TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Mailis Rannaveer

Barjääriga optsiooni hinna leidmine bino-trinoommeetodi abil

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: dotsent Toomas Raus

Autor: .... "....." juuni 2014

Juhendaja: .... "....." juuni 2014

Lubada kaitsmisele

Professor .... "....." juuni 2014

TARTU 2014

Barjääriga optsiooni hinna leidmine bino-trinoommeetodi abil

Bakalaureusetöö

Mailis Rannaveer

Lühikokkuvõte. Optsioon on võimalus osta või müüa alusvara kindlal ajahetkel tulevikus kindlaks määratud hinnaga. Optsiooni õige hinna määramine on optsioonide teooria üks tähtsamaid probleeme. Käesolevas töös vaadeldakse bino-trinoommeetodit barjääriga optsiooni hinna leidmiseks. Bino-trinoommeetod on binoom- ja trinoommeetodi kombinatsioon, mis võimaldab alusvara hinnapuu konstrueerida selliselt, et barjäär või barjäärid läbivad hinnapuu tippe. Töös on toodud ka programm bino-trinoommeetodi abil ühe barjääriga optsiooni hinna leidmiseks.

Märksõnad. Barjääriga optsioon, bino-trinoommeetod, Euroopa optsioon, optsioonide hindamine.

Pricing barrier options with bino-trinomial method

Bachelor‘s Thesis

Mailis Rannaveer

Abstract. Option is an opportunity to buy or sell the underlying asset at a given time in the future with fixed price. Determining the correct value of an option is the main problem in options theory. In this thesis we consider bino-trinomial method to price the barrier option. The bino-trinomial method is a combination of binomial and trinomial method which allows to construct underlying asset's price tree so that barrier or barriers go through the price tree's nodes. This thesis contains a program to price a barrier option with bino-trinomial method.

Key words. Barrier option, bino-trinomial method, European option, option pricing.

Sisukord

Sissejuhatus

Optsioon on võimalus osta või müüa alusvara kindlal ajahetkel tulevikus kindlaks määratud hinnaga. Optsiooni õige hinna määramine on optsioonide teooria üks tähtsamaid probleeme. Euroopa optsiooni saab realiseerida vaid mingil kindlaks määratud kuupäeval tulevikus fikseeritud hinnaga. Tavalise Euroopa optsiooni hinna saab leida Black–Scholesi diferentsiaalvõrrandi lahendina, kuid keerulisemate optsioonide korral tuleb kasutada erinevaid numbrilisi meetodeid. Käesolevas töös vaadeldakse barjääriga optsiooni hinna leidmist. Barjääriga optsioonid erinevad tavalistest optsioonidest selle poolest, et optsioon hakkab kehtima või muutub tähtsusetuks, kui alusvara hind ületab eelnevalt kindlaksmääratud hinnabarjääri. Töö eesmärgiks on tutvustada bino-trinoommeetodit barjääriga optsiooni hindamiseks.

Töö esimeses alapeatükis seletame optsioonidega seotud mõisteid ja käsitleme optsiooni hinda mõjutavaid tegureid. Alapeatükkides 1.2 ja 1.3 toome ära eeldused aktsia hinna liikumisele ja esitame Black–Scholesi diferentsiaalvõrrandi Euroopa optsiooni hinna leidmiseks. Alapeatükis 1.4 vaatleme binoom- ja trinoommeetodeid optsiooni hinna leidmiseks. Neid meetodeid kasutatakse hiljem bino-trinoommeetodi korral barjääriga optsiooni hindamisel.

Töö teises peatükis vaadeldakse barjääriga optsioone ning bino-trinoommeetodit. Esimeses alapeatükis vaatleme barjääriga optsioonide liigitust ja nende maksefunktsioone. Barjääriga optsiooni korral võib ette anda alumise barjääri, ülemise barjääri või mõlemad. Alapeatükkides 2.2 ja 2.3 vaatleme alusvara hinnapuu konstrueerimist bino-trinoommeetodi korral vastavalt kahe barjääriga ja ühe barjääriga optsiooni korral. Bino-trinoommeetod kombineerib endas binoom- ja trinoommeetodi, kusjuures esimesel ajaperioodil moodustatakse hinnapuu nagu trinoommeetodi korral ja järgnevatel ajaperioodidel vastavalt binoommeetodile. Sealjuures konstrueeritakse hinnapuu selliselt, et barjäär(id) läbiksid hinnapuu tippe. Alapeatükis 2.4 vaadeldakse, kuidas bino-trinoommeetodi korral leida optsiooni hind. Töö viimases alapeatükis toome välja numbriliste eksperimentide tulemused barjääriga optsiooni hinna leidmisel bino-trinoommeetodiga. Programmid numbriliste eksperimentide jaoks on koostatud programmeerimiskeele Python abil ning on toodud lisades.

1 Optsioon. Optsiooni hindamine

Selles peatükis esitame mõned optsioonidega seotud mõisted, mida me vajame töö järgmises osas. Käesoleva osa kirjutamisel on kasutatud materjale [1], [2].

1.1 Optsiooniga seotud mõisted

Tuletisväärtpaber ehk derivatiiv on finantsinstrument, mille väärtus tuleneb mingist teisest varast, mida edaspidi nimetame alusvaraks. Enamlevinud alusvaraks on aktsiad, kuid alusvaraks võivad olla ka valuuta, metallid, põllumajandussaadused ja muu.

Kõige enam levinud derivatiiviks on optsioonid. Optsioon on kahepoolne kokkulepe mingi kindla alusvara kauplemise kohta kindlaksmääratud ajahetkel tulevikus. Üks osapooltest on optsiooni väljaandja ja teine osapool on optsiooni ostja. Optsiooni väljaandjaks on enamasti pangad, kes määravad optsiooni tingimused ja panevad selle müüki. Optsiooni ostjast saab optsiooni omanik ja ta omandab optsiooni ostes võimaluse osta või müüa kokkulepitud alusvara tulevikus kindla hinna eest. Optsiooni hinnaks V nimetame summat, mis optsiooni ostja peab optsiooni väljaandjale maksma.

Optsiooni eluaeg on periood optsiooni väljastamisest optsiooni täitmispäevani T. Täitmispäev on mingi kindlaks määratud kuupäev tulevikus, millal optsiooni ostja saab optsioonist tulenevat õigust rakendada. Kui täitmispäev on möödunud, kaotab optsioon väärtuse.

Optsioone on kahte tüüpi: ostu- ja müügioptsioonid. Ostuoptsioon (*Call option*) annab omanikule võimaluse tulevikus osta kokkulepitud vara kokkulepitud hinnaga, müügioptsioon (*Put option*) aga müüa.

Eelnevalt kokkulepitud hinda, millega optsiooni omanikul on õigus alusvara osta või müüa, nimetatakse täitmishinnaks ja edaspidi tähistame seda tähega E.

Optsiooni realiseerimispäevaks nimetatakse päeva optsiooni eluajal, mil optsioonist tulenevaid õigusi kasutatakse. Realiseerimispäeva järgi jagunevad optsioonid Euroopa ja Ameerika optsioonideks. Euroopa optsiooni saab realiseerida vaid täitmispäeval, Ameerika optsiooni saab realiseerida mistahes ajal kuni optsiooni täitmispäevani. Euroopa optsiooni omanik saab ostuoptsiooni korral realiseerimispäeval tulu

$$C\big(S(T)\big) = \max\{S(T) - E, 0\}$$

ning müügioptsiooni korral avaldub tulu valemiga

$$P\big(S(T)\big) = \max\{E - S(T), 0\}.$$

Seega ostuoptsiooni korral, mida kõrgem on alusvara hind realiseerimispäeval, seda suurem on optsioonist saadav tulu. Müügioptsiooni korral on tulu seda suurem, mida väiksem on alusvara hind realiseerimispäeval.

Optsiooni hinda V mõjutavad järgmised tegurid.

- Kehtiv alusvara alghind S, mis kehtib hetkel, kui optsioon ostetakse. See on tähtsaim tegur, mis optsiooni hinda mõjutab. Ostuoptsiooni hind on seda suurem, mida suurem on alusvara hind optsiooni ostmise hetkel. Müügioptsiooni hind on aga seda suurem, mida madalam on optsiooni hind optsiooni ostmise hetkel.
- Optsiooni täitmishind E. Vastupidiselt alusvara hinnale, tõuseb ostuoptsiooni täitmishind, kui alusvara alghind langeb, ja väheneb, kui alghind kasvab. Müügioptsiooni korral kehtib vastupidine seos: müügioptsiooni täitmishind tõuseb alusvara hinna kasvades ja langeb, kui alghind väheneb.
- Täitmisaeg T ehk optsiooni eluiga. Mida kaugemal on täitmisaeg, seda suurem on optsiooni hind, sest seda pikem on periood, mil alusvara hind saab muutuda omanikule sobivas suunas.
- Riskivaba intressimäär r. Ostuoptsiooni hind on seda väiksem, mida suurem on riskivaba intressimäär. Müügioptsiooni korral on hind seda madalam, mida suurem on riskivaba intressimäär.
- Alusvara hinna volatiilsus σ. See iseloomustab alusvara hinna varieeruvust. Mida suurem on alusvara volatiilsus, seda suurem on optsiooni hind.
- Oodatavate dividendide maksmine alusvaralt. Suurem dividendide makse kahandab ostuoptsioonide väärtust, kuna alusvara kaotab dividendimaksega väärtust, aga optsiooni omanikule ei maksta dividende. Müügioptsiooni korral on vastupidi.

1.2 Eeldused alusvara hinna käitumise kohta

Finantsturgude uurimisel eeldatakse, et aktsiate hinnad liiguvad juhuslikult efektiivse turu hüpoteesi kohaselt. Efektiivse turu hüpoteesi kohaselt kehtib järgnev.

- Minevik kajastab täielikult käesolevat hinda, aga ei hõlma endas edasist informatsiooni. Alusvara hinna ajalugu kajastub täielikult alusvara hetkehinnas.
- Turud reageerivad koheselt igasugusele uuele informatsioonile alusvara hinna kohta.

