Geometrie

Siebenter Cursus.

Stereometrie.

VII.

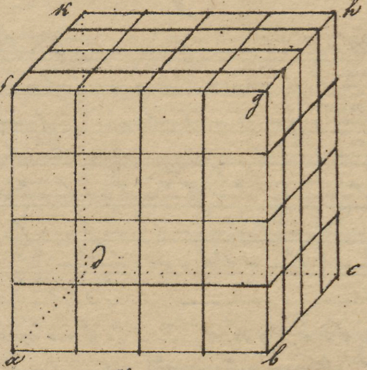
vom Professor Dr. G. Paucker.

Mitau $\frac{4}{16}$ März 1841.

Der Druck wird unter den gesetzli-
chen Bedingungen gestattet.

Riga, am 5. Juny 1841.

Dr. C. E. Napiersky
Censor.



1.

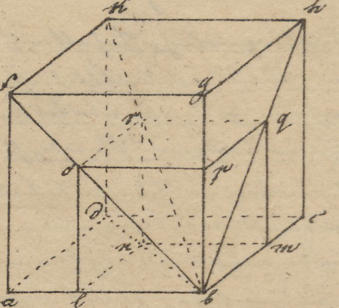
<u>Der körperliche Inhalt eines Cubus, ist die Cubikzahl von der in der Kante des Cubus enthaltenen Maaßzahl.</u>

Unter körperlichem Inhalt versteht man diejenige Zahl welche anzeigt, wie viel mal der Cubus, dessen Seite ein angenommenes Maaß ist, in einem Körper enthalten sey. Wird aber der Cubus abcdsghk (IV. 45) von sechs gleichen Quadraten begrenzt, welche zu dreien in jeder Ecke rechtwinklig zusammentreffen. Es sey das angenommene Maaß in jeder Ecke L mal enthalten, so ist das Quadrat des Maaßes in der Grundfläche des Cubus abcd oder sghk, L.L oder L^2 mal enthalten (III. 1). Theilt man die Kanten des Cubus in ihre L gleichen Theile, so erhält man in dem ganzen Cubus L Schichten, welche das angenommene Maaß zur Höhe haben. In jeder Schicht ist der Cubus des Maaßes L^2 enthalten, also in dem ganzen Cubus L.L.L oder $L^2.L$ oder L^3 mal enthalten. Also ist der körperliche Inhalt des Cubus $K = L^3$, und die Oberfläche $F = 6.L^2$.

<u>Beispiele.</u>

Der Fuß hat	12 Zoll,	der Cubikfuß	1728 Cubikzoll
der Faden hat	6 Fuß,	der Cubikfaden	216 Cubikfuß
die Saschen hat	7 Fuß,	die Cubiksaschen	343 Cubikfuß
die Saschen hat	3 Arschin,	die Cubiksaschen	27 Cubikarschin
die Kante hat	16 Zoll,	der Cubus der Kante	4096 Cubikzoll
die Kante hat	11 Fuß 7 Zoll oder 139 Zoll	der Cubus hat	2685619 Cubikzoll oder 1554 Cubikfuß 307 Cubikzoll

2.



Alle Cuben sind einander ähnlich, ihre körperlichen Räume verhalten sich wie die Kubikzahlen der Kanten oder wie die Quadratwurzeln aus den Kubikzahlen der Oberflächen.

Wenn man die Cuben abcdfghk, und lbmnopqr in einer Ecke b und an den Kanten ab, bg so zusammenstellt, daß die Endfläche abgf mit lbpo zusammenfällt, so fallen (III. 14.) auch die Endflächen abcd mit lbmn, und bcgh mit bmpq zusammen. Von den übrigen Endflächen sind je zwei auf einer Kante senkrecht, also (IV. 26) einander parallel, nämlich lnor ∥ adfk, opqr ∥ fghk, mnqr ∥ cdhk. Die Diagonallinien bn, bd, fallen zusammen, also (III. 13. 14) fallen auch die Diagonalflächen bnr, bdk zusammen. Also (IV. 56) sind die Cuben aus drei ähnlichen vierseitigen Pyramiden zusammengesetzt, nämlich blnor ∼ badfk, bopqr ∼ bfghk, bmnqr ∼ bcdhk, also (IV. 57.) sind die Cuben einander ähnlich, also ihre gleichnamigen Kanten, Diagonallinien und Ecken proportionirt $\frac{bl}{ba} = \frac{bo}{bf} = \frac{br}{bk}$, ihre Oberflächen verhalten sich wie die Quadrate derselben $\frac{F}{F'} = \frac{L^2}{L'^2}$, ihre körperlichen Räume verhalten sich wie die Cuben derselben $\frac{K}{K'} = \frac{L^3}{L'^3}$, also $\frac{K^2}{K'^2} = \frac{F^3}{F'^3}$, oder $\frac{K}{K'} = \frac{F^{\frac{3}{2}}}{F'^{\frac{3}{2}}}$

Beispiele.

1) Die Kanten zweier Cuben sind 15 Fuß, und 15 Fuß $7\frac{1}{2}$ Zoll, wie verhalten sich ihre Oberflächen

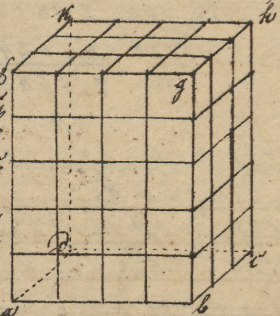
und körperlichen Räumen?

180 2,25527 , Die Oberflächen verhalten sich
187½ 2,27300 also wie 100 : 108½ , die körper-
1,0417 0,01773 lichen Räume wie 100 : 113.
1,0851 0,03546
1,1303 0,05319

2) Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Cubus, dessen Oberfläche 3500 □ Fuß ist?

F 3,54407 L^2 2,76592
6 0,77815 L 1,38296
L^2 2,76592 L^3 4,14888 = 14089 Cubfuß

3.



<u>Der körperliche Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums dessen Grundfläche ein Rechteck ist, ist gleich dem Product der drei in jeder Ecke zusammentreffenden Eckkanten.</u>

Das Maaß mit welchem die Kanten gemessen werden, sey in af L mal, in ab B mal, in ad D mal enthalten. Folglich ist das Quadrat des Maaßes in der Grundfläche abcd B.D mal enthalten. das ganze Parallelepipedum enthält L Schichten, welche das Rechteck abcd = B.D zur Grundfläche, und das Maaß zur Höhe haben, also ist der Cubus des Maaßes in dem ganzen Parallelepipedum L.B.D mal enthalten d.h. der körperliche Inhalt K = L.B.D.

Der körperliche Inhalt ist also gleich dem Product der Höhe L mit der Grundfläche B.D, und bleibt unverändert, wenn bei gleicher Höhe ein anderes Rechteck von gleichem Flächeninhalt zur Grundfläche angenommen wird.

Die Seitenfläche ist A = 2 L.B + 2 L.D.

Die ganze Oberfläche F = 2 L.B + 2 L.D + 2 B.D.

Die Diagonallinien sind $ag = \sqrt{L^2+B^2}$; $ax = \sqrt{L^2+D^2}$; $ac = \sqrt{B^2+D^2}$, die Axe $ah = \sqrt{L^2+B^2+D^2}$

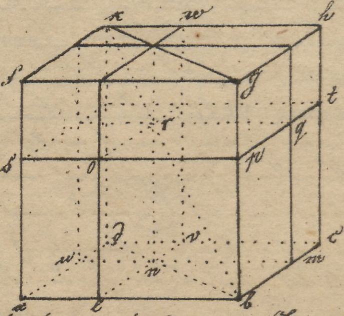
Beispiele.

1) Wenn $L = 18$ Fuß, $B = 15$ Fuß, $D = 12$ Fuß, so ist $F = 1332$ □ Fuß, $K = 3240$ Cubikfuß, die Diagonallinien sind $\sqrt{549} = 23,43$ Fuß $\sqrt{468} = 21,63$ Fuß, $\sqrt{369} = 19,21$ Fuß, die Axe $\sqrt{693} = 26,325$ Fuß

2) Es sey $L = 18'7''$, $B = 15'9''$, $D = 12'8''$

L	223	2,34830
B	189	2,27646
D	152	2,18184
	1728	6,76246
K		3,56906 = 3707,3 Cubikfuß.

4.



Der Unterschied der körperlichen Räume zweier Cuben ist gleich dem Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums, dessen Höhe der Unterschied der Kanten der Cuben ist, und dessen Grundfläche aus dem Quadrat der größern Kante dem Quadrat der kleinern Kante und dem Produkt beider Kanten besteht.

Es sey $ab = A$ die größere Kante, $lb = B$ die kleinere Kante. Nimmt man den kleinern Cubus vom größern weg, so besteht das Uebrige aus drei Theilen, nämlich aus einem senkrechten Parallelepipedum, dessen Grundfläche $adxs = A^2$, dessen Höhe $al = A-B$ ist; aus einem senkrechten Parallelepipedum dessen Grundfläche $opqr = B^2$, dessen Höhe $pg = A-B$ ist; und aus einem senkrechten Parallelepipedum dessen Grundfläche $cvwh = A.B$, und dessen Höhe $cm = A-B$ ist.

Also $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + A.B + B^2)$

Beispiel. Es sey $A = 15\frac{5}{8}$ Fuß, $B = 15$ Fuß, $A - B = \frac{5}{8}$ Fuß

A^3	3814,697	A^2	244,1406		703,5156
B^3	3375	$A.B$	234,375	$A-B$	$\frac{5}{8}$
$A^3 - B^3$	439,697	B^2	225,	Prod.	439,697
			703,5156		

5.

Der körperliche Inhalt eines Cubus, dessen Kante aus zwei Theilen besteht, ist gleich der Summe der Cuben der beiden Theile, nebst dem dreifachen Parallelepipedum oder Product der Kante des ganzen Cubus mit ihren beiden Theilen.

In der Figur des vorigen Satzes sey $ab = L$, und die beiden Theile $bl = A$, $al = B$. Nimmt man von dem über ab beschriebenen Cubus, die über bl, al, beschriebenen Cuben weg, so sind die übrig bleibenden Stücke: ein Parallelepipedum dessen Grundfläche $abos = A.B$, dessen Höhe $ad = L$ ist; ein Parallelepipedum dessen Grundfläche $gfiq = A.B$, dessen Höhe $fg = L$ ist; ein Parallelepipedum dessen Grundfläche $cmnv = A.B$, dessen Höhe $rk = L$ ist.
Also ist $L^3 = A^3 + B^3 + 3\,L.A.B$

oder $(A + B^3) = A^3 + 3A^2.B + 3A.B^2 + B^3$

Beispiel. Es sey $L = 15\frac{5}{8}$ Fuß, $A = 15$ Fuß, $B = \frac{5}{8}$ Fuß

A^3 . . .	3375
B^3 . . .	0,2441
$3L.A.B.$	439,4531
L^3 . . .	3814,6972

6.

Aus dem Inhalte eines Cubus wird die Kante der cubischen Seite geometrisch durch Bestimmung zweier mittleren Proportionallinien, arithmetisch durch Ausziehung der Cubikwurzel gefunden.

daß Maaß sey = M, der Inhalt des Cubus = K, die Kante desselben = L, so ist (VII. 1) $L^3 = K.M^3$ wo K eine Zahl bedeutet. Nimmt man zwischen den Linien M und $K.M$ zwei mittlere Proportionallinien an, so ist die erste von ihnen = L. denn wenn $M : L = L : B$, und $L : B = B : K.M$ ist, so ist $L^2 = B.M$, und $B^2 = K.L.M$. Aus der ersten folgt $\frac{L^4}{L} = \frac{B^2}{L}.M^2$, aus der zweiten $\frac{B^2}{L} = K.M$, also $L^3 = K.M^3$.

Um die Kante L arithmetisch durch Cubikwurzelausziehung zu finden, wählt man für L einen genäherten Werth A, und bestimmt die Ergänzung B nach VII. 5, $= \frac{K.M^3 - A^3}{3A^2}$.

Beispiele.

1) Es sey $K = 12000$ Cubikfuß; $M = 1$ Fuß. Erster genäherter Werth $A = 22$ Fuß, $A^3 = 10648$ Cf. die Ergänzung $B = \frac{12000 - 10648}{1452} = 0,8$

Zweiter genäherter Werth $A = 22,8$, $A^2 = 519,84$
$A^3 = 11852,352$, $B = \frac{147,648}{1559,52} = 0,09$

Dritter genäherter Werth $A = 22,89$ $A^2 = 523,9521$
$A^3 = 11993,263569$, $B = \frac{6,736431}{1571,8563} = 0,004285$

also $L = 22,894285$ Fuß.

2) Die Kante eines Cubus ist $18\frac{3}{4}$ Zoll, wie groß ist die Kante eines Cubus von doppelten und dreifachem Inhalt?

$\sqrt[3]{2} = 1,25992$ $\sqrt[3]{3} = 1,44225$

Die Kante des doppelten Cubus $18\frac{3}{4}.\sqrt[3]{2} = 23,623$ Zoll
Die Kanten des dreifachen Cubus $18\frac{3}{4}.\sqrt[3]{3} = 27,042$ Zoll

7.

Den Inhalt der Wand eines senkrechten Parallelepipedums zu berechnen.

Es seyen an dem Parallelepipedum von außen genommen, die Höhe = L, die Kanten der Grundfläche B und D, die Dicke der Wand = w, so ist der Inhalt der Wand =

$$L.B.D - L(B-2w)(D-2w) = 2L.B.w + 2L.Dw - 4L.w^2$$
$$= A.w - 4L.w^2$$

wo A die äußere Seitenfläche bedeutet.

Der Inhalt der Wand und der beiden Böden ist

$$= L.B.D - (L-2w)(B-2w)(D-2w)$$
$$= (2LB + 2LD + 2BD)w - 4(L+B+D)w^2 + 8w^3$$
$$= F.w - 4(L+B+D)w^2 + 8w^3$$

wo F die äußere Oberfläche bedeutet.

Beispiele.

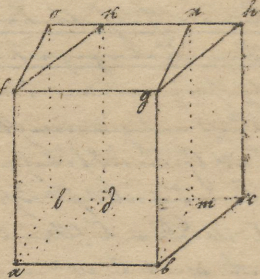
1) Es sey $L = 10$ Fuß, $B = 30$ Fuß, $D = 20$ Fuß, $w = 1\frac{1}{2}$ Fuß so ist die Wand $= 1000 . 1\frac{1}{2} - 40 . 2\frac{1}{4} = 1410$ Cubikfuß.

2) Es seyen an einer Kiste $L = 3$ Fuß, $B = 7$ Fuß, $D = 5$ Fuß, $w = 1\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{1}{8}$ Fuß, so ist die ganze Oberfläche $F = 142$ □ Fuß, also der Inhalt der Wand und der Böden $= 142 . \frac{1}{8} - 60 . \frac{1}{64} + 8 . \frac{1}{512}$ $= 16\frac{53}{64}$ Cubikfuß.

8.

Der körperliche Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums, dessen Grundfläche ein schiefes Parallelogramm ist, ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.

Die Grundfläche abcd sey ein schiefes Parallelogramm, die Seitenkanten $af = bg = ch = dk = L$ auf der Grundfläche senkrecht. Auf die Kante ab stellt man die Ebenen alof, bmng, senkrecht, so sind sie (IV. 26) parallel, und die mit ab parallelen Kanten cd, fg, hk sind (IV. 16) ebenfalls auf diesen Ebenen senkrecht, also sind (IV. 13) die Ebenen abcd, abfg, cdhk oder bmno, fghk oder fgno ebenfalls auf jenen Ebenen



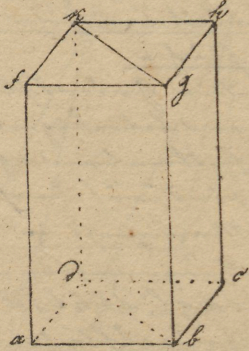
alof, bmng, senkrecht. Also ist der körperliche Inhalt des Parallelepipedums abmlfgno (VII. 3) = L. ab. al. Die beiden dreiseitigen Prismen bcmghn, adlfko haben congruente Endflächen: bcm = adl, ghn = fko; bchg = adkf, chnm = ldko, bmng = alof, und ihre Ecken (IV. 8) l, m, n, o sind rechtwinklig. Also können diese Prismen in diesen Ecken so zusammengestellt werden, daß die Endkanten zusammenfallen, nämlich mn mit lo, mc mit ld, mb mit la. Da nun auch die Endflächen congruent sind, so werden bei dieser Zusammenstellung alle gleichnamigen Endflächen der Prismen zusammenfallen. Also sind diese Prismen vollkommen identisch. Also haben sie auch gleichen körperlichen Inhalt. Aber abcdfghk = abmlfgno − adlfko + bcmghn. Also abcdfghk = abmlfgno. Also der körperliche Inhalt des Parallelepipedums abcdfghk oder K = L. ab. al.

Aber der Inhalt des schiefen Parallelogramms abcd = ab. al. Zieht man also in der Grundfläche abcd irgend eine Linie = D, und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch L,

so ist die Grundfläche = c. D^2, und $K = c. L. D^2$.
Hieraus folgt weiter, daß der körperliche Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums unverändert bleibt, wenn bei gleicher Höhe ein anderes Parallelogramm von gleichem Flächeninhalt zur Grundfläche angenommen wird.

Es folgt ferner, daß sich die körperlichen Räume zweier senkrechten Parallelepipede bei gleichen Höhen wie die Grundflächen, bei gleichen Grundflächen wie die Höhen verhalten, und daß sich bei gleichem körperlichem Inhalt die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten.

9.

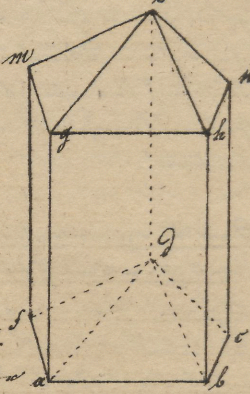


<u>Der körperliche Inhalt eines senkrechten dreiseitigen Prisma ist gleich dem Produkt der Höhe mit der Grundfläche.</u>

abdfgk ist ein senkrechtes Prisma, dessen Höhe af = L, dessen Grundfläche abd ein beliebiges Dreieck. Man vollendet die Parallelogramme abcd, fghk, verbindet ch, so ist ch = bg = dk, also (IV.16.) ch auch der Ebene abcd senkrecht.
Wenn man das Prisma bcdghk so umstellt, daß die Ecke c in a, b in d, d in b fällt, so fallen (IV. 11) die senkrechten Endkanten ch in af, bg in dk, dk in bg, zusammen, also sind die Prismen abdfgk, cdbhkg, identisch, also an körperlichem Inhalt gleich, also jedes die Hälfte des ganzen Paralle-

bezeichnet. Dieses aber ist (VII. 8) gleich dem Product L. abcd, also ist der körperliche Inhalt des Prisma abdfgk = L. $\frac{1}{2}$ abcd, also K = L. abd. Man ziehe in der Grundfläche abd irgend eine Linie = D, und bezeichne das Verhältniß von abd zu D^2 durch c, so ist Δ abd = c. D^2, also K = c. L. D^2.

10.



Der körperliche Inhalt eines senkrechten vielseitigen Prisma oder einer Säule, ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.

Die Grundfläche abcdf ist ein beliebiges Vieleck, die Endkanten ag = bh .... = L sind auf derselben senkrecht. Man zieht in der Grundfläche Diagonallinien da, db, so sind die Vierecke dagl, dbhl (IV. 13. 14.) Ebenen welche auf der Grundfläche senkrecht sind, und die Säule in senkrechte dreiseitige Prismen theilen. Also sind die körperlichen Räume dieser Prismen (VII. 9.) bcdhkl = L. bcd, abdghl = L. abd, adfglm = L. adf, also ist der körperliche Inhalt der Säule K = L. abcdf. Zieht man in der Grundfläche abcdf eine beliebige Linie = D, und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche abcdf = c. D^2, und K = c. L. D^2.

Bezeichnet man den Umfang oder die Summe der Randkanten der Grundfläche durch P, so ist (IV. 49) die Seitenfläche der Säule $A = L \cdot P$.

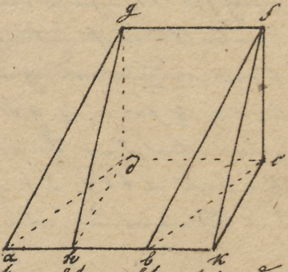
Beispiel.

Die Höhe der Säule $L = 8' 11''$, die Grundfläche ein regelmäßiges Achteck, dessen Seite oder Randkante $D = 3' 7''$ also (V. 51) $c = 4,8284$

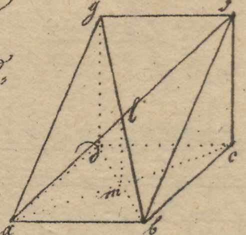
L	2,02938	L	2,02938
D	1,63347	D	1,63347
8	0,90309	D	1,63347
144	7,84164	c	0,68381
A	2,40758 = 255,61 □ Fuß.	1728	6,76246
		K	2,74259 = 552,82 Cbf.

11.

Der körperliche Inhalt eines dreiseitigen Prisma, welches senkrecht auf seinem Parallelogramm ruht, ist gleich dem halben Produkt der Höhe mit der Grundfläche.

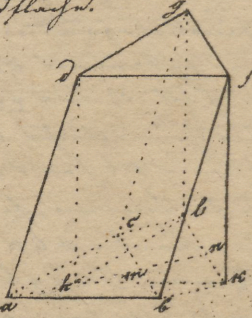


Auf der Ebene des schiefen Parallelogramms abcd sind die Endkanten $cf = dg = L$ senkrecht, also sind auch (IV. 13) die Endflächen cfgd, cfb, dga, auf der Grundfläche abcd senkrecht. Man fälle cK, dk, auf ab senkrecht, verbinde fK, gk, so sind (IV. 19) diese Linien, so wie die Ebenen cfK, dgk, auf der Kante abK senkrecht. Auch sind (IV. 13) diese Ebenen cfK, dgk, auf der Grundfläche abcd senkrecht. Also sind an den Tetraedern fcKb, gdka sämmtliche Endflächen congruente rechtwinklige Dreiecke: $cKb = dka$, $fcK = gdk$, $fKb = gka$, $fcb = gda$. Legt man die congruenten Dreiecke cKb, dka, an ihren gleichnamigen Ecken zusammen, nämlich c auf d, K auf k, b auf a, so fallen auch (IV. 11) die Endkanten cf, dg, zusammen. Also sind die Tetraeder fckb, gdha identisch, also an körperlichem Inhalt gleich. Aber das Prisma abcdfg = kcdfg − fckb + gdha. Also ist an körperlichem Inhalt abcdfg = kcdfg. Aber (VII. 9) der Inhalt von kcdfg = ½ L. cd. ck. Also der Inhalt von abcdfg oder K = ½ L. cd. ck. Aber die Grundfläche abcd = cd. ck. Also der Inhalt K = ½ L. abcd



Zieht man die Diagonallinien ac, bd, af, bg, so sind (IV. 13) die Ebenen acf, bdg, auf der Grundfläche abcd senkrecht, also ist auch (IV. 17) ihre Kante lm auf derselben senkrecht. Also (IV. 16) lm ∥ fc ∥ gd, also lm = ½ fc = ½ gd = ½ L, l, m, sind die Schwerpuncte der Parallelogramme abfg, abcd, also K = lm. abcd, d. h. gleich dem Product der Höhe des Schwerpuncts mit der Grundfläche.

12.



Der körperliche Inhalt eines schiefen dreiseitigen Prisma ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.

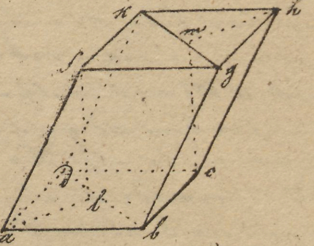
Das schiefe Prisma ist abcdfg. Man fälle auf die Ebene der Grundfläche abc die Senkrechten dh = fk = gl = L, so ist (VII. 9) der körperliche Inhalt des senkrechten dreiseitigen Prisma hkldfg = L. hkl. Die Seiten des △ hkl sind (IV. 23) den gleichnamigen Seiten des △ abc parallel und gleich. Verbindet man also ah, welche die Seiten bc, kl, in m, n schneidet, so sind die Parallelogramme (II. 21.) $ahlc = lcmn$, $ahkb = kbmn$, also $ahlc + ahkb = lcbk$. Also sind (VII. 11) die körperlichen Räume der Prismen $ahlcgd + ahkbds = lcbksg$. Aber die Räume der Prismen $abcdsg + lcbksg = hkldsg + ahlcgd + ahkbds$. Also die körperlichen Räume der Prismen $abcdsg = hkldsg$. Also der körperliche Inhalt des Prisma $abcdsg$. $K = L \cdot hkl$. Aber $\triangle\, hkl = abc$, also $K = L \cdot abc$. Zieht man in der Grundfläche abc eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist der Grundfläche $abc = c \cdot D^2$, und $K = c \cdot L \cdot D^2$

Beispiel.

Die Höhe $L = 8'3''$, die Grundfläche abc ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite $D = 10'5''$, also (V. 51) $c = 0{,}43301$.

L	1,99564
D	2,09691
D	2,09691
c	9,63650
1728 _	6,76246
K	2,58842 = 387,63 Cubikfuß.

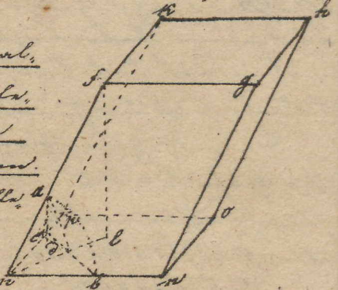
13.



Der körperliche Inhalt eines schiefen Parallelepipedums ist gleich dem Produkt der Höhe mit der Grundfläche.

Die Grundfläche ist das Parallelogramm $abcd$, auf dessen Ebene die Linien $sl = cm = L$ senkrecht sind. Das Parallelepipedum wird durch die Diagonalfläche $bdkg$ in die nicht identischen aber symmetrischen dreiseitigen Prismen (IV. 44.) $abdsgk$, $bcdghk$ getheilt, deren körperliche Räume (VII. 12.) L. abc und L. bcd sind. Da $\Delta\, abd = bcd = \frac{1}{2}\, abcd$, so sind die körperlichen Räume dieser nicht identischen aber symmetrischen Prismen einander gleich, also der körperliche Inhalt des ganzen Parallelepipedums abcdfghk .. $K = L.\, abcd$. Zieht man in der Grundfläche abcd eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $abcd = c.\, D^2$, also $K = c.\, L.\, D^2$.

14.



Aus den Kanten und Diagonallinien eines schiefen Parallelepipedums den körperlichen Inhalt desselben zu berechnen.

Die Grundfläche ist das Parallelogramm mnop, die auf der Ebene desselben senkrechte Linie fl die Höhe, also (VII. 13) $K = fl.\, mnop$. Aber (VI. 14) $fl = mf.\, \sin fml$, und (VI. 27) $mnop = mn.\, mp.\, \sin pmn$. Wenn man also die Eckkanten $mf = E$, $mn = E'$, $mp = E''$ setzt, so ist der Inhalt des Parallelepipedums $K = E.\, E'.\, E''.\, \sin fml.\, \sin pmn$. Beschreibt man in der Ecke m mit einem beliebigen Halbmesser $ma = mb = mc = md$ ein sphärisches Dreieck (IV. 68) abc, welches von der senkrechten Ebene fml in ad geschnitten wird, so ist $\angle fml = ad$, $\angle pmn = bc$, also $K = E.\, E'.\, E''.\, \sin ad.\, \sin bc$. Aber (VI. 47) $\sin ad = \sin ab.\, \sin b$. Setzt man $ab + bc + ca = 2S$, $4 \sin S.\, \sin(S - ab) \sin(S - bc) \sin(S - ca) = A^2$, so ist (VI. 62) $\sin ab.\, \sin bc.\, \sin b = A$, also $\sin ad = \sin ab.\, \sin b = \frac{A}{\sin bc}$, also $\sin ad.\, \sin bc = A$, also $K = E.\, E'.\, E''.\, A$. Wenn nun die Eckkanten mf, mn, mp, und die Diaparallelen np, ps, sn, gegeben sind, so berechnet man aus ihnen (VI 44) die Winkel smn = ab, nmp = bc, pms = ca, hieraus A, und hieraus K.

Beispiel.

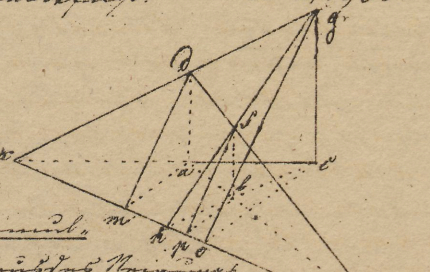
ms = E = 162, mn = E' = 76, mp = E'' = 70 Zoll

np = 82, ps = 126, sn = 138 Zoll

sn 138	np 82	ps 126	ab 58° 11,92
E' 76	E' 76	E'' 70	bc 68 11,80
E 162	E'' 70	E 162	ca 47 41,16
376	228	358	2S 174 4,88
188	114	179	S 87 2,44
50	32	53	S−ab 28 50,52
112	38	109	S−bc 18 50,64
26	44	17	S−ca 39 21,28
2,27416	2,05690	2,25285	S 9,99942
1,69897	1,50515	1,72428	S−ab 9,68340
2,04922	1,57978	2,03743	S−bc 9,50920
1,41497	1,64345	1,23045	S−ca 9,80216
7,11100	7,32852	7,26069	4 0,60206
8,55550	8,66426	8,63034	A² 9,59624
0,25447	0,16941	0,35462	A 9,79812
29° 5',96	34° 5',90	23° 50,58	E 2,20952
ab 58° 11',92	bc 68° 11',80	ca 47° 41',16	E' 1,88081
			E'' 1,84510
			1728 6,76246
			K 2,49601

K = 313,33 Kubikfuß.

