y_i / X_i = C_0 + C_1 (1 / X_i) + w_i \quad (12.17)$$

- a) Hinnake mudelite parameetreid ja analüüsiige mudeleid. Kas regressioonimudelite (12.15), (12.16) ja (12.17) determinatsioonikordajad on võrreldavad?
- b) Kui mõne regressioonimudeli puhul on tegemist heteroskedastiivsusega, milliseid võtteid kasutate selle eemaldamiseks või vähendamiseks?

12.18. Kahesajast ettevõttest koosneva valimi andmetel on konstrueeritud regressioonimudel

$$\hat{Y}_i = 476,00 + 31,35X_i - (1,083 \cdot 10^{-6}) \cdot X_i^2$$

$$t = (2,98) \quad (4,39) \quad (-6,54) \quad (12.18)$$

$$R^2 = 0,934 ,$$

kus

Y_i – tootmiskulud i -ndas ettevõttes,

X_i – tootmise maht i -ndas ettevõttes.

Kuna mudeli (12.18) konstrueerimiseks kasutatud andmete põhjal võib eeldada, et mudel sisaldab heteroskedastiivsust, siis on konstrueeritud ka teine regressioonimudel (12.19), mille puhul väga suured ja väga väikesed ettevõtted on vaatluse alt välja jäetud:

$$\hat{Y}_i = 342,00 + 25,57X_i - (4,34 \cdot 10^{-6}) \cdot X_i^2$$

$$t = (32,3) \quad (7,07) \quad (0,53) \quad (12.19)$$

Leidke mõlema mudeli alusel keskmiste kulude (AC) ja piirkulude (MC) funktsioonid. Analüüsiige neid!

12.19. Tabelis 12.5 on toodud andmed ekspordi ja impordi (Y_{1i} , Y_{2i}), sisemajanduse koguprodukti (X_{1i}) ning riikide vaheliste kauguste (X_{2i}) kohta Eesti kaheteistkümne olulisema partnerriigi lõikes 1994.aastal.

Tabel 12.5

Eesti olulisemad väliskaubanduspartnerid 1994. aastal

Riik	Eksport Eestisse (mln.krooni)	Import Eestist (mln.krooni)	Sisemajanduse koguprodukt (mln. \$)	Kaugus Eestist (km)
Soome	3 022	6 433	97 961	81
Venemaa	3 915	3 620	376 555	870
Rootsi	1 836	1 911	196 441	377
Läti	1 393	313	5 817	277
Saksamaa	1 155	2 143	204 599	1 037
Leedu	918	554	5 224	527
Taani	574	569	146 076	835
Hollandi	533	662	329 768	1 457
Ukraina	519	362	91 307	1 064
Suur- britannia	472	459	1 017 30	1 784
Valgevene	376	182	20 287	641
USA	309	362	664 801	6 956

Allikas: Väliskaubandus 1995. Eesti Statistikaamet, Tallinn, 1996; World Development Report 1996. From Plan to Market. The World Bank, Washington, 1996

Eesti ekspordi ja impordi potentsiaali hindamiseks konstrueerige regressioonimudelid (nn. gravitatsioonimudelid)

$$\ln Y_{1i} = B_0 + B_1 \ln X_{1i} + B_2 \ln X_{2i} + u_i \quad (12.20)$$

ja

$$\ln Y_{2t} = A_0 + A_1 \ln X_{1t} + A_2 \ln X_{2t} + v_t, \quad (12.21)$$

kus

Y_{1t} – eksport i-ndast riigist Eestisse,

Y_{2t} – import Eestist i-ndasse riiki,

X_{1t} – sisemajanduse koguprodukt i-ndas riigis,

X_{2t} – kaugus Eestist i-ndasse riiki.

- a) Hinnake mudelite (12.20) ja (12.21) parameetreid, nende statistilist olulisust ning mudelite kirjeldatuse taset. Kas konstrueeritud mudelite puhul saate kinnitust hüpoteesile, et väliskaubandussuhetes eelistatakse rikkamaid ja lähemal asuvaid kaubanduspartnereid (*ceteris paribus* tingimustel)?
- b) Kas mudelite (12.20) ja (12.21) puhul on tegemist heteroskedastiivsuse probleemidega? Kasutage heteroskedastiivsuse testimiseks erinevaid lähenemisviise (Park'i meetod, Glejser'i meetod, jt). Analüüsige saadud tulemusi.
- c) Konstrueerige logaritmmudelite (12.20) ja (12.21) asemel lineaarsed mudelid, analüüsige heteroskedastiivsuse olemasolu.
- d) Valige Eesti ekspordi ja impordi potentsiaali hindamiseks sobivaimad mudelid ning kasutage neid Eesti väliskaubakäibe prognoosimiseks olulisemate kaubanduspartnerite lõikes.

13. FIKTIIVSETE MUUTUJATEGA REGRESSIOONIMUDELID

13.1. Mille poolest erinevad ANOVA ja ANCOVA mudelid?

13.2. Milline on fiktiivsete muutujate kasutamise üldine reegel (*dummy variable trap*)?

13.3. Kas on võimalik hinnata allpooltoodud mudeli parameetreid?

$$Y_t = B_0 + B_1D_{1t} + B_2D_{2t} + B_3D_{3t} + B_4D_{4t} + u_t, \quad (13.1)$$

kus

$D_{it} = 1$, kui tegemist on i -nda kvartali andmetega ($i = 1, 2, 3, 4$)

$D_{it} = 0$ teistel juhtudel.

13.4 Analüüsige toodud väiteid.

a) Kui mudelis

$$Y_i = B_0 + B_1D_i + u_i \quad (13.2)$$

muutuja D_i omandab väärtusi (0 ja 2), mitte (0 ja 1), siis modelleerimise tulemuste tõlgendamisel tuleb poolitada parameetri B_1 ning t -kriteeriumi hinnanguid.

b) Kui regressioonimudel sisaldab fiktiivseid muutujaid, siis vähimruutude meetodi kasutamine on otstarbekas vaid suure valimi korral.

13.5. Kõrgkooli lõpetanute palgaerinevuste analüüsimiseks on koostatud fiktiivsete muutujatega regressioonimudel

$$Y_i = B_0 + B_1X_i + B_2D_{1i} + B_3D_{2i} + u_i, \quad (13.3)$$

kus

Y_i – i -nda spetsialisti keskmine palk,

X_i – i -nda spetsialisti tööstaaž,

$D_{1i} = 1$ – lõpetanud Tartu Ülikooli,

$D_{1i} = 0$ – lõpetanud muu õppeasutuse,

$D_{2i} = 1$ – lõpetanud Tallinna Tehnikaülikooli,

$D_{2i} = 0$ – lõpetanud muu õppeasutuse.

a) Millise märgiga võiksid olla parameetrid B_2 ja B_3 . Kuidas neid tõlgendada?

b) Kui $B_2 > B_3$, millise järelduse võib sellest teha?

13.6. Ülesandes 13.5 esitatud kõrgkooli lõpetanute palgaerinevusi käsitlevat mudelit (13.3) on täiendatud ning on saadud uus mudel:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + B_2 D_{1i} + B_3 D_{2i} + B_4 (D_{1i} X_i) + B_5 (D_{2i} X_i) + u_i \quad (13.4)$$

Võrrelge mudeleid (13.3) ja (13.4), analüüsige nende erinevusi.

13.7. 1980. a I kvartali – 1996. a II kvartali andmetel on konstrueeritud mudel kohvi tarbimise analüüsimiseks:

$$\ln \hat{Y}_t = 1,2789 - 0,1647 \ln P_t + 0,515 \ln I_t + 0,1483 \ln P'_t - 0,0089t - 0,0961 D_{1t} - 0,1570 D_{2t} - 0,0097 D_{3t} \quad (13.5)$$

$t =$ $(-2,14)$ $(1,23)$ $(0,55)$
 $(-3,36)$ $(-3,74)$ $(-6,03)$ $(-0,37)$,

kus

Y_t – kohvi tarbimise kulud ühe elaniku kohta t -ndal perioodil,

P_t – kohvi hind 1979. a. hindades t -ndal perioodil,

P'_t – tee hind 1979. a. hindades t -ndal perioodil,

- I_t – sissetulekud ühe elaniku kohta (1979. a kui baasaasta tasemega korrigeeritud) t -ndal perioodil,
 t – aeg ($t = 1, 2, \dots, 66$; $t = 1, 1980 - I \text{ kv}, \dots, t = 66, 1996. a - II \text{ kv}$),
 $D_{1t} = 1$ – I kvartal,
 $D_{1t} = 0$ – muu,
 $D_{2t} = 1$ – II kvartal,
 $D_{2t} = 0$ – muu,
 $D_{3t} = 1$ – III kvartal,
 $D_{3t} = 0$ – muu.

- Kuidas tõlgendate parameetreid, mis vastavad muutujatele P , P' ja I ?
- Kas kohv on hinnaelastne kaup?
- Kas tee on asendus- või kaasnev kaup?
- Kuidas interpreteerite parameetrit $b_4 = -0,0089$?
- Mida väljendavad mudelis fiktiivsed muutujad?
- Kas fiktiivsetele muutujatele vastavad parameetrid on statistiliselt olulised?

13.8. Analüüsimeks üliõpilaste kaalu ja pikkuse vahelisi seoseid on 51 üliõpilase (36 meest, 15 naist) andmetele tuginedes konstrueeritud järgmised regressioonimudelid:

$$\hat{Y}_i = -232,06551 + 5,5662X_i, \quad (13.6)$$

$$t = (-5,2066) \quad (8,6246)$$

ja

$$\hat{Y}_i = -122,9621 + 23,8238D_{1i} + 3,7402X_i, \quad (13.7)$$

$$t = (-2,5884) \quad (4,0149) \quad (5,1613),$$

kus

- Y_i – i -nda üliõpilase kaal,
 X_i – i -nda üliõpilase pikkus,

D_{1t} – i -nda üliõpilase sugu, $D_{1t} = 1$ mees, $D_{1t} = 0$ naine

Milliseid järeldusi saab teha mudelite (13.6) ja (13.7) alusel?

13.9. Tabelis 13.1. on esitatud andmed kauba müügi kohta aastatel 1993–1996 kvartalite lõikes (tuh. kroonides).

Tabel 13.1

Aasta	Kvartal			
	I	II	III	IV
1993	4190	4927	6843	6912
1994	4521	5522	5350	7204
1995	4902	5912	5972	7987
1996	5458	6359	6501	8607

Konstrueerige regressioonimudel

$$Y = B_0 + B_1 D_{2t} + B_2 D_{3t} + B_4 D_{4t} \quad (13.8)$$

Hinnake mudeli parameetreid ning analüüsige mudelit. Kas mudelit on võimalik kasutada algandmetes sisalduva sessoonsuse mõju elimineerimiseks?

Hinnake tabeli 13.1 andmetel ilma vabaliikmeta mudeli

$$Y = B_1 D_{1t} + B_2 D_{2t} + B_3 D_{3t} + B_4 D_{4t} \quad (13.9)$$

parameetreid.

- Analüüsige konstrueeritud mudelit. Mille poolest ta erineb ülesandes 13.9 toodud mudelist (13.8)?
- Kas ülesannetes 13.9 ja 13.10 konstrueeritud mudelite determinatsioonikordajad on võrreldavad?

Märkus: Kui fiktiivsete muutujatega regressioonimudel konstrueeritakse ilma vabaliikmeta, siis fiktiivsete muutujate arv võib võr-

duda fiktiivse muutuja võimalike esinemisväärtustega (toodud näites neljaga).

13.11. Õpetajate palga (Y_i) võimalikku sõltuvust tööstaažist (X_i) ja soost (D_i ; $D_i = 1$ – meesõpetaja, $D_i = 0$ – naisõpetaja) on modelleeritud järgmiselt:

$$\hat{Y}_i = 17,969 + 1,3707X_i + 3,3336D_i$$

$$t = (93,6120)(38,454) \quad (21,455) \quad (13.10)$$

$$R^2 = 0,9933$$

a) Analüüsi mudelit.

b) Kuidas on võimalik mudelit täiendada, et nii vabaliige kui mudeli teised parameetrid oleksid seotud tööstaažiga?

13.12. Ettevõtete rentaabluse analüüsimiseks on konstrueeritud mudel

$$\hat{Y}_i = 1,399 + 1,490D_i + 0,246X_{1i} - 9,507X_{2i} - 0,016X_{3i}$$

$$se = \quad (1,380) \quad (0,056) \quad (4,244) \quad (0,017) \quad (13.11)$$

$$R^2 = 0,26,$$

kus

\hat{Y}_i – rentaabluse tase i -ndas ettevõttes (%),

$D_i = 1$ – kui i -nda ettevõtte toodangu nomenklatuur on suur,

$D_i = 0$ – kui i -nda ettevõtte toodangu nomenklatuur ei ole suur,

X_{1i} – i -nda ettevõtte turuosa,

X_{2i} – i -nda ettevõtte suurus (töötajate arv),

X_{3i} – tööstusharu, kuhu i -s ettevõtte kuulub, kasvuindeks,

$n = 48$ – (ettevõtete arv).