Aktsiate hindade empiiriline uurimine on näidanud, et aktsia hinna käitumist saab kirjeldada järgmise võrrandiga

$$\ln S(\tau) = \ln S(\tau - 1) + \mu + \varepsilon_\tau, \tag{1.1}$$

kus $\tau = t + 1, t + 2, \ldots, t$. Suurus μ on konstant ning iseloomustab aktsia keskmist tulusust. Suurused ε_τ on sõltumatud ühesuguse normaaljaotusega juhuslikud suurused: $\varepsilon_\tau \sim N(0, \sigma^2)$. See tähendab, et $\mathcal{E}(\varepsilon_\tau) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_\tau) = \sigma^2$ ning $\mathrm{corr}(\varepsilon_\tau, \varepsilon_s) = 0$, kui $\tau \neq s$. Siin $\mathcal{E}$ on keskväärtus ja Var on dispersioon. Valemit (1.1) rekursiivselt kasutades saame, et

$$\ln S\big(t'\big) = \ln S\big(t' - 1\big) + \mu + \varepsilon_{t'} = \ln S\big(t' - 2\big) + \mu + \varepsilon_{t'-1} + \mu + \varepsilon_{t'} = \ldots =$$
$$=$$
$$ln\, S(t) + \big(t' - t\big)\mu + \sum_{\tau=t+1}^{t'} \varepsilon_\tau$$

ehk

$$\ln\,\big(S(t')/S(t)\big) = \big(t' - t\big)\mu + \eta_{t'}, \tag{1.2}$$

kus $\eta_{t'} = \sum_{\tau=t+1}^{t'} \varepsilon_\tau$. Juhuslik suurus $\eta_{t'}$ on normaaljaotusega ning tema keskväärtus on 0, kuna

$$\mathcal{E}\big(\eta_{t'}\big) = \mathcal{E}\left(\sum_{\tau=t+1}^{t'} \varepsilon_\tau\right) = \sum_{\tau=t+1}^{t'} \mathcal{E}(\varepsilon_\tau) = 0$$

ning dispersioon

$$\mathrm{Var}(\eta_{t'}) = \mathrm{Var}\left(\sum_{\tau=t+1}^{t'} \varepsilon_\tau\right) = \sum_{\tau=t+1}^{t'} \mathrm{Var}(\varepsilon_\tau) = \big(t' - t\big)\sigma^2,$$

kuna suurused ε_τ on sõltumatud juhuslikud suurused. Võttes nüüd $t' = t + \Delta t$, kus Δt on piisavalt väike ajaperiood, saame

$$\ln\,\big(S(t + \Delta t)/S(t)\big) = \ln\left(1 + \frac{\Delta S(t)}{S(t)}\right) \approx \frac{\Delta S(t)}{S(t)}$$

ning valemi (1.2) põhjal

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} \approx \mu \Delta t + \eta_t, \tag{1.3}$$

kus $\eta_t \sim N(0, \sigma^2 \Delta t)$. Minnes piirile $\Delta t \to 0$ saadakse seosest (1.3) aktsiahinna käitumist kirjeldav stohhastiline diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dX.$$

Näeme, et aktsia hinna tulusus dS/S on esitatav kahe liidetava summana. Suurus μdt kirjeldab ennustatavat tulu ning suurus μ on aktsia tulususe keskmine kasv. Teine liidetav on juhuslik suurus ning see kirjeldab alusvara hinnamuutusi, mis on tingitud mingitest ootamatutest uudistest, mis mõjutavad alusvara hinda. Teises liidetavas suurust σ nimetatakse aktsia hinna volatiilsuseks ja ta iseloomustab aktsia hinna tulususe standardhälvet.

Suurust dX nimetatakse Wieneri protsessiks. Wieneri protsess on järgmiste omadustega juhuslik protsess:

- dX on normaaljaotusega juhuslik suurus,
- dX keskväärtus on 0 ehk $\mathcal{E}(dX) = 0$,
- dX dispersioon on dt ehk $\mathrm{Var}(dX) = dt$.

Kui võtame volatiilsuse $\sigma = 0$, saame

$$\frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Kui μ on konstant, siis lahendades viimase diferentsiaalvõrrandi, saame alusvara hinna jaoks seose

$$S(t) = S_0 e^{\mu(t-t_0)}, \tag{1.4}$$

kus S_0 on vara hind hetkel $t = t_0$. Seega, kui $\sigma = 0$, siis vara hind on täielikult määratud seosega (1.4) ja alusvara hind on tulevikus üheselt määratud.

1.3 Black–Scholesi valem

Selles punktis esitame Black–Scholesi diferentsiaalvõrrandi lihtsaima optsiooni, Euroopa optsiooni, hinna leidmiseks. Black–Scholesi diferentsiaalvõrrandi tuletamisel tehakse järgmised eeldused:

- Vara hind järgib lognormaalset juhuslikku ekslemist, mida vaatlesime punktis 1.2.
- Riskivaba intressimäär r ja vara volatiilsus σ on ajast sõltuvad funktsioonid, mis on optsiooni väljastamisel teada kogu optsiooni eluea ajaks.

- Aktsia ostu-müügiga seotud tehingukulud puuduvad.
- Alusvara eest ei maksta dividende terve optsiooni eluea jooksul.
- Alusvaraga kauplemisel puudub arbitraaži võimalus. See tähendab, et alusvaraga kaubeldes ei ole võimalik teenida riskivabalt suuremat tulu raha riskivabal paigutamisel panka või ostes valitsuse võlakirju.
- Alusvaraga kauplemine toimub pidevalt.
- Alusvara lühikeseks müümine on lubatud ja alusvara on osadeks jagatav. Alusvara jagatavus tähendab, et meil on võimalik osta või müüa suvalist reaalarvulist kogust alusvara. Lühikeseks müümine tähendab, et me saame müüa aktsiaid, mille omanikuks me pole. Seega lühikeseks müümise korral saame müüa eelnevalt laenatud aktsiaid.

Nendel eeldustel tuletasid F. Black ja M. Scholes osatuletistega diferentsiaalvõrrandi optsiooni hinna leidmiseks:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

mida tuntakse Black–Scholesi võrrandina. Võrrandis $V = V(S,t)$ on optsiooni hind, $S = S(t)$ on alusvara hind, $\sigma = \sigma(t)$ volatiilsus ja $r = r(t)$ riskivaba intressimäär.

Sellisel osatuletistega diferentsiaalvõrrandil leidub lõpmata palju lahendeid. Ühese lahendi leidmiseks tuleb ette anda täiendavad rajatingimused. Rajatingimuste ette andmisel paneme tähele, et optsiooni hind täitmispäeval T on võrdne optsiooni omaniku poolt teenitava tuluga optsiooni realiseerimisel. Seega Euroopa ostuoptsiooni korral

$$V_C(S,T) = \max\{S - E, 0\} \tag{1.5}$$

ning müügioptsiooni korral

$$V_P(S,T) = \max\{E - S, 0\}. \tag{1.6}$$

Samuti teame, et kui $S(0) = 0$, siis ka $S(t) = 0$, $t > 0$ ning ostuoptsiooni hind suvalisel ajahetkel on null:

$$V_C(0,t) = 0. \tag{1.7}$$

Kui aga $S \to \infty$, siis optsiooni hind on ligikaudselt võrdne alusvara hinnaga

$$V_C(S,t) \sim S. \tag{1.8}$$

Tingimustel (1.5), (1.7), (1.8) on Black–Scholesi diferentsiaalvõrrandil ühene lahend Euroopa ostuoptsiooni korral. Vaatame nüüd müügioptsiooni. Kui $S(0) = 0$, siis optsiooni omaniku poolt teenitav tulu on võrdne täitmishinnaga E ning optsiooni hind ajahetkel t on võrdne suuruse E diskonteeritud väärtusega

$$V_P(0,t) = Ee^{-r(T-t)}. \tag{1.9}$$

Kui aga $S \to \infty$, siis

$$V_P(S,t) \to 0. \tag{1.10}$$

Tingimustel (1.6), (1.9), (1.10) on Black–Scholesi võrrandil ühene lahend müügioptsiooni korral.

Kui intressimäär ja volatiilsus on konstantsed või ajast sõltuvad funktsioonid, siis saab tavalise Euroopa optsiooni hinna Black–Scholesi võrrandi põhjal leida analüütiliselt. Sellisel juhul kehtib Euroopa ostuoptsiooni korral:

$$V_C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{1.11}$$

ning müügioptsiooni korral

$$V_P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1), \tag{1.12}$$

kus $N(x)$ on normaaljaotuse $N(0,1)$ tihedusfunktsioon kujul

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

ja suurused d_1 ja d_2 avalduvad kujul

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Keerulisemate optsiooni tüüpide või stohhastilise volatiilsuse korral ei ole optsiooni hind analüütiliselt leitav. Järgmises alapeatükis vaatleme binoom- ja trinoommeetodit optsiooni hinna leidmiseks, mis võimaldavad optsiooni hinda leida üldisematel tingimustel. Neid meetodeid on võimalik kasutada ka eksootiliste optsioonide hinna leidmiseks.

1.4 Binoom- ja trinoommeetod

1.4.1 Binoommeetod

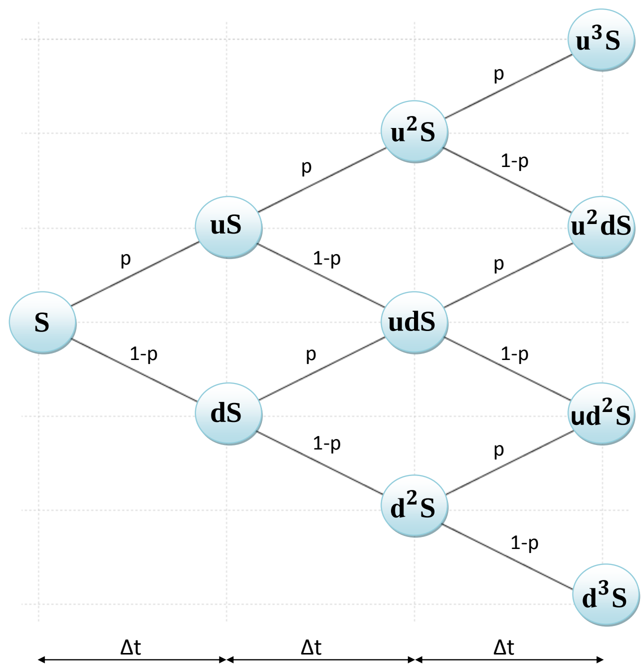
Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [1], [2]. Binoommeetodi töötasid välja Cox, Ross ja Rubinstein 1979. aastal. Esitame binoommeetodi idee Euroopa tüüpi optsiooni hinna leidmiseks.

Jagame optsiooni eluea $[0, T]$ M võrdseks osaks. Tähistame $\Delta t = T/M$ ning vaatleme alusvara hinda ajahetkedel $m\Delta t$, kus $m = 0, 1, \ldots, M$. Olgu alusvara hind ajahetkel $m\Delta t$ võrdne suurusega S_m. Siis binoommeetodi korral eeldame, et ajahetkel $(m+1)\Delta t$ saab alusvara hind omada vaid kahte erinevat väärtust: alusvara hind saab olla kas uS_m või dS_m, kus $u > 1$ ning $0 < d < 1$. Seega, kui alusvara hind on uS_m, siis hind liigub üles, kui dS_m, siis hind liigub alla.

