TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Teoreetilise mehaanika kateeder

N. Ismit

Helmholtzi vastastikkuse laused ja nende mehaanikalisi ja füüsikalisi interpretatsioone.

Juhendaja: prof. G. Rägo.

Luban kaitsmisele.

Gerhard Rägo

18. mail 1954.

1954

S i s u k o r d.

L u g e j a l e.

Käesolevas töös kasutatakse järgmist avaldiste nummerdamise viisi:

Nummerdatava avaldise kõrvale kirjutatakse sulgudes kaks numbrit. Esimene neist tähendab selle paragrahvi numbrit, milles esineb nummerdatav avaldis esmakordselt. Teine number on avaldise järjekorranumber selles paragrahvis, kusjuures avaldise järjekorranumbri määramisel pole arvestatud mõnede avaldistega, mis jäetakse nummerdamata. Kui järjekorranumber on ühekohane arv, siis kirjutatakse tema ette pärast punkti paragrahvi numbri järel null.

Kui on vaja viidata mõnele avaldisele (kas sellepärast, et seda avaldist ei tuleks kaua otsida, või ka mõnedel teistel põhjustel), siis antakse selle avaldise numbrid ja kirjutatakse samas ka see avaldis ise. Teistel juhtudel avaldist, millele viidatakse, uuesti ei kirjutata.

Käesolevas töös tarvitatakse väljendeid „potentsiaalne tung" ja „konservatiivne tung" järgmiselt:

Kui $\mathcal{V}$ on mehaanilise süsteemi potentsiaalne energia, siis üldkoordinaadile r vastab üldistatud tung

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r}.$$

Kui $\mathcal{V}$ on <u>ainult koordinaatide funktsioon</u> , siis nimetatakse siin tungi $\mathcal{F}$ konservatiivseks tungiks. Kui aga $\mathcal{V}$ on koordinaatide ja aja funktsioon, nimetatakse tungi $\mathcal{F}$ potentsiaalseks tungiks. Kõik, mis on öeldud käesolevas töös potentsiaalsete tungide kohta, kehtib endast mõistetavalt ka konservatiivsete tungide kohta. Töös sellele eriti ei osutata.

Helmholtz nimetas mehaanilise süsteemi potentsiaalse ja kineetilise energia vahet kineetiliseks potentsiaaliks ja tähistas seda tähega $\mathcal{H}$ /1/. Seda mõistet „kineetiline potensiaal" käesolevas töös kasutatakse siis, kui käsitellakse Helmholtzi vastastikkuse lausete tuletamist tungide kohta sel viisil, nagu tegi seda Helmholtz ise. Seejuures tähistatakse süsteemi potentsiaalse ja kineetilise energia vahet samuti tähega $\mathcal{H}$. Mujal töös mõiste „kineetiline potensiaal" tähendab kineetilise ja potsensiaalse energia vahet, nagu seda mõistet nüüd defineeritakse. Seda vahet tähistatakse tähega $\mathcal{K}$.

Töös kasutatakse järgmisi sõnade lühendeid:

vt. = vaata;

s.t. = see tähendab;

s.o. = see on.

S i s s e j u h a t u s.

§ 1. Andmeid H. Helmholtzi ja ta vastastikkuse lausete kohta.

1. Helmholtzi vastastikkuse lausete tähtsus.

Seostega mehaanilise süsteemi liikumise uurimisel on tähtis koht nii teoreetilises kui ka rakendusmehaanikas. Niisuguse liikumise kirjeldamine toeb vaid vähestele printsiipidele ja lihtsustub tunduvalt, kui kasutada mõningaid üldiseid lauseid. Üheks niisugusteks lauseteks ongi Helmholtzi vastastikkuse laused. Huvitav on märkida, et Helmholtzi vastastikkuse laused on rakendatavad mitte ainult mehaaniliste süsteemide liikumisele, nende hulgas ka kindlate kehade liikumistele, vaid näiteks ka elektrodünaamikas ja dermodünaa-mikas.

Käesolevas töös vaadeldakse Helmholtzi vastastikkuse lauseid rakendatuna ainult mehaanilisele liikumisele.

§ 2. Elulooliisi andmeid H.Helmholtzi kohta.

H. Helmholtz oli XIX suurimaid ja universaalsemaid teadlasi. Ta tähtsamate tööde hulka kuuluvad teiste hulgas uurimus ärrituse levimise kohta närvides ja tema nime kandva silmapeegli leiutamine silma võrkkile vaatlemiseks. Ta on üks energia jäävuse printsiibi põhjendajaist ja tema teoreetilised tööd keeriste kohta vedelikus kuuluvad kuulsamate tööde hulka hüdromehaanikas.

H. Helmholtz sündis 1821. aastal Potsdamis. Ta lõpetas meditsiinilis-kirurgilise indtituudi Berliinis. Seejärel töötab ta Berliinis füsioloogia alal. 1842.aastal saab ta doktori kraadi, kaitstes närvisüsteemi käsitlevat dissertatsiooni. Siis töötab ta Potsdamis sõjaväearstina, edasi füsioloogia professorina Königsbergis, Bonnis ja Heidelbergis. Algul huvitub ta füüsikast vaid niipalju, kuipalju vajab ta seda füsioloogina, hiljem aga pühendub ta täielikult füüsika alale. 1871. aastast alates töötab ta Berliinis füüsika professorina. 1888. aastast on ta vast rajatud Berliini füüsikalis-tehnilise riikliku instituudi (Physikalisch-Technische Reichsanstalt) president. H. Helmholtz suri 1894.aastal.

H.Helmholtzi füüsikalisedtööd on peamiselt teoreetilise mehaanika, akustika, elektro-, termo- ja hüdro -

dünaamika ning optika alalt. Enamik neist töödest kuulub möödunud sajandi teise poole füüsika klassikaliste tööde hulka; need tööd määrasid suuresti selle ajastu füüsika arenemise suuna.

3. Ajaloolisi lühimärkmeid Helmholtzi vastastikkuse lausetest.

Esimesed tulemused vastastikkuse lausete alal sai H. Helmholtz 1860. aastal. Ta leiab nad vaadeldes akustilisi võnkumisi. 1866. aastal kirjutab H.Helholtz uurimuse: "Vähima mõju printsiibi tähendusest" ("Über die Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung").Teatavad selles memuaaris tuletatud laused on saanud Helmholtzi vastastikkuse lausete nimetuse.

Käesoleva töö alguses vaadeldakse neid küsimusseadeid, mis viisid H. Helmholtzi tema vastastikkuse lausetele.

Probleemi ajaloolise osa kohta on autoril olnud kasutada andmeid 1948. aastani.

§ 2. P r o b l e e m i s e a d e.

Käesolevas töös vaadeldakse Helmholtzi vastastikkuse lauseid rakendatuna ainult mehaanilisele liikumisele.

Töö alguses tuletatakse Helmholtzi vastastikkuse laused tungide kohta nii, nagu tegi seda Helmholtz /1/ ja nagu on seda hiljemgi tehtud /4/.

Vastastikkuse lausete tuletamisel oma töös "Vähima mõju printsiibi tähendusest"("Über die Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung") Helmholtz lähtub vähima mõju printsiibist. On veel teine tee nende lausete tuletamiseks. Seda kasutab Furdujev oma brošüüris /4/, kirjutades teiste vastastikkuse lausete hulgas ka Helmholtzi poolt saadud vastastikkuse lausetest. Furdujev lähtub Lagrange'i liikumise defferentsiaalvõrrandist. Need võrrandid tuletab Helmholtz vähima mõju printsiibist ja saab siis samuti, nagu Furdujevgi,oma vastastikkuse laused. Seejuures, käsitelles vähema mõju printsiipi, vaatleb Helmholtz juhtu, kui tungid saavad olla kas potsntsiaalsed või niisugused, mille avaldistes esineb ainult üks sõltumatu muutuja - aeg t. Ka viimati nimetatud tunge loeb Helmholtz potentsiaalseteks tungideks; rakendades variatsioonarvutusest tuntud Euleri võrrandit liikumise differentsiaalvõrrandite saamiseks vähima mõju printsiibist, eeldab ta mõnin - gaid potentsiaalseid tunge avaldatuna funktsioonidena ajast.

Frudujev aga, kirjutades oma brošüüris /4/ Helmholtzi vastastikkuse lausetest, vaatleb juhtu, kui tungid on eranditult konservatiivsed tungid.

Liikumise differentsiaalvõrrandid on rahuldatud samaselt ainult siis, kui neis esinevad ajaliselt muutuvad suurused on avaldatud funktsioonidena ajast. Sellest aga järeldub, et lugeda koordinaate, kiirusi ja kiirendusi liikumise differentsiaalvõrrandites sõltumatuteks muutujateks üldiselt ei või. Ei Helmholtz oma töös /1/, ega ka Furdujev oma brošüüris /4/ ei osuta sellele raskusele, kuigi nad mõlemad ilmselt eeldavad, et tungide avaldised on määratud liikumise differentsiaalvõrrandite abil. Tungide avaldiste valik jääb põhjendamata nii ühel kui teisel juhul.

Eespool öeldust järeldub, et Helmholtzi vastas - tikkuse lauseid tungide kohta on võimalik tõestada täiesti korrektselt ainult siis, kui sobivalt defineerida tungide avaldised. Sel puhul on võimalik tõestada, et Helmholtzi vastastikkuse laused tungide kohta kehtivad nii siis, kui tungid on potentsiaalsed kui ka siis, kui nad on mittepotentsiaalsed. Käesoleva töö autor on jõudnud arvamusele, et tungide avaldised Helmholtzi vastastikkuse lausete tuletamiseks tuleb määrata Lagrange'i võrranditega. Nii tegigi Helmholtz. Aga käes - oleva töö autori arvates niisugune tungide avaldiste valik, mille tegi Helmholtz, ei ole põhjendatav. Lagrange'i liikumise differentsiaalvõrrandite abil on võimalik määrata tungide avaldised ka veel Helmholtz'ist erineval viisil.

Käesolevas töös tõestatakse Helmholtzi vastastikkuse laused tungide kohta üldisematel eeldustel, kui seda tegi Helmholtz oma töös /1/ või Furdujev oma brošüüris /4/. Siis vaadeldakse veel eriti seda juhtu, kui tungid on erandituult potentsiaalsed tungid. Edasi käsitellakse Helmholtzi vastastikkuse lauset impulsside kohta pöörduva liikumise juhul. Seda lauset nimetab Helmholtz <u>vastastikkuse seaduseks</u>.

Kaks probleemi, mida käsitelles Helmholtz leiab esimesed vastastikkuse laused.

§ 3. Väikesed võnkumised. Resonantsita võnkumine sütitavate tungide mõjul.

Vaatleme võnkuvatest masspunktidest koosnevat süsteemi. Loeme süsteemi iga masspunkti koordinaate alati selle masspunkti tasakaalu asendist kui null-punktist. Eeldame, et masspunktide süsteemile rakendatud tungid on eranditult konservatiivsed tungid ja et süsteemi potentsiaalfunktsioon V on arendatav Mac Lanrin'i ritta koordinaatide järgi:

$$V = V_0 + \sum_a \frac{\partial V_0}{\partial r_a} r_a + \frac{1}{2!} \sum_a \sum_b \frac{\partial^2 V_0}{\partial r_a \partial r_b} r_a r_b + \ldots \qquad (3.01)$$

kus r-id tähendavad koordinaate.

Et süsteemi potentsiaali avaldis alati on määratud vaid vabalt valitava konstandini, siis võime ikka süsteemi potentsiaalset energiat tasakaaluasendis lugeda võrdseks nulliga:

$$V_0 = 0 \, . \qquad (3.02)$$

Tasakaalu asendis on tungid nullid, nii et

$$\frac{\partial V_0}{\partial r_a} = 0 \quad (a = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (3.03)$$

Eeldame, et võnkumised on väikesed ja nimelt, et koordinaadid r_a on niivõrd väikesed, et avaldises (3.o1) võime jätta arvestamata liidetavad, kus esinevad koordinaatide korrutised kolme- ja enam kui kolme kaupa. Sellel eeldusel potentsiaal

$$V = \frac{1}{2}\sum_a \sum_b \frac{\partial^2 V_0}{\partial r_a \partial r_b} \cdot r_a r_b\,, \tag{3.04}$$

s.t. potentsiaal on koordinaatide teist järku homogeenne funktsioon. Masspunktile massiga m_β on rakendatud tung

$$F_\beta = -\frac{\partial V_0}{\partial r_\beta} = -\frac{1}{2}\sum_a \frac{\partial^2 V_0}{\partial r_a \partial r_\beta} - \frac{1}{2}\sum_b \frac{\partial^2 V_0}{\partial r_\beta \partial r_b}\,. \tag{3.05}$$

Muutes sümmeetrilisindeksi tähistust teises summas, saame tungi F_β avaldise kujul

$$F_\beta = -\sum_a \frac{\partial^2 V_0}{\partial r_a \partial r_\beta} r_a \tag{3.06}$$

Tähistame kordajat $\frac{\partial^2 V_0}{\partial r_a \partial r_\beta}$ sümboliga $P_{a\beta}$, s.t.