Analüüsi mudelit. Kuidas ettevõtte toodangu nomenklatuur, hõivatud turuosa ning ettevõtte suurus mõjutavad toodangu rentaablust?

13.13. Töötajate palga modelleerimiseks on konstrueeritud mudel

$$Y_i = B_0 + B_1 D_{1i} + B_2 D_{2i} + B_3 (D_{1i} \cdot D_{2i}) + B_4 X_i + u_i, \quad (13.12)$$

kus

Y_i – i -nda töötaja keskmine aastapalk,

X_i – i -nda töötaja tööstaaž,

$D_{1i} = 1$ – mees,

$D_{1i} = 0$ – naine,

$D_{2i} = 1$ – töötajal on kõrgharidus,

$D_{2i} = 0$ – töötajal ei ole kõrgharidust.

a) Kuidas tõlgendate muutujat $(D_{1i} \cdot D_{2i})$ ning sellele vastavat parameetrit B_3 ?

b) Leidke $E(Y_i/D_{1i} = 1, D_{2i} = 1)$ ja tõlgendage tulemust.

13.14. Tabelis 13.2 on toodud andmed töötajate hariduse ning nende keskmise tunnitöötasu (Y_i) kohta tööle asumisel. Konstrueerige tabeli andmetel mudel

$$Y_i = B_0 + B_1 D_i. \quad (13.13)$$

D – fiktiivne muutuja, millega tähistatakse töötaja haridust.

Hinnake mudeli parameetreid.

a) Analüüsige mudelit (13.13) juhul, kui fiktiivsete muutujate puhul kasutatakse hinnanguid:

- $D_{1i} = 1$ – kõrgharidus,
- $D_{1i} = -1$ – ei ole kõrgharidust.

b) Analüüsige mudelit juhul, kui on kasutatud fiktiivseid muutujaid hinnangutega $D_{1i} = 2$ – kõrgharidus, $D_{1i} = 1$ – ei ole kõrgharidust.

Tabel 13.2

Töötasu (kroonides)	Haridus
	1 – kõrgem; 0 – ei ole kõrgem
21,2	1
17,5	0
17,0	0
20,5	1
21,0	1
18,5	0
21,2	1
18,0	0
19,0	0
22,0	1

13.15. Tabelis 13.3 on toodud andmed 40 perekonna tulude (X_i – tuh. kroonides pereliikme kohta) ja isikliku maja omamise kohta ($Y_i = 1$, kui perekond omab maja, $Y_i = 0$, kui perekonnal ei ole maja). Eesmärgiks on analüüsida, milline on tõenäosus erinevate tuludega peredel omada maja.

a) Kasutades tavalist vähimruutude meetodit hinnake mudeli

$$\hat{Y}_i = B_0 + B_1 X_i + u_i \quad (13.14)$$

parameetreid. Leidke, milline on erinevate tuludega perede maja omamise tõenäosus. Milliseid järeldusi teete saadud tulemuste alusel mudeli sobivuse kohta maja omamise tõenäosuse selgitamiseks?

b) Kasutades kaalutud vähimruutude meetodit hinnake mudeli

$$Y/\sqrt{w_i} = B_0 \frac{1}{\sqrt{w_i}} + \frac{X_i}{\sqrt{w_i}} + u_i \quad (13.15)$$

parameetreid, kus w_i on i -nda liikme dispersioon. Juhul kui maja omamise tõenäosus tuleb mõne pere korral tavalisel vähimruutude meetodil hinnatud parameetritega mudeli puhul negatiivne, jätke see pere (valimi liige) kaalutud vähimruutude meetodi kasutamisel vaatluse alt välja. Analüüsi saadud tulemusi.

Tabel 13.3

Pere nr.	Y_i	X_i	Pere nr.	Y_i	X_i	Pere nr.	Y_i	X_i	Pere nr.	Y_i	X_i
1	0	8	11	1	17	21	1	22	31	1	17
2	1	18	12	1	18	22	1	16	32	0	13
3	1	18	13	0	14	23	0	12	33	1	21
4	0	11	14	1	20	24	0	11	34	1	20
5	0	12	15	0	6	25	1	16	35	0	11
6	1	19	16	1	19	26	0	11	36	0	8
7	1	20	17	1	16	27	1	20	37	1	17
8	0	13	18	0	10	28	1	18	38	1	16
9	0	9	19	0	8	29	0	11	39	0	7
10	0	10	20	1	18	30	0	10	40	1	17

- c) Kasutades kaalutud vähimruutude meetodit hinnake lineaarse tõenäosusfunktsiooni parameetreid juhul, kui tavalise vähimruutude meetodi alusel leitud maja omamise negatiivsed tõenäosused on asendatud tõenäosustega 0,01 ja need tõenäosused, mis hinnangute tulemusena tulid üle 1, on asendatud tõenäosusega 0,99. Võrrelge saadud nn. kohandatud tõenäosusmudelit punktis (b) leitud mudeliga. Kumba mudelit loete sobivamaks maja omamise tõenäosuse modelleerimiseks? Miks?

13.16. Konstrueerige tabeli 13.3 andmetel logit-mudel

$$L_i = \ln\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right) = B_0 + B_1X_i + u_i. \quad (13.16)$$

Mudeli parameetrite hindamiseks kasutage maksimaalse tõepära meetodit (*maximum likelihood method*). Analüüsige tulemusi, võrrelge neid tulemustega, mis on saadud eelmise ülesande (ülesanne 13.15) alapunktides (a), (b) ja (c) konstrueeritud mudelite alusel.

13.17. Miks logit- ja probit-mudelid on praktiliseks kasutamiseks sobivamad kui lineaarsed tõenäosusmudelid, kuigi lineaarseid tõenäosusmudeleid kasutatakse ulatuslikult just nende suhtelise lihtsuse tõttu?

13.18. Kas peate õigeks väidet: mida suurem on logit'i väärtus, seda suurem on tõenäosus, et sündmus toimub?

13.19. Tabelis 13.4 on toodud noorte perede deklareeritud aastasissetulekud (X_i , tuh. kroonides), sellise sissetulekuga perede arv (N_i) ning perede arv, kus aastasissetulekute X_i korral omatakse autot (n_i).

Erineva sissetulekuga perede auto omamise tõenäosuse hindamiseks konstrueerige logit-mudel:

$$L_i = \ln\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right) = B_0 + B_1X_i + u_i, \quad (13.17)$$

Et vältida heteroskedastiivsuse probleemi, kasutage mudeli parameetrite hindamiseks kaalutud vähimruutude meetodit. Seega hinnake mudeli

$$L_i^* = B_0\sqrt{w_i} + B_1X_i^* + v_i \quad (13.18)$$

parameetreid.

Tabel 13.4

Pere sissetulek (X_i)	Perede arv (N_i)	Autot omavate pe- rede arv (n_i)
40	25	20
35	40	30
30	50	33
25	65	39
20	70	36
15	100	45
13	80	28
10	60	18
8	50	12
6	40	8

Mudelis (13.18) on kasutatud järgmisi tähistusi:

$$\begin{aligned}
 L_i^* &= L_i \sqrt{w_i}; & X^* &= X_i \sqrt{w_i} \\
 v_i &= u_i \sqrt{w_i}; & w_i &= N_i \hat{P}_i (1 - \hat{P}_i); \\
 \hat{P}_i &= \frac{n_i}{N_i}
 \end{aligned}
 \tag{13.19}$$

Analüüsi mudeleid (13.17) ja (13.18). Hinnake, milline on auto omamise tõenäosus erinevate tuludega peredes.

13.20. Lillekasvatuseühistus katsetati uut taimekaitsevahendit. Eesmärgiks oli selgitada, milline on lahuse sobivaim kontsentratsioon (mg 1 liitri vee kohta) ning kas vale kontsentratsiooniga lahuse kasutamine võib põhjustada roospõõsaste hävimist. Katse tulemused on esitatud tabelis 13.5.

Tabel 13.5

Kontsentratsioon (mg l l kohta)		Roosi- põõsaste arv (N_i)	Hävinud põõ- saste arv (n_i)	$P_i = \frac{n_i}{N_i}$
X_i	$\log X_i$			
2,6	0,4150	50	6	0,120
3,8	0,5797	48	16	0,333
5,1	0,7076	46	24	0,522
7,7	0,8865	49	42	0,857
10,2	1,0086	50	44	0,880

Konstrueerige mudel, selgitamaks roosipõõsaste väljalangemise tõenäosust erineva kontsentratsiooniga taimekaitsevahendi kasutamise korral.

13.21. Näidake, et logistilise jaotuse

$$P_i = \frac{1}{1 + \exp\{-B_0 - B_1 X_i\}} \quad (13.20)$$

korral kehtib seos

$$\ln \frac{P_i}{(1 - P_i)} = B_0 + B_1 X_i \quad (13.21)$$

13.22. Tabelis 13.6 on toodud andmed 32 üliõpilase ökonomeetria lõpueksami tulemuste kohta ($Y_i = 1$ – hinne 5, $Y_i = 0$ – hinne 4 või 3); ökonomeetrilise projekti hinne (X_{1i} ; hinnatud on nelja palli süsteemis, maksimaalne hinne on 4); seminarides kogutud preemiapunktide arv (X_{2i}) ning fiktiivne muutuja, mis väljendab üliõpilase kuuluvust konkreetseesse praktikumirühma ($D_i = 1$, kui üliõpilane kuulus rühma, kus kasutati uut tarkvara; $D_i = 0$, kuulumine teistesse rühmadesse).

Tabel 13.6

Õppetöö tulemused ökonomeetrias

Üliõp. nr.	Y _i	X _{1i}	X _{2i}	D _i	Üliõp. nr.	Y _i	X _{1i}	X _{2i}	D _i
1	0	2,66	20	0	17	0	2,75	25	0
2	0	2,89	22	0	18	0	2,83	19	0
3	0	3,28	24	0	19	0	3,12	23	1
4	0	2,92	12	0	20	1	3,16	25	1
5	1	4,00	21	0	21	0	2,06	22	1
6	0	2,86	17	0	22	1	3,62	28	1
7	0	2,76	17	0	23	0	2,89	14	1
8	0	2,87	21	0	24	0	3,51	26	1
9	0	3,03	25	0	25	1	3,54	24	1
10	1	3,92	29	0	26	1	2,83	27	1
11	0	2,63	20	0	27	1	3,39	17	1
12	0	3,32	23	0	28	0	2,67	24	1
13	0	3,57	23	0	29	1	3,65	21	1
14	1	3,26	25	0	30	1	4,00	23	1
15	0	3,53	26	0	31	0	3,10	21	1
16	0	2,74	19	0	32	1	2,39	19	1

Konstrueerige tabeli 13.6 andmetel logit-mudel:

$$\ln \frac{P_i}{(1-P_i)} = B_0 + B_1 X_{1i} + B_2 X_{2i} + B_3 D_i + u_i \quad (13.22)$$

Hinnake, milline on tõenäosus, et konkreetne üliõpilane saab ökonomeetria lõpueksami hindeks viie.

13.23. Tabelis 13.7 on toodud järgmised andmed:

X_i – perekonna keskmine tulu aastas ühe pereliikme kohta (tuh. kroonides),

N_i – perede arv, kelle tulu pereliikme kohta on X_i ,

n_i – perede arv, kes tulu X_i korral omavad maja.

Tabel 13.7

**Maja omavate perede arv ja keskmine
aastasissetulek pereliikme kohta**

X_i	N_i	n_i	$P_i = \frac{n_i}{N_i}$
26	40	8	0,20
28	50	12	0,24
30	60	18	0,30
33	80	28	0,35
35	100	45	0,45
40	70	36	0,51
45	65	39	0,60
50	50	33	0,66
55	40	30	0,75
60	25	20	0,80
Σ	580	269	

Konstrueerige tabeli 13.7 andmetel logit-mudel, iseloomustamaks erinevate tuludega perede maja omamise tõenäosust. Leidke see tõenäosus iga tulugrupi jaoks.

13.24. On läbi viidud sotsioloogiline uurimus analüüsima noorte perede võimalusi seltskondlikuks suhtlemiseks. Uurimuse ühe osana on analüüsitud perede restoranikülastusi tulenevalt peresissetulekust ja lapsehoidja teenete vajamisest. On konstrueeritud regressioonimudel

$$\ln \frac{P_i}{1-P_i} = -9,456 + 0,364X_i - 1,107D_i, \quad (13.23)$$

kus

X_i – perekonna aastasissetulek (tuh. krooni),

D_i – fiktiivne muutuja:

$D_i = 1$ – kui perekond vajab lapsehoidjat restoranikülastuse ajaks,

$D_i = 0$ – kui ei vaja lapsehoidjat,

P_i – tõenäosus selleks, et perekond külastab restorani.

