

М. БЕККЕР

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО „ВАЛГУС“

151A
Б423

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ИНСТИТУТ УСОВЕРШЕНСТВОВА-
НИЯ УЧИТЕЛЕЙ ЭСТОНСКОЙ ССР

XII

4643 II ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ УЧИТЕЛЕЙ И ВОСПИТАТЕЛЕЙ

М. БЕККЕР

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ВАЛГУС“ ТАЛЛИН, 1967

514 T514
T514

51
Б42

Под редакцией А. Лепса

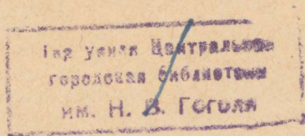
3

Tartu Ülikooli
Raamatukogu

133 044

Тартуская Центральная
городская библиотека
им. П. П. Гоголя
Инв. № 215420

2



ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая брошюра содержит методический вспомогательный материал для изучения тригонометрических уравнений.

Автор уделяет основное внимание решению задач, так как литература по теоретическому изучению тригонометрических уравнений достаточно обширна.

Особо выделяются задачи из области геометрии и физики. Некоторые задачи, не касающиеся школьного курса, можно использовать в работе кружка математики.

ВВЕДЕНИЕ.

Только в последние годы были сделаны некоторые попытки улучшить и дополнить школьную программу по математике. Но в целом программа по математике все еще нуждается в серьезном обновлении. Вопрос о месте тригонометрических уравнений в курсе тригонометрии много лет являлся дискуссионным. И сейчас среди методистов существуют две точки зрения: согласно первой — изучение тригонометрических уравнений должно быть сосредоточено в специально выделенной программой теме, согласно второй — не следует выделять тригонометрические уравнения в особую главу курса. Школьная программа на 1967/68 уч. год отражает вторую точку зрения. Изучение тригонометрических уравнений начинается в IX классе. В основном изучается три вида уравнений: 1) простейшие; 2) однородные относительно синуса и косинуса одного и того же аргумента и 3) уравнения, приводимые к алгебраическому виду. Решение этих уравнений проводится параллельно с изучением каждой группы формул тождественного преобразования, как это указано в программе. В X классе тригонометрические уравнения изучаются параллельно с прохождением теорем сложения. Школьная программа на 1967/68 уч. год отводит 20 часов на повторение. В процессе повторения представляется возможность провести классификацию тригонометрических уравнений по способам их решения. Значение тригонометрических уравнений заключается, главным образом, в том, что они, во-первых, являются прекрасным средством для закрепления знаний учащихся о свойствах тригонометрических функций, а, во-вторых, представляют большие возможности для развития у учащихся вдумчивого отношения к вопросам равносильности уравнений. Учитывая вышесказанное, в настоящей брошюре подробно рассматриваются следующие вопросы:

1. Проведена классификация тригонометрических уравнений по способам их решения, причем классификация сделана с возможно исчерпывающей полнотой.

2. Рассматривается вопрос о нарушении равносильности при решении тригонометрических уравнений и в связи с этим методика проверки корней.

3. Собрано много задач по геометрии и физике, приводящие к решению тригонометрических уравнений.

4. Хотя понятие о корнях, связанных с предельным переходом, школьной программой не предусмотрено, мы имели полную возможность в XI классе рассмотреть и этот вопрос. Поэтому разобран и вопрос о предельных корнях уравнения в данной брошюре. По школьной программе трудно судить, входит ли в программу решение систем уравнений, но так как при решении задач

по физике, геометрии и многих технических задач часто приходится решать системы уравнений, мы решили подробно рассмотреть и приемы решения систем.

В какой мере сможет использовать материал данной брошюры в своей работе учитель, зависит от состава класса, и этот вопрос должен решить сам учитель. Вопрос о нахождении предельных корней уравнений, а также способы решения систем можно рассмотреть на занятиях математического кружка. Мы уверены, что материал, рассматриваемый в данной брошюре, окажется полезным для молодого учителя. Особенно полезным он окажется при повторении тригонометрии и геометрии в выпускном классе.

Автор.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

В тригонометрии под названием тригонометрических уравнений рассматриваются некоторые частные виды уравнений (и систем), содержащих тригонометрические операции над неизвестными и допускающих решения элементарными средствами. Во многих учебниках дается следующее определение:

тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную величину только под знаком тригонометрических функций.

Мы считаем, что с точки зрения методики полезно дать определение понятия тригонометрического уравнения. Однако следует подчеркнуть, что определение пригодно для уравнений с одним неизвестным, которые разрешимы элементарными средствами. (Ведь только такие уравнения решают в средней школе.)

Мы считаем более удачным определение, приводимое в основном курсе тригонометрии И. К. Андропова (издание 1960 г.). И. К. Андронов дает следующее определение:

«Уравнение называется тригонометрическим, если в нем:

- 1) неизвестные содержатся только под знаком круговых функций;
- 2) аргументами круговых функций являются линейные функции от неизвестных;
- 3) над круговыми функциями выполняются только алгебраические операции».

Из этого определения следует, что тригонометрическими являются, например, уравнения:

$$2 \sin^2 x - 5 \cos x - 4 = 0, \quad 4 \cos x - 3 \sec x = 0,$$

$$\sin(2x + 1) = \frac{1}{2}.$$

Именно такие уравнения помещены в стабильном задачнике Стратилатова. Исходя из данного выше определения, уравнения

$$\sin(1 - 3x + x^2) = 1, \quad \operatorname{tg}(\sin x) = a,$$

$$\cos(\sqrt{x - \pi}) = \sin x$$

нельзя считать тригонометрическими. Такие трансцендентные уравнения можно решать на занятиях математического кружка.

Известно, что алгебраическое нетождественное уравнение либо имеет конечное число решений, либо не имеет решений.

Тригонометрическое уравнение также может не иметь решений, напр., $\sin x = 2$. Если тригонометрическое уравнение имеет решение, то решений бесконечное множество. Решить тригонометрическое уравнение — это значит найти множество допустимых значений неизвестного, при которых обе части данного уравнения имеют одинаковое значение. Например, уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}$

имеет бесконечное множество решений: $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$ и т. д.

Общий прием решения тригонометрических уравнений заключается в том, что от всех тригонометрических функций переходят к одной функции и к одному и тому же аргументу. После этого, приняв эту функцию за неизвестное, решают уравнение алгебраическим путем.

Рассмотрим виды тригонометрических уравнений, которые можно решить в IX классе.

ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ.

К простейшим уравнениям мы относим уравнения вида

$$\begin{array}{l|l} m \sin(ax + b) = k & n \operatorname{tg}(ax + b) = t \\ m \cos(ax + b) = r & n \operatorname{ctg}(ax + b) = f \end{array}$$

Пусть решается уравнение $\sin x = m$.

Рассмотрим все возможные значения m .

1) $0 < m < 1$. При построении угла по данному значению синуса получаются два угла: $\arcsin m$ и $\pi - \arcsin m$ ($\arcsin m$ — угол первой четверти, $\pi - \arcsin m$ — угол второй четверти). Решение уравнения записывается формулами:

$$x = \arcsin m + 2\pi n \quad (1)$$

и

$$x = \pi - \arcsin m + 2\pi n, \quad (2)$$

где n — любое целое число. Формулу (2) преобразуем следующим образом:

$$x = \pi(2n + 1) - \arcsin m. \quad (3)$$

Вместо двух формул (1) и (3) можно написать одну:

$$x = \pi n + (-1)^n \arcsin m \quad (4)$$

(где n — произвольное целое число).

В самом деле, при n четном ($n = 2k$) получится формула (1), а при n нечетном ($n = 2k + 1$) — формула (3).

2) $-1 < m < 0$. В этом случае решение уравнения записывается формулой (4), только $\arcsin m$ есть угол первой отрицательной четверти, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin m < 0.$$

3) $m = 1$. В этом случае решение уравнения записывается формулой:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2} (1 + 4n).$$

4) $m = -1$. Все решения записываются формулой:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2} (4n - 1).$$

5) $m > 1$. В этом случае уравнение не имеет решений.

Упражнение 1.

Решить уравнения:

$$1. \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. $4x = 60^\circ(-1)^n + 180^\circ n$;
 $x = 15^\circ(-1)^n + 45^\circ n \quad (n = 0; \pm 1, \pm 2 \dots).$

$$2. \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -1.$$

Решение. $\frac{\pi}{4} - x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = \frac{3}{4}\pi - 2\pi n$.

$$3. \sin 3x = 0,4.$$

Решение. $3x = \arcsin 0,4(-1)^n + \pi n$;

$$x = \frac{1}{3} \arcsin 0,4(-1)^n + \frac{\pi n}{3}.$$

$$4. \quad 2 \sin 2x = -1.$$

Решение. $\sin 2x = -\frac{1}{2}; \quad 2x = -\frac{\pi}{6}(-1)^n + \pi n;$

$$x = -\frac{\pi}{12}(-1)^n + \frac{\pi n}{2}.$$

УРАВНЕНИЕ $\cos x = m$.

Рассмотрим все возможные значения m .

1) $0 < m < 1$. Тогда геометрическое построение дает два вектора, имеющих одну и ту же проекцию на данную ось. Наименьшие по абсолютной величине углы, образуемые этими векторами с осью абсцисс, будут равными по абсолютной величине и противоположными по знаку. Положительный угол, в данном случае острый, обозначается символом $\arccos m$; тогда отрицательный угол будет $-\arccos m$. Решение уравнения записывается формулой:

$$x = \pm \arccos m + 2\pi k.$$

2) $-1 < a < 0$. Геометрическое построение дает два радиуса-вектора, имеющих одну и ту же проекцию на ось x -ов, и наименьшие по абсолютной величине углы, образуемые этими векторами с данной осью, будут равными по абсолютной величине и противоположны по знаку. Положительный угол, в данном случае тупой, обозначается символом $\arccos m$; отрицательный угол будет $-\arccos m$.

Решение уравнения записывается той же формулой:

$$x = \pm \arccos m + 2\pi k.$$

3) $m = 1$. $\arccos 1 = 0$. Следовательно, решение уравнения запишется с помощью формулы: $x = 2\pi k$.

4) $m = -1$; $\arccos(-1) = \pi$. Следовательно, решение уравнения запишется так:

$$x = \pi + 2\pi k = \pi(2k + 1).$$

5) $m = 0$. Наименьшие по абсолютной величине углы, образуемые радиусами-векторами с осью абсцисс, будут прямыми, но противоположными по знаку: $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$. Решение уравнения определяется из формул:

$$x = \frac{\pi}{2} (4n \pm 1), \text{ или}$$

$$x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2}.$$

Выражения $4n + 1$ и $4n - 1$ охватывают все нечетные числа и могут быть заменены выражением: $2n + 1$.

Решение уравнения $\cos x = 0$ запишется так:

$$x = \frac{\pi}{2} (2n + 1).$$

Упражнение 2.

Решить уравнения:

$$1. \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. $2x = 360^\circ n \pm 60^\circ; \quad x = 180^\circ n \pm 30^\circ.$

$$2. \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}.$$

Решение. $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}; \quad x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n.$

$$3. \cos 2x = -\frac{1}{2}; \quad 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

$$4. \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Решение. $2x = 2\pi n \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right);$

$$x = \pi n \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

УРАВНЕНИЕ $\operatorname{tg} x = m$.

Пусть $\operatorname{tg} x = m$. Рассмотрим все случаи.

1) $0 < m < +\infty$. В этом случае ось тангенсов пересекается с радиусом-вектором в верхней полуплоскости, образуя с осью абсцисс острый угол $\arccos \operatorname{tg} m$.

Решение уравнения запишется формулой:

$$x = \arctg m + \pi n.$$

2) $-\infty < m < 0$. В этом случае решения уравнения запишется формулой.

$$x = \arctg m + \pi n,$$

где $\arctg m$ — угол острый отрицательный.

Упражнение 3.

Решить уравнения:

1. $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \pi n$.

2. $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$.

3. $\operatorname{tg} x = 0,6$; $x = \arctg 0,6 + \pi n$.

4. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$.

5. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$; $\frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Ответ: $x = \pi n - \frac{\pi}{4}$.

Упражнение 4.

Примеры и задачи, приводящие к решению простейших тригонометрических уравнений.

(Задачи для IX класса.)

Решить уравнения:

1. $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$

5. $\cos^2\left(\frac{x}{2} + 60^\circ\right) - 1 = 0$

2. $\sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -3$

6. $2 \sin^2 2x - 1 = 0$

3. $3 \operatorname{tg}^2 3x - 1 = 0$

7. $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) = 1$

4. $\operatorname{ctg}(30^\circ - 2x) = -2$

8. $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) = -1$

$$9. \sin 4x = -0,6$$

$$10. 2 \operatorname{tg} 3x = -2$$

$$11. \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Решить задачи:

1. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Определить углы треугольника.

$$\left(\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3}; \quad \beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{2} \right)$$

2. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет в отношении 3 : 2. Определить этот острый угол.

$$\left(x = \operatorname{arc} \cos \frac{2}{3} \right)$$

3. В прямоугольной трапеции основания равны a и b ($a > b$), а наклонная боковая сторона равна c . Определить острый угол трапеции.

$$\left(x = \operatorname{arc} \cos \frac{a-b}{c} \right)$$

4. Периметр ромба равен 5 см, а площадь ромба равна $\frac{3}{4}$ см². Найти его углы.

$$\left(\operatorname{arc} \sin \frac{12}{25}, \quad \pi - \operatorname{arc} \sin \frac{12}{25} \right)$$

5. Вычислить углы ромба, если периметр его равен 10 см и одна из диагоналей его равна 4 см.

$$\left(2 \operatorname{arc} \sin \frac{4}{5}, \quad \pi - 2 \operatorname{arc} \sin \frac{4}{5} \right)$$

6. Две силы, одна из которых равна 15 кг, а другая 20 кг, приложены к одной и той же материальной точке под углом в 30° друг к другу. Найти равнодействующую силу и угол, образуемый ею с меньшей из составляющих.

$$\left(\text{Искомый угол: } \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{8+3\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3} \right)$$

7. Конец перпендикуляра, восстановленного из центра правильного 12-угольника к плоскости этого многоугольника, соединен наклонными с концами одной из сторон многоугольника.

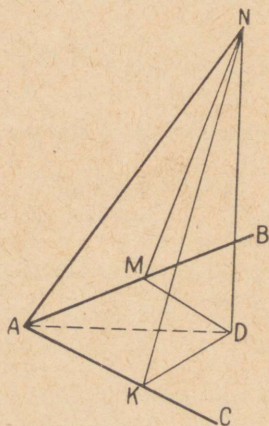
Определить угол между наклонной и плоскостью 12-угольника, если угол между наклонными равен $\alpha = 20^\circ$.

$$\left(x = \arccos \frac{\sin 10^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 47^\circ 50' \right)$$

8. Из вершины A угла BAC , равного $\alpha = 150^\circ$, проведена наклонная к плоскости этого угла, образующая с его сторонами AB и AC равные острые углы $\beta = 80^\circ$. Определить угол между проведенной наклонной и плоскостью угла BAC .

$$\left(x = \arccos \frac{\cos \beta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \approx 47^\circ 50' \right)$$

Указание. Доказать, что любая точка прямой AN проектируется на биссектрису угла BAC (черт. 1).



Черт. 1.

9. Конец N перпендикуляра, восстановленного к плоскости прямоугольника $ABCD$ ($AB < BC$) из его вершины B , соединен наклонными с остальными вершинами прямоугольника. Большая из полученных наклонных образует с плоскостью прямоугольника угол φ , острый угол между диагоналями прямоугольника равен α . Определить $\angle NAB$ и $\angle NDA$.

Установить допустимые системы значений параметров α и φ

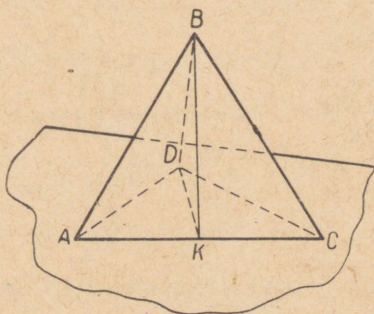
$$\left[\arctg \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \frac{\alpha}{2}}; \arccos \left(\cos \varphi \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \right); 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \right. \\ \left. 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right].$$

10. Равносторонний треугольник одной стороной опирается на плоскость. Проекция этого треугольника на плоскость является прямоугольным треугольником. Найти угол между данным треугольником и плоскостью.