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial r_a \partial r_\beta} = P_{a\beta}\,. \tag{3.07}$$

Oletame, et vaadeldavale masspunktide süsteemile peale eespool nimetatud tungide on rakendatud veel sütitavad tungid ja liikumist pidurdavad tungid. Olgu masspunktile massiga m_β rakendatud sütitav tung

$$A_\beta e^{nt}$$

ja liikumist pidurdav tung

$$-\varepsilon \sum_a Q_{\beta a} \dot{r}_a\,,$$

kus

$$Q_{ab} = Q_{ba}$$

Liidetav

$$-\varepsilon Q_{\beta a} \dot{r}_a$$

tähendab masspunkti m_a mõju masspunkti m_β liikumisele ja liidetav

$$-\varepsilon Q_{\beta\beta} \dot{r}_\beta$$

on masspunkti m_β liikumist pidurdav tung, mis on tekkinud selle masspunkti liikumise tagajärjel. Suurused A_β ja n, samuti ka suurused ε ja Q_{ab} on konstandid. Masspunktide süsteemi liikumise differentsiaalvõrrandid on tehtud eeldustel järgmised:

$$m_\beta \ddot{r}_\beta + \sum^a P_{a\beta} r_a + \varepsilon \sum^a Q_{\beta a} \dot{r}_a = A_\beta e^{nt} \quad (\beta = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.08}$$

Leiame võrrandsüsteemi (3.08) lahendid kujul

$$r_a = c_a e^{nt} \tag{3.09}$$

kus c_a on konstandid. Lahendeid, mis vastavad juhule, et kõik süütitavad tungid puuduvad, me ei vaatle, sest need lahendid vastavad süsteemi masspunktide võnkumistele, mis liikumist pidurdavate tungide mõjul aja jooksul kustuvad.

Avaldistest (3.08) ja (3.09) saame, et

$$m_\beta c_\beta + \sum^a P_{a\beta} + n\varepsilon \sum^a Q_{\beta a} c_a = A_\beta \tag{3.10}$$

Tähistame võrrandsüsteemi (3.1o) determinandi tähega $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} P_{11}+m_1n^2+n\varepsilon Q_{11} & P_{21}+n\varepsilon Q_{12} & \cdots & P_{N1}+n\varepsilon Q_{1N} \\ P_{12}+n\varepsilon Q_{21} & P_{22}+m_2n^2+n\varepsilon Q_{22} & \cdots & P_{N2}+n\varepsilon Q_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{1N}+n\varepsilon Q_{1N} & P_{2N}+n\varepsilon Q_{N2} & \cdots & P_{NN}+m_Nn^2+n\varepsilon Q_{NN} \end{vmatrix}$$

Eeldame, et arv n on valitud nõnda, et

$$\mathcal{D} \neq 0 . \qquad (3.11)$$

Võrrandsüsteemi (3.1o) lahendid on siis

$$c_p = \frac{\sum_a \mathcal{D}_{ap} A_a}{\mathcal{D}} \qquad (3.12)$$

$$c_q = \frac{\sum_a \mathcal{D}_{aq} A_a}{\mathcal{D}} \qquad (3.13)$$

kus $\mathcal{D}_{ap}$ ja $\mathcal{D}_{aq}$ on suurustele A_a vastavad determinandi $\mathcal{D}$ alamdeterminandid.

Arvestades ainult tungi $A_q e^{nt}$ mõju koordinaatidile $c_p e^{nt}$ ja ainult tungi $A_p e^{nt}$ mõju koordinaatidile $c_q e^{nt}$, saame avaldisest (3.12) ja (3.13), et

$$c_p' = \frac{\mathcal{D}_{qp} A_q}{\mathcal{D}} \qquad (3.14)$$

$$c_q' = \frac{\mathcal{D}_{pq} A_q}{\mathcal{D}} \qquad (3.15)$$

Et

$$P_{ab} = P_{ba} \text{ ja } Q_{ab} = Q_{ba},$$

siis determinant D on sümmeetriline, s.o.

$$D_{qp} = D_{pq} . \qquad (3.16)$$

Avaldisi (3.14) ja (3.15) saame seega kirjutada järgmiselt:

$$c_p' = A_q R , \qquad (3.17)$$

$$c_q' = A_p R , \qquad (3.18)$$

kus

$$R = \frac{D_{qp}}{D} = \frac{D_{pq}}{D} .$$

Tulemus ütleb, et

suurused c_p' ja A_q muutuvad samas suhtes, missuguses suhtes muutuvad suurused c_q' ja A_p.

Seda tulemust võib aga tõlgendada ka veel teisiti:

Korrutades avaldisi (3.17) ja (3.18) teguriga e^{nt}, saame

$$r_p' = A_q e^{nt} R \qquad (3.19)$$

$$r_q' = A_p e^{nt} R \qquad (3.20)$$

Neist võrdusist nähtub, et

sütitav tung $A_q e^{nt}$ ja koordinaat r_p' muutuvad samas suhtes, missugusees suhtes muutuvad sütitav tung $A_p e^{nt}$ ja koordinaat r_q'.

Märkus: Avaldis $A_q e^{nt}$ (kui see tung on perioodiline või avaldub eksponent- ja siinusfunktsiooni korrutisena reaalsete kordajatega) on kompleksne. Üleminekuks kompleksse~~te~~telt „koordinaatidelt" ja „tungidelt" reaalsetele tuleb saadud avaldistes eraldada reaal- ja imaginaarosa ja viimases ära jätta kordaja i. Nagu teada, rahuldavad võrrandit (3.1o) komplekssete „koordinaatide" ja „tungide" nii reaal- kui ka imaginaarosad eraldi.

Märkus: Võiks arvata, et vaadeldes avaldises (3.o8) koordinaate, kiirusi ja kiirendusi teineteisest sõltumatute muutujatena, saame indeksite α ja β erinevate väärtuste puhul, et

$$\frac{\partial(A_\beta e^{nt})}{\partial r_\alpha} = \frac{\partial(A_\alpha e^{nt})}{\partial r_\beta}$$

Võiks arvata, et viimane avaldis kujutab erijuhtuvastavast Helmholtzi vastastikkuse lausest. Seda arvamust kui siinjuures võtta veel $\mathcal{E} = 0$, oleks Helmholtz arvatavasti (kui mitte: kindlasti) pidanud õigeks. Ent käesoleva töö 8. ja 9. paragrahvis tõestatust järeldub, et avaldises (3.o8) koordinaate kiirusi ja kiirendusi ei saa vaadelda teineteisest sõltumatute muutujatena. Küll aga avaldises

$$\mathfrak{X}_\beta = m_\beta \ddot{r}_\beta$$

võib vaadelda kiirendust $\ddot{r}_\beta$ sõltumatu muutujana. Selles avaldises $\mathfrak{X}_\beta$ on masspunktile m_β rakendatud tung, s.t. masspunktile m_β kõikide rakendatud välis- ja sisetungide resultanttung, mis põhjustab kiirenduse $\ddot{r}_\beta$ tekkimist. Viimast avaldist tulekski kasutada Helmholtzi vastastikkuse lausete tuletmiseks tungide kohta vaadeldava juhu jaoks. Neist lauseist käesoleval juhul aga ei kehti ükski.

§ 4. Vastastikkuse lause konkreetne näide pideva keskkonna lainetuse puhul.

„Laine võrrand", mis kehtib lainetuse puhul homogeenses elastses keskkonnas, on

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi, \tag{4.o1}$$

kus φ on kiiruste potentsiaal. Funktsiooni φ osatuletised koordinaatide järgi on keskkonna elemendi kiiruse komponendid. Konstantne suurus a on laine levimise kiirus, Δ on Laplace'i operaator. Kui keskkonnas leidub paigal püsiv tahke keha, siis keskkonna elemendi kiiruse komponent keha pinna normaali sihis, kui see keskkonna element on keha pinnal, on keha pinna läbitungimatuse tõttu null:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \tag{4.o2}$$

Tekitame keskkonna punktist a leviva lainetuse. Kehtigu punkti a vahetus ümbruses kiiruste potentsiaali avaldis

$$\varphi = A \frac{\cos k r_a}{r_a} \cos(2\pi m t) \tag{4.o3}$$

kus r_a on punkti a ümbruse mingi punkti kaugus punktist a ja A, k ning m on konstandid. Viimane avaldis rahuldab laine võrrandit (4.01) juhul, kui

$$2\pi m = ka$$

või

$$2\pi m = -ka .$$

Selles on võimalik veenduda järgmiselt:

Lähtume integraalist

$$\mathcal{I} = \iiint\limits_{(D)} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dx\, dy\, dz \qquad (4.04)$$

ja nõuame tema miinimumiks saamist. Rakendades variatsioonarvutusest tuntud Euleri võrrandit integraalile (4.04), taandame integraali minimiseerimise ülesande Laplace'i võrrandi

$$\Delta u = 0$$

lahendamisele. Järgnevalt töötame sfääriliste koordinaatides r, α ja β . Neis avalduvad koordinaadid x, y ja z järgmiselt:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha\cos\beta \\ y &= r\cos\alpha\sin\beta \\ z &= r\sin\alpha \end{aligned} \qquad (4.05)$$

kus

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \qquad (4.06)$$

Olgu u vaid koordinaadi r ja aja t funktsioon. Siis viimaste avaldiste (4.05) ja (4.06) põhjal

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \frac{\partial r}{\partial x} = u_r \cos\alpha\cos\beta \\ u_y &= u_r \frac{\partial r}{\partial y} = u_r \cos\alpha\sin\beta \\ u_z &= u_r \frac{\partial r}{\partial z} = u_r \sin\alpha \end{aligned} \qquad (4.07)$$

ja seega

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2 = u_r^2 \tag{4.08}$$

Ruumielement

$$dV = r\cos\alpha\, d\beta \cdot r d\alpha \cdot dr \tag{4.09}$$

Seepärast uuritav integraal (4.04) omab kuju

$$J = \iiint\limits_{(D')} u_r^2 r^2 \cos\alpha\, d\alpha\, d\beta\, dr \tag{4.10}$$

Koostades Euleri võrrandi selle selle integraali jaoks, saame järgmise võrrandi sfäärilistes koordinaa - tides:

$$2\frac{d}{dr}\left(u_r r^2 \cos\alpha\right) = 0$$

ehk

$$\left(r^2 u_{rr} + 2r u_r\right)\cos\alpha = 0.$$

Siit järeldub siis, et

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \, . \tag{4.11}$$

Seega leidsime suuruse Δu avaldise sfäärilistes koordinaatides. Nüüd võima nõuda, et

$$\Delta u \neq 0.$$

Olgu

$$u = \varphi,$$

s.o. (kirjutamata indeksid)

$$u = A\frac{\cos kr}{r}\cos(2\pi m t) \tag{4.12}$$

Asendades funktsiooni u avaldisse (4.11) saame, et

$$\Delta u = -k^2 \frac{\cos kr}{r} \cdot A\cos(2\pi mt) \tag{4.13}$$

Asendades suurused u ja Δu laine võrandisse (4.01)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

vastavalt suuruste φ ja $\Delta\varphi$ asemele, saame järgmise võrduse

$$-(2\pi m)^2 A \frac{\cos kr}{r} \cos(2\pi mt) = -k^2 a^2 A \frac{\cos kr}{r} \cos(2\pi mt)$$

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled suurusega $-A\frac{\cos kr}{r}\cos(2\pi mt)$ ja juurides nii saadud uue võrduse mõlemaid pooli, saame tingimuse

$$2\pi m = \pm ka. \tag{4.14}$$

Et $u = \varphi$ /vt. avaldised (4.03) ja (4.12)/, siis funktsioon φ saab olla kiiruste potentsiaalfunktsioon, kui saadud tingimus on täidetud, s.t. - kehtib kas avaldis

$$2\pi m = ka$$

või

$$2\pi m = -ka,$$

mida oligi vaja näidata.