Kahekümnest perest koosneva valimi kohta on teada, et üksteist peret külastab restorani, kuus peret vajavad restoranikülastuse ajaks lapsehoidjat ning perede aastasissetulekud on vahemikus 17 000 – 44 000 krooni.

Analüüsige mudelit (13.23). Milline on tõenäosus, et 44 000 kroonise aastasissetulekuga pere, kes vajab restoranikülastuse ajaks lapsehoidjat, külastab restorani?

14. DÜNAAMILISED MUDELID

14.1. Kas nõustute väitega, et kõik ökonomeetrilised mudelid on dünaamilised mudelid?

14.2. Milline mudel on

- dünaamiline (*dynamic model*),
- jaotatud viitajaga (*distributed lag model*),
- autoregressiivne (*autoregressive model*)?

14.3. Millised põhjused võivad tingida viitaja lülitamist regressioonimudelitesse? Tooge näiteid.

14.4. Kas on õige kasutada lähenemist, mille korral viitajaga juhuslikke muutujaid (X_{t-1} , X_{t-2} , jne.) lülitatakse mudelisse seni, kuni parameetrite hinnangud on t-kriteeriumi alusel statistiliselt olulised.

14.5. Kommenteerige väidet: kuna viitajaga muutujad on omavahel korreleeruvad, siis neid sisaldavate mudelite puhul ei maksa pöörata tähelepanu üksikute parameetrite statistilisele olulisusele.

14.6. Millal ja mis eeldustel kasutatakse Koyck'i mudelit?

14.7. Mida väljendavad Koyck'i mudelis viitaja mediaan ja keskmine viitaeg?

14.8. Inflatsioonitaseme muutumise (Y_t) ja raha pakkumise muutumise (X_t) vaheliste seoste analüüsimiseks on konstrueeritud regressioonimudel

$$Y_t = A_0 + \sum_{t=0}^{20} B_t X_{t-1} + u_t \quad (14.1)$$

Mudeli parameetreid on hinnatud 20 kvartali andmetel: $R^2 = 0,525$; $S^2 = 1,066$; $d = 2,00$. Parameetrite B_t hinnangud b_t ja t-statistikud ($t = 0, 1, 2, \dots, 20$) on toodud tabelis 14.1.

Analüüsige raha pakkumise muutumise lühiajalist, keskmist ja pikaajalist mõju inflatsioonitaseme muutumisele. Eeldusel, et mudel vastab Koyck'i mudeli nõudele parameetrite B_t positiivsuse kohta, leidke keskmine viitaeg.

Tabel 14.1

Mudeli (14.1) parameetrite hinnangud ja t-statistikud

Parameeter B_t	Parameetri hinnang b_t	$ t $ -statistik
B_0	0,041	1,276
B_1	0,034	1,538
B_2	0,030	1,903
B_3	0,029	2,171
B_4	0,030	2,235
B_5	0,033	2,294
B_6	0,037	2,475
B_7	0,042	2,798
B_8	0,048	3,249
B_9	0,054	3,783
B_{10}	0,059	4,305
B_{11}	0,065	4,673
B_{12}	0,069	4,795
B_{13}	0,072	4,694
B_{14}	0,073	4,468
B_{15}	0,072	4,202

Parameeter B_t	Parameetri hinnang b_t	$ t $ -statistik
B_{16}	0,069	3,943
B_{17}	0,062	3,712
B_{18}	0,053	3,511
B_{19}	0,039	3,338
B_{20}	0,022	3,191

14.9. Tabelis 14.2 on toodud andmed isiklike tarbimiskulude ja isiklikult kasutatava tulu kohta USA-s aastatel 1970–1987 (bilj. \$, 1982. a. hindades).

Tabel 14.2

Aasta	Tarbimiskulud (Y_t)	Isiklikult kasutatav tulu (X_t)
1970	1492,0	1668,1
1971	1538,8	1728,4
1972	1621,9	1797,4
1973	1689,6	1916,3
1974	1674,0	1896,6
1975	1711,9	1931,7
1976	1803,9	2001,0
1977	1883,8	2066,6
1978	1961,0	2167,4
1979	2004,4	2212,6
1980	2000,4	2214,3
1981	2024,2	2248,6
1982	2050,7	2261,5

Aasta	Tarbimiskulud (Y_t)	Isiklikult kasutatav tulu (X_t)
1983	2146,0	2331,9
1984	2249,3	2469,8
1985	2354,8	2542,8
1986	2455,2	2640,9
1987	2521,0	2686,3

Allikas: Economic Report of the President. 1989. Table B-15, Table B-27.

Koostage regressioonimudelid

$$Y_t = A_0 + A_1 X_t + u_t \quad (14.2)$$

ja

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + B_2 X_{t-1} + v_t \quad (14.3)$$

Hinnake kummagi mudeli parameetreid ja andke tulemustele majanduslik tõlgendus. Milline on tarbimise lühiajaline ja pikaajaline piirkalduvus?

14.10. Kasutades tabelis 14.2 toodud andmeid konstrueerige mudelid

$$\ln Y_t = A_0 + A_1 \ln X_t + u_t \quad (14.4)$$

ja

$$\ln Y_t = B_0 + B_1 \ln X_t + B_2 \ln Y_{t-1} + v_t \quad (14.5)$$

Hinnake mudelite parameetreid, analüüsige saadud tulemusi. Leidke tarbimise lühiajaline ja pikaajaline elastsus tulude suhtes.

14.11. Inflatsioonitaseme ja tootmisvõimsuste kasutamise vaheliste seoste analüüsimiseks on 18 aasta andmetel konstrueeritud mudel

$$Y_t = -30,12 + 0,1408X_t + 0,2360X_{t-1}$$

$$t = (-6,27) \quad (2,60) \quad (4,20) \quad (14.6)$$

$$R^2 = 0,727 ,$$

kus

Y_t – sisemajanduse koguprodukti (SKP) deflaator, %,

X_t – tootmisvõimsuste kasutamise määr, %.

- a) Analüüsige mudelit (14.6). Leidke tootmisvõimsuste kasutamise määra lühiajaline ja pikaajaline mõju inflatsioonile (SKP deflaatorile).
- b) Samadel andmetel on koostatud mudel

$$Y_t = B_0 + B_1X_t + B_2Y_{t-1} + u_t . \quad (14.7)$$

Milliseid järeldusi saab selle mudeli alusel teha tootmisvõimsuste kasutamise määra lühiajalise ja pikaajalise mõju kohta inflatsioonile?

14.12. Kas nõustute väitega, et Granger'i meetod võimaldab selgitada pigem nähtuste vahelisi varasemaid seoseid kui nende põhjuslikkust? Põhjendage!

14.13. Näidake, et Koyck'i mudeli korral viitaja mediaan võrdub suhtega $\frac{-\log 2}{\log \lambda}$,

kus

λ – viitaja mõju alanemise määr ($0 < \lambda < 1$).

14.14. Leidke viitaja mediaanid, kui protsessi kohanemise kiirused on 0,8; 0,6; 0,4; 0,2. Kas esineb mingi seaduspära viitaja alanemise määra ja viitaja mediaani muutumises?

14.15. Näidake, et Koyck'i mudeli korral viitaja keskvärtus on $\frac{\lambda}{1-\lambda}$. Millise järelduse saab teha majandusprotsessi ajalise kohanimise kohta, kui viitaja mõju alanemise määr λ on suhteliselt kõrge?

14.16. Milles näete peamisi erinevusi Koyck'i mudeli ja adaptiivsete ootuste mudeli (*adaptive expectation model*) vahel?

14.17. Milles seisneb adaptiivsete ootuste mudeli ja osalise kohanimisega mudeli (*partial adjustment model*) kontseptuaalne erinevus?

14.18. Tööjõu nõudluse muutumise

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} \quad (14.8)$$

analüüsamiseks on konstrueeritud regressioonimudel

$$\begin{aligned} \Delta Y_t &= 14,22 + 0,172X_t - 0,028t - 0,0007t^2 - 0,297Y_{t-1} \\ t &= (5,448) (12,286) \quad (-1,867) (-3,500) \quad (-9,000) \quad (14.9) \\ R^2 &= 0,76 \quad d = 1,37, \end{aligned}$$

kus

X_t – tootmise maht,

t – aeg

$n = 44$.

Mudel on koostatud eeldusel, et tööjõu soovitud nõudlus (Y_t^*) on tootmise mahu, aja ja aja ruudu funktsioon ning kehtib seos

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \delta(Y_t^* - Y_{t-1}), \quad (14.10)$$

kusjuures

$$0 < \delta < 1$$

ning

δ – kohanemise koefitsient.

- a) Analüüsi regressioonimudelit (14.9). Kas konstrueeritud mudeli puhul on tegemist autokorrelatsiooniga?
- b) Leidke tööjõu pikaajalise nõudluse mudel.

14.19. Tootmiseks vajalike (soovitud) tootmiseadmete (Y_t^*) modelleerimiseks on konstrueeritud regressioonimudel

$$Y_t^* = \alpha X_{1,t-1}^{\beta_1} X_{2,t-1}^{\beta_2} + u_t, \quad (14.11)$$

kus

X_1 – tootmiseadmete hind,

X_2 – intressimäär.

Mudeli parameetreid on hinnatud 37 aasta andmetel. On saadud regressioonimudel:

$$\begin{aligned} \ln \hat{Y}_t &= \text{constan } t - 0,218 \ln X_{1,t-1} - \\ t &= \quad \quad \quad (-4,275) \\ &\quad - 0,855 \ln X_{2,t-1} + 0,864 \ln Y_{t-1} \quad \quad \quad (14.12) \\ &\quad \quad \quad (-5,029) \quad \quad (24,69) \end{aligned}$$

$$R^2 = 0,987$$

- a) Leidke tootmiseadmete vajaduse kohanemise koefitsient. Millega põhjendate kohanemise koefitsiendi madalat taset?
- b) Leidke tootmiseadmete hinna pikaajalised ja lühiajalised elastsuskoefitsiendid.
- c) Leidke intressimäära pikaajalised ja lühiajalised elastsuskoefitsiendid.

14.20. Eeldusel, et $\beta_1 = a_0 + a_1 i + a_2 i^2$, on koostatud jaotatud viit-ajaga mudel

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{t-3} + \beta_4 X_{t-4} + u_t \quad (14.13)$$

Kuidas on võimalik hinnata parameetreid β , järgides kitsendust $\beta_0 = \beta_4 = 0$?

14.21. Toodangu omahinna (Y_t) kujunemise analüüsimiseks on 19 aasta andmetel koostatud regressioonimudel

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= 2,033 + 0,273X_{1t} - 0,521X_{2t} + \\ t &= (2,049) (2,150) \quad (-5,263) \\ &+ 0,256X_{3t} + 0,028X_{3,t-1} + 0,121Y_{t-1} \\ &(10,667) \quad (0,718) \quad (1,017) \end{aligned} \quad (14.14)$$

$$R^2 = 0,984, \quad d = 2,54$$

Kontrollige autokorrelatsiooni võimalust mudelis, kasutades selleks nii d-kriteeriumi kui h-kriteeriumi. Hinnake kummagi kriteeriumi sobivust autokorrelatsiooni olemasolu selgitamiseks.

14.22. Tabelis 14.3 on toodud andmed ettevõtete kulude kohta tootmisseadmete soetamiseks (Y_t) ja toodangu müügi kohta (X_t) USA-s aastatel 1970–1991 (biljonites dollarites).

Tabel 14.3

Aasta	Kulutused tootmiseseadmetele (Y_t)	Müük (X_t)
1970	36,990	52,805
1971	33,600	55,906
1972	35,420	63,027
1973	42,350	72,931
1974	52,480	84,790
1975	53,660	86,589
1976	58,530	98,797
1977	67,480	113,201
1978	78,130	126,905
1979	95,130	143,936
1980	112,600	154,391
1981	128,680	168,129
1982	123,970	163,351
1983	117,350	172,547
1984	139,610	190,682
1985	152,880	194,538
1986	137,950	194,657
1986	141,060	206,326
1987	163,450	223,541
1989	183,800	232,724
1990	192,610	239,459
1991	182,810	235,142

Allikas: Economic Report of the President, 1993. Table B-52, Table 8-53.

Konstrueerige regressioonimudel

$$Y_t^* = \alpha + \beta_0 X_t + u_t, \quad (14.15)$$

kus

Y_t^* – soovitud pikaajalised kulutused tootmiseseadmetele,

X_t – müük,

t – aeg.

Hinnake tabeli 14.3 andmetel mudeli parameetreid. Leidke investeeringute (kulutused tootmiseseadmetele) pikaajalise ja lühiajalise nõudluse mudelid, hinnake nende parameetreid ja analüüsige tulemusi.