15



Bei einem Prisma ist der Inhalt des senkrechten Schnitts gleich dem Inhalt irgend eines schiefen Schnitts, multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels, welchen die Ebene dieses schiefen Schnitts mit den Seitenkanten des Prisma bildet.

Es sey abc irgend ein Dreieck in der Ebene des senkrechten Schnitts, dsg das entsprechende Dreieck in der Ebene des schiefen Schnitts, so daß da, sb, gc auf der Ebene abc senkrecht sind. Die entsprechenden Seiten dieser Dreiecke: bc und fg, ca und gd, ab und df, schneiden einander in Punkten h, k, l, welche (IV. 24) in der Kante der Ebenen abc, dfg, liegen. Zieht man am, bp, co, senkrecht auf diese Kante, so sind (IV. 19.) dm, fp, go; so wie die Ebenen amd, bpf, cog, senkrecht auf dieselbe Kante.

Der Winkel $dma = fpb = goc$ ist (IV. 22) der Kantenwinkel des schiefen Schnitts mit dem senkrechten Schnitt; der Winkel $mda = pfb = ogc = w$ ist (IV. 21) der Neigungswinkel der Ebene des schiefen Schnitts dfg gegen die Seitenkanten des Prisma da, fb, gc. also ist (VI. 14) $co = go . \sin w$, $bp = fp . \sin w$, $am = dm . \sin w$.

$\Delta ckh = \frac{1}{2} hk . co$, $\Delta gkh = \frac{1}{2} hk . go$, also $\Delta ckh = gkh . \sin w$

$\Delta bhl = \frac{1}{2} hl . bp$, $\Delta fhl = \frac{1}{2} hl . fp$, also $\Delta bhl = fhl . \sin w$

$\Delta akl = \frac{1}{2} kl . am$, $\Delta dkl = \frac{1}{2} kl . dm$, also $\Delta akl = dkl . \sin w$.

Aber $\Delta ckh + bhl - akl = abc$, $\Delta gkh + fhl - dkl = dfg$

also ist auch $\Delta abc = dfg . \sin w$.

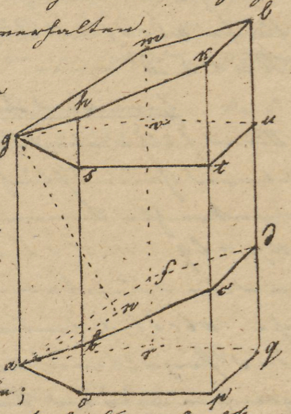
Wenn $df \parallel hk$, so ist $\Delta abc \sim ckh$, $\Delta dfg \sim gkh$, also

$$\frac{abc}{ckh} = \frac{ca^2}{ck^2} = \frac{gd^2}{gk^2} = \frac{dfg}{gkh}, \text{ also } \frac{abc}{dfg} = \frac{ckh}{gkh} = \sin w,$$

also ebenfalls $\Delta abc = dfg . \sin w$.

Jedes einzelne Dreieck des schiefen Schnitts mit $\sin w$ multiplicirt, giebt also das entsprechende Dreieck des senkrechten Schnitts, welches seine Projection ist, also giebt auch der ganze Inhalt des schiefen Schnitts, mit $\sin w$ multiplicirt, den Inhalt des senkrechten Schnitts, welcher seine Projection ist. Hieraus folgt noch, daß sich die Flächen zweier schiefen Schnitte umgekehrt wie die Sinus ihrer Neigungswinkel gegen die Endkanten des Prisma verhalten.

16.



Der körperliche Inhalt eines schiefen Prisma ist gleich dem Product der Höhe mit der Grundfläche.

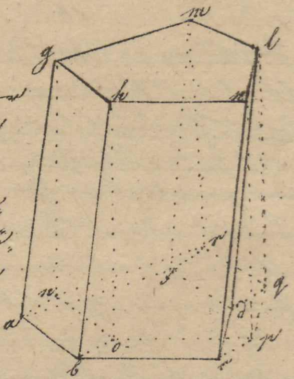
Die parallelen Grundflächen des schiefen Prisma sind abcdf, ghklm, ag = E die Endkante, gw = L senkrecht auf die Grundfläche, die Höhe; gaw = n der Neigungswinkel der Endkante gegen die Grundfläche.

Erster Beweis.

Man ziehe die Querschnitte aopqr, gstuv; senkrecht auf eine Endkante, so sind sie (IV. 16) auch auf den übrigen Endkanten senkrecht. In den prismatischen Körpern aopqrabcdf, gstuvghklm, sind die Grundflächen und gleichnamigen Endflächen congruent, und da diese letztern auch den Grundflächen senkrecht sind, so sind die genannten prismatischen Körper aqd, gul, identisch, also an körperlichem Inhalt gleich. Aber abcdfghklm = aopqrgstuv − aqd + gul. Also der Inhalt des schiefen Prisma K gleich dem Inhalt des senkrechten Prisma. Dieses ist aber (VII. 10) = ag aopqr, also K = ag . aopqr. Aber (VII. 15) aopqr = abcdf . sin n, also

K = E . sin n . abcdf = L . abcdf.

Zieht man in der Grundfläche abcdf eine beliebige Linie = D, und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $abcdf = c.\,D^2$, also $K = c.\,\sin.\,E.\,D^2$, oder $K = c.\,L.\,D^2$



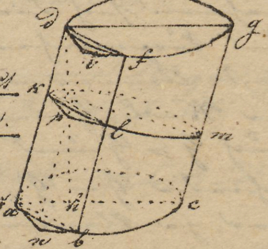
Zweiter Beweis.

Man fälle von den Ecken der oberen Grundfläche $ghklm$ senkrechte Linien $gn = ho = kp = lq = mr = L$ auf die Ebene der unteren Grundfläche $abcdf$, so sind alle Seiten der Projection $nopqr$ den gleichnamigen Seiten der Grundfläche $abcdf$ parallel und gleich, also $abcdf = nopqr$. Aber die Figur $abcpqrn = abcdf + cdqp + dfrq + fanr = nopqr + abon + bcpo$, also ist die Summe der Parallelogramme $cdqp + dfrq + fanr = abon + bcpo$. Also ist auch
$\frac{1}{2} L.\,cdqp + \frac{1}{2} L.\,dfrq + \frac{1}{2} L.\,fanr = \frac{1}{2} L.\,abon + \frac{1}{2} L.\,bcpo$,
also ist (VII. 11) die Summe der dreiseitigen Prismen $cdqpkl + dfrqlm + fanrmg = abongh + bcpohk$. Aber der ganze Körper $abcpqrnghklm = abcdfghklm + cdqpkl + dfrqlm + fanrmg = nopqrghklm + abongh + bcpohk$. Also ist der körperliche Inhalt des schiefen Prisma $abcdfghklm$ oder K gleich der Säule $nopqrghklm$. Dieser ist aber (VII. 10) $= L.\,nopqr = L.\,abcdf$. Also ist der Inhalt des schiefen Prisma K ebenfalls $= L.\,abcdf$ oder $K = c.\,L.\,D^2$, oder $K = c.\,\sin n.\,E.\,D^2$.

Beispiel. Die Grundfläche des schiefen Prisma ist ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seite oder Randkante $D = 4' 7''$, also (IV. 51) $c = 2,59807$. Die Endkante $E = 9' 1''$, ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche $n = 68° 27'$.

E	2,03743
D	1,74036
D	1,74036
sin n	9,96853
c	0,41465
1728	6,76246
K	2,66379 = 461,09 Cubikfuß

17.



Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkt der Höhe mit der Grundfläche.

Die Grundfläche des Cylinders (IV. 51) sey eine beliebige krumme Linie abc, die Höhe $dk = E$ senkrecht auf die Ebene der Grundfläche; der Inhalt der Grundfläche $abc = G$. Man beschreibe in und um die Grundfläche ein Vieleck; $ab = df$ sey eine Seite des eingeschriebenen Vielecks, $an = do$ und $bn = fo$, Theile der Umfangslinie des äußern Vielecks. Durch die Seiten des innern Vielecks ab, und die anliegenden parallelen Seitenlinien des Cylinders ad, bf, lege man Ebenen, so sind sie die Endflächen eines dem Cylinder eingeschriebenen Prisma, dessen Endkanten mit den Seitenlinien des Cylinders zusammenfallen. Durch die Seiten des äußern Vielecks an, bn, und die anliegenden parallelen Seitenlinien des Cylinders ad, bf, lege man ebenfalls Ebenen, so sind sie die

Endflächen eines dem Cylinder umschrie-
benen Prisma, und berühren die Seiten-
fläche desselben in den Seitenlinien.
Nennt man den Inhalt des innern und
äußern Vielecks durch G', G'', bezeichnet,
so ist der körperliche Inhalt des in-
nern Prisma (VII. 16) $= L. G'$; der des
äußern Prisma $= L. G''$. Also ist der körper-
liche Inhalt des Cylinders $K > L. G'$ und
$K < L. G''$.
Je kleiner aber die Seiten der Vielecke
genommen werden, desto mehr
nähern sich die Prismen in Rücksicht
des körperlichen Inhalts dem Cylinder,
desto kleiner werden also die Unterschie-
de $K - L. G'$ und $L. G'' - K$. Zugleich ist
auch $G > G'$ und $G < G''$, und die Unter-
schiede $G - G'$, $G'' - G$, werden desto klei-
ner, je kleiner die Seiten der Vielecke
genommen werden. Da $K > L. G - L(G - G')$
und $K < L. G + L(G'' - G)$, der zweite Theil
aber kleiner als jede denkbare Größe wer-
den kann, so muß $K = L. G$ seyn.
Da (VII. 16) der körperliche Inhalt eines
Prisma gleich dem Product der Seitenkan-
te mit dem senkrechten Schnitt ist, so sey
die Seitenlinie des Cylinders $ad = E$, der
Inhalt des senkrechten Querschnitts $klm = Q$.
Alsdann läßt sich auf die obige Art bewei-
sen, daß $K = E. Q$ sey. Da nun auch $K = L. G$
$= \sin \alpha. E. G$ ist, so folgt daß $Q = G. \sin \alpha$ sey-
n (VII. 15) bei jedem Prisma.

Zieht man in der Grundfläche abc eine beliebige Linie = D, und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $G = c. D^2$, also

$$K = c. L. D^2 \text{ oder } K = c. \sin w. E. D^2$$

Wenn die Grundfläche ein Kreis ist, dessen Durchmesser = D, Umfang = P, so ist (V. 58.)

$$K = \tfrac{1}{4}\pi L. D^2 \text{ oder } K = \tfrac{1}{4}\pi \sin w. E. D^2$$
$$K = \tfrac{1}{4\pi} L. P^2 \text{ oder } K = \tfrac{1}{4\pi} \sin w. E. P^2$$

Wenn die Grundfläche eine Ellipse ist, deren Axen D und d sind, so ist (V. 67.)

$$K = \tfrac{1}{4}\pi L. D. d \text{ oder } K = \tfrac{1}{16}\pi L (D+d)^2 - \tfrac{1}{16}\pi L (D-d)^2$$

d. h. der elliptische Cylinder kann als der Unterschied zweier Kreiscylinder berechnet werden. Bei einem senkrechten Kreiscylinder, dessen Wand die Dicke = w hat, äußerer Durchmesser = D, innerer Durchmesser $d = D - 2w$, ist der Inhalt der Wand $= \tfrac{1}{4}\pi L. D^2 - \tfrac{1}{4}\pi L. d^2 = \tfrac{1}{4}\pi L (D-d)(D+d) = \pi L. w (D-w) = \pi L. w (d+w)$.

Bei einem senkrechten Kreiscylinder ist (IV. 52) die Seitenfläche $A = L. P. = \pi. L. D.$ die ganze Oberfläche $T = \pi L. D + \tfrac{1}{2}\pi. D^2$.

Bei einem senkrechten gleichseitigen Kreiscylinder ist die Höhe dem Durchmesser gleich, also $D = L$, folglich

$$A = \pi. D^2, \quad T = \tfrac{3}{2}\pi. D^2, \quad K = \tfrac{1}{4}\pi. D^3$$

Beispiele.

1) Bei einem senkrechten gleichseitigen Kreiszylinder ist $L = D = 15$ Zoll

D 1,17609	D 1,17609	D 1,17609	$A =$ 706,85 □Z.
D 1,17609	D 1,17609	D^2 2,35218	$T =$ 1060,3 □Z.
π 0,49715	$\frac{3}{2}\pi$ 0,67324	$\frac{1}{4}\pi$ 9,89509	$K =$ 2650,7 C.Z.
A 2,84933	T 3,02542	K 3,42336	

2) Bei einem senkrechten Kreiszylinder ist $L = P = 20$ Z.

P^2 2,60206	P^3 3,90309	$T =$ 463,66 □Zoll
$1 + \frac{1}{2\pi}$: 0,06414	$\frac{1}{4\pi}$ 8,90078	$K =$ 636,62 Cbzoll.
T 2,66620	K 2,80387	

3) Bei einem senkrechten gleichseitigen Kreiszylinder ist $D = L = 100$, wie groß ist die Kante C eines Cubus vom gleichen Inhalt?

$C^3 = K = \frac{1}{4}\pi D^3$ D^3 6,

$\frac{1}{4}\pi$ 9,89509
K 5,89509
C 1,96503 = 92,264

4) Bei einem senkrechten Kreiszylinder ist: $L = 10$ Fuß, $D = 4$ Fuß.

L 1
D^2 1,20412
$\frac{1}{4}\pi$ 9,89509
K 2,09921 = 125,66 Cbf.

5) Bei einem senkrechten Kreiszylinder ist: $L = 17\frac{5}{12}$ Zoll, $D = 8\frac{1}{3}$ Zoll.

L 1,24097
D 0,92082
D 0,92082
$\frac{1}{4}\pi$ 9,89509
K 2,97770 = 949,95 Cbz.

6) Bei einem eingesehenen runden Loch ist der Inhalt $K = 4202,5$ rheinl. Cbzoll, die innere Weite $D = 20$ Zoll, wie groß ist die Höhe?

K 3,62351
D^2 2,60206
$\frac{1}{4}\pi$ 9,89509
L 1,12636 = 13,377 Zoll

7) Bei einem senkrechten Kreiszylinder ist der Umfang $P = 21\frac{1}{2}$ Zoll. $L = 31\frac{1}{2}$ Zoll.

L 1,49831
P 1,91116
P 1,91116
$\frac{1}{4\pi}$ 8,90078
1728 6,76246
K 0,98387 = 9,6354 Cbf.

8) Bei einem senkrechten hohlen Kreiscylinder ist die innere Höhe $L = 13\frac{3}{8}$ Zoll, der äußere Durchm. $D = 21\frac{1}{2}$ Zoll, der innere $d = 20$ Zoll, die Wand- und Boden-dicke $w = \frac{3}{4}$ Zoll, wie groß ist der Inhalt der Wand und des untern Bodens?

L	1,12630	w	9,87506	Wand	653,93
w	9,87506	D	1,33244	Boden	272,29
D-w	1,31702	D	1,33244		926,22 Lbz.
π	0,49715	¼ π	9,89509		
Wand	2,81553	Boden	2,43503		

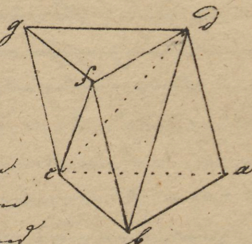
9) Bei einem senkrechten elliptischen Cylinder ist $D = 26$ Zoll, $d = 21\frac{1}{2}$ Zoll $L = 37$ Zoll.

L	1,56820
D	1,41497
d	1,33244
¼ π	9,89509
K	4,21070 = 16244 Lbz.

10) Bei einem schiefen Kreiscylinder ist $E = 12$ Fuß, $D = 8$ Fuß, Neigung $n = 78°39$

E	1,07918
D	0,90309
D	0,90309
sin n	9,99142
¼ π	9,89509
K	2,77187 = 591,39 Lbz.

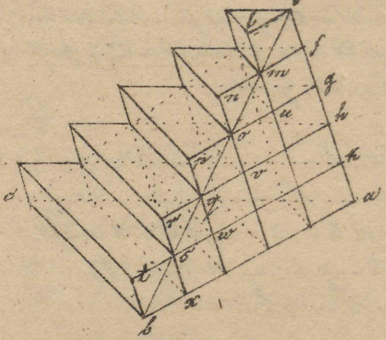
18.



Der körperliche Inhalt eines Tetraeders ist der dritte Theil des Produkts der Höhe mit der Grundfläche.

Das Tetraeder ist abcd. Man vollende das Prisma, indem man bf und cg, = ad zieht, und man ziehe cf, so ergeben sich in dem Prisma drei Tetraeder dabc, dbcf, dcfg. Die Tetraeder dabc, dbcf, haben die gemeinschaftliche Spitze c, und ihre Grundflächen dab, dbf, sind die Hälften des Parallelogramms dabf, also haben dabc dbcf, gleiche Höhe und Grundfläche. Die Tetraeder dbcf, dcfg, haben in d eine gemeinschaftliche Spitze, und ihre Grundflächen bcf, cfg, sind die Hälften des Parallelogramms bfgc; also haben dbcf, dcfg, gleiche Grundfläche und Höhe. Wenn also bewiesen wird, daß Tetraeder von gleicher Höhe und Grundfläche an körperlichem Inhalt gleich sind, so ist der Inhalt des Tetraeders dabc der dritte Theil des Inhalts des Prisma abcdfg, welches mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat.

Erster Beweis.



Man theilt die Kante ad in n gleiche Theile, legt durch die Theilpunkte die Ebenen lfm, gou.s.w. mit der Grundfläche abc parallel. Durch die Kanten dieser Ebenen auf der Endfläche dbc, legt man Ebenen mit ad parallel. Dadurch erhält man eine Reihe von Prismen, welche dem Tetraeder abcd eingeschrieben und umschrieben sind. Der körperliche Inhalt des Prisma dlmf = fnug sey M, so ist fnog = govh = 4 M, gpqh = hqwk = 9 M, hrsk = ksxa = 16 M, ktba = 25 M, u.s.w. Der körperliche Inhalt des Tetraeders abcd sey K, so ist

$$K > M + 4\,M + 16\,M \ldots\ldots + (n-1)^2\,M$$
$$K < M + 4\,M + 16\,M \ldots\ldots + n^2 . M$$

Aber $1 + 4 + 9 \ldots\ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

$1 + 4 + 9 \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Also $K > M . \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

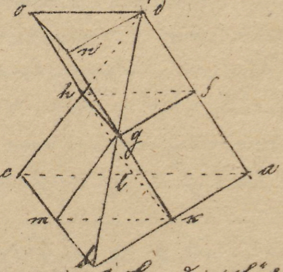
$K < M . \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Die Höhe des Tetraeders abcd sey = L, die Grundfläche abc = G, so ist $M = \frac{L.G}{n^3}$, also

$$K > \tfrac{1}{3} L.G(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{1}{2n})$$
$$K < \tfrac{1}{3} L.G(1+\tfrac{1}{n})(1+\tfrac{1}{2n})$$

Indem man nun die Anzahl der Theile n immer größer nimmt, werden die Brüche $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n}$, immer kleiner, und können kleiner als jede denkbare Größe werden. Folglich ist genau $K = \frac{1}{3} L.G$.

Zweiter Beweis.



Das Tetraeder abcd hat die Grundfläche abc = G, die Höhe L. Man halbirt die Kanten in f, g, h, k, l, m, so sind (IV. 36) fh $\parallel$ km $\parallel$ ac, fg $\parallel$ ab, gh $\parallel$ kl $\parallel$ bc, also (IV. 32) die Ebenen fgh $\parallel$ abc, gkm $\parallel$ dac,

Δ fgh = akl = kbm = $\frac{1}{4}$ G., lkmc = $\frac{1}{2}$ G, die Höhe der Prismen aklfgh, klcmgh ist $\frac{1}{2}$ L also (VII. 12) aklfgh = $\frac{1}{8}$ $L.G$. Das Prisma klcmgh ist (VII. 13) die Hälfte eines Parallelepipedums, dessen Grundfläche lkmc = $\frac{1}{2}$ G. dessen Höhe $\frac{1}{2}$ L, also ist ebenfalls klcmgh = $\frac{1}{8}$ $L.G$, also beide Prismen zusammen = $\frac{1}{4}$ $L.G$. Vollendet man über fgh das Prisma fghdno = aklfgh = $\frac{1}{8}$ $L.G$, so ist das Tetraeder fghd < fghdno also < $\frac{1}{8}$ $L.G$. Das Tetraeder kbmg ist mit dem Tetraeder fghd identisch, also ebenfalls < $\frac{1}{8}$ $L.G$. also beide Tetraeder zusammen < $\frac{1}{4}$ $L.G$.

Wenn also der körperliche Inhalt des Tetraëders $abcd = K$ ist, so ist

$$K > \tfrac{1}{4}\, L.G \text{ und } K < \tfrac{1}{4}\, L.G + \tfrac{1}{4}\, L.G.$$

Halbirt man auf dieselbe Art die Kanten der Tetraëder $fghd$, $ebmg$ so ist jedes derselben $> \frac{1}{32} L.G$ und $< \frac{1}{32} L.G + \frac{1}{32} L.G$, also beide zusammen $> \frac{1}{16} L.G$ und $< \frac{1}{16} L.G + \frac{1}{16} L.G$, also $K > \frac{1}{4} L.G + \frac{1}{16} L.G$ und $K < \frac{1}{4} L.G + \frac{1}{16} L.G + \frac{1}{16} L.G$. Bei dieser Halbirung entstehen vier Tetraëder. Wenn man die Kanten derselben wieder halbirt, so ist jedes derselben $> \frac{1}{256} L.G$ und $< \frac{1}{256} L.G + \frac{1}{256} L.G$, also alle vier zusammen $> \frac{1}{64} L.G$ und $< \frac{1}{64} L.G + \frac{1}{64} L.G$, also

$$K > \tfrac{1}{4} L.G + \tfrac{1}{16} L.G + \tfrac{1}{64} L.G$$
und $$K < \tfrac{1}{4} L.G + \tfrac{1}{16} L.G + \tfrac{1}{64} L.G + \tfrac{1}{64} L.G.$$

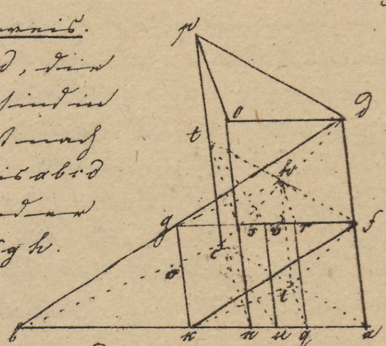
Nach n Halbirungen der Kanten ist also

$$K > L.G\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \;----\; \frac{1}{4^n}\right)$$
$$K < L.G\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \;----\; \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right)$$

oder durch Summirung dieser geometrischen Progression:

$$K > \frac{1}{3} L.G - \frac{1}{3} L.G.\frac{1}{4^n}$$
$$K < \frac{1}{3} L.G + \frac{2}{3} L.G.\frac{1}{4^n}$$

Da bei fortgesetzter Halbirung der zweite Theil kleiner als jede denkbare Größe werden kann, so ist genau $K = \frac{1}{3} L.G.$



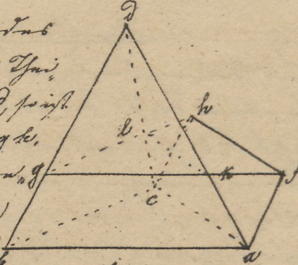
Drittes Lemma.

Das Tetraeder ist $abcd$, die Kanten da, db, dc, ab, ca, sind in f, g, h, k, l, halbirt, also ist nach dem vorigen Lemma $abcd = 2.\,dfgh + 2.\,aklfgh$ oder $abcd = 2aklf + 2.\,aklfgh$.

Das Tetraeder $abcd$ sey an körperlichem Inhalt einem Prisma $ancdop$ von gleicher Höhe gleich, dessen Grundfläche das $\Delta\, anc$ ist. Das Tetraeder $aklf$ ist (IV. 56) dem Tetraeder $abcd$ ähnlich. Man ziehe $lq \parallel cn$, $kr \parallel cn \parallel po$, so ist das Prisma $aqlfrk$ (IV. 57) dem Prisma $ancdop$ ähnlich, und $\Delta\, alq : akl = acn : abc$, also ist auch an körperlichem Inhalt Tetraeder $aklf = aqlfrk$. Aber vermöge der Annahme ist $ancdop = 2.\,aklf + 2.\,aklfgh$, also $\frac{1}{2}\,ancdop$ oder $ancfst = aklf + aklfgh$, also $ancfst = aqlfrk + aklfgh$.

Diese drei Prismen haben gleiche Höhen, also sind ihre Grundflächen $\Delta\, anc = aql + akl$. Man halbire ak in u so ist $\Delta\, akl = acu$, also ist $\Delta\, anc = aql + acu$, also $\Delta\, cnu = aql$. Aber $\frac{aql}{anc} = \frac{al^2}{ac^2} = \frac{1}{4}$, also $\Delta\, cnu = \frac{1}{4}\, anc$. Also $\Delta\, anc = \frac{4}{3}\, acu = \frac{1}{3}\, abc$.

Wenn also das Tetraeder $abcd$ den körperlichen Inhalt K, die Höhe L, die Grundfläche $abc = G$ hat, so ist $K = \frac{1}{3}\, L.G$. Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist $K = \frac{1}{3}\, c.\, L.D^2$.



Theilt man die Kanten des Tetraeders in drei gleiche Theile, $ak = \frac{1}{3}\,ad$, $bg = \frac{1}{3}\,bd$, $cl = \frac{1}{3}\,cd$, so ist (IV. 32.) die Ebene kgl oder fgk der Grundfläche des Tetraeders parallel, und geht (V. 13) durch die Schwerpunkte der Seitenflächen dab, dbc, dca. Das Tetraeder ist an körperlichem Inhalt dem Prisma abcfgk gleich.

Beispiele.

1) Bei einem regelmäßigen Tetraeder sind alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke. Wenn die Seitenkante $= D$, so ist der Cosinus ihrer Neigung gegen die Grundfläche (VI Aufg. 72) $= \sqrt{\frac{1}{3}}$, also $L = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.\,D$. Es sey $D = 10'5''$, wie groß ist der körperliche Inhalt?

D	2,09691
D^2	4,19382
$\sqrt{\frac{2}{3}}$	9,91195
$\sqrt{\frac{3}{16}} = c$	9,63650
$\frac{1}{3}$	9,52288
1728	6,76246
K	2,12452 = 133,21 Cub. Fuß

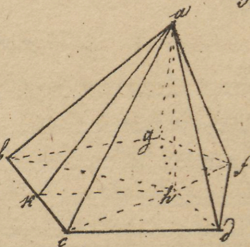
2) Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck $D = 11'7''$, $L = 30'5''$

L	2,56229
D	2,14301
D	2,14301
c	9,63650
$\frac{1}{3}$	9,52288
1728	6,76246
K	2,77015 = 589,04 Cbf.

19.

Der körperliche Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Theil des Products der Höhe mit der Grundfläche.

Die Höhe der Pyramide sey $ah = L$. Man theilt ihre Grundfläche bcdfg durch Diagonallinien



im Dreiecke, so ist (VII. 18)
$abck = \frac{1}{3} L. bck$, $acdk = \frac{1}{3} L. cdk$,
$adfk = \frac{1}{3} L. dfk$, $afgk = \frac{1}{3} L. fgk$,
$agbk = \frac{1}{3} L. gbk$, also durch Summirung der körperliche Inhalt der ganzen Pyramide $abcdfg$ oder $K = \frac{1}{3} L. bcdfg$. Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie $= D$, und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist $K = \frac{1}{3} c. L. D^2$.

Bei einer regelmäßigen Pyramide ist die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck, dessen Mittelpunkt k, Umfang $= P$, Centralwinkel $bkc = m$, und die Seitenfläche (IV. 54.) $A = \frac{1}{2} a\kappa. P$, wenn $a\kappa$, $k\kappa$ (IV. 19.) senkrecht auf bc sind. Es sey hier die Randkante $bc = D$, so ist $b\kappa = \frac{1}{2} D$, $k\kappa = \frac{1}{2} D. \cot g \frac{1}{2} m$
$tg\, \kappa = \frac{2L}{D} . tg \frac{1}{2} m$, $a\kappa = \frac{L}{\sin \kappa}$.

Beispiele.

1) Bei einer unregelmäßigen Pyramide ist die Grundfläche ein Quadrat die Randkante $D = 8' 7''$, die Höhe $L = 21' 6''$, $c = 1$

L	2,41162
D	2,01284
D	2,01284
⅓	9,52288
1728	6,76246
K	2,72264 = 528 Cbf.