Olgu punkti a ümbrus piiratud kerapinnaga S_a lõpmatult väikese raadiusega ρ. Olgu kiiruste potentsiaal väljaspool seda punkti a ümbrust antud avaldisega

$$\varphi = \varphi_1 \sin(2\pi mt) + \varphi_2 \cos(2\pi mt),$$

(4.15)

kus φ_1 ja φ_2 on koordinaatide funktsioonid. Eeldame, et funktsioon φ rahuldab rajatingimusi.

Olgu b mingi ruumipunkti tähis ja S_b kerapind lõpmatult väikese raadiusega ρ ümber punkti b. Valime funktsiooni

$$\psi = \psi_1 \sin(2\pi mt) + \psi_2 \cos(2\pi mt), \tag{4.16}$$

mis punkti b ümbruses on järgmine:

$$\psi = A \frac{\cos kr_b}{r_b} \cos(2\pi mt), \tag{4.17}$$

kus r_b on punkti b ümbruse meelevaldse punkti kaugus punktist b. Funktsioonid ψ_1 ja ψ_2 olgu ainult koordinaatide funktsioonid. Eeldame, et funktsioon rahuldab rajatingimusi ja et funktsioonid ψ ja φ lõpmatult kaugetes punktides on nullid.

Eespool näidati, et avaldis (4.17) rahuldab laine võrrandit (4.1)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi,$$

kui tingimus (4.14) on rahuldatud.

Vastaku funktsioon ψ lainetusele, mis on tekitatud punktis b.

Arvutame integraali funktsioonist

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

võetud üle pindade S_a ja S_b. Kirjutamata indekseid leiame avaldisest (4.o3)

$$\varphi = A \frac{\cos kr_a}{r_a} \cos(2\pi mt),$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)\right] A \cos(2\pi mt)$$

ehk

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -A\cos(2\pi mt)\left[\frac{k \sin kr}{r} + \frac{\cos kr}{r^2}\right]. \qquad (4.18)$$

Kasutades integraali keskväärtuse lauset, saame avaldise (4.18) põhjal, et

$$\int_{(S)} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{(S)} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \rho^2 d\omega = \qquad (4.19)$$

$$= -4\pi A \psi_{1k} (k\rho \sin k\rho + \cos k\rho) \cos(2\pi mt)$$

kus ψ_{1k} on funktsiooni ψ väärtus teatud punktis vaadeldavast punkti ümbrusest ja

$$d\omega = \frac{1}{\rho^2} dS$$

on ruuminurga element. Avaldisest (4.19) saame

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{(S)} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = -4\pi A \psi_k \cos(2\pi mt) \qquad (4.2o)$$

kus ψ_K on funktsiooni ψ väärtus kerapinna S kesk-punktis.

Et punkti a ümbruses

$$\varphi = A\frac{\cos kr_a}{r_a}\cos(2\pi mt)$$

ja punkti b ümbruses

$$\psi = A\frac{\cos r_b}{r_b}\cos(2\pi mt),$$

siis avaldise (4.2o) põhjal saame, et

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{(S_a)}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS = -4\pi A^2\cos^2(2\pi mt)\lim_{\rho\to 0}\frac{\cos k\rho}{\rho}$$

ja ka

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{(S_b)}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS = -4\pi A^2\cos^2(2\pi mt)\lim_{\rho\to 0}\frac{\cos k\rho}{\rho}.$$

Nendest avaldistest järeldub, et

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{(S_a)}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS - \lim_{\rho\to 0}\int_{(S_b)}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS = 0. \tag{4.21}$$

Kerapindade S_a ja S_b raadiuste võrdsustamine tähendab, et need raadiused on sama järku lõpmatult vähendavad, mille tõttu avaldis (4.21) ei kasva lõp - matult suureks üleminekul piirile.

Avaldise (4.2o) põhjal saame, et

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{(S_a)}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \lim_{\rho\to 0}\int_{(S_b)}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS = 4\pi A(\varphi_b-\psi_a)\cos(2\pi mt), \tag{4.22}$$

kus φ_b on funktsiooni φ väärtus punktis b ja ψ_a on funktsiooni ψ väärtus punktis a .

Kujutleme, et lainetav keskkond on piiratud kinnise pinnaga S_1, mille kõik punktid on lõpmatuses.Tä-

Tähistame keskkonnas asuvaid tahkeid kehi piiravaid pindu tähega S_2. Siis, oletuste tõttu funktsioonide ψ ja φ väärtuste kohta lõpmatuses on

$$\int\limits_{(S_1)}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0. \qquad (4.23)$$

Kui koordinaatidele anda ainult need väärtused, mis on pindade S_2 punktide koordinaatidel, siis kehtib avaldis (4.o2)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0.$$

Selle avaldise põhjal on

$$\int\limits_{(S_2)}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0. \qquad (4.24)$$

Olgu (V) piirkond, mille rajapinnad on pinnad S_1, S_2, S_a ja S_k. Tähistame neid kõiki pindu ühe tähega S. Kasutame Greeni valemit

$$\int\limits_{(S)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\iiint\limits_{(V)}(v\Delta u-u\Delta v)\,dx\,dy\,dz. \qquad (4.25)$$

Funktsioonid u ja v Green'i valemis ja nende esimest ja teist järku tuletised peavad olema pidevad integreerimispiirkonnas (V) ja selle raja - pinnal S. Neid tingimusi aga rahuldavad funktsioonid ψ ja φ. Võtame nüüd Green'i valemis

$$u=\psi \text{ ja } v=\varphi.$$

Siis saame, et

$$\int\limits_{(S)}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=\iiint\limits_{(V)}(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)\,dx\,dy\,dz.$$

Käsiteldaval juhul aga

$$\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi=0$$

/vt. avaldised (4.o1),(4.o3),(4.15),(4.16) ja (4.17)/. Sellepärast saame, et

$$\int\limits_{(S)}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=0.$$

Avaldistest (4.21),(4.22),(4.23) ja (4.24)saame, et

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{(S)}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS=4\pi A(\psi_a-\varphi_b)\cos(2\pi nt).$$

Kahest viimasest avaldisest järeldub, et

$$\psi_a=\varphi_b. \tag{4.26}$$

Viimane võrdus näitab teatavat vastastikkuse omadust, mis tuleb esile koontiinuumi lainetusnähtuses. Sõnastada võiks seda omadust järgmiselt:

Keskkonna punktis a tekitatavast lainetusest tingitud kiiruste potentsiaalfunktsiooni väärtus keskkonna punktis b on niisama suur, kui suur oleks potentsiaalfunktsiooni väärtus punktis a, kui samasugune lainetus, mis oli punkti a ümbruses, oleks tekitatud punkti b ümbruses.

Helmholtzi vastastikkuse laused.

§ 5. Helmholtzi vaststikkuse lausete tuletamine tungide kohta Helmholtzi käsitlusez.

1. Hamilton-Ostrogradski vähima mõju printsiibi käsitlus Helmholtzi poolt.

Oma vastastikkuse lausete tuletamisel Helmholtz lähtub vähima mõju printsiibist Hamilton-Ostrogradski kujul. Selles eeldatakse, et mehaanilisele süsteemile on rakendatud potentsiaalsed tungid. Siis süsteemi liikumisel ühest asendist, milles on see süsteem hetkel t_2, teise asendisse, milles on see süsteem hetkel t_1, integraal süsteemi kineetilisest potentsiaalist

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{H} dt \qquad (5.01)$$

on statsionaarne. Kinneetilise potentsiaali all Helmholtz mõistab potentsiaalse ja kineetilise energia vahet:

$$\mathcal{H} = \mathcal{V} - \mathcal{L}.$$

Helmholtzile polnud teada, et integraal (5.01) võib olla ka maksimaalne, kuigi sellele osutas juba Hamilton. Helmholtz peab seda integraali minimaalseks . Hamilton-Ostrogradski vähima mõju printsiibi tuletamisel aega ei varieerita. Seda väitis juba Hamilton; samale tulemusele jõudis 1867.aastal ka F.A.Sludski. Helmholtz peab õigeks, et vähima mõju printsiibi tuletamisel Hamilton-Ostrogradski kujul tuleb lugeda aega varieeruvaks. Seega Helmholtzi käsitluses aja funktsioonidena avaldatud suurused osutuvad varieeruvaiks Hamilton-Ostrogradsk printsiibis. Helmholtz kirjutab integraali (5.o1) kujul

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{H} + \Sigma^{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha} r_{\alpha} \right) dt, \qquad (5.o2)$$

kus r_α on üldkoordinaat ja $\mathcal{F}_\alpha$ sellele koordinaadile vastav tung. Suurusi $\mathcal{F}_\alpha$ ja r_α vaatleb ta avaldatuna funktsioonidena ajast. Integraali (5.o1) asendamist integraaliga (5.o2) Helmholtz püüab põhjendada sellega, et kineetiline potentsiaal integraalis (5.o1), nagu on näidatud Jacobi, võib sisaldada liidetavatena funktsiooni ajast. Kirjutades integraalile (5.o2) vastavad Euleri võrrandid, saab Helmholtz süsteemi liikumise differentsiaalvõrrandid kujul

$$\mathcal{F}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{r}_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots) \qquad (5.o3)$$

ehk

$$\mathcal{F}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_\alpha} + \sum^{\kappa} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \dot{r}_\alpha \partial r_\kappa} \dot{r}_\kappa + \sum^{\kappa} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \dot{r}_\kappa \partial \dot{r}_\kappa} \ddot{r}_\kappa \qquad (5.o4)$$

$$\alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Viimasest avaldisest tuletab Helmholtz oma tungide kohta käivad vastastikkuse laused.

2. Vastastikkuse lausete tuletamine Helmholtzi poolt tungide kohta.

Helholtz vaatleb avaldises (5.o4) koordinaate, kiirusi ja kiirendusi teineteisest sõltumatute muutujatena ja tunge nende funktsioonidena. Differentseerides avaldist (5.o4) Helmholtz saab järgmised seosed:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \ddot{r}_\beta} = \frac{\partial F_\beta}{\partial \ddot{r}_\alpha} \qquad (5.o5)$$

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \dot{r}_\beta \partial r_\alpha} + \frac{\partial^2 H}{\partial r_\beta \partial \dot{r}_\alpha} + \sum \frac{\partial^3 H}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta \partial r_\kappa} \dot{r}_\kappa + \sum_\kappa \frac{\partial^3 H}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta \partial \dot{r}_\kappa} \ddot{r}_\kappa \qquad (5.o6)$$

Viimase võrduse võime kirjutada järgmiselt:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \dot{r}_\beta \partial r_\alpha} + \frac{\partial^2 H}{\partial r_\beta \partial \dot{r}_\alpha} + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta} \qquad (5.o7)$$

Vahetades võrduses (5.o7) indeksid α ja β teineteisega ja liites tulemustega võrduse (5.o7), saame

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} + \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{r}_\alpha} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta} \qquad (5.o8)$$

Kui

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta} = const, \qquad (5.o9)$$

siis

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} + \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{r}_\alpha} = 0. \qquad (5.1o)$$

Avaldisest (5.o4) saame võrduse

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial r_\beta} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \sum_\kappa \frac{\partial^3 \mathcal{H}}{\partial r_\beta \partial \dot{r}_\alpha \partial r_\kappa}\dot{r}_\kappa + \sum_\kappa \frac{\partial^3 \mathcal{H}}{\partial r_\beta \partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\kappa}\ddot{r}_\kappa \qquad (5.11)$$

ehk teisiti kirjutatult

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial r_\beta} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_\beta \partial \dot{r}_\alpha} \qquad (5.12)$$

Vahetades võrduses (5.12) indeksid α ja β teineteisega ja lahutades tulemuse võrdusest (5.12), saame

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial r_\alpha} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_\beta \partial \dot{r}_\alpha} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_\alpha \partial \dot{r}_\beta}\right] \qquad (5.13)$$

Seost (5.o7) saame, et

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial \dot{r}_\alpha} = 2\left[\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_\beta \partial \dot{r}_\alpha} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_\alpha \partial \dot{r}_\beta}\right] \qquad (5.14)$$

Seostest (5.13) ja (5.14) aga saame, et

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial r_\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial \dot{r}_\alpha}\right) \qquad (5.15)$$

Kui

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial \dot{r}_\alpha} = const, \qquad (5.16)$$

siis avaldis (5.15) taandub võrdusele

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial r_\beta} = \frac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial r_\alpha} \qquad (5.17)$$

Võrdused (5.o5),(5.1o) ja (5.17) väljendavadki kolme Helmholtzi vastastikkuse lauset. Neid võib sõnastada järgmiselt:

1°. Kui kiirenduse $\ddot{r}_\beta$ muutumine tingib tungi $\mathcal{F}_\alpha$ muutuse, siis ka kiirenduse $\ddot{r}_\alpha$ muutumine tingib tungi $\mathcal{F}_\beta$ muutuse. Seejuures tungi $\mathcal{F}_\alpha$ ja kiirenduse $\ddot{r}_\beta$

hetkeliste (lõpmatult väikese ajavahemiku jaoks arvutatud) muutude suhe mistahes ajamomendil on võrdne tungi $\mathcal{F}_\beta$ ja kiirenduse $\ddot{r}_\alpha$ hetkeliste muutude suhtega sel samal ajamomendil.