Указание. Если обозначить искомый $\angle BKOD$ через x , сторону AC через a , тогда (черт. 2)

$$\sin x = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Черт. 2.

11. На тележке установлена труба, которая может поворачиваться в вертикальной плоскости (черт. 4). Тележка равномерно движется по горизонтальному пути со скоростью $v_1 = 2$ м/сек. Под каким углом α к горизонту следует установить трубу, чтобы капля дождя, падающая отвесно со скоростью $v_2 = 6$ м/сек, двигалась относительно трубы параллельно ее стенкам, не задевая их?

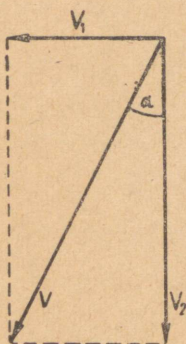
Скорость капель вследствие сопротивления воздуха можно считать постоянной.

Решение. Капля будет двигаться относительно трубы в вертикальном направлении со скоростью v_2 и в горизонтальном — со

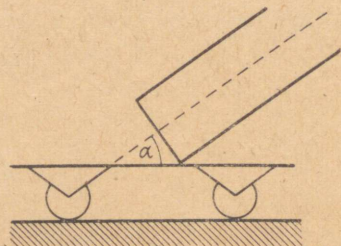
скоростью v_1 , направленной в сторону, противоположную движению тележки. Полная скорость капли относительно трубы будет равна геометрической сумме скоростей v_1 и v_2 (черт. 3). Для того, чтобы капля двигалась параллельно стенкам трубы, необходимо, чтобы направление вектора скорости совпадало с осью трубы. Это будет, если

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = 3, \quad \alpha = 71^\circ 35'$$

(см. черт. 3, 4).



Черт. 3.



Черт. 4.

Задачи, приводящие к решению простейших тригонометрических уравнений (могут быть решены в X классе).

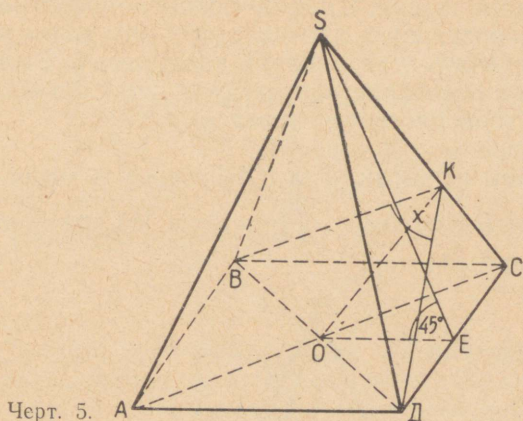
1. В правильной n -угольной пирамиде плоский угол при вершине равен α . Определить двугранный угол при основании пирамиды. Найти угол при $n = 10$, $\alpha = 30^\circ$.

$$\left(\cos x = \frac{\operatorname{ctg} 18^\circ}{\operatorname{ctg} 15^\circ}; \quad x = \arccos \frac{\operatorname{ctg} 18^\circ}{\operatorname{ctg} 15^\circ} \right)$$

2. Киоску с квадратным основанием нужно сделать пирамидальную крышу. Определить угол при основании между боковыми гранями крыши, если наклон крыши равен 45° .

Решение. Обозначим искомый угол через x . Искомый угол есть линейный угол двугранного угла при ребре SC (черт. 5).

$$DK \perp SC; BK \perp SC.$$



Черт. 5.

Обозначим сторону основания пирамиды через a , тогда имеем $AC = a \cdot \sqrt{2}$; $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из прямоугольного $\triangle OSE$ получим $OS = OE \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{2}$. Из прямоугольного $\triangle SOC$ имеем:

$$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$OK \cdot SC = SO \cdot OC = 2S(\triangle SOC);$$

$$OK = \frac{SO \cdot OC}{SC} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольника $\triangle OKD$ имеем:

$$\frac{OD}{OK} = \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

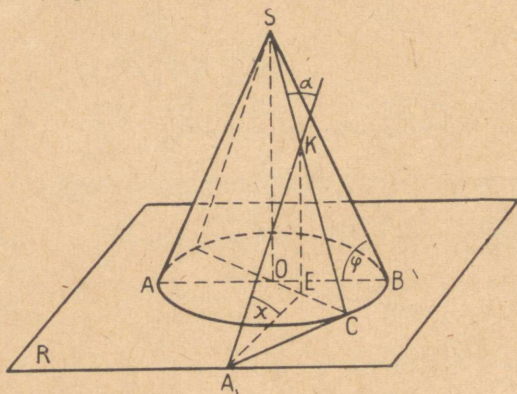
$$\frac{x}{2} = 60^\circ; \quad x = 120^\circ.$$

Искомый угол равен 120° .

3. Прямая линия, касательная к боковой поверхности конуса, пересекает образующую, проходящую через точку касания, под углом α . Определить угол наклона касательной к плоскости R , в которой лежит основание конуса, если угол наклона образующей конуса к этой плоскости равен φ .

Определить угол при $\alpha = 30^\circ$; $\varphi = 45^\circ$.

Решение. Обозначим искомый угол KA_1E через x , тогда из прямоугольного $\triangle KA_1E$ находим $\frac{KE}{A_1K} = \sin x$. Из прямоугольного $\triangle OSB$ имеем (черт. 6):



Черт. 6.

$$SO = OB = l \sin 45^\circ = l \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где l — образующая конуса. Проведем $OC \perp A_1C$, тогда $KC \perp A_1C$ (теорема о трех перпендикулярах).

Из прямоугольного $\triangle KEC$ имеем:

$$KE = KC \sin 45^\circ. \quad \text{Из } \triangle A_1KE —$$

$$\sin x = \frac{KE}{A_1K};$$

из A_1KC имеем:

$$\frac{KC}{A_1K} = \cos \alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{KC \sin \varphi}{A_1 K} = \frac{A_1 K \sin \varphi \cdot \cos \alpha}{A_1 K} = \\ &= \sin \varphi \cdot \cos \alpha;\end{aligned}$$

или

$$\sin x = \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4};$$

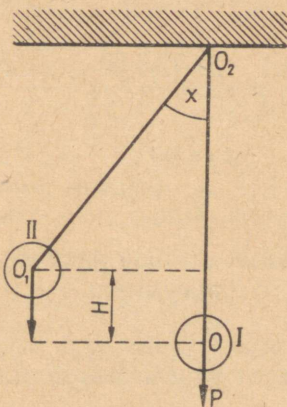
$$x = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ. Искомый угол равен

$$\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

4. Люстра, вес которой 25 кг, подвешена на цепи, могущей выдержать натяжение, не превышающее 50 кг. Люстра отклоняется от вертикального положения на некоторый угол и выпускается из рук, вследствие чего она начинает раскачиваться на цепи. Определить, на какой наибольший угол можно отклонить люстру, чтобы не оборвалась цепь.

Решение. Обозначим угол отклонения, который требуется найти через x (черт. 7). Точки O и O_2 условно примем за центры тяжести люстры. Точка O_2 — точка подвеса люстры. Так как $OO_2 = O_2O_1$, то можно обозначить $OO_2 = O_2O_1 = r$.



Черт. 7.

В положении II центр тяжести люстры будет находиться выше центра тяжести люстры в положении I на величину H , равную

$$r - O_2N = r - r \cos x.$$

Итак, $H = r(1 - \cos x)$.

Отклонив тело на угол x , мы сообщили ему потенциальную энергию $W_{\text{пот.}} = pH = Pr(1 - \cos x)$. Если предоставить тело самому себе, то оно начнет двигаться, и в точке O потенциальная энергия его будет равна 0, зато кинетическая энергия будет максимальной. Согласно закону сохранения энергии, кинетическая энергия тела в точке O равна его потенциальной энергии в точке O_1 : $W_{\text{кин.}} = W_{\text{потенц.}}$

$$W_{\text{кин.}} = \frac{mv^2}{2}; \quad \frac{mv^2}{2} = pr(1 - \cos x).$$

Так как

$$P = mg, \quad \text{то} \quad \frac{mv^2}{2} = mgr(1 - \cos x);$$

$v^2 = 2gr(1 - \cos x)$. Сила, с которой движущаяся люстра действует на цепь, складывается из двух сил: веса люстры и центробежной силы, возникающей при движении люстры.

$$F_{\text{цепи}} = P + F_{\text{ц.б.}}$$

Наибольшая величина центробежной силы $F_{\text{ц.б.2}} = SO - P = 50 - 25 = 25$ (кг); но $F_{\text{центроб.}} = \frac{mv^2}{2}$. Подставляя в это равенство значения величины v^2 и заменяя m через $\frac{P}{g}$, получим

$$25 = \frac{25}{10} \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot r(1 - \cos x)}{r}.$$

Откуда: $\cos x = \frac{1}{2}, \quad x = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Уравнения, приводимые к одной функции одного и того же аргумента.

Для решения уравнений этого вида необходимо с помощью основных формул от всех тригонометрических функций перейти к одной функции.

Упражнение 5.

Решить уравнения:

1. $\sqrt{2} \sin^2 x + \cos x = 0$.

Заменив синус косинусом, получим уравнение:

$$\sqrt{2} \cos^2 x - \cos x - \sqrt{2} = 0.$$

При решении данного квадратного уравнения получим:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} > 1.$$

Второе значение косинуса не имеет смысла.

Ответ: $x = 360^\circ n \pm 135^\circ$.

2. $3 \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = 1$.

Решение. Заменив $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, получим уравнение

$$2 \operatorname{tg}^2 x = 2; \quad x = \pi n \pm \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} (4n \pm 1);$$

заменив $4n \pm 1$ на $2k + 1$, получим:

$$x = \frac{\pi}{4} (2k + 1).$$

3. $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \cos 2x \sec^2 x$.

Решение. Используя формулы приведения, получим

$$1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x \right) \frac{1}{\cos^2 x}$$

или $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = 0; \quad x = \pi n; \quad \operatorname{tg} x = 1;$

$$x = \frac{\pi}{4} (4n + 1).$$

Примеры и задачи, приводимые к алгебраическому относительно какой-либо одной функции уравнению.

(Уравнения для IX класса.)

1. $2 \sin^2 x - 5 \cos x - 4 = 0$

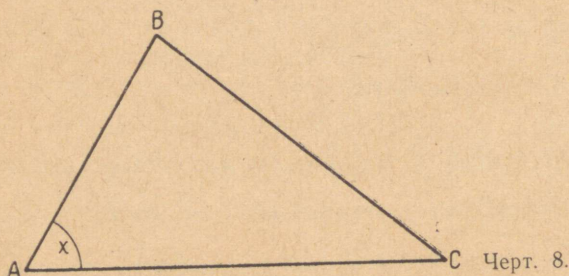
2. $(\cos x - 2)(2 \operatorname{cosec} x + 1) = 0$

3. $1 - \cos(\pi - x) + \sin \frac{\pi + x}{2} = 0$

4. $2 \cos^2(x + 30^\circ) - 3 \sin(60^\circ - x) + 1 = 0$
5. $2 \sin^4 x + 5 \cos^4 x = 2$
6. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$
7. $\sin^3 x \cos 3x + \sin^3 3x \cos^3 x = 0$
8. $\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$
9. $\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sec x - \cos x}{2 \sin x}$
10. $\operatorname{tg} x \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1$

11. В треугольнике ABC стороны AB и AC соответственно равны 6 см и 5 см. Вычислить угол A , если площадь $\triangle ABC$ на 1 кв. см. больше площади квадрата, сторона которого равна расстоянию от вершины B до стороны AC .

Указание. Обозначив искомый угол через x , получим уравнение:
 $36 \sin^2 x - 15 \sin x + 1 = 0$ (черт. 8).



$$\sin x = \frac{15 \pm 9}{72}; \quad \sin x = \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{1}{12};$$

$$x = \arcsin \frac{1}{3}, \quad x = \arcsin \frac{1}{12}.$$

Задачи для X класса.

1. В конус вписана полусфера, большой круг которой лежит на основании конуса. Определить угол при вершине конуса, зная, что полная поверхность конуса относится к поверхности полусферы, как 18 : 5.

Решение. Обозначим соответственно через r , R , и l радиус полушферы, радиус основания конуса и образующую. Обозначим $\angle OSC$ через α . По условию задачи

$$\frac{\pi R(l+R)}{2\pi r^2} = \frac{18}{5} \quad \text{или} \quad \frac{R(l+R)}{2r^2} = \frac{18}{5} \quad (1)$$

Из прямоугольного $\triangle OSC$ имеем: $R = l \sin \alpha$; $SO = l \cos \alpha$. Из прямоугольного $\triangle SOK$ ($OK \perp SC$) имеем: (черт. 9) $OK = r = SO \cdot \sin \alpha = l \cos \alpha \cdot \sin \alpha$. Подставим в равенство (1) найденные значения R , l , r , получим

$$\frac{l \sin \alpha (l + l \sin \alpha)}{2l^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{18}{5}$$

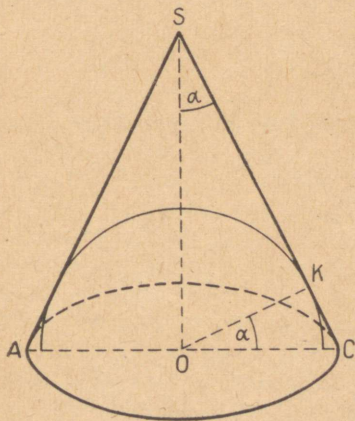
После упрощений получим уравнение:

$36 \sin^3 \alpha - 31 \sin \alpha + 5 = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что данное уравнение имеет корень -1 . Имеем $\sin x = -1$. Условию задачи этот корень не удовлетворяет.

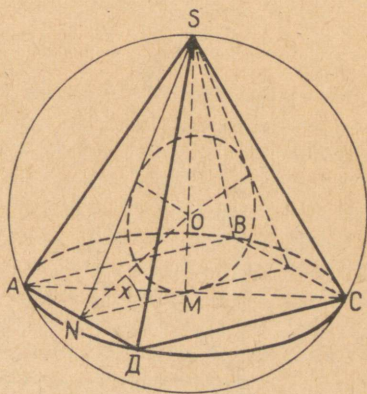
Разделив левую часть уравнения на $\sin x + 1$, получим $36 \sin^2 \alpha - 36 \sin \alpha + 5$.

Имеем уравнение $36 \sin^2 \alpha - 36 \sin \alpha + 5 = 0$, которое имеет следующие корни:

$\sin \alpha = \frac{5}{6}$, $\sin \alpha = \frac{1}{6}$. Значит, искомый угол равен $2 \arcsin \frac{5}{6}$ или $2 \arcsin \frac{1}{6}$.



Черт. 9.



Черт. 10.

2. Определить двугранный угол при основании правильной 4-угольной пирамиды, если радиус описанного шара в $2\frac{1}{2}$ раза более радиуса вписанного шара (черт. 10).

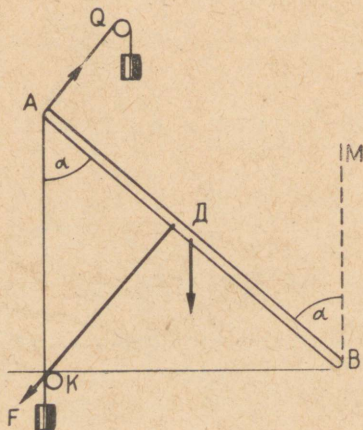
У к а з а н и е. Обозначим через x , R , r , a , b и h соответственно половину искомого угла, радиусы шаров, половину стороны основания, боковое ребро пирамиды и ее высоту, найдем: $R = \frac{5}{2} r$; $OM = r = a \operatorname{tg} x$; $2R \cdot h = b^2$; $h = a \operatorname{tg} 2x$; $b^2 = h^2 + 2a^2$. Исключив линейные элементы, получим уравнение, которое легко привести к следующему:

$$6 \operatorname{tg}^4 x - 5 \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0; \quad \operatorname{tg}^2 x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_1 \approx 35^\circ 16';$$

$$\operatorname{tg}^2 x_2 = \frac{1}{3}; \quad x_2 = 30^\circ.$$

Искомый угол $70^\circ 32'$ или 60° .