Olgu ülesliikumise tõenäosus p, siis allaliikumise tõenäosus on vastavalt $1 - p$. Seega,

$$S_{m+1} := \begin{cases} uS_m & \text{tõenäosusega } p; \\ dS_m & \text{tõenäosusega } 1 - p. \end{cases}$$

Eeldame, et konstandid u ja d on kõigil ajahetkedel samad. Nüüd võime üles ehitada hinnapuu võimalike vara hindadega.



Joonis 1: Binoommeetodi hinnapuu

Olgu ajahetkel $t = 0$ alusvara hind S_0. Esimesel ajahetkel Δt on kaks võimalikku vara hinda, nagu eelnevalt mainitud. Nendeks on uS_0 ja dS_0. Teisel ajahetkel $2\Delta t$ on kolm võimalikku vara hinda u^2S_0, udS_0 ja d^2S_0. Kolmandal ajahetkel $3\Delta t$ on seega neli võimalikku vara hinda u^3S_0, u^2dS_0, ud^2S_0 ja d^3S_0. Üldisemalt saame, et ajahetkel $m\Delta t$ saab alusvara hind omada $m + 1$ erinevat väärtust:

$$S_m = d^{m-n}u^nS_0, \quad n = 0, 1, \ldots, m.$$

Vaatleme nüüd, kuidas leida binoommudeli parameetrid u, d ja p. Selleks eeldame, et alusvara hind käitub lognormaalse jaotusega juhusliku ekslemisena. Samuti eeldame, et kõik investorid on riskineutraalsed. Riskineutraalsete investorite jaoks on juhusliku rahavoo väärtus võrdne selle juhusliku rahavoo keskväärtusega. Vaatleme ajaperioodi $\big[m\Delta t, (m+1)\Delta t\big]$. Arbitraaživabas mudelis peab riskineutraalsete investorite jaoks kehtima võrdus

$$S_m e^{r\Delta t} = \mathcal{E}[S_{m+1}] = S_m\big(pu + (1-p)d\big). \tag{1.13}$$

Alusvara hinna dispersioon on võrdeline ajaga: $\mathrm{Var}(S_{m+1}) = S_m^2\sigma^2\Delta t$. Saame

$$\begin{aligned} S_m^2\sigma^2\Delta t &= \mathrm{Var}(S_{m+1}) = \mathcal{E}[(S_{m+1})^2] - (\mathcal{E}[S_{m+1}])^2 \\ &= S_m^2\Big(pu^2 + (1-p)d^2 - \big(pu + (1-p)d\big)^2\Big), \end{aligned} \tag{1.14}$$

kus σ on volatiilsus. Võrrandist (1.13) saame, et $pu + (1-p)d = e^{r\Delta t}$. Võrrandit (1.14) kasutades saame

$$S_m^2\sigma^2\Delta t = S_m^2\Big(pu^2 + (1-p)d^2 - \big(pu + (1-p)d\big)^2\Big) = S_m^2\big(pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\delta t}\big).$$

Seega oleme saanud kaks võrrandit suuruste p, u ja d leidmiseks.

$$\begin{aligned} pu + (1-p)d &= e^{rdt}, \\ pu^2 + (1-p)d^2 &= \sigma^2\Delta t + e^{2r\Delta t}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Selleks et üheselt määrata suurusi p, d, u, tuleb ette anda täiendav tingimus. Sageli kasutatakse lisatingimusena

$$u = \frac{1}{d}. \tag{1.16}$$

Kasutades eelnevat tingimust, saame vara hinnad välja kirjutada u kaudu: esimesel ajahetkel uS_0 ja $dS_0 = S_0/u$. Teisel u^2S_0, $udS_0 = duS_0 = S_0$ ja $d^2S_0 = S_0/u^2$, kolmandal u^3S_0, $u^2dS_0 = uS_0$, $ud^2S_0 = S_0/u$ ja $d^3S_0 = S_0/u^3$. Seega m- ndal ajahetkel on vara hindadeks

$$d^{m-n}u^nS_0 = u^{2n-m}S_0, \quad n = 0, 1, \ldots, m.$$

Võrrandist (1.15) saame

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Nüüd saab esitada

$$\begin{aligned} pu^2 + (1-p)d^2 - \big(pu + (1-p)d\big)^2 &= pu^2 + (1-p)d^2 + (1-p) - 1 + p - e^{2r\Delta t} \\ = u\big(pu + (1-p)d\big) + \frac{pu + (1-p)d}{u} - 1 - e^{2r\Delta t} &= e^{r\Delta t}(u + u^{-1}) - 1 - e^{2r\Delta t} \end{aligned}$$

ja seega saame (1.15) põhjal võrrandi

$$e^{r\Delta t}(u + u^{-1}) - 1 - e^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t, \tag{1.17}$$

mille ligikaudseks lahendiks täpsusega $o(\Delta t)$ on $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Näitame seda, kasutades Taylori valemit. Taylori valemi põhjal saame

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} &= 1 + r\Delta t + o(\Delta t), \\ u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} &= 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2} + o(\Delta t), \\ u^{-1} = d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} &= 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2} + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Kasutades viimaseid võrdusi, saame

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t}(u + u^{-1}) - 1 - e^{2r\Delta t} &= \big(1 + r\Delta t + o(\Delta t)\big)\big(2 + \sigma^2\Delta t + o(\Delta t)\big) - 1 - 1 - \\ -2r\Delta t - o(\Delta t) &= \sigma^2\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \tag{1.18}$$

ning seega, võrrandi (1.17) ligikaudseks lahendiks täpsusega $o(\Delta t)$ on tõepoolest $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Kokkuvõttes oleme saanud parameetrite u, d ja p väärtused:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{1.19}$$

Eeldame, et optsiooni maksefunktsioon on teada ja et see sõltub ainult alusvara väärtustest täitmishetkel. See võimaldab arvutada välja optsiooni hinna realiseerimisajal, ajahetkel $M\Delta t$. Kui vaatleme ostuoptsiooni, siis võimalikud väärtused saame arvutada, kasutades valemit

$$V^C_{M,j} = \max\{S_{M,j} - E, 0\}, \quad j = 0, 1, \ldots, M,$$

kus $V^C_{M,j}, \quad j = 0, 1, \ldots, M$ tähistab ostuoptsiooni hinda ajahetkel $M\Delta t$ ja alusvara hinna $S_{M,j}$ korral. Müügioptsiooni korral saab võimalikud väärtused välja arvutada, kasutades valemit

$$V^p_{M,j} = \max\{E - S_{M,j}, 0\}, \quad j = 0, 1, \ldots, M.$$

Nüüd, kui meil on teada optsiooni hinnad ajahetkel $M\Delta t$, saame arvutada optsiooni hinnad ajahetkel $(M-1)\Delta t$:

$$V_{M-1,j} = e^{-r\Delta t}\big(pV_{M,j+1} + (1-p)V_{M,j}\big), \quad j = 0, 1, \ldots, M-1.$$

Teades optsiooni hindu ajahetkel $(M-1)\Delta t$, saame leida optsiooni hinnad ajahetkel $(M-2)\Delta t$ ja nii jätkates saame leida optsiooni hinna $V_{0,0}$ ajahetkel $t = 0$. Seega saame optsiooni hinna hetkel $t = 0$ leida ajas tagant ettepoole liikudes valemiga

$$V_{m,j} = e^{-r\Delta t}\big(pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j}\big), \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

kus $0 \leq j \leq m < M$.

Optsiooni hinna hetkel $t = 0$ saame leida ka, kasutades kombinatoorika valemeid. Kui optsiooni eluiga on jagatud M võrdseks osaks $\Delta t = T/M$, siis ajahetkel $t = T$ saab alusvara hind omada vaid väärtusi $S(T,j) = S_0 u^{M-j} d^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, M$. Väärtuseni $S(T,j)$ jõuame, kui ükskõik millisel $M-j$ perioodil liikuda binoompuul üles ja ülejäänud j perioodil alla. Selliseid erinevaid hinnaliikumise teid ehk stsenaariume on kokku $C^j_M = \frac{M!}{j!(M-j)!}$ ning iga sellise stsenaariumi tõenäosus on $p^{M-j}(1-p)^j$. Seega tõenäosusega $C^j_M p^{M-j}(1-p)^j$ on alusvara hind perioodi M lõpus $S(T,j) = S_0 u^{M-j} d^j$, $0 \leq j \leq M$. Optsiooni hinna hetkel $t = 0$ saame nüüd leida vastavalt valemile

$$V_0 = e^{-rT}\mathcal{E}[X(S,T)], \tag{1.20}$$

kus $X(S,T)$ on optsiooniga seotud väljamakse ajahetkel $t = T$, kui alusvara hind on S. Euroopa tüüpi ostuoptsiooni korral on väljamakse $C(S,T) = \max\{S(T) - E, 0\}$ ning seega

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT}\sum_{j=0}^{M} C^j_M p^{M-j}(1-p)^j X\big(S(T,j),T\big) \\ &= e^{-rT}\sum_{j=0}^{M} C^j_M p^{M-j}(1-p)^j \max\{S_0 u^{M-j} d^j - E, 0\}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Paneme tähele, et suurused $C_j := C^j_M p^{M-j}(1-p)^j$ ja $D_j := S_0 u^{M-j} d^j$ saame arvutada rekursiivselt vastavalt valemitele $C_j = C_{j-1}\frac{(1-p)(M-j+1)}{pj}$, $D_j = D_{j-1}\frac{d}{u}$, kus $C_0 = p^M$, $D_0 = S_0 u^M$. Seega $V_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{M} C_j \max\{D_j - E, 0\}$ ning kokku läheb optsiooni hinna leidmiseks vaja suurusjärgus M tehet.