2°. Kui tingimus $\frac{\partial^2 H}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta} = const$ on täidetud ja kui kiiruse $\dot{r}_\beta$ muutumine tingib tungi $\mathcal{F}_\alpha$ muutuse, siis ka kiiruse $\dot{r}_\alpha$ muutumine tingib tungi $\mathcal{F}_\beta$ muutuse. Seejuures tungi $\mathcal{F}_\alpha$ ja kiiruse $\dot{r}_\beta$ hetkeliste muutude suhe mistahes ajamomendil on võrdne tungi $\mathcal{F}_\beta$ ja kiiruse $\dot{r}_\alpha$ hetkeliste muutude suhetega sel samal ajamomendil, võetud vastasmärgiga.

3°. Kui tingimus $\frac{\partial^2 \mathcal{F}_\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial r_\alpha} = const$ on täidetud ja kui koordinaadi r_β muutumine timgib tungi $\mathcal{F}_\alpha$ muutuse, siis ka koordinaadi r_α muutumine tingib tungi $\mathcal{F}_\beta$ muutuse. Seejuures tungi $\mathcal{F}_\alpha$ ja koordinaadi r_β hetkeliste muutude suhe mistahes ajamomendil on võrdne tungi $\mathcal{F}_\beta$ ja koordinaadi r_α hetkeliste muutude suhtega sel samal ajamomendil.

<u>Märkus:</u> Furdujev, kirjutades Helmholtzi vastastikkuse lauseist, annab nende lausete teise käsitluse /4/. See käsitlus erineb vastavast Helmholtzi käsitlusest peamiselt selle poolest, et Furdujev ei lähtu vähima mõju printsiibist vaid otsekohe võrrandeist (5.o4) ja et seoses süsteemis eeldatakse <u>konservatiivsetena</u>.

§ 6. Helmholtzi vastastikkuse lausete tuletamine tungide kohta üldjuhul.

Vaatlele s vabadusastmega mehaanilise süsteemi liikumist. Olgu r_k $(k=1,2,3,\ldots,s)$ sõltumatud parameetrid (koordinaadid) süsteemi asendi ja konfiguratsiooni määramiseks, $\mathcal{L}$ —süsteemi kineetiline energia ja $\mathcal{F}_k$ koordinaadile r_k vastav üldistatud tung. Siis kehtivad Langrange'i võrrandid:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k} = \mathcal{F}_k \quad (k=1,2,3,\ldots,s) \tag{6.01}$$

Süsteemi liikumise differentsiaalvõrrandid lubavad kirjutada aga ka järgmisel kujul:

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{P}}_i = m_i \ddot{\vec{s}}_i & (6.02) \\ \vec{\mathcal{M}}_i = \left(\mathcal{J}_{1i}\ddot{\alpha}_{1i},\ \mathcal{J}_{2i}\ddot{\alpha}_{2i},\ \mathcal{J}_{3i}\ddot{\alpha}_{3i}\right) & (6.03) \end{cases}$$

Võrrandid (7.01),(7.02) ja (7.03) on rahuldatud samaselt siis, kui kõik neis esinevad suurused on avaldatud funktsioonidena ajast.

Võrrandis (6.02) m_i on süsteemi jäiga i-nda elemendi mass, $\vec{s}_i$ selle elemendi raskuskeskme kohavektor ja sellele elemendile rakendatud tung. Võrrandis (6.03) $\mathcal{J}_{1i}$, $\mathcal{J}_{2i}$ ja $\mathcal{J}_{3i}$ on süsteemi i -nda elemendi inertsmomendid, arvutatud telgede suhtes, mis on lahutamatult seostud selle elemendiga. Kõik need kolm telge lõikuvad i -nda elemendi raskuskeskmes. Sümbolid α_{1i}, α_{2i} ja α_{3i} tähendavad sobivalt valitud nurki, mis määravad süsteemi i -nda elemendi orientatsiooni. $\vec{\mathcal{M}}_i$

on süsteemi i -ndale elemendile rakendatud moment.

Kiirendused $\ddot{\alpha}_{1i}, \ddot{\alpha}_{2i}, \ddot{\alpha}_{3i}$ ja $\ddot{\vec{s}}_i$ $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ avalduvad suuruste $r_\kappa, \dot{r}_\kappa$ ja $\ddot{r}_\kappa$ $(\kappa = 1, 2, 3, \dots, s)$ kaudu. Vaatleme võrdustes (7.o2) ja (7.o3) suurusi r_κ, $\dot{r}_\kappa$ ja $\ddot{r}_\kappa$ teineteisest sõltumatute muutujatena. Siis tuleb vaadelda vektoreid $\vec{P}_i$ ja $\vec{M}_i$ $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ vektorfunktsioonidena suurustest $r_\kappa, \dot{r}_\kappa$ ja $\ddot{r}_\kappa$. Lagrange'i võrrandid (6.ol) tuletatakse vaadeldes suurusi $r_\kappa, \dot{r}_\kappa$ ja $\ddot{r}_\kappa$ $(\kappa = 1, 2, 3, \dots, s)$ teineteisest sõltumatute muutujatena. Sellest kõigest järeldub, et lugedes suurusi $r_\kappa, \dot{r}_\kappa$ ja $\ddot{r}_\kappa$ $(\kappa = 1, 2, 3, \dots, s)$ sõltumatuteks muutujateks, tuleb lugeda avaldist

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_\kappa} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_\kappa}$$

tungi $\mathcal{F}_\kappa$ avaldiseks ja et siis võrdused (6.ol), (6.o2) ja (6.o3) pole liikumise differentsiaalvõrrandid, vaid valemid momentide ja tungide arvutamiseks.

Võttes $\mathcal{H} = \mathcal{L}$ avaldis (5.o3)

$$\mathcal{F}_\kappa = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_\kappa} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{r}_\kappa}$$

taandub avaldiseks (6.ol)

$$\mathcal{F}_\kappa = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_\kappa} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_\kappa}$$

Seega avaldis (6.ol) hõlmab kõiki endisi avaldisi (5.o5), (5.lo) ja (5.17). See tähendab, et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial \ddot{r}_\beta} = \dfrac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial \ddot{r}_\alpha} \\[2mm] \dfrac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} = \dfrac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial \dot{r}_\alpha} \\[2mm] \dfrac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial r_\beta} = \dfrac{\partial \mathcal{F}_\beta}{\partial r_\alpha} \end{cases}$$

kui aga lähtuda vastavatest eeldustest. Tingimuse (5.o9)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta} = const$$

asemele aga saame

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta} = const .$$

Paneme tähele, et

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta}$$

Siin $\mathcal{H}$ on kineetiline potentsiaal Helmholtzi tähenduses: $\mathcal{H} = \mathcal{V} - \mathcal{L}$.

Seega on tõestatud Helmholtzi vastastikkuse laused üldisematel eeldustel, kui seda tegi Helmholtz ise või ka Furdujev /1;4/.

§ 7. Potentsiaalsete tungide juht.

Oletame, et mehaanilisele süsteemile on rakendatud ainult potentsiaalsed tungid. Siis tung

$$\mathcal{F}_K = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_K} \quad (K = 1, 2, 3, \ldots, s) \qquad (7.01)$$

Mõistame viimases võrduses $\mathcal{F}_K$ all avaldist

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_K} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_K} \qquad (7.02)$$

ja oletame, et meil on õnnestunud avaldada kiirused ja kiirendused koordinaatide ja aja funktsioonidena.

Defineerime „täisosatuletise" sümboli (operaatori) $\frac{d}{\partial r_a}$ järgmiselt:

$$\frac{d\Omega}{\partial r_a} = \frac{\partial \Omega}{\partial r_a} + \sum_K \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{r}_K} \cdot \frac{\partial \dot{r}_K}{\partial r_a} + \frac{\partial \Omega}{\partial \ddot{r}_K} \cdot \frac{\partial \ddot{r}_K}{\partial r_a} \right)$$

Võttes $\Omega = \mathcal{F}_K$ saame võrdusest (7.01), et

$$\frac{dF_\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{dF_\beta}{\partial r_\alpha} = 0. \tag{7.o3}$$

Sõnastatult annab see potentsiaalsete tungide puhul järgmise vastatikkuse lause:

Kui koordinaadi r_β muutumine koos selle koordinaadi r_β muutumisest tingitud kiiruste ja kiirenduste muutumisega kutsub esile tungi F_α muutumise, siis koordinaadi r_α muutumine koos selle koordinaadi r_α muutumisest tingitud kiiruste ja kiirenduste muutumisega kutsub esile tungi F_β muutumise. Seejuures tungi F_α ja koordinaadi r_β hetkeliste muutude suhe mistahes ajamomendil on võrdne tungi F_β ja koordinaadi r_α hetkeliste muutude suhtega sel samal ajamomendil.

Kui eeldada, et koordinaadid, kiirused ja kiirendused on teineteisest sõltumatud muutujad, siis avaldisest (7.o3) järeldub avaldis (5.17)

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial r_\beta} = \frac{\partial F_\beta}{\partial r_\alpha}.$$

Siit aga avaldisest (5.15)

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot r_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot r_\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial \ddot r_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial \ddot r_\alpha}\right)$$

järeldub avaldis (5.16)

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \ddot r_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial \ddot r_\alpha} = const$$

Seega sel juhul, kui süsteemile on rakendatud ainult potentsiaalsed tungid, avaldised (5.15) ja (5.17) ei erine teineteisest. Kui veel mingil hetkel kõik kiirused on nullid, siis sel hetkel ka

$$\frac{\partial^2 L}{\partial r_\alpha \partial \dot r_\beta} = 0$$

ja

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_\alpha \partial \dot{r}_\beta} = 0 ,$$

sest kineetilise energia avaldis on kiiruste teist järku homogeenne funktsioon. Sel juhul, nagu järeldub avaldisest (5.14)

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{r}_\alpha} = 2\left[\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_\beta \partial \dot{r}_\alpha} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial r_\alpha \partial \dot{r}_\beta}\right],$$

kus tuleb võtta eespool öeldu põhjal $\mathcal{H} = \mathcal{L}$, .

ja avaldisest (5.16)

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{r}_\alpha} = const ,$$

~~järeldunud~~ seos (5.10)

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{r}_\beta} + \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{r}_\alpha} = 0$$

kaotab ~~aga~~ mõtte.

§ 8. Helmholtzi viga vastastikkuse lausete tuletamiskäigus tungide kohta.

Vaatleme mehaanilist süsteemi, millele on rakendatud potentsiaalsed tungid F_κ' ja veel mingisugused teised tungid F_κ''. Siis koordinaadile r_κ vastab tung

$$F_{\kappa 1} = F_\kappa' + F_\kappa'' \quad (\kappa = 1, 2, 3, \ldots, s)$$

Oletame, et on olemas niisugune koordinaatide ja aja funktsioon V', et

$$F_\kappa' = -\frac{\partial V}{\partial r_\kappa} \quad (\kappa = 1, 2, 3, \ldots, s).$$

$\mathcal{V}'$ on kas süsteemi potentsiaalne energia või teatud osa sellest. Lagrange võrrandeist saame siis, et

$$\mathcal{F}_k'' = \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial r_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k}$$

kus tuletise $\frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial r_k}$ avaldises ei esine ei kiirusi ega kiirendusi.

Oletame, et võime vaadelda viimase võrduse paremat poolt tungi $\mathcal{F}_k''$ avaldisena, lugedes seal koordinaate, kiirusi ja kiirendusi sõltumatuteks muutujateks.

Järgnevalt vaatleme kõva keha translatoorset liikumist konservatiivsete tungide väljas kirjeldatuna Cartesiuse ristkoordinaadistikus. Oletame, et selle keha raskuskeskme koordinaadid r_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, s)$ ei ole mingisuguste avaldiste abil teineteisega seotud. Oletame edasi, et sellele kehale pole rakendatud tunge $\mathcal{F}_k''$. Siis viimati kirjutatud võrdusest saame, et

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_k} = m\ddot{r}_k$$

kus m on keha mass.