3. К стержню AB , вес которого $P = 1$ кг, вращающемуся около шарнира B , подвешены в точках A и D с помощью веревок, перекинутых через блоки E и K , гири $Q = 6$ кг и $F = 10$ кг, причем веревки перпендикулярны к стержню, а расстояние BK равно проекции стержня на горизонталь. Найти величину $\angle BAM$, при которой стержень будет в равновесии. Трение не учитывается. Решение. Из условия равновесия стержня AB относительно шарнира B по правилу моментов сил получим: $\sum M_B = 0$, т. е. $Ql - FBD - P \sin \alpha \cdot \frac{l}{2} = 0$, где $l = AB$; поскольку M_D относительно



Черт. 11.

B образует только слагающая $p \sin \alpha$ веса стержня AB (слагающая $P \cos \alpha$ направлена по стержню AB и момента не образует).

Определим теперь BD — плечо силы F . Из $\triangle CDB$ найдем: $BD = CB \sin \alpha$; но CB из $\triangle ABC$ равно $l \sin \alpha$, поэтому $BD = l \sin^2 \alpha$, получим уравнение (черт. 11):

$$Ql - Fl \sin^2 \alpha - P \frac{l}{2} \sin \alpha = 0 \quad \text{или}$$

$$F \sin^2 \alpha + \frac{P}{2} \sin \alpha - Q = 0.$$

Подставим в это уравнение численные значения F, P, Q , получим уравнение $20 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 12 = 0$.

Решая это уравнение, получим $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ и $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Пригоден только корень $\frac{3}{4}$.

Ответ. Искомый угол равен $\arcsin \frac{3}{4}$ или $\approx 48^\circ 36'$.

УРАВНЕНИЯ, ОДНОРОДНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО $\sin x$ И $\cos x$.

Уравнения вида

$$a_0 \sin^m x + a_1 \sin^{m-1} x \cos x + a_2 \sin^{m-2} x \cos^2 x + \dots + a_m \cos^m x = 0 \quad (1)$$

называется **однородным тригонометрическим уравнением**, степени m . Если $a_0 \neq 0$, то $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. Если допустить, что $\sin x = 0$, тогда все члены, содержащие синус, обращаются в нуль; но тогда $a_m \cos^m x = 0$ и так как $a_m \neq 0$, то $\cos^m x = 0$.

Известно, что синус и косинус одного и того же угла одновременно нулю не могут быть равны. Аналогично приходим к выводу, что $\cos x \neq 0$. Таким образом, мы имеем право обе части уравнения разделить на $\cos x$ или $\sin x$. Если $a_0 = 0$, то можем вынести $\cos x$ за скобку, и уравнение распадается на два уравнения: $\cos x = 0$ и еще одно уравнение, которое будет однородным относительно синуса и косинуса.

В IX классе решают однородные уравнения первой и второй степени.

Упражнение 6.

Решить уравнения:

1. $\sin x = \cos x$.

Решение.

Делим обе части уравнения на $\cos x$, получим $\operatorname{tg} x = 1$;
 $x = \frac{\pi}{4} (4n + 1)$.

2. $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$.

Решение. Делим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим:

$$2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0; \quad \operatorname{tg} x = -1 \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \frac{\pi}{4} (4n - 1) \quad \text{и} \quad x = \pi n - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

3. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \sin x \cos x$.

Решение. Левую часть уравнения разложим на множители, получим уравнение $\sin^2 x - \cos^2 x = 2 \sin x \cos x$. Делим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим: $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0$;

$$\operatorname{tg} x = 1 \pm \sqrt{2}, \quad x = \pi n + \operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{2}).$$

Примечание. В X классе можно это уравнение решить гораздо проще.

4. $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители, получим после упрощений уравнение:

$$\sin^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^4 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^4 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad (\operatorname{tg}^2 x - 1)^2 = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0; \quad \operatorname{tg} x = \pm 1; \quad x = \frac{\pi}{4} (4n \pm 1)$$

или

$$x = \frac{\pi}{4} (2K + 1).$$

Уравнения, которые можно решить в IX классе.

1. $4 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 6 \sin x \cdot \cos x$

2. $\sin^4 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 2 \cos^4 x = 0$

3. $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$

4. $\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 30^\circ) = 0$
5. $\sin x + \cos x = \sec x + \operatorname{cosec} x$
6. $\sin x - \cos x = 4 \sin^3 x + 4 \cos^2 x \cdot \sin x$

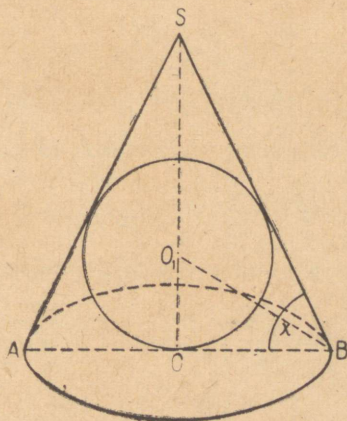
Уравнения, которые можно решить
в X классе.

1. $4 \cos^2 x + 2 \sin^2 x - 3 \sin 2x$
2. $3 \sin^2 2x - 0,5 \sin 4x - 4 \cos^2 2x = 0$
3. $8 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \sin x - 4 = 0$
4. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$
5. $3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$
6. $\sin^2 x + \frac{3}{2} \cos^2 x = \frac{5}{2} \sin x \cos x$

Задачи по геометрии для X класса.

Полная поверхность конуса в $2\frac{2}{3}$ раза больше поверхности вписанной в него сферы. Определить угол при основании конуса.

Решение. Обозначим искомый $\angle SBO$, образующую и радиус основания соответственно через l и r . Тогда полная поверхность конуса будет равна (черт. 12) $\pi r(l + r)$. Поверхность



Черт. 12.

вписанного шара равна $4\pi R^2$, где R — радиус шара. По условию задачи полная поверхность конуса в $\frac{8}{3}$ раза больше поверхности вписанной в него сферы, поэтому можно записать:

$$\pi r(l+r) = \frac{8}{3} \cdot 4\pi R^2$$

или

$$3r(l+r) = 32R^2. \quad (1)$$

Выразим все линейные элементы, входящие в равенство (1), через l . Из $\triangle SOB$ имеем: $OB = l \cdot \cos x = r$. Из прямоугольного $\triangle OO_1OB$ имеем: $OO_1 = OB \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ или $R = l \cdot \cos x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Теперь равенство (1) можно записать так:

$$3l \cos x (l + l \cos x) - 32l^2 \cos^2 x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}.$$

Разделим обе части на $l^2 \cos x \neq 0$, получим:

$$3 + 3 \cos x = 32 \cos x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}.$$

Перейдем к половинному аргументу, получим:

$$6 \cos^2 \frac{x}{2} = 32 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

или

$$3 \cos^4 \frac{x}{2} = 16 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} - 16 \sin^4 \frac{x}{2}.$$

Мы получили однородное уравнение.

Разделим обе части уравнения на $\cos^4 \frac{x}{2}$, получим:

$$16 \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - 16 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3 = 0.$$

Для данной задачи пригодны положительные решения:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$x = 2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{или} \quad x = 2 \arctg \frac{1}{2}.$$

УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К ОДНОРОДНЫМ.

Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + \cos^2 x = d$ легко приводить к однородному, если правую часть уравнения умножить на $\sin^2 x + \cos^2 x$.

Рассмотрим пример:

$$3 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2.$$

Решение. Умножим правую часть на $\sin^2 x + \cos^2 x$, получим уравнение: $\sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0$ или $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$, $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = 3$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ или $x = \arctan 3 + \pi n$.

В процессе прохождения теорем сложения в X классе решаются следующие виды уравнений.

УРАВНЕНИЯ, В КОТОРЫХ ПРИМЕНЯЮТСЯ УСЛОВИЯ РАВЕНСТВА ОДНОИМЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

К этому типу относятся уравнения, которые в общем виде могут быть записаны так:

$$\sin(ax + b) = \sin(cx + d)$$

$$\cos(mx + n) = \cos(rx + c)$$

$$\operatorname{tg}(mx + n) = \operatorname{tg}(rx + c)$$

$$\operatorname{ctg}(ax + b) = \operatorname{ctg}(cx + d)$$

Решение уравнений этого вида основано на следующих теоремах.

Теорема 1. Для выполнения равенства $\sin x = \sin y$ необходимо и достаточно, чтобы

$$x - y = 2\pi n \quad (1)$$

$$x + y = \pi(2n + 1) \quad (2)$$

Доказательство.

а) Необходимость условия.

Пусть $\sin x = \sin y$, тогда $\sin x - \sin y = 0$;

$$2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0;$$

следовательно,

$$\sin \frac{x-y}{2} = 0$$

или

$$\cos \frac{x+y}{2} = 0; \quad \frac{x-y}{2} = \pi n; \quad \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} (2n+1);$$

$$x-y = 2\pi n; \quad x+y = \pi(2n+1).$$

б) Достаточность условия.

Пусть $x-y = 2\pi n$ (3)

$$x+y = \pi(2n+1) \quad (4)$$

Из равенства (3) имеем: $x = 2\pi n + y$ или $\sin x = \sin(2\pi n + y)$;

$\sin x = \sin y$; если $x+y = \pi(2n+1)$, то $x = -y + \pi(2n+1)$;

$$\sin x = \sin[-y + \pi(2n+1)];$$

$$\sin x = \sin[2\pi n + (\pi - y)] = \sin(\pi - y) = \sin y.$$

Теорема 2. Для того, чтобы $\cos x = \cos y$, необходимо и достаточно, чтобы $x-y = 2\pi n$ и $x+y = 2\pi n$.

Доказательство.

а) Необходимость условия. Пусть $\cos x = \cos y$, тогда $\cos x - \cos y = 0$;

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = 0,$$

следовательно,

$$\sin \frac{x+y}{2} = 0$$

или

$$\sin \frac{x-y}{2} = 0; \quad \frac{x+y}{2} = \pi n;$$

$$\frac{x-y}{2} = \pi n; \quad x+y = 2\pi n$$

$$x-y = 2\pi n.$$

б) Достаточность условия. Пусть $x-y = 2\pi n$ и $x+y = 2\pi n$, тогда $x = y + 2\pi n$ и $x = 2\pi n - y$; $\cos x = \cos(y + 2\pi n) = \cos y$ или $\cos x = \cos(2\pi - y) = \cos y$.

Теорема 3. Для выполнения равенства двух тангенсов, т. е. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$, необходимо и достаточно, чтобы $x-y = \pi n$.

а) Необходимость условия. Пусть $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$, тогда $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 0$ или

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y} = 0,$$

следовательно,

$$\sin(x - y) = 0, \quad x - y = \pi n.$$

б) Достаточность условия. Пусть $x - y = \pi n$, тогда $x = \pi n + y$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\pi n + y) = \operatorname{tg} y$.

Упражнение 7.

Решить уравнения:

1. $\sin 5x = \sin 3x$.

Решение: $8x = \pi(2n + 1); \quad x = \frac{\pi}{8}(2n + 1);$

и $2x = 2\pi n; \quad x = \pi n.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8}(2n + 1), \quad x = \pi n.$

2. $\cos 7x = \cos x. \quad 8x = 2\pi n; \quad x = \frac{\pi n}{4};$

$6x = 2\pi n; \quad x = \frac{\pi n}{3}.$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{4}, \quad x = \frac{\pi n}{3}.$

3. $\cos(3x + 45^\circ) = -\cos 15^\circ.$

Решение. $-\cos 15^\circ = \cos 165^\circ$. Уравнение запишется так: $\cos(3x + 45^\circ) = \cos 165^\circ$. Из условия равенства двух косинусов следует: $3x + 45^\circ - 165^\circ = 360^\circ n, \quad 3x + 45^\circ + 165^\circ = 360^\circ n.$

Ответ: $x = 120^\circ n + 40^\circ, \quad x = 120^\circ n - 70^\circ.$

4. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg} 2x.$

Решение. $2x - \frac{\pi}{4} + x = \pi n; \quad x = \frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{12}.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12}(4n + 1).$

5. $\sin 6x = -\sin 2x.$

Решение. Так как синус-функция нечетная, то можно записать:

$$\sin 6x = \sin(-2x).$$

Имеем:

$$4x = \pi(2n + 1); \quad x = \frac{\pi}{4} (2n + 1);$$

$$8x = 2\pi n, \quad x = \frac{\pi n}{4}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} (2n + 1), \quad x = \frac{\pi n}{4}.$

6. $\cos 5x = \sin \frac{7\pi}{8}.$

Решение. Используя формулы дополнительных углов, получим:

$$\cos 5x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8} \right) = \cos \frac{3\pi}{8}.$$

Имеем уравнение:

$$\cos 5x = \cos \frac{3\pi}{8}.$$

Из условия равенства двух косинусов следует, что

$$x = \frac{2\pi n}{5} - \frac{3\pi}{40} \quad \text{и} \quad x = \frac{2\pi n}{5} + \frac{3\pi}{40}.$$

7. $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{ctg} x.$

Решение. Перепишем уравнение (7) так:

$$\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$$

Используя условие равенства тангенсов, получим:

$$x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + x = \pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} (4n + 1).$

8. $\cos 15x = \sin 5x.$

Решение. $\cos 15x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 15x \right).$

Из условия равенства косинусов следует:

$$15x + 15x - \frac{\pi}{2} = 2\pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{15} \left(\frac{\pi}{4} + n \right)$.

Решить уравнения:

1. $\sin 5x = \sin 3x$

2. $\cos(\pi + x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

3. $\sin 3x = \cos 2x$

4. $\operatorname{tg} \frac{3x}{2} = \operatorname{ctg} \frac{5x}{2}$

5. $\sin(x - 90^\circ) = -\sin(x - 180^\circ)$

6. $\cos 3x = -\cos x$

7. $\sin(x + 30^\circ) = -\cos(x - 30^\circ)$

8. $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

9. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \operatorname{ctg} 4x$

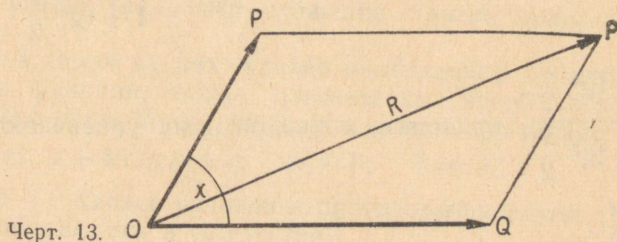
10. $\sin 4x = -\cos 6x$

11. Две силы P и R приложены к материальной точке. Найти угол между этими силами, зная, что если, не изменяя величины сил, увеличить угол между ними вдвое, то величина равнодействующей останется без изменений.

Решение. Пусть силы P и Q приложены к материальной точке O . Обозначим равнодействующую двух сил P и Q через R , тогда по теореме косинусов имеем (черт. 13):

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(\pi - x), \quad (1)$$

если угол увеличить вдвое, то он станет равным $2x$. Но так как



Черт. 13.

равнодействующая и силы остаются без изменения, то можно записать:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos (180^\circ - 2x), \quad (2)$$

откуда, приравнивая правые части равенства (1) и (2), получим уравнение:

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - x) &= \cos(180^\circ - 2x), \text{ или} \\ -\cos x &= -\cos 2x; \quad \cos x = \cos 2x; \end{aligned}$$

$3x = 2\pi n$ при $n = 1$ имеем: $x = 120^\circ$.

Если $x = 2\pi n$, то при $n = 0$, получим $x = 0$.

Ответ. Угол между силами равен 0° или 120° .