1.4.2 Trinoommeetod

Trinoommeetod erineb binoommeetodist selle poolest, et alusvara hind saab omada kolme erinevat väärtust. Olgu ajahetkel $m\Delta t$ vara hinnaks S_m. Erinevalt binoommeetodist võib vara hind ajahetkel $(m+1)\Delta t$ olla üks neist kolmest: uS, qS või dS, kusjuures eeldame, et $0 < d < q < u$. Tõenäosus, et vara hinnaks hetkel $(m+1)\Delta t$ on uS_m, on p_u, hinna qS_m korral on tõenäosus p_q ja hinna dS_m korral vastavalt p_d. Seejuures peab kehtima

$$p_u + p_q + p_d = 1, \quad 0 < p_u < 1, \quad 0 < p_q < 1, \quad 0 < p_d < 1. \tag{1.22}$$

Analoogiliselt binoommeetodiga saab tuletada võrrandid suuruste p_u, p_q, p_d, u, d ja q leidmiseks. Eeldame riskineutraalset maailma ja alusvara lognormaalset jaotust. Sarnaselt binoommeetodiga peab kehtima

$$p_u u + p_q q + p_d d = e^{r\Delta t} \tag{1.23}$$

ja

$$p_u u^2 + p_q q^2 + p_d d^2 = \sigma^2 \Delta t - e^{2r\Delta t}. \tag{1.24}$$

Saime kolm võrrandit (1.22), (1.23) ja (1.24). Neis on 6 tundmatut. Isegi, kui me eeldaks, et $q = 1$ ja $d = 1/u$, nagu binoommeetodi korral, jääks alles ikka rohkem tundmatuid, kui on võrrandeid. Üheks võimaluseks määrata üheselt trinoommeetodi parameetrid on valida need nii, et trinoommeetodi üks samm oleks võrdne binoommeetodi kahe sammuga. Paneme tähele, et binoommeetodi korral on pärast kahte ajahetke võimalikeks vara hindadeks $u^2 S_0$ tõenäosusega p^2, S_0 tõenäosusega $2p(1-p)$ ja S/u^2 tõenäosusega $(1-p)^2$. Asendame Δt suurusega $\Delta t/2$ ja võtame trinoommeetodi parameetriteks

$$u = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t/2}}, \quad q = 1, \quad d = e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t/2}}$$

ning tõenäosusteks p_u, p_q ja p_d võtame

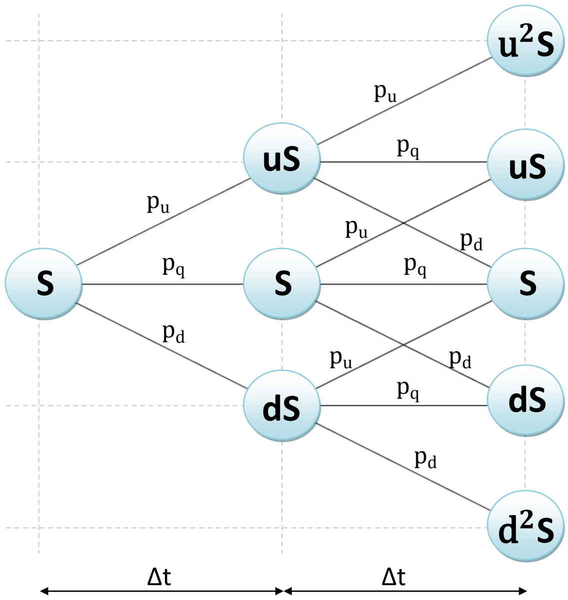
$$p_u = p^2, \quad p_q = 2p(1-p), \quad p_d = (1-p)^2,$$

kus

$$p = \frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}.$$

Konstrueerime hinnapuu $q = 1$ korral. Sageli võib kehtida, et $q \neq 1$. Selle kohta me siin joonist ei tee.

On näha, et üks ajasamm trinoommeetodi korral on ekvivalentne kahe ajasam-



Joonis 2: Trinoommeetodi hinnapuu $q = 1$, $ud = 1$ korral

muga binoommeetodi korral. Trinoommeetodit kasutades saame sama täpsuse poole vähema ajaperioodide arvuga. Optsioonide hindamise üksikasjad on trinoommeetodi korral suures osas sarnased binoommeetodiga. Ainus suurem erinevus on, et optsiooni hind ajahetkel $m\Delta t$ sõltub kolmest võimalikust väärtusest ajahetkel $(m+1)\Delta t$ ja ajahetkel $m\Delta t$ on $2m+1$ võimalikku väärtpaberi hinda mitte $m+1$. Valem optsiooni hinna leidmiseks ajahetkel $m\Delta t$, kui on teada optsiooni hinnad ajahetkel $(m+1)\Delta t$, on Euroopa optsiooni korral

$$V_{m,j} = e^{-r\Delta t}(p_u V_{m+1,j+1} + p_q V_{m+1,j} + p_d V_{m+1,j-1}).$$

2 Bino-trinoommeetod barjääriga optsioonide hindamiseks

Lisaks tavalistele optsioonidele, mille korral optsiooniga seotud väljamakse sõltub alusvara hinnast realiseerimispäeval, kasutatakse finantsturgudel ka eksootilisi optsioone, kus optsiooniga seotud väljamakse tingimused on teistsugused. Tuntumad eksootilised optsioonid on Aasia, tagasivaatavad (*lookback*) ning barjääriga optsioonid. Aasia optsioonide korral sõltub väljamakse alusvara keskmisest hinnast optsiooni eluajal, tagasivaatavate optsioonide korral aga alusvara maksimaalsest või minimaalsest hinnast. Käesolevas peatükis vaatleme barjääriga optsioone, mille korral väljamakse sõltub sellest, kas alusvara hind jõuab mingi eelnevalt kokkulepitud hinnabarjäärini või mitte. Eksootiliste optsioonide hindu ei saa leida tavalise Black–Scholesi diferentsiaalvõrrandi abil ning nende hindamiseks kasutatakse erinevaid numbrilisi meetodeid. Käesolevas peatükis vaatleme artiklis [2] välja pakutud bino-trinoommeetodit barjääriga optsioonide hindamiseks.

2.1 Barjääriga optsioonid

Barjääriga optsioonid erinevad tavalistest selle poolest, et optsioon hakkab kehtima või muutub tähtsusetuks, kui vara hind ületab hinnabarjääri, st kui $S = B$ enne eluea lõppu, kus B on optsiooni ostmisel kindlaksmääratud hinnabarjäär. Barjääriga optsiooni korral võib ette anda alumise barjääri $L < S_0$, ülemise barjääri $H > S_0$ või mõlemad. Barjääriga optsioonid jagunevad:

- *Up-and-in* optsiooni saab realiseerida vaid juhul, kui alusvara hind ületab ülemist barjääri.
- *Down-and-in* optsiooni saab vastavalt realiseerida ainult siis, kui alusvara hind langeb allapoole alumist barjääri.
- *Up-and-out* optsioon kaotab kehtivuse, kui barjäärist jõutakse ülespoole enne eluea lõppu.
- *Down-and-out* optsioon kaotab kehtivuse, kui barjäärist jõutakse allapoole enne eluea lõppu.

Barjääriga optsioone saab jagada ka pidevateks ja diskreetseteks. Pidevaks nimetatakse optsiooni siis, kui alusvara hinna jõudmist barjäärini kontrollitakse kogu perioodi vältel. Diskreetse optsiooni korral kontrollitakse barjäärini jõudmist vaid teatud ajahetkedel. Barjääriga optsiooni maksefunktsioon sõltub sellest, kas alusvara hind ületab barjääri või mitte. Pideva *down-and-out* ühe barjääriga Euroopa optsiooni korral on maksefunktsioon kujul

$$X(T) := \begin{cases} \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, & \text{kui } S_{inf} > L, \\ 0, & \text{vastupidisel juhul,} \end{cases} \tag{2.1}$$

kus $S_{inf} = inf_{0 \le t \le T} S_t$, S_T on aktsia hind ajahetkel T ning $\Theta = 1$ ostuoptsiooni korral ja $\Theta = -1$ müügioptsiooni korral. *Up-and-out* optsiooni korral (barjääriks H) on see vastavalt

$$X(T) := \begin{cases} \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, & \text{kui } S_{sup} < H, \\ 0, & \text{vastupidisel juhul,} \end{cases}$$

kus $S_{sup} = sup_{0 \le t \le T} S_t$. Saame vaadelda ka kahe barjääriga (ühe ülemise ja ühe alumise barjääriga) optsioone. Pideva kahe barjääriga optsiooni korral on maksefunktsioon kujul

$$X(T) := \begin{cases} \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, & \text{kui } S_{sup} < H \text{ ja } S_{inf} > L, \\ 0, & \text{vastupidisel juhul.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Down-and-in ja *up-and-in* optsioonide maksefunktsioonid on analoogilised, kuid väljamakse toimub vastupidisel juhul võrreldes *out*- optsioonidega. Näiteks *down-and-in* optsiooni maksefunktsioon on kujul

$$X(T) := \begin{cases} \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, & \text{kui } S_{inf} \le L, \\ 0, & \text{vastupidisel juhul.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Barjääriga optsiooni hind on väiksem või võrdne kui vastava Euroopa tüüpi optsiooni hind, kusjuures samade parameetritega *out*- ja *in*- optsioonide hindade summa on võrdne tavalise Euroopa tüüpi optsiooni hinnaga:

$$\begin{aligned} V_{down-and-out} + V_{down-and-in} &= V, \\ V_{up-and-out} + V_{up-and-in} &= V, \end{aligned} \tag{2.4}$$

kus V on Euroopa tüüpi optsiooni hind. Samuti paneme tähele, et kui võtta alumine barjäär piisavalt väike ja/või ülemine barjäär piisavalt suur, siis *out*-optsiooni hind peab võrduma vastava Euroopa tüüpi optsiooni hinnaga.

Optsioonide hindamisel binoom- ja trinoommeetodiga on probleemiks, et kuigi nende meetodite abil leitud optsiooni hind koondub ajaperioodide kasvades optsiooni tegelikuks hinnaks, siis koondumine võib teatavatel juhtudel olla aeglane ning optsiooni hind võib sõltuvalt ajaperioodide arvust ostsilleeruda. Näiteks tavalise Euroopa optsiooni korral on koondumine aeglane, kui alusvara alghind on ligikaudu võrdne täitmishinnaga. Barjääriga optsiooni korral on koondumine aeglane juhtudel, kui barjäär või barjäärid asuvad hinnapuu tippude lähedal, kuid ei võrdu alusvara hinnaga üheski hinnapuu tipus. Artiklis [2] välja pakutud bino-trinoommeetodi korral konstrueeritakse hinnapuu selliselt, et barjäär või barjäärid asuksid alati hinnapuu tippudes.

2.2 Bino-trinoommeetodi hinnapuu kahe barjääriga optsiooni korral

Vaatleme artiklis [2] väljapakutud bino-trinoommeetodit barjääriga optsiooni hinna leidmiseks. Bino-trinoommeetod kombineerib omavahel binoom- ja trinoommeetodit, kusjuures esimesel ajaperioodil konstrueeritakse hinnapuu nagu trinoommeetodis ning järgmistel ajaperioodidel vastavalt binoommeetodile. Selline lähenemine võimaldab alusvara hinnapuu konstrueerida selliselt, et mõlemad barjäärid läbiksid hinnapuu tippusid, mis vähendab oluliselt mittelineaarsusest tulenevaid vigu optsiooni hinna leidmisel.