Eelduse järgi võime vaadelda eelviimases avaldises koordinaate, kiirusi ja kiirendusi teineteisest sõltumatute muutujatena; siis võib neid ka viimases avaldises vaadelda samasugustena. Sel juhul aga võrdus viimane saab kehtida ainult siis, kui korrutis $m\ddot{r}_k$ on konstantne, sest tuletise $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_k}$ avaldises pole kiirendusi. Kuna keha mass m eeldatakse konstantsena, peab olema ka kiirendus $\ddot{r}_k$ konstantne ja seda indeksi k igal väärtusel. See tähendaks, et kui keha liigub translatoorselt konservatiivsete tungide väljas säilitades oma massi, siis peab olema alati ta kiirendus konstantne. See on aga väär. Järelikult avaldise

$$\mathcal{F}_k'' = \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial r_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k}$$

kaudu, kus üld-koordinaadid r_k, kiirused $\dot{r}_k$ ja kiirendused $\ddot{r}_k$ on sõltumatud muutujad, ei saa defineerida tunge $\mathcal{F}_k''$.

Oma vastastikkuse lausete tõestamisel tungide kohta Helmholtz defineeris tungid $\mathcal{F}_k$ võrduse abil

$$\mathcal{F}_k = -\frac{\partial(\mathcal{V}-\mathcal{L})}{\partial r_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathcal{V}-\mathcal{L})}{\partial \dot{r}_k},$$

lugedes koordinaate, kiirusi ja kiirendusi teineteisest sõltumatuteks muutujateks. Kui oletada, et eelviimases võrduses ühteaegu $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$ ja $\mathcal{F}_k' = -\mathcal{F}_k$, siis taandub ta viimakseks avaldiseks. Sellest aga järeldub, et viimase avaldise abil ei saa määrata „tungi" $\mathcal{F}_k$. Seega Helmholtzi tungide määramisviisi ei saa lugeda korrektseks.

Olgu

$$\vec{\mathcal{P}}_i = \vec{\mathcal{P}}_i' + \vec{\mathcal{P}}_i''.$$

Nagu pole võimalik eraldada teineteisest tunge $\vec{\mathcal{P}}_i'$ ja $\vec{\mathcal{P}}_i''$, lugedes võrduses (7.o2)

$$\vec{\mathcal{P}}_i \equiv m_i \ddot{\vec{s}}_i$$

kiirenduse $\ddot{\vec{s}}_i$ komponente sõltumatuteks muutujateks, nii pole ka võimalik eraldada teineteisest tunge $\mathcal{F}_k'$ ja $\mathcal{F}_k''$, lugedes koordinaate, kiirusi ja kiirendusi avaldises

$$\mathcal{F}_k' + \mathcal{F}_k'' \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k}$$

sõltumatuteks muutujateks.

§ 9. Kas on mitu neid üldisi tungide avaldisi, milles võib lugeda koordinaate, kiirusi ja kiirendusi teineteisest sõltumatuteks muutujateks.

Võib tekkida küsimus, kas, lugedes koordinaate, kiirusi ja kiirendusi teineteisest sõltumatuteks, samade koordinaatide puhul on võimalik ainult üks tungi $\mathcal{F}_k$ avaldis

$$\mathcal{F}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k}$$

või mitu erinevat selle tungi avaldist.

Eeldusest, et koordinaadid r_k $(k=1,2,3,\ldots,s)$ on sõltumatud parameetrid, mis määravad igal hetkel süsteemi konfiguratsiooni ja asendi, järeldub, et avaldis

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k}$$

on määratud üheselt koordinaatide, kiiruste ja kiirenduste funktsioonina. Seega niisuguseid tungi $\mathcal{F}_k$ avaldisi on ainult üks.

Võib tekkida edasi küsimus, kas vahest on võimalik määrata tunge mingi teiste Langange'i võrrandite abil, mis oma kujult erinevad viimati üleskirjutatud Lagrange'i võrrandeist. Vastuse saamiseks oletame siis, et mehaanilisele süsteemile on rakendatud tungid, millede avaldised $\mathcal{G}_k$ on mingisugusel viisil (näiteks katsete abil) leitud. Oletame veel, et peale nende tungide süsteemile on rakendatud veel tungid $\mathcal{F}_k$. Olgu $\mathcal{G}_k$ funktsioonid koordinaatidest, kiirustest ja ajast. Siis on kehtivad Lagrange'i võrrandid

$$F_\varkappa = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\varkappa} - \frac{\partial L}{\partial r_\varkappa} - g_\varkappa .$$

Samuti, nagu see on tehtud eelmises paragrahvis, võime ka käesoleval juhul tõestada, et viimase avaldise abil, lugedes temas koordinaate, kiirusi ja kiirendusi sõltumatuteks muutujateks, ei saa määrata tunge $F_\varkappa$. Seejuures tuleb eeldada järgmist: kui $F_\varkappa = 0$, siis $g_\varkappa \neq 0$. Kuna sel juhul me oletus funktsiooni $g_\varkappa$ kohta ei saa kehtida, siis ei saa ta kehtida ka üldiselt.

Oletame, nüüd, et $g_\varkappa$ on kiirenduste funktsioon. Lähme üldkoordinaadistikust üle Cartesiuse koordinaadistikule ja eespool määratud (vt. § 6) nurkadele. Et süsteemis on seoseid, siis ei saa kõiki uusi koordinaate, kiirusi ja kiirendusi vaadelda teineteisest sõltumatute muutujatena. Olgu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s$ need uued koordinaadid, mis igal hetkel määravad süsteemi konfiguratsiooni ja asendi. Lagrange'i võrrandid uutes koordinaatides, kui tungid $F_\varkappa = 0$, on:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\varkappa} - \frac{\partial L}{\partial x_\varkappa} = g'_\varkappa$$

Siin $g'_\varkappa$ on koordinaatide $x_\varkappa$, kiiruste $\dot{x}_\varkappa$ ja kiirendusteе $\ddot{x}_\varkappa$ funktsioon.

Selles võime veenduda järgmiselt:

Olgu $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ kõik süsteemi Cartesiuse koordinaadid ja juba varem nimetatud (vt. § 6) nurgad. Üks osa nendest ongi koordinaadid $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s$. Olgu F'_i koordinaadile y_i vastav tung (s.o. moment või tung tavalises mõttes), g'_α ja g_β — vastavalt koordinaatidele x_α ja r_β vastavad üldistatud tungid. Üldistatud tungi definitsiooni järgi

$$\mathcal{G}'_\alpha = \sum_{i=1}^{n} F'_i \frac{\partial y_i}{\partial x_\alpha}$$

ja

$$\mathcal{G}_\beta = \sum_{i=1}^{n} F'_i \frac{\partial y_i}{\partial r_\beta} .$$

Olgu $\mathcal{G}_\beta$ funktsioon kiirendustest $\dot{r}_\kappa$. Olgu tuletised $\frac{\partial y_i}{\partial r_\kappa}$ ja $\frac{\partial y_i}{\partial x_\kappa}$ ning koordinaadid r_κ ja y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n;\ \kappa = 1, 2, 3, \ldots, s)$ avaldatud funktsioonidena koordinaatidest x_κ $(\kappa = 1, 2, 3, \ldots, s)$. Siis

$$\dot{r}_\kappa = \sum_j \frac{\partial r_\kappa}{\partial x_j} \dot{x}_j$$

ja

$$\ddot{r}_\kappa = \sum_t \sum_j \frac{\partial^2 r_\kappa}{\partial x_j \partial x_t} \dot{x}_j \dot{x}_t + \sum_j \frac{\partial r_\kappa}{\partial x_j} \ddot{x}_j$$

Tung F'_i sõltub ainult kiirendusest $\ddot{y}_i$. Nimelt:

$$F'_i = c_i \ddot{y}_i ,$$

kus c_i on suuruse $\dot{y}_i^2$ konstantne kordaja (vt. §6!) kineetilise energia avaldises:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i c_i \dot{y}_i^2$$

Leiame, et

$$\ddot{y}_i = \sum_t \sum_j \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_t \partial x_j} \dot{x}_t \dot{x}_j + \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \ddot{x}_j$$

Kõigest eelnevast järeldubki, et tung $\mathcal{G}'_\alpha$ üldiselt on vaadeldav funktsioonina suurustest $x_\kappa, \dot{x}_\kappa$ ja $\ddot{x}_\kappa$ $(\kappa = 1, 2, 3, \ldots, s)$. Juhul, kui süsteemis seoseid ei ole, taanduvad eelmised võrdused võrrandile

$$c_\kappa \ddot{x}_\kappa = \mathcal{G}'_\kappa .$$

Kuna viimase võrduse vasakul poolel on <u>ainult</u> üks muutuja, teisel poolel aga üldiselt <u>mitu</u> muutujat, siis ei saa alati vaadelda seda võrdsust samasusena, lugedes koordinaate x_κ, kiirusi $\dot{x}_\kappa$ ja kiirendusi $\ddot{x}_\kappa$

teineteisest sõltumatuteks muutujateks. Siis aga ei saa seda teha ka lähteavaldises

$$\mathcal{F}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k} - g_k$$

nii vaadeldaval juhul kui ka üldjuhul.

Kui me ei oleta, et tung $\mathcal{F}_k \equiv 0$, siis

$$\mathcal{F}_k + g_k' = c_k \ddot{x}_k.$$

Sellest saame, et võrdus

$$g_k = c_k \ddot{x}_k$$

ei kehti.

Samuti võime näidata, et g_k ei saa olla ka funktsioon kiirendusest ja veel mingisugustest teistest muutujatest.

Seega niisugust funktsiooni g_k, mille puhul võib vaadelda avaldises

$$\mathcal{F}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k} - g_k$$

koordinaate, kiirusi ja kiirendusi teineteisest sõltumatute muutujatena, ei ole olemas.

Käesolevas paragrahvis arendatud mõttekäigu võime kokku võtta järgmiselt:

Eeldame, et võrdus

$$\mathcal{F}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k} - g_k$$

tungi $\mathcal{F}_k$ avaldise sobiva valikuga, vaadeldes koordinaate, kiirusi ja kiirendusi teineteisest sõltumatute muutujatena, on rahuldatud samaselt. Sellest järeldub, et see võrdus peab olema rahuldatud samaselt ka siis, kui $\mathcal{F}_k \equiv 0$. Siis saame, et

$$g_k \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k}.$$

Kui eelviimane võrdus on õige, siis annab ta <u>alati</u> õigeid järeldusi. Viimane samasus vaadeldud juhtudel aga ei kehtinud. Sellest järeldub, et viimases avaldises ei saa vaadelda koordinaate, kiirusi ja kiirendusi teine - teisest sõltumatute muutujatena ja tungi nende funktsioonina.

Siit saame järgmise järelduse:

Helmholtsi vastastikkuse lausete tõestamiseks tungide kohta tuleb määrata tungid __alati__ Lagrangei võrran - dite

$$\mathcal{F}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k}$$

abil, lugedes neis koordinaate, kiirusi ja kiirendusi teineteisest sõltumatuteks muutujateks ja tunge nende funktsioonideks. Mingisuguseid teisi avaldusi, mis kõlbaksid seks otstarbeks ei ole.

§ 10. Vastastikkuse seadus.