14.23. Kasutades tabelis 14.3 toodud andmeid konstrueerige mudel

$$Y_t^* = \beta_0 X_t^{\beta_1} e^{u_t}. \quad (14.16)$$

Hinnake mudeli (14.16) kui osalise kohanemise e. põhivara kohanemise mudeli parameetreid. Analüüsige investeeringuteks tehtavate kulutuste lühiajalist ja pikaajalist elastsust müüginahu suhtes. Võrrelge mudelit ülesandes 14.22 konstrueeritud mudeliga (14.15). Analüüsige tulemusi.

14.24. Kasutades tabeli 14.3 andmeid konstrueerige mudel

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^* + u_t, \quad (14.17)$$

kus

X_t^* – soovitud (optimaalne) müüginahaht.

Millise mudeliga on tegemist? Hinnake mudeli parameetreid ja analüüsige tulemusi. Kas mudeli (14.17) puhul esineb autokorrelatsiooni oht?

14.25. Kasutades tabeli 14.3 andmeid, hinnake mudeli

$$Y_t^* = \alpha + \beta X_t^* + u_t \quad (14.18)$$

parameetreid,

kus

Y_t^* – soovitud investeeringute tase,

X_t^* – soovitud müügiimaht.

Analüüsige tulemusi, võrrelge neid ülesannete 14.22, 14.23 ja 14.24 lahendamisel saadud tulemustega.

14.26. Tabeli 14.3 andmetele tuginedes kasutage Granger'i meetodit, et selgitada investeeringuteks tehtavate kulutuste ja müügi-mahtude vaheliste seoste põhjuslikkust. Kasutage kuni kuuepe-rioodilist viitaega. Milliseid järeldusi teete Granger'i meetodi ra-kendamise võimaluste kohta majandusprotsesside vaheliste seoste põhjuslikkuse selgitamiseks?

14.27. Selgitage Schwarzi kriteeriumi kasutamise võimalusi viitaja pikkuse määramiseks.

14.38. Rakendage Schwarzi kriteeriumi sobiva viitaja valimiseks tabelis 14.3 toodud andmetel jaotatud viitajaga mudeli konstruee-rimisel.

15. MUDELITE VALIK

15.1. Mis on regressioonimudeli spetsifikatsiooniviga (*specification error*)?

15.2. Miks tekivad spetsifikatsioonivead?

15.3. Mis iseloomustab head ökonomeetrilist mudelit?

15.4. Nimetage erinevat tüüpi spetsifikatsioonivigu. Kas need võivad esineda ka üheaegselt?

15.5. Mis on mudeli vajalikud (*relevant*) ja mittevajalikud (*irrelevant*) muutujad?

15.6. Mis võib kaasnedä vajalike muutujate mudelist väljajätmisega?

15.7. Mis võib kaasnedä mittevajalike (mitteasjakohaste) muutujate mudelisse lülitamisega?

15.8. Kuidas kommenteerite väidet, et vajalike muutujate mudelist väljajätmine on ohtlikum viga kui mittevajalike muutujate mudelisse lülitamine?

15.9. Keynes'i multiplikaatori hindamiseks on konstrueeritud regressioonimudel, mille sõltuvaks muutujaks on rahvuslik koguprodukt ja sõltumatuks muutujaks investeeringud. Kui mudelisse lülitatakse täiendavalt veel nn. mitteasjakohane e. mittevajalik muutuja *maksud*, siis selgub, et investeeringutele vastav parameeter muutub statistiliselt ebaoluliseks. Kommenteerige olukorda.

15.10. Kommenteerige olukordi, kui on saadud statistilises mõttes hea mudel, kuid see ei ole kooskõlas majandusteoreetiliste seisukohtadega või kui majandusteoreetiliste seisukohtadega kooskõlas

olev mudel ei ole statistiliselt oluline. Mida tuleks uurijatel sel juhul teha?

15.11. Millal tuleb kasutada kitsendustega vähimruutude meetodit?

15.12. Kitsendustega vähimruutude meetodi kasutamise tulemusena leitud determinatsioonikordaja \dot{R}^2 ja tavalisel vähimruutude meetodil leitud determinatsioonikordaja R^2 vahel kehtib seos $\dot{R}^2 \leq R^2$. Miks?

15.13. Kui majandusteooriast tulenevad kitsendused kehtivad, siis kitsendustega vähimruutude meetodi kasutamisel saadud hinnangud on enamasti paremad tavalisel vähimruutude meetodil saadustest. Põhjendage väidet.

15.14. Regressioonimudeli

$$Y_t = B_0 + B_1 X_{1t} + B_2 X_{2t} + B_3 X_{3t} + B_4 X_{4t} + u_t \quad (15.1)$$

parameetrite hindamiseks on kasutatud kitsendustega vähimruutude meetodit, et hinnata mudeli parameetreid kitsenduste $B_1 = 0$ ja $B_3 + B_4 = 1$ korral. Kuidas kontrollite kitsenduste paikapidavust?

15.15. Näidake, et kui Cobb-Douglase tootmisfunktsiooni

$$\ln Y_t = B_0 + B_1 \ln X_{1t} + B_2 \ln X_{2t} + u_t, \quad (15.2)$$

kus

Y_t – toodangu maht t-ndal aastal,

X_{1t} – tööjõud t-ndal aastal,

X_{2t} – kapital t-ndal aastal,

korral on täidetud nõue $B_1 + B_2 = 1$ (tegemist on konstantse asendatavusega tootmisfunktsiooniga), siis tuleb hinnata järgmise funktsiooni

$$\ln \frac{Y_t}{X_{1t}} = B_0 + B_2 \ln \frac{X_{2t}}{X_{1t}} + u_t \quad (15.3)$$

parameetreid. Kuidas tõlgendada suurusi (Y_t/X_{1t}) ja (X_{2t}/X_{1t}) ?

15.16. Põllumajandustoodangu modelleerimiseks on konstrueeritud tootmisfunktsioon

$$\begin{aligned} \ln \hat{Y}_t &= -3,338 + 1,499 \ln X_{1t} + 0,490 \ln X_{2t} \\ t &= (-1,3629) (4,5398) \quad (3,1020) \\ R^2 &= 0,8890, \end{aligned} \quad (15.4)$$

kus

Y_t – põllumajandustoodangu maht t-ndal aastal,

X_{1t} – tööjõud t-ndal aastal,

X_{2t} – kapital t-ndal aastal,

$n = 15$ (mudel on konstrueeritud 15 aasta andmetel).

Konstantse asendatavusega tootmisfunktsiooni korral kehtib kitsendus $B_1 + B_2 = 1$, millest tuleneb regressioonimudel

$$\begin{aligned} \ln \frac{\hat{Y}_t}{X_{1t}} &= 1,7086 + 0,6130 \ln \frac{X_{2t}}{X_{1t}} \\ t &= (4,1082) (6,5720) \\ R^2 &= 0,8489. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Kontrollige, kas põllumajandustoodangu mahu modelleerimiseks kasutatava tootmisfunktsiooni korral on tegemist konstantse asendatavusega tootmisfunktsiooniga. Tõlgendage sisuliselt mõlemat tootmisfunktsiooni. Kumba mudeli valite põllumajandustoodangu modelleerimiseks?

15.17. Tootmiskulude (Y) ja toodangu mahu (X) vaheliste seoste analüüsimiseks on konstrueeritud lineaarne, ruut- ja kuupmudel.

Mudelite parameetrite hinnangud ja vastavad statistikud on toodud juuresolevas tabelis 15.1. Mudelite parameetrite hindamiseks kasutatud valim koosneb kümnest ettevõttest ($n = 10$).

Tabel 15.1

Funktsiooni tüüp	Vabaliige	X	X ²	X ³	R ²	d
1) Lineaarne	166,467 se = (19,021)	19,933 (3,066)	-	-	0,8409	0,716
2) Ruutmudel	222,383 se = (23,488)	-8,025 (9,809)	2,542 (0,869)	-	0,9284	1,038
3) Kuupmudel	141,767 se = (6,375)	63,478 (4,778)	-12,962 (0,986)	0,939 (0,059)	0,9983	2,70

- Hinnake d-statistiku alusel erinevates mudelites sisalduvat autokorrelatsiooni olulisuse nivool 0,01.
- Hinnake d-statistiku alusel erinevates mudelites sisalduvat autokorrelatsiooni olulisuse nivool 0,05.
- Leidke piirkulude funktsioon kõigi kolme mudeli puhul.
- Millist mudelit loete majandusteoreetilistest kaalutlustest tulenevalt parimaks?

15.18. Tabelis 15.2 on toodud andmed rahvusliku koguprodukti (Y_t), töajõu (X_{1t}) ja kapitali (X_{2t}) kohta aastatel 1981-1995. Andmed on aluseks Cobb-Douglase tootmisfunktsiooni

$$\ln Y_t = B_0 + B_1 \ln X_{1t} + B_2 \ln X_{2t} + u_t \quad (15.6)$$

konstrueerimisele.

- Leidke mudeli parameetrite hinnangud ning hinnake mudeli ja tema parameetrite statistilist olulisust.

- b) Oletades, et andmed kapitali kohta ei ole usaldusväärsed, konstrueerige logaritmmudel kirjeldamaks rahvusliku koguprodukti ja tööjõu vahelist seost.

$$Y_t = A_0 + A_1 \ln X_{1t} + v_t. \quad (15.7)$$

Hinnake mudeli (15.7) parameetreid, analüüsige mudelit ning võrrelge seda punktis (a) konstrueeritud mudeliga.

Tabel 15.2

Aasta	Y_t	X_{1t}	X_{2t}	t
1981	8 911,4	281,5	120,753	1
1982	10 873,2	284,4	122,242	2
1983	11 132,5	283,0	125,263	3
1984	12 086,5	375,8	128,539	4
1985	12 767,5	375,2	131,427	5
1986	16 347,1	402,5	134,267	6
1987	19 542,7	478,0	139,038	7
1988	21 075,9	553,4	146,450	8
1989	23 052,0	616,7	153,714	9
1990	26 128,2	695,7	164,783	10
1991	29 563,7	790,3	176,864	11
1992	33 376,6	816,0	188,146	12
1993	28 354,3	848,4	205,841	13
1994	46 868,3	873,1	221,748	14
1995	54 308,8	999,2	239,715	15

- c) Oletades, et andmed tööjõu kohta ei ole usaldusväärsed, konstrueerige logaritmmudel kirjeldamaks rahvusliku koguprodukti ja kapitali vahelist seost

$$Y_t = C_0 + C_2 \ln X_{2t} + w_t \quad (15.8)$$

Hinnake mudeli (15.8) parameetreid, analüüsi mudelit ja võrrele punktides (a) ja (b) konstrueeritud mudelitega.

15.19. Kontrollige Durbin-Watsoni d-statistiku alusel autokorrelatsiooni olemasolu regressioonimudelil

$$\begin{aligned} \ln \hat{Y}_t &= -8,4010 + 0,6731 \ln X_{1t} + 1,1816 \ln X_{2t} \\ t &= (-3,0912) (4,3952) \quad (3,9121) \\ R^2 &= 0,9824 \quad \bar{R}^2 = 0,9795 \\ d &= 1,2980 \quad n = 15 \end{aligned} \quad (15.9)$$

Autokorrelatsiooni olemasolu korral leidke autokorrelatsioonikordaja ρ hinnang teisendatud mudeli konstrueerimiseks üldistatud diferentside meetodil.

15.20. Elanike tarbimiskulude ning nende sissetulekute ja rikkuse vaheliste seoste analüüsimiseks on konstrueeritud mudelid:

$$\text{TARBIMINE} = B_0 + B_1 \text{SISSETULEK} + u_t \quad (15.10)$$

ja

$$\text{TARBIMINE} = A_0 + A_1 \text{RIKKUS} + v_t \quad (15.11)$$

- a) Mis võivad olla kriteeriumid mudelite vahel valiku tegemisel?
- b) Kas on otstarbekas konstrueerida mõlemat muutujat (sissetulekud ja rikkus) üheaegselt sisaldavat mudelit:

$$\text{TARBIMINE} = C_0 + C_1 \text{SISSETULEK} + C_2 \text{RIKKUS} + w_t \quad (15.12)$$

Kas sissetulekute ja rikkuse vahel võib esineda otsene kollineaarsus? Analüüsi multikollineaarsuse probleemi mõlemat muutujat sisaldava mudeli korral.

15.21. Keskmise tunnitöötasu (Y_t) ja tööviljakuse (X_t) vaheliste seoste analüüsimiseks on konstrueeritud kaks regressioonimudelit ($n = 30$):

$$\begin{aligned} Y_t &= 1,0387 + 1,0625X_t \\ t &= (0,1242)(4,1158) \\ R^2 &= 0,7080 \end{aligned} \quad (15.13)$$

ja

$$\begin{aligned} Y_t &= 1,0777X_t \\ t &= (5,0649) \\ R^2 &= 0,7070 \end{aligned} \quad (15.14)$$

Millise spetsifikatsiooniveaga võib antud mudelite paari puhul olla tegemist? Kumba mudelit eelistate?