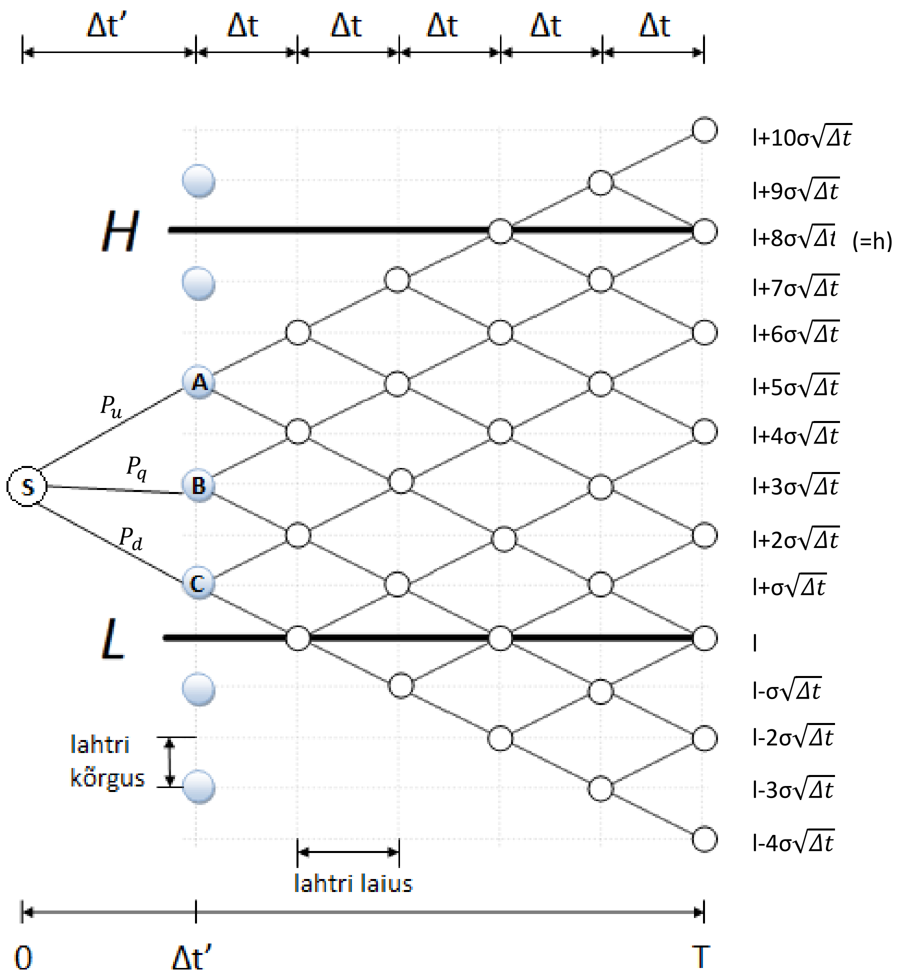
Vaatleme esmalt pidevat kahe barjääriga optsiooni. Eeldame, et alusvara hind S_t on lognormaalse jaotusega juhuslik protsess:

$$S_{t+dt} = S_t \cdot e^{(r-0.5\sigma^2)dt+\sigma dW_t},$$

kus W_t on standardne Wieneri protsess, r on riskivaba intressimäär ja σ on alusvara hinna volatiilsus. Olgu optsiooni eluiga $[0, T]$. Olgu ajahetkel $t = 0$ alusvara hind S_0, ülemine barjäär H ning alumine barjäär L. Esimene ajaperiood $\Delta t'$ võetakse bino-trinoommeetodi korral järgnevatest ajaperioodidest pisut suurem ning esimesel ajaperioodil konstrueeritakse trinoommeetodi hinnapuu. Olgu alusvara hind ajahetkel $\Delta t'$ võrdne väärtusega A (tõenäosusega p_u), väärtusega (B tõenäosusega p_q) või väärtusega C (tõenäosusega p_d). Tipud A, B ja C võetakse binoompuu algustippudeks ning nad valitakse selliselt, et barjäärid läbiksid binoommeetodi hinnapuu tippe. Binoommeetodi parameetrid u, d ja p võetakse vastavalt valemile 1.19

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{2.5}$$

Edaspidi nimetame alusvara hinna $S(t)$ log-hinnaks suurust $s(t) = \ln\big(S(t)/S_0\big)$ ja vaatleme alusvara hinnapuud log-hindades. Ajahetkel $t = 0$ on log-hind $s(0) = \ln(S_0/S_0) = 0$. Kui ajahetkel t on log-hind $s(t) = \ln\big(S(t)/S_0\big)$, siis ajahetkel $t + \Delta t$ korral on log-hind binoompuus üles liikudes $s_u(t + \Delta t) = \ln\big(uS(t)/S_0\big) = \ln u + \ln\big(S(t)/S_0\big) = \ln(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}) + s(t) = \sigma\sqrt{\Delta t} + s(t)$ ja alla liikudes $s_d(t+\Delta t) = -\sigma\sqrt{\Delta t} + s(t)$. Seega binoompuu kahe kõrvuti asetseva tipu vahe on $2\sigma\sqrt{\Delta t}$. Tähistame barjääride H ja L log-hindu vastavalt $h = ln(H/S_0)$ ja $l = ln(L/S_0)$.



Joonis 3: Bino-trinoommeetodi hinnapuu

Vaatleme nüüd, kuidas konstrueerida binoommeetodi hinnapuu selliselt, et mõlemad barjäärid läbiksid hinnapuu tippe. Seega peaks suurus $\frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$ olema täisarv. Kui aga anda ette perioodide arv M ja leida $\Delta\tau \equiv T/M$, siis üldjuhul ei pruugi suurus $\frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau}}$ olla täisarv. Seetõttu toimitakse järgmiselt. Leiame suuruse $\kappa = \left\lceil \frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau}} \right\rceil$, kus $\lceil x \rceil$ tähistab vähimat täisarvu, mis on arvust x suurem või võrdne, ning leiame

$$\Delta t = \left(\frac{h-l}{2\kappa\sigma}\right)^2.$$

Selle valemi korral $\Delta t \leq \Delta\tau$, sest $\kappa \geq \frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau}}$. Vaatleme puu moodustumist barjäärist L ülespoole. Nagu mainisime, langeb üks kiht automaatselt ülemise barjääriga kokku täisarvuks olemise tingimuse tõttu. Ajaperioodide arv bino-trinoommeetodi puus on $m1 = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor$, kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis on arvust x väiksem või võrdne. Binoompuus on $m2 = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1$ ajaperioodi. Joonisel on kogu bino-trinoompuus 6 ajaperioodi ja binoompuus 5 ajaperioodi ehk $m1 = 6$ ja $m2 = 5$. Esimese ajaperioodi pikkuse leiame vastavalt valemile

$$\Delta t' = T - \left(\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1 \right) \Delta t.$$

Paneme tähele, et $\Delta t \le \Delta t' \le 2\Delta t$ ning, et sellise Δt ja $\Delta t'$ valiku korral $\Delta t' + m2 \cdot \Delta t = T$. Leiame nüüd trinoommeetodi parameetrid. Defineerime funktsiooni $\mu(x)$ alljärgnevalt:

$$\mu(x) \equiv (r - \sigma^2/2)x.$$

Kui alusvara hind on lognormaalse jaotusega, siis ajahetkel $\Delta t^{'}$ on log-hindade keskväärtuseks $\mu(\Delta t') = (r - \sigma^2/2)\Delta t'$ ja dispersiooniks on $\mathrm{Var}(\Delta t') = \sigma^2 \Delta t'$. Trinoompuu tippude A, B ja C asukoha määramiseks paneme tähele, et kui binoompuus on paarisarv ajaperioode, siis tipu B log-hind peab võrduma avaldisega $l + 2j\sigma\sqrt{\Delta t}$ mingi indeksi j korral, ning kui binoompuus on paaritu arv ajaperioode, siis tipu B log-hind peab võrduma avaldisega $l + (2j+1)\sigma\sqrt{\Delta t}$ mingi indeksi j korral.

Eelnevalt on teada, et kahe kõrvuti oleva tipu log-hindade vaheline kaugus on $2\sigma\sqrt{\Delta t}$. Seega saame väita, et peab eksisteerima üks tipp, mille korral log-hind asub poollõigus $\big[\mu(\Delta t') - \sigma\sqrt{\Delta t}, \mu(\Delta t') + \sigma\sqrt{\Delta t}\big)$. Selle tipu võtame trinoompuu tipuks B ning tähistame tipu B log-hinna suurusega $\hat{\mu}$. Paarisarvulise $m2$ korral on $\hat{\mu} := l + 2j^*\sigma\sqrt{\Delta t}$, kus $j = j^*$ on indeks, mille korral $\mu(\Delta t') - \sigma\sqrt{\Delta t} \le l + 2j^*\sigma\sqrt{\Delta t} < \mu(\Delta t') + \sigma\sqrt{\Delta t}$. Paarituarvulise $m2$ korral $\hat{\mu} := l + (2j^* + 1)\sigma\sqrt{\Delta t}$, kus $j = j^*$ on indeks, mille korral $\mu(\Delta t') - \sigma\sqrt{\Delta t} \le l + (2j^*+1)\sigma\sqrt{\Delta t} < \mu(\Delta t') + \sigma\sqrt{\Delta t}$. Tipud A ja C valime nii, et nad oleks binoompuus tipu B kõrvaltipud. Seega A ja C log-hindadeks on vastavalt $\hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ja $\hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$. Defineerime

$$\begin{aligned} \beta &:= \hat{\mu} - \mu(\Delta t'), \\ \alpha &:= \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu(\Delta t') = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}, \\ \gamma &:= \hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu(\Delta t') = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Esimesest võrrandist saame, et $\beta \in [-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t})$. Paneme tähele, et $\alpha > \beta > \gamma$. Trinoommeetodi tõenäosused saame, kui lahendame järgneva võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} p_u\alpha + p_q\beta + p_d\gamma = 0, \\ p_u\alpha^2 + p_q\beta^2 + p_d\gamma^2 = \mathrm{Var}(\Delta t'), \\ p_u + p_q + p_d = 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Neist esimene ja teine võrrand vastavad kahele esimesele logaritmilise aktsia hinna momendile (keskväärtus ja dispersioon) ja kolmas võrrand kindlustab selle, et tõenäosuste summa võrduks ühega. Näitame, et võrrandisüsteemi 2.7 lahendid p_u, p_q, p_d rahuldavad võrratust $p_u, p_q, p_d \geq 0$. Selleks lahendame võrrandisüsteemi, kasutades determinante:

$$
\begin{aligned}
\det &= \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \alpha^2\gamma - \gamma\beta^2 - \gamma^2\alpha - \alpha^2\beta \\
&= -\alpha(-\alpha\gamma - \beta\gamma + \gamma^2 + \alpha\beta) + \beta(-\alpha\gamma - \beta\gamma + \gamma^2 + \alpha\beta) \\
&= (\beta - \alpha)(\gamma^2 + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma) = (\beta - \alpha)[\gamma(\gamma - \alpha)(-\beta)(\gamma - \alpha)] \\
&= (\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(u) &= \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \operatorname{Var}(\Delta t') & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta\gamma^2 + \gamma \operatorname{Var}(\Delta t') - \beta^2\gamma - \beta \operatorname{Var}(\Delta t') \\
&= (\beta\gamma + \operatorname{Var}(\Delta t'))(\gamma - \beta),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(q) &= \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha^2 & \operatorname{Var}(\Delta t') & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \operatorname{Var}(\Delta t') + \alpha^2\gamma - \alpha\gamma^2 - \gamma \operatorname{Var}(\Delta t') \\
&= (\alpha\gamma + \operatorname{Var}(\Delta t'))(\alpha - \gamma),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(d) &= \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \operatorname{Var}(\Delta t') \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 + \beta \operatorname{Var}(\Delta t') - \alpha^2\beta\alpha \operatorname{Var}(\Delta t') \\
&= (\alpha\beta + \operatorname{Var}(\Delta t'))(\beta - \alpha).
\end{aligned}
$$