1. Seosed üldistatud impulsside ja funktsiooni $\int_{t_1}^{t_2}(\mathcal{L}-\mathcal{V})dt$ vahel.

Vaatleme mehaanilist süsteemi, millele on rakendatud ainult potentsiaalsed tungid. Olgu suurused r_1, $r_2, r_3, \dots, r_s$ sõltumatud parameetrid (koordinaadid), mille abil määratakse mistahes hetkel süsteemi asend ja konfiguratsioon. Tähistame süsteemi kineetilise ja potentsiaalse energia vahe (kineetilise potentsiaali) tähega $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} - \mathcal{V}.$$

Arvutame funktsiooni $\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{K}dt$ isokroonse variatsiooni. Variatsioonarvutuse reegleid rakendades leiame, et

$$\delta\int \mathcal{K}dt = \int\delta\mathcal{K}dt = \int\left[\sum_K\left(\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial r_K}\delta r_K + \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{r}_K}\delta\dot{r}_K\right)\right]dt, \qquad (10.01)$$

Kasutades ositi integreerimist saame, et

$$\int\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{r}_K}\delta\dot{r}_K dt = \int\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{r}_K}\frac{d(\delta r_K)}{dt}dt = \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{r}_K} - \int\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{r}_K}\right)\delta r_K. \qquad (10.02)$$

Avaldisest (10.01) ja (10.02) leiame, et

$$\delta\int\mathcal{K}dt = \int\left[\sum_K\left(\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial r_K} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{r}_K}\right)\delta r_K\right]dt + \sum_K\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{r}_K}\delta r_K \qquad (10.03)$$

Vaadeldaval juhul Lagrange'i võrrandid on

$$\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial r_K} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{r}_K} = 0 \quad (K = 1, 2, 3, \dots, s) \qquad (10.04)$$

Avaldisest (lo.o3) ja (lo.o4) saame, et

$$\delta\int \mathcal{L}dt = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k}\delta r_k . \qquad (10.05)$$

Suurused

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k}$$

on <u>üldistatud impulsid</u>. Tähistame

$$p_k\Big|_{t=t_2} = p_{2k} \qquad p_k\Big|_{t=t_1} = p_{1k}$$

$$r_k\Big|_{t=t_2} = r_{2k} \qquad r_k\Big|_{t=t_1} = r_{1k}$$

Avaldise (lo.o5) põhjal

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}dt = \sum_k \left(p_{2k}\delta r_{2k} - p_{1k}\delta r_{1k}\right). \qquad (10.06)$$

Süsteemi liikumise differentsiaalvõrrandid (lo.o4) määravad koordinaate aja funktsioonidena. Neis koordi - naatide avaldistes on kokku 2s konstanti, mis tuleb määrata mingisuguste täiendavate andmete põhjal süsteemi liikumise kohta. Need konstandid esinevad siis ka impulsside ja integraali $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}dt$ avaldistes, kui neisse asetada koordinaatide avaldised.

Olgu teada süsteemi koordinaadid hetketel t_1 ja t_2 . Siis koordinaatide avaldistest aja funktsioonidena on võimalik leida eespool mainitud $2s$ konstanti avaldistena suurustest t_1, t_2, r_{1k}, r_{2k} $(k = 1, 2, 3, \dots, s)$. Siis aga impulsid ja integraal $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}dt$ on vaadeldavad avaldistena nendest samadest suurustest.

Tähistame integraali

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}dt$$

tähega φ. Vaatleme hetki t_1 ja t_2 muutuvatena.

Eespool öeldu põhjal funktsiooni φ isokroonne variatsioon

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r_{2k}}\delta r_{2k} + \frac{\partial\varphi}{\partial r_{1k}}\delta r_{1k} \,. \qquad (10.07)$$

Avaldiste (10.06) ja (10.07) põhjal

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_{2k}} = s_{2k} \qquad (10.08)$$

ja

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_{1k}} = -s_{1k} \,. \qquad (10.09)$$

Võrdused (10.08) ja (10.09) andis Hamilton / 1,lk.213; 5 lkd. 355-358/. Nendest saame, et

$$\frac{\partial s_{2k}}{\partial r_{1i}} = -\frac{\partial s_{1i}}{\partial r_{2k}} \,. \qquad (10.10)$$

Viimast avaldist vajame vastastikkuse seaduse tõestamiseks.

2. Vastastikkuse seaduse tuletamine.

Vastastikkuse seadus eeldab pöörduvat liikumist. Nimetame masspunkti liikumist pöördunud liikumiseks, kui masspunkt mingil hetkel muudab oma liikumise vastassuu - naliseks ja läbib uuesti kord juba läbitud trajektoori, kui nüüd juba selles uues suunas. Seejuures eeldame, et masspunkti liikumiseks ta trajektoori mingist punktist B trajektoori punkti A kulub samapalju aega, kuipalju kulus aega masspunkti otse liikumisel punktist A punktisse B. Masspunktide süsteemi liikumine on pöördunud liikumine, kui iga selle süsteemi masspunkti liikumine on pöördunud liikumine.

Tõestame vastastikkuse seaduse. See seadus on järgmine:

Vaatleme pöörduvat liikumist.

Oletame, et impulsid s_{1k} ja s_{2k} $(k=1,2,3,\ldots)$ on määratavad funktsioonidena koordinaatidest r_{1k} ja r_{2k} $(k=1,2,3,\ldots)$ ning, hetketest t_1 ja t_2 ja et nende impulsside etteandmisega on liikumine määratud üheselt.

Eeldame, et hetkel t_1 ainult impulss s_{1a} kasvab ds_{1a} võrra.

Selle tagajärjel muutuvad koordinaadid r_{2k}, koordinaadid r_{1k} aga on konstantsed.

Aja $dt=t_2-t_1$ möödudes koordinaat r_{2b} kasvab dr_{2b} võrra.

Eeldame, et hetkel t_2 ainult impulss s_{2b} väheneb ds_{2b} võrra, teised impulsid aga ei muutu.

Uut liikumist vaatleme algavana hetkel t_2. See uus liikumine on endise suhtes pöördunud liikumiseks. Selles koordinaadid r_{1k} muutuvad ja koordinaadid r_{2k} on konstantsed.

Koordinaat r_{1a} aja dt möödudes pärast liikumise pöördumist muutub dr_{1a} võrra.

Kui mingi impulsi s_{1k} avaldises esineb ilmsi aja -

hetk t_2 või mingi impulsi s_{2k} avaldises esineb ilmsi ajahetk t_1, siis loeme nähtuse kestvust $dt = t_2 - t_1$ niivõrd väikeseks, et võrreldes teda koordinaatide muutudest kõige madalamat järku lõpmatult väikese muuduga, on ta (s.o. dt) kõrgemat järku lõpmatult väike suurus.

Oletame, veel et impulsside s_{1k} osatuletised koordinaatide r_{2k} järgi ja impulsside s_{2k} osatuletused koordinaatide r_{1k} järgi on <u>lõplikud</u>.

Väidame, et tehtud oletustel impulsi s_{1a} ja koordinaadi r_{2b} muutude suhe on võrdne impulsi s_{2b} ja koordinaadi r_{1a} muutude suhtega, s.t.

$$ds_{1a} : dr_{2b} = ds_{2b} : ds_{1a} .$$

Tõestame selle väite.

Arvestamata kõrgemat järku lõpmatult väikeste suurustega enne liikumise pöördumist

$$ds_{1i} = \sum_k \frac{\partial s_i}{\partial r_{2k}} dr_{2k} . \tag{10.11}$$

Teoreemi eelduste põhjal

$$ds_{1i} = 0 \quad (i \neq a)$$

ehk

$$\sum_k \frac{\partial s_{1k}}{\partial r_{2k}} dr_{2k} = 0 \quad (i \neq a). \tag{10.12}$$

Andes avaldises (10.11) indeksile i erinevaid väärtusi ja arvestades avaldisega (10.12) saame <u>võrrandsüsteemi koordinaatide muutude määramiseks impulsi muudu kaudu</u>.

Tähistame selle võrrandsüsteemi determinandi tähega $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \left| \left(\frac{\partial s_{1i}}{\partial r_{2k}} \right) \right| \qquad (10.13)$$

Avaldises (lo.13) sulgused on determinandi $\mathcal{D}$ elemendi avaldis, kus i ja k on vastavalt determinandi $\mathcal{D}$ rea- ja veeruindeksid. Lahendades süsteemi (lo.11) saame, töötades absoluutväärtustega, et

$$|dr_{2b}| = \left| \left[\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \left(\frac{\partial s_{1b}}{\partial r_{2a}} \right)} : \mathcal{D} \right] ds_{1a} \right| . \qquad (10.14)$$

On eeldatud, et

$$\mathcal{D} \neq 0, \qquad (10.15)$$

kuna vastasel juhul impulsside etteandmisega poleks liikumine määratud, missugust juhtu me ei vaatle.

Hetkel t_2 liikumine pöördub. Uut liikumist vaatleme seega algavana hetkel t_{II}. Sel juhul saame süsteemi

$$ds_{2k} = \sum_i \frac{\partial s_{2k}}{\partial r_{1i}} dr_{1i} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (10.16)$$

kus

$$ds_{2k} = 0 \quad (k \neq b) . \qquad (10.17)$$

Tähistame süsteemi (lo.16) determinaadi $\mathcal{D}'$:

$$\mathcal{D}' = \left| \left(\frac{\partial s_{2k}}{\partial r_{1i}} \right) \right| \qquad (10.18)$$

Avaldise (lo.lo)

$$-\frac{\partial s_{1k}}{\partial r_{2i}} = \frac{\partial s_{2i}}{\partial r_{1k}} \qquad (lo.19)$$

põhjal

$$|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}| .$$

Võrratusest (lo.15) ja võrdusest (lo.19)järeldub, et

$$\mathcal{D}' \neq 0.$$

Seepärast süsteemist (lo.16) saame, töötades absoluutväärtustega, et

$$|dr_{1a}| = \left|\left[\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial\left(\frac{\partial s_{2a}}{\partial r_{1b}}\right)} : \mathcal{D}'\right] ds_{2b}\right| . \qquad (lo.2o)$$

Avaldisest (lo.lo)

$$-\frac{\partial s_{1k}}{\partial r_{2i}} = \frac{\partial s_{2i}}{\partial r_{1k}}$$

ja avaldisest (lo.19) saame, et

$$|dr_{1a}| = \left|\left[\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial\left(\frac{\partial s_{2b}}{\partial r_{2a}}\right)} : \mathcal{D}\right] ds_{2b}\right| . \qquad (lo.21)$$

Avaldistest (lo.14) ja (lo.21) saame, et

$$|ds_{1a} : dr_{2b}| = |ds_{2b} : dr_{1a}| \qquad (lo.22)$$

Loeme koordinaatide ja impulsside muute enne liikumise pöördumist positiivseteks. Siis pärast liikumise pöördumist tuleb neid muute lugeda negatiivseteks. Selle kokkuleppe tõttu viimasest avaldisest (lo.22) saame, et

$$ds_{1a} : dr_{2b} = ds_{2b} : dr_{1a} \tag{10.23}$$

mida oligi vaja tõestada.

Paneme tähele, et impulsside muutumisi eespool käsitel̄dus võime vaadelda <u>tõugetena</u>.

Vastastikkuse seaduse, nagu ta on antud võrduses (1o.23) avastas Helmholtz /1/, kelle nime see seadus tänini kannab.

Näiteid Helmholtzi vastastikkuse lausetele.

§ 11. Vastastikkuse lause konkreetne näide pideva keskkonna lainetuse puhul.

Jätkame sama pealkirja all vaadeldud nähtuse käsitlemist (vt. § 4).

"Lainevõrrandist" (4.o1)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

saame, et

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) = a^2 \Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) \tag{11.01}$$

Võrdusest (4.o2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

mis kehtib keskkonda asetatud tahkete kehade pindadel, näeme, et neil pindadel kehtib võrdus

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0. \tag{11.o2}$$

Punkti a ümbruses avaldise (4.o3)

$$\varphi = A\frac{\cos kr_a}{r_a}\cos(2\pi mt)$$

põhjal

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_a} = -A\cos(2\pi mt)\left[\frac{k\sin kr_a}{r_a} + \frac{\cos kr_a}{r_a^2}\right] \tag{11.o3}$$

Punkti b ümbruses avaldise (4.17)

$$\psi = A\frac{\cos kr_b}{r_b}\cos(2\pi mt)$$

põhjal

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_b} = -A\cos(2\pi mt)\left[\frac{k\sin kr_b}{r_b} + \frac{\cos kr_b}{r_b^2}\right] \tag{11.o4}$$

Indekseid kirjutamata jättes saame võrdusest (11.o3), et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = A\cos(2\pi mt)\left[\frac{2k}{r^2}\sin kr - \frac{k^2}{r}\cos kr + \frac{2}{r^3}\cos kr\right]$$

Kasutades integraali keskväärtuse lauset saame viimasest avaldisest, et

$$\int_{(S_a)}\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}\right)dS = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\right)'_a A\cos(2\pi mt)\left[2k\sin k\rho - k^2\rho\cos k\rho + \frac{2}{\rho}\cos k\rho\right]\cdot 4\pi,$$

kus $\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\right)'_a$ on funktsiooni $\frac{\partial \psi}{\partial r_b}$ väärtus kerapinnal. S_a võetud punktis. Kui kerapinna S_a raadius ρ on küllalt väike, siis

$$\int_{(S_a)} \frac{\partial\psi}{\partial r_b}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)dS = 8\pi A\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)'_a \frac{\cos k\rho}{\rho}\cos(2\pi m t).$$

Samadel eeldustel leiame, et

$$\int_{(S_b)} \frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)dS = 8\pi A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)'_b \frac{\cos k\rho}{\rho}\cos(2\pi m t),$$

kus $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)_b$ on funktsiooni $\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}$ väärtus kerapinnal S_b võetud punktis.