2) Bei einer regelmäßigen Pyramide ist die Höhe $L = 15'$, die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck, die Randkante $D = 7$ Fuß, also (V. 51.) $c = 2,59807$, $m = 60^\circ$

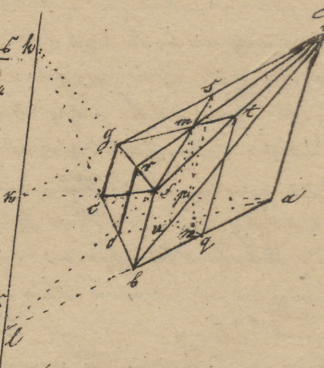
L	1,17609
D	0,84510
D	0,84510
c	0,41465
⅓	9,52288
K	2,80382 = 636,53 Cbf.

tg ½ m	9,76144
2 L	1,47712
D	0,84510
tg κ	0,39346
sin κ	9,96714
L	1,17609
aκ	1,20895

aκ	1,20895
½ P	1,32222
A	2,53117

$A = 339,75$ □f.

20.



<u>Der körperliche Inhalt eines schiefgeschnittenen dreiseitigen Prisma ist gleich dem dritten Theil des Products der Summe der Höhen, mit der Grundfläche, oder gleich dem Product der Höhe des obern Schwerpuncts mit der Grundfläche.</u>

Die Grundfläche ist abc = G, die parallelen Endkanten sind ad, bf, cg, die von d, f, g auf die Grundfläche gefällten Höhen sind L', L'', L''', der schiefe Schnitt dfg, schneidet die Grundfläche abc in der Kante k n l. Der prismatische Körper abcdfg = K besteht aus den Tetraedern dabc, dbcf, dcfg. Das Tetraeder dabc (VII. 18) ist $= \frac{1}{3} L'. G.$ Die Tetr. dabc, dbcf, haben in c eine gemeinschaftliche Spitze, und verhalten sich also (VII. 18) wie ihre Grundflächen, wie Δ dab : dbf = ad : bf = L' : L'', also Tetr. dbcf $= \frac{1}{3} L''. G.$ Die Tetraeder dbcf, dcfg, haben in d eine gemeinschaftliche Spitze, und verhalten sich also wie ihre Grundflächen, wie Δ bcf : cfg = bf : cg = L'' : L''', also Tetr. dcfg $= \frac{1}{3} L'''. G.$ Also ihre Summe $K = \frac{1}{3} (L' + L'' + L''').G.$

Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie = D, und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 mit c, so ist $G = c. D^2$, also $K = \frac{1}{3} c.(L' + L'' + L''').D^2.$ Halbirt man bc, ca, ab in o, p, q und fg, gd, df, in r, s, t, so sind die Linien or, ps, qt den

Seitenkanten ad, bf, cg, parallel, die Diagonallinien ao, bp, cq, schneiden einander in u, die Diagonallinien dr, fs, gt, schneiden einander in m. Die Punkte u, m, sind (V 13) die Schwerpunkte der Dreiecke abc, dfg und um den Seitenkanten ad, bf, cg, parallel. Also ist $bf + cg = 2\,or$; $2\,or + ad = 3.\,um$, also $ad + bf + cg = 3.\,um$, fällt man also von dem obern Schwerpunkt m auf die Grundfläche abc die senkrechte Höhe $mn = L$, so ist $3L = L' + L'' + L'''$, also ist $K = L.\,G$ oder $K = c.\,L.\,D^2$

Bezeichnet man die Schwerpunktslinie mu durch E und den Neigungswinkel der Seitenkanten ad, bf, cg, oder der Schwerpunktslinie E gegen die Grundfläche abc durch n, so ist $E.\,\sin n = L$, also $K = \sin n.\,E.\,G$ oder $K = c.\,\sin n.\,E.\,D^2$.

Wenn eine Ebene die Seitenkanten senkrecht durchschneidet, und der Inhalt des senkrechten Schnitts durch Q bezeichnet wird, so ist (VII. 15) $G.\,\sin n = Q$, also $K = E.\,Q$

Beispiele.

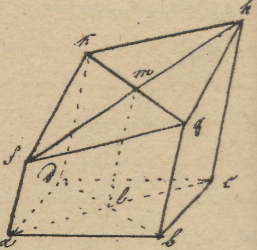
1) Die Grundfläche G = 36 □ Fuß, die Höhen $L' = 7'8''$, $L'' = 9'3''$; $L''' = 8'7''$

$L'+L''+L'''$	1,40654
G	1,74819
$\frac{1}{3}$	9,52288
K	2,67761 = 476 Cub.

2) Die Grundfläche G = 18½ □ Zoll, die Höhen $L' = 10''$, $L'' = 12''$, $L''' = 13''$.

$L'+L''+L'''$	1,54407
G	1,26717
$\frac{1}{3}$	9,52288
K	2,33412 = 215,83

21.



Der körperliche Inhalt eines schiefgeschnittenen Parallelepipedums ist gleich der Hälfte des Produkts der Gegenhöhen mit der Grundfläche, oder gleich dem Produkt der Höhe des obern Schwerpunkts mit der Grundfläche.

Die Grundfläche ist abcd = G, der schiefe Schnitt fghk ist ebenfalls ein Parallelogramm. Die Durchschnitte der Diagonallinien l, m, sind die Schwerpunkte dieser Parallelogramme, und lm den Seitenkanten af, bg, ch, dk, parallel. Also ist 2lm = af + ch = bg + dk. Also wenn man die Seitenkanten durch E, die Höhen durch L, den Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche durch n bezeichnet, so ist $2E = E' + E''' = E'' + E''''$ also $6.E = (E' + E'' + E''') + (E'' + E''' + E'''')$, $E. \sin n = L$, also auch $6.L = (L' + L'' + L''') + (L' + L''' + L'''')$. Aber (VII. 20) abc.fgh $= \frac{1}{6}(L' + L'' + L''').G$ und acdfhk $= \frac{1}{6}(L' + L''' + L'''').G$, also der körperliche Inhalt des ganzen schiefgeschnittenen Parallelepipedums $K = L.G = c.L.D^2 = c.\sin n.E.D^2$.

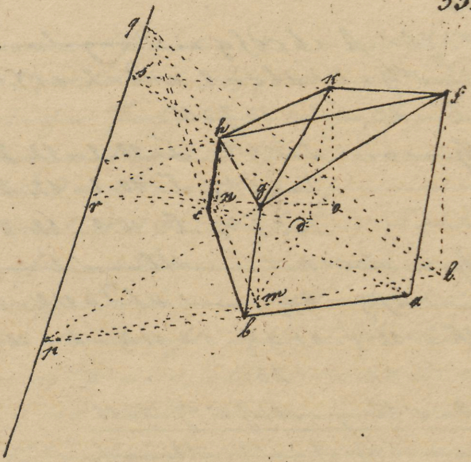
Beispiel. Die Grundfläche $G = 56\frac{1}{2}$ □ Fuß, $L' = 10\frac{1}{2}$ Fuß, $L'' = 12\frac{1}{2}$ Fuß, $L''' = 15\frac{1}{2}$ Fuß, also $L'''' = 13\frac{1}{2}$ Fuß, $L = 13$ Fuß.

L 1,11394
G 1,75205
K 2,86599 = 734,5 Cf.

22.

Bei einem schiefgeschnittenen Prisma aus den Höhen oder Seitenkanten dreier Punkte die Höhe der Seitenkante des vierten Punkts zu bestimmen.

Die Grundfläche ist abcd, der schiefe Schnitt fghk, der gemeinschaftlichen Kante pq, die Endkanten $af = E'$; $bg = E''$; $ch = E'''$, $dx = E''''$, ihre Neigung gegen die Grundfläche $= n$, die Höhen $fl = E'.\sin n. = L'$, $gm = E''.\sin n. = L''$, $hn = E'''.\sin n. = L'''$, $xo = E''''.\sin n. = L''''$.



der körperliche Inhalt des vierseitigen schief geschnittenen Prisma ist durch Addition der beiden dreiseitigen (VII 20)

$K = \frac{1}{3}(L' + L'' + L''').abc + \frac{1}{3}(L' + L''' + L'''').acd$

und $K = \frac{1}{3}(L'' + L''' + L'''')\,bcd + \frac{1}{3}(L'' + L'''' + L').bda$, also

$K = \frac{1}{3}(L' + L'' + L''' + L'''').abcd - \frac{1}{3}L''''.abc - \frac{1}{3}L''.acd$

und $K = \frac{1}{3}(L' + L'' + L''' L'''').abcd - \frac{1}{3}L'.bcd - \frac{1}{3}L'''.bda$.

Also $L''''.abc = L'.bcd - L''.acd + L'''.bda$

und $E''''.abc = E'.bcd - E''.acd + E'''.bda$.

Wenn also die Grundfläche und ihre Theile gegeben sind, so kann man aus drei Höhen $L'\,L''$, L''' die vierte L''''; und aus drei Endkanten E', E'', E''', die vierte E'''', finden. Die obige Gleichung heißt in der analytischen Geometrie die <u>Gleichung der Ebene.</u>

Beispiele.

1) Es ist $abcd = 18$, $abc = 6$, $acd = 12$, $bda = 10$, $bcd = 8$ □ Zoll, $L' = 10$, $L'' = 12$, $L''' = 13$ Zoll, so ist $L'''' = \frac{10.8 - 12.12 + 13.10}{6} = 11$ Zoll und hieraus $K = 206$ Cubikzoll.

2) Es ist abcdfg ein unregelmäßiges Sechseck, dessen Theile abc = 1, acd = 2, acf = 3 □ Zoll, $L' = 10$; $L'' = 12$, $L''' = 13$ Zoll.

Hieraus das 4te $L = 10.1 - 12.2 + 13.2 = 12$ Zoll

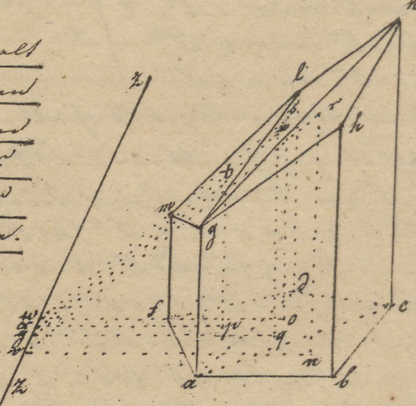
das 5te $L = 10.2 - 12.3 + 13.2 = 10$ Zoll

das 6te $L = 10.2 - 12.2 + 13.1 = 9$ Zoll

Hieraus die mittlere L von bcd = $12\frac{1}{3}$ Zoll, von afg = $9\frac{2}{3}$, von abd = $11\frac{2}{3}$, von afd = $10\frac{2}{3}$, also

$K = 12\frac{1}{3} \cdot 1 + 9\frac{2}{3} \cdot 1 + 11\frac{2}{3} \cdot 2 + 10\frac{2}{3} \cdot 2 = 66$ □ Zoll.

23.



Der körperliche Inhalt eines schief geschnittenen Prisma ist gleich dem Produkt der Höhe des oberen Schwerpunkts mit der Grundfläche.

Der senkrechte Durchschnitt des Prisma's, ihre Körper sey ein beliebiges Fünfeck abcdf, der schiefe Schnitt sey ghklm. Die Endkanten ag, bh, ck, dl, fm, sind auf der Ebene abcdf senkrecht, und bilden mit der Ebene des schiefen Schnitts ghklm den Neigungswinkel n, also ist der Winkel des schiefen und senkrechten Schnitts an ihrer gemeinschaftlichen Kante Zz, = R − n.

Durch Halbirung der Seiten ergeben sich in den Dreiecken abc, acd, adf, die Schwerpunkte (V. 13.) n, o, p, und in den Dreiecken ghk, gkl, glm, die Schwerpunkte r, s, t. Die Linien nr, os, pt, sind (VII. 20) den Endkanten ag, bh, u.s.w. parallel, also auch der Ebene abcdf senkrecht. Auch ist, (VII. 20.) der Inhalt der dreiseitigen schiefgeschnittenen Scheiben $abcghk = nr \cdot abc$, $acdgkl = os \cdot acd$, $adfglm = pt \cdot adf$, also der körperliche Inhalt des schiefgeschnittenen vielseitigen Scheiben $K = nr \cdot abc + os \cdot acd + pt \cdot adf$. Zieht man von den Puncten n, o, p, auf die Kante zz, die senkrechten Linien nv, ow, px, so sind auch (IV. 19) die Linien rv, sw, tx, auf der Kante zz senkrecht, also die Winkel $nrv = osw = ptx = n$, also $nr = nv \cdot \cot n$, $os = ow \cdot \cot n$, $pt = px \cdot \cot n$. Wenn man also die obige Gleichung durch $\cot n$ dividirt, oder mit $tg\, n$ multiplicirt, so ist $K \cdot tg\, n = nv \cdot abc + ow \cdot acd + px \cdot adf$.

Es sey nun q der Schwerpunct der ganzen Figur $abcdf$, und qy senkrecht auf die Kante zz gezogen, so wird die Lage dieses Schwerpuncts durch folgende zwei Gleichungen bestimmt

1) $qy \cdot abcdf = nv \cdot abc + ow \cdot acd + px \cdot adf$.

2) $zy \cdot abcdf = zv \cdot abc + zw \cdot acd + zx \cdot adf$.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$K \cdot tg\, n = qy \cdot abcdf$, also $K = \cot n \cdot qy \cdot abcdf$.

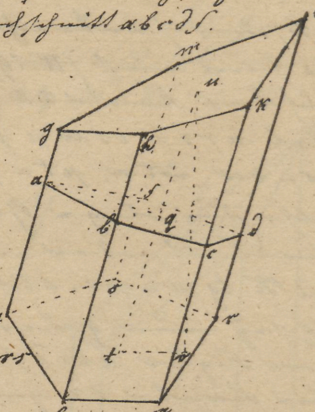
Errichtet man in q einen senkrechte Linie auf die Grundfläche so ist $\cot n \cdot qy = qu = L$, also $K = L \cdot abcdf$, d. h. der körperliche Inhalt ist gleich dem Product der im Schwerpunct der Grundfläche bis an die schiefe Ebene errichteten Höhe, mit der Grundfläche.

Es ist aber (VII. 15) $abc = ghk \cdot \sin n$, $acd = gkl \cdot \sin n$, $adf = glm \cdot \sin n$, $abcdf = ghklm \cdot \sin n$, ferner $nv = rv \cdot \sin n$, $ow = sw \cdot \sin n$, $px = tx \cdot \sin n$, $qy = uy \cdot \sin n$. Wenn man also jene Gleichungen zu beiden Seiten, die erste zwei Mal, die andern ein Mal mit $\sin n$ dividirt, so ergiebt sich:

$wy \cdot ghklm = rv \cdot ghk + sw \cdot gkl + tx \cdot glm$

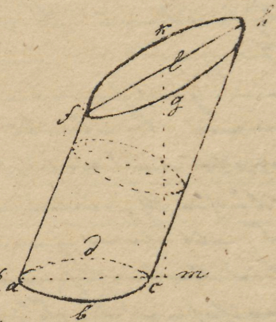
$zy \cdot ghklm = zv \cdot ghk + zw \cdot gkl + zx \cdot glm$

Dieses sind aber die Gleichungen des Schwerpunkts des schiefen Schnitts ghklm, also ist w dieser Schwerpunkt, also ist qw = L die Höhe des Schwerpunkts der schiefen Fläche ghklm über dem senkrechten Durchschnitt abcdf.



Es sey nun noprs die Grundfläche eines prismatischen Körpers, ghklm ein schiefer Schnitt, abcdf ein auf die Endkanten senkrechter Schnitt, q der Schwerpunkt desselben, und in q auf die Ebene abcdf eine senkrechte Linie bis an die Ebenen noprs, ghklm, errichtet, welche dieselben in den Punkten t, w, schneidet, so sind t, w, die Schwerpunkte der Flächen noprs, ghklm, und es ist der körperliche Inhalt von dem obern Stück = qw. abcdf, der körperliche Inhalt von dem untern Stück = qt. abcdf, also der Inhalt des zwischen den Flächen noprs, ghklm, enthaltenen Körpers K = tw. abcdf. Nimmt man zur Grundfläche das Vieleck noprs = G an, und setzt man den Winkel, welchen die Endkanten ng, ok u. s. w. mit der Grundfläche noprs bilden, = n, so ist (VII. 15) abcdf = G. sin n; also K = tw. sin n. G. Fället man von dem Schwerpunkt w der obern Fläche ghklm eine senkrechte Linie wv = L auf die Grundfläche, so ist tw. sin n = uv = L, also K = L. G. Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie = D und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist $G = c.\,D^2$ also $K = c.\,L.\,D^2$

24.



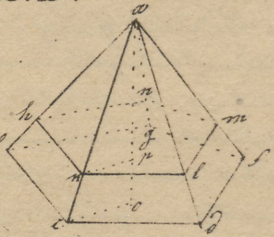
Der körperliche Inhalt eines schief geschnittenen Cylinders ist gleich dem Produkt der Höhe des obern Schwerpunkts mit der Grundfläche.

Die Grundfläche des Cylinders sey die krumme Linie abcd, der schiefe Schnitt sghk, der Schwerpunkt desselben l, die von diesem Schwerpunkt auf die Grundfläche gefällte senkrechte Linie oder Höhe $lm = L$, der Inhalt der Grundfläche abcd $= G$. Man beschreibt in und um die Grundfläche Vielecke deren Flächen G' und G'' seyen, so ist $G > G'$ und $G < G''$. Durch die Seiten des innern Vielecks legt man Ebenen, deren Endkanten in der Seitenfläche des Cylinders liegen, und in der krummen Linie des schiefen Schnitts sghk ein eingeschriebenes Vieleck bilden, dessen Schwerpunkt l' sey, die von demselben auf die Grundfläche gefällte Höhe $l'm' = L'$. Durch die Seiten des äußern Vielecks legt man Ebenen, welche die Seitenfläche des Cylinders berühren und und die krumme Linie des schiefen Schnitts sghk ein umschriebenes Vieleck bilden, dessen Schwerpunkt l'' sey, die von demselben auf die Grundfläche gefällte Höhe $l''m'' = L''$. Also ist (XII. 23) der körperliche Inhalt des eingeschriebenen

Prisma = $L'. G'$; das umschriebene Prisma = $L''. G''$ und der körperliche Inhalt des schief geschnittenen Cylinders $K > L'. G'$ und $K < L''. G''$. Je größer die Anzahl der Seiten des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks genommen wird, desto mehr nähern sich die Flächen G', G'', der Fläche G, und die Höhen L', L'', der Höhe L, als ihrer gemeinschaftlichen Grenze! die Unterschiede zwischen G', G'', und G, zwischen L', L'', und L, können kleiner als jede denkbare Größe werden. Folglich ist genau $K = L. G$.
Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie = D, und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist $K = c. L. D^2$.

25.

Die körperlichen Räume ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Cuben ihrer gleichnamigen Linien.



Wenn die Pyramide $abcdfg$ durch eine mit der Grundfläche $bcdfg$ parallele Ebene $hklmn$ geschnitten wird, so ist (IV 56) $abcdfg \sim ahklmn$. Fällt man von der Spitze a auf die parallelen Grundflächen $bcdfg = G$; $hklmn = G'$ die Höhen $ao = L$, $ap = L'$; so ist (VII 19) der körperliche Inhalt $abcdfg$ oder $K = \frac{1}{3} L. G$, $ahklmn$ oder $K' = \frac{1}{3} L'. G'$. Zieht man in den Grundflächen zwei beliebige gleichnamige oder parallel

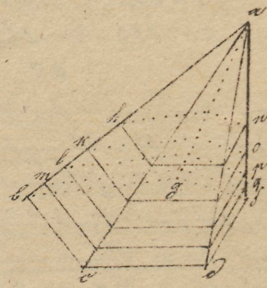
Linien, z. B. $bd = D$, $kl = D'$, und setzt man $G = c . D^2$; so ist auch $G' = c . D'^2$, also $K = \frac{1}{3} c . L . D^2$, $K' = \frac{1}{3} c . L' . D'^2$, und $L : L' = D : D'$, also $L . D^2 : L' . D'^2 = D^3 : D'^3$, also $K : K' = D^3 : D'^3$ oder $K : K' = L^3 : L'^3$.

26.

Die körperlichen Räume ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Cuben ihrer gleichnamigen Linien.

Aehnliche Polyeder bestehen (IV 57) aus ähnlichen auf ähnliche Art zusammengestellten Pyramiden. Sind also D, D' zwei gleichnamige oder parallele Linien der Polyeder, so verhalten sich (VII. 25) je zwei ähnliche Pyramiden wie $D^3 : D'^3$, also auch die körperlichen Räume der ganzen Polyeder $K : K' = D^3 : D'^3$.

27.



Eine Pyramide durch Ebenen, welche der Grundfläche parallel sind, in Theile von gleichem körperlichen Inhalt zu theilen.

Wenn die Ebene lp der Grundfläche $bcdfg$ parallel ist, so sind die Pyramiden alp, $abcdfg$. (IV 56) einander ähnlich, also verhalten sich (VII. 25) ihre körperlichen Räume wie $al^3 : ab^3$. Wenn sich also diese körperlichen Räume auch wie die Zahlen $m : n$ verhalten sollen, so muß $al^3 : ab^3 = m : n$, also $al : ab = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}$ seyn, oder $al = \sqrt[3]{\frac{m}{n}} . ab$. Soll also die Pyramide in n gleiche

Theile getheilt werden, so berechnet man (VII. 6.) die Cubikwurzeln der Brüche $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ u. s. w. und nimmt $ah = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} \cdot ab$, $ak = \sqrt[3]{\frac{2}{n}} \cdot ab$, $al = \sqrt[3]{\frac{3}{n}} \cdot ab$ u. s. w.

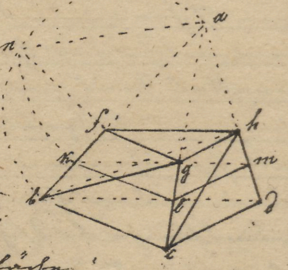
Wenn ein Polyeder in gleiche Theile zu theilen ist, so zerlegt man es durch Ebenen in Pyramiden, welche einen angenommenen Punct zur gemeinschaftlichen Spitze, und die Seitenflächen des Polyeders zu Grundflächen haben.

Beispiel.

Eine Pyramide, in welcher eine Kante $D = 36$ Zoll gemessen worden ist, in fünf gleiche Theile zu theilen, d. h. die der Linie D gleichnamigen Linien in den parallelen Abtheilungsebenen zu finden.

$\frac{1}{5}$	9,30103	$\frac{2}{5}$	9,60206	$\frac{3}{5}$	9,77815	$\frac{4}{5}$	9,90309
	9,76701		9,86735		9,92605		9,96770
D	1,55630	D	1,55630	D	1,55630	D	1,55630
	1,32331		1,42365		1,48235		1,52400
	21",053		26",525		30",363		33",419

28.



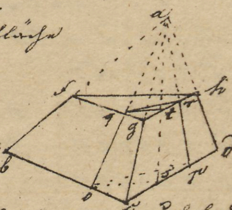
Der körperliche Inhalt eines parallel abgestumpften Tetraeders ist gleich dem dritten Theile des Products der Höhe mit der Summe der beiden parallelen Grundflächen und ihrer mittleren Proportionalfläche.

Das parallel abgestumpfte Tetraeder ist $bcdfgh$, die parallelen Grundflächen sind $\triangle bcd = A$, $\triangle fgh = C$, die Seitenkanten bf, cg, dh, treffen in a zusammen, die von einem Puncte der oberen Grundfläche fgh auf die untere Grundfläche gefällte Höhe ist L, der körperliche Inhalt des abgestumpften Tetraeders $bcdfgh$ ist K.

Erster Beweis.

Man zieht hb, hc, bg, so ist $K = hbcd + hbcg + hbfg$ (VII. 18) $hbcd = \frac{1}{3} L \cdot A$, $hbfg = \frac{1}{3} L \cdot C$. Die Tetraeder hbcd, hbcg, haben in h einen gemeinschaftlichen Spitze, und verhalten sich also (VII. 18) wie ihre Grundflächen, wie $\Delta\, bcd : bcg = cd : gh$. Die Tetraeder hbcg, hbfg, haben in h einen gemeinschaftlichen Spitze, und verhalten sich also wie ihre Grundflächen wie $\Delta\, bcg : bfg = bc : fg$. Aber $cd : gh = bc : fg$, also $hbcd : hbcg = hbcg : hbfg$. Setzt man $hbcg = \frac{1}{3} L \cdot B$, so ist $hbcd : hbcg = A : B$, $hbcg : hbfg = B : C$, also $A : B = B : C$. Nimmt man zwischen ab, af, die mittlere Proportionallinie $a\kappa$ (III. 59) so ist $ab : a\kappa = a\kappa : af$, $ab^2 : a\kappa^2 = a\kappa^2 : af^2$. Zieht man durch κ eine Ebene κlm mit bcd und fgh parallel, so ist $\Delta\, bcd : \kappa lm = bc^2 : \kappa l^2 = ab^2 : a\kappa^2$, $\Delta\, \kappa lm : fgh = \kappa l^2 : fg^2 = a\kappa^2 : af^2$, also $A : \kappa lm = \kappa lm : C$, also $\Delta\, \kappa lm = B$, und $K = \frac{1}{3} L \cdot (A + B + C)$

Zweiter Beweis.



Man ziehe in der untern Grundfläche eine beliebige Linie $op = D$, ziehe eine Ebene aop, welche die obere Grundfläche in $qr = d$ schneidet. Man setze $\Delta\, bcd = A = c \cdot D^2$; so ist $\Delta\, fgh = C = c \cdot d^2$. Man fälle von a auf bcd die Höhe $as = L'$, welche die Ebene fgh in t schneidet, $at = L''$, so ist das Tetraeder abcd oder $K' = \frac{1}{3} L' \cdot A = \frac{1}{3} c \cdot L' \cdot D^2$, das Tetraeder afgh oder $K'' = \frac{1}{3} L'' \cdot C = \frac{1}{3} c \cdot L'' \cdot d^2$. Die körperlichen Räume der ähnlichen Tetraeder verhalten sich (VII. 25) wie $K' : K'' = D^3 : d^3$, $K = K' - K''$, also $K' : K = D^3 : D^3 - d^3$, also $K = \frac{K'}{D^3}(D^3 - d^3)$, aber $\frac{K'}{D^3} = \frac{\frac{1}{3} c \cdot L'}{D}$, also ist

$K = \frac{1}{3} c. \frac{L'}{D} (D^3 - d^3)$. Aber $L' : L'' = D : d$, $L' - L'' = L$, also $L' : L = D : D - d$, also $\frac{L'}{D} = \frac{L}{D-d}$, also $K = \frac{1}{3} c. \frac{L}{D-d} . (D^3 - d^3)$. Aber (VII.4) $\frac{D^3 - d^3}{D - d} = D^2 + D.d + d^2$, also $K = \frac{1}{3} c. L (D^2 + D.d + d^2)$
Hier ist $c. D^2 = A$, $c. d^2 = C$, $c. D^2 : c. D. d = D : d$, $c. D. d : c. d^2 = D : d$, also $A : c. D. d = c. D. d : C$. Setzt man also $c. D. d = B$, so ist $A : B = B : C$.

Der dreitheilige Ausdruck $K = \frac{1}{3} c L (D^2 + D.d + d^2)$ läßt sich zur bequemern Berechnung in einen zweitheiligen Ausdruck verwandeln. Nämlich $(D + d)^2 = D^2 + 2 D. d + d^2$; $(D - d)^2 = D^2 - 2 D. d + d^2$ also $3(D + d)^2 + (D - d)^2 = 4 D^2 + 4 D. d + 4 d^2$
also $K = \frac{1}{4} c. L. (D + d)^2 + \frac{1}{12} c. L. (D - d)^2$

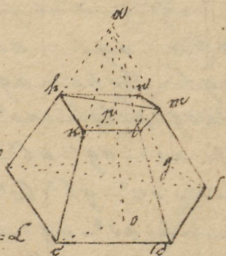
Beispiel

Die Grundflächen sind gleichseitige Dreiecke, die untere Randkante $D = 10' 3''$, die obere $d = 8' 5''$, (V.51) $c = 0,4330127$, die Höhe $L = 30' 7''$

L	2,56467	L	2,56467	I	1153,63
$D + d$	2,35025	$D - d$	1,34242	II	3,71
$D + d$	2,35025	$D - d$	1,34242	$K =$	1157,34 Kubf.
c	9,63650	c	9,63650		
$\frac{1}{4}$	9,39794	$\frac{1}{12}$	8,92082		
1728	6,76246	1728	6,76246		
I.	3,06207	II.	0,56929		

29.

Der körperliche Inhalt einer parallel abgestumpften Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Products der Höhe mit der Summe der beiden parallelen Grundflächen und ihrer mittlern Proportionalfläche.



Man wählt in den parallelen Grundflächen zwei beliebige gleichnamige parallele Linien $bf = D$, $hm = d$, und setzt $bcdfg$ oder $A = c.D^2$, so ist $hklmn$ oder $C = c.d^2$.
Man setzt die Höhe $ao = L'$, $ap = L''$, $op = L$
so ist (VII. 19) $abcdfg$ oder $K' = \frac{1}{3} c.L'.D^2$, $ahklmn$ oder
$K'' = \frac{1}{3} c.L''.d^2$, (VII. 25) $K' : K'' = D^3 : d^3$,
$K' - K'' = K$, also $K' : K = D^3 : D^3 - d^3$, also
$K = \frac{K'}{D^3}(D^3 - d^3) = \frac{1}{3} c.\frac{L'}{D}(D^3 - d^3) = \frac{1}{3} c.\frac{L}{D-d}(D^3 - d^3)$
also $K = \frac{1}{3} c.L(D^2 + D.d + d^2)$. Oder $K = \frac{1}{3} c L(A + B + C)$
wenn $A : B = B : C$. Oder $K = \frac{1}{4} c.L(D+d)^2 + \frac{1}{12} c.L(D-d)^2$

Beispiel.