Seega saime

$$
\begin{aligned}
\det &= (\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha), \\
\det(u) &= (\beta\gamma + \operatorname{Var}(\Delta t'))(\gamma - \beta), \\
\det(q) &= (\alpha\gamma + \operatorname{Var}(\Delta t'))(\alpha - \gamma), \\
\det(d) &= (\alpha\beta + \operatorname{Var}(\Delta t'))(\beta - \alpha).
\end{aligned}
$$

Crameri reegli põhjal saame kirjutada

$$p_u = \det(u)/\det, \quad p_q = \det(q)/\det \quad ja \quad p_d = \det(d)/\det .$$

Märkame, et peab kehtima $\det < 0$, sest $\alpha > \beta > \gamma$. Jagunemise tõenäosuste mittenegatiivsuse tõestamiseks on vaja näidata, et $\det(u), \det(q), \det(d) \leq 0$. Kuna $\alpha > \beta > \gamma$, piisab näidata, et $\beta\gamma + \mathrm{Var}(\Delta t') \geq 0$, $\alpha\gamma + \mathrm{Var}(\Delta t') \leq 0$ ja $\alpha\beta + \mathrm{Var}(\Delta t') \geq 0$ eeldustel, et $\Delta t \leq \Delta t' < 2\Delta t$ ja $\beta \in [-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t})$. Tõestame need kolm võrratust alljärgnevalt

$$\begin{aligned}
\beta\gamma + Var(\Delta t') &= \beta^2 - 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t' \geq \beta^2 - 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t \\
&= (\beta - \sigma\sqrt{\Delta t})^2 \geq 0, \\
\alpha\gamma + Var(\Delta t') &= \beta^2 - 4\sigma^2\Delta t + \sigma^2\Delta t' \leq \beta^2 - 4\sigma^2\Delta t + 2\sigma^2\Delta t \\
&= \beta^2 - 2\sigma^2\Delta t \leq 0, \\
\alpha\beta + Var(\Delta t') &= \beta^2 + 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t' \geq \beta^2 + 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t \\
&= (\beta + \sigma\sqrt{\Delta t})^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Seega leiduvad tõesti sellised p_u, p_q ja p_d, mis vastavad tingimustele $p_u, p_q, p_d \geq 0$. Nüüd, kui meil on olemas jagunemise tõenäosused ja optsiooni hinnad tippudes A, B ja C, saame optsiooni hinna tipus S leida, kasutades valemit

$$V_0 = e^{-r\Delta t'}(p_u V_A + p_q V_B + p_d V_C),$$

kus V_A, V_B ja V_C tähistavad vastavalt optsiooni hindu tippudes A, B ja C. Seda, kuidas leida optsiooni hindu V_A, V_B, V_C, vaatame peatükis 2.4.

2.3 Bino-trinoommeetodi hinnapuu ühe barjääriga optsiooni korral

Pideva ühe barjääriga optsiooni hindamine on sarnane eelnevaga, kus kirjeldasime kahe barjääriga optsioone. Vaatleme hinnapuu konstrueerimist alumise barjääri L korral. Ülemise barjääri H korral kehtib sarnane olukord, aga seda me lähemalt siin ei kirjelda. Ühe barjääri korral puudub vajadus binoompuu ajaperioodi Δt kohandamiseks ning võime võtta $\Delta t = T/M$. Seejärel konstrueeritakse binoommeetodi hinnapuu selliselt, et barjäär L läbiks hinnapuu tippe. Paneme tähele, et ka trinoommeetodi ajaperioodi pikkuseks on Δt. Vaatame nüüd, kuidas määrata tippude A, B ja C asukohti ning trinoommeetodi tõenäosusi. Aktsia hinna lognormaalsuse omaduse tõttu, tippude A, B ja C log-hindade keskväärtus ja dispersioon on vastavalt $\mu(\Delta t)$ ja $\mathrm{Var}(\Delta t)$. Ajahetkel Δt peab iga tipu log-hind rahuldama samu tingimusi, nagu kirjeldatud punktis 2.2. Nüüd tuleb valida selline tipp, mille log-hind asub poollõigus $\big[\mu(\Delta t) - \sigma\sqrt{\Delta t}, \mu(\Delta t) + \sigma\sqrt{\Delta t}\big)$. Selleks tipuks valime taas B, mille log-hinda tähistame $\hat{\mu}$. Tippude A ja C log-hinnad on seega $\hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ja $\hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$. Defineerime α, β ja γ nagu võrrandites (2.6), kus $\mu(\Delta t')$ asemel on $\mu(\Delta t)$.

Esimesest võrrandist saame taas, et $\beta \in [-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t})$. Paneme tähele, et $\alpha > \beta > \gamma$. Leiame aktsia hinnad ajahetkel T, seejärel aga optsiooni hinnad samades tippudes. Selleks kasutame maksefunktsiooni (2.1). Edasi peame arvutama optsiooni hinna eelnevatel ajahetkedel, kuni jõuame esimese ajahetkeni Δt. Oleme kätte saanud binoompuu algustipud A, B ja C. Nüüd peame leidma jagunemise tõenäosused, et nende abil arvutada optsiooni hind tipus S.

Jagunemise tõenäosused saame, lahendades võrrandisüsteemi (2.7), kus suurus $\mathrm{Var}(\Delta t')$ peame asendama suurusega $\mathrm{Var}(\Delta t)$ ehk

$$\begin{cases} p_u\alpha + p_q\beta + p_d\gamma = 0, \\ p_u\alpha^2 + p_q\beta^2 + p_d\gamma^2 = \mathrm{Var}(\Delta t), \\ p_u + p_q + p_d = 1. \end{cases}$$

Seejärel leiame optsiooni hinna ajahetkel $t = 0$. Selleks kasutame valemit

$$V_0 = e^{-r\Delta t}(p_u V_A + p_q V_B + p_d V_C),$$

kus V_A, V_B ja V_C tähistavad vastavalt optsiooni hindu tippudes A, B ja C.

2.4 Optsiooni hinna leidmine bino-trinoommeetodi korral

Antud osa kirjutamisel on kasutatud materjale [3] ja [4]. Optsiooni hind bino-trinoommeetodi korral leitakse järgmiselt. Kasutades valemit (1.20) leitakse esmalt optsiooni hinnad tippudes A, B ja C ajahetkel $\Delta t'$ ning seejärel leitakse optsiooni hind ajahetkel $t = 0$ vastavalt valemile

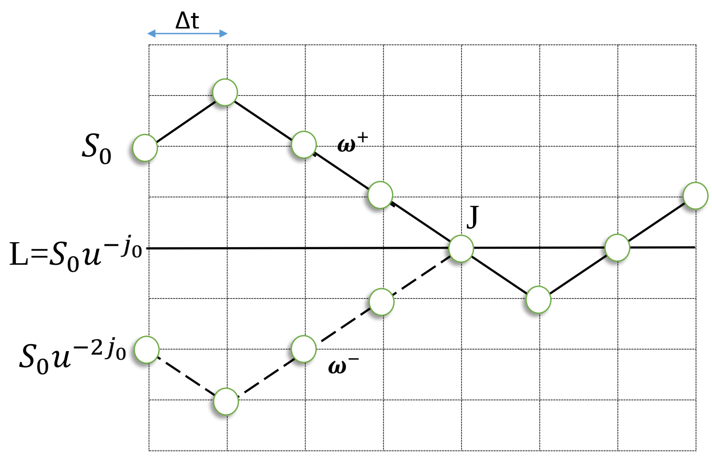
$$V_0 = e^{-r\Delta t'}(p_u V_A + p_q V_B + p_d V_C).$$

Vaatleme esmalt, kuidas valemi (1.20) põhjal leida ühe barjääriga optsiooni hinda binoompuu korral, kui barjäär läbib hinnapuu tippusid. Olgu optsiooni eluiga jagatud $m1$ võrdseks osaks $\Delta T = T/m1$. Olgu S_0 alusvara hind hetkel $t = 0$, siis alusvara hind hetkel $t = T$ saab omada väärtusi $S(T, j) = S_0 u^{m1-j} d^j$, $j = 0, 1, 2, \dots, m1$. Barjääriga optsiooni puhul saab optsiooni hinna $V_0 = e^{-rT}\mathcal{E}[X(S, T)]$ leidmiseks kasutada valemit (1.21), kuid selle kasutamisel peame kõikvõimalike teede arvust C^j_{m1} tipust S_0 tipuni $S(T, j)$ maha lahutama nende teede arvu, mille korral alusvara hind jõuab barjäärini. Olgu meil tegemist alumise barjääriga L. Eeldame järgnevalt, et $S_0 d^{m1} \leq L \leq S_0$. Kui $L \geq S_0$, siis optsiooni hind on 0, kui aga $L < S_0 d^{m1}$, siis optsiooni hind on võrdne tavalise Euroopa optsiooni hinnaga.

Kuna barjäär läbib binoompuu tippusid, siis alumine barjäär L on esitatav kujul

$L = S_0 d^{j_0} = S_0 u^{-j_0}$, kus $1 \leq j_0 \leq m1$. Kui alusvara hind hetkel T on barjääriga L võrdne või sellest väiksem, siis *down-and-out* optsioon kaotab kehtivuse ning seega optsiooni hind on 0. Seega, kui $S(T,j) \leq L$, st $S_0 u^{m1-j} d^j = S_0 u^{m1-2j} \leq S_0 u^{-j_0}$ ehk $j \geq \frac{m1+j_0}{2}$, siis optsiooni hind on 0.

Vaatleme nüüd juhtu, kus $S(T,j) > L$, st $j < \frac{m1+j_0}{2}$. Leiame nende teede arvu, mille korral alusvara hind puutub barjääri L või saab sellest väiksemaks. Selleks kasutame nn. peegelpildi printsiipi (*reflection principle*).