Kahest viimasest võrdusest saame, et

$$\int_{(S_a)} \frac{\partial\psi}{\partial r_b}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)dS - \int_{(S_b)} \frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)dS =$$
$$= 8\pi A\frac{\cos k\rho}{\rho}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)'_a - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)'_b\right]\cos(2\pi m t) \qquad (11.05)$$

Samuti leiame, et

$$\int_{(S_b)} \frac{\partial\psi}{\partial r_b}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)dS - \int_{(S_a)} \frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)dS = 8\pi A\frac{\cos k\rho}{\rho}\cos(2\pi m t)\cdot\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)' - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)'\right]$$

kus $\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)'$ ja $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)'$ on funktsioonide $\frac{\partial\psi}{\partial r_b}$ ja $\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}$ väärtused vastavad pindadel S_b ja S_a.

Kerapindade S_a ja S_b raadiused võib võtta võrdseina.

Siis avaldistest (11.03) ja (11.04) järeldub, et

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)',$$

ja seepärast

$$\int_{(S_a)} \frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)dS - \int_{(S_b)} \frac{\partial\psi}{\partial r_b}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)dS = 0. \qquad (11.06)$$

Viimane võrdus kehtib muidugi ka siis, kui suurus ρ kahaneb tõkestamatult.

Olgu kiirus lõpmatuses null, s.t. funktsioonide φ ja ψ osatuletised koordinaatide järgi lõpmatuses on nullid. Siis, arvestades avaldistega (11.o2),(11.o5) ja (11.o6), leiame, et

$$\int\limits_{(S)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)\right]dS= \qquad (11.o7)$$

$$=-8\pi A\frac{\cos k\varrho}{\varrho}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)'_a-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)'_b\right]\cos(2\pi mt)$$

Greeni valemi

$$\int\limits_{(S)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\iiint\limits_{(V)}(v\Delta u-u\Delta v)\,dx\,dy\,dz$$

järgi saame siis, et

$$\int\limits_{(S)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\right)\right]dS= \qquad (11.o8)$$

$$=\int\limits_{(V)}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\Delta\frac{\partial\psi}{\partial r_b}-\frac{\partial\psi}{\partial r_b}\Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_a}\right)\right]dV.$$

Nüüd oli aga (4.15)

$$\varphi=\varphi_1\sin(2\pi mt)+\varphi_2\cos(2\pi mt)$$

ja (4.16)

$$\psi=\psi_1\sin(2\pi mt)+\psi_2\cos(2\pi mt);$$

ning edasi ~~(4.o3)~~ punktide a ja b ümbruses vastavalt (4.O3)

$$\varphi=A\frac{\cos kr_a}{r_a}\cos(2\pi mt)$$

ja (4.17)

$$\psi=A\frac{\cos kr_b}{r_b}.$$

~~Need võrdused kehtivad vastavalt punktide ja ümbruses.~~ Arvestades lainevõrrandist saadud seosega (11.o1)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)=a^2\Delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right),$$

mis kehtib ka siis, kui temas võtta φ võrdseks ψ-ga, ja kus indeksid on jäetud kirjutamata, leiame et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}\Delta\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\right)-\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\Delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}\right)=0.$$

Siis aga avaldisest (11.o8) järeldub, et

$$\int_{(S)}\left[\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}\right)-\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\right)\right]dS=0. \qquad (11.o9)$$

Seostest (11.o7) ja (11.o9) saame viimaks võrduse

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\right)'_a=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}\right)'_b .$$

Eeldades selles võrduses raadiuse ρ tõkestamatult kahanevana saame, et

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\right)_a=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}\right)_b, \qquad (11.lo)$$

kus $\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\right)_a$ on funktsiooni $\frac{\partial \psi}{\partial r_b}$ väärtus punktis a ja $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}\right)_b$ on funktsiooni $\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}$ väärtus punktis b.

Viimase avaldise (11.lo) võime saada ka võrdusest (4.26)

$$\psi_a=\varphi_b .$$

Nimelt on kahes viimases võrduses

$$r_a=r_b=r$$

kui punktide a ja b kaugus teineteisest. Oletame, et see kaugus r muutub. Siis viimase võrduse differentsimine annab võrduse

$$\frac{\partial \psi_a}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_b}{\partial r}$$

Muutes selles avaldises vaid tähistust, saame temast avaldise (11.1o).

Kujutleme, et punktide a ja b vaheline kaugus r on lõpmatult väike. Liikugu võnkuv aineosake punktist a punktisse b. Olgu selle aineosakese mass $m = 1$. Siis vastastikkuse seaduse põhjal

$$\frac{\partial}{\partial r_a}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}\right) = \frac{\partial}{\partial r_b}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\right)$$

ehk

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_a^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_b^2}$$

mis muide järeldub ka avaldisest (11.1o). Avaldise (11.1o) võime saada ka integreerides (eeldusel $r_a = r_b = r$) ~~viimast~~ viimast võrdust jättes püsima r suhtes kitsenduse, et r jääb lõpmatult väikeseks. Samadel eeldustel võime saada võrdusest (11.1o) võrduse (4.26)

$$\psi_a = \varphi_b.$$

Võrdus

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_a^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_b^2}$$

lubab end kirjutada kujul

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_a^2}\right)_b = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r_b^2}\right)_a.$$

Selles väljendub selgesti kiiruste tuletiste üks vastastikkuse omadus (funktsioonide φ ja ψ osatuletised on kiirused kauguse r sihis).

Toodud mõttekäik näitab, et kolm teatavaid vastastikkuse omadusi väljandavat võrdust

$$\psi_a = \varphi_b ,$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_b}\right)_a = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_a}\right)_b$$

ja

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r_b^2}\right)_a = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_a^2}\right)_b$$

eeldusel, et punktide a ja b vaheline kaugus on lõpmatult väike, on tuletatavad vastastikkuse seadusest.

§ 12. Sümmeetrilise vurri liikumine liikumatu punkti ümber.

1. Vurri liikumise differentsiaalvõrrandite tuletamine.

Tähistame vurri sümmeetriatelje tähega ζ . Selle teljega ristuvas tasandis valime kaks ristuvat telge ξ ja η . Teljestik (ξ, η, ζ) olgu seotud vurriga lahutamatult. Tähistame nurka vurri toetuspunkti läbiva telje z ja vurri telje ζ vahel tähega θ . Läbigu telg y telgede z ja ζ lõikepunkti ja olgu ta risti teljega z , jäädes vurri liikumisel tasandile $z\zeta$. Tähistame nurka telje y meelevaldse ja mingi kindla asendi vahel tähega φ. Nurka telje ξ meelevaldse ja mingi kindla asendi vahel tähistame tähega β.

Vurri liikumist, mille puhul muutub ainult nurk φ, nimetatakse pretsessiooniks. Vurri liikumist, mille puhul muutub ainult nurk θ, nimetatakse nutatsiooniks.

Telgede z, ζ ja ξ suunad olgu valitud järgmiselt: Liikumisega telje z ümber (s.o. ainult nurga φ muutudes) põhjustatud nurkkiirenduse vektor $\vec{\mu}$ on suunatud piki z-telge selle telje positiivses suunas. Liikumisega telje ζ ümber (s.o. ainult nurga β muutudes) põhjustatud nurkkiirenduse vektor $\vec{\nu}$ on suunatud piki ζ-telge selle telje positiivses suunas. Liikumisega ξ-telje ümber (s.o. ainult nurga θ muutudes) põhjustatud nurkkiirenduse vektor $\vec{\lambda}$ on suunatud piki ξ-telge selle telje positiivses suunas.

Eelpool öeldu põhjal

$$|\vec{\mu}| = \dot{\varphi}\ ;\ |\vec{\nu}| = \dot{\beta}\ ;\ |\vec{\lambda}| = \dot{\theta}.$$

Summaarse nurkkiirenduse vektori komponendid teljestikus (ξ, η, ζ) on

$$\begin{aligned} w_\xi &= \dot{\theta} \\ w_\eta &= -\dot{\varphi}\sin\theta \\ w_\zeta &= \dot{\beta} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned}$$

Olgu telje ζ, suhtes arvutatud vurri inertsmoment C, telje ξ suhtes — A. Et vurr on sümmeetriline, siis inertsmoment telje η suhtes on samuti A.

Vurri kineetiline energia

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[C(\dot\beta+\dot\varphi\cos\theta)^2+A\dot\varphi^2\sin^2\theta+A\dot\theta^2\right].$$

Seepärast vurri liikumise differentsiaalvõrrandid Lagrange'i kujul on:

$$C(\ddot\beta+\ddot\varphi\cos\theta)-\dot\varphi\sin\theta\cdot\dot\theta)=\mathcal{F}_\beta \qquad (12.o1)$$

$$C(\ddot\beta+\ddot\varphi\cos\theta-\dot\varphi\dot\theta\sin\theta)\cos\theta-C(\dot\beta+\dot\varphi\cos\theta)\dot\theta\sin\theta+ + A\ddot\varphi\sin^2\theta+2A\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\sin\theta=\mathcal{F}_\varphi \qquad (12.o2)$$

$$A\ddot\theta+C(\dot\beta+\dot\varphi\cos\theta)\dot\varphi\sin\theta-A\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta=\mathcal{F}_\theta$$

(12.o3)

Neis võrrandeis $\mathcal{F}_\beta$, $\mathcal{F}_\varphi$ ja $\mathcal{F}_\theta$ on üldistatud tungid ja nimelt:

$\mathcal{F}_\beta$ on tung, mis põhjustab nurga β muutumist; ~~ja~~ $\mathcal{F}_\varphi$ on tung, mis põhjustab nurga φ muutumist; ja $\mathcal{F}_\theta$ on tung, mis põhjustab nurga θ muutumist. Kui mitte kasu - tada üldistatud tungi mõistet, siis tuleb suurusi $\mathcal{F}_\beta$, $\mathcal{F}_\varphi$ ja $\mathcal{F}_\theta$ mõista momentidena.

2. Seosed tungide ja kiirenduste vahel vurri liikumisel.

Avaldistest (12.o1),(12.o2) ja (12.o3) saame, et

$$\frac{\partial\mathcal{F}_\beta}{\partial\ddot\varphi}=\frac{\partial\mathcal{F}_\varphi}{\partial\ddot\beta}=C\cos\theta \qquad (12.o4)$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}_\beta}{\partial\ddot\theta}=\frac{\partial\mathcal{F}_\theta}{\partial\ddot\beta}=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}_\theta}{\partial\ddot\varphi}=\frac{\partial\mathcal{F}_\varphi}{\partial\ddot\theta}=0$$

Vurri telje ζ ümber liikumise kiirenduse ja pretsessiooniliikumist põhjustava tungi muutudes, pretsessiooniliikumise kiirendus ja tung, mis põhjustab vurri pöörlemist oma telje ζ ümber, muutuvad vastavalt avaldistele (12.o4). Kui vurri telg ζ on risti teljega z, mille ümber vurr liigub pööreldes veel oma telje ζ ümber, siis miisugust sõltuvust pole.

3. Seosed tungide ja kiiruste vahel vurri liikumisel.

Avaldistest (12.ol) ja (12.o2) saame, et

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot\varphi} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \dot\beta} = -2C\dot\theta \sin\theta = 2C\frac{d}{dt}(\cos\theta) \qquad (12.o5)$$

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \dot\beta} = 0 \qquad (12.o6)$$

Viimasest võrdusest järeldub, et avaldisele (12.o5) vastav Helmholtzi vastastikkuse lause ei anna seoseid tungide ja kiiruste vahel. Seevastu vurri telje ζ ümber liikumise kiiruse ja pretsessiooniliikumist põhjustava tungi muutudes, pretsessiooniliikumise kiirus ja tung, mis põhjustab vurri pöörlemist oma telje ümber, muutuvad alati vastavalt avaldisele (12.o6).

Avaldistest (12.ol) ja (12.o3) saame, et

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial \dot\theta} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \dot\beta} = 0 \qquad (12.o7)$$

Vurri telje ξ ümber liikumise kiiruse ja nutatsiooniliikumist põhjustava tungi muutudes, nutatsiooniliikumise kiirus ja tung, mis põhjustab vurri pöörlemist oma telje ümber, muutuvad vastavalt avaldisele (12.o7). Sellele avaldisele analoogse avaldise saame avaldisest (12.o2) ja (12.o3):

$$\frac{\partial F_\varphi}{\partial \dot\theta} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \dot\varphi} = 0, \qquad (12.o8)$$

mis annab seose nutatsiooni- ja pretsessiooniliikumise vahel..