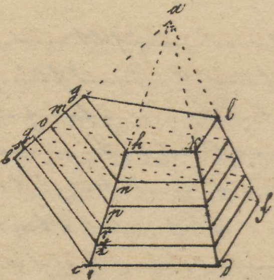
Die Grundflächen sind regelmäßige Achtecke, die Halbmesser der umschriebenen Kreise $D = 5$ Fuß, $d = 4\frac{1}{2}$ Fuß, also (VII. 51) $c = 2,8284$, die Höhe $L = 7\frac{1}{2}$ Fuß.

L	0,87506	L	0,87506	I	478,61
$D+d$	0,97772	$D-d$	9,69897	II	0,44
$D+d$	0,97772	$D-d$	9,69897	$K=$	479,05 Cubf.
c	0,45154	c	0,45154		
$\frac{1}{4}$	9,39794	$\frac{1}{12}$	8,92082		
I	2,67998	II	9,64536		

30.

Eine parallel abgestumpfte Pyramide durch Ebenen, welche den Grundflächen parallel sind, in Theile von gleichem körperlichen Inhalt zu theilen.

Es soll z. B. $ghop : ghbc = m : n$ seyn. Es ist aber (VII. 25) $agh : aop = ag^3 : ao^3 = gh^3 : op^3$.
$agh : abc = ag^3 : ab^3 = gh^3 : bc^3$.



Hieraus folgt:

$oghp : agh = ao^3 - ag^3 : ag^3$

$agh : bghc = ag^3 : ab^3 - ag^3$

also $oghp : bghc = ao^3 - ag^3 : ab^3 - ag^3$

also $ao^3 - ag^3 : ab^3 - ag^3 = m : n$

ebenso $op^3 - gh^3 : bc^3 - gh^3 = m : n$

hieraus $ao^3 - ag^3 = (ab^3 - ag^3) \cdot \frac{m}{n}$

$$op^3 - gh^3 = (bc^3 - gh^3) \cdot \frac{m}{n}$$

also $ao^3 = ab^3 \cdot \frac{m}{n} + ag^3\left(1 - \frac{m}{n}\right)$, $op^3 = bc^3 \cdot \frac{m}{n} + gh^3\left(1 - \frac{m}{n}\right)$

Bei der Berechnung läßt sich mit Vortheil die Aufgabe anwenden (II. Aufg. 71): aus den Logarithmen zweier Zahlen den Logarithmus ihrer Summe zu finden.

Beispiel.

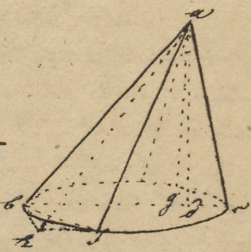
$bc = 80$, $gh = 30$, $bg = 100$, also $ab = 160$, $ag = 60$; die Zahl der Theile $n = 5$, also die Theilungsbrüche 0,2; 0,4; 0,6; 0,8.

ag^3	5,33445	ag^3	5,33445	ag^3	5,33445	ag^3	5,33445
0,8	9,90309	0,6	9,77815	0,4	9,60206	0,2	9,30103
ab^3	6,61236	ab^3	6,61236	ab^3	6,61236	ab^3	6,61236
0,2	9,30103	0,4	9,60206	0,6	9,77815	0,8	9,90309
	5,23764		5,11260		4,93651		4,63548
	5,91339		6,21442		6,39051		6,51545
tg^2x	9,32415	tg^2x	8,89818	tg^2x	8,54600	tg^2x	8,12003
$tg\,x$	9,66207	$tg\,x$	9,44909	$tg\,x$	9,27300	$tg\,x$	9,06002
$\cos^2 x$	9,95844	$\cos x$	9,98347	$\cos x$	9,99250	$\cos x$	9,99716
$\cos x$	9,91688	$\cos^2 x$	9,96694	$\cos^2 x$	9,98500	$\cos^2 x$	9,99432
am^3	5,99651	ao^3	6,24748	aq^3	6,40551	as^3	6,52113
am	1,99884	ao	2,08249	aq	2,13517	as	2,17371
gh	1,47712	gh	1,47712	gh	1,47712	gh	1,47712
ag	1,77815	ag	1,77815	ag	1,77815	ag	1,77815
mn	1,69781	op	1,78146	qr	1,83414	st	1,87268
$am =$	99,73	$ao =$	120,92	$aq =$	136,51	$as =$	149,18
$mn =$	49,866	$op =$	60,458	$qr =$	68,256	$st =$	74,590
$mo =$	21,19	$oq =$	15,59	$qs =$	12,67	$sb =$	10,82
$gm =$	39,73						

Und die Probe zu machen, ob die abgestumpften Pyramiden gmnh, mopn u. s. w.

einander gleich, und der fünfte Theil von $g\,b\,c\,k$ sind, berechnet man ihren Inhalt nach VII. 29, indem man statt der Höhen, die denselben proportionirten Abschnitte $g\,m$, $m\,o$, u. s. w. setzt.

31.



<u>Der körperliche Inhalt eines Kegels ist gleich dem dritten Theile des Products der Höhe mit der Grundfläche.</u>

Die Grundfläche des Kegels (IV. 60) sey eine beliebige krumme Linie $b\,f\,c$, die Höhe $a\,d = L$ senkrecht auf die Ebene der Grundfläche gezogen, der Inhalt der Grundfläche $b\,f\,c = G$. Man beschreibe in und um die Grundfläche ein Vieleck; $b\,f$ sey eine Seite des eingeschriebenen Vielecks; $b\,k$, $f\,k$, Theile der Umfangslinie des umschriebenen Vielecks. Durch die Seiten des eingeschriebenen Vielecks und die Spitze a, lege man Ebenen, so sind sie die Endflächen einer dem Kegel eingeschriebenen Pyramide, deren Endkanten in der Seitenfläche des Kegels liegen. Durch die Seiten des umschriebenen Vielecks und die Spitze a lege man Ebenen, so sind sie die Endflächen einer dem Kegel umschriebenen Pyramide, und berühren die Seitenflächen derselben in geraden Linien welche durch die Spitze a gehen. Wird nun der Inhalt des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks durch G', G'', bezeichnet, so ist der körperliche Inhalt der innern Pyramide (VII. 19) $= \frac{1}{3}\,L.\,G'$, der der äußeren

Pyramide $= \frac{1}{3} L. G''$. Also ist der körperliche Inhalt des Kegels $K > \frac{1}{3} L. G'$ und $< \frac{1}{3} L. G''$. Je kleiner aber die Seiten der Vielecke genommen werden, desto mehr nähern sich die Pyramiden in Rücksicht des körperlichen Inhalts dem Kegel, desto kleiner werden also die Unterschiede $K - \frac{1}{3} L. G'$ und $\frac{1}{3} L. G'' - K$. Zugleich ist auch $G > G'$ und $G < G''$, und die Unterschiede $G - G'$, $G'' - G$, werden desto kleiner, je kleiner die Seiten der Vielecke genommen werden. Da $K > \frac{1}{3} L. G - \frac{1}{3} L (G - G')$, und $K < \frac{1}{3} L. G + \frac{1}{3} L (G'' - G)$, der zweite Theil aber kleiner als jede denkbare Größe werden kann, so muß genau $K = \frac{1}{3} L. G$ seyn.

Zieht man in der Grundfläche eine beliebige Linie $= D$ und bezeichnet man das Verhältniß der Grundfläche zu D^2 durch c, so ist die Grundfläche $G = c. D^2$, also $K = \frac{1}{3} c. L. D^2$.

Wenn die Grundfläche ein Kreis ist, dessen Durchmesser $= D$, Umfang $= P$, so ist (V. 58)

$$K = \tfrac{1}{12}\pi L. D^2 \text{ oder } K = \tfrac{1}{12\pi} L. P^2$$

Wenn die Grundfläche eine Ellipse ist, deren Axen D, d, sind, so ist (V. 67)

$$K = \tfrac{1}{12}\pi L. D. d = \tfrac{1}{48}\pi L (D+d)^2 - \tfrac{1}{48}\pi L. (D-d)^2$$

d. h. der elliptische Kegel kann als der Unterschied zweier Kreiskegel betrachtet werden. Bei einem gleichseitigen Kegel (IV. 61.) ist die Grundfläche immer ein Kreis, die Seitenlinie $= E$

ist gegen die Grundfläche unter dem Winkel n geneigt. Wird also der Durchmesser des Kreises $= D$, Umfang $= P$, so ist beim gleichseitigen Kegel:

$$tg\, n = \frac{2L}{D} = \frac{2\pi L}{P}, \quad E.\sin n = L$$

(IV. 61) die Seitenfläche $A = \frac{1}{2} E.P = \frac{1}{2}\pi E.D$

die ganze Oberfläche $F = \frac{1}{4}\pi.D.(2E + D)$

der körperliche Inhalt $K = \frac{1}{12}\pi L.D^2 = \frac{1}{12\pi} L.P^2$

Beispiele.

1) Bei einem schiefen Kreiskegel ist die Höhe $L = 15'$, der Durchmesser $D = 14.'$

L	1,17609
D	1,14613
D	1,14613
$\frac{1}{12}\pi$	9,41797
K	2,88632 = 769,69 Cbf.

2) Bei einem schiefen Kreiskegel ist die Höhe $L = 15'$ Umfang der Grundfläche $P = 42'$

L	1,17609
P	1,62325
P	1,62325
$\frac{1}{12\pi}$	8,42367
K	2,84626 = 701,87 Cbf.

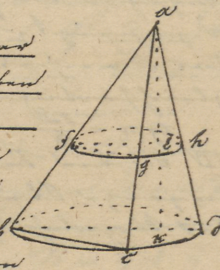
3) Bei einem senkrechten Kreiskegel ist der Durchmesser der Grundfläche $D = 8'$, die Höhe $L = 3'$

L	0,47712	L	0,47712	E	0,69897
D	0,90309	2	0,30103	D	0,90309
D	0,90309	D	0,90309	$\frac{1}{2}\pi$	0,19612
$\frac{\pi}{12}$	9,41797	$tg\, n$	9,87506	A	1,79818 = 62,832 □ Fuß
K	1,70127	$\sin n$	9,77815	D^2	1,80618
$K =$ 50,265 Cbf.		E	0,69897	$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
				G	1,70127 = 50,265 □ Fuß
					$F =$ 113,097 □ Fuß

4) Bei einem senkrechten Kreiskegel ist $P = 64'6''$, $L = 8'7''$

L	0,93366	L	0,93366	E	1,12649
P	1,80956	2	0,30103	P	1,80956
P	1,80956	π	0,49715	$\frac{1}{2}$	9,69897
$\frac{1}{12\pi}$	8,42367	P	1,80956	A	2,63502 = 431,54 □ Fuß
K	2,97645	$tg\, n$	9,92228	P^2	3,61912
$K =$ 947,22 Cbf.		$\sin n$	9,80717	$\frac{1}{4\pi}$	8,90078
		E	1,12649	G	2,51990 = 331,05
					$F =$ 762,59 □ Fuß

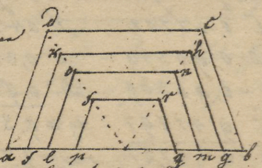
32.



Die körperlichen Räume ähnlicher Kegel verhalten sich wie die Cuben ihrer gleichnamigen Linien.

Wenn der Kegel $abcd$ durch eine mit der Grundfläche bcd parallele Ebene fgh geschnitten wird, so ist (IV 64) $abcd \sim afgh$. Fällt man von der Spitze a auf die parallelen Grundflächen $bcd = G$, $fgh = G'$, die Höhen $ak = L$, $al = L'$, so ist (VII. 31) der körperliche Inhalt $abcd$ oder $K = \frac{1}{3} L \cdot G$, $afgh$ oder $K' = \frac{1}{3} L' \cdot G'$. Zieht man in den Grundflächen zwei beliebige gleichnamige oder parallele Linien z. B. $bc = D$, $fg = D'$ und setzt man $G = c \cdot D^2$, so ist auch $G' = c \cdot D'^2$ also $K = \frac{1}{3} c \cdot L \cdot D^2$, $K' = \frac{1}{3} c \cdot L' \cdot D'^2$, $L : L' = D : D'$, also $L \cdot D^2 : L' \cdot D'^2 = D^3 : D'^3$, also $K : K' = D^3 : D'^3$ oder $K : K' = L^3 : L'^3$.

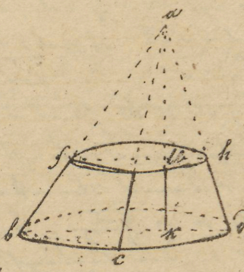
Beispiel.



Ein Einsatzgewicht von einem Pfunde $abcd$, in Form eines abgestumpften Kegels soll in einzelne Gewichtstheile so getheilt werden, daß die vollen Stücke $fghk$, $lmno$, $pqrs$, u. s. w. dem ganzen Stück $abcd$ ähnlich sind, die Verhältnisse der gleichnamigen Linien sind also

für 32 Loth	. . . .			$= 1$
— 16	—	$\sqrt[3]{\frac{16}{32}}$	$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$= 0{,}79370$
— 8	—	$\sqrt[3]{\frac{8}{32}}$	$= \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	$= 0{,}62996$
— 4	—	$\sqrt[3]{\frac{4}{32}}$	$= \frac{1}{2}$	$= 0{,}5$
— 2	—	$\sqrt[3]{\frac{2}{32}}$	$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$= 0{,}39685$
— 1	—	$\sqrt[3]{\frac{1}{32}}$	$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	$= 0{,}31498$
$\frac{1}{2}$	—	$\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$	$= \frac{1}{4}$	$= 0{,}25$
$\frac{1}{4}$	—	$\sqrt[3]{\frac{1}{128}}$	$= \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$= 0{,}19842$

33.



<u>Der körperliche Inhalt eines parallel abgestumpften Kegels ist gleich dem dritten Theile des Products der Höhe mit der Summe der beiden parallelen Grundflächen und ihrer mittleren Proportionalfläche.</u>

Man wählt in den parallelen Grundflächen bcd, fgh, zwei beliebige gleichnamige parallele Linien $bc = D$, $fg = d$, und setzt die Grundfläche bcd oder $A = c.\,D^2$, so ist (IV. 62. 64.) die Grundfläche fgh oder $C = c.\,d^2$. Man setzt die Höhe $ak = L'$, $al = L''$, $lk = L$, so ist (VII. 31.) der Inhalt des Kegels $abcd$ oder $K' = \frac{1}{3} c.\,L'.\,D^2$ $afgh$ oder $K'' = \frac{1}{3} c.\,L''.\,d^2$, (VII. 32.) $K' : K'' = D^3 : d^3$ der Inhalt des abgestumpften Kegels $bcdfgh$ oder $K = K' - K''$, also $K' : K = D^3 : D^3 - d^3$, also $K = \frac{K'}{D^3}(D^3 - d^3) = \frac{1}{3} c.\,\frac{L'}{D}(D^3 - d^3)$.

Aber (VII. 4.) $D^3 - d^3 = (D-d)(D^2 + D.\,d + d^2)$ also $K = \frac{1}{3} c.\,\frac{L'(D-d)}{D}(D^2 + D.\,d + d^2)$. Aber $L' : L'' = D : d$, $L' - L'' = L$, also $L' : L = D : D - d$ also $K = \frac{1}{3} c.\,L(D^2 + D.\,d + d^2)$.

Setzt man $A : B = B : C$ so ist $c.\,D^2 : B = B : c.\,d^2$ also $B = c.\,D.\,d$, also $K = \frac{1}{3} L.\,(A + B + C)$.

Der dreitheiligen Ausdruck läßt sich zur bequemeren Berechnung in einen zweitheiligen verwandeln. $(D+d)^2 = D^2 + 2D.\,d + d^2$, $(D-d)^2 = D^2 - 2D.\,d + d^2$, $3(D+d)^2 + (D-d)^2 = 4D^2 + 4D.\,d + 4d^2$. Also

$$K = \frac{1}{4} c\,L.\,(D+d)^2 + \frac{1}{12} c\,L(D-d)^2.$$

Wenn die Grundflächen Kreise sind, deren Durchmesser $= D$, und d, Umfänge $= P$ und p, so ist $K = \frac{1}{16}\pi L (D+d)^2 + \frac{1}{48}\pi L (D-d)^2$

oder $K = \frac{1}{16\pi} L (P+p)^2 + \frac{1}{48\pi} L (P-p)^2$

Bei einem parallelabgestumpften gleichseitigen Kegel (IV. 63) sind die Grundflächen zwei Kreise, die Seitenlinie $= E$ ist gegen die Grundflächen unter dem Winkel w geneigt, also ist hier

$tg\, w = \frac{2L}{D-d}$, $E . \sin w = L$, $E . \cos w = \frac{1}{2}(D-d)$.

(IV. 63) die Seitenfläche $A = \frac{1}{2} E (P+p) = \frac{1}{2}\pi E (D+d)$

Beispiele.

1) Bei einem runden Gefäße ist die Höhe $L = 36$ Zoll, die innere Weite oben $d = 18''$, unten $D = 22''$.

L	1,55630	L	1,55630	L	1,55630	E	1,55697
$D+d$	1,60206	$D-d$	0,60206	2	0,30103	$D+d$	1,60206
$D+d$	1,60206	$D-d$	0,60206	$D-d$	0,60206	$\frac{1}{2}\pi$	0,19612
$\frac{1}{16}\pi$	9,29303	$\frac{1}{48}\pi$	8,81591	$tg\, w$	1,25527	A	3,35515
I	4,05345	II	1,57633	$\sin w$	9,99933	$A =$	2265,40 Zoll
				E	1,55697		

I = 11309,7
II = 37,7
K = 11347,4 Cubikzoll

2) Bei einem runden Gefäße ist die Höhe $L = 36''$ der innere Umfang oben $p = 54''$, unten $P = 66''$.

L	1,55630	L	1,55630	L	1,55630	E	1,55691
$P+p$	2,07918	$P-p$	1,07918	2π	0,79818	$P+p$	2,07918
$P+p$	2,07918	$P-p$	1,07918	$P-p$	1,07918	$\frac{1}{2}$	9,69897
$\frac{1}{16\pi}$	8,29873	$\frac{1}{48\pi}$	7,82161	$tg\, w$	1,27530	A	3,33506
I	4,01339	II	1,53627	$\sin w$	9,99939	$A =$	2163 □ Zoll
				E	1,55691		

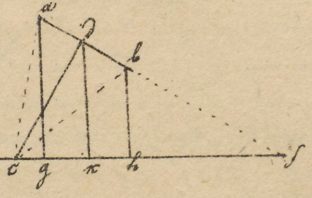
I = 10313,2
II = 34,4
K = 10347,6 Cubikzoll

34.

Die durch die Umdrehung einer geraden Linie um eine Axe beschriebene Kegelfläche ist an Inhalt gleich dem Produkt der beschreibenden Linie mit dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser der Abstand der Mitte der beschreibenden

Linie von der Axe ist.

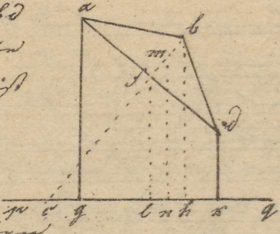
Oder gleich dem Product der Höhe der Zone mit dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser die in der Mitte der beschreibenden Linie senkrecht auf dieselbe bis an die Axe gezogene Linie ist.



Die Linie ab drehe sich um die Axe cf. Fällt man von a, b, d, senkrechte Linien ag, bh, dk, auf die Axe, so beschreiben bei dieser Umdrehung die Punkte a, b, d, Kreise, deren Halbmesser ag, bh, dk, sind. Der Punkt d ist die Mitte von ab. Der Abstand gh heißt die Projection von ab, oder die Höhe der Zone. Die von fa, fb, beschriebenen Kegelflächen sind (IV. 61. VII. 31) $\pi . ag . af$, $\pi . bh . bf$, also die von ab beschriebene Kegelfläche $A = \pi (ag . af - bh . bf)$. Aber $ag = af . \frac{dk}{df}$ $bh = bf \frac{dk}{df}$, also $A = \pi \frac{dk}{df} (af^2 - bf^2)$. Aber $af^2 - bf^2 = (af + bf)(af - bf) = 2 df . ab$, also $A = 2\pi dk . ab$. Zieht man dc senkrecht auf ab, so ist $\frac{dk}{cd} = \frac{gh}{ab}$, also $A = 2\pi cd . gh$

35.

Die durch die Umdrehung eines gleichschenkligen Dreiecks um eine Axe, von den Schenkeln desselben beschriebene Kegelfläche ist an Inhalt gleich dem Product der Höhe der Zone mit dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser größer als die von der Mitte des Dreiecks senkrecht auf die Grundlinie, bis an die Axe gezogene Linie ist, und zwar im Verhältniß des Schenkels zur halben Grundlinie.



Das gleichschenklige Dreieck abd dreht sich um die Axe pq. Die Grundlinie ad des Dreiecks ist in f halbirt, die Höhe bf in m halbirt, und bis zur Axe pq in c verlängert. Die Punkte a, b, d, f, m beschreiben bei der Umdrehung Kreise, deren Halbmesser die auf die Axe senkrecht gezogenen Linien ag, bh, dk, fl, mn, sind. Die von ab, bd, beschriebene Kugelfläche ist (VII. 34)

$A = \pi . ab(ag + bh) + \pi\, bd\,(bh + dk)$.

Da ab = bd ist, so ist $A = \pi\, ab(ag + 2bh + dk)$

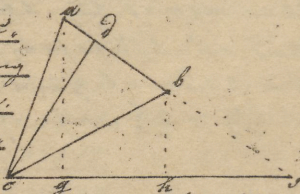
oder $A = 2\pi\, ab\,(fl + bh) = 4\pi\, ab . mn$.

Aber $\frac{mn}{mc} = \frac{gk}{ad} = \frac{gk}{2af}$, also $A = 2\pi . mc . gk . \frac{ab}{af}$

Also $A : 2\pi . mc . gk = ab : af$.

Die Linie gk heißt die Höhe der Zone, oder die Projection der Grundlinie ad auf die Axe.

36.



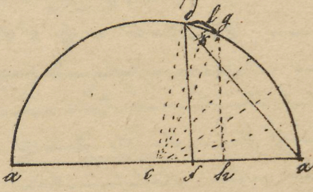
Der körperliche Inhalt des Sectors, welcher durch Umdrehung eines Dreiecks um eine Axe, in welcher die Spitze des Dreiecks liegt, beschrieben wird, ist gleich dem dritten Theile des Products der Höhe des Dreiecks mit der von der Gegenseite beschriebenen Kugelfläche.

Das Dreieck abc dreht sich um die Axe cf, die Gegenseite des Dreiecks ist ab, die Höhe cd, die Linien ag, bh, sind senkrecht auf cf. Der vom Δ caf beschriebene Körper ist (VII. 31) $= \frac{1}{3}\pi . ag^2 . cg + \frac{1}{3}\pi . ag^2 . fg = \frac{1}{3}\pi . ag^2 . cf$. der vom Δ cbf beschriebene Körper ist $= \frac{1}{3}\pi . bh^2 . ch + \frac{1}{3}\pi\, bh^2 . fh = \frac{1}{3}\pi . bh^2 . cf$.

Also der vom Δ abc beschriebene Körper

nen Inhalt $K = \frac{1}{3}\pi . ag^2 . cf - \frac{1}{3}\pi . bh^2 . cf$.
Aber $\frac{ag}{cd} = \frac{af}{cf}$, $\frac{bh}{cd} = \frac{bf}{cf}$
Also $K = \frac{1}{3} cd . (\pi . ag . af - \pi . bh . bf)$
Hier ist (VII. 34) $\pi . ag . af - \pi . bh . bf$, die von ab beschriebene Kugelfläche.

37.



Die Seitenfläche eines Kugelsegments ist gleich dem Produkt der Höhe des Segments mit dem Umfange der Kugel.

Der körperliche Inhalt eines Kugelsectors ist gleich dem dritten Theile des Produkts des Halbmessers der Kugel mit der Seitenfläche des Segments.

Der Halbkreis ada beschreibt durch Umdrehung um die Axe aa eine Kugel (IV. 67) deren Halbmesser $cd = ca = r$. Man fälle df senkrecht auf aa, so beschreibt der Bogen ad die Seitenfläche eines Kugelsegments, dessen Höhe $af = h$ ist, und dessen Grundfläche ein Kreis vom Halbmesser df ist. Der Kreissector cda beschreibt einen Kugelsector, dessen Grundfläche die Seitenfläche jenes Kugelsegments ist. Man beschreibe in und um den Bogen ad die Seiten eines regelmäßigen Vielecks. Es sey dg eine Seite des eingeschriebenen Vielecks, gh senkrecht auf die Axe gezogen, die berührenden Linien $dl = gl$, die halben Seiten des umschriebenen Vielecks, also ckl senkrecht auf dg. Bei der Umdrehung um die Axe beschreiben die geraden Linien dg, dl, lg, Kegelflächen, und die Dreiecke Dcg, Dcl, gcl, beschreiben Sektoren. Setzt man $cK = r'$; $\frac{1}{2}(cK + cl)\frac{dl}{dx} = r''$, so ist die von Dg beschriebene Kegelfläche (VII. 34) $= 2\pi . r' . fk$, die von Dl, lg beschriebene Kegelfläche (VII. 35) $= 2\pi . r'' . fk$, der vom $\triangle Dcg$ beschriebene Sektor (VII. 36) $= \frac{2}{3}\pi . r . r' . fk$, der vom Viereck $Dclg$ beschriebene Sektor $= \frac{2}{3}\pi r . r'' . fk$. Da alle Seiten des eingeschriebenen Vielecks, so wie alle Seiten des umschriebenen Vielecks gleich sind, so sind in den obigen Ausdrücken alle Abschnitte fk mit denselben Faktoren multiplicirt, die Summe dieser Abschnitte von a bis f, ist $af = L$. Wenn also die Seitenfläche des Kugelsegments $= A$, der körperliche Inhalt des Kugelsektors $= K$, so ist:

$$A > 2\pi . r' . L, \quad A < 2\pi . r'' . L$$
$$K > \tfrac{2}{3}\pi . r . r' . L, \quad K < \tfrac{2}{3}\pi . r . r'' . L$$

Oder:

$$A > 2\pi r L - 2\pi(r - r')L, \quad A < 2\pi r L + 2\pi(r'' - r)L,$$
$$K > \tfrac{2}{3}\pi r^2 L - \tfrac{2}{3}\pi(r^2 - r'^2)L, \quad K < \tfrac{2}{3}\pi r^2 L + \tfrac{2}{3}\pi r(r'' - r)L$$

Je größer man die Anzahl der Seiten des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks nimmt desto mehr nähern sich die Linien r'; r'', dem Halbmesser als ihrer gemeinschaftlichen Grenze. In den obigen Ausdrücken können also die Unterschiede $r - r'$; $r^2 - r'^2$, $r'' - r$, kleiner als jede denkbare Größe werden, folglich ist genau

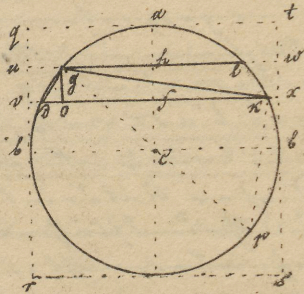
$A = 2\pi r . L$, $K = \frac{2}{3}\pi r^2 . L = \frac{1}{3} r . A$

Hier ist $2\pi . r = P$ der Umfang der Kugel, also $A = P . L$

Setzt man die Seitenlinie des Segments $ad = E$, ihren Neigungswinkel gegen die Grundfläche $\angle adf = n$, den Durchmesser der Grundfläche $2df = D$, so ist der halbe Centralwinkel $acd = 2n$, der ganze Centralwinkel $m = 2acd = 4n$, und es ist $\frac{2L}{D} = tg\, n$, $E = \frac{L}{\sin n} = \frac{D}{2\cos n}$, $L = 2r.\sin^2 n$

Also die Seitenfläche des Segments:
$A = 4\pi r^2.\sin^2 n = 4\pi r^2.\sin^2 \frac{1}{4} m$
$A = \pi.E^2 = \pi.L^2 + \frac{1}{4}\pi.D^2 = \frac{1}{2}\pi.E.\frac{D}{\cos n}$

Der körperliche Inhalt des Kugelsectors:
$K = \frac{4}{3}\pi.r^3.\sin^2\frac{1}{4} m$



38.

Die Seitenfläche einer von zwei Parallelkreisen begrenzten Kugelzone ist gleich dem Produkt der Höhe der Zone mit dem Umfang der Kugel.

Der Umfang der Kugel sei $P = 2\pi.r$, so ist (XII. 37) die Seitenfläche des Segments $gal = P.ah$, des Segments $dax = P.af$. Wenn also $gl \parallel dx$, $fh = go = L$ die Höhe der Zone ist, so ist ihre Seitenfläche $A = P.L$ oder $A = 2\pi.rL$.