Joonis 4: Peegelpildi printsiip

Vaatleme alusvara hinna teed tipust S_0 tippu $S(T,j)$, mille korral alusvara hind puutub barjääri L või saab sellest väiksemaks. Olgu alusvara hind esmakordselt võrdne barjääri väärtusega tipus J (vt. joonis 4). Igale hinnaliikumise teele ω^+ tipust S_0 tipuni J saame ajas tagant ette liikudes üksüheselt vastavusse seada tee ω^- järgmiselt: igal hetkel, kui tee ω^+ korral toimub liikumine üles, siis tee ω^+ korral toimub liikumine alla. Kuna kõikide teede ω^+ korral on hinna allapoole liikumisi j_0 võrra rohkem kui ülespoole liikumisi, siis kõigi teede ω^- korral on hinna ülespoole liikumisi j_0 võrra rohkem kui allaliikumisi ning kõigi teed ω^- algavad tipust $S_0 u^{-2j_0}$.

Seega nende teede arv, mis tipust S_0 tippu $S(T,j)$ liikudes jõuavad alumise barjäärini L, on võrdne teede arvuga tipust $S_0 u^{-2j_0}$ tippu $S(T,j)$. Leiame nüüd üles- ja allaliikumiste arvu tipust $S_0 u^{-2j_0}$ tippu $S(T,j)$ liikudes. Olgu x ülesliikumiste arv ja y allaliikumiste arv. Siis peavad kehtima järgmises seosed:

1. $x + y = m1$, kuna üles- ja allaliikumiste koguarv peab olema võrdne perioodide arvuga.

2. $x - y = m1 - 2j + 2j_0$, kuna tipust $S_0 u^{-2j_0}$ tippu $S(T,j) = S_0 u^{m1-2j}$ liikudes peab ülesliikumisi allaliikumistest olema rohkem suuruse $m1 - 2j + 2j_0$ võrra.

Viimastest seostest saame, et ülesliikumiste arv $x = m1-j+j_0$ ning allaliikumiste arv $y = j - j_0$. Seega kokku on erinevate teede arv tipust $S_0u^{-2j_0}$ tippu $S(T,j) = S_0u^{m1-2j}$ liikudes $C_{m1}^{j-j_0}$. Nüüd saame välja kirjutada alumise barjääriga *down-and-out* ostuoptsiooni hinna valemi

$$V_0 = e^{-rT} \sum_{0 \le j < (m1+j_0)/2} (C_{m1}^j - C_{m1}^{j-j_0}) p^{m1-j}(1-p)^j \max\{S_0u^{m1-j}d^j - E, 0\}. \tag{2.8}$$

Esitame nüüd valemid optsiooni hinna leidmiseks bino-trinoompuu tippudes A, B ja C alumise barjääriga *down-and-out* ostuoptsiooni korral.

Bino-trinoommeetodi korral on binoompuu perioodide arv $m2$. Olgu tipu B log-hind $\hat{\mu}$ esitatav kujul $\hat{\mu} = l + k_0\sigma\sqrt{\Delta t}$. Siis tipus B on alusvara hind $S_B = S_0e^{\hat{\mu}} = S_0e^{l+k_0\sigma\sqrt{\Delta t}} = S_0e^lu^{k_0}$ ning alumine barjäär $L = S_0e^l$. Seega valemis (2.8) $j_0 = k_0$ ning tipus B optsiooni hind

$$V_B = e^{-r(T-\Delta t)} \sum_{0 \le j < (m2+k_0)/2} (C_{m2}^j - C_{m2}^{j-k_0}) p^{m2-j}(1-p)^j \max\{S_Bu^{m2-j}d^j - E, 0\}. \tag{2.9}$$

Tippudes A ja C on indeks j_0 vastavalt $j_0 = k_0 + 2$ ning $j_0 = k_0 + 2$. Saame

$$V_A = e^{-r(T-\Delta t)} \sum_{0 \le j < (m2+k_0+2)/2} (C_{m2}^j - C_{m2}^{j-k_0-2}) p^{m2-j}(1-p)^j \max\{S_Au^{m2-j}d^j - E, 0\},$$

$$V_C = e^{-r(T-\Delta t)} \sum_{0 \le j < (m2+k_0-2)/2} (C_{m2}^j - C_{m2}^{j-k_0+2}) p^{m2-j}(1-p)^j \max\{S_Cu^{m2-j}d^j - E, 0\}.$$

Esitame nüüd kahe barjääriga optsiooni hinna arvutamise valemid, kui mõlemad barjäärid läbivad binoompuu tippusid. Olgu alumine barjäär L esitatav kujul $L = S_0d^{j_0} = S_0u^{-j_0}$, $1 \le j_0 \le M$ ning ülemine barjäär $H = S_0u^{j_1}$, kus bino-trinoommeetodis kasutatava binoompuu korral $j_1 = -j_0 + 2j_H$. Et $H > S_0$, siis $j_H > j_0/2$. *Down-and-out* optsioon kaotab kehtivuse, kui $S(T,j) = S_0u^{m1-2j} \ge H$ või $S(T,j) = S_0u^{m1-2j} \le H$. Järelikult, kui $j \le \frac{m1+j_0-2j_H}{2}$ või $j \ge \frac{M+j_0}{2}$, siis optsiooniga seotud väljamakse on 0. Seega optsiooni hind on

$$V_0 = e^{-rT} \sum_{(m1+j_0)/2-j_H \le j < (m1+j_0)/2} (C_{m1}^j - N(j,j_0,j_H)) p^{m1-j}(1-p)^j \max\{S_0u^{m1-j}d^j - E, 0\},$$

kus $N(j,j_0,j_H)$ on nende teede arv tipust S_0 tippu $S(T,j)$ liikudes, mille korral alusvara hind jõuab barjäärideni H või L. Suuruse $N(j,j_0,j_H)$ saab samuti leida peegelpildi printsiipi kasutades, kuid arutluskäik on võrreldes ühe barjääriga optsiooniga tunduvalt keerulisem. Toome artikli [4] põhjal ära vaid valemid. Suurus $N(j,j_0,j_H)$ leitakse vastavalt valemile

$$N(j, j_0, j_H) = \sum_{i=1}^{m1/2j_H} (-1)^{i+1}(\alpha_i + \beta_i),$$

kus

$$\alpha_i = \begin{cases} C_{m1}^{j-j_0+(i+1)j_H}, & \text{kui } i \text{ on paaritu;} \\ C_{m1}^{m1-j-ij_H}, & \text{kui } i \text{ on paaris.} \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} C_{m1}^{m1+j_0-(i-1)j_H}, & \text{kui } i \text{ on paaritu;} \\ C_{m1}^{j-ij_H}, & \text{kui } i \text{ on paaris.} \end{cases}$$

Analoogiliselt ühe barjääriga optsiooni korral saame leida optsiooni hinnad tippudes A, B ja C. Tipus B on optsiooni hinna arvutamise valem sarnane valemiga (2.9).

$$V_B = e^{-r(T-\Delta t')} \sum_{(m2+k_0)/2-j_H<j<(m2+k_0)/2} c_b \max\{S_0 u^{m2-j} d^j - E, 0\},$$

kus $c_b = C_{m2}^{j} - N(j, k_0, j_H)p^{m2-j}(1-p)^j$. Tippudes A ja C on optsiooni hinnad vastavalt

$$V_A = e^{-r(T-\Delta t')} \sum_{(m2+k_0+2)/2-j_H<j<(m2+k_0+2)/2} c_a \max\{S_0 u^{m2-j} d^j - E, 0\},$$

kus $c_a = C_{m2}^{j} - N(j, k_0+2, j_H)p^{m2-j}(1-p)^j$ ja

$$V_C = e^{-r(T-\Delta t')} \sum_{(m2+k_0-2)/2-j_H<j<(m2+k_0-2)/2} c_c \max\{S_0 u^{m2-j} d^j - E, 0\},$$

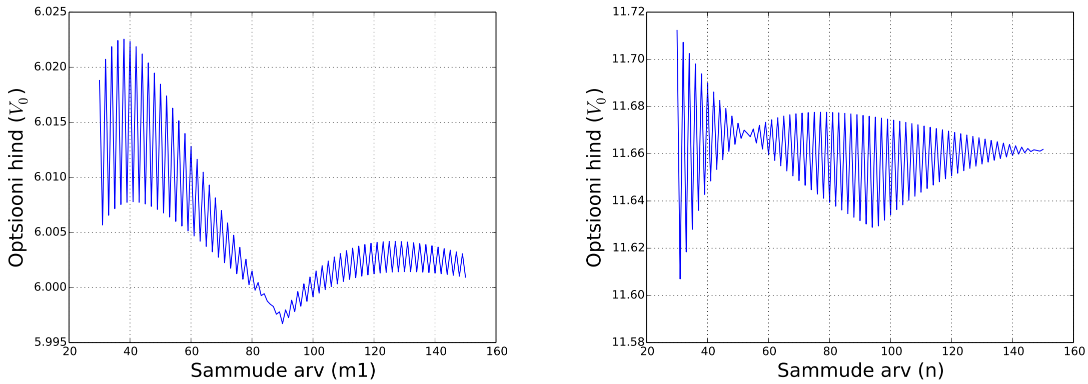
kus $c_c = C_{m2}^{j} - N(j, k_0-2, j_H)p^{m2-j}(1-p)^j$.

2.5 Numbrilised eksperimendid

Selles punktis on kasutatud materjale [1], [2], [3] ja [4]. Bino-trinoommeetodi rakendamiseks ühe barjääriga *down-and-out* optsioonide korral on koostatud programm programmeerimiskeele Python abil ning see on ära toodud lisades. Kuna on teada, et piisavalt väikese alumise barjääri korral peab *down-and-out* optsiooni hind võrduma Euroopa optsiooni hinnaga, siis bino-trinoommeetodi programmi abil saadud tulemuste kontrolliks on koostatud programm ka Euroopa optsiooni hinna leidmiseks binoommeetodi abil, mis on samuti esitatud lisades. Samuti võimaldab see võrrelda optsiooni hinna ostsilleeruvust hariliku Euroopa optsiooni ja bino-trinoommeetodil leitud barjääriga optsiooni korral. Mõlema meetodi korral on vaadeldud perioodide arvu vahemikus $[30, 150]$. Binoommeetodi korral on ajaperioodide arvu tähiseks n ja bino-trinoommeetodi korral vastavalt $m1$.