4. Seosed tungide ja koordinaatide vahel vurri liikumisel.

Avaldistest (12.ol), (12.o2) ja (12.o3)saame, et osatuletised

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial F_\varphi}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial F_\theta}{\partial \beta} \text{ ja } \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}$$

on nullid.

Sellest järeldub, et Helmholtzi vastastikkuse lausetele vastavaid tungide ja koordinaatide vahelisi seoseid vaadeldaval juhul ei ole.

Märkus: Toodud näide vurri liikumisest on lühemal kujul käsiteldud Helmholtzi töös /1/. Ta eeldab, et vurri potentsiaalne energia on null. See eeldus pole vajalik seoste (12.o4)-(12.o8) saamiseks: nagu eespool nägime ei figureeri potentsiaalne energia mõttekäigus kuskil. Märgivahe tungide avaldistes siin, võrreldes vastavate Helmholtzi avaldistega, tuleb sellest, et Helmholtzil liikumise differentsiaalvõrrandeis suuruse $\mathcal{L}$ asemel seisab $\mathcal{H}$ -ga tähistatud suurus $\mathcal{V}-\mathcal{L}$.

§ 13. Keha translatoorne liikumine, kirjeldatud sfäärilises koordinaadistikus.

1. Liikumise differentsiaalvõrrandid sfäärilistes koordinaatides.

Kui meid ei huvita keha orientatsioon, aga ainult tema asend ruumis, siis piisab keha mingi punkti koha andmisest. Selleks punktiks võtame keha raskuskeskme. Tema liikumise abil kirjeldame ka kogu keha liikumist juhul, kui orientatsiooni küsimused võivad jääda kõr - vale. Raskuskeskme valiku põhjus peitub asjaolus, et see punkt liigub nii, nagu oleks kogu keha mass koondunud raskuskeskmesse ja nagu oleksid kõik kehale rakendatud tungid rakendatud just raskuskeskmesse. Keha raskuskeskme Cartesiuse koordinaadid x, y ja z avalduvad sfääriliste koordinaatide kaudu järgmiselt:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

kus r on keha raskuskeskme kohavektori pikkus, θ — nurk selle vektori ja z telje vahel ja φ — nurk, mille moodustab selle vektori projektsioon tasandile xy x-teljega.

Kui eeldame, et keha liigub ainult translatoorselt, siis tema kineetiline energia massi ühiku kohta

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \tfrac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2\theta) .$$

Seepärast keha raskuskeskme liikumise Lagrange'i differentsiaalvõrrandid on:

$$F_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$$

$$F_\theta = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} - r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$F_\varphi = 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta + 2r^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta$$

kus F_r, F_θ ja F_φ on keha massi ühiku kohta arvutatud tungid. Kasutamata üldistatud tungi mõistet, on F_r tung keha massi ühiku kohta ja F_θ ning F_φ kaks keha massi ühiku kohta tulevat momenti.

2. Seosed tungide ja kiirenduste vahel sfäärilistes koordinaatides keha translatoorsel liikumisel.

Ülaltoodud Lagrange'i võrrandeist saame, et osatuletised

$$\frac{\partial F_r}{\partial \dot{\theta}} \qquad \frac{\partial F_r}{\partial \dot{\varphi}} \qquad \frac{\partial F_\theta}{\partial \dot{r}} \qquad \frac{\partial F_\varphi}{\partial \dot{r}} \qquad \frac{\partial F_\theta}{\partial \dot{\varphi}} \qquad \frac{\partial F_\varphi}{\partial \dot{\theta}}$$

on kõik nullid. Sellest järeldub, et vaadeldaval juhul seoseid tungide ja kiirenduste vahel, nagu neid annavad Helmholtzi vastastikkuse laused, ei leidu.

3. Seosed tungide ja kiiruste vahel sfäärilistes koordinaatides keha translatoorsel liikumisel.

Ülaltoodud Lagrenge'i võrrandist järeldub, et

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{\partial F_\theta}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta} = 0$$

Seega keha translatoorsel liikumisel kehtivad sfäärilistes koordinaatides töötamisel kõikide tungide kohta need Helmholtzi vastastikkuse laused, mis annavad seoseid tungide ja kiiruste vahel.

4. Seosed tungide ja koordinaatide vahel sfäärilistes koordinaatides keha translatoorsel liikumisel.

Esimesest kahest Lagrange'i võrrandist saame, et

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial r} = -2\frac{d}{dt}(r\dot{\theta})$$

Kui liikumine toimub nõnda, et

$$r\dot{\theta} = const,$$

siis saame Helmholtzi vastastikkuse lause

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial r} = 0.$$

Lagrange'i võrrandeist järeldub veel, et osatuletised

$$\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \qquad \frac{\partial F_\varphi}{\partial r} \qquad \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}$$

on nullid. See tähendab, et peale seose

$$\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial r} = 0,$$

teisi seoseid, mis vastaksid Helmholtzi vastastikkuse lausetele, uuritaval juhul pole.

Paneme tähele, et keha raskuskeskme koordinaatide vahel ei ole seoseid.

§ 14. Keele (võlli,varda) tasapinnaline liikumine.

Oletame, et keele (võlli, varda) liikumine toimub kindlas tasapinnas ja et lõiked, mis on risti keele(võlli, varda) teljega, jäävad liikumisel risti selle teljega. Vaatleme mingi ühe niisuguse lõike liikumist. Lõike rotatoorse liikumisega oma raskuskeskme ümber ei tule arvestada, sest vastavad inertsmomendid võrreldes lõike massiga on kõrgemat järku väikesed suurused.

Olgu lõike raskuskeskme koordinaadid:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Lõike kineetiline energia (arvestamata kõrgemat järku lõpmatult väikeste suurustega) lõike massi ühiku kohta on

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Seega lõike raskuskeskme liikumise differentsiaalvõrrandid Lagrenge'i kujul on:

$$\mathcal{F}_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$\mathcal{F}_\theta = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

kus $\mathcal{F}_\theta$ (moment) ja $\mathcal{F}_r$ on üldistatud tungid, arvutatud lõike massi ühiku kohta.

Neist võrrandeist saame, et osatuletised

$$\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \ddot{\theta}} \qquad \frac{\partial \mathcal{F}_\theta}{\partial \ddot{r}} \qquad \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \theta}$$

on nullid. Sellest järeldub, et Helmholtzi vastastikkuse lausetele vastavaid seoseid tungide, kiirenduste ja koordinaatide vahel vaadeldaval juhul ei ole.

Ülaltoodud Lagrange'i võrrandeist saame, et

$$\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial \mathcal{F}_\theta}{\partial \dot{r}} = 0$$

Siin esinev $\mathcal{F}_r$ on keele (võlli, varda) lõike raskus-keskme kohavektori suunaline tung. Tema ja nurkkiiruse $\dot{\theta}$ hetkeliste muutude suhe on absoluutväärtuselt võrdne ja märgilt vastupidine momendi $\mathcal{F}_\theta$ ja piki lõike raskus-keskme kohavektorit suunatud kiiruse $\dot{r}$ hetkeliste muutude suhtega, kui eeldada, et muutuvad ainult suurused $\mathcal{F}_r, \mathcal{F}_\theta, \dot{\theta}$ ja $\dot{r}$.

Helmholtzi vastastikkuse lausete jaoks defineeritakse tungide avaldised liikumise differentsiaalvõrrandite põhjal. Käsiteldav näide võimaldab kergesti näidata, kuivõrd oluline on tungide avaldiste valik.

Olgu tala (keel, võll, varras) koormatud tungidega, mis on teineteisega paralleelsed ja risti tala (keele, võlli, varda) teljega tasakaaluasendis, milles see telg on sirge. Põhjustagu nad tala tasapinnalist liikumist. Olgu tala koormise intensiivsus tähistatud $q(x)$, kus x on kaugus tala otspunktist A , mõõdetud mööda tala telge tasakaaluasendis. Koordinaat r tähendagu tala ristlõike raskuskeskme kaugust punktist A . Nurk selle kauguslõigu sihi ja tala telje vahel tasakaaluasendis on siis nurk θ . Tala elemendile pikkusega ds rakendatud tungi projektsioon kauguslõigu r sihile on

$$q(x)ds\cdot\cos\theta + c_1(x,y)ds$$

ja risti selle sihiga

$$q(x)ds\cdot\sin\theta + c_2(x,y)ds,$$

kus funktsioonid $c_1(x,y)$ ja $c_2(x,y)$ arvestavad elastsetest pingetest tekkinud tunge. Üldistatud tungid, arvutatud tala elemendi pikkusühiku kohta, on:

$$F'_\theta = r\sin\theta\, q(x) + r c_2(x,y)$$
$$F'_r = \cos\theta\cdot q(x) + c_1(x,y)$$

Need tungid on avaldatud <u>ainult</u> koordinaatide funktsioonidena. Ülaltoodud Lagrange'i võrrandeist järeldub, et nad peavad olema avaldatavad <u>koordinaatide, kiiruste ja kiirenduste</u> funktsioonidena. Seepärast viimaseid avaldisi Helmholtzi vastastikkuse lausete saamiseks tungide F'_r ja F'_θ kohta ei saa kasutada.

§ 15. Kokkuvõte.

Nägime, et Helmholtzi vastastikkuse laused liikuvale mehaanilisele süsteemile rakendatud tungide kohta kehtivad alati. Nende lausete puhul vaadeldakse koordi - naate, kiirusi ja kiirendusi teineteisest sõltumatute muutujatena ja tunge nende funktsioonidena. Koordinaadile q_κ vastav üldistatud tung tuleb võtta Lagrange'i võrrandite järgi kujul

$$F_\kappa = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\kappa} - \frac{\partial L}{\partial q_\kappa}$$

kus L on mehaanilise süsteemi kineetiline energia ja koordinaadid $q_1, q_2, q_3, \dots, q_j$ on sõltumatud parameetrid, millega määratakse süsteemi asend ja konfiguratsioon. Tungide avaldiste teissuguse valiku juhul võime tulle vastuoludele. See tähendab, et lugedes koordinaate, kiiren - dusi ja kiirusi teineteisest sõltumatuteks muutujateks võime vaadelda tungi F_κ avaldisena ainult avaldist

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\kappa} - \frac{\partial L}{\partial q_\kappa}.$$

Nägime, et Helmholtzi vastastikkuse laused tungide kohta pole laused, mis iseloomustavad ainult seostega mehaanilise süsteemi liikumist, vaid need laused võivad iseloomustada ka süsteemi liikumist, milles seoseid pole. Nende lausete sisu oleneb paratamatult koordinaadistiku valikust.

Töös selgub, et eeldus

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot q_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot q_\alpha} = const$$

Helmholtzi vastastikkuse lause

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial i_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial i_\alpha} = 0$$

jaoks on täidetud, kuid süsteemile on rakendatud ainult potentsiaalsed tungid. Kui lisaks sellele mingil hetkel veel ka kõik kiirused on nullid, siis

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{i}_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{i}_\alpha} = 0$$

ja võrdusel

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \dot{i}_\beta} + \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{i}_\alpha} = 0,$$

mis väljandab üht Helmholtzi vastastikkuse lauset, kaob mõte.

Töös käsiteldi veel vastastikkuse seadust, mille avastas ja tõestas esimesena Helmholtz, kasutades selleks mõningaid avaldisi, mida sai esimesena Hamilton.

§ 16. Kasutatud kirjandus.

1. H.Helmholtz. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd.1oo.1887.S.137-163,213-223.

2. H.Helmholtz. Vorlesungen über die mathematischen Prinzipien der Akustik. Leipzig,J.A.Barth, 1898.§§ 28,54.

3. Т.Карман и М.Био. Математические методы в инженерном деле. Гостехиздат. I946.

4. В.В.Фурдуев. Теоремы взаимности. Гостехиздат. I948.

5. C.G.J.Jacobi. Vorlesungen über Dynamik. Berlin.G.Reimer.1866.

6. W.Ostwald. Grosse Männer. Leipzig.Akademisch Verlagsgesellschaft.1909.

7. L.Koenigsberger. Hermann von Helmholtz. Braunschweig. Friedrich Vieweg und Sohn.1902.

14. mai 1954
N. Ismit.

Leenhard Rägo
14. mai 1954.