Da $\triangle gdo \sim grx$, so ist $\frac{go}{dg} = \frac{gx}{gr}$, also $gr.go = dg.gx$. Setzt man also die Seitenlinien der Zone $dg = E$, $gx = E'$, so ist die Seitenfläche $A = \pi.E.E'$

Setzt man die Durchmesser der Grundflächen der Kugelzone $dx = D$, $gl = d$, die Neigungsw.

Winkel der Seitenlinien gegen die Grundfläche gdx = n, gxd = n'; so ist $\frac{2L}{D-d} = tg\,n$,
$\frac{2L}{D+d} = tg\,n'$, $E = \frac{L}{\sin n} = \frac{D-d}{2\cos n}$,
$E' = \frac{L}{\sin n'} = \frac{D+d}{2\cos n'}$, $A = \frac{1}{2}\pi . E . \frac{D+d}{\cos n'}$

Wenn man um die Kugel einen gleichseitigen Cylinder qrst beschreibt, so schneiden die Ebenen der Grundflächen oder Parallelkreise auf der Seitenfläche dieses Cylinders eine Zone ab, deren Seitenfläche derjenigen der Kugelzone gleich ist. Parallelkreise, welche die Axe der Kugel in gleiche oder proportionirte Theile theilen, theilen auch die Oberfläche der Kugel in gleiche oder proportionirte Theile.

Setzt man die Mittelpunktswinkel dcx = M, gcd = m, so ist $dg = E = 2r.\sin\frac{1}{4}(M-m)$,
$gx = E' = 2r.\sin\frac{1}{4}(M+m)$ also $A =$
$4\pi r^2.\sin\frac{1}{4}(M+m).\sin\frac{1}{4}(M-m)$

Dieser Ausdruck bleibt immer gültig, die Grundflächen der Zone mögen parallel seyn oder nicht.

Beispiele

1) Die Höhe der Kugelzone ist L = 15 Zoll, die Durchmesser der Grundflächen sind D = 14 Zoll, d = 8 Zoll, wie groß die Seitenfläche A?

lL	1,17609	L	1,17609
2	0,30103	½(D+d)	1,04139
D−d	0,77815	tg n'	0,13470
tg n	0,69897	cos n'	9,77185
sin n	9,99148	E'	1,26954
E	1,18461		
E'	1,26954		
π	0,49715		
A	2,95130 = 893,92 □ Zoll		

2) Die scheinbare Schiefe der Ekliptik ist im Jahr 1841, 23°27'; 7 = ε, wie verhält sich die kalte, gemäßigte und halbe heiße Zone zur Halbkugel

oder die beiden kalten, die beiden gemäßigten, und die ganze heiße Zone zur Oberfläche der ganzen Erdkugel?

Für die kalte Zone ist (VII. 37) $m = 2\varepsilon$, also die beiden kalten $= 4\pi r^2.\ 2\sin^2 \frac{1}{2}\varepsilon$. Für die gemäßigte Zone ist $M = 2R - 2\varepsilon$, $m = 2\varepsilon$, also die beiden gemäßigten $= 4\pi r^2.\ 2 \sin \frac{1}{2} R . \sin(\frac{1}{2}R - \varepsilon)$. Für die halbe heiße Zone ist $M = 2R$, $m = 2R - 2\varepsilon$, also die ganze heiße Zone $= 4\pi r^2\ 2\sin(R - \frac{1}{2}\varepsilon)\sin\frac{1}{2}\varepsilon = 4\pi r^2 \sin\varepsilon$

2	0,30103	2	0,30103	2	0,30103	I kalte.	0,08266
$\frac{1}{2}\varepsilon$	9,30817	$\frac{1}{2}R$	9,84949	$R-\frac{1}{2}\varepsilon$	9,99083	II gem.	0,51921
$\frac{1}{2}\varepsilon$	9,30817	$\frac{1}{2}R-\varepsilon$	9,56482	$\frac{1}{2}\varepsilon$	9,30817	III heiße	0,39813
I	8,91737	II	9,71534	III	9,60003		1,00000

39.

<u>Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Produkt ihres Durchmessers mit dem Umfange, ihr körperlicher Inhalt gleich dem dritten Theile des Produkts ihres Halbmessers mit ihrer Oberfläche.</u>

Dieser Satz folgt unmittelbar aus VII. 37., indem man, die Höhe des Segments dem Durchmesser gleich setzt, wodurch sich die Seitenfläche des Segments in die Oberfläche der Kugel, der körperliche Inhalt des Kugelsectors in den der Kugel verwandelt. Demnach ist die Oberfläche einer Kugel 4mal so groß als ihr größter Kreis, oder gleich einem Kreise, dessen Halbmesser der Durchmesser der Kugel ist. Ihr Inhalt ist gleich dem eines auf dieser Grundfläche ruhenden Kegels, dessen Höhe der Halbmesser der Kugel ist. Auch ist die Oberfläche der Kugel, gleich der Seitenfläche des umschriebenen gleichseitigen Cylinders, und der

Inhalt der Kugel $\frac{2}{3}$ des Inhalts dieses Cylinders.

Die Oberfläche der Halbkugel ist doppelt so groß als ihre Grundfläche, der körperliche Inhalt derselben $\frac{2}{3}$ des Produktes der Höhe mit der Grundfläche.

Setzt man bei der Kugel, den Halbmesser = r, Durchmesser = D, Umfang = P, die Länge eines Grades oder den 360sten Theil von P, = G, die Oberfläche = F, den körperlichen Inhalt = K; so ist:

$$F = 4\pi . r^2 = \pi . D^2 = \frac{1}{\pi} P^2 = \frac{129600}{\pi} . G^2 = \sqrt[3]{36\pi} . K^{\frac{2}{3}}$$

$$K = \frac{4}{3}\pi . r^3 = \frac{1}{6}\pi . D^3 = \frac{1}{6\pi^2} P^3 = \frac{7776000}{\pi^2} . G^3 = \sqrt{\frac{1}{36\pi}} . F^{\frac{3}{2}}$$

$$D = \frac{360}{\pi} . G = \sqrt{\frac{1}{\pi}} . F^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} . K^{\frac{1}{3}}$$

$$P = 360 . G = \sqrt{\pi} . F^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{6\pi^2} . K^{\frac{1}{3}}$$

Hier ist $\frac{360}{\pi} = 114,59155902616464$
$\frac{129600}{\pi} = 41252,96124941927103$
$\frac{7776000}{\pi} = 787873,52400281851074$

Die Größe der Erde wird am bequemsten nach Graden angegeben. Bei jeder Kugel enthält der Umfang 360, der Durchmesser 114,5915 Grade, die Oberfläche nahe 41253 Quadratgrade, der Inhalt 787873,5 Kubikgrade. Die Erde ist ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Axe entstandenes Sphäroid, wird aber bei genäherten Bestimmungen in der mathematischen Geographie als eine Kugel angenommen, deren Umfang den des elliptischen

Meridiane gleich ist, also 360 Erdgrade enthält, welche man in runder Zahl zu 15 geographischen Meilen annimmt, wonach ein Erd= Quadratgrad 225 geographische □ Meilen, ein Erd= Cubikgrad 3375 geographische Cubikmeilen enthält. Ein solcher Erdgrad beträgt (II Aufg. 77.) 364554,765 russische Fuß oder 104,158 Werst, also ein Erd= Quadratgrad 10849 Quadratwerst, ein Erd= Cubikgrad 1'130016 Cubikwerst.

Bei einer hohlen Kugel deren äußerer Durchmesser = D, Wanddicke = w, innerer Durchmesser = $D - 2w = d$ ist, ist der körperliche Inhalt der Wand $\frac{1}{6}\pi.(D^3 - d^3) = \frac{1}{3}\pi.w(D^2 + D.d + d^2)$ $= \frac{1}{3}\pi.w(3D.d + D^2 - 2D.d + d^2) = \pi w D.d + \frac{4}{3}\pi w^3$

Um aus dem Durchmesser den körperlichen Inhalt der Kugel auch eine sehr genäherte Art zu finden, läßt sich eine der folgenden Regeln anwenden:

1) $K = k + a - b - c$, $k = \frac{14}{27}D^3$, $a = \frac{k}{100}$, $b = \frac{2a}{100}$, $c = \frac{b}{100}$

2) $K = k - a - b + c$; $k = \frac{11}{21}D^3$, $a = \frac{4k}{10000}$, $b = \frac{6a}{1000}$, $c = \frac{b}{40}$

z. B. $D = 14$, $D^3 = 2744$.

Erste Art	Zweite Art
2744	2744
10976	2744
9) 38416	7) 30184
3) 4268,4444	3) 4312
k .. 1422,8148	k .. 1437,33333
a .. + .. 14,2281	a .. — .. 57493
b .. — .. 2845	b .. — .. 345
c .. — .. 28	c .. + .. 8
K = 1436,7556	K 1436,755

Beispiele.

1) Der Durchmesser $D = 7'$, wie groß die Oberfläche und der Inhalt?

D	0,84510	D	0,84510
D	0,84510	D^2	1,69020
π	0,49715	$\frac{1}{6}\pi$	9,71900
T	2,18735	K	2,25430

$T = 153,940$ □ Fuß, $K = 179,59$ Cubfuß.

2) Der Umfang $P = 22$ Fuß, wie groß die Oberfläche und der Inhalt?

P	1,34242	P	1,34242
P	1,34242	P^2	2,68484
$\frac{1}{\pi}$	0,50285	$\frac{1}{6\pi^2}$	8,22754
T	2,18769	K	2,25480

$T = 154,06$ □ Fuß, $K = 179,81$ Cubfuß.

3) Die Oberfläche $T = 156\frac{4}{7}$ □ Fuß, wie groß der Durchmesser, Umfang und Inhalt?

T	2,19382	T	2,19382
$T^{\frac{1}{2}}$	1,09691	$T^{\frac{1}{2}}$	1,09691
$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	9,75142	$\sqrt{\frac{1}{36\pi}}$	8,97328
$\sqrt{\pi}$	0,24857	K	2,26401
D	0,84833		
P	1,34548		

$D = 7,0523$ Fuß, $P = 22,155$ Fuß, $K = 183,655$ Cubfuß.

4) Der körperliche Inhalt $K = 750,568$ Cubzoll oder ein Wedro, wie groß der Durchmesser, Umfang und die Oberfläche?

K	2,87539	$K^{\frac{1}{3}}$	0,95846
$K^{\frac{1}{3}}$	0,95846	$K^{\frac{1}{3}}$	0,95846
$\sqrt[3]{6\pi^2}$	0,59081	$\sqrt[3]{36\pi}$	0,68449
$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$	0,09366	T	2,60141
P	1,54927		= 35,422 Zoll
D	1,05212		= 11,275 Zoll.

$T = 399,40$ □ Zoll.

5) Vier Kugeln haben die Durchmesser 8' 7'', 11', 12', 17', wie groß sind ihre körperlichen Räume?

D 0,93366	D 1,04139	D 1,07918	D 1,23045
D^2 1,86732	D^2 2,08278	D^2 2,15836	D^2 2,46090
$\frac{1}{6}\pi$ 9,71900	$\frac{1}{6}\pi$ 9,71900	$\frac{1}{6}\pi$ 9,71900	$\frac{1}{6}\pi$ 9,71900
K 2,51998	K 2,84317	K 2,95654	K 3,41035

$K = 331,1 = 696,9 = 904,78 = 2572,4$ Cubf.

6) Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, welche mit einem gleichseitigen Cylinder von 100 Zoll Höhe, gleiche Oberfläche oder gleichen Inhalt hat?

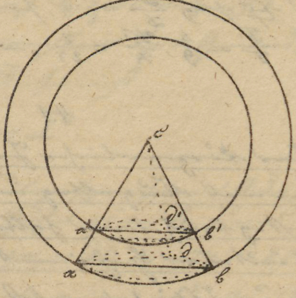
bei gleicher Oberfläche $D = 100\sqrt{\frac{3}{2}} = 122,47$ Zoll

bei gleichem Inhalt $D = 100\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 114,47$ Zoll

40.

Alle Kugeln sind einander ähnlich, ihre Oberflächen verhalten sich wie die Quadrate, die körperlichen Räume aber wie die Cuben der Halbmesser, Durchmesser, Umfänge oder der gleichnamigen Linien überhaupt.

Denn der Mittelpunkt einer Kugel bildet mit zwei Punkten der Oberfläche ein Dreieck, dessen Ebene jede concentrische Kugel in einem Kreise schneidet (IV. 67), in welchem die Halbmesser ein ähnliches Dreieck abschneiden, dessen Seiten jenes Seiten parallel ist (V. 53). Sind also auf der Oberfläche der Kugel drei oder mehrere Punkte gegeben, so werden die vom Mittelpunkt nach diesen Punkten gezogenen Halbmesser die Oberfläche der concentrischen Kugel in Punkten schneiden, welche eine ähnliche Figur bilden.



Da (VII. 39) die Oberfläche der Kugel aus dem Quadrat, der körperliche Inhalt aus dem Cubus des Halbmessers, Durchmessers, oder Umfangs durch Multiplication mit unveränderlichen Zahlen gefunden wird, so ist bei zwei Kugeln

$$\frac{F'}{F} = \frac{r'^2}{r^2} = \frac{D'^2}{D^2} = \frac{P'^2}{P^2} = \frac{G'^2}{G^2}$$

$$\frac{K'}{K} = \frac{r'^3}{r^3} = \frac{D'^3}{D^3} = \frac{P'^3}{P^3} = \frac{G'^3}{G^3}$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{D'}{D} = \frac{P'}{P} = \frac{G'}{G} = \frac{F'^{\frac{1}{2}}}{F^{\frac{1}{2}}} = \frac{K'^{\frac{1}{3}}}{K^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{F'^3}{F^3} = \frac{K'^2}{K^2}$$

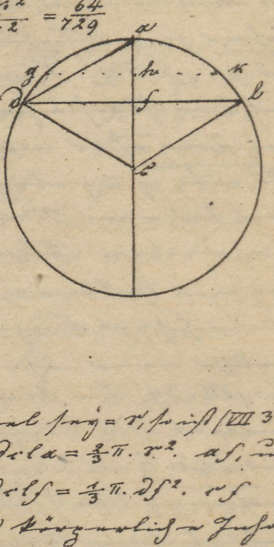
Beispiele.

1) Es sey $\frac{D'}{D} = \frac{21}{32}$, so ist:
$\frac{F'}{F} = \frac{441}{1024}$, $\frac{K'}{K} = \frac{9261}{32768}$

2) Es sey $\frac{F'}{F} = \frac{1}{20}$, so ist:
$\frac{r'}{r} = \frac{D'}{D} = \frac{P'}{P} = \frac{1}{4,472}$

3) Es sey $\frac{K'}{K} = \frac{1}{20}$, so ist
$\frac{r'}{r} = \frac{D'}{D} = \frac{P'}{P} = \frac{1}{2,7144}$

4) Es sey $\frac{D'}{D} = \frac{2}{3}$, so ist
$\frac{F'}{F} = \frac{4}{9}$, $\frac{K'}{K} = \frac{8}{27}$, also $\frac{F'^3}{F^3} = \frac{K'^2}{K^2} = \frac{64}{729}$



41

Der körperliche Inhalt eines Kugelsegments ist gleich dem halben Produkt der Höhe mit der Grundfläche, nebst dem Inhalt einer Kugel deren Durchmesser die Höhe des Segments ist.

Der Halbmesser der Kugel sey $= r$, so ist (VII 37) der Inhalt des Kugelsectors $dcba = \frac{2}{3}\pi . r^2 . af$, und (VII 31) der Inhalt des Kegels $dcbf = \frac{1}{3}\pi . df^2 . cf$ $= \frac{1}{3}\pi (2r - af) . af . cf$, also der körperliche Inhalt des Kugelsegments $dabf$ oder K, durch Subtraction des Kegels vom Kugelsector,

$K = \frac{1}{3}\pi . af (2r^2 - 2r . cf + af . cf)$. Aber $cf = r - af$
also $K = \frac{1}{3}\pi . af^2 . (2r + cf) = \frac{1}{3}\pi\, af^2 . (3r - af)$
Setzt man also die Höhe des Segments $af = L$, so erhält man einen Ausdruck, welcher von dieser Höhe und dem Halbmesser der Kugel abhängt,

nämlich $K = \pi . L^2 . r - \frac{1}{3}\pi . L^3$.
Es sey der Neigungswinkel der Seitenlinie ad oder E gegen die Grundfläche $adf_{,} = n$, so ist der Mittelpunktswinkel des Segments $dcl = m = 4n$, $ad = E = 2r . \sin n$, $af = L = 2r . \sin^2 n$, also

$$K = 4\pi . r^3 \sin^4 n - \frac{8\pi}{3} r^3 \sin^6 n$$

oder (VII. 39) $K = \frac{23328000}{\pi^2} . G^3 \sin^4 n - \frac{15552000}{\pi^2} . G^3 \sin^6 n$
Hierdurch läßt sich auch dem Centriwinkel der Inhalt des Segments in Cubikgraden finden.
Setzt man $3r - af = \frac{3}{2}(2r - af) + \frac{1}{2} af$, so ist $af(3r - af) = \frac{3}{2} af . (2r - af) + \frac{1}{2} af^2 = \frac{3}{8} dl^2 + \frac{1}{2} af^2$.
Setzt man also den Durchmesser der Grundfläche des Segments $dl = D$, so ist

$$K = \frac{1}{8}\pi . L . D^2 + \frac{1}{6}\pi L^3$$

welches der im Lehrsatz ausgesprochene Ausdruck ist. Halbirt man die Höhe af in h, und zieht man durch h die Linie $gx = dl$, so ist $3r - af = \frac{3}{2}(2r - \frac{1}{2} af) - \frac{1}{4} af$, also $af(3r - af) = 3gh^2 - \frac{1}{4} af^2$
Setzt man also den Durchmesser des mittlern Querschnitts des Segments $gx = D'$, so ist

$$K = \frac{1}{4}\pi . L . D'^2 - \frac{1}{12}\pi . L^3$$

Setzt man das Verhältniß des körperlichen Inhalts des Segments zu dem der ganzen Kugel $= S$, das Verhältniß der Höhe des Segments zum dreifachen Halbmesser der Kugel $\frac{af}{3r} = x$, so ist:

$$\frac{4}{27} S = x^2 - x^3$$

Um also den körperlichen Inhalt einer Kugel durch eine Ebene nach gegebenem Verhältniß zu theilen, muß man diese kubische Gleichung auflösen.

Beispiele.

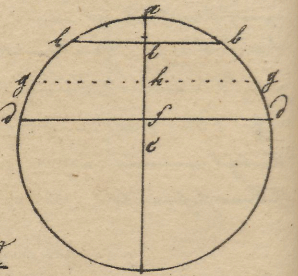
1) Der Durchmesser der Kugel ist 10 Fuß, die Höhe des Segments $l = 2\frac{1}{2}$ Fuß, wie groß die Oberfläche und der körperliche Inhalt?

2r 1,	r 0,69897	l 0,39794	I 98,175
l 0,39794	l 0,39794	l^2 0,79588	II 16,363
π 0,49715	l 0,39794	$\frac{1}{3}\pi$ 0,02003	K = 81,812 Cf
	π 0,49715		
A 1,89509	I 1,99200	II 1,21385	A = 78,540 f.

2) Die Höhe des Segments $l = 15'$, der Durchmesser der Grundfläche $D = 14'$.

l 1,17609	l 1,17609	l 1,17609	I 1154,54
½D 0,84510	D 1,14613	l^2 2,35218	II 1767,14
tg x 0,33099	D 1,14613	$\frac{1}{6}\pi$ 9,71900	K = 2921,68 Cf
sin x 9,95722	$\frac{1}{8}\pi$ 9,59406	II 3,24727	A = 860,79 □Fuß
C 1,21887	I 3,06241		
C 1,21887			
π 0,49715			
A 2,93489			

42.



Der körperliche Inhalt einer zwischen zwei Parallelkreisen enthaltenen Kugelzone, ist gleich dem halben Produkt der Höhe mit der Summe der Grundflächen, nebst dem Inhalt einer Kugel, deren Durchmesser die Höhe der Zone ist.

Nach VII. 41. ist der Inhalt des Kugelsegments $dad = \pi.r.af^2 - \frac{1}{3}\pi.af^3$, des Kugelsegments $babl = \pi.r.al^2 - \frac{1}{3}\pi.al^3$, also der körperliche Inhalt der Kugelzone $dbbd$ oder: $K = \pi.r(af^2 - al^2) - \frac{1}{3}\pi(af^3 - al^3)$

(III.7) $af^2 - al^2 = (af - al).(af + al) = fl\,(af + al)$

(VII 4) $af^3 - al^3 = (af - al)\,(af^2 + af.al + al^2) = fl\,(af^2 + af.al + al^2)$

also $K = \pi.fl\,(r.af + r.al) - \frac{1}{3}\pi.fl\,(af^2 + af.al + al^2)$

aber $Df^2 = 2r.af - af^2$, $bl^2 = 2r.al - al^2$

also $r.af = \frac{1}{2}Df^2 + \frac{1}{2}af^2$, $r.al = \frac{1}{2}bl^2 + \frac{1}{2}al^2$

also $K = \frac{1}{2}\pi \cdot fl(\partial f^2 + bl^2) + \pi \cdot fl(\frac{1}{4}af^2 + \frac{1}{4}al^2 - \frac{1}{3}af^2 - \frac{1}{3}af \cdot al - \frac{1}{3}al^2)$
oder $K = \frac{1}{8}\pi fl(\partial\partial^2 + bb^2) + \frac{1}{6}\pi fl \cdot (af^2 - 2af \cdot al + al^2)$
Setzt man also die Durchmesser der Grundflächen $\partial\partial = D$, $bb = \partial$, die Höhe $fl = af - al = L$, so ist

$$K = \frac{1}{8} \cdot \pi L \cdot D^2 + \frac{1}{8}\pi L \cdot \partial^2 + \frac{1}{6}\pi L^3$$

welches der im Lehrsatz ausgesprochene Ausdruck ist. Halbirt man die Höhe fl in h, und zieht man durch h die Linie $gg \parallel \partial\partial \parallel bb$, so ist $af + al = 2ah$, also

$$K = \pi \cdot fl \cdot 2r \cdot ah - \frac{1}{3}\pi fl(af^2 + af \cdot al + al^2)$$

Aber $2r \cdot ah = ag^2 = gh^2 + ah^2 = \frac{1}{4}gg^2 + \frac{1}{4}(af + al)^2$
also $K = \frac{1}{4}\pi \cdot fl \cdot gg^2 - \pi \cdot fl(\frac{1}{3}af^2 + \frac{1}{3}af \cdot al + \frac{1}{3}al^2 - \frac{1}{4}(af + al^2))$
oder $K = \frac{1}{4}\pi \cdot fl \cdot gg^2 - \frac{\pi}{12} fl\left(\begin{matrix}4af^2 + 4af \cdot al + 4al^2 \\ -3af^2 - 6af \cdot al - 3al^2\end{matrix}\right)$

oder $K = \frac{1}{4}\pi fl \cdot gg^2 - \frac{1}{12}\pi fl(af - al)^2$
Setzt man also den Durchmesser des mittleren Querschnitts $gg = D'$, so ist

$$K = \frac{1}{4}\pi \cdot L' \cdot D'^2 - \frac{1}{12}\pi \cdot L^3$$

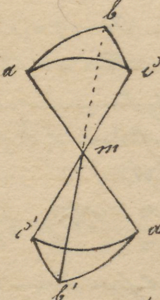
Beispiel.

Die Höhe der Kugelzone ist (VII. 38) $L = 15''$, die Durchmesser der Grundflächen $D = 14''$, $\partial = 8''$

L	1,17609	L	1,17609	L	1,17609	I	1154,54
D	1,14613	∂	0,90309	L^2	2,35218	II	376,99
D	1,14613	∂	0,90309	$\frac{1}{6}\pi$	9,71900	III	1767,13
$\frac{1}{8}\pi$	9,59406	$\frac{1}{8}\pi$	9,59406	III	3,24727	$K =$	3298,66 Kbzll.
I	3,06241	II	2,57633				

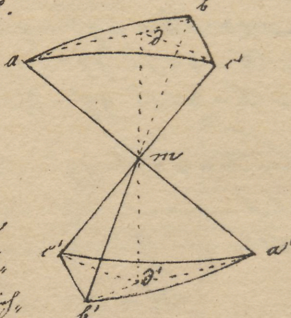
43.

Gleichschenklige sphärische Dreiecke von gegenseitig gleichen Zwischenwinkeln und Nebenseiten sind identisch.



Es sind cab, c'a'b', sphärische Dreiecke (IV. 68) auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt m ist. Die Dreiecke sind gleichschenklig, die Zwischenwinkel gegenseitig gleich; a = a'; die Nebenseiten sind ebenfalls gegenseitig gleich: ca = ab = c'a' = a'b'. Man kann also diese Dreiecke an den Ecken a', a, zusammenlegen, alsdann fällt a'b' mit ac, und c'a' mit ba zusammen, b' mit c, c' mit b zusammen; die Dreiecke sind also identisch, folglich auch an Oberfläche und körperlichem Inhalt gleich.

44.



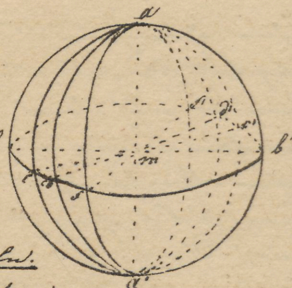
<u>Sphärische Particulardreiecke sind nicht identisch, aber gleich.</u>

Es sind abc, a'b'c', sphärische Dreiecke auf der Oberfläche einer Kugel deren Mittelpunkt m ist. Da ihre gleichnamigen Punkte a, a'; b, b'; c, c'; einander diametral entgegengesetzt sind, so heißen sie Particulardreiecke; bringt man die geradlinigen Dreiecke mbc, mb'c', zusammen, so daß m mit m; b' mit b; c' mit c, zusammenfällt so fallen die Punkte a', a, auf entgegengesetzte Seiten der Ebene mbc; die Dreiecke abc, a'b'c', sind also symmetrisch (IV. 44) und ihre Gleichheit kann daher nicht durch das Decken oder die Identität bewiesen werden. Da aber die Sehnen ab⌒ = a'b'; bc⌒ = b'c'; ca⌒ = c'a'; so sind (IV 32) die durch die Punkte $a, b, c,$ und $a', b', c',$ gelegten Ebenen parallel. Fällt man also von m auf die Ebene abc, eine Senkrechte welche die Kugel in d trifft, so ist ihre Verlängerung (IV. 29) auf der Ebene $a'b'c'$ senkrecht, und trifft die Kugel in d', so daß $d, d',$ diametral entgegengesetzte Punkte der Kugeloberfläche sind. Da die geradlinigen Vertikalwinkel $amd = a'md'$, $bmd = b'md'$, $cmd = c'md'$; da $md, md',$ auf den Ebenen $abc, a'b'c',$ senkrecht sind, also auch (I. 36) die geradlinigen Winkel $amd = bmd = cmd$, $a'md' = b'md' = c'md'$; so sind die sphärischen Dreiecke $adb, bdc, cda,$ $a'd'b', b'd'c', c'd'a',$ gleichschenklig, und alle sechs Bögen einander gleich, nämlich $ad = bd = cd = a'd' = b'd' = c'd'$. Auch sind die Kantenwinkel je zweier durch dd' gehenden Ebenen gleich, nämlich: $\angle adb = a'd'b'$, $\angle bdc = b'd'c'$, $\angle cda = c'd'a'$.

Also sind (VII. 43) diese gleichschenkligen sphärischen Dreiecke identisch nämlich $\Delta adb = a'd'b'$, $\Delta bdc = b'd'c'$, $\Delta cda = c'd'a'$. Aber aus den Winkeln, Flächen, und körperlichen Räumen dieser gleichschenkligen sphärischen Dreiecke, sind die Winkel, Flächen und körperlichen Räume der sphärischen Dreiecke $abc, a'b'c',$ auf gleiche Art zusammengesetzt.

Also sind diese sphärischen Vertikaldreiecke zwar nicht identisch, aber ihre Seiten, Winkel, Flächen und körperlichen Räume gegenseitig gleich.

45.

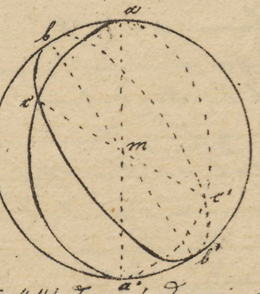


Ein durch zwei größte Halbkreise oder Meridianhälften gebildeter Kugelstreifen verhält sich zur ganzen Kugel wie sein Winkel zu vier rechten Winkeln.

Die Axe aa', deren Aequator $bfb'f'$ ist, ist die Kante der beiden Halbkreise oder Meridianhälften aba', afa', welche auf der Oberfläche der Kugel einen Kugelstreifen oder ein sphärisches Zweieck abschneiden, dessen Winkel $baf = \alpha$ durch den Aequatorbogen bf gemessen wird. Theilt man diesen Bogen in so viel gleiche Theile bc, cd, df als der Winkel α Grade enthält, so erhält man (VII 43) eben soviel identische Kugelstreifen. Die ganze Kugel enthält 360 solcher Kugelstreifen. Also verhält sich der Kugelstreifen $aba'fa$ zur ganzen Kugel wie $bf : P$ oder wie $\alpha : 4R$. Wenn also der Winkel α in Graden ausgedrückt wird, und die Länge eines Grades der Kugel $= G$ ist, so ergiebt sich aus VII. 39, für den Kugelstreifen die Seitenfläche $A = \frac{360}{\pi} \cdot G^2 \alpha$
der körperliche Inhalt $K = \frac{21600}{\pi^2} \cdot G^3 \alpha$

46.