УРАВНЕНИЯ ВИДА

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

В учебной литературе приводятся способы решения этого уравнения.

1-й способ. Возводим обе части уравнения в квадрат, затем умножаем правую часть уравнения на $\sin^2 x + \cos^2 x$. После перенесения всех членов в левую часть получим уравнение: $(a^2 - c^2) \sin^2 x + 2ab \sin x \cdot \cos x + (b^2 - c^2) \cos^2 x = 0$. Решив это однородное уравнение получим:

$$x = \frac{-ab \pm c \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 - c^2}.$$

Уравнение имеет решение, если $a^2 + b^2 \geq c^2$. Указанный способ решения нецелесообразен, так как он приводит к приобретению посторонних корней. Причина приобретения корней кроется в возведении в квадрат обеих частей уравнения.

2-й способ. Заменяем $\sin x$ через $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ и $\cos x$ через

$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, приходим к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

При решении этим способом мы теряем корни. Причина
 потери корней состоит в том, что соотношения $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

и $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ являются тождествами лишь при

$$x \neq \pi(2K + 1).$$

Если $b = -c$, уравнение $a \sin x + b \cos x = -b$ следует решить так:

$$a \sin x + b(1 + \cos x) = 0;$$

$$2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2b \cos^2 \frac{x}{2} = 0;$$

$$2 \cos \frac{x}{2} \left(a \sin \frac{x}{2} + b \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Данное уравнение распадается на два уравнения. Решим каждое из них. Если в этом случае решить уравнение вторым способом, то уравнение $(c + b) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + (c - b) = 0$

обращается в линейное: $2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - c + b = 0$, что сопровождается потерей корней.

3-й способ. Наиболее универсальным является способ введения вспомогательного угла. Преобразование

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$$

встречается в физике (например, сложение гармонических колебаний).

При решении задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции, также применяется способ введения вспомогательного угла. Пусть требуется решить уравнение:

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad a \neq 0; \quad b \neq 0.$$

(При $a = 0$ и $b = 0$ данное уравнение противоречиво; если $c = 0$, то уравнение обращается в тождество.)

Вынесем за скобки в левой части уравнения положительный множитель $\sqrt{a^2 + b^2}$, получим:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = c.$$

Так как $a < \sqrt{a^2 + b^2}$, то можно положить, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi \quad \text{или} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Данное уравнение приводится к виду:

$$\sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x) = c;$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = c;$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a^2 + b^2}.$$

Угол φ определяется из равенства

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Упражнение 8.

Решить уравнения:

$$1. \sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

Решение. $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$. Левую часть уравнения можно записать так:

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) = \sqrt{2};$$

$$2(\cos 30^\circ \cdot \sin x + \sin 30^\circ \cdot \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sin(x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = (-1)^n 45^\circ + 180^\circ n - 30^\circ.$$

$$2. 2 \sin x - 3 \cos x = 1.$$

Решение. Выразим синус и косинус через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, получим уравнение:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 = 0; \quad \operatorname{tg} x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

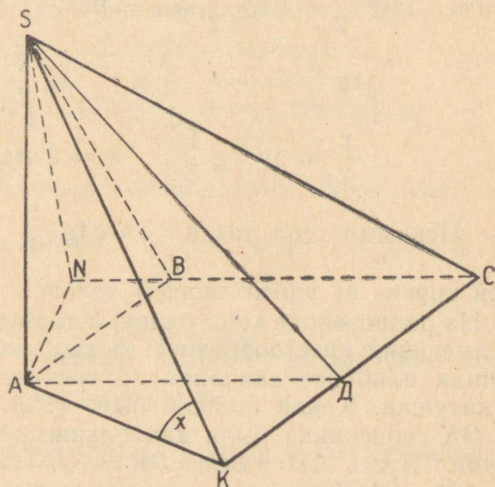
Ответ: $x = \arctg(-1 \pm \sqrt{3}) + \pi n$.

3. $2 \sin x + 3 \cos x = 6$.

Решение. $2^2 + 3^2 < 6^2$. Уравнение не имеет решений.

4. В основании пирамиды ромб. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой острый угол, а две другие наклонены к основанию под равными углами. Определить угол между этими двумя гранями и основанием, если боковая поверхность пирамиды в 2 раза больше площади основания.

Решение. Пусть грани SAD и SAB перпендикулярны к основанию пирамиды, тогда их линия пересечения SA есть перпендикуляр к основанию $ABCD$. Проведем $AK \perp DC$; так как $\angle ADC$ — тупой, то точка K лежит на продолжении DC $SK \perp DC$ (черт. 14). $\angle SKA$ — линейный угол искомого двугранного угла. Обозначим $\angle AKS$ через x .



Черт. 14.

$$S_{\text{бок.}} = \frac{SA \cdot AD}{2} + \frac{SA \cdot AB}{2} + \frac{SK \cdot DC}{2} + \frac{BC \cdot SN}{2}.$$

Так как $AD = DC = BC$ и $SN = SK$, (как наклонные, проведенные из точки S , имеющие равные проекции AN и AK), то площадь $\triangle SAD$ равна площади $\triangle SAB$ и площадь $\triangle SDC$ равна площади $\triangle SBC$; тогда $S_{\text{бок.}} = SA \cdot AD + SK \cdot DC = SA \cdot AD + SK \cdot AD = AD(SA + SK)$ ($DC = AD$).

Площадь основания пирамиды равна $AD \cdot AK$. По условию задачи

$$\frac{S_{\text{бок.}}}{S_{\text{осн.}}} = 2 \quad \text{или} \quad \frac{AD(SA + SK)}{AD \cdot AK} = 2; \quad SA + SK = 2AK.$$

Обозначим SK через a , тогда $SA = a \sin x$; $AK = a \cdot \cos x$ и $a \sin x + a = 2a \cdot \cos x$.

Делим обе части последнего равенства на a , получим:

$$\sin x + 1 = 2 \cos x;$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{2 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = -1. \quad \text{После упрощений}$$

получим: $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0;$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3};$$

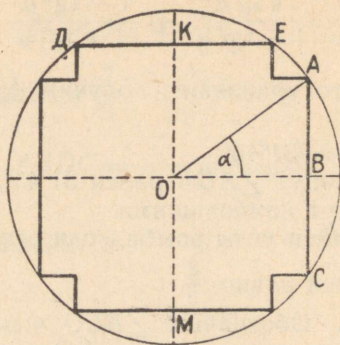
$$\frac{x}{2} = \arctg \frac{1}{3}; \quad x = 2 \arctg \frac{1}{3}.$$

Ответ. Искомый угол равен $2 \arctg \frac{1}{3}$.

Второй корень не удовлетворяет условию задачи.

5. На радиозаводе конструируют трансформатор переменного тока, имеющий крестообразную форму, важно, чтобы железный сердечник наиболее заполнял внутреннее сечение цилиндрической катушки. Какой должен быть угол AOB , чтобы размеры AB и OK сердечника были наибольшими?

Решение. Пусть $AB = BC = DK = KE = x$, $OB = OK = OM = y$ (черт. 15), $\angle AOB = \beta$, тогда площадь сечения сердечника выра-



Черт. 15.

зится так: $S = 4[xy + x(y - x)] = 4(2xy - x^2)$; из прямоугольного $\triangle ABO$ имеем: $x = AB = OA \sin \alpha$ ($\angle AOB = \alpha$), $OB = y = OA \cos \alpha$; тогда

$$\begin{aligned} S &= 4(2xy - x^2) = 4(2OA \sin \alpha \cdot OA \cos \alpha - OA^2 \sin^2 \alpha) = \\ &= 4OA^2(\sin 2\alpha - \sin^2 \alpha) = 2 \cdot OA^2(2 \sin 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha) = \\ &= 2OA^2(2 \sin 2\alpha - 1 + \cos 2\alpha) = 2OA^2[(2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha) - 1]. \end{aligned}$$

Когда $2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$ будет иметь наибольшее значение, тогда будет наибольшая площадь сердечника.

Найдем наибольшее значение выражения:

$$2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha; \quad 2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha =$$

$$= \sqrt{5} \left(\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha \right) =$$

$$= \sqrt{5} (\cos \varphi \cdot \sin 2\alpha + \sin \varphi \cos 2\alpha), \text{ где}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \sin \varphi; \quad \frac{1}{\sqrt{5}} = \cos \varphi; \quad \operatorname{tg} \varphi = 2.$$

Итак, $2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \sqrt{5} \cos(2\alpha - \varphi)$.

Когда $\cos(2\alpha - \varphi) = 1$, получим наибольшее значение суммы.

$$2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$$

Итак, наибольшее значение суммы $2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$ равно $\sqrt{5}$.

Для определения угла α решим уравнение $2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \sqrt{5}$.

Имеем:
$$\frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{5}.$$

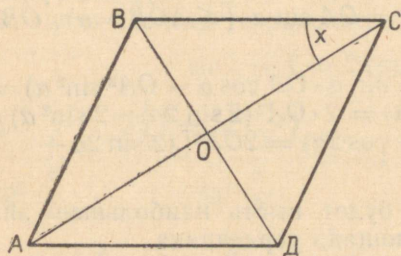
Решив это уравнение, получим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5} + 1},$

откуда $\alpha \approx 31^\circ 43'.$

Ответ. Когда $\angle AOB$ равен $31^\circ 43'$, то размеры AB и OK сердечника будут наибольшими.

6. Найти углы ромба, если отношение его периметра к сумме диагоналей равно $\frac{3}{2}.$

Решение. Обозначим $\angle BCO$ через x , тогда из $\triangle BOC$ имеем:
 $BO = OC \cdot \operatorname{tg} x; \quad BC = \frac{BO}{\sin x}$ (черт. 16).



Черт. 16.

Периметр ромба равен $\frac{4BO}{\sin x}$, сумма диагоналей равна $2BO + 2OC = 2OC \cdot \operatorname{tg} x + 2OC$; $BC = \frac{OC \cdot \operatorname{tg} x}{\sin x}$ по условию задачи

$$\frac{4OC \cdot \operatorname{tg} x}{\sin x} : (2OC \operatorname{tg} x + 2OC) = \frac{3}{2}.$$

После выполнения деления получим уравнение: $\frac{2}{\sin x + \cos x} = \frac{3}{2}$ или $3 \sin x + 3 \cos x = 4.$

$$\sin x + \cos x = \frac{4}{3}; \quad \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{16}{9};$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9};$$

$$\sin 2x = \frac{7}{9}; \quad 2x = \arcsin \frac{7}{9};$$

$$x = \frac{1}{2} \arcsin \frac{7}{9}.$$

Ответ. $\angle BCD = \arcsin \frac{7}{9}$, $\angle ADC = \pi - \arcsin \frac{7}{9}$.

Упражнение 9.

Решить уравнения:

1. $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$

2. $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 1$

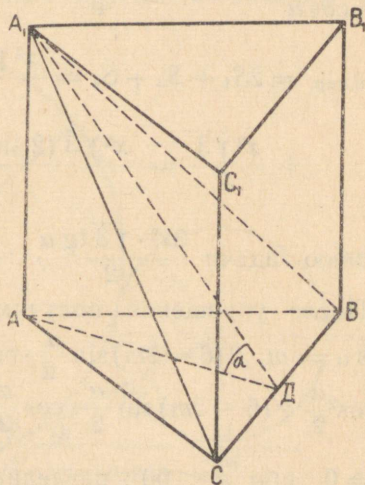
3. $2 \sin x + 5 \cos x = 4$

4. $2 \sin 3x + 5 \cos 3x = 4$

5. $\sqrt{3} \sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \sqrt{2}$

6. $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$

7. Через сторону (черт. 17) BC основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость, проходящая через противоположную вершину A_1 верхнего основания. Найти угол между этой плоскостью и основанием призмы, если отноше-



Черт. 17.

ние боковой поверхности призмы к полной поверхности отсеченной от нее треугольной пирамиды A_1ABC равно m .

Решение. Обозначим сторону основания призмы через x и иско-
мый $\angle A_1DA$ — через α . $S_{\text{бок. призмы}} = 3x \cdot AA_1$. Из $\triangle ADA_1$

имеем: $AA_1 = AD \operatorname{tg} \alpha = \frac{x\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha$ Боковая поверхность призмы
равна

$$3x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}.$$

Полная поверхность пирамиды A_1ABC равна сумме площа-
дей четырех $\triangle$ -ов: A_1AC , A_1AB , A_1BC и ABC . Обозначим пло-
щади этих $\triangle$ -ов соответственно через S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , тогда можно
записать:

$$S_1 = S_2 = \frac{AA_1 \cdot AC}{2} = \frac{x\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha \cdot x}{2 \cdot 2};$$

$$2S_1 = \frac{x^2\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2}; \quad S_3 = \frac{BC \cdot A_1K}{2} = \frac{x \cdot x\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cos \alpha} =$$

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4 \cos \alpha}; \quad S_4 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{\text{полн.пир.}} = 2S_1 + S_3 + S_4 = \frac{x^2\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2} + \frac{x^2\sqrt{3}}{4 \cos \alpha} +$$

$$+ \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3} (2 \sin \alpha + \cos \alpha + 1)}{4 \cos \alpha}.$$

По условию задачи $\frac{3x^2 \cdot \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2} : \frac{x^2\sqrt{3} (2 \sin \alpha + \cos \alpha + 1)}{4 \cos \alpha} =$
 $= m$. После упрощений получим уравнение $(6 - 2m) \sin \alpha -$
 $- m \cos \alpha = m$; $2(6 - 2m) \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = m(1 + \cos \alpha) =$
 $= 2m \cos^2 \frac{\alpha}{2}$; $(6 - 2m) \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - m \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 0$.

$\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, ибо $\alpha < 90^\circ$; разделив на $\cos \frac{\alpha}{2}$, получим:

$$(6 - 2m) \sin \frac{\alpha}{2} - m \cos \frac{\alpha}{2} = 0;$$

$$(6 - 2m) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - m = 0; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{6 - 2m};$$

$$\frac{\alpha}{2} < 45^\circ. \quad \text{Следовательно, } \frac{m}{6 - 2m} < 1; \quad \frac{m}{6 - 2m} - 1 < 0;$$

$$\frac{m - 6 + 2m}{6 - 2m} < 0; \quad \frac{3m - 6}{6 - 2m} < 0.$$

Решив последнее неравенство, получим $m > 3$ и $m < 2$.

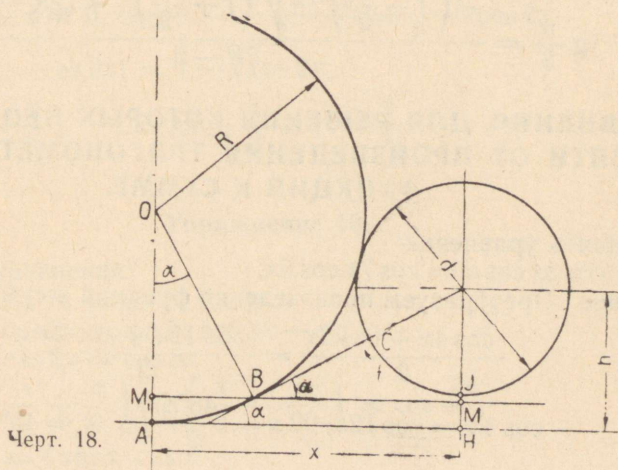
Ответ: $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{m}{6 - 2m}$, при $m < 2$;

m не может быть больше 3, ибо если $m > 3$, то

$$(6 - 2m) \sin \frac{\alpha}{2} - m \cos \frac{\alpha}{2} < 0.$$

Если, например, $m = 1,5$, то $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

8. Определить угол α наклона прямой вставки BC к оси пути, если расстояние между центром O_1 поворотного круга и осью пути равно h , диаметр поворотного круга равен d , а прямая вставка между поворотным кругом и началом кривой равна f (черт. 18).



Решение. До точки A паровоз движется прямолинейно, а от A до точки B по окружности, касательной к оси пути и к прямой вставке BC . Переходя от точки B на прямую вставку BC , паровоз выезжает на поворотный круг.