15.22. Tabelis 15.3 on toodud andmed firma toodangu rentaabluse (Y_t), toodangu mahu muutuse (X_{1t}) ja riigi inflatsioonitaseme (X_{2t}) kohta 28 aasta vältel.

a) Konstrueerige mudelid:

$$\hat{Y}_t = B_0 + B_1X_{1t} + B_2X_{2t} + u_t \quad (15.15)$$

$$\hat{Y}_t = A_0 + A_2X_{2t} + v_t \quad (15.16)$$

ja

$$\hat{Y}_t = C_0 + C_1X_{1t} + w_t \quad (15.17)$$

Hinnake mudelite (15.15; 15.16 ja 15.17) parameetreid ning analüüsige mudeleid.

b) Konstrueerige mõlemat sõltumatut muutujat (X_{1t} ja X_{2t}) sisaldav regressioonimudel, jättes vaatluse alt välja kaks esi-

mest aastat, mil toodangu rentaablus oli oluliselt kõrgem (anomaalsed punktid). Analüüsi tulemust.

- c) Jaotage analüüsitav periood kaheks allperioodiks 1968.–1990. a. ja 1991.–1995. a. Kasutage selleks fiktiivsete muutujate sissetoomise võimalust. Kas on erinevusi majandusnäitajate käitumises kahel analüüsitava allperioodil?

Tabel 15.3

t	Y_t	X_{1t}	X_{2t}	t	Y_t	X_{1t}	X_{2t}
1982	53,0	6,7	-0,4	1982	4,3	6,8	2,8
1983	35,2	2,1	0,4	1983	5,0	-13,5	-0,2
1984	3,7	1,8	2,9	1984	4,4	-0,4	3,4
1985	-3,8	-0,4	3,0	1985	3,8	10,5	5,7
1986	41,7	6,0	1,7	1986	3,6	15,4	5,8
1987	10,5	2,1	1,5	1987	7,9	-22,4	-0,6
1988	-1,3	2,6	1,8	1988	10,8	-37,2	-1,2
1989	26,1	5,8	0,8	1989	6,0	31,2	5,4
1990	-10,5	4,0	1,8	1990	4,7	19,1	5,5
1991	21,2	5,3	1,6	1991	5,9	-13,1	5,0
1992	15,5	6,0	1,0	1992	7,9	-1,3	2,8
1993	10,2	6,0	2,3	1993	9,8	8,6	-0,3
1994	-13,3	2,7	3,2	1994	10,2	-022,2	2,6
1995	21,3	4,6	2,7	1995	7,3	-12,2	-1,9

15.23. Konstrueerige tabeli 15.2 andmetel tootmisfunktsioon, mis sõltumatute muutujatena sisaldab lisaks tööjõule ja kapitalile ka aega (X_{3t}) (näiteks tehnilise progressi faktorina). Analüüsi mu-

delit. Kas mudel erineb oluliselt ilma ajategurita tootmisfunktsioonist (15.15)?

15.24. Tabelis 15.4 on toodud andmed elektrienergia tarbimise (Y_t), sisemajanduse koguprodukti (X_{1t}) ja elektrienergia hinna (X_{2t}) kohta OECD maades aastatel 1960–1982 (muutused protsentides, 1973 = 100).

a) Konstrueerige mudelid

$$\ln Y_t = B_0 + B_1 \ln X_{1t} + B_2 \ln X_{2t} + u_{1t} \quad (15.18)$$

$$\ln Y_t = A_0 + A_1 \ln X_{1t} + A_2 \ln X_{1t-1} + A_3 \ln X_{2t} + u_{2t} \quad (15.19)$$

$$\ln Y_t = C_0 + C_1 \ln X_{1t} + C_2 \ln X_{2t} + C_3 \ln X_{2t-1} + u_{3t} \quad (15.20)$$

$$\ln Y_t = D_0 + D_1 \ln X_{1t} + D_2 \ln X_{2t} + D_3 \ln Y_{t-1} + u_{4t} \quad (15.21)$$

Hinnake tabeli 15.4 andmetel mudelite parameetreid. Millist tüüpi mudelitega on tegemist?

b) Analüüsige konstrueeritud mudeleid (15.18)–(15.21) ja nende alusel hinnatud elastsuskoeffitsiente.

Tabel 15.4

Aasta	Y_t	X_{1t}	X_{2t}
1960	54,1	54,1	111,9
1961	55,4	56,4	112,2
1962	58,5	59,4	111,1
1963	61,7	62,1	110,2
1964	63,6	65,9	109,0
1965	66,8	69,5	108,3

Aasta	Y_t	X_{1t}	X_{2t}
1966	70,3	73,2	105,3
1967	73,5	75,7	105,4
1968	78,3	79,9	104,3
1969	83,8	83,8	101,7
1970	88,9	86,2	97,7
1971	91,8	89,9	100,3
1972	97,7	84,3	98,6
1973	100,0	100,0	100,0
1974	97,4	101,4	120,1
1975	93,5	100,5	131,0
1976	99,1	105,3	129,6
1977	100,9	109,9	137,7
1978	103,9	114,4	133,7
1979	106,9	118,3	144,5
1980	101,2	119,6	179,0
1981	98,1	121,1	189,4
1982	95,6	120,6	190,9

Allikas: R. D. Prosser, Demand Elasticities in OECD. Dynamic Aspects. Energy Economics 10, January 1985.

15.25. Impordi tarbimise (Y_t) ning isiklikult kasutatava tulu (X_{1t}) ja impordi hinna (X_{2t}) vaheliste seoste analüüsimiseks on 20 aasta andmetel konstrueeritud regressioonimudelid:

$$\hat{Y}_t = -764,68 + 0,5984X_{1t} + 26,549X_{2t} + 0,2912X_{2t}^2$$

$$t = (-8,5463)(10,231) \quad (-7,8292) \quad (3,6236) \quad (15.22)$$

$$R^2 = 0,9877 \quad \bar{R}^2 = 0,9854 \quad d = 2,0983$$

ja

$$\hat{Y}_t = -859,92 + 0,6470X_{1t} - 23,195X_{2t}$$

$$t = (-7,6807) \quad (8,6803) \quad (-5,4316) \quad (15.23)$$

$$R^2 = 0,9776 \quad \bar{R}^2 = 0,9750 \quad d = 1,36.$$

Kas saate näidata, et mõlema regressioonimudeli korral impordi tarbimise piirkalduvused tulude suhtes (0,5984 ja 0,6470) ei erine statistiliselt oluliselt üksteisest?

15.26. Kanaliha turu analüüsimiseks on konstrueeritud kaks regressioonimudelit.

Mudel I

$$\ln \hat{Y}_1 = 2,1898 + 0,34267 \ln X_{1i} - 0,5046 \ln X_{2i} +$$

$$t = (14,063) \quad (4,1140) \quad (-4,550)$$

$$+ 0,1486 \ln X_{3i} + 0,0911 \ln X_{4i} \quad (15.24)$$

$$(1,4903) \quad (0,9046)$$

$$R^2 = 0,9823 \quad \bar{R}^2 = 0,9784$$

ja

Mudel II

$$\ln \hat{Y}_1 = 2,0238 + 0,4515 \ln X_1 - 0,3722 \ln X_2,$$

$$t = (17,497) \quad (18,284) \quad (-5,8647) \quad (15.25)$$

$$R^2 = 0,9801 \quad \bar{R}^2 = 0,9781,$$

kus

Y – kanaliha müük,

X₁ – elanike sissetulekud,

X₂ – kanaliha hind,

X_3 – sealiha hind,

X_4 – loomaliha hind,

$n = 30$.

Analüüsige mudeleid (15.24) ja (15.25). Kas toodud mudelite puhul võib olla tegemist spetsifikatsioonivigadega? Kas tegemist on ka multikollineaarsuse probleemiga?

15.27. Põhja-Carolina kohtusse esitati ühe ökonomeetrilise uuringu põhjal kaebus, et tegemist on rassilise diskrimineerimisega, kuna neegertöötajate keskmised palgad on madalamad valgete töötajate keskmistest palkadest (Gujarati 1992). Kohus lükkas hageja kaebuse tagasi põhjendusega, et uurimise alla ei ole võetud kõiki tegureid, ning seega diskrimineerimise olemasolu ei leia kinnitust. Milline on Teie arvamus?

16. FAKTORANALÜÜSI KASUTAMINE ÖKONOMEETRILISEL MODELLEERIMISEL

16.1. Milles seisneb faktoranalüüsi kui mitmemõõtmelise statistilise analüüsi põhielemus?

16.2. Mis on faktoranalüüsi peamiseks ülesandeks ökonomeetrisel uurimuses?

16.3. Mida väljendavad faktoranalüüsi mudelis faktorlaadungid?

16.4. Millistel tingimustel kehtib faktoranalüüsi mudel?

16.5. Mida väljendab lähtetunnuse X_j kommunaliteet $h_j^2 = 0,713$?

16.6. Mida mõõdetakse üldistatud faktori F_1 panuse näitajaga P_1^2 ?

16.7. Majandusprotsessi arengut iseloomustava lähtetunnuse alusel on faktoranalüüsi tulemusena saadud neli üldistatud faktorit F_i ($i = 1, 2, 3, 4$) panustega $P_1^2 = 3,579$, $P_2^2 = 1,561$, $P_3^2 = 1,241$, $P_4^2 = 1,003$. Milline on iga faktori F_1, F_2, F_3 ja F_4 osa lähtetunnuste dispersiooni kirjeldamisel?

16.8. Mis on faktormaatriks?

16.9. Milline on faktormaatriksi roll ökonomeetrisel uurimustes?

16.10. Milleks kasutatakse faktorite pööramist?

16.11. Mida väljendavad faktorkaalud?

16.12. Millised omadused on faktorkaalude maatriksil?

16.13. Milliseid järeldusi saate teha järgmiste faktorkaalude alusel: $f_{1,14} = 2,173$; $f_{1,10} = 0,003$, $f_{1,8} = -1,581$; $f_{21} = -2,914$; $f_{23} = -0,007$; $f_{2,16} = 2,008$?

16.14. Analüüsi etappide kasutamise etappe ökonomeetria uurimises. Tooge mõni näide majandusprotsessi süvaanalüüsist ja majandusprobleemide lahendamise otsimisest faktoranalüüsi abil kasutades.

16.15. Arenev firma on huvitatud oma tootmispotentsiaali regionaalsest analüüsist ning sellele tuginevalt pikaajalise tootmisstrateegia kavandamisest. Firma tootmistegevuse ning seda mõjutavate võimalike tegurite kohta on viimase viie aasta andmetel 20-s regioonis, kus firma filiaalid asuvad, läbi viidud statistiline analüüs. Analüüsi tulemused on koondatud tabelis 16.1 toodud korrelatsioonimaatriksis. Korrelatsioonimaatriksi elemendid iseloomustavad statistilisi seoseid firma toodangu mahu (Y) ja seda mõjutavate võimalike tegurite (X_j , $j = 1, 2, \dots, 12$) vahel. Milliseid järeldusi saab tabeli 16.1 põhjal teha firma senise tootmistegevuse ja selle mõjutegurite kohta?

16.16. Tabelis 16.1 toodud korrelatsioonimaatriksi alusel on faktoranalüüsi tulemusena saadud faktormaatris (tabel 16.2).

Tabel 16.2

**Firma regionaalset tootmispotentsiaali mõjutavate
tegurite faktormaatris**

Mõjurid	Faktorlaadungid			Kommunali- teedid (h_j^2)
	F_1	F_2	F_3	
	a_{j1}	a_{j2}	a_{j3}	
Firma töötajate arv	0,551	0,392	– 0,028	0,458
Firma filiaalide toot- mispind	0,109	0,337	– 0,502	0,377
Firma filiaalide arv	0,439	0,107	0,229	0,257
Elanike sissetulekud	0,342	0,768	– 0,064	0,711
Elanike rikkus	0,388	0,771	0,299	0,834
Rahavood	0,781	0,029	0,199	0,650
Tööealise elanik- konna osatähtsus	0,416	0,199	– 0,005	0,213
Linnaelanikkonna osatähtsus	0,893	0,109	– 0,141	0,829
Maaelanikkonna asustustihedus	0,311	0,119	0,614	0,488
Tööstus	0,769	0,017	0,204	0,633
Teenindus	0,611	0,011	0,101	0,384
Infrastruktuur	0,300	0,301	0,611	0,554
Panus: P_1^2	3,508	1,620	1,260	6,388

Analüüsige tabelis 16.2 toodud faktormaatrisit. Andke faktoritele F_2 ja F_3 nende majanduslikku sisu iseloomustavad nimed ning näke faktorite võimalikku mõju firma tootmispotentsiaali kujunisele.