Ein sphärisches Dreieck verhält sich zur ganzen Kugel, wie der sphärische Ueberschuß d. h. der Ueberschuß der drei Winkel über zwei rechte Winkel, zu acht rechten Winkeln.



Das sphärische Dreieck ist abc, m der Mittelpunkt der Kugel; durch die Verlängerung der Halbmesser am, bm, cm, entsteht auf der entgegengesetzten Seite der Kugel das Vertikaldreieck a'b'c', welches (VII. 44) dem Dreieck abc gleich ist. Die Halbkugel besteht aus dem Kugelstreifen oder Zweieck aba'c'a, und aus den Dreiecken a'b'c, ab'c. Das Δ a'b'c ist gleich dem Kugelstreifen ca'c'b'c weniger dem Δ a'b'c' oder weniger dem Δ abc. Das Δ ab'c ist gleich dem Kugelstreifen bcb'a'b weniger dem Δ abc. Setzt man also die Seitenfläche des Δ abc = A, die Länge eines Grades der Kugel = G, und drückt man die Winkel a, b, c, in Graden aus, so ist (VII. 39) die Oberfläche der Halbkugel $= \frac{64800}{\pi} \cdot G^2$, woraus man die Gleichung erhält

$$\frac{64800}{\pi} \cdot G^2 = \frac{360}{\pi} G^2 a + \left(\frac{360}{\pi} G^2 b - A\right) + \left(\frac{360}{\pi} G^2 c - A\right)$$

oder $A = \frac{180}{\pi} G^2 (a+b+c-180) = \frac{180}{\pi} \cdot G^2 \Delta$

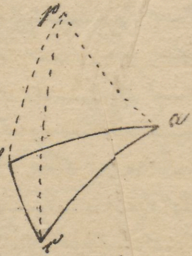
Die Größe $a + b + c - 180 = \Delta$, heißt der sphärische Ueberschuß, und $\frac{180}{\pi} G^2$ ist der 720ste Theil der Kugeloberfläche. Auf dieselbe Art wird der Beweis für den körperlichen Inhalt $mabc = K$ geführt, nämlich (VII. 39)

$$\frac{3888000}{\pi^2} \cdot G^3 = \frac{21600}{\pi^2} G^3 a + \left(\frac{21600}{\pi^2} \cdot G^3 b - K\right) + \left(\frac{21600}{\pi^2} \cdot G^3 c - K\right)$$

also $K = \frac{10800}{\pi^2} \cdot G^3 (a+b+c-180) = \frac{10800}{\pi^2} \cdot G^3 \Delta$

oder $K = \frac{60}{\pi} G \cdot A = \frac{1}{3} r \cdot A$

d. h. der körperliche Inhalt des sphärischen Dreiecks ist gleich dem dritten Theile des Produkts des Halbmessers der Kugel mit der Seitenfläche des Dreiecks.



Wenn a, b, c Punkte auf der Oberfläche der Erdkugel sind, p der Nordpol des Aequators, so sind in der Richtung der Meridiane die Bögen pa, pb, pc, die Polardistanzen, welche man findet, wenn man die nördliche geographische Breite von 90° abzieht, oder die südliche zu 90° addirt. Die Winkel am Pol p sind die Unterschiede der geographischen Längen. Die Winkel pab, pba, heißen die Azimuthe. Die halbe Summe derselben $\frac{1}{2}(pab + pba) = y$, findet man (VI. 67), wenn man setzt: $pa + pb = 2S$, $pa - pb = 2d$, $apb = p$, $\cot \frac{1}{2} p \cdot \frac{\cos d}{\cos S} = \operatorname{tg} y$. Ebenso findet man $\frac{1}{2}(pbc + pcb) = y'$, $\frac{1}{2}(pca + pac) = y''$. Dann ist der sphärische Unterschied $\Delta = 2(y' + y'' - y - R)$, woraus sich dann der Flächeninhalt des Dreiecks abc ergiebt.

Beispiel.

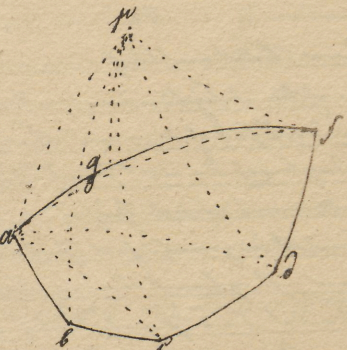
Den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen, welches Waigaz, Kalisz, und St. Nikolai mit einander bilden.

	g. Breite	Länge		
a Waigaz	70° 0'	75° 0'	pa 20° 0'	apb 39° 15'
b Kalisz	51 45	35 45	pb 38 15	bpc 30 15
c St. Nikolai	38 0	66 0	pc 52 0	cpa 9 0

pa 20 0	pb 38 15	pc 52 0	y' 79 7,6
pb 38 15	pc 52 0	pa 20 0	y'' 86 12,6
2S 58 15	2S 90 15	2S 72 0	y 72 29,4
2d 18 15	2d 13 45'	2d 32 0	$\frac{1}{2}\Delta$ = 2° 50,8 = 170',8
cot $\frac{1}{2}$p 0,44785	0,56817	1,10402	$\frac{1}{2}\Delta$ 2,23249
cos d 9,99447	9,99686	9,98284	$\frac{6}{11}$ 0,28100
cos S 9,94130	9,84854	9,90796	A 2,51349 = 326,21
tg y 0,50102	0,71649	1,17890	
y = 72° 29,4	79° 7,6	86° 12,6	

Der Inhalt ist also 326,21 Erd-Quadrat-Grad oder der 126ste Theil der ganzen Erde.

47.



Ein sphärisches Vieleck von N Seiten verhält sich zur ganzen Kugel, wie sich der sphärische Ueberschuß, d. h. der Ueberschuß der N Umfangswinkel über N−2 mal zwei rechte Winkel, zu acht rechten Winkeln verhält.

Man theilt das Vieleck abcdfg durch Diagonalbögen in Dreiecke, so ist (VII. 46) $\Delta\, abc = \frac{180}{\pi} \cdot h^2 \cdot (bac + b + acb - 180)$ $\Delta\, acd = \frac{180}{\pi} h^2 (cad + acd + adc - 180)$. $\Delta\, adf = \frac{180}{\pi} h^2 (daf + adf + afd - 180)$, $\Delta\, afg = \frac{180}{\pi} h^2 (fag + afg + agf - 180)$ also $abcdfg = A = \frac{180}{\pi} \cdot h^2 \cdot (a + b + c + d + f + g - 4 \cdot 180)$

Ueberhaupt, wenn die Summe der innern Umfangswinkel $= S$, so ist der sphärische Ueberschuß in Graden $\Delta = S - (N-2)\,180$, $A = \frac{180}{\pi} h^2 \Delta$, $K = \frac{1}{3} r . A$.

Beispiel.

	n. Breite	Länge
a. Calais	51 45	35 45
b. St. Nikolai	38 0	66 0
c. Kiachta	50 20	124 19
d. Pet. Paulshafen	53 1	176 28
f. Behringsstraße	66 0	209 0
g. Waigaz	70 0	75 0

pa 38°15'
pb 52 0
2S 90 15
2d 13 45
apb 30 15
cot ½p 0,56817
cos d 9,99686
cos S 9,84854
tg y 0,71649

pb 52° 0
pc 39 40
91 40
12 20
bpc 58 19
0,25342
9,99748
9,84308
0,40782
y 79° 7,6
68 38,7
68 59,6
75 48,0
— 24 35,1
— 72 29,4
— 180
4Δ 15° 29,4
½Δ 2,96820
6/π 0,28100
1775 3,24920

pc 39 40
pd 36 59
2S 76 39
2d 2 41
cpd 52 9
cot ½p 0,31038
cos d 9,99988
cos S 9,89460
tg y 0,41566

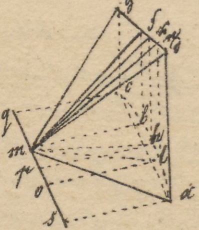
pd 36 59
pf 24 0
60 59
12 59
dpf 32 32
0,53493
0,99720
0,93535
0,59678 −

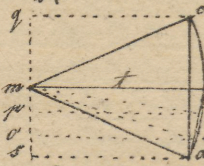
pf 24 0
pg 20 0
44 0
4 0
fpg −134 0
9,62785 −
9,99974
9,96717
9,66042 −

pg 20 0
pa 38 15
58 15
18 15
gpa −39 15
0,44785
9,99447
9,94130
0,50102

Der Inhalt ist also 1775 geogr. Quadratgrad oder der 23ste Theil der ganzen Erde.

48.





Die Seitenfläche eines senkrechten Cylindersectors, dessen Grundfläche ein Kreissector ist, ist gleich dem Produkt der Sehne mit der Höhe.

Der körperliche Inhalt desselben ist gleich dem dritten Theile des Products des Halbmessers mit der Seitenfläche.

Der Kreissector amcb, wird von dem Halbmesser mb = r halbirt. Auf der Ebene desselben sind die Seitenlinien des Cylinders ad, hx, bf, cg, senkrecht. Eine schiefe Ebene schneidet die Cylinderfläche in dfg, die Grundfläche in sq = ac, und bildet mit der Grundfläche den Winkel n, so daß also $ad = cg = as. \, tg\, n = cq. \, tg\, n$, $hx = hp. \, tg\, n$, $bf = mb. \, tg\, n$. Es sey ah ein beliebiger Theil des Bogens, ml senkrecht auf ah, lo senkrecht auf qs. Das Trapezium $ahxd = \frac{1}{2}(ad + hx). \, ah = \frac{1}{2} tg\, n\, (as + hp)\, ah = tg\, n. \, lo. \, ah = tg\, n. \, ml. \, sp.$ Der körperliche Inhalt der Pyramide $mahxd = \frac{1}{3} tg\, n. \, ml. \, sp. \, ml.$ Beschreibt man also in den Bogen ac ein regelmäßiges Vieleck, dessen Seite = ah, so ist die Linie ml für alle gleich, die Summe aller Abschnitte sp beträgt $qs = ac$, also ist die Seitenfläche des Cylindersectors acgd oder $A > tg\, n. \, ml. \, ac$, der körperliche Inhalt amcgd oder $K > \frac{1}{3} tg\, n. \, ml^2. \, ac$. Je größer man die Anzahl der Seiten des Vielecks nimmt desto mehr nähert sich mb dem Halbmesser r, und der Unterschied kann kleiner als jede denkbare Größe werden. Also ist genau A = tg n. r. ac oder A = bf. ac, und K = ⅓ tg n. r². ac oder K = ⅓ r. A. Setzt man die Höhe bf = r. tg n = L, den Durchmesser 2r = D, den Centralwinkel amc = m, so ist

$$A = L.\,D.\,\sin \tfrac{1}{2} m,\quad K = \tfrac{1}{6}\,L.\,D^2.\sin \tfrac{1}{2} m.$$

Verwandelt sich die Grundfläche in einen Halbkreis, so ist sin ½ m = 1, also:

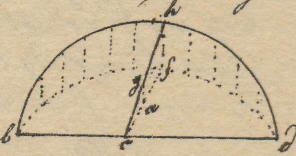
$$A = L.\,D,\quad K = \tfrac{1}{6}\,L.\,D^2$$

Durch Hülfe dieses Satzes läßt sich der Schwerpunct t des Kreissectors amcb bestimmen. Da ab = bc, so liegt dieser Schwerpunct in der Linie mb, also ist die vom Schwerpunct bis zur schiefen Ebene errichtete Höhe = mt. tg n. Die Grundfläche amc = ½ r. Bog. abc. Also der Inhalt des Cylindersectors (VII. 24) K = mt. tg n. ½ r. Bog abc. Aber auch, wie oben bewiesen worden K = ⅓ tg n. r². ac. Also ½ mt. Bog. abc = ⅓ r. ac oder $mt = \frac{2}{3} r \frac{ac}{Bog\ abc}$. Bei einem Halbkreis, so ist also $mt = \frac{2}{3} r. \frac{2}{\pi}$ oder $mt = r. \frac{4}{3\pi}$ = r. 0,41831.

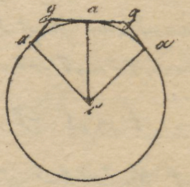
49.

<u>Der körperliche Inhalt des Raumes, welcher durch Umdrehung einer Figur um ihre Axe beschrieben wird, ist gleich dem Product des Umfangs des vom Schwerpunct der Figur beschriebenen Kreises, mit dem Flächeninhalt der Figur.</u>

Es sey bfd = F die Rotationsfigur, bd ihre Axe, c ihr Schwerpunct, ac = r senkrecht auf bd, der Halbmesser des vom Schwerpunkt bei der Umdrehung beschriebenen Kreises hat. Man beschreibe um diesen Kreis ein regelmäßiges Vieleck, dessen halbe Seite ag, dessen Umfang



= P sey, und lege durch die Axe bd, und die Punkte a Ebenen, welche den Rotationskörper in der Figur bfd schneiden. Man lege senkrecht auf jede Ebene bfd Zylinderflächen, welche den Rotationskörper in der Figur bfd berühren, so ist der körperliche Inhalt jedes schief geschnittenen Zylinderstücks (VII. 24) = ag. F, also der Inhalt des ganzen den Rotationskörper umhüllenden Körpers = P. F. Je größer aber die Anzahl der Seiten des umschriebenen Vielecks genommen wird, desto mehr nähert sich der Umfang des umschriebenen Vielecks dem Umfang des Kreises $= 2\pi. r$, und desto mehr nähert sich auch der Inhalt des umhüllenden Körpers dem Inhalt des Rotationskörpers. Also ist der Inhalt des Rotationskörpers $K = 2\pi\, r. F$.



Inhalt der Stereometrie.

Bezeichnungen. Länge oder Höhe = L, Breite = B, Dicke oder Diagonallinie oder Durchmesser der Grundfläche = D, Verhältniß der Grundfläche zum Quadrat dieser Linie = c, Grundfläche = $c \cdot D^2$, Endkante oder Seitenlinie = E, Umfang = P, Dicke der Wand = w, Seitenfläche = A, ganze Oberfläche = F. Neigung der Endkante oder Seitenlinie gegen die Grundfläche = n, Centralwinkel = m, körperlicher Inhalt = K, Länge eines Grades der Kugel = G.

1. Cubus . . $F = 6 L^2$, $K = L^3$

3. 7. Rechtwinkliges Parallelepipedum:
$A = 2L.B + 2L.D$, $F = 2L.B + 2L.D + 2BD$
Axe = $\sqrt{L^2 + B^2 + D^2}$, $K = L.B.D.$
Wand = $A.w - 4L.w^2$,
Wand und Boden = $F.w - 4(L+B+D).w^2 + 8.w^3$

8–17 Senkrechtes und schiefes Parallelepipedum und Prisma, senkrechter und schiefer Cylinder:
$$K = c.L.D^2 = c.\sin n.E.D^2$$

10. Säule . . . $A = L.P$

14. Schiefes Parallelepipedum. Die Endkanten E, E', E'', bilden drei geradlinige Winkel a, b, c, und $a+b+c = 2S$
$$K = E.E'.E''.\sqrt{4 \sin S. \sin(S-a) \sin(S-b). \sin(S-c)}$$

17. Senkrechter Kreiscylinder:
$A = \pi.L.D$, $F = \pi.L.D + \frac{1}{2}\pi.D^2$
$K = \frac{1}{4}\pi.L.D^2 = \frac{1}{4\pi} L.P^2$
Wand = $\pi L.w(D-w) = \pi L.w.(d+w)$

18. 19. Tetraeder und Pyramide: $K = \frac{1}{3} c.L.D^2$

20 Schiefgeschnittenes dreiseitiges Prisma:
$$K = \frac{1}{3} c(L' + L'' + L''').D^2$$

21. Schiefgeschnittenes Parallelepipedum:

$$K = \tfrac{1}{2} c.(L' + L''').D^2 = \tfrac{1}{2} c.(L'' + L'''').D^2$$

23–24. Schiefgeschnittenes Prisma, schief geschnittener Cylinder, die Höhe des obern Schwerpunkts $= L$, die Verbindungslinie beider Schwerpunkte $= E$

$$K = c.\ L.\ D^2 = c.\ \sin w.\ E.\ D^2$$

25–27. Ähnliche Körper $K : K' = D^3 : D'^3$

28–30. Parallel abgestumpfte Pyramide

$$K = \tfrac{1}{4} c.\ L.(D+d)^2 + \tfrac{1}{12} c.\ L.(D-d)^2$$

31. Kegel überhaupt . . . . . $K = \tfrac{1}{3} c.\ L.\ D^2$

Gleichseitiger Kegel:

$\mathrm{tg}\, w = \dfrac{2L}{D} = \dfrac{2\pi L}{P}$, $E.\ \sin w = L.$

$A = \tfrac{1}{2} E.\ P = \tfrac{1}{2}\pi.\ E.\ D$, $F = \tfrac{1}{4}\pi\, D\,(2E + D)$

$K = \tfrac{1}{12}\pi\, L.\ D^2 = \dfrac{1}{12\pi}\, L.\ P^2$

33. Parallel abgestumpfter Kegel überhaupt:

$$K = \tfrac{1}{4} c.\ L.\ (D+d)^2 + \tfrac{1}{12} c.\ L\ (D-d)^2$$

Parallel abgestumpfter gleichseitiger Kegel:

$\mathrm{tg}\, w = \dfrac{2L}{D-d}$, $E = \dfrac{L}{\sin w} = \dfrac{\frac{1}{2}(D-d)}{\cos w}$

$A = \tfrac{1}{2} E.(P+p) = \tfrac{1}{2}\pi\, E.(D+d)$

$K = \tfrac{1}{16}\pi\, L.\ (D+d)^2 + \tfrac{1}{48}\pi\, L.\ (D-d)^2$

$K = \dfrac{1}{16\pi}\, L.\ (P+p)^2 + \dfrac{1}{48\pi}\, L.\ (P-p)^2$

37. Kugelschnitz: $K = \tfrac{4}{3}\pi r^3 .\ \sin^2 \tfrac{1}{4} m.$

39. Kugel:

$F = P.\ D = 4\pi r^2 = \pi D^2 = \dfrac{1}{\pi}.\ P^2 = \dfrac{129600}{\pi}.\ G^2$

$K = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{6}\pi D^3 = \dfrac{1}{6\pi^2}.\ P^3 = \dfrac{7776000}{\pi^2}.\ G^3$

Wand $= \pi.\ w.\ D.\ d + \tfrac{4}{3}\pi.\ w^3$

37. 41. Kugelsegment:

$$m = 4w,\ \frac{2L}{D} = tg\,w,\ E = \frac{L}{\sin w} = \frac{D}{\cos w},\ L = 2r.\sin^2 w$$

$$A = 2\pi.r.L = 4\pi r^2.\sin^2 w = \pi.E^2 = \tfrac{1}{2}\pi E.\frac{D}{\cos w}$$

$$K = \pi L^2.r - \tfrac{1}{3}\pi L^3 = \tfrac{1}{8}\pi L.D^2 + \tfrac{1}{6}\pi L^3$$

38. 42. Kugelzone:

$$tg\,w = \frac{2L}{D-d},\ tg\,w' = \frac{2L}{D+d},\ E = \frac{L}{\sin w},\ E' = \frac{L}{\sin w'}$$

$$A = \pi.E.E' = \tfrac{1}{2}\pi E.\frac{D+d}{\cos w}$$

$$K = \tfrac{1}{8}\pi L.D^2 + \tfrac{1}{8}.\pi L.d^2 + \tfrac{1}{6}\pi.L^3$$

45. Kugelstreifen:

$$A = \frac{360}{\pi}.G^2 a,\ K = \frac{21600}{\pi^2}.G^3 a$$

46. Sphärisches Dreieck: $a+b+c - 180 = \Delta$

$$A = \frac{180}{\pi} G^2 \Delta,\ K = \frac{10800}{\pi^2}.G^3 \Delta$$

48. Cylinderschnitte:

$$A = L.D.\sin\tfrac{1}{2}m,\ K = \tfrac{1}{6} L.D^2.\sin^2\tfrac{1}{2}m$$

49. Rotationskörper . . . $K = 2\pi.r.F.$

Zahlen, welche vom Kreisverhältniß abhängen, und bei der Berechnung des Kreises, Cylinders, Kegels und der Kugel angewandt werden, überhaupt auch in der höheren Geometrie von häufigem Gebrauche sind:

$\pi = 3,1415926\ 5358979\ 3238462\ 6433832\ 7950288$
$4197169\ 3993751\ 0582097\ 4944592\ 3078164$
$0628620\ 8998628\ 0348253\ 4211706\ 7982148$
$0865132\ 8230664\ 7093844\ 6095505\ 8226136$

Aus dieser von Vega berechneten Zahl habe ich die übrigen abgeleitet:

$\frac{1}{4}\pi$ = 0,7853981 6339744 8309615 6608458
1987572 1049292 3498437 76

$\frac{1}{6}\pi$ = 0,5235987 7559829 8873077 1072305
4658381 4032861 5665625 17

$\frac{1}{\pi}$ = 0,3183098 8618379 0671537 7675267
4502872 4068919 2914809 1289749
5334688 1177935 9526845 3070180
2276055 3250617 1912145 6854535
1591607 3785823 6922291 5730277

In Eulers introd. in Anal. Infin. I. S 198 ist $\frac{1}{\pi}$ nur auf 36 Stellen angegeben, und daselbst die 25ste Stelle unrichtig 9 statt 5

$\frac{1}{4\pi}$ = 0,0795774 7154594 7667884 4418816
8625718 1017229 8228702 28

$\frac{1}{\pi^2}$ = 0,1013211 8364233 7771443 8794632
0972763 8904358 7746722 46

$\frac{1}{6\pi^2}$ = 0,0168868 6394038 9628573 9799105
3495460 6484059 7957787 07

$\sqrt{\pi}$ = 1,7724538 5090551 6027298 1674833
4114518 2797549 4561223 8712821
3807789 8529112 8459103 2181374
9506567 3854466 5416226 8236242
8257066 6236152 8657244 2261088

$2\sqrt{\pi}$ = 3,5449077 0181103 2054596 3349666
8229036 5595098 9122447 74

$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ = 0,5641895 8354775 6286948 0794515
6077258 5844050 6293289 9885684
4085721 709

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ = 1,1283791 6709551 2573896 1589031
2154517 1688101 2586579 9771368
8171443 418

$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ = 0,0940315 9725795 9381158 0132419
2679543 0974008 4382214 9930947
4014286 951

$\sqrt[3]{6}$ = 1,8171205 9283213 9658891 2117563
2726050 2428210 4631412 1967148

$\sqrt[3]{36}$ = 3,3019272 4889462 6683874 6099524
0908495 6346384 6443184 9333697

$\sqrt[3]{\pi}$ = 1,4645918 8756152 3263020 1425272
6379039 1738596 8556279 37.

$\sqrt[3]{\pi^2}$ = 2,1450293 9711102 5600077 4441009
4123559 7486667 3654715 56

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ = 1,2407009 8179880 0033336 0136240
9555633 4701572 4003720 0

$\sqrt[3]{6\pi^2}$ = 3,8977770 8972075 3958963 4709177
9985674 4015612 2958390 56

$\sqrt[3]{36\pi}$ = 4,8359758 6204940 8922150 9005399
1785481 6833842 2169715 85

π^2 = 9,8696044 0108935 8618834 4909998
7615113 5313699 4072408

π^3 = 31,0062766 8029982 0175476 3150671
0139520 222

π^4 = 97.4090910 3400243 7236440 3326887
0511124 97

π^5 = 306.0196847 8528145 3262741 3100434
3560648 02

π^6 = 961,3891935 7530443 7030219 4436524
1989886 68

π^7 = 3020,2932277 7679206 7514206 4930720
4183191 62

π^8 = 9488,5310160 7057400 7128575 5039067
6579669 29

π^9 = 29809,0993334 4621166 6509402 4012396
5536385 31

π^{10} = 93648,0474760 8302097 3716690 1849193
4563594 6

π^{11} = 294204,0179738 9059710 5695642 0071846
6702738

π^{12} = 924269,1815233 7418622 2579170 3584756
0717230

π^{13} = 2903677,2706132 8340498 8596199 4878031
3046839

π^{14} = 9122171,1817543 5317020 4375110 7628162
744956

π^{15} = 2865.8145,9693879 9845337 8821971 6605433
32966

π^{16} = 90032220,8429332 7956713 0768227 9165370
94380

Anhang.

Aufgaben zu practischem Gebrauch.

(Das hier vorkommende Längenmaaß ist der russische = englische Zoll und Fuß. Ausführliche Vergleichungen der Maaße und Gewichte findet man in meinem Rechenbuch.)

1.

Den Inhalt eines Kornspeichers in Tschetwert, rigischen Löfen und revalschen Tonnen durch Maaßstöcke zu bestimmen.

	Cub. Zoll	Cubikwurzel in Zollen
Tschetwert	12809,7	$23,39805 = \frac{1}{3}\cdot(72 - 1,806)$
rig. Lof	4202,5	$16,1375 = \frac{1}{5}\cdot(72 + 8\frac{11}{16})$
rev. Tonne	7757,7	$19,796 = \frac{1}{5}\cdot(99 - \frac{1}{50})$

Die Einheit des Maaßstockes wird der hier angegebenen Cubikwurzel gleich genommen und in 10 gleiche Theile getheilt.

Beispiel. Nach einem für Tschetwert eingerichteten Maaßstocke wurde ein Kornraum (Bezirk) gemessen. Es war die Länge $L = 7,9$; die Breite $B = 5,8$; die Höhe $D = 2,3$ Einheiten, also der Inhalt $L.B.D = 105\frac{1}{3}$ Tschetwert.

2.

Den Inhalt eines Kornspeichers, dessen Abmessungen in Fuß oder Faden gegeben sind, zu finden.

Die Formel ist $K = a.L.B.D.$ Hier bedeutet K den Inhalt in Tschetwert oder Lof, oder Tonnen, oder Lasten, u. s. w. Die Abmessung in L, B, D, Länge, Breite, Höhe in Fuß, der Factor $a = \frac{1728}{m}$; m ist das Kornmaß in Cubikzollen.

	m	log α		lg α
Garnez	200,1515	0,93618	rig. Last 45	7,96082
Tschetwerik	1601,2118	0,83309	rig. Last 48	7,93279
Tschetwert	12809,6948	9,13000	rig. Last 60	7,83588
rig. Loof	4202,5	9,61403	rev. Last 24	7,96760
rev. Tonne	7757,7	9,34781		

Sind die Abmessungen in Faden gemacht, so multiplicirt man noch: bei Faden von 6 Fuß, mit 216, bei Saschen von 7 Fuß mit 343.
Sind die Abmessungen in Zollen, so multiplicirt man mit $\frac{1}{1728}$, log = 6,76246.

Beispiele.

1) Bei einem Speicher ist L = 50'7", B = 16'5", D = 4'8", wie viel Tschetwert und Last enthält er?

L	2,78319	2,78319	2,78319
B	2,29447	2,29447	2,29447
D	1,74819	1,74819	1,74819
1728	6,76246	6,76246	6,76246
α	9,13000	7,95082	7,96760
	2,71831	1,54913	1,55591

Tschetwert 522¾; rig. Roggenlast 35,41; rev. Last 35,97

2) Bei einem Speicher ist L = 10½ Faden, B = 8½ Faden, D = 2¼ Faden, den Faden 6 Fuß.

L	1,02119
B	0,92942
D	0,35218
216	2,33445
α	9,13000
Tschetwert	3,76724 = 5851

3) Bei einem Speicher ist L = 10¼ Saschen, B = 8¼ Saschen, D = 2½ Saschen, die Saschen 7 Fuß.

L	1,01072
B	0,91645
D	0,39794
343	2,53529
α	9,13000
Tschetwert	3,99040 = 9781

3.

Den Inhalt eines Heuschobers zu berechnen.

Die Formel ist K = α.L.B.D, die Abmessungen L, B, D, sind Fuß, K Berkowez. Man rechnet auf einen Kubikfaden 2 Berkowez Heu, also $a = \frac{2}{343}$. $\log a = 7{,}76574$.

Beispiel.

Bei einem Heuschober ist
$L = 65$ Fuß, $B = 32$ Fuß,
$D = 15$ Fuß

L	1,81291
B	1,50515
D	1,17609
a	7,76574
Berkowez	2,25989 = 182

11.

Eine Quantität Brennholz, nach gesetzlichem Holzmaaß zu berechnen.

Das gesetzliche Holzmaaß ist $\frac{3}{4}$ Kubikfaden oder $257\frac{1}{4}$ Kubikfuß. Das Holz wird einen Faden hoch und breit aufgestellt, und der Scheit oder Kloben ist im Durchschnitt $2\frac{1}{4}$ Arschin oder $\frac{3}{4}$ Faden = 63 Zoll lang. Dieses Maaß heißt die dreibrändige Faden, und beträgt ungefähr 9 Fuder. Nimmt man den Kloben nur eine Elle = 21 Zoll lang, so heißt dieses Maaß eine einbrändige Faden. Da aber in verschiedenen Gegenden des Reichs provinzielle Holzmaaße im Gebrauch sind, so sey die Anzahl der Faden nach provinziellem Maaß $= M$, das Verhältniß des provinziellen Holzmaaßes zum gesetzlichen $= a$, so ist die Anzahl der Faden nach gesetzlichem Holzmaaß $K = a \cdot M$.