Из чертежа видно, что $h = O_1H = O_1M + MH = \left(f + \frac{d}{2}\right) \cdot \sin \alpha + MH$; $MH = AM_1 = OA - OM_1 = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha)$. Следовательно,

$$h = \left(f + \frac{d}{2}\right) \sin \alpha + R(1 - \cos \alpha). \quad (1)$$

Решив тригонометрическое уравнение (1), найдем искомый угол.

Выразим $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ через тангенс половины аргумента, получим:

$$h = \left(f + \frac{d}{2}\right) \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + R \left(1 - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}\right).$$

После элементарных преобразований получим уравнение:

$$(2R - h) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \left(f + \frac{d}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - h = 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-\left(f + \frac{d}{2}\right) \pm \sqrt{\left(f + \frac{d}{2}\right)^2 + (2R - h)h}}{2R - h}.$$

УРАВНЕНИЯ, ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ НЕОБХОДИМО ПЕРЕЙТИ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К СУММЕ.

Решить уравнения:

$$1. \cos 3x \cos x = \cos 7x \cos 5x.$$

Решение. Преобразуем произведение функций в сумму, получим:

$$\frac{\cos 4x + \cos 2x}{2} = \frac{\cos 12x + \cos 2x}{2};$$

$$\cos 4x = \cos 12x; \quad x = \frac{45^\circ n}{2}; \quad x = 45^\circ n.$$

$$2. \cos(x + 70^\circ) \cos(x + 10^\circ) = \sin 30^\circ.$$

Решение. Преобразуем произведение тригонометрических функций в сумму, получим:

$$\begin{aligned} \cos(2x + 80^\circ) + \cos 60^\circ &= \sin 30^\circ; \\ \cos(2x + 80^\circ) &= 0; \quad x = 90^\circ n + 5^\circ. \end{aligned}$$

$$3. \sin 5x \cdot \cos 7x = \sin 4x \cdot \cos 8x.$$

Решение. Данное уравнение можно представить так:

$$\begin{aligned} \sin 2x = \sin 4x; \quad 6x = 180^\circ(2n + 1); \quad x = 30^\circ(2n + 1) \\ \text{и} \quad x = 180^\circ n. \end{aligned}$$

$$4. 2 \sin 2x \sin x + \cos 3x = 0.$$

После перехода от произведения тригонометрических функций к сумме получим:

$$\cos x - \cos 3x + \cos 3x = 0; \quad \cos x = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{2} (2n + 1).$$

$$5. \frac{\cos^2 x - \sin^2 2x}{4 \cos^2 x} = \sin(x + 30^\circ) \sin(x - 30^\circ).$$

Решение. Перейдем в правой части уравнения от произведения тригонометрических функций к сумме, получим уравнение:

$$\frac{\cos^2 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{4 \cos^2 x} = \frac{\cos 60^\circ - \cos 2x}{2};$$

$$\cos x \neq 0, \text{ тогда } \frac{1 - 4 \sin^2 x}{2} = \frac{1}{2} - \cos 2x$$

$$\text{или } 1 - 4(1 - \cos 2x) = 1 - 2 \cos 2x;$$

$$\cos 2x = \frac{2}{3}; \quad x = \pi n \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{3}.$$

Упражнение 10.

Решить уравнения:

$$1. \sin 5x \sin 7x = \sin 4x \sin 8x$$

$$2. \sin 6x \cos 2x = \sin 5x \cos 3x - \sin 2x$$

$$3. \cos 2x \cos 3x = \cos 5x$$

$$4. 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{20} \right) = \cos \frac{3\pi}{5}$$

$$5. \sin 3x = 4 \sin x \cdot \cos x$$

$$6. \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$7. \sin(x + 45^\circ) \sin(x - 15^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$8. \sin 7x \cdot \sin x = \sin 5x \cdot \sin 3x$$

ПРОВЕРКА РЕШЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Проверка корней в основном преследует две цели:

1) Метод решения может внести посторонние корни, в этом случае проверка необходима, и ее невыполнение есть математическая ошибка. Надо выполнять проверку в тех случаях, когда мы возводим обе части уравнения в квадрат. Проверка необходима также в тех случаях, когда уравнение содержит дробные выражения, функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ и т. д., имеющие смысл не при всех значениях неизвестного.

2) Если при решении уравнения преобразования применяющиеся в процессе решения уравнения, не приводят к уравнению неэквивалентному исходному, то проверка не обязательна. Этот случай проверки может быть применен в целях самоконтроля.

Вопрос о проверке корней уравнений недостаточно разработан в методической литературе. В большинстве школьных примеров проверка не требует сложных преобразований.

Проверка корней уравнения может быть проведена одним из двух способов.

Первый способ.

Возьмем уравнение

$$\sin 3x \operatorname{ctg} x = 0. \quad (1)$$

Решим каждое из уравнений:

$$\sin 3x = 0; \quad \operatorname{ctg} x = 0.$$

Они имеют соответственно решения:

$$x = \frac{\pi m}{3}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi m = (2m + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Так как $\sin 3x$ не теряет смысла ни при каком значении аргумента, то проверить необходимо серию корней $x = \frac{\pi m}{3}$.

Надо узнать, не может ли $\operatorname{ctg} \frac{\pi m}{3}$ обратиться в бесконеч-

ность. (Произведение равно нулю, когда по крайней мере один из множителей равен нулю, а остальные множители конечны.) Это окажется возможным для тех значений буквы m , при которых будет иметь место равенство: $\frac{\pi m}{3} = \pi n$ (где n — целое число), т. е. равенство $m = 3n$; следовательно, решение $\frac{\pi m}{3}$ будет решением данного уравнения (1) только при $m \neq 3n$; но тогда для целого числа m остаются значения $3n + 1$ и $3n + 2$, ибо всякое целое число m , не делящееся на 3, дает при делении на 3, либо остаток 1, либо остаток 2, т. е. может быть представлено либо в виде $3n + 1$, либо в виде $3n + 2$, при этом остаток 2 можно заменить отрицательным остатком -1 (напр. $17 = 3 \cdot 5 + 2 = 3 \cdot 6 - 1$).

Поэтому окончательно заключаем, что данное уравнение имеет решение:

$$x_1 = (3n + 1) \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = (3n - 1) \frac{\pi}{3};$$

$$x^3 = (2m + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Другой прием проверки решения состоит в следующем: найдем, какие значения может иметь выражение $\operatorname{ctg} \frac{m\pi}{3}$. Так как котангенс имеет период π , то для выделения периода π дадим значения для m : 1) $m = 3K$; 2) $m = 3K + 1$; 3) $m = 3K + 2$ или $m = 3K - 1$; тогда получим соответственно выражения:

$$\operatorname{ctg} \pi K; \operatorname{ctg} \left(\pi K + \frac{\pi}{3} \right) \text{ и } \operatorname{ctg} \left(\pi K - \frac{\pi}{3} \right).$$

Первое выражение не имеет числового смысла. Поэтому решениями уравнения будут

$$K\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $x = \pi n \pm \frac{\pi}{3}$ и $x = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$.

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ФОРМУЛ КОРНЕЙ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ.

Для проверки корней этим способом необходимо уяснить понятие о «периоде уравнения». Условимся называть периодом уравнения период функции $f(x)$, где $f(x)$ — левая часть уравнения, получаемая из данного уравнения перенесением всех членов в левую часть.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Найти период уравнения $\cos 3x + \sin \frac{x}{2} = -\operatorname{tg} 2x$.

Перенесем все члены в левую часть уравнения, получим:
 $\cos 3x + \sin \frac{x}{2} + \operatorname{tg} 2x = 0$.

Известно, что период функций $\sin ax$ и $\cos ax$ равен $\frac{2\pi}{a}$; период функций $\operatorname{tg} ax$ и $\operatorname{ctg} ax$ равен $\frac{\pi}{a}$. (В стабильном учебнике Новоселова эти теоремы доказываются.) Обозначим период функций $\cos 3x$, $\sin \frac{x}{2}$, $\operatorname{tg} 2x$, соответственно через T_1 , T_2 , T_3 , тогда

$$T_1 = \frac{2\pi}{3}; \quad T_2 = 2\pi : \frac{1}{2} = 4\pi; \quad T_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Период уравнения равен общему наименьшему кратному всех трех периодов. Итак, период уравнения $T = 12\pi$.

2. Найти период уравнения $\cos \frac{3x}{2} = \sin \frac{x}{3}$. (1)

3. Найти период уравнения $\cos \frac{3x}{2} = \sin \frac{x}{3}$. (2)

Решение. Период $\cos \frac{3x}{2}$ равен $2\pi : \frac{3}{2} = \frac{4\pi}{3}$; период $\sin \frac{x}{3}$ равен $2\pi : \frac{1}{3} = 6\pi$.

Наименьшее кратное всех периодов равно 12π . Итак, период уравнения (2) равен 12π .

4. Найти период уравнения:

$$3 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2.$$

Перенесем все члены в левую часть, получим:

$$3 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x - 2 = 0.$$

Левую часть уравнения преобразуем, получим:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} (1 - \cos 2x) - 2 \sin 2x + \frac{5}{2} (1 + \cos 2x) - 2 &= \\ = \frac{3}{2} - 3 \cos 2x - 2 \sin 2x + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cos 2x - 2. \end{aligned}$$

Очевидно, период уравнения равен π . Данный прием проверки корней заключается в том, что из основной формулы, полученной при решении уравнения, выделяют элементарные формулы.

Условимся назвать элементарной формулой корней уравнения $f(x) = 0$, формулу $x = K\pi + \beta$, где π — период уравнения, K — целое число, $0 \leq \beta < \pi$.

В качестве π будем всегда брать наименьший период. Поясним сказанное примерами.

Решить уравнение и выделить из основной формулы решения элементарные.

$$1. \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Левую часть уравнения (1) преобразуем, получим:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{3}{2}.$$

После упрощений получим уравнение:

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x &= 0 \\ 2 \cos 4x \cdot \cos 2x + \cos 4x &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\cos 4x = 0; \quad 4x = \frac{\pi}{2} (2n + 1); \quad x = \frac{\pi}{8} (2n + 1) \quad (A);$$

$$2 \cos 2x = -1; \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}; \quad 2x = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3},$$

$$x = \pi n \pm \frac{\pi}{3} \quad (B).$$

Для выделения из формул (A) и (B) элементарных найдем период уравнения (2). Очевидно, период $T = \pi$.

Формула (А) разлагается на следующие элементарные формулы:

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + \pi n \left(\frac{\pi}{8} \right), \quad x_2 = \frac{3\pi}{8} + \pi n \left(\frac{3\pi}{8} \right)$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{8} + \pi n \left(\frac{5\pi}{8} \right), \quad x_4 = \frac{7\pi}{8} + \pi n \left(\frac{7\pi}{8} \right).$$

В скобках выделены углы на полусегменте $[0, \pi)$, длина которого равна периоду π . Все корни в скобках должны быть пропущены, их надо подставить в уравнение (1).

$$2. \quad 2 \cos^2 x + \cos^2 x = 0.$$

Наименьший период уравнения равен π . Действительно:

$$2 \cos^2 x + \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 2x = 1 + 2 \cos 2x.$$

$$\text{Имеем уравнение: } 1 + 2 \cos 2x = 0; \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}; \quad 2x =$$

$$= \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = \pi n \pm \frac{\pi}{3}. \quad (1)$$

Выделим из формулы (1) элементарные формулы корней:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n \left(\frac{\pi}{3} \right); \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + \pi n \left(\frac{2\pi}{3} \right).$$

$$3. \quad \text{Уравнение } \sin 3x = 0 \text{ имеет наименьший период } \frac{2\pi}{3};$$

поэтому формула его корней $x = \frac{\pi n}{3}$ разлагается на следующие элементарные:

$$x_1 = \frac{\pi n}{3} \left(0, \frac{\pi}{3} \right); \quad x_1 = \frac{2\pi n}{3} (0); \quad x_2 = \frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{3} \left(\frac{\pi}{3} \right).$$

Проверке подлежат лишь $0, \frac{\pi}{3}$, принадлежащие полусегменту

$$\left[0, \frac{2\pi}{3} \right).$$

$$4. \quad \sin^4 x + \cos^2 2x = 2. \quad (1)$$

$$\text{Решение. } \sin^4 x + \cos^2 2x = \frac{(1 - \cos 2x)^2}{2} + \cos^2 2x =$$

$$= \frac{5 \cos^2 2x - 2 \cos 2x - 7}{4}. \quad \text{Решая квадратное уравнение}$$

$$5 \cos^2 2x - 2 \cos 2x - 7 = 0 \quad (2), \text{ получим } x = \frac{\pi}{2} (2n + 1).$$

Для проверки корней найдем период левой части уравнения, для этого левую часть уравнения (2), запишем так: $\frac{5(1 + \cos 4x)}{2} -$

$- 2 \cos 2x - 7 = 0$. Теперь легко заметить, что период уравнения

(1) равен π . Формула $x = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$ разлагается на элементарные

$$x_1 = \pi n + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

Проверке подлежит корень $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Проверка: } \sin^4 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 1 + (-1)^2 = 2.$$

Примечание. Если период уравнения $f(x) = 0$ есть H , то все множество корней можно выделить не на полуотрезке $[0, h)$, а на любом другом, имеющем длину h . Например, уравнение

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет период π . Формула его корней

$x = \pi n \pm \frac{\pi}{8}$. Для проверки корней можно выделить углы на

полуотрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, длина которого равна π .

Проверить надо углы $-\frac{\pi}{8}$ и $\frac{\pi}{8}$, но так как функция косинуса четная, достаточно проверить только угол $\frac{\pi}{8}$.

$$\text{Проверка: } \cos 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Если функция $f(x)$, представляющая левую часть уравнения, четная, то число корней уравнения, подлежащих проверке, может быть уменьшено вдвое.

Например, уравнение $\cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0$ имеет пе-

риод 2π , при этом левая часть уравнения четная. Решив уравнение, получим

$$x = 120^\circ n \pm 40^\circ.$$

Если выделить корни на полусегменте $[-\pi, \pi)$, длина которого равна 2π , то проверить надо только корни, получающиеся при $n = 0, 1$ и брать только положительные углы. Проверить надо только корни $40^\circ, 80^\circ, 160^\circ$.

Ответ, полученный при решении тригонометрического уравнения, зависит от выбора способа решения. При решении одного и того же уравнения различными способами мы можем получить по виду различные ответы, и все ответы могут оказаться верными. Метод выделения из основной формулы решения элементарных дает возможность сопоставлять различные ответы. Покажем на примере, как можно сопоставлять различные ответы.

Предположим, что три ученика А, В, С решают одно и то же уравнение $\cos^4 2x - \sin^4 2x = 0$.

Решение ученика А. Левую часть запишем так:

$$\begin{aligned} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) \cdot (\cos^2 2x + \sin^2 2x) &= 0 \quad \text{или} \\ \cos^2 2x - \sin^2 2x &= 0; \quad 1 - 2\sin^2 2x = 0; \\ 2\sin^2 2x &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} (-1)^n + \frac{\pi n}{2} \quad (1)$$

$$x = -\frac{\pi}{8} (-1)^n + \frac{\pi n}{2}.$$

Решение ученика В.

$$\cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x) = 0;$$

$$2\cos^2 2x = 1; \quad \cos 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \pi n \pm \frac{\pi}{8} \\ x = \pi n \pm \frac{3\pi}{8} \end{cases} \quad (2)$$

Решение ученика С.

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x;$$

$$x = \frac{\pi}{8} (2n + 1). \quad (3)$$

Очевидно, что по форме все ответы различны. Однако легко убедиться, что решения (1), (2), (3) дают одно и то же мно-

жество корней; в этом можно убедиться, если формулы (1), (2) и (3) разложить на элементарные.

Формула (1) разлагается на следующие элементарные формулы:

$$x_1 = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi}{8} \right), \quad x_2 = \frac{\pi n}{2} + \frac{3\pi}{8} \left(\frac{3\pi}{8} \right).$$

Проверить необходимо корни $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$.