16.17. Kui palju on tabeli 16.2 andmetel firma tootmispotentsiaali mõjutegurite varieeruvusest kirjeldatud üldiste faktorite F_1 , F_2 ja F_3 poolt?

16.18. Millised firma tootmispotentsiaali võimalikud mõjutegurid X_j ($j = 1, 2, \dots, 12$) on tabeli 16.2 andmetel üldiste faktorite F_1 , F_2 ja F_3 poolt kõige paremini kirjeldatud?

16.19. Tabelis 16.3 on toodud firma regionaalset tootmispotentsiaali iseloomustavate üldiste faktorite F_1 , F_2 ja F_3 faktorkaalud (f_{ik} , $k = 1, 2, \dots, 20$) analüüsiperioodi viimasel aastal kahekümnes regioonis, kus firma filiaalid töötavad. Kas faktorkaalude alusel on võimalik selgitada regioone, kus firmal tuleks tootmist laiendada või piirata?

Tabel 16.3

Faktorkaalude maatriks

Regiooni nr.	F_1	F_2	F_3
1	0,437	-0,817	-0,101
2	-0,600	1,541	-0,717
3	0,108	0,400	1,953
4	-1,200	1,400	-0,001
5	-0,900	1,730	-0,112
6	1,751	-2,500	-1,800
7	-0,522	-1,106	0,853
8	-0,973	-3,420	1,673
9	0,476	0,393	-1,532
10	-0,372	1,689	-0,815
11	-1,113	0,352	-1,347
12	1,364	0,317	0,983

Regiooni nr.	F ₁	F ₂	F ₃
13	-0,296	0,418	-0,837
14	2,194	0,752	1,533
15	-0,915	0,413	-1,081
16	2,914	1,412	-1,317
17	-1,613	0,579	2,072
18	-0,900	0,813	1,513
19	-0,100	0,650	1,953
20	1,002	2,111	-0,119

16.20. Milliseid järeldusi on võimalik teha tabelites 16.1–16.3 toodud andmete alusel firma tootmisstrateegia kavandamiseks. Milliseid täiendavaid uurimusi pakute veel välja firma tootmispotentsiaali regionaalseks analüüsimiseks ja planeerimiseks?

16.21. Püstitage mõni majandusprobleem, mille lahendamisel näete abi faktoranalüüsi kasutamisest. Analüüsi faktoranalüüsi kasutamise etappe teie poolt püstitatud probleemile lahenduste otsimisel.

17. ÖKONOMEETRILINE PROJEKT

- 17.1.** Mis on ökonomeetrilise projekti koostamise peamisteks ülesanneteks?
- 17.2.** Kuidas formuleerite probleemi ökonomeetriliseks uurimuseks ja ökonomeetrilise projekti koostamiseks?
- 17.3.** Millistest osadest koosneb ökonomeetriline projekt?
- 17.4.** Milliseid nõudeid esitatakse ökonomeetrilise projekti koostamisel kasutatavatele andmetele?
- 17.5.** Nimetage peamisi andmeallikaid ökonomeetrilise projekti koostamiseks?
- 17.6.** Milliseid reegleid järgite andmete ettevalmistamisel statistiliseks andmetöötluseks ja ökonomeetrilise mudeli konstrueerimiseks?
- 17.7.** Milliseid reegleid järgite ökonomeetrilise mudeli konstrueerimisel?
- 17.8.** Tooge välja ökonomeetriliste mudelite konstrueerimise põhi- etapid ja analüüsige neid ökonomeetrilise projekti koostamise seisukohalt.
- 17.9.** Millistest kriteeriumidest lähtuvalt valite tarkvara ökonomeetrilise mudeli parameetrite hindamiseks?
- 17.10.** Millised on enamkasutatavad tarkvarapaketid ökonomeetrilisteks uurimusteks?
- 17.11.** Milliste statistiliste ja sisuliste kriteeriumide alusel hindate modelleerimise tulemusi?

17.12. Koostage ökonomeetrilise projekti laiendatud kava, tuues selgelt välja projekti eesmärk, uuritava majandusprobleemi taust ja seos eelnevate uurimistulemustega.

Mõned võimalikud probleemipüstitused ökonomeetrilise projekti koostamiseks

1. Analüüsige rahvusliku koguprodukti ja tööpuuduse vahelisi seoseid (Okuni seadus). Kas on võimalik leida rahvusliku koguprodukti vajalikku kasvu, mis võimaldaks alandada tööpuuduse taset majanduspoliitilise otsusega määratud tasemeni?
2. Analüüsige erinevate tööpoliitika meetmetele (töötute abirahad, täiend- ja ümberõppe kulud, ettevõtluse toetamine, töötutele abitööde võimaldamine jne.) tehtud kulude ja tööpuuduse vahelisi seoseid regionaalses ja sihtgruppide (noored, pensionieelikud, madala haridusega inimesed jne.) lõikes. Kas tööpoliitika meetmed mõjutavad tööturu olukorda viitajaga?
3. Kuidas on omavahel seotud nominaalsed ja reaalsed intressimäärad ning inflatsioon? Kas riikide erinev arengutase ja majanduspoliitiline olukord mõjutavad intressimäärade ja inflatsiooni vahelisi seoseid? Kas intressimäärade ja inflatsiooni vastastikusel mõjul on viitajaga?
4. Analüüsige erinevate riikide andmetel monetaristliku seisukoha paikapidavust raha pakkumise ja rahvusliku koguprodukti omavaheliste seoste kohta.
5. Analüüsige tootmisvõimsuste kasutamise määra ja inflatsiooni vahelisi seoseid erinevates riikides ja tootmisharudes.
6. Tuginedes ülesannetes 7.6 ja 10.8 püstitatud probleemide lahendamise kogemustele, analüüsige Eesti autoturu olukorda ning selgitage autode müüki mõjutavad võimalikud tegurid. Koostage prognoosimudelid.

7. Analüüsige Eesti ekspordi ja impordi potentsiaali, tuginedes gravitatsioonimudelite konstrueerimisele aluseks olevale seisukohale, mille kohaselt kaubanduspartneri valik muude tingimuste muutumatuse korral sõltub kaubanduspartneriks oleva riigi rikkusest (rahvuslik koguprodukt) ja kaugusest. Konstrueerige gravitatsioonimudelid ja hinnake nende alusel Eesti väliskaubanduse potentsiaali erinevate riikide lõikes.
8. Selgitage olulisemad tegurid, mis mõjutavad Eesti impordi ja ekspordi kujunemist ning koostage prognoosimudelid.
9. Millised tegurid mõjutavad kinnisvara turgu Eestis? Analüüsige kinnisvara turu kujunemist ja seda mõjutavaid tegureid regionaalses lõikes.
10. Koostage ökonomeetrilised mudelid firma tootmiskulude ja tootmise mahu vaheliste seoste analüüsimiseks. Analüüsige tootmiskulude kujunemist erinevate tootmismahude korral.
11. Koostage tootmisfunktsioonid, et analüüsida kapitali ja tööjõu mõju tootmise mahule ning nende vastastikuse asendamise võimalusi erinevates tootmisharudes. Analüüsige toodangu, kapitali ja tööjõu elastsust erinevates tootmisharudes.
12. Kas keskmine palk Eestis sõltub soost ja haridusest? Koostage ökonomeetrilised mudelid, analüüsima erinevate tegurite mõju keskmise palga kujunemisele.
13. Analüüsige Phillipsi kõvera (kirjeldab inflatsiooni ja tööpuuduse vahelisi seoseid) paikapidavust erinevates riikides ja erinevatel ajaperioodidel.
14. Analüüsige kohvi ja tee kui võimalike asenduskaupade turgu Eestis. Millised tegurid mõjutavad kohvi ja tee müüki Eestis? Koostage prognoosimudelid.
15. Analüüsige Tartu Ülikooli ja Tallinna Tehnikaülikooli majandusteaduskonna lõpetajate keskmist palka tulenevalt soost, erialast ja lõpetamise aastast. Kas palgaerinevused on mõjutatud ka regionaalsetest teguritest?

16. Analüüsige kujunevat aktsiaturgu Eestis. Millised tegurid on mõjutanud aktsiahindade kujunemist? Koostage prognoosimudelid.
17. Analüüsige tööviljakuse ja keskmise palga vahelisi seoseid Eesti erinevates tootmisharudes ja regioonides.
18. Analüüsige tootmise arendamise potentsiaali Eesti erinevates maakondades. Selgitage üldistatud faktorid, mis mõjutavad majanduse regionaalset arengut ning analüüsige nende taset maakondades.

SOOVITATAV KIRJANDUS

Assenmacher, W. Einführung in die Ökonometrie. München, Wien: Oldenburg, 1990.

Berndt, E. R. The Practice in Econometrics. Addison-Weiley Publishing Company, 1991.

Brown, W. S. Introducing Econometrics. West Publishing Company, 1991.

Charemza, W. W., Deadman, D. F. New Directions in Econometric Practice: General to Specific Modelling, Cointegration and Vector Autoregression. Edwar Elgar Publishing Ltd., University of Leicester, 1992.

Goldberger, A. S. A Course in Econometrics. Harward University Press, Cambridge, London, 1994.

Greene, W. H. Econometric Analysis. Prentice Hall, Inc., 1997.

Gujarati, D. Essentials of Econometrics. McGraw-Hill, Inc., 1992.

Gujarati, D. Basic Econometrics, McGraw-Hill, Inc., 1995.

Hill, R. C., Griffiths, W. E., Judge, G. G., Undergraduate Econometrics. John Wiley & Sons, Inc. 1997.

Heil, J. Einführung in die Ökonometrie. München; Wien: Oldenburg, 1991.

Intriligator, M. D. Econometric Models, Techniques and Applications. Prentice Hall, Inc., 1978.

Kennedy, P. A Guide to Econometrics. Blackwell, Oxford, Cambridge, 1994.

Mills, T. C. The Econometric Modelling of Financial Time Series, Cambridge University Press, 1993.

Maddala, G. S. Introduction to Econometrics, Macmillan, New, York, 1992.

Majandusprotsesside modelleerimine. Toim. T. Paas. Tartu: Tartu Ülikool, 1996.

Paas, T. Sissejuhatus ökonomeetriasse. Tartu: Tartu Ülikool, 1995.

Pindyck, R. S., Rubinfeld D. L. Econometric Models and Econometric Forecasts. McGraw-Hill, 1990.

Thomas, R. L. Modern Econometrics. An Introduction. Addison-Wesley Longman, 1997.

Wonnacott, R. J., Wonnacott, T. H. Econometrics, John Wiley & Sons, New York, 1979.

Normeeritud normaaljaotus

 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$\Pr(0 \leq z \leq 1.96) = 0.4750$$

$$\Pr(z \geq 1.96) = 0.5 - 0.4750 = 0.025$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Korrelatsioonikordaja r kriitilised väärtused

n	α			
	0.1	0.05	0.01	0.005
3	0.988	0.997	1.000	1.000
4	0.900	0.950	0.990	0.995
5	0.805	0.878	0.959	0.974
6	0.729	0.811	0.917	0.942
7	0.669	0.754	0.875	0.906
8	0.621	0.707	0.834	0.870
9	0.582	0.666	0.798	0.836
10	0.549	0.632	0.765	0.805
11	0.521	0.602	0.735	0.776
12	0.497	0.576	0.708	0.750
13	0.476	0.553	0.684	0.726
14	0.457	0.532	0.661	0.703
15	0.441	0.514	0.641	0.683
16	0.426	0.497	0.623	0.664
17	0.412	0.482	0.606	0.647
18	0.400	0.468	0.590	0.631
19	0.389	0.456	0.575	0.616
20	0.378	0.444	0.561	0.602
21	0.369	0.433	0.549	0.589
22	0.360	0.423	0.537	0.576

n	α			
	0.1	0.05	0.01	0.005
23	0.352	0.413	0.526	0.565
24	0.344	0.404	0.515	0.554
25	0.337	0.396	0.505	0.543
26	0.330	0.388	0.496	0.534
27	0.323	0.381	0.487	0.524
28	0.317	0.374	0.479	0.515
29	0.311	0.367	0.471	0.507
30	0.306	0.361	0.463	0.499
31	0.301	0.355	0.456	0.491
32	0.296	0.349	0.449	0.484
33	0.291	0.344	0.442	0.477
34	0.287	0.339	0.436	0.470
35	0.283	0.334	0.430	0.464
36	0.279	0.329	0.424	0.458
37	0.275	0.325	0.418	0.452
38	0.271	0.320	0.413	0.446
39	0.267	0.316	0.408	0.441
40	0.264	0.312	0.403	0.435
41	0.260	0.308	0.398	0.430
42	0.257	0.304	0.393	0.425
43	0.254	0.301	0.389	0.420
44	0.251	0.297	0.384	0.416
45	0.248	0.294	0.380	0.411