Wenn umgekehrt der Preis des provinziellen Holzmaaßes durch a dividirt wird, so ergiebt sich der Preis des gesetzlichen Holzmaaßes. Diese Reduction gewährt ein Mittel zur Vergleichung der Preise des Brennholzes in verschiedenen Gegenden des Reichs. Nach meinen Ermittelungen kommen nachstehende provinzielle Maaße vor:

Holzmaaß	hoch,	breit,	Kloben	a	log a
gesetzlich	7 Fuß,	7 Fuß	5¼ Fuß	1	—
einbrändig	7' —	7' —	1¾ —	$\frac{1}{3}$	9,52288
Moskau	7' —	7' —	5$\frac{5}{6}$ —	1$\frac{1}{9}$	0,04575
Finnland*	3 Ellen	4 Ellen	1¼ Ellen	0,43117	9,63465
Reval	88,"4	88,"4	21,"166	0,37208	9,57064
Riga	8' —	9' —	2' —	0,55975	9,74800
Mitau					
Kronsfloßholz	7' —	7' —	6' 6¾"	1,25	0,09691
Torfsteine	6' —	6' —	6' —	0,83964	9,92409
	7' —	7' —	7' —	1$\frac{1}{3}$ —	0,12493
Dorpat	8' —	8' —	8 —	1,9903	0,29891

* die finnländische oder schwedische Elle = 23,379 Zoll.

Beispiele.

1) Bei einem der Behörde zur Bestätigung vorgelegten Anschlage für das erste Halbjahr 1833 fand ich, daß man den halbjährlichen Bedarf von 94½ einbrändigen Faden auf 42 Faden Kronsfloßholz zu R.S. 5,50 berechnet hatte. Um wie viel war dieser Anschlag zu hoch?

94½	1,97543	25,2	1,40140
$\frac{1}{3}$	9,52288	42	1,62325
1,25	0,09691	5,5	0,74036
25,2	1,40140		2,14176 = R.S. 138,60 sollte es seyn
			2,36361 = R.S. 231,00 angegeben

Der Anschlag war zu hoch um R.S. 92,40

2) Im September 1833 kostete der Faden Kronsfloßholz auf dem Platz R.S. 5, das Abführen 1, das Sägen 1, wie viel die gesetzliche Faden?

R.S. 7	0,84510
a	0,09691
R.S. 5,60	0,74819

3) Im Januar 1841 kostete der Faden von 7 Fuß, rund, das Birken = Brennholz R.S. 7,50 wie viel die gesetzliche Faden?

R.S. 7,50	0,87506
a	0,12493
R.S. 5,62½	0,75013

5.

<u>Den Preis einer Stange russischen geschmiedeten Eisens aus den Preisen zweier anderen Stangen von gleichem Gewicht zu berechnen.</u>

Gesetzlich sollen sich (Rechenbuch II. 287) bei gleichem Gewicht die Unterschiede der Preise wie die Unterschiede der Oberflächen verhalten. Das Stabeisen ist vierkantig, also $K = L.\,B.\,D$, $A = 2\,L.\,B + 2\,L.\,D = 2\,K\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{B}\right)$. Setzt man $\frac{1}{D} + \frac{1}{B} = c$, und bezeichnet die Preise durch p, p', p'', so ist $\frac{p - p'}{p' - p''} = \frac{c - c'}{c' - c''}$. Sieht man p', p'' als die gegebenen Preise, p als den gesuchten Preis an, und setzt man den festen Preis $m = \frac{p''c' - p'c''}{c' - c''}$, den festen Faktor $a = \frac{p' - p''}{c' - c''}$, so ist jeder andere Preis $p = m + a.\,c$, wornach man leicht eine Tabelle berechnen kann.

<u>Beispiel.</u> Ein Pud Stabeisen kostet bei 3 Zoll Breite, $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke, Kop. S. $92\frac{1}{2}$, bei $1\frac{1}{2}$ Zoll Breite und $\frac{1}{8}$ Zoll Dicke Kop. S. 155, wie viel bei jeder anderen Breite und Dicke?

$B' = 3$, $D' = \frac{1}{2}$, $c' = 2\frac{1}{3}$, $p' = 92\frac{1}{2}$

$B'' = 1\frac{1}{2}$, $D'' = \frac{1}{8}$, $c'' = 8\frac{2}{3}$, $p'' = 155$

also $m = \frac{1320}{19} = 69{,}474$ $a = \frac{1500}{152} = 9{,}868$

$B = 2$, $D = \frac{1}{4}$, $c = 4\frac{1}{2}$, $p =$ Kop. S. 113,88

Bei dem sogenannten sortirten Eisen ist der Querschnitt ein regelmäßiges Vieleck oder ein Kreis, also $K = \frac{1}{4}\,L.\,D.\,P$, $A = L.\,P$ also $A = 4\,K.\,\frac{1}{D}$. Setzt man also $\frac{1}{D} = c$, so erhält man dieselbe Formel wie oben.

<u>Beispiel.</u> Ein Pud sortirtes Eisen kostet bei $1\frac{1}{4}$ Zoll Dicke Kop. S. $92\frac{1}{2}$, bei $\frac{1}{4}$ Zoll Dicke

Log. V. 339, wie viel bei jeder andern Dicke?

$D' = 1\frac{3}{4}$, $c' = \frac{4}{5}$, $p' = 92\frac{1}{2}$

$D'' = \frac{1}{4}$, $c'' = 4$, $p'' = 339$

also $m = 30,875$, $\alpha = 77,03125$

$D = \frac{5}{8}$, $c = 1\frac{3}{5}$, $p = \text{Log V. } 154\frac{1}{8}$

6.

Das Gewicht eiserner Stangen, Platten, Kugeln etc. u. s. w. zu berechnen.

Der körperliche Inhalt = K, der vom spezifischen Gewicht abhängende Factor = α, das absolute Gewicht = G, also $G = \alpha . K$. Nach meiner Abwägung wiegt ein Cubikfuß russisches Schmiedeeisen 541,36 russische Pfund, Gußeisen aber 492,78 Pf. (Englisches Schmiedeeisen 538,60, Gußeisen 498,40). Wenn also K in Cubikzollen, G in Pfund ausgedrückt ist, so ist für Schmiedeeisen $\alpha = \frac{541,36}{1728}$, $\log \alpha = 9,49595$; für Gußeisen $\alpha = \frac{492,78}{1728}$, $\log \alpha = 9,45511$. Wenn die Länge L in Fuß, Arschin, oder Saschen angegeben ist, so muß man noch resp: mit 12, 28, 84, multipliciren.

Beispiele.

1) Eine vierkantige Stange Schmiedeeisen, L = $5\frac{1}{2}$ Fuß, B = $2\frac{1}{2}$ Zoll, D = $\frac{3}{4}$ Zoll.

L	1,81954
B	0,39794
D	9,87506
α	9,49595
Gewicht russ. Pfund 3877	1,58849

2) Ein sechskantiger Stab Schmiedeeisen, L = $3\frac{1}{2}$ Arschin, zwischen den Gegenflächen Dicke D = $2\frac{1}{2}$ Zoll

L	1,99123
D	0,39794
D	0,39794
c	9,93753
α	9,49595
Gewicht russ. Pfund 166,18	2,22059

3) Eine runde Stange Schmiedeeisen, L = 1⅜ Saschen, D = 1¼ Zoll.

L	0,13830
D	0,09691
D	0,09691
¼π	9,89509
α	9,49595
84	1,92428
Gewicht russische Pfund 44,406	1,64744

4) Eisenplatten zum Dachdecken sind 2 Arschin lang, 1 Arschin breit und wiegen 15 Pfund. Andere Eisenplatten sind 20⅔ Zoll lang, 14 Zoll breit, und wiegen 1,275 Pfund. Wie viel Dicken gehen auf einen Zoll?

L	1,74819	L	1,30373
B	1,44716	B	1,14613
α	9,49595	α	9,49593
	2,69130		1,94579
G	1,17609	G	0,10551
	1,51521 = 32¾ auf einen Zoll		1,84028 = 69¾ auf einen Zoll

5) Drei Platten verzinnten Eisenblech waren jede 14 Zoll lang, 10,2 Zoll breit, wogen aber: die erste 0,8; die zweite 0,7; die dritte $\frac{7}{15}$ Pfund. Wie viel Dicken auf einen Zoll?

L	1,14613		1,65068
B	1,00860	G	9,90309
α	9,49595	G	9,84510
	1,65068	G	9,66901
			1,74759 = 55,9 auf einen Zoll
			1,80558 = 63,9
			1,98167 = 95,9

6) Ein Pfeiler von Gußeisen L = 5½ Fuß, D = 6½ Zoll

L	1,81954
D	0,81291
D	0,81291
¼π	9,89509
α	9,45511
Gewicht russ. Pfund 624,5	2,79556

7) Röhre von Gußeisen L = eine Saschen; die Wand w = ⅓ Zoll, der äußere Durchmesser D = 3½"

L	1,92428
w	9,52288
D−w	0,50060
π	0,49715
α	9,45511
Gewicht russ. Pfund 79,44	1,90002

8) Das Gewicht einer Kanonenkugel von Gußeisen von 2 Zoll Durchmesser heißt in der russischen Artillerie das <u>Kalungpfund</u>. Wie schwer ist dieses Pfund, und wie viel wiegt demnach eine 8pfündige Kanonenkugel nach russischem Gewicht?

D^3	0,90309
$\frac{1}{6}\pi$	9,71900
a	9,45511
	0,07720 = 1,1945 russ. Pf. ein Kalungpfund
8	0,90309
	0,98029 = 9 Pf. 53⅓ Lot. die 8 pf. Kanonenkugel

7.

<u>Das Gewicht von Goldstangen, Goldplatten u.s.w. zu berechnen.</u>

Die Formel ist $G = a.K.$ Ein Cubikfuß gemünztes Gold von der 94 Probe wiegt 1300,62 russ. Pfund, jedes Pfund beträgt $117\frac{1}{2}$ Dukaten.
Also für Pfunde ist $a = \frac{1300,62}{1728}$ $\log a = 9,87660$
für Dukaten ist $a = \frac{1300,62 \times 117\frac{1}{2}}{1728}$ $\log a = 1,94664$,

<u>Beispiele:</u>

1) Bei einer Barre Dukatengold ist $L = 5''$. $B = \frac{3}{4}''$, $D = \frac{1}{2}''$. Gewicht russ. Pf. 1.39 Lot. 45 Zoli

L	0,69897
B	9,87506
D	9,69897
a	9,87660
	0,14960
$117\frac{1}{2}$	2,07004
Werth Dukaten 165,8 ..	2,21964

2) Das Gewicht eines Drahts Dukatengold ist 1 russ. Pf. die Dicke $\frac{1}{100}$ Zoll.

D^2	6,
$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
a	9,87660
12	1,07918
	6,85087
Die Länge 1409.7 Fuß... L	3,14913

3) Das Gewicht eines Drahts Dukatengold ist 1 russ. Pfund die Dicke $\frac{1}{1000}$ Zoll

D^2	4,
$\frac{1}{4}\pi$	9,89509
a	9,87660
42000	4,62325
	8,39494
Die Länge 40,277 Werst. .	1,60506

4) Ein Dukaten liefert	2729,73	3,43612
2729,73 Quadratzoll Blattgold	a	9,87660
wie dick ist es?	117½	2,07004
Auf einen Zoll 24141 ..	1/x	.. 5,38276
5) Bei Vergoldung des Sil-	36	1.55630
bers liefert ein Dukaten	a	9,87660
36 Quadratzoll Vergoldung	117½	2.07004
Auf einen Zoll 3.184 ...	1/x	3,50294

8.

Die Menge des zu Bauten erforderlichen Materials zu berechnen.

Die gesetzlichen Bestimmungen für Bauanschläge enthält der Befehl vom 15. Januar 1825. No. 30194, aus welchem ich folgendes aushebe:
„Bei Mauerwerk zu Fundamenten schlägt man zu der berechneten Anzahl Cubikfaden, für Ausfüllung der Zwischenräume noch den 6ten Theil hinzu. Nach dieser Zugabe rechnet man auf 5 Cubikfaden Steine, für Mörtel 1 Cubikfaden oder 480 Pud ungelöschten Kalk und 1 Cubikfaden Sand."
„Bei Mauern von Ziegeln rechnet man auf 1 Faden mit Inbegriff der Mörtelfugen 8 Ziegellängen, 16 Ziegelbreiten, 30 Ziegeldicken, so daß 3840 Ziegel einen Cubikfaden machen." (Nach meiner Ausmessung an mitauschen Ziegeln 1835 enthält ein Faden mit Inbegriff der Mörtelfugen 7½ Ziegellängen, 15 Ziegelbreiten, 23 Ziegeldicken, also 1 Cubikfaden 2587½ Ziegel.)
„Zu der berechneten Anzahl Ziegel schlägt man noch den 10ten Theil für zerbrochene hinzu. Nach dieser Zugabe

rechnet man, bei Gebäuden welche nicht über 6 Saschen hoch sind, auf 100000 Ziegel für Mörtel 6 Cubiksaschen ungelöschten Kalk und 10 Cubiksaschen Sand, oder 10 Cubiksaschen gelöschten Kalk.

Bei eisernen Klammern rechnet man auf 3 Cubikzoll ein Pfund. Bei Eisenplatten zu Dächern rechnet man das Gewicht einer Platte von zwei Quadratarschin zu 15 Pfund, und wegen der Umbiegung der Ränder 16 Platten auf 3 Quadratsaschen. Eine Platte von 1 Quadratarschin rechnet man zu $7\frac{1}{2}$ Pfund, und wegen der Umbiegung 12 Platten auf 1 Quadratsaschen.

Beiläufige Angaben des Gewichts der Materialien sind, auf einen Cubikfuß: Fichtenholz 1 Pud, Erde 2 Pud, Sand und Grand $2\frac{1}{2}$, Ziegel $3 - 3\frac{3}{4}$, feuchter Mörtel $3\frac{1}{2}$, Sandstein $3\frac{3}{4} - 4\frac{1}{3}$, Granit $4\frac{1}{2}$, Kalkstein $4\frac{2}{3}$ Pud. Genauere Bestimmungen findet man in meinem Rechenbuch II. 275–277.

9.

Den Inhalt cylindrischer Röhren und Gefäße zu berechnen.

Die Formel ist: $K = a . L . D^2$, die Länge L in Fuß, die innere Weite D in Zoll. Soll der Inhalt K in Cubikzoll angegeben werden, so ist $a = 3\pi$, $\log a = 0,97427$. Für K Cubikfuß ist $a = \frac{\pi}{576}$, $\log a = 7,73673$. Für Kruschken Stoof ist, weil ein Maaß = 75,0568 Cubikzoll, $a = \frac{3\pi}{75,0568}$, $\log a = 9,09888$. Da ein Cubikzoll destillirtes Wasser in der Luft bei $13\frac{2}{3}°$ Reaum. und 30 Zoll Barometerhöhe 367,96315 Doli wiegt, so ist für K russ. Pfund Wasser bei dieser Temperatur, $a = \frac{3\pi \cdot 367,96315}{9216}$, $\log a = 957553$

Beispiele.

1) Bei einem cylindrischen	L 0,52288
Fasse ist L = 3' 4" innere	D 1,47712
Weite D = 30".	D 1,47712
	a 9,09888
Inhalt russische Maaß 376,7	2,57600
2) Bei einer Wasserröhre ist	L 1,91116
L = 81½ Fuß, der Durchmesser	D 0,51188
D = 3¼ Zoll	D 0,51188
	a 9,57553
Wassergewicht russ. Pfund 323,93	2,51045

10.

Aus dem Inhalt cylindrischer Röhren oder Gefäße, ihre Länge oder Weite zu berechnen.

Da hier K gegeben, L oder D gesucht, so ist die Formel: $a . K = L . D^2$, wo a den umgekehrten Werth des a in der vorigen Aufgabe hat, also wenn L in Fuß, D in Zoll, so ist

für K Cubikzoll $\log a = 9,02573$
für K Cubikfuß $\log a = 2,26327$
für K Maaß $\log a = 0,90112$
für K Pfund Wasser $\log a = 0,42447$

Beispiele.

1) Bei einem runden Balken	K 1,25527
ist K = 18 Cubikfuß, L = 20 Fuß.	a 2,26327
	L 1,30103
	D^2 2,21751
Durchmesser 12,845 Zoll	D 1,10875

2) Bei einer Röhre ist
K = 3750 Cubikzoll.
D = 5½ Zoll.
Länge in Fuß 13,153

K	3,57403
a	9,02573
D	0,74036
D	0,74036
L	1,11904

3) Bei einem cylindrischen Kasten ist K = 125 Kubf.
L = 3½ Fuß
Weite in Zollen 16,864

K	2,09691
a	0,90112
L	0,54407
D^2	2,45396
D	1,22698

4) Bei einer Wasserröhre ist K = 68 Pfund Wasser innere Weite D = 2⅔ Zoll.
Länge in Fuß 33,192

K	1,83251
a	0,42447
D	0,36797
D	0,36797
L	1,52104

11.

Den Inhalt vierkantiger gleichförmig breiter und dicker Balken und Bretter zu berechnen.

Die Formel ist K = a.L.B.D, wo L in Fuß, B und D in Zollen, K in Cubikfuß, also $a = \frac{1}{144}$
log a = 7,84164.

Beispiele.

1) Bei einem Balken ist
L = 57'; B = 25"; D = 18".
Cubikfuß 178 ⅛

L	1,75587
B	1,39794
D	1,25527
a	7,84164
K	2,25072

2) Bei 1000 Stück Brettern ist L = 28'; B = 11½" D = 1½".
Cubikfuß 3354

1000	3.
L	1,44716
B	1,06070
D	0,17609
a	7,84164
K	3,52559

3) Bei 1583 Stück Brettern ist im Durchschnitt L = 32'; B = 12½"; D = 1¾".
Cubikfuß 7695

1583	3,19948
L	1,50515
B	1,09691
D	0,24304
a	7,84164
K	3,88622

12.

Den Inhalt vierkantiger, sechskantiger überhaupt abgestumpft pyramidalischer Balken zu berechnen, welche von unten nach oben einen Abfall haben oder schmaler werden.

Die Formel ist: $K = \alpha . c . L (D+d)^2 + \frac{1}{3} \alpha . c . L (D-d)^2$ wo die Länge oder Höhe L in Fuß; D und d in Zollen sind zwei gleichnamige Linien, Kanten oder Durchmesser der Querschnitte, $c.D^2$ und $c.d^2$ sind die Flächen der Querschnitte, $\alpha = \frac{1}{576}$, $\log \alpha = 7{,}23958$; $\frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{1728}$, $\log = 6{,}76246$. Beim Quadrat ist $c = 1$. Bei anderen regelmäßigen Figuren bestimmt man c nach V. 51.

Beispiele.

1) Bei einem vierkantigen Balken ist $L = 49$ Fuß die Querschnitte Quadrate. $D = 14''$, $d = 12''$, $c = 1$.

L	1,69020	L	1,69020
$D+d$	1,41497	$D-d$	0,30103
$D+d$	1,41497	$D-d$	0,30103
α	7,23958	$\frac{1}{3}\alpha$	6,76246
	1,75972		9,05472
	57,507		0,114

Hieraus $K = 57{,}621$ Kubikfuß

2) Bei einem vierkantigen Balken ist $L = 48$ Fuß, die Querschnitte sind keine Quadrate; unten $D = 14''$, $D' = 12''$, also $c = \frac{12}{14}$, oben $d = 10''$

L	1,68124	L	1,68124
$D+d$	1,38021	$D-d$	0,60206
$D+d$	1,38021	$D-d$	0,60206
c	9,93305	c	9,93305
α	7,23958	$\frac{1}{3}\alpha$	6,76246
	1,61429		9,58087
	41,143		0,381

Hieraus $K = 41{,}524$ Kubf.

3) Bei einem sechskantigen Balken ist $L = 37'$; der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises $D = 14''$, $d = 11''$; $c = 0{,}8660254$

L	1,56820	L	1,56820
$D+d$	1,39794	$D-d$	0,47712
$D+d$	1,39794	$D-d$	0,47712
c	9,93753	c	9,93753
α	7,23958	$\frac{1}{3}\alpha$	6,76246
	1,54119		9,22243
	34,769		0,167

Hieraus $K = 34{,}936$ Kbf.

13.

Den Inhalt runder Balken von gleichför- migen Stärke zu berechnen.

Die Formel ist $K = a.L.D^2$, $a = \frac{\pi}{576}$; $\log a = 7,73673$ oder $K = a.L.P^2$, $a = \frac{1}{576\pi}$, $\log a = 6,74243$, wo L in Fuß, D und P in Zollen. Wenn die Balken noch mit Rinde bedeckt sind, so nimmt man die Dicke der Rinde zu $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$, oder $\frac{1}{8}$ des äußern Durchmessers an, und muß dann den obigen Inhalt resp. mit $\frac{121}{144}$, $\frac{81}{100}$, $\frac{49}{64}$, multipliciren. Bei den Masten, Spieren, Bugsprieten, Bartillen, wird der Umfang mittelst eines umgelegten Bandes am Fischbein in einer Höhe von 12 Fuß über dem untern behauenen Ende gemessen. Die Einheit ist der holländische Palm = $\frac{1}{3}$ holländische Fuß = 3,717 engl. Zoll. Wenn P in Palmen, so ist $\log a = 7,88281$ (Rigische Handelsordnung 7. Decbr 1765. Kap I § 136. Instruction für die russischen Mastenbraker 15. Juni 1784 Art. 7. In der Schrift: „Berechnung der Hölzer und Masten Riga 1829" sind die Verhältnisse S. 26. 30. nach der obigen Bestimmung des Palm zu berichtigen)

Beispiel.

1) Bei einem runden Balken ist $L = 49'$, der Durchmesser ohne Rinde $D = 12''$.

L	1,69020
D	1,07918
D	1,07918
a	7,73673
Cubikfuß 38,484 = K	1,58529

2) Bei einem runden Balken ist $L = 36'$, ohne Rinde $D = 14''$.

L	1,55630
D	1,14613
D	1,14613
a	7,73673
Cubikfuß 38,484 = K	1,58529

3) Bei einem runden Balken ist $L = 46'$; $D = 13''$, ohne Rinde

L 1,66276
D 1,11394
D 1,11394
α 7,73673

Kubikfuß 42,40 = K 1,62737

4) Bei einem runden Balken ist $L = 26'$; $D = 15''$ mit Rinde, welche $\frac{1}{12}$

L 1,41497
D 1,17609
D 1,17609
α 7,73673
$\frac{121}{144}$ 9,92443

Kubikfuß 26,81 = K 1,42831

5) Bei einem runden Balken ist $L = 35'$; der Umfang ohne Rinde $P = 32''$

L 1,54407
P 1,50515
P 1,50515
α 6,74243

Kubikfuß 19,806 = K 1,29680

6) Bei einem runden Balken ist $L = 49$; $D = 12\frac{3}{4}''$ ohne Rinde.

L 1,69020
D 1,10551
D 1,10551
α 7,73673

Kubikfuß 43,446 = K 1,63795

7) Bei einem runden Balken ist $L = 35'$; der Umfang $P = 11$ Palmen.

L 1,54407
P 1,04139
P 1,04139
α 7,88281

Kubikfuß 32,334 = K 1,50966

14.

<u>Den Inhalt runder abgestumpft konischer Balken zu berechnen, welche von unten nach oben einen Abfall haben, oder schmaler werden.</u>

Die Formeln sind, für L in Fuß, D, ∂, P, p, in Zollen:

$$K = \alpha . L(D+\partial)^2 + \tfrac{1}{3}\alpha L(D-\partial)^2, \quad \alpha = \frac{\pi}{2304}, \quad \tfrac{1}{3}\alpha = \frac{\pi}{6912}$$

$$\log = 7,13467 \qquad \log = 6,65755$$

$$K = \alpha . L(P+p)^2 + \tfrac{1}{3}\alpha L(P-p)^2, \quad \alpha = \frac{1}{2304\pi}, \quad \tfrac{1}{3}\alpha = \frac{1}{6912\pi}$$

$$\log = 6,14037, \quad \log = 5,66325$$

Wenn der Umfang in Zollen gemessen ist, so ist $\log a = 7{,}28075$, $\log \frac{1}{3} a = 6{,}80363$

Beispiele.

1) Bei einem runden abfallenden Balken ist $L = 46'$, $D = 15''$, $d = 10''$.

L	1,66276	L	1,66276
$D+d$	1,39794	$D-d$	0,69897
$D+d$	1,39794	$D-d$	0,69897
a	7,13467	$\frac{1}{3}a$	6,65755
	1,59331		9,71825
	39,202		0,523

Hieraus $K = 39{,}725$ Cbf.

2) Bei einem runden abfallenden Balken ist $L = 47\frac{1}{2}'$, $P = 45''$, $p = 31\frac{1}{2}''$

L	1,67669	L	1,67669
$P+p$	1,88366	$P-p$	1,13033
$P+p$	1,88366	$P-p$	1,13033
a	6,14037	$\frac{1}{3}a$	5,66325
	1,58438		9,60060
	38,405		0,399

Hieraus $K = 38{,}804$ Cbf.

3) Bei einem runden abfallenden Balken ist $L = 50'$, $D = 13''$, $d = 9''$.

L	1,69897	L	1,69897
$D+d$	1,34242	$D-d$	0,60206
$D+d$	1,34242	$D-d$	0,60206
a	7,13467	$\frac{1}{3}a$	6,65755
	1,51848		9,56064
	32,998		0,363

Hieraus $K = 33{,}361$ Cbf.

4) Bei einem runden abfallenden Balken ist $L = 46\frac{3}{4}'$, $P = 16\frac{3}{4}$ Zoll, $p = 11\frac{1}{2}$ Zoll.

L	1,66978	L	1,66978
$P+p$	1,44326	$P+p$	0,67669
$P+p$	1,44326	$P-p$	0,67669
a	7,28075	$\frac{1}{3}a$	6,80363
	1,83705		9,82679
	68,715		0,671

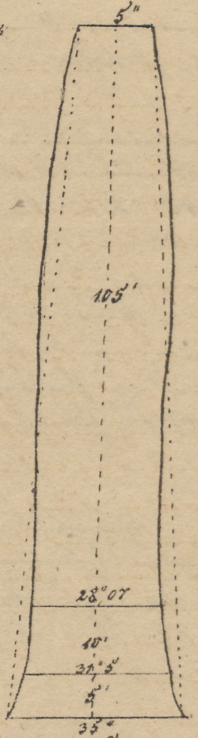
Hieraus $K = 69{,}386$ Cbf.

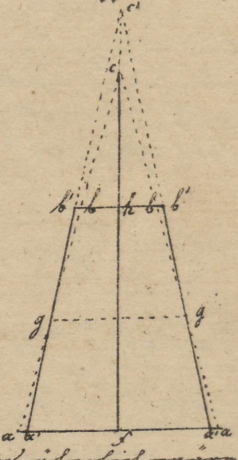
15.

Den Inhalt eines Baumes zu berechnen.

Der berühmte kön. sächsische Oberforstrath Cotta, dessen „Tafeln zur Bestimmung des Inhalts der runden Hölzer. Dresden 1838. 3te Afl." in allgemeinem Gebrauch sind, hat nachstehende

Untersuchungen ausgemittelt, daß jeder ausgewachsene Baum durchschnittlich eine gewiße mittlere Form hat, welche er den <u>Normalbaum</u> nennt. Dieser Baum besteht aus drei Theilen 1) aus einem untern hohl oder einwärts gekrümmten Stück von 5 Fuß Höhe, unten 35 Zoll, oben 31,5 Zoll im Durchmesser, an Inhalt 29,60 Cubikfuß (kubisch berechnet 30,18 Cbf.) 2) aus einem geradlinig abfallenden oder kegelmischen Stück von 10 Fuß Höhe, unten 31,5 Zoll, oben 28,07 Zoll im Durchmesser, an Inhalt 48,44 Cbf. 3) aus einem erhabenen oder auswärts gekrümmten Stück von 105 Fuß Höhe, unten 28,07 Zoll, oben 5 Zoll im Durchmesser, an Inhalt 232,77 Cbfuß (kubisch berechnet 181,975 Cbf.). Der Gesammtinhalt dieser drei Stücke ist 310,81 Cubikfuß. Ein parallel abgestumpfter Kegel von 120 Fuß Höhe, unten 35, oben 5 Zoll im Durchmesser, hat nahezu denselben Inhalt nämlich 310,39 Cbf. Bei einem solchen Kegel ist der mittlere Durchmesser gg = 20", die Spitze c hat eine Höhe ch = 20' über dem obern Ende, der mittlere Durchmesser 20" verhält sich also zur Baumhöhe fh = 120'; wie 1 : 72, die Summe der beiden Durchmesser 35" + 5", welche die <u>Stärke</u> heißt, verhält sich zur Baumhöhe wie 1 : 36.