Формула (2) разлагается на элементарные:

$$x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \left(\frac{\pi}{8} \right) \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{3\pi}{8} \right).$$

Проверить необходимо корни $\frac{\pi}{8}$ и $\frac{3\pi}{8}$.

Формула (3) разлагается на элементарные:

$$x_1 = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right).$$

Итак, из всех трех формул мы получили при проверке одни и те же углы. Следовательно, все три ответа верны, но различны по форме. Наиболее рационально решить уравнение третьим способом.

Рассмотрим еще один пример и покажем, как может быть сделана проверка решения.

Решить уравнение:

$$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3. \quad (1)$$

Возведем обе части в квадрат, получим:

$$9 \sin^2 x + 6 \sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 9.$$

Умножим правую часть на тригонометрическую единицу, получим:

$$9 \sin^2 x + 6 \sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x - 9 \sin^2 x - 9 \cos^2 x = 0;$$

$$6 \sqrt{3} \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0;$$

$$\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} (2n + 1);$$

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Так как мы возводили обе части уравнения в квадрат, то могут появиться посторонние корни, и проверка здесь обязательна.

Проверка. Подставим решение $x = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$ в исходное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} & 3 \sin \frac{\pi}{2} (2n + 1) + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} (2n + 1) = \\ & = 3 \sin \left(\pi n + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \cos \left(\pi n + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Необходимо выделить период 2π , так как наименьший период равен 2π . Дадим букве n каждое из возможных для нее значений. Положим, что $n = 2K + 1$ и $n = 2K$, получим соответственно выражения:

$$\begin{aligned} & 3 \sin \left(2\pi K + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \cos \left(2\pi K + \frac{\pi}{2} \right) = \\ & = 3 \sin \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} = 3; \\ & 3 \sin \left[(2K + 1)\pi + \frac{\pi}{2} \right] + \sqrt{3} \cos \left[\pi(2K + 1) + \frac{\pi}{2} \right] = \\ & = 3 \sin \frac{3\pi}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{3\pi}{2} = 3 \sin \frac{3\pi}{2} = -3. \end{aligned}$$

Итак, из формулы корней $x = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$ пригодны корни, когда n — четно.

Положим $n = 2K$, тогда получим:

$$x = \frac{\pi}{2} (4K + 1).$$

Подставим в исходное уравнение серию корней $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, получим:

$$3 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \pi n \right) + \sqrt{3} \cos \left(\frac{\pi}{6} + \pi n \right).$$

Для выделения периода 2π дадим букве n значение $2K$ и $2K + 1$, получим:

$$3 \sin \left(2\pi K + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} \cos \left(2\pi K + \frac{\pi}{6} \right) = 3 \sin \frac{\pi}{6} +$$

$$+ \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{2} = 3. \quad \text{При } n = 2k + 1$$

получим:

$$\begin{aligned} 3 \sin \left[\frac{\pi}{6} + \pi(2K + 1) \right] + \sqrt{3} \cos \left[\frac{\pi}{6} + \pi(2K + 1) \right] &= \\ = 3 \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) &= -3 \sin \frac{\pi}{6} - \\ - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} &= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3. \end{aligned}$$

Из формулы $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ пригодны углы при четном n . Положим, что $n = 2K$, получим:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi K = \frac{\pi}{6} (12K + 1).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} (4K + 1); \quad x = \frac{\pi}{6} (12K + 1).$

Это уравнение можно было бы решить другим способом, например, вынести $\sqrt{12}$ за скобки и далее решать способом введения вспомогательного угла, тогда проверку пригодности корней можно и не делать.

УРАВНЕНИЯ, ЛЕВАЯ ЧАСТЬ КОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ИЛИ НЕСКОЛЬКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, А ПРАВАЯ ЧАСТЬ РАВНА НУЛЮ.

Утверждение, что произведение равно нулю, когда по крайней мере один из множителей равен нулю, не всегда верно. Для того, чтобы произведение нескольких функциональных множителей было равно нулю, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

- 1) по крайней мере один из множителей равен нулю;
- 2) каждый из остальных множителей имеет смысл.

Если среди сомножителей, кроме равных нулю, имеются сомножители, теряющие смысл, то и все произведение теряет смысл.

Рассмотрим несколько примеров этого типа.

$$1. \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0.$$

Решение. $\sin 2x = 0; \quad 2x = \pi n; \quad x = \frac{\pi}{2} n.$

$\operatorname{tg} x = 0; \quad x = \pi n.$ Решение πn проверять не надо, ибо $\sin 2x$ имеет смысл при любом x . Решение $x = \frac{\pi n}{2}$ необходимо проверить, так как тангенс при некоторых значениях x теряет смысл. При $x = \frac{\pi n}{2}$ имеем:

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} n.$ Из множества решений $\frac{\pi}{2} n$ надо исключить решения вида $\frac{\pi}{2} (n + 1)$; положим $n = 2K$, получим

$$x = \pi K.$$

Ответ: $x = \pi K.$

$$2. \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 6x = 0.$$

Решение. $\operatorname{tg} 3x = 0, \quad x = \frac{\pi n}{3}.$

Проверим, не обращается ли второй множитель при $x = -\frac{\pi n}{3}$ в бесконечность:

$$\operatorname{tg} \frac{6\pi n}{3} = \operatorname{tg} 2\pi n = 0;$$

$$\operatorname{tg} 6x = 0; \quad x = \frac{\pi}{6} n.$$

Проверим, не теряет ли смысл множитель $\operatorname{tg} 3x$:

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \frac{3\pi n}{6} = \operatorname{tg} \frac{\pi n}{2}. \quad \text{При } n = 2K + 1$$

$\operatorname{tg} 3x$ теряет смысл, поэтому положим, что $n = 2K$, получим:

$$x = \frac{\pi}{6} \cdot 2K = \frac{\pi K}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi K}{3}.$

$$3. \sin 5x \cdot \operatorname{tg} 4x \cdot \cos 2x = 0.$$

Решение. $\sin 5x = 0, \quad x = \frac{\pi n}{5};$

$\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} \frac{4\pi n}{5}$ выражение имеет смысл, корни пригодны

$\operatorname{tg} 4x = 0$; $x = \frac{\pi}{4} K$; корни пригодны, ибо $\sin 5x$ и $\cos 2x$ никогда не теряют смысла. $\cos 2x = 0$;

$$x = \frac{\pi}{4} (2K + 1); \quad \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} \pi(2K + 1).$$

Корни пригодны. Корни $\frac{\pi}{4} (2K + 1)$ входят в серию корней $\frac{\pi}{4} K$, ибо K — любое целое число.

Ответ: $x = \frac{\pi K}{5}$; $x = \frac{\pi K}{4}$.

УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ДРОБНЫЕ ЧЛЕНЫ.

Для того, чтобы дробь была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы числитель дроби был равен нулю, знаменатель дроби имел смысл и не был равен нулю.

Рассмотрим несколько примеров.

Решим уравнения:

1. $\frac{1 + 3 \cos x}{3 + \cos x} = 0$.

Решение. $1 + 3 \cos x = 0$; $\cos x = -\frac{1}{3}$;

$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$. Эти корни удовлетворяют уравнению, так как знаменатель ни при каких значениях аргумента не обращается в нуль.

2. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} = 0$. Решение. $\operatorname{tg} x = 0$; $x = K\pi$. Но $\sin 2x = \sin 2K\pi = 0$.

Уравнение не имеет решений.

3. $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$.

Решение. $\cos 2x = 0$; $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$.

При $x = \frac{\pi}{4} + \pi K$ имеем: $\operatorname{tg} x + 1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi K\right) + 1 = 0$.

Ответ: $x = \pi n + \frac{\pi}{4}$.

$$4. \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0.$$

Решение. $\cos 2x = 0$; $x = \pi n \pm \frac{\pi}{4}$.

Проверим, не обращается ли знаменатель при $x = \pi n \pm \frac{\pi}{4}$ в нуль:

$$\begin{aligned} 1 - \sin 2x &= 1 - \sin 2\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 1 - \sin \frac{\pi}{2} = 0; \end{aligned}$$

$$1 - \sin 2x = 1 - \sin 2\left(\pi n - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Ответ: $x = \pi n - \frac{\pi}{4}$.

$$5. \frac{\sin x}{\sin 2x} = 0.$$

Решение. $\sin x = 0$; $x = \pi n$; $\sin 2x = \sin 2\pi n = 0$.

Уравнение не имеет решений.

$$6. \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0. \quad \text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} (4n - 1).$$

В школьной программе отсутствует вопрос о нахождении предельных корней уравнений. Так как строгое научное понятие о предельных корнях связано с понятием предела функции, но с введением с 1967/68 уч. года факультативных занятий для VII—X классов представляется возможным дать понятие о предельных корнях уравнений.

Если при $x = a$ теряет смысл хотя бы одна из функций, представляющих левую или правую части уравнений, но $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$, то число a называется предельным или несобственным корнем уравнения.

1. Уравнение $\frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} = 2$ имеет решения: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x = \frac{\pi}{2} (4n \pm 1)$ или $x = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$.

Проверим решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Имеем: $\sin 2x = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \sin(\pi + 2\pi n) = 0$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$. Левая часть уравнения принимает вид $\frac{0}{0}$, правая равна 2. Найдем предел левой и правой части при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi n} \frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi n} \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi n} (2 \sin^2 x) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Итак, решение $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ являются предельными корнями.

2. $\sin x(1 + \cos x) = 0$.

Решение. Приравниваем каждый множитель нулю, получим $\sin x = 0$; $x = \pi n$; $1 + 2 \cos x = 0$; $x = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}$. Так как синус и косинус имеют смысл при любых значениях аргумента, то обе серии корней пригодны, и проверка не нужна.

3. $\cos x(\operatorname{tg} x - \sqrt[3]{3}) = 0$.

Решение. 1) $\operatorname{tg} x - \sqrt[3]{3} = 0$; $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{3}$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$. Серию корней $\frac{\pi}{3} (3n + 1)$ проверять не нужно, так как косинус имеет смысл при любых действительных значениях аргумента.
2) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$; эту серию корней надо проверять, так как $\operatorname{tg} x$ при некоторых значениях x теряет смысл.

Имеем: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (2n+1)$. Это выражение не имеет смысла. Проверим, не будут ли корни $\frac{\pi}{2} (2n+1)$ предельными.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} (2n+1)} [\cos x (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})] &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} (2n+1)} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = \\ &= \lim \left[\sin \left(\pi n + \frac{\pi}{2} \right) \right] - \sqrt{3} \lim \cos \left(\pi n + \frac{\pi}{2} \right) = \end{aligned}$$

Для нахождения предела надо выделить период 2π ; для этого положим $n = 2K$ и $n = 2K + 1$, получим:

$$\begin{aligned} \lim \left[\sin \left(2Kn + \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{3} \lim \cos \left(2Kn + \frac{\pi}{2} \right) \right] &= \\ = \lim \sin \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} \lim \cos \frac{\pi}{2} &= 1 - 0 = 1; \\ \lim \sin \left[(2K+1)\pi + \frac{\pi}{2} \right] - \sqrt{3} \lim \cos \left[(2K+1)\pi + \frac{\pi}{2} \right] &= \\ = \lim \left[\sin \left(2K\pi + \frac{3\pi}{2} \right) \right] - \sqrt{3} \lim \left[\cos \left(2K\pi + \frac{3\pi}{2} \right) \right] &= \\ = \lim \sin \frac{3\pi}{2} - \sqrt{3} \lim \cos \frac{3\pi}{2} &= -1. \end{aligned}$$

Множество корней $\frac{\pi}{2} (2n+1)$ не является предельным.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} (3n+1)$.

4. $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 2x = 0$.

Решение. $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \pi n$.

Проверим корни $x = \pi n$; $\operatorname{ctg} 2\pi n$ не имеет смысла, так как $\operatorname{ctg} 2\pi n$ обращается в бесконечность.

Проверим, не являются ли корни $x = \pi n$ предельными.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi n} (\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 2x) &= \lim_{x \rightarrow \pi n} \frac{\sin x \cos 2x}{\cos x \sin 2x} = \lim \frac{\cos 2x}{2 \cos^2 x} = \\ &= \lim \frac{\cos 2\pi n}{2 \cos^2 \pi n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Серия корней $x = \pi n$ не являются предельными.

$$\operatorname{ctg} 2x = 0; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} (2n + 1).$$

Проверим пригодность корней:

$\frac{\pi}{4} (2n + 1)$, для этого корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ подставим в выражении $\operatorname{tg} x$, получим:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \pi K \right) = 1; \quad \text{при } n = 2K.$$

При $n = 2K + 1$ получим:

$$\operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} (2K + 1) \right] = \operatorname{tg} \left(\pi K + \frac{3}{4} \pi \right) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$

5. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0.$

Решение. $1 - \cos x = 0; \quad \cos x = 1; \quad x = 2\pi n.$

При $x = 2\pi n$ знаменатель обращается в нуль. Проверим, не является ли множество корней $x = 2\pi n$ предельным.

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi n} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi n} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 2\pi n} \operatorname{tg} \frac{x}{2} =$$

$= \lim \operatorname{tg} \pi n = 0.$ $x = 2\pi n$ есть множество предельных корней уравнения.

6. $\frac{\cos x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0.$

Решение. $\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} (2n + 1).$

Подставляя серию корней

$x = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$ в знаменатель, убеждаемся, что он теряет

смысл. Проверим, не являются ли данные корни предельными:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \cos(90^\circ - x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{2} \cos(2x - 45^\circ)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\cos^2 \left[\frac{\pi}{2}(2n+1) \right]}{\sqrt{2} \cos \left[\pi(2n+1) - \frac{\pi}{4} \right]} = \\
 &= \frac{0}{\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4}} = 0.
 \end{aligned}$$

Серия корней $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ являются предельными корнями уравнения.

Упражнение 11.

Решить уравнения:

1. $\operatorname{tg} 3x \sin x = 0$
2. $\sin 5x \operatorname{ctg} x = 0$
3. $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 2x \sin 3x = 0$
4. $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$
5. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0$
6. $\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

**УРАВНЕНИЯ, В КОТОРЫХ ЛЕВАЯ ЧАСТЬ ЕСТЬ
АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СУММА НЕСКОЛЬКИХ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УГЛА, КРАТНОГО x ,
А ПРАВАЯ ЧАСТЬ РАВНА НУЛЮ.**

Такие уравнения легко решить разложением на множители. Для разложения левой части на множители члены группируют таким образом, чтобы сумма (или полусумма), разность (или полуразность) двух из данных аргументов равнялась третьему (если имеется три тригонометрических функции); или группируют их попарно так, чтобы сумма углов одной пары равнялась сумме углов другой пары.

Решим несколько примеров.

1. $\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 0$.

Решение. Группируем первые два члена и преобразуем сумму в произведении, получим:

$$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0; \quad 2 \sin 2x \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\sin 2x = 0; \quad x = \frac{\pi n}{2}; \quad \cos x = -\frac{1}{2}; \quad x = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}.$$

2. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

Решение. Группируем первый член с четвертым, второй с третьим; преобразовав сумму в произведение, получим:

$$2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0;$$

$$2 \sin \frac{5}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0; \quad \sin \frac{5x}{2} = 0;$$

$$x = \frac{2\pi n}{5}, \quad \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0; \quad \cos \frac{3x}{2} = \cos \left(\pi - \frac{x}{2} \right);$$

$$\frac{3x}{2} + \pi - \frac{x}{2} = 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} (2n + 1).$$

3. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$.