n	α			
	0.1	0.05	0.01	0.005
46	0.246	0.291	0.376	0.407
47	0.243	0.288	0.372	0.403
48	0.240	0.285	0.368	0.399
49	0.238	0.282	0.365	0.395
50	0.235	0.279	0.361	0.391
51	0.233	0.276	0.358	0.387
52	0.231	0.273	0.354	0.384
53	0.228	0.271	0.351	0.380
54	0.226	0.268	0.348	0.377
55	0.224	0.266	0.345	0.373
56	0.222	0.263	0.341	0.370
57	0.220	0.261	0.339	0.367
58	0.218	0.259	0.336	0.364
59	0.216	0.256	0.333	0.361
60	0.214	0.254	0.330	0.358
61	0.213	0.252	0.327	0.355
62	0.211	0.250	0.325	0.352
63	0.209	0.248	0.322	0.349
64	0.207	0.246	0.320	0.347
65	0.206	0.244	0.317	0.344
66	0.204	0.242	0.315	0.342
67	0.203	0.240	0.313	0.339
68	0.201	0.239	0.310	0.337

n	α			
	0.1	0.05	0.01	0.005
69	0.200	0.237	0.308	0.334
70	0.198	0.235	0.306	0.332
71	0.197	0.234	0.304	0.330
72	0.195	0.232	0.302	0.327
73	0.194	0.230	0.300	0.325
74	0.193	0.229	0.298	0.323
75	0.191	0.227	0.296	0.321
76	0.190	0.226	0.294	0.319
77	0.189	0.224	0.292	0.317
78	0.188	0.223	0.290	0.315
79	0.186	0.221	0.288	0.313
80	0.185	0.220	0.286	0.311
81	0.184	0.219	0.285	0.309
82	0.183	0.217	0.283	0.307
83	0.182	0.216	0.281	0.305
84	0.181	0.215	0.280	0.304
85	0.180	0.213	0.278	0.302
86	0.179	0.212	0.276	0.300
87	0.178	0.211	0.275	0.298
88	0.176	0.210	0.273	0.297
89	0.175	0.208	0.272	0.295
90	0.174	0.207	0.270	0.293
91	0.174	0.206	0.269	0.292

n	α			
	0.1	0.05	0.01	0.005
92	0.173	0.205	0.267	0.290
93	0.172	0.204	0.266	0.289
94	0.171	0.203	0.264	0.287
95	0.170	0.202	0.263	0.286
96	0.169	0.201	0.262	0.284
97	0.168	0.200	0.260	0.283
98	0.167	0.199	0.259	0.281
99	0.166	0.198	0.258	0.280
100	0.165	0.198	0.256	0.279

Studenti t-jaotus

Näide:

$$\Pr(t > 2.086) = 0.025$$

$$\Pr(t > 1.725) = 0.05$$

$$\Pr(|t| > 1.725) = 0.10$$

df	α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
		0.50	0.20	0.10	0.05	0.02	0.010	0.002
1		1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2		0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3		0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4		0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5		0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6		0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7		0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8		0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9		0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10		0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11		0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12		0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13		0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14		0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15		0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16		0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17		0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18		0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19		0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20		0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21		0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22		0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23		0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24		0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25		0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26		0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27		0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28		0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29		0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30		0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40		0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60		0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120		0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.167	3.160
∞		0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Allikas: E. S. Pearson and H. O. Harley, eds., Biometrika Tables for Statisticians. Vol. 1, 3 ed., table 12. Cambridge University Press, New York, 1966

Markus: Olulisuse nivoo α ulemine vaartus tabelis kehtib uhepoolse, alumine vaartus kahepoolse usalduspiiri kohta

Fisheri F-jaotus

*N*äidis.

- Pr ($\mathcal{F} > 1.59$) = 0.25
- Pr ($\mathcal{F} > 2.42$) = 0.10
- Pr ($\mathcal{F} > 3.14$) = 0.05
- Pr ($\mathcal{F} > 5.26$) = 0.01

<i>N</i>	Pr	<i>N</i> ₁											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	.25	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.36	9.41
	.10	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.5	60.7
	.05	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
	.01												
2	.25	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.39
	.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41
	.05	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
	.01	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4
3	.25	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.45
	.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22
	.05	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
	.01	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1
4	.25	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90
	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
	.01	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.4
5	.25	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89
	.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27
	.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68
	.01	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89
6	.25	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.77
	.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90
	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
	.01	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	.25	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.69	1.68
	.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67
	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
	.01	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
8	.25	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.63	1.62
	.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50
	.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
	.01	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
9	.25	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
	.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38
	.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
	.01	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11

Allikas. From E. S. Pearson and H. O. Harley, eds., *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, 3d ed., table 18. Cambridge University Press, New York, 1966. Reproduced by permission of the editors and trustees of *Biometrika*

N1													Pr	N2
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞			
9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.74	9.76	9.78	9.80	9.82	9.84	9.85	.25	1	
61.2	61.7	62.0	62.3	62.5	62.7	62.8	63.0	63.1	63.2	63.3	63.3	.10		
246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254	.05	2	
3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.45	3.46	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48	.25		
9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.48	9.49	9.49	9.49	.10		
19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	.05		
99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	.01		
2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	.25	3	
5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.14	5.14	5.14	5.13	.10		
8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.55	8.54	8.53	8.53	.05		
26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.4	26.3	26.2	26.2	26.2	26.1	26.1	.01		
2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	.25	4	
3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.78	3.77	3.76	3.76	.10		
5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63	.05		
14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.7	13.6	13.6	13.5	13.5	13.5	.01		
1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	.25	5	
3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10	.10		
4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.37	4.36	.05		
9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.20	9.13	9.11	9.08	9.04	9.02	.01		
1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	.25	6	
2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.73	2.73	2.72	.10		
3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.71	3.70	3.69	3.68	3.67	.05		
7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	7.06	6.99	6.97	6.93	6.90	6.88	.01		
1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	.25	7	
2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.52	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47	.10		
3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.27	3.25	3.24	3.23	.05		
6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.82	5.75	5.74	5.70	5.67	5.65	.10		
1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.59	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	.25	8	
2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.32	2.31	2.30	2.29	.10		
3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.97	2.95	2.94	2.93	.05		
5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.07	5.03	4.96	4.95	4.91	4.88	4.86	.01		
1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	.25	9	
2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	.10		
3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.76	2.75	2.73	2.72	2.71	.05		
4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.48	4.42	4.40	4.36	4.33	4.31	.01		

N ₂	N ₁												
	Pr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
22	.25	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.37
	.10	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.86
	.05	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
	.01	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
24	.25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.37	1.36
	.10	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83
	.05	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18
	.01	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03
26	.25	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.36	1.35
	.10	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.84	1.81
	.05	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
	.01	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96
28	.25	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
	.10	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79
	.05	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
	.01	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90
30	.25	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34
	.10	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77
	.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
	.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84
40	.25	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31
	.10	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.73	1.71
	.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
	.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66
60	.25	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29
	.10	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66
	.05	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
	.01	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
120	.25	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26
	.10	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60
	.05	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83
	.01	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34
200	.25	1.33	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.26	1.25
	.10	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.60	1.57
	.05	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80
	.01	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27
∞	.25	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.24
	.10	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55
	.05	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75
	.01	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18

N_1													Pr	N_2
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞			
1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	1.49	1.49	1.48	1.48	.25	10	
2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.06	2.06	.10		
2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.59	2.58	2.56	2.55	2.54	.05		
4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.08	4.01	4.00	3.96	3.93	3.91	.01		
1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.47	1.46	1.46	1.46	1.45	1.45	.25	11	
2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	2.00	1.99	1.98	1.97	.10		
2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.46	2.45	2.43	2.42	2.40	.05		
4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.78	3.71	3.69	3.66	3.62	3.60	.01		
1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.44	1.43	1.43	1.43	1.42	1.42	.25	12	
2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	.10		
2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.35	2.34	2.32	2.31	2.30	.05		
4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.54	3.47	3.45	3.41	3.38	3.36	.01		
1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.40	.25	13	
2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.88	1.86	1.85	1.85	.10		
2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.26	2.25	2.23	2.22	2.21	.05		
3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.34	3.27	3.25	3.22	3.19	3.17	.01		
1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.39	1.39	1.39	1.38	1.38	.25	14	
2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.83	1.82	1.80	1.80	.10		
2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.19	2.18	2.16	2.14	2.13	.05		
3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.18	3.11	3.09	3.06	3.03	3.00	.01		
1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	.25	15	
1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76	.10		
2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	.05		
3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	2.98	2.96	2.92	2.89	2.87	.01		
1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	.25	16	
1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.79	1.78	1.76	1.75	1.74	1.73	1.72	.10		
2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.07	2.06	2.04	2.02	2.01	.05		
3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.97	2.93	2.86	2.84	2.81	2.78	2.75	.01		
1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34	1.33	1.33	.25	17	
1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75	1.73	1.72	1.71	1.69	1.69	.10		
2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.02	2.01	1.99	1.97	1.96	.05		
3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.83	2.76	2.75	2.71	2.68	2.65	.01		
1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.32	1.32	1.32	.25	18	
1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.74	1.72	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66	.10		
2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92	.05		
3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.75	2.68	2.66	2.62	2.59	2.57	.01		
1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	.25	19	
1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.67	1.65	1.64	1.63	.10		
2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.94	1.93	1.91	1.89	1.88	.05		
3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.67	2.60	2.58	2.55	2.51	2.49	.01		
1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	.25	20	
1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	.10		
2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	.05		
3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42	.01		

N ₂	N ₁												
	Pr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	.25	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54
	.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28
	.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
	.01	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71
11	.25	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.52	1.51
	.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21
	.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
	.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	.25	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49
	.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15
	.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
	.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	.25	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47
	.10	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.12	2.10
	.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
	.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	.25	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45
	.10	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.08	2.05
	.05	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
	.01	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	.25	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.44
	.10	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02
	.05	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
	.01	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	.25	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.44	1.43
	.10	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.99
	.05	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
	.01	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55
17	.25	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.42	1.41
	.10	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.98	1.96
	.05	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
	.01	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46
18	.25	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40
	.10	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.96	1.93
	.05	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
	.01	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37
19	.25	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40
	.10	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.94	1.91
	.05	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
	.01	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30
20	.25	1.40	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39
	.10	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.92	1.89
	.05	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
	.01	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23

N_1														N_2
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Pr		
1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28	.25		
1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	.10	22	
2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.89	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	.05		
2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.50	2.42	2.40	2.36	2.33	2.31	.01		
1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27	1.27	1.26	.25		
1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.10	24	
2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.05		
2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21	.01		
1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.28	1.26	1.26	1.26	1.25	1.25	.25		
1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.59	1.58	1.55	1.54	1.53	1.51	1.50	.10	26	
2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.80	1.76	1.75	1.73	1.71	1.69	.05		
2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.33	2.25	2.23	2.19	2.16	2.13	.01		
1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.27	1.26	1.25	1.25	1.24	1.24	.25		
1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48	.10	28	
2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65	.05		
2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.26	2.19	2.17	2.13	2.09	2.06	.01		
1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.26	1.25	1.24	1.24	1.23	1.23	.25		
1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.55	1.54	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	.10	30	
2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62	.05		
2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.21	2.13	2.11	2.07	2.03	2.01	.01		
1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.23	1.22	1.21	1.21	1.20	1.19	1.19	.25		
1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	.10	40	
1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.59	1.58	1.55	1.53	1.51	.05		
2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	2.02	1.94	1.92	1.87	1.83	1.80	.01		
1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.20	1.19	1.17	1.17	1.16	1.15	1.15	.25		
1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.40	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	.10	60	
1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.48	1.47	1.44	1.41	1.39	.05		
2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.88	1.84	1.75	1.73	1.68	1.63	1.60	.01		
1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.17	1.16	1.14	1.13	1.12	1.11	1.10	.25		
1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.34	1.32	1.27	1.26	1.24	1.21	1.19	.10	120	
1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.32	1.28	1.25	.05		
2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.70	1.66	1.56	1.53	1.48	1.42	1.38	.01		
1.23	1.21	1.20	1.18	1.16	1.14	1.12	1.11	1.10	1.09	1.08	1.06	.25		
1.52	1.46	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.24	1.22	1.20	1.17	1.14	.10	200	
1.72	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.39	1.32	1.29	1.26	1.22	1.19	.05		
2.13	1.97	1.89	1.79	1.69	1.63	1.58	1.48	1.44	1.39	1.33	1.28	.01		
1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.13	1.12	1.09	1.08	1.07	1.04	1.00	.25		
1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.13	1.08	1.00	.10	∞	
1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00	.05		
2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.52	1.47	1.36	1.32	1.25	1.15	1.00	.01		