Wenn nun die Form aller Bäume diesem Normalbaum ähnlich wäre, so müßte ihr mittlerer Durchmesser $\frac{1}{72}$ ihrer

Stärke $\frac{1}{36}$ der Höhe seyen. Man verlangt aber kubische Tafeln, welche für jede Baumhöhe und jede Stärke, den Inhalt anzeigen.
Die Cottaschen Tafeln bestehen aus drei Abtheilungen 1) 1"–4" Stärke bei 1–33' Höhe 2) 5"–28" Stärke bei – 125' Höhe 3) 29"–100" Stärke bei 1–61' Höhe. Der Verf. hat die Art der Berechnung nicht geometrisch erläutert, da es ihm wie er S. 10. sagt, nicht um mathematische Spitzfindigkeiten (?) zu thun war. Aus den von ihm gegebenen Andeutungen läßt sich indessen folgendes entnehmen: Es sey a'a'b'b' der gegebene Baum, die Höhe fk = L in Fuß, die Durchmesser unten a'a', oben b'b' in Zollen angegeben. Man theilt die Seitenlinien a'b', a'b', in g, g, in die Hälfte verlängert die Axe fk nach c, so daß ck = 20 Fuß, und zieht cg, cg, welche die Durchmesser oben bb, unten aa, abschneiden. Nun sind zwar die Flächen, nicht aber die körperlichen Räume aabb, a'a'b'b', einander gleich. Indessen diese Voraussetzung liegt den Cottaschen Tafeln zum Grunde. Es ist nämlich $bb = gg \cdot \frac{20}{20+\frac{1}{2}L}$, und $aa = gg \cdot \frac{20+L}{20+\frac{1}{2}L}$, also $aa+bb = 2 \cdot gg$, und $aa-bb = gg\,\frac{L}{20+\frac{1}{2}L}$, also $\frac{aa-bb}{aa+bb} = \frac{D-d}{D+d} = \frac{L}{40+L}$

Nun ist die allgemeine Formel:

$$K = \frac{\pi}{2304} \cdot L\,(D+d)^2 + \frac{\pi}{6912}\,L \cdot (D-d)^2$$

oder $K = K' + K''$, wo $K' = \frac{\pi}{2304}\,L(D+d)^2$, der cylindrische Theil, und $K'' = \frac{1}{3}\,K' \cdot \left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2$ die Ergänzung heißt. Nach der Voraussetzung der Cottaschen Tafeln ist nun $\frac{D-d}{D+d} = \frac{L}{40+L}$. Die

Formel, welche den Cottaschen Tafeln zum Grunde liegt, ist also folgende:

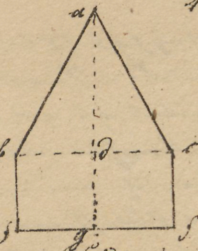
$$K = a.b.\ L\,(D+d)^2,\quad a = \frac{\pi}{2304},\quad b = 1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{L}{40+L}\right)^2$$

Beispiele.

	$L = 33'$	$L = 125'$	$L = 120'$	$L = 61'$	$L = 60'$
	$D+d = 4''$	$D+d = 5''$	$D+d = 28''$	$D+d = 62''$	$D+d = 100$
L	1,51851	2,09691	2,07918	1,78533	1,77815
$40+L$	1,86332	2,21748	2,20412	2,00432	2
	9,65519	9,87943	9,87506	9,78101	9,77815
	9,31038	9,75886	9,75012	9,56202	9,55630
$\frac{2}{3}$	9,52288	9,52288	9,52288	9,52288	9,52288
	8,83326	9,28174	9,27300	9,08490	9,07918
$b =$	1,06812	1,19131	1,1875	1,12159	1,1200
L	1,51851	2,09691	2,07918	1,78533	1,77815
$D+d$	0,60206	0,69897	1,44716	1,79239	2,
$D+d$	0,60206	0,69897	1,44716	1,79239	2,
a	7,13467	7,13467	7,13467	7,13467	7,13467
b	0,02862	0,07602	0,07463	0,04984	0,04922
K	9,88592	0,70554	2,18280	2,55462	2,96204
$K =$	0,769;	= 5,076;	= 152,33	= 358,61	= 916,3

Diese Zahlen stimmen vollkommen mit den Cottaschen Tafeln überein. Die genaue Rechnung nach der konischen Formel wird ebenso geführt, indem man nur statt des hypothetischen Verhältnisses $\frac{L}{40+L}$ das richtige $\frac{D-d}{D+d}$ setzt

	$L = 33'$	$L = 125'$	$L = 120$	$L = 61'$	$L = 60'$
	$D = 3'',\ d = 1''$	$D = 4'',\ d = 1''$	$D = 18'',\ d = 10''$	$D = 59'',\ d = 3''$	$D = 58'',\ d = 42''$
$D-d$	0,30103	0,47712	0,90309	1,74819	1,20412
$D+d$	0,60206	0,69897	1,44716	1,79239	2,
	9,69897	9,77815	9,45593	9,95580	9,20412
	9,39794	9,55630	8,91186	9,91160	8,40824
$\frac{2}{3}$	9,52288	9,52288	9,52288	9,52288	9,52288
	8,92082	9,07918	8,43474	9,43448	7,93112
$b =$	1,08333	1,1200	1,02721	1,27194	1,00853
L	1,51851	2,09691	2,07918	1,78533	1,77815
$D+d$	0,60206	0,69897	1,44716	1,79239	2.
$D+d$	0,60206	0,69897	1,44716	1,79239	2.
a	7,13467	7,13467	7,13467	7,13467	7,13467
b	0,03476	0,04922	0,01166	0,10447	0,00369
	9,89206	0,67874	2,11983	2,60925	2,91651
$K =$	0,780	= 4,772	= 131,77.	= 406,68	= 825,1



16.

Den Inhalt der Garbenhaufen zu berechnen

Auf meine Bitte veranstaltete ein erfahrener Landwirth in Litthauen eine sorgfältige Ausmessung eines Garbenhaufens (Kujie) wie solche in der dortigen Gegend nach der Ernte aufgeschichtet werden. Bei dem cylindrischen Rumpfstücke war die Höhe $dg = L = 8$ Fuß, der Durchmesser der Grundfläche $bc = D = 18$ Fuß bei dem konischen Dache abc war die Höhe $ad = L' = 13$ Fuß. Der Inhalt war $94\frac{1}{2}$ Schock oder 5670 Garben, welche einen reinen Ertrag von $155\frac{1}{6}$ rig. Loof Roggen lieferten. Die Formel ist $K = \frac{\pi}{12} \cdot D^2 (3L + L')$

$3L+L'$	1,56820	K	3,49671	K	3,49671
D	1,25527	100	2,	100	2,
D	1,25527	$94\frac{1}{2}$	1,97543	$155\frac{1}{6}$	2,19080
$\frac{\pi}{12}$	9,41797	3321	3,52128	2023	3,30591
K	3,49671				

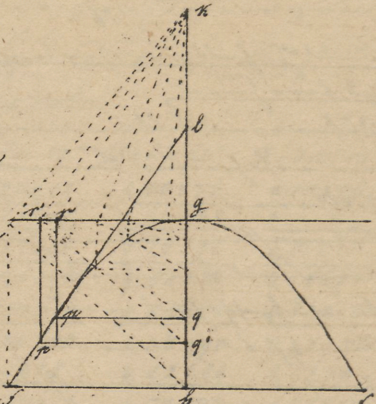
Demnach war der Inhalt des Garbenhaufens 3138 Kubikfuß; in einem Garbenhaufen von 3321 Kbfuß. sind 100 Schock Garben, und in einem Haufen von 2023 Kbfuß. sind 100 rig. Loof Roggen enthalten.

17.

Den Inhalt eines Fasses bei vorausgesetzter parabolischer Krümmung der Dauben zu berechnen.

Erster Theil.

Den Flächeninhalt eines parabolischen Segments zu bestimmen.



Es sey fgf (V. 64. 69) ein Bogen der Parabel, g der Scheitel, gh, gr, die bei den rechtwinklig einander schneidenden Axen der Abscissen und Ordinaten, gh = A eine feste Linie welche der Parameter heißt. Für jede beliebige Ordinate gr = y, zieht man kr, und darauf rq senkrecht, wodurch sich die Abscisse gq = x ergiebt. Der Durchschnitt der Parallellinien rp, qp, giebt den entsprechenden Punct p der Parabel. Also ist für jeden Punct derselben $y^2 = A.x$. Für einen zweiten Punct p' ist $y'^2 = A.x'$. also $y'^2 - y^2 = A(x' - x)$. Aber $y'^2 - y^2 = (y' - y)(y' + y)$ also $\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{A}{y'+y}$. Es sey lp eine Berührende, so ist, je näher y und y' einander sind, desto genauer $\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{pq}{lq} = \frac{y}{lq}$, und $\frac{A}{y'+y} = \frac{A}{2y}$. Also ist genau $\frac{y}{lq} = \frac{A}{2y}$, also $2y^2 = A.lq$, also $lq = 2x$, $gl = x$. Hierdurch ergiebt sich der Punct l, aus welchem die Berührende gezogen wird.

Je näher y und y' einander sind, desto genauer ist $y' + y = \frac{4}{3} \cdot \frac{y'^2 + y'y + y^2}{y'+y} =$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{(y'-y)(y'^2 + y'y + y^2)}{(y'-y)\cdot(y'+y)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{y'^3 - y^3}{y'^2 - y^2} =$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{y'^3 - y^3}{A(x'-x)}$, also desto genauer $\frac{1}{2}(y'+y)(x'-x)$ $= \frac{2}{3} \cdot \frac{y'^3 - y^3}{A}$. Das Glied links ist das zwischen den Ordinaten pq = y und p'q' = y' enthaltene Trapezium. Je näher y und y', einander sind desto genauer ist die Summe aller Glieder links dem halben Segment $fgh = \frac{1}{2} F$ zugleich. Auf der andern Seite haben sich bei der Summirung aller Differenzen $y'^3 - y^3$ alle Zwischenglieder aufgehoben, und die Summe ist also fh^3. Folglich ist genau das halbe Segment $\frac{1}{2} F = \frac{2}{3} \frac{fh^3}{A} = \frac{2}{3} fh \cdot gh$, also $F = \frac{4}{3} fh \cdot gh$ (F. 69.)

Zweiter Theil.

Den Schwerpunkt eines parabolischen Segments zu bestimmen.

Die zwischen dem parabolischen Bogen fg und der Axe gr enthaltene Fläche beschreibe um die Axe gr einen Körper, so beschreiben die Punkte p, p' Kreise deren Halbmesser x, x', deren Flächen $\pi \cdot x^2$, $\pi \cdot x'^2$, oder $\frac{\pi}{A^2} \cdot y^4$, $\frac{\pi}{A^2} \cdot y'^4$ sind. Also beschreibt das Trapezium $rpp'r'$ einen Körper dessen Inhalt, je näher y und y' sind, desto genauer $= \frac{\pi}{A^2} \cdot \frac{y^4 + y'^4}{2} (y' - y)$ ist, oder $=$

$$\frac{\pi}{A^2} \cdot \frac{y'^4 + y'^3 y + y'^2 \cdot y^2 + y' \cdot y^3 + y^4}{5} (y' - y)$$

Aber die Multiplication giebt:

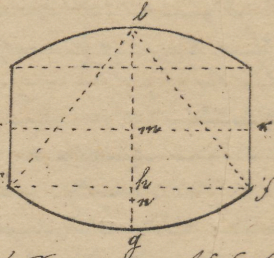
$$(y'^4 + y'^3 \cdot y + y'^2 \cdot y^2 + y' \cdot y^3 + y^4)(y' - y) = y'^5 - y^5.$$

Also je näher y und y' sind desto genauer ist der von dem Trapezium $rpp'r'$ beschriebene Körper $= \frac{\pi}{A^2} \cdot \frac{y'^5 - y^5}{5}$. Durch Summirung der Differenzen $y'^5 - y^5$ heben sich alle Zwischenglieder auf, und man erhält fh^5. Also ist der vom Segment fgr um gr beschriebene Körper genau $= \pi \frac{fh^5}{5 A^2} = \frac{1}{5} \pi \cdot fh \cdot gh^2$. Der vom Rechteck $fhgr$ beschriebene Cylinder ist $= \pi \cdot fh \cdot gh^2$, also ist der vom halben parabolischen Segment fgh

beschriebene Körper $= \frac{4}{5}\pi . fk . gh^2$. und der vom ganzen Segment fgf beschriebene Körper $= \frac{4}{5}\pi ff . gh^2$. Es sey n der Schwerpunkt des parabolischen Segments $fgf = T$, so muß, weil die Axe gh dieses Segment symmetrisch theilt, n in gh liegen. Also ist der genannte Körper auch (VII 49.) $= 2\pi . gn . T. = 2\pi . gn . \frac{2}{3} ff . gh$. Man hat also die Gleichung $2\pi . gn . \frac{2}{3} ff . gh = \frac{4}{5}\pi ff . gh^2$ also ist $gn = \frac{3}{5} gh$, und $hn = \frac{2}{5} gh$.

Dritter Theil

Den Inhalt des parabolischen Fasses zu bestimmen.



Dieser Inhalt entsteht durch Umdrehung der Figur $\kappa f g f \kappa$ um die Axe $\kappa\kappa$. Im ersten Theil wurde der Flächeninhalt des parabolischen Segments $fgf = T = \frac{2}{3} ff . gh$ bestimmt. Im zweiten Theil wurde der Schwerpunkt n dieses Segments gefunden, $hn = \frac{2}{5} gh$, also $mn = mh + \frac{2}{5} gh$. Also ist der körperliche Inhalt des vom Segment fgf durch Umdrehung um $\kappa\kappa$ beschriebenen Raumes (VII. 49.) $= 2\pi . mn . \frac{2}{3} ff . gh = \frac{4}{3}\pi . ff . gh (mh + \frac{2}{5} gh)$ der durch Umdrehung des Rechtecks $\kappa f f \kappa$ um $\kappa\kappa$ beschriebene Cylinder ist $= \pi . ff . mh^2$; also der körperliche Inhalt des ganzen Fasses

$K = \pi ff . (mh^2 + \frac{4}{3} mh . gh + \frac{8}{15} gh^2)$. Setzt man die Länge des Fasses $ff = L$ den Spunddurchmesser $lg = 2 . mg = D$, den Bodendurchmesser $2 . \kappa f = 2 . mh = d$, so ist $mh^2 = \frac{1}{4} d^2$, $\frac{4}{3} mh . gh = \frac{1}{3} d (D - d)$, $\frac{8}{15} gh^2 = \frac{2}{15} (D - d)^2$, also

$$1)\quad K = \frac{\pi}{60} L . (8 . D^2 + 4 D . d + 3 d^2)$$

Wenn L, D, und d in Zollen gegeben sind, so erhält man K in Cubikzollen. Das geeignetste Maaß zur Bestimmung des Faßinhalts ist aber das Stoof, indem alle größeren Weinmaaße Vielfache desselben sind, nämlich ein Stückfaß 960, eine Tonne 400, eine Pipe 360, ein Oxhoft oder Barrique 180, ein Ohm 120, ein Anker 30, ein Stekan 15, ein Wedro 10, ein Viertel oder eine Velte 6 Stoof. Die Größe dieses Maaßes ist in den verschiedenen Ländern ziemlich übereinstimmend, nämlich:

Die alte französische Velte oder der Septier hält nach genauer Ausmittelung einer Commission 375,6 par. Cbzoll., also das Stückfaß 60096 oder 72754 englisch. Cbzoll, also das Stoof 75,785 Cubikzoll.

Das jetzige bordeauxer Oxhoft oder Barrique von 32 Veltes hält 229,63 Litres, also das Stückfaß 1149,65 Litres oder 70158 engl. Cbz, also das Stoof 73,081 Cubikzoll.

Das frankfurter Stückfaß wiegt nach Eytelwein 2449,4 frankf. köln. Pfund Wasser, und hält also 70105,6 engl. Cbz., also das Stoof 73,027 Cbzoll.

Das russische Stückfaß wiegt gesetzlich im leeren Raum bei $13\frac{1}{3}°$ Reaumur 2880 russ. Pf. Wasser, und hält also 72054,5 Cbz. also das Stoof 75,0568 Cbzll.

Das rigische Stückfaß hält nach meiner Ausmittelung des neuen rigischen Stoofs 74711 Cbz. das Stoof 77,824 Cbz.

Um also den Inhalt des Fasses in russischen Stoof zu erhalten, dividirt man die obige Formel mit 75,0568. Hiernach ist

$$2)\quad K = a'.\, L.\, D^2 + a''.\, L.\, D.\, d + a'''.\, L.\, d^2$$

$\log a' = 7{,}74670$; $\log a'' = 7{,}44567$; $\log a''' = 7{,}32073$;

Beispiele.

1) $L = 30''$, $D = 22''$, $d = 20''$

L 1,47712	L 1,47712	L 1,47712	I 81,03
D 1,34242	D 1,34242	d 1,30103	II 36,83
D 1,34242	d 1,30103	d 1,30103	III 25,11
α' 7,74670	α'' 7,44567	α''' 7,32073	142,97 Maß
I 1,90866	II 1,56624	III 1,39991	

2) $L = 41''$, $D = 36''$, $d = 28''$

L 1,61278	L 1,61278	L 1,61278	I 296,54
D 1,55630	D 1,55630	d 1,44716	II 115,32
D 1,55630	d 1,44716	d 1,44716	III 67,27
α' 7,74670	α'' 7,44567	α''' 7,32073	479,13 Maß
I 2,47208	II 2,06191	III 1,82783	

Vierter Theil.

Den Inhalt des Fasses aus der Diagonallinie zu bestimmen.

Der Visirstab wird durch den Punkt l in die Diagonalrichtung lf gebracht, und soll auf der Eintheilung den Inhalt anzeigen. Es sey die Diagonallinie $lf = E$, der Winkel $flh = n$, so ist $fh = \frac{1}{2} L = E . \sin n$, $lh = \frac{1}{2}(D+d) = E . \cos n$ also $\frac{L}{D+d} = tg\, n$. Setzt man ferner $\frac{D-d}{D+d} = c$, so ist $D - d = (D+d) c$, also $gh = \frac{1}{2}(D+d) . c$, $mh = \frac{1}{4}(D+d)(1-c)$, also

$$K = \tfrac{1}{4}\pi L . (D+d)^2 . \left(\tfrac{1}{4}(1-c)^2 + \tfrac{2}{3} c(1-c) + \tfrac{8}{15} c^2\right)$$

oder $K = \frac{\pi}{16} . L (D+d)^2 \left(1 + \frac{2}{3} c + \frac{7}{15} c^2\right)$

oder 3) $K = \frac{1}{2}\pi E^3 . \sin n . \cos^2 n \left(1 + \frac{2}{3} c + \frac{7}{15} c^2\right)$

Der Faktor $1 + \frac{2}{3} c + \frac{7}{15} c^2 = b$ zeigt das Verhältniß des Fasses zu einem Cylinder von gleicher Länge L und gleichem mittleren Durchmesser $\frac{1}{2}(D+d)$ an. Der ganze Faktor $\frac{1}{2}\pi \sin n \cos^2 n . b = a$ zeigt das Verhältniß des Fasses zu einem

Cubus von gleicher Diagonallinie C an. Wenn C in Zollen gegeben ist, so ist hiernach 4) $K = C^3 . \alpha$ in Cubikzollen bestimmt. Um den Inhalt in Maß zu erhalten, muß man noch mit $m = \frac{1}{75,05568}$ multipliciren, wonach $\log m = 3,12461$.

Beispiele.

Ich ließ folgende Fässer ausmessen I) ein Muid aus dem südlichen Frankreich von 36 Veltes II) ein bordeauxer Oxhoft von 30 Veltes III) ein Rheinweinfaß von 40 Viertel IV) ein doppeltes englisches Porterfaß von circa 100 Gallons V) eine rigische Bierhalbtonne VI) eine lissaboner Pipe von 34 Almuden VII) eine Malaga-Bota von 30 Arroben. Die Maaße in Zollen.

	I	II	III	IV	V
$L =$	30,3	= 29,05	= 33,75	= 46,0	= 20,4
$D =$	28,55	= 25,1	= 27,8	= 31,05	= 17,63
$d =$	25,2	= 22,6	= 22,5	= 23,775	= 14,325
$D-d$ ..	0,52504	0,39794	0,72428	0,86183	0,51917
$D+d$ ..	1,73038	1,67852	1,70157	1,73898	1,50454
c	8,79466	8,71942	9,02271	9,12285	9,01463
$\frac{2}{3}$	9,82391	9,82391	9,82391	9,82391	9,82391
$\frac{2}{3}c$	8,61857	8,54333	8,84662	8,94676	8,83854
c^2	7,58932	7,43884	8,04542	8,24570	8,02926
$\frac{7}{15}$	9,66901	9,66901	9,66901	9,66901	9,66901
$\frac{7}{15}c^2$	7,25833	7,10785	7,71443	7,91471	7,69827
	0,04155	0,03494	0,07025	0,08846	0,06895
	181	128	518	822	499
$b =$	1,04336	1,03622	1,07543	1,09668	1,07394
L	1,48144	1,46315	1,52827	1,66276	1,30963
$D+d$ ..	1,73038	1,67852	1,70157	1,73898	1,50454
tg n	9,75106	9,78463	9,82670	9,92378	9,80509
sin n	9,69114	9,71613	9,74598	9,80805	9,73086
cos n	9,94008	9,93150	9,91928	9,88427	9,92577
cos n	9,94008	9,93150	9,91928	9,88427	9,92577
$\frac{1}{4}\pi$	0,19612	0,19612	0,19612	0,19612	0,19612
b	0,01843	0,01545	0,03158	0,04008	0,03098
$\alpha =$	9,78585	9,79070	9,81224	9,81279	9,80950
$\alpha =$	0,6107	0,6176	0,6490	0,6498	0,6449

	I	II	III	IV	V
L	1,48144	1,46325	1,52827	1,66276	1,30963
½	9,69897	9,69897	9,69897	9,69897	9,69897
sec n	0,30886	0,28387	0,25402	0,19195	0,26914
E	1,48927	1,44599	1,48126	1,55368	1,27774
E^3	4,46781	4,33797	4,44373	4,66104	3,83322
a	9,78585	9,79070	9,81224	9,81279	9,80950
m	8,12461	8,12461	8,12461	8,12461	8,12461
K	2,37827	2,25328	2,38063	2,59844	1,76733
K =	238,9	= 179,2	= 240 ¼	= 396,7	= 58,5

	VI	VII
L =	48,6	= 42,15
D =	33,1	= 32,5
d =	23,05	= 25,775
D − d	1,00217	0,82769
D + d	1,74935	1,76548
c	9,25282	9,06221
⅔	9,82391	9,82391
⅔ c	9,07673	8,88612
c^2	8,50564	8,12442
$\frac{7}{15}$	9,66901	9,66901
$\frac{7}{15} c^2$	8,17465	7,79343
	0,11932	0,07693
	1495	622
b =	1,13427	1,08315
L	1,68664	1,62480
D + d	1,74935	1,76548
tg n	9,93729	9,85932
sin n	9,81587	9,76795
cos n	9,87858	9,90863
cos n	9,87858	9,90863
½ π	0,19612	0,19612
b	0,05472	0,03469
a	9,82387	9,81602
a =	0,6666	0,6547
L	1,68664	1,62480
½	9,69897	9,69897
sec n	0,18413	0,23205
E	1,56974	1,55582
E^3	4,70922	4,66746
a	9,82387	9,81602
m	8,12461	8,12461
K	2,65770	2,60809
K =	454,7	= 405,6

Resultat

	Faktor a	Inhalt in russischen Maaß berechnet	Inhalt in russischen Maaß gemessen
I	0,6107	238,9	
II	0,6176	179,2	181,4
III	0,6490	240 ¼	248,8
IV	0,6498	396,7	
V	0,6449	58,5	59,6
VI	0,6666	454,7	
VII	0,6547	405,6	

Die Rechnung gab also den Inhalt etwas zu klein und zwar bei II. um 1⅕ Procent, bei III. um 3⅖ Procent, bei V. um 1⅘ Procent. Dieser geringe Unterschied kann herrühren: Aus der Abweichung der Dauben von der reinen parabolischen Form; aus der Unsicherheit der Messung des inneren Bodendurchmessers und der inneren Länge; aus der Abweichung der Böden von der Kreisform; aus der Wölbung der Böden.

Fünfter Theil.

Einen Visirstab zu berechnen.

Die erste Art der Visirstäbe hat zwei Eintheilungen; auf der einen Fläche für die Länge des Fasses L; auf der andern Fläche für die Durchmesser. Zu diesem Ende richtet man die obige Formel 1) $K = \frac{1}{4}\pi L.(\frac{8}{15}D^2 + \frac{4}{15}D.d + \frac{3}{15}d^2)$ für den mittleren Durchmesser $\frac{1}{2}(D+d) = d'$ ein, woraus

$$5)\quad K = \tfrac{1}{4}\pi . L. \left(\tfrac{6}{15}D^2 + \tfrac{8}{15}d'^2 + \tfrac{1}{15}d^2\right)$$

Es sey nun z. B. der Visirstab für russische Wedro $= 75{,}0568$ Cbzoll. eingerichtet, und f die Längeneinheit für beide Abtheilungen, so erhält man aus dieser Formel, wenn $L = D = d' = d = f$ ist den gleichseitigen Cylinder $75{,}0568 = \frac{1}{4}\pi . f^3$ und hieraus $f = 4{,}5719$ Zoll, $\log f = 0{,}66010$.
Auf die Fläche der Länge, trägt man $f, f.2, f.3, f.4$, u. s. w. auf die Fläche der Durchmesser trägt man $f, f\sqrt{2}, f.\sqrt{3}, f.\sqrt{4}, f.\sqrt{5}$, u. s. w.

Beispiel.

Auf der Längenfläche giebt die Länge des Fasses die Zahl $L = 6\frac{2}{3}$, auf der Durchmesserfläche giebt der Spunddurchmesser die Zahl $A = 39{,}0$ der Bodendurchmesser die Zahl $C = 30\frac{1}{3}$, der mittlere Durchmesser die Zahl $B = 34\frac{1}{2}$, so ist $6A + 8B + C = 540\frac{1}{3}$, $L.\,540\frac{1}{3} = 3602\frac{2}{9}$, $\frac{3602\frac{2}{9}}{15} = 240\frac{4}{27}$ Wedro, Inhalt des Fasses.

Die zweite Art der Visirstäbe ist auf die Diagonallinie $Cf = E$ eingerichtet, nach der Formel 4) $K = E^3.\alpha$, wo E in Zollen und K

in Cubikzollen. Soll aber K die Anzahl der Maaße anzeigen, und enthält das Maaß S Cubikzoll, so ist $K \cdot S = E^3 : a$ also $E = \sqrt[3]{K} \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{a}}$. Die Länge für ein Maaß ist also $\sqrt[3]{\frac{S}{a}}$, für 2 Maaß $= \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{S}{a}}$ für 960 Maaß $\sqrt[3]{960}\ \sqrt[3]{\frac{S}{a}}$, u. s. w. Ein solcher Visierstab ist also nur für Fässer von ähnlicher Form richtig, bei welcher der Factor a einerlei Werth hat. Dieser Werth ist, wie oben gefunden wurde, zwischen 0,60 und 0,67. In beifolgender Tafel habe ich die Länge des Visierstabes für ein Stückfaß nach der Formel $E = \sqrt[3]{\frac{960 S}{a}}$ berechnet, wo 960 · S der Inhalt des Stückfasses ist.

	Alt französ. Fuß	Lothring	Frankfurt	Rußland	Riga.
Stückfaß Cbzll	72154	70158	70105	72054	74711
a	Die Diagonallinie E in Zollen				
0,60	49,49	48,90	48,89	49,34	49,94
0,61	49,22	48,63	48,62	49,07	49,66
0,62	48,96	48,37	48,36	48,80	49,39
0,63	48,70	48,11	48,10	48,54	49,13.
0,64	48,44	47,86	47,85	48,29	48,87
0,65	48,19	47,61	47,60	48,04	48,62
0,66	47,95	47,37	47,36	47,79	48,37
0,67	47,71	47,13	47,12	47,56	48,13

Diese Tafel dient, um jeden Visierstab zu prüfen, und um auch mit einem unrichtigen Visierstab den Inhalt eines Fasses, dessen Factor a bekannt ist, richtig zu finden. Denn es ist $K = E^3 \cdot \frac{a}{S}$ also $K = 960 \cdot \frac{E^3}{E'^3}$, wo $E' = \sqrt[3]{\frac{960 \cdot S}{a}}$, die in der vorstehenden Tafel enthaltene Anzahl von Zollen ist.

Beispiel:

Ich untersuchte vier Visirstäbe I, einen auf altfranzösische Velten, II einen auf frankfurter oder rheinländische Viertel III, einen auf russische Viertel IV, einen auf russische Stekan zu 15 Stof eingerichteten Visirstab, und fand die Diagonallinie des Eichfasses von 160 Viertel oder 64 Stekan in Zollen.

I 49,89. II 49,13, III 49,535 IV, 49,86

Kann also diese Visirstäbe an Fässern von verschiedenen Formen den Inhalt von 960 Stof anzeigen so ist der wahre Inhalt in Stof nach der obigen Formel berechnet folgender:

	Stab I	Stab II	Stab III	Stab IV
	Inhalt in Stof			
a	französische	frankfurter	russische	russische
0,60	983	974	972	991
0,61	999	991	988	1007
0,62	1016	1007	1004	1024
0,63	1032	1023	1020	1040
0,64	1049	1039	1036	1057
0,65	1065	1056	1052	1073
0,66	1081	1072	1069	1090
0,67	1098	1088	1085	1106