Решение. Группируем первые два члена, получим:

$$\operatorname{tg} 3x - (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x) = 0; \quad \operatorname{tg} 3x - \frac{\sin 3x}{\cos 2x \cos x} = 0;$$

$$\operatorname{tg} 3x \left(1 - \frac{\cos 3x}{\cos 2x \cos x} \right) = 0;$$

$$\operatorname{tg} 3x \frac{\cos x \cos 2x - \cos(2x + x)}{\cos x \cos 2x} = 0;$$

$$\operatorname{tg} 3x \frac{\sin x \sin 2x}{\cos x \cos 2x} = 0; \quad \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = 0;$$

$$\operatorname{tg} 3x = 0; \quad x = \frac{\pi n}{3}; \quad \operatorname{tg} x = 0; \quad x = \pi n;$$

$$\operatorname{tg} 2x = 0; \quad x = \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{3}$. Решения $x = \pi n$ входят в число решений

$x = \frac{\pi n}{3}$ при $n = 3K$, получим $x = \pi K$. Решение $x = \frac{\pi n}{2}$ при четном $n = 2r$ дает $x = \pi r$, т. е. те же решения, что и формула $x = \pi n$; при $n = 2r + 1$, ибо величины $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 3x$ при $n = 2r + 1$ теряют смысл.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{3}$.

Упражнение 12.

Решить уравнения:

1. $\cos 4x + \cos 2x + \cos x = 0$

2. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

3. $\cos 7x + \cos x = \cos 4x$

4. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$

5. $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

6. $1 + \sin x + \cos x = 2 \cos\left(\frac{x}{2} - 45^\circ\right)$

7. $(1 + \cos x) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$

8. $\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$

9. $\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1$

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

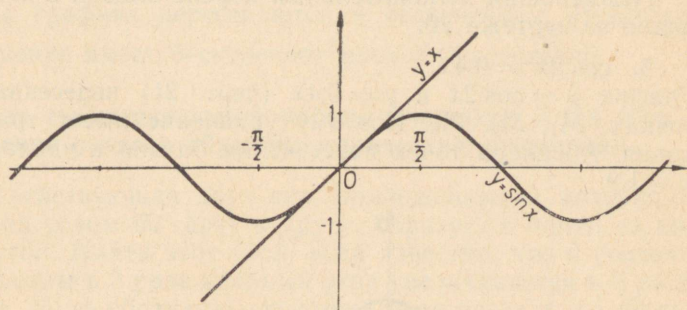
$$(\operatorname{tg} x = ax + b \text{ и др.})$$

Решить уравнения:

1. $\sin x = x$.

Решение. Строим график функции $y = \sin x$, т. е. синусоиду, затем строим график функции $y = x$. Абсциссы точек пересечения этих двух графиков дают первое приближение значений корня уравнений. Графический способ не обладает большой точностью. Полученные результаты уточняются в помощью более совершенных вычислительных методов.

В нашем случае графики имеют одну точку пересечения — начало координат, поэтому уравнение имеет один вещественный корень: $x = 0$ (черт. 19).



Черт. 19.

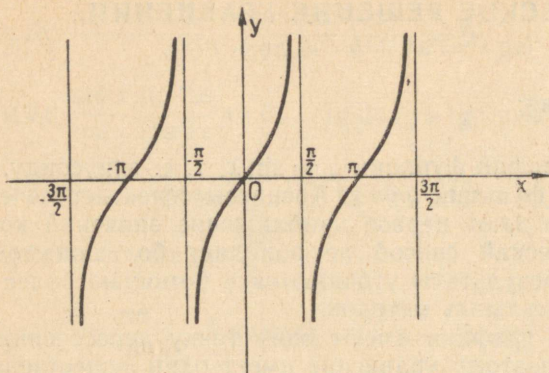
Примечание. Неравенство $|\sin x| < |x|$ где $x \neq 0$ показывает, что при $x > 0$, синусоида расположена ниже прямой $y = x$, а при $x < 0$ выше этой прямой. Поэтому начало координат есть единственная общая точка.

2. $\operatorname{tg} x = x$.

Решение. Строим график $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$.

График функции $y = \operatorname{tg} x$ состоит из бесконечного множества отдельных бесконечных ветвей. Оба графика пересекаются в начале координат. Число нуль является точным корнем этого уравнения. Кроме этого, корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$ имеют бесконечное множество положительных и отрицательных корней. Положительные корни заключены в интервалах $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(2\pi, \frac{5}{2}\pi)$...

$$(K\pi, \frac{2K+1}{2}\pi).$$

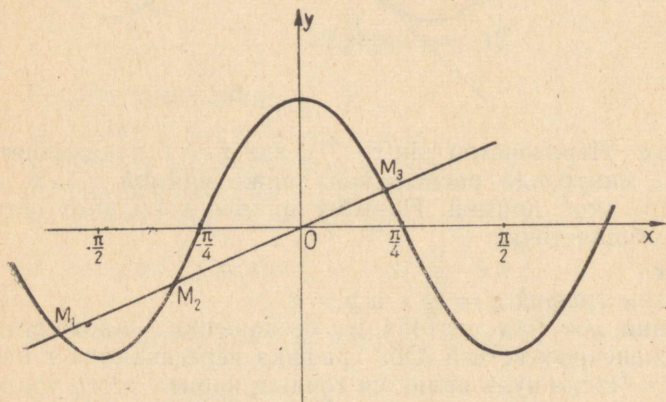


Черт. 20.

Наименьший положительный корень близок к числу 4, 5; это видно из чертежа 20.

3. $\cos 2x = 0,4x$.

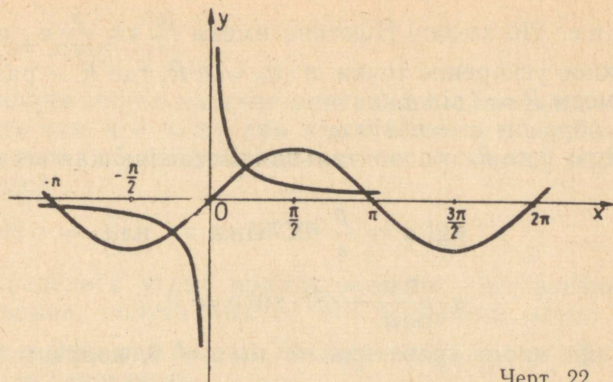
График $y = \cos 2x$ и $y = 0,4x$ (черт. 21) пересекаются в трех точках: M_1 , M_2 , M_3 . Поэтому уравнение имеет три различных корня. Абсциссы точек пересечения близки к числам 0,6; $-0,9$; и $-1,9$.



Черт. 21.

4. $x \sin x - 0,4 = 0$.

Решение. Перепишем это уравнение в виде $\sin x = \frac{0,4}{x}$. Строим синусоиду $y = \sin x$ и равнобочную двухстороннюю гиперболу (черт. 22).



Черт. 22.

$y = \frac{0,4}{x}$; оба графика пересекаются в бесконечном множестве точек. Уравнение имеет бесконечное множество решений.

Задачи для самостоятельной работы учащихся X кл. при повторении раздела «Тригонометрические уравнения».

1. Равнодействующая двух сил, приложенных к материальной точке под углом 60° друг к другу, образует с одной из них некоторый угол. Найти этот угол, если известно, что с увеличением второй силы в 3 раза искомый угол увеличивается в 2 раза. Указание. Если обозначить искомый угол через x , то можно составить два уравнения:

$$\frac{P}{\sin x} = \frac{Q}{\sin(60^\circ - x)} \quad (1)$$

и

$$\frac{3P}{\sin 2x} = \frac{Q}{\sin(60^\circ - 2x)} \quad (2)$$

Разделив уравнение (2) на уравнение (1) почленно, получим:

$$3 \sin x \sin(60^\circ - 2x) = \sin 2x \sin(60^\circ - x).$$

2. Однородный стержень AB согнут в точке C под прямым углом так, что $AC = 4$ см, $BC = 10$ см, и подвешен в точке C на нити. Найти угол между стороной AC и горизонтом при равновесии стержня.

3. Тело привязано к шнуру длиной l м. Шнур описывает коническую поверхность и при этом совершает n оборотов в минуту. Какой угол шнур образует с горизонтом?

У к а з а н и е. По закону Ньютона имеем $F_r = \frac{p}{q} a$, где $a_{ц}$ — центробежное ускорение точки m : $a_{ц} = n^2 R$, где R — радиус вращения. Имеем $R = l \sin \alpha$.

Таким образом $a = n^2 \sin \alpha$.

$F_r = p \operatorname{tg} \alpha$ (где F_r горизонтальная составляющая веса тела m).
Значит:

$$p \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q} n^2 l \cdot \sin \alpha \quad \text{или}$$

$$q \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - n^2 l \cdot \sin \alpha = 0.$$

Разделив обе части уравнения на $\sin \alpha \neq 0$, получим:

$$\cos \alpha = \frac{q}{n^2 l}.$$

4. Велосипедист едет по закруглению трека со скоростью $10 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$. Радиус закругления равен 20 м. Найти поперечный наклон трека, который следует придать дорожке трека, чтобы велосипедист не подвергался смещению поперек дорожки.
Ответ: $\approx 27^\circ$

5. Под каким углом к горизонту следует выпустить пулю в безвоздушном пространстве, чтобы она при начальной скорости $360 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ упала на землю на расстоянии 11,4 км от стрелка?

Ответ: $\sin 2\alpha \approx 0,87$; $\alpha \approx 30^\circ 15'$.

6. Дана правильная четырехугольная пирамида. Найти двугранный угол, образованный основанием с боковой гранью, если радиус описанного шара в 2,5 раза больше радиуса вписанного шара.

Ответ: $70^\circ 32'$ или 60° .

7. Через ребро правильного тетраэдра проведена плоскость, делящая его объем в отношении 3 : 5. На какие части она делит двугранный угол?

Ответ: $25^\circ 14'$ и $45^\circ 17'$.

8. Дан угол MON , равный 60° ; на его стороне OM взята произвольная точка A , а на стороне ON точка B так, что $OA = 2OB$. Под каким углом к стороне ON следует провести внутри данного угла полупрямую OL , чтобы она была равноудалена от точек A и B ?

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. В конусе линия касания вписанного шара делит боковую поверхность так, что часть при вершине и часть при основании относятся, как 4 : 5. Как наклонена в этом конусе образующая к основанию?

Ответ: $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; $\alpha \approx 70^\circ 32'$.

10. Определить углы прямоугольного треугольника, если сумма объемов, получаемых от его вращения около каждого из катетов, в $2\sqrt{6}$ раз больше объема, получаемого при его вращении около гипотенузы.

Ответ: 15° и 75° .

11. Определить в конусе угол между образующей и плоскостью основания, если площадь основания, поверхность вписанного шара и боковая поверхность конуса составляют арифметическую прогрессию.

Ответ: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha \approx 70^\circ 32'$.

12. Определить угол при вершине в осевом сечении конуса, описанного около четырех равных шаров, расположенных так, что каждый касается трех других.

Ответ: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha \approx 70^\circ 32'$.

13. Около правильной треугольной пирамиды, в которой боковые ребра составляют с основанием пирамиды угол φ описан шар. Найти угол между основанием пирамиды и сечением, проведенным через сторону основания пирамиды и центр шара.

Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \varphi)$.

14. В конус вписан шар, а в него куб. Отношение полной поверхности конуса к поверхности куба равно $\frac{9\pi}{8}$. Определить угол при вершине в осевом сечении конуса.

Ответ: 60° или $2 \arcsin \frac{1}{5}$.

15. На высоте конуса как на диаметре построена сфера. Площадь поверхности сферы, лежащей вне конуса, составляет $\frac{1}{12}$ площади основания конуса. Найти угол между высотой и образующей конуса.

Ответ: 60° .

16. Определить в правильной треугольной пирамиде угол между основанием и боковым ребром, если он на 10° менее угла между основанием и апофемой.

Указание. Используя условие задачи, легко прийти к уравнению:

$$2 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + 10^\circ).$$

Перейдя к синусу и косинусу, получим: $\sin(2x + 10^\circ) = 3 \sin 10^\circ$.

Ответ: $x_1 \approx 10^\circ 42'$, $x_2 \approx 69^\circ 18'$.

17. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти угол между осью конуса и его образующей, если полная поверхность цилиндра относится к площади основания конуса, как 3 : 2.

Ответ: $2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 2$ или $2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{2}{5}$.

18. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды есть средняя пропорциональная величина между боковой поверхностью описанного и вписанного конуса. Определить угол между боковым ребром пирамиды и стороной основания.

Ответ: $x = \operatorname{arc} \sin \frac{2\pi^2}{27}$.

19. Центры шаров, из которых один описан около правильной четырехугольной пирамиды, а другой вписан в нее, совпадают. Определить плоский угол при вершине этой пирамиды.

Ответ: 45° .

20. Отрезки двух прямых линий, заключенные между двумя параллельными плоскостями, относятся, как 2 : 3, а их углы с плоскостью, как 2 : 1. Определить эти углы.

Ответ: $82^\circ 49'$ и $41^\circ 25'$.

21. Параллелограмм и плоскость P расположены так, что одна из меньших сторон параллелограмма находится на плоскости P , а противоположная ей — удалена от плоскости на расстояние, равное расстоянию между большими сторонами параллелограмма. Определить угол между плоскостью P и плоскостью параллелограмма, если стороны параллелограмма относятся, как 3 : 5.

Ответ: $\arcsin \frac{3}{5}$.

22. В треугольнике ABC угол C больше угла B в два раза. По длине сторон a и b определить углы треугольника.

Ответ: $\arcsin \sqrt{\frac{3b-a}{4b}}$; $2 \arcsin \sqrt{\frac{3b-a}{4b}}$;

$$\pi - 3 \arcsin \sqrt{\frac{3b-a}{4b}}.$$

23. В равнобедренном треугольнике отношение одной из равных сторон к расстоянию от вершины угла при основании от центра вписанной окружности равно $\frac{15}{7}$. Определить углы треугольника.

Ответ: $2 \arcsin \frac{5}{6}$, $2 \arcsin \frac{5}{6}$

$$\text{и } \pi - 4 \arcsin \frac{5}{6}.$$

СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Системой тригонометрических уравнений принято называть совокупность уравнений, составленных либо только из тригонометрических уравнений, либо из тригонометрических и алгебраических уравнений.

Примерами систем тригонометрических уравнений могут служить системы:

$$\begin{cases} \sin(x-y) + 0,5 \\ 2x - 3y + 4 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} \sin x - \sin y + a \\ \cos x - \cos y + b \end{cases}$$

Решить системы уравнений:

$$1. \quad \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения (2) в произведение, получим: $2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1$.

Подставим значение $x+y$ из уравнения (1), получим

$$\cos \frac{x-y}{2} = 1; \quad x-y = 4\pi n.$$

К данному уравнению присоединим уравнение (1), получим систему

$$\begin{cases} x-y = 4\pi n \\ x+y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad y = \frac{\pi}{6} - 2\pi n,$

где n — целое число.

$$2. \begin{cases} x+y = 135^\circ \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Решение. Из уравнения (1) имеем:

$$x = 135^\circ - y; \text{ или } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(135^\circ - y);$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} 135^\circ \operatorname{tg} y} = \frac{-1 - \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} y}.$$

Из уравнения (2) имеем: $\operatorname{tg} x = 2 + \operatorname{tg} y$, откуда

$$\frac{-1 - \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} y} = 2 + \operatorname{tg} y. \text{ Решив это уравнение, получим:}$$

$$\operatorname{tg}^2 y = 3; \quad \operatorname{tg} y = \pm \sqrt{3};$$

$$y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad x = \frac{3\pi}{4} - \left(\pm \frac{\pi}{3} + \pi n \right).$$

$$3. \begin{cases} x+y = 120^\circ \\ \cos 6x + \cos 6y = 2 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Решение. Из уравнения (2) находим

$$2 \cos 3(x+y) \cos 3(x-y) = 2.$$

Принимая во внимание уравнение (1), получим

$$\cos(3x-3y) = 1; \quad 3x-3y = 360^\circ n, \quad x-y = 120^\circ n,$$

присоединяя к данному уравнению уравнение (1), получим систему

$$\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ x - y = 120^\circ n \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 60^\circ + 60^\circ n \\ y = 60^\circ - 60^\circ n \end{cases}$

$$4. \begin{cases} x - y = 60^\circ \\ \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\sqrt{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Решение. Из уравнения (2) получим

$$\frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y} = -\sqrt{3}; \text{ принимая во внимание уравнение (1), полу-}$$

чим: $\frac{\sin(-60^\circ)}{\sin x \sin x} = -\sqrt{3};$

$$2 \sin x \sin y = 1.$$

Преобразуем произведение левой части последнего равенства в сумму, получим уравнение:

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 1; \quad \cos 60^\circ - \cos(x+y) = 1;$$

$$\cos(x+y) = -\frac{1}{2}; \quad x+y = 360^\circ n \pm 120^\circ.$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} x - y = 60^\circ \\ x + y = 360^\circ n \pm 120^\circ \end{cases}$$

Ответ: $\begin{aligned} x &= 30^\circ + 180^\circ n \pm 60^\circ \\ y &= 180^\circ n \pm 60^\circ - 30^\circ \end{aligned}$

Решение систем вида.