Durbin-Watsoni kriteerium: d-statistiku alumine (d_L) ja ülemine (d_U) tase olulisuse nivool 0.05

n	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$		$k' = 6$		$k' = 7$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0.610	1.400	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
7	0.700	1.356	0.467	1.896	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.368	2.287	---	---	---	---	---	---	---	---
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	---	---	---	---	---	---
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822	---	---	---	---
11	0.927	1.324	0.658	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.316	2.645	0.203	3.005	---	---
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.379	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.445	2.390	0.328	2.692	0.230	2.985
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.472	0.343	2.727
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.257	0.502	2.461
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.692	2.162	0.595	2.339
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.732	2.124	0.637	2.290
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090	0.677	2.246
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061	0.715	2.208
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.751	2.174
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.012	0.784	2.144
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.958	0.874	2.071
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944	0.900	2.052
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	1.020	1.920	0.950	2.018
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909	0.972	2.004
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	1.061	1.900	0.994	1.991
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.080	1.891	1.015	1.979
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	1.097	1.884	1.034	1.967
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.877	1.053	1.957
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	1.131	1.870	1.071	1.948
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864	1.088	1.939
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859	1.104	1.932
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	1.175	1.854	1.120	1.924
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.238	1.835	1.189	1.895
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822	1.246	1.875
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814	1.294	1.861
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.372	1.808	1.335	1.850
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.404	1.805	1.370	1.843
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.433	1.802	1.401	1.837
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770	1.458	1.801	1.428	1.834
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.480	1.801	1.453	1.831
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774	1.500	1.801	1.474	1.829
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.518	1.801	1.494	1.827
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.535	1.802	1.512	1.827
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780	1.550	1.803	1.528	1.826
150	1.720	1.746	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.651	1.817	1.637	1.832
200	1.758	1.778	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.810	1.718	1.820	1.707	1.831	1.697	1.841

n	$k' = 8$		$k' = 9$		$k' = 10$		$k' = 11$		$k' = 12$		$k' = 13$		$k' = 14$	
	d_L	d_V	d_L	d_V	d_L	d_V	d_L	d_V	d_L	d_V	d_L	d_V	d_L	d_V
13	0.147	3.266	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	0.200	3.111	0.127	3.360	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438	—	—	—	—	—	—	—	—
16	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304	0.098	3.503	—	—	—	—	—	—
17	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184	0.138	3.378	0.087	3.557	—	—	—	—
18	0.407	2.667	0.321	2.873	0.244	3.073	0.177	3.265	0.123	3.441	0.078	3.603	—	—
19	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974	0.220	3.159	0.160	3.335	0.111	3.496	0.070	3.642
20	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885	0.263	3.063	0.200	3.234	0.145	3.395	0.100	3.542
21	0.547	2.460	0.461	2.633	0.380	2.806	0.307	2.976	0.240	3.141	0.182	3.300	0.132	3.448
22	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.734	0.349	2.897	0.281	3.057	0.220	3.211	0.166	3.358
23	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670	0.391	2.826	0.322	2.979	0.259	3.128	0.202	3.272
24	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613	0.431	2.761	0.362	2.908	0.297	3.053	0.239	3.193
25	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560	0.470	2.702	0.400	2.844	0.335	2.983	0.275	3.119
26	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513	0.508	2.649	0.438	2.784	0.373	2.919	0.312	3.051
27	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470	0.544	2.600	0.475	2.730	0.409	2.859	0.348	2.987
28	0.798	2.188	0.723	2.309	0.650	2.431	0.578	2.555	0.510	2.680	0.445	2.805	0.383	2.928
29	0.826	2.164	0.753	2.278	0.682	2.396	0.612	2.515	0.544	2.634	0.479	2.755	0.418	2.874
30	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363	0.643	2.477	0.577	2.592	0.512	2.708	0.451	2.823
31	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333	0.674	2.443	0.608	2.553	0.545	2.665	0.484	2.776
32	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306	0.703	2.411	0.638	2.517	0.576	2.625	0.515	2.733
33	0.927	2.085	0.861	2.181	0.795	2.281	0.731	2.382	0.668	2.484	0.606	2.588	0.546	2.692
34	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257	0.758	2.355	0.695	2.454	0.634	2.554	0.575	2.654
35	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236	0.783	2.330	0.722	2.425	0.662	2.521	0.604	2.619
36	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216	0.808	2.306	0.748	2.398	0.689	2.492	0.631	2.586
37	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.198	0.831	2.285	0.772	2.374	0.714	2.464	0.657	2.555
38	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180	0.854	2.265	0.796	2.351	0.739	2.438	0.683	2.526
39	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164	0.875	2.246	0.819	2.329	0.763	2.413	0.707	2.499
40	1.064	1.997	1.008	2.072	0.952	2.149	0.896	2.228	0.840	2.309	0.785	2.391	0.731	2.473
45	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088	0.988	2.156	0.938	2.225	0.887	2.296	0.838	2.367
50	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044	1.064	2.103	1.019	2.163	0.973	2.225	0.927	2.287
55	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010	1.129	2.062	1.087	2.116	1.045	2.170	1.003	2.225
60	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984	1.184	2.031	1.145	2.079	1.106	2.127	1.068	2.177
65	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964	1.231	2.006	1.195	2.049	1.160	2.093	1.124	2.138
70	1.369	1.873	1.337	1.910	1.305	1.948	1.272	1.986	1.239	2.026	1.206	2.066	1.172	2.106
75	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935	1.308	1.970	1.277	2.006	1.247	2.043	1.215	2.080
80	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925	1.340	1.957	1.311	1.991	1.283	2.024	1.253	2.059
85	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916	1.369	1.946	1.342	1.977	1.315	2.009	1.287	2.040
90	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909	1.395	1.937	1.369	1.966	1.344	1.995	1.318	2.025
95	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903	1.418	1.929	1.394	1.956	1.370	1.984	1.345	2.012
100	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898	1.439	1.923	1.416	1.948	1.393	1.974	1.371	2.000
150	1.622	1.847	1.608	1.862	1.594	1.877	1.579	1.892	1.564	1.908	1.550	1.924	1.535	1.940
200	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874	1.654	1.885	1.643	1.896	1.632	1.908	1.621	1.919

n	k' = 15		k' = 16		k' = 17		k' = 18		k' = 19		k' = 20	
	d _L	d _V	d _L	d _V	d _L	d _V	d _L	d _V	d _L	d _V	d _L	d _V
20	0.063	3.676	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
21	0.091	3.583	0.058	3.705	—	—	—	—	—	—	—	—
22	0.120	3.495	0.083	3.619	0.052	3.731	—	—	—	—	—	—
23	0.153	3.409	0.110	3.535	0.076	3.650	0.048	3.753	—	—	—	—
24	0.186	3.327	0.141	3.454	0.101	3.572	0.070	3.678	0.044	3.773	—	—
25	0.221	3.251	0.172	3.376	0.130	3.494	0.094	3.604	0.065	3.702	0.041	3.790
26	0.256	3.179	0.205	3.303	0.160	3.420	0.120	3.531	0.087	3.632	0.060	3.724
27	0.291	3.112	0.238	3.233	0.191	3.349	0.149	3.460	0.112	3.563	0.081	3.658
28	0.325	3.050	0.271	3.168	0.222	3.283	0.178	3.392	0.138	3.495	0.104	3.592
29	0.359	2.992	0.305	3.107	0.254	3.219	0.208	3.327	0.166	3.431	0.129	3.528
30	0.392	2.937	0.337	3.050	0.286	3.160	0.238	3.266	0.195	3.368	0.156	3.465
31	0.425	2.887	0.370	2.996	0.317	3.103	0.269	3.208	0.224	3.309	0.183	3.406
32	0.457	2.840	0.401	2.946	0.349	3.050	0.299	3.153	0.253	3.252	0.211	3.348
33	0.488	2.796	0.432	2.899	0.379	3.000	0.329	3.100	0.283	3.198	0.239	3.293
34	0.518	2.754	0.462	2.854	0.409	2.954	0.359	3.051	0.312	3.147	0.267	3.240
35	0.547	2.716	0.492	2.813	0.439	2.910	0.388	3.005	0.340	3.099	0.295	3.190
36	0.575	2.680	0.520	2.774	0.467	2.868	0.417	2.961	0.369	3.053	0.323	3.142
37	0.602	2.646	0.548	2.738	0.495	2.829	0.445	2.920	0.397	3.009	0.351	3.097
38	0.628	2.614	0.575	2.703	0.522	2.792	0.472	2.880	0.424	2.968	0.378	3.054
39	0.653	2.585	0.600	2.671	0.549	2.757	0.499	2.843	0.451	2.929	0.404	3.013
40	0.678	2.557	0.626	2.641	0.575	2.724	0.525	2.808	0.477	2.892	0.430	2.974
45	0.788	2.439	0.740	2.512	0.692	2.586	0.644	2.659	0.598	2.733	0.553	2.807
50	0.882	2.350	0.836	2.414	0.792	2.479	0.747	2.544	0.703	2.610	0.660	2.675
55	0.961	2.281	0.919	2.338	0.877	2.396	0.836	2.454	0.795	2.512	0.754	2.571
60	1.029	2.227	0.990	2.278	0.951	2.330	0.913	2.382	0.874	2.434	0.836	2.487
65	1.088	2.183	1.052	2.229	1.016	2.276	0.980	2.323	0.944	2.371	0.908	2.419
70	1.139	2.148	1.105	2.189	1.072	2.232	1.038	2.275	1.005	2.318	0.971	2.362
75	1.184	2.118	1.153	2.156	1.121	2.195	1.090	2.235	1.058	2.275	1.027	2.315
80	1.224	2.093	1.195	2.129	1.165	2.165	1.136	2.201	1.106	2.238	1.076	2.275
85	1.260	2.073	1.232	2.105	1.205	2.139	1.177	2.172	1.149	2.206	1.121	2.241
90	1.292	2.055	1.266	2.085	1.240	2.116	1.213	2.148	1.187	2.179	1.160	2.211
95	1.321	2.040	1.296	2.068	1.271	2.097	1.247	2.126	1.222	2.156	1.197	2.186
100	1.347	2.026	1.324	2.053	1.301	2.080	1.277	2.108	1.253	2.135	1.229	2.164
150	1.519	1.956	1.504	1.972	1.489	1.989	1.474	2.006	1.458	2.023	1.443	2.040
200	1.610	1.931	1.599	1.943	1.588	1.955	1.576	1.967	1.565	1.979	1.554	1.991

Allikas: The Durbin-Watson Test for Serial Correlation with Extreme Small Samples or Many Regressors," *Econometrica*, vol. 45, November 1977, pp. 1989–96 and as corrected by R. W. Farebrother, *Econometrica*, vol. 48, September 1980, p. 1554. Reprinted by permission of the Econometric Society.

Markus

n — valimi maht.

k' — sõltumatute muutujate arv

Näide: n = 40 ja k' = 2 korral d_L = 1.100 ning d_V = 1.537

Swed-Eisenharti kriteerium olulisuse nivool 0.05

N_1	N_2																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2											2	2	2	2	2	2	2	2	2
3					2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
4			2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5		2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5
6	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
7	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
8	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
9	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
10	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
11	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14

Allikas: Sidney Siegel, *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956, table F, pp 252–253. The tables have been adapted by Siegel from the original source: Frieda S. Swed and C. Eisenhart, "Tables for Testing Randomness of Grouping in a Sequence of Alternatives," *Annals of Mathematical Statistics*, vol 14, 1943. Used by permission of McGraw-Hill Book Company and *Annals of Mathematical Statistics*.

Markus

\mathcal{N}_1 — + margiga jaakliikmete arv;

\mathcal{N}_2 — - margiga jaakliikmete arv.

Esimene tabel annab kriitilise piirkonna alumise rajapunkti, järgnev tabel — ülemise rajapunkti. Rajapunktid jaavad kriitilisest piirkonnast välja.

Näide: $\mathcal{N}_1 = 20$ ja $\mathcal{N}_2 = 10$ korral $k^{\min} = 9$ ning $k^{\max} = 20$.

		N_2																			
N_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
2																					
3																					
4				9	9																
5			9	10	10	11	11														
6			9	10	11	12	12	13	13	13	13										
7			11	12	13	13	14	14	14	14	15	15	15								
8			11	12	13	14	14	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17	17	17	17
9				13	14	14	15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	18	18	18	18	18
10				13	14	15	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	19	20	20	20	20
11				13	14	15	16	17	17	18	19	19	19	20	20	20	20	21	21	21	21
12				13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	21	22	22	22	22
13					15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	22	23	23	23	23
14					15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	23	24	24	24	24
15					15	16	18	18	19	20	21	22	22	23	23	24	24	24	25	25	25
16						17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25	25	25	25	25
17						17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	25	26	26	26	26	26
18						17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	26	26	27	27	27
19						17	18	20	21	22	23	23	24	25	26	26	27	27	27	27	27
20						17	18	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28	28	28	28