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ \sin x \sin y = b \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ \sin x \cos y = b \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ \cos x \cos y = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = b \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \sin x \sin y = \frac{1}{9} \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Решение. Преобразуем левую часть уравнения (2) в произведение, получим $\cos(x - y) - \cos(x + y) = \frac{1}{2}$. Подставим значение $x + y$ из уравнения (1), получим:

$$\cos(x - y) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad \cos(x - y) = 0;$$

$$x - y = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \quad \text{Имеем систему:}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ x - y = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ x - y = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} (2n + 1) = \frac{\pi n}{2} + \frac{7\pi}{12} \\ y = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi n}{2} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - y = 60^\circ \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Решение. Преобразуем уравнение (2), получим:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 1.$$

Принимая во внимание уравнение (1), получим:

$$\sin(x + y) + \sin 60^\circ = 1; \quad \sin(x + y) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Имеем систему } \begin{cases} x + y = \arcsin \frac{2 - \sqrt{3}}{2} (-1)^n + \pi n \\ x - y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2 - \sqrt{3}}{2} (-1)^n + \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2 - \sqrt{3}}{2} (-1)^n + \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} & (1) \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Преобразуем левую часть уравнения (2) в произведение, получим:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 1; \quad \cos(x + y) = \frac{1}{2};$$

$$x + y = 360^\circ n \pm 60^\circ.$$

$$\text{Имеем систему } \begin{cases} x + y = 360^\circ n \pm 60^\circ \\ x - y = 60^\circ \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 180^\circ n \pm 30^\circ + 30^\circ \\ y = 180^\circ n \pm 30^\circ - 30^\circ \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} & (1) \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

Решение. Из уравнения (2) имеем:

$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{1}{3}$. Преобразуем в числителе и знаменателе дроби произведения в сумму, получим:

$$\frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\cos(x - y) + \cos(x + y)} = \frac{1}{3}. \quad \text{Заменяя в этом уравнении}$$

$x + y$ через $\frac{\pi}{3}$ и, упростив, получим $\cos(x - y) = 1$; $x - y = 2\pi n$. Присоединив к этому уравнению уравнение (1) данной системы, получим систему:

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x = \pi n + \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{\pi}{6} - \pi n \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y = 105^\circ & (1) \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = \sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

Решение. Уравнение (2) можно записать так: $\frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} = \sqrt{3}$;

преобразуя в числителе и знаменателе дроби произведение в сумму, получим:

$$\frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\sin(x+y) + \sin(y-x)} = \sqrt{3}.$$

Заменяя в этом уравнении $x+y$ через 105° , получим после

упрощений уравнение $\sin(x-y) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$

Имеем систему

$$\begin{cases} x-y = (-1)^n 15^\circ + 180^\circ n \\ x+y = 105^\circ \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{105^\circ + (-1)^n 15^\circ + 180^\circ n}{2} \\ y = \frac{105^\circ - (-1)^n 15^\circ - 180^\circ n}{2} \end{cases}$$

Системы вида.

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ \frac{\sin x}{\sin y} = b \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ \frac{\sin x}{\cos y} = b \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} y} = b \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = b \end{cases}$$

Решить системы:

$$1. \begin{cases} x+y = 120^\circ & (1) \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2 & (2) \end{cases}$$

Решение. Из уравнения (2) на основании свойств производной пропорции можно записать:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{2+1}{2-1} = 3.$$

Преобразуем сумму и разность тригонометрических функций в произведение, получим:

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = 3; \quad \text{так}$$

как $x+y=120^\circ$, то $\operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = \sqrt{3}$;

имеем систему:
$$\begin{cases} x+y=120^\circ \\ x-y=60^\circ+360^\circ n \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x=90^\circ+180^\circ n \\ y=30^\circ-180^\circ n \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x-y=30^\circ \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=3 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Рассматривая уравнение (2), как пропорцию, составим производную пропорцию, получим $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{3+1}{3-1}$.

Преобразуя сумму и разность тангенсов в произведении, получим:

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = 2,$$

$\sin(x+y) = 2 \sin 30^\circ = 1$; имеем систему

$$\begin{cases} x+y=90^\circ+360^\circ n, \\ x-y=30^\circ. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x=60^\circ+180^\circ n \\ y=30^\circ+180^\circ n. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+y=75^\circ \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} y} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Решение. Из второго уравнения имеем:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \text{Получим систему}$$

$$\begin{cases} x+y=75^\circ \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Эта система может быть легко решена (см. пример 4).

$$4. \begin{cases} x + y = 120^\circ & (1) \\ \frac{\sin x}{\cos y} = \frac{2}{\sqrt{3}} & (2) \end{cases}$$

Решение. В уравнении (2) заменяем $\cos y$ на $\sin(90^\circ - y)$ и затем, составив производную пропорцию, получим:

$$\frac{\sin x + \sin(90^\circ - y)}{\sin x - \sin(90^\circ - y)} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}.$$

Преобразуя сумму и разность синусов в произведение, получим уравнение:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2} + 45^\circ\right) \operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}.$$

$$\text{Имеем: } \operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2} + 45^\circ\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \operatorname{tg} 15^\circ =$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2} + 45^\circ\right) = \operatorname{ctg} 15^\circ = \operatorname{tg} 75^\circ.$$

$$\begin{cases} x - y + 45^\circ - 75^\circ = 180^\circ n \\ x + y = 120^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 360^\circ n + 60^\circ \\ x + y = 120^\circ \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ n \\ y = 30^\circ - 360^\circ n \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2 \sin(x+y) + 2 \cos^2(x+y) = 1 \\ 2 \cos(x-y) - \sin^2(x-y) = 1 \end{cases}$$

Решение. Выразив в первом уравнении $\cos^2(x+y)$ через синус, а во втором синус через косинус, получим:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2(x+y) - 2 \sin(x+y) - 1 &= 0 \\ \cos^2(x-y) + 2 \cos(x-y) - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Решаем два квадратных уравнения, находим $\sin(x+y)$ и

$$\cos(x-y); \quad \sin(x+y) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}; \quad \cos(x-y) = \sqrt{3} - 1.$$

Имеем систему:
$$\begin{cases} x + y = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \pi K \\ x - y = 360^\circ n \pm \arccos(\sqrt{3} - 1) \end{cases}$$

где n и K произвольные целые числа.

Решив последнюю систему уравнений, находим x и y .

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, В КОТОРЫХ ОБА УРАВНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ.

Решить системы:

1.
$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0,5 \\ \operatorname{tg}(x - y) = 1 \end{cases}$$

Решение:
$$\begin{cases} x + y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \\ x - y = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} + \pi n \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \sin(x + y) = \sin(4x + y) \\ \cos(x + 2y) = \cos(8x + 4y) \end{cases}$$

Решение. Из условия равенства синусов следует:

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 180^\circ(2n + 1); \\ 3x &= 180^\circ \cdot 2n; \quad x = 120^\circ n. \end{aligned}$$

Из условия равенства косинусов следует:

$$\begin{cases} 9x + 6y = 2\pi n \\ 7x + 2y = 2\pi n \end{cases}$$

Имеем 4 системы

1)
$$\begin{cases} 3x = 180^\circ 2n \\ 9x + 6y = 2\pi n \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 5x + 5y = 180^\circ(2n + 1) \\ 9x + 6y = 2\pi n \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 5x + 5y = 180^\circ(2n + 1) \\ 9x + 6y = 2\pi n \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 3x = 180^\circ \cdot 2n \\ 7x + 2y = 2\pi n \end{cases}$$

Решая эти 4 системы, находим x и y .

$$3. \begin{cases} \sin x \sin y = 0,25 & (1) \\ \cos x \cos y = 0,75 & (2) \end{cases}$$

Решение. Складывая и вычитая почленно уравнения (1) и (2), получим:

$$\begin{cases} \sin x \sin y + \cos x \cos y = 1 \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1 & \begin{cases} x-y = 2\pi n \\ x+y = 2\pi n_1 \pm \frac{\pi}{3} \end{cases} \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Получим системы:

$$1) \begin{cases} x-y = 2\pi n \\ x+y = 2\pi n_1 + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-y = 2\pi n \\ x+y = 2\pi n_1 - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Из первой системы получим:

$$x = \pi n + \pi n_1 + \frac{\pi}{6} = \pi(n + n_1) + \frac{\pi}{6};$$

$$y = \pi(n + n_1) + \frac{\pi}{6} - 2\pi n = \pi(n_1 - n) + \frac{\pi}{6}.$$

Из второй системы находим:

$$x = \pi(n + n_1) - \frac{\pi}{6}; \quad y = \pi(n_1 - n) - \frac{\pi}{6}.$$

$$4. \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4} & (1) \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3 & (2) \end{cases}$$

Решение. Выразив во втором уравнении системы тангенс через синус и косинус, получим

$$\frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 3.$$

Учитывая, что

$$\sin x \sin y = \frac{3}{4},$$

получим $\cos x \cos y = \frac{1}{4}$. Имеем систему

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (4)$$

Сложив почленно уравнения (3) и (4), получим

$$\cos(x-y) = 1.$$

Вычтя из уравнения (3) уравнение (4) почленно, получим:

$$\cos(x+y) = -\frac{1}{2}.$$

Имеем систему

$$\begin{cases} x-y = 360^\circ n \\ x+y = 360^\circ n \pm 120^\circ \end{cases}$$

Имеем две системы:

$$\begin{cases} x-y = 360^\circ n \\ x+y = 360^\circ n_1 + 120^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 360^\circ n \\ x+y = 360^\circ n_1 - 120^\circ \end{cases}$$

Дальнейшее ясно.

$$5. \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Решение. Преобразуя левые части каждого уравнения системы в произведение, получим:

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Разделив почленно уравнение (3) на (4), получим:

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \sqrt{3}; \quad x+y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Подставим значение $x + y$ в уравнение (3), получим:

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{3}{4 \sin \left(\pi n + \frac{\pi}{3} \right)}. \text{ Для выделения в знаменателе}$$

правой части периода 2π положим $n = 2K$ и $n = 2K + 1$.

При $n = 2K$ получим:

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{3}{4 \sin \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi K \right)} = \frac{3}{2\sqrt{3}};$$

$$x - y = 720^\circ n_1 + 2 \arccos \frac{2}{2\sqrt{3}}.$$

Имеем первую систему:

$$\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x - y = 4\pi n_1 + 2 \arccos \frac{2}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

Положив $n = 2K + 1$, получим систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x - y = 720^\circ n_1 + 2 \arccos \left(-\frac{2}{2\sqrt{3}} \right). \end{cases}$$

Для нахождения x и y решим обе системы.

Упражнения для самостоятельной работы.

Решить следующие системы:

$$1. \begin{cases} x - y = 30^\circ \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x - \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \sin y \sqrt{2} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x \cos y = 0,75 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x - y = 15^\circ \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + y = 90^\circ \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y = 1 \end{cases}$$

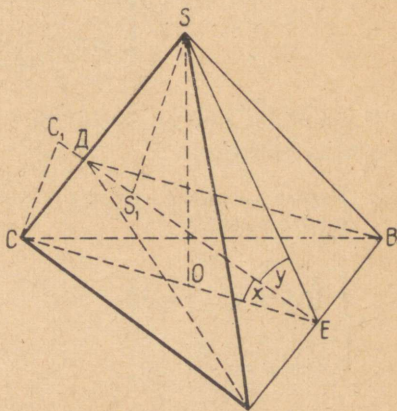
$$9. \begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x - y = 15^\circ \\ \frac{\sin x}{\cos y} = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \sin^2(x+y) - \frac{5}{6} \sin(x+y) + \\ + \frac{1}{5} = 0 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + y = 150^\circ \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

13. Через ребро правильного тетраэдра (черт. 23) проведена плоскость, делящая его объем в отношении 3 : 5. На какие части она делит двугранный угол?



Черт. 23.

Решение. Пусть $SABC$ — правильный тетраэдр и пусть секущая плоскость проходит через ребро AB ближе к грани ABC , пересекая ребро SC в точке D . Пусть точки O и E соответственно центр грани ABC и середина AB .

Обозначим углы DEC и DES через x и y , тогда из прямоугольного $\triangle SOE$ находим $\cos(x+y) = \frac{EO}{ES} = \frac{1}{3}$.

Опустим на секущую плоскость перпендикуляры SS_1 и CC_1 , получим $\sin x = \frac{CC_1}{EC}$ (из прямоугольного $\triangle CC_1E$) $\sin y = \frac{SS_1}{SE}$ (из прямоугольного $\triangle SS_1E$).

Так как $SE = EC$, то $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{CC_1}{SS_1}$.

Рассматривая части тетраэдра как две пирамиды с общим основанием ADB , найдем:

$$\frac{CC_1}{SS_1} = \frac{3}{5}.$$

(Объемы двух пирамид, имеющие равные основания относятся, как их высоты). Имеем второе уравнение:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{5}.$$

Теперь, объединив оба уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{3} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Ответ: $x \approx 25^\circ 14'$, $y \approx 45^\circ 18'$.

Решить системы:

14. $\begin{cases} \cos x - \cos y = 0,49 \\ x + y = 77^\circ \end{cases}$

15. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 10 \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

16. $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{3} \end{cases}$

17. $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x + y = 75^\circ \end{cases}$

19. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 0,84 \\ x - y = 5^\circ \end{cases}$

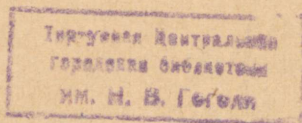
$$20. \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ 2 \cos x \cos y = 1 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{1}{9} \\ \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x + y = 135^\circ \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2 \end{cases}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
Тригонометрические уравнения	7
Простейшие уравнения	8
Уравнение $\cos x = m$	10
Уравнение $\operatorname{tg} x = m$	11
Уравнения, приводимые к одной функции одного и того же аргумента	20
Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$	25
Уравнения, приводимые к однородным	29
Уравнения, в которых применяются условия равенства одноименных тригонометрических функций	29
Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$	34
Уравнения, для решения которых необходимо перейти от произведения тригонометрических функций к сумме	44
Проверка решений тригонометрических уравнений	46
Метод разложения формул корней на элементарные	48
Уравнения, левая часть которых представляет собой произведение двух или нескольких тригонометрических функций, а правая часть равна нулю	55
Уравнения, содержащие дробные члены	57
Уравнения, в которых левая часть есть алгебраическая сумма нескольких тригонометрических функций угла, кратного x , а правая часть равна нулю	63
Графическое решение уравнений	65
Системы тригонометрических уравнений	71
Системы уравнений, в которых оба уравнения тригонометрические	79



Беккер, Михаил Борисович. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе 10
Редактор Р. Кресс. Художественный редактор Х. Кейго. Технический редактор Л. Крикманн. Корректор Х. Кулль.
Сдано в набор 26 X 1967. Подписано к печати 17 XI 1967. Бумага $60 \times 84/16$. Типографская бумага № 3. Бумажная фабрика им. М. Горького № 1 — Ленинград. Печатных листов 5,5. По формату 60×90 печатных листов 5,12. Учетно-издательских листов 3,14. Тираж 300. Заказ № 7870. Типография имени Ханса Хейдеманна, Тарту, ул. Юликооли, 17/19. II

Цена 8 коп.

8 ^{5.} коп.

Копия

XII

1A-4643

133 044

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 0044 1053 8