Ostuoptsiooni hindamiseks kasutame artiklis [2] toodud parameetreid:

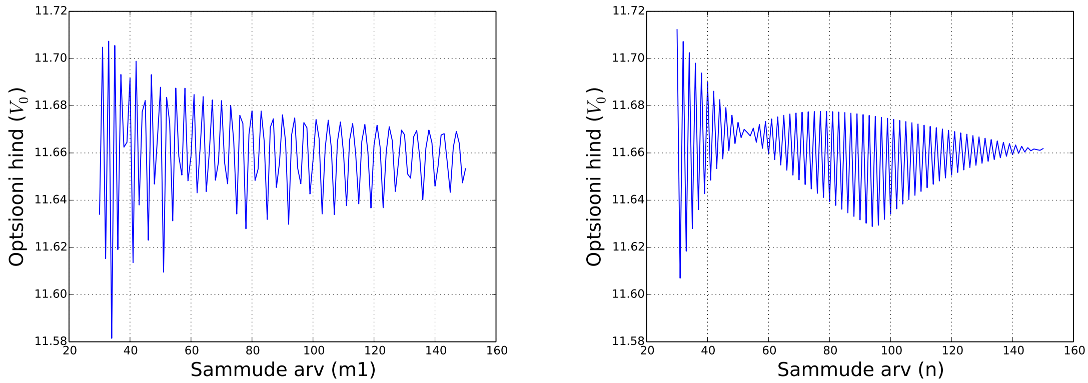
- alusvara alghind $S = 95$,
- täitmishind $E = 100$,
- riskivaba intressimäär $r = 0.1$,
- volatiilsus $\sigma = 0.25$,
- täitmisaeg $T = 1$ aasta,
- alumise barjääriga optsiooni korral $L = 90$.



Joonis 5: *Down-and-out* (vasakul) ja Euroopa ostuoptsiooni (paremal) hinna sõltuvus sammude arvust alumise barjääri $L = 90$ korral.

Down-and-out optsiooni hindamise tulemus on toodud joonisel 5 (vasakul). Näeme, et *down-and-out* optsiooni hind langeb mõnevõrra, kui sammude arv kasvab, aga muutus on üsna väike. Kui perioodide arv jääb vahemikku $[110 - 150]$, siis on optsiooni hind vahemikus $[6; 6.005]$. . Märgime, et artiklis [2] on toodud *down-and-out* optsiooni täpne hind: 5.9968. Võttes $m1 = 500$, saame optsiooni hinnaks $V_0 = 5.998$, mis on lähedane täpsele hinnale. Bino-trinoommeetodil saadud hinna ostsilleeruvuse ulatuse võrdlemiseks leiame samade parameetrite korral ka Euroopa ostuoptsiooni hinna (vt. joonis 5 parempoolne graafik). Näeme, et bino- trinoommeetodi korral on ostsilleeruvuse suurus isegi väiksem kui binoommeetodi korral. Kuna teame Euroopa optsiooni ja *down-and-out* optsiooni hinda, saame välja arvutada ka *down-and-in* optsiooni hinna. Võtame $n = 140$. Saame, et Euroopa optsiooni hind on $V_0 = 11.659$ ja *down-and-out* optsiooni hind $V_0 = 6.001$. Seega *down-and-in* optsiooni hind on $V_0 = 5.658$.

Kontrollime, kas *down-and-out* optsiooni hind on võrdne Euroopa optsiooni hinnaga, kui võtta alumine barjäär väga väike. Selleks võtame alumise barjääri $L = 7$. Näeme, et mõlemal juhul on optsiooni hinnad vahemikus $[11.58, 11.72]$.

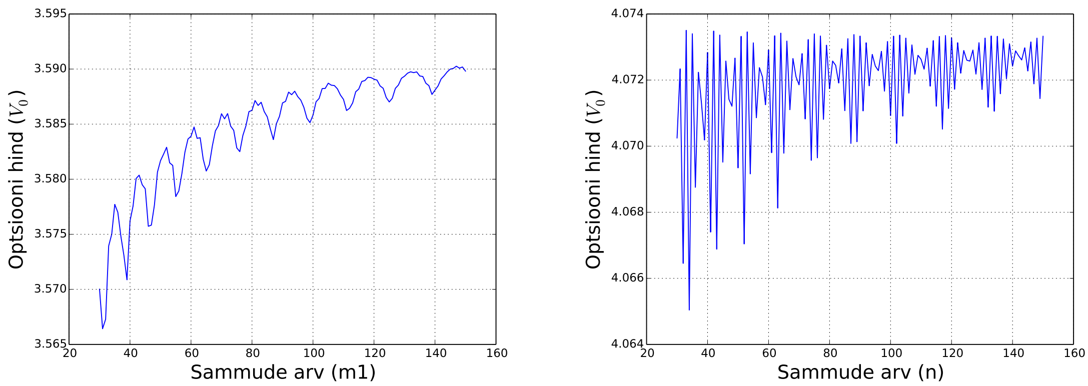


Joonis 6: *Down-and-out* (vasakul) ja Euroopa ostuoptsiooni (paremal) hinna sõltuvus sammude arvust alumise barjääri $L = 7$ korral.

Müügioptsiooni korral kasutame artiklis [1] toodud parameetreid:

- alusvara alghind $S = 5$,
- täitmishind $E = 10$,
- riskivaba intressimäär $r = 0.12$,
- volatiilsus $\sigma = 0.5$,
- täitmisaeg $T = 1$ aasta.

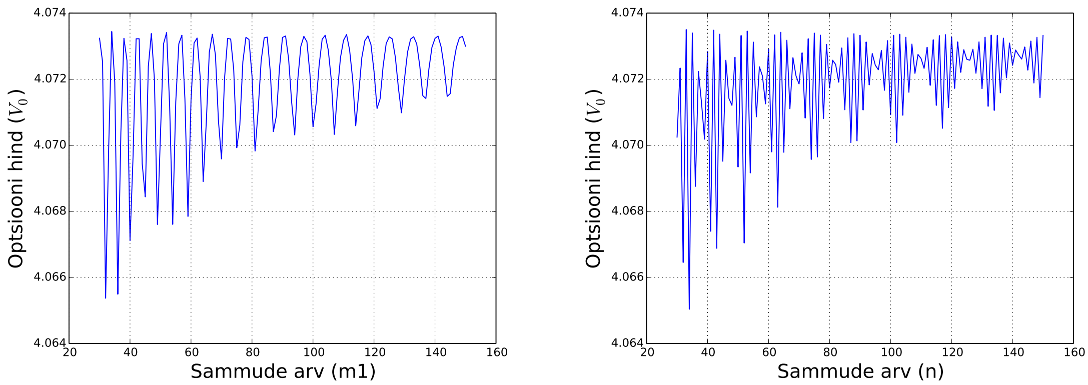
Võtame alumiseks barjääriks $L = 2$.



Joonis 7: *Down-and-out* (vasakul) ja Euroopa müügioptsiooni (paremal) hinna sõltuvus sammude arvust alumise barjääri $L = 2$ korral.

Näeme, et barjääriga optsiooni hind koondub ja võrreldes ostuoptsiooniga on ostsilleeruvuse periood pikem. Kui võrrelda Euroopa optsiooni hinnaga, siis näeme, et võnkumise ulatus pole eriti suur (ostsilleerumine on peaaegu sama).

Nüüd vaatleme juhtu, kus $L = 0.5$.



Joonis 8: *Down-and-out* (vasakul) ja Euroopa müügioptsiooni (paremal) hinna sõltuvus sammude arvust alumise barjääri $L = 0.5$ korral.

Näeme, et kui võtta alumine barjäär piisavalt väike, siis alumise barjääriga optsiooni hind on ligikaudu võrdne Euroopa optsiooni hinnaga. Euroopa ja alumise barjääriga optsiooni hinna koondumiskiirus on peaaegu sama. Euroopa optsiooni korral esineb rohkem kõikumisi. Kokkuvõttes näeme, et binoom- ja bino-trinoommeetodil saadud tulemused on sarnased, kui alumine barjäär on väike. Alumise barjääri L kasvades väheneb optsiooni hind nii ostu- kui ka müügioptsiooni korral. Võrdleme saadud Euroopa optsiooni tulemusi analüütiliste tulemustega, mis on võetud kasutatud ariklist[1]. Märgime, et ajahetke $n = 32$ korral on optsiooni täpseks hinnaks $V_0 = 4.0700$, ajahetke $n = 64$ korral $V_0 = 4.0749$ ja ajahetke $n = 128$ korral vastavalt $V_0 = 4.0730$.

Võrdleme binoommeetodiga ja bino-trinoommeetodiga optsiooni hindade leidmise kiirust. Binoommeetodiga leiame Euroopa optsiooni hinnad rekursiivselt tagant ettepoole liikudes. Bino-trinoommeetodi abil leiame barjääriga optsiooni hinnad kasutades kombinatoorika valemeid. Kasutame kiiruse leidmiseks ostuoptsiooni hinna arvutamiseks toodud parameetreid ($L = 90$ korral) ja programmeerimiskeelt Python. Selleks kasutame tavalist sülearvutit (2 GB RAM; 2x2.1 GHz protsessor; Windows 7).

Ajahetkede arv	Binoommeetod (rekursiivselt)	Bino-trinoommeetod
50	0.128	0.205
100	1.169	1.445
150	3.788	4.902
200	8.808	11.402
250	17.304	23.449

Tabel 1: Optsiooni hinna arvutamiseks (programmeerimiskeelega Python) kuluv aeg

Näeme, et bino-trinoommeetodi rakendamiseks kuluv aeg on samas suurusjärgus binoommeetodi abil Euroopa optsiooni arvutamiseks kuluva ajaga. Seega, aegade võrreldavus näitab bino-trinoomeetodi efektiivsust. Ajasammude suurenedes kasvab optsiooni hinna arvutamiseks kuluv aeg eksponentsiaalselt.

Viited

[1] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation.* Oxford Financial Press, 1993.

[2] T.-S. Dai, Y.-D. Lyuu. *The Bino-Trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing.* The Journal of Derivatives, 2010.

[3] S. R. Plinska. *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models.* Blackwell Publishing, 1997.

[4] T.-S. Dai, L.-M. Liu, Y.-D. Lyuu. *Linear-Time Option Pricing Algorithms by Combinatorics.* Computers and Mathematics with Applications, 2008.

Lisad

Euroopa optsiooni hinna leidmine rekursiivselt tagant ettepoole.

```
from math import*
from pylab import*
import numpy as np
S = 95.0     #alusvara alghind
volat = 0.25 #alusvara volatiilsus
r = 0.1      #riskivaba intressimäär
E = 100      #täitmishind
T = 1.0      #optsiooni eluaeg (aastates)
q = 1        #ostuoptsiooni korral, q = -1 müügioptsiooni korral
v0s = []
from time import*
t0 = time()
for n in range(30,151):              #ajahetkede arv
    delta_t = T/n                    #ajahetk
    u = exp(volat*sqrt(delta_t))     #ülesliikumine
    d = 1/u                          #allaliikumine
    p = (exp(r*delta_t)-d)/(u-d)     #ülesliikumise tõenäosus

    a_hinnad = []
    for i in range(0,n+1):
        hind = S*d**i*u**(n-i)
        a_hinnad.append(hind)
    def payoff(f):                   #maksefunktsioon
        if q == 1:
            pay_off_func = max(f-E,0)
            return pay_off_func
        elif q == -1:
            pay_off_func = max(E-f,0)
            return pay_off_func
    opt_hinnad = []
    for step in range(0,len(a_hinnad)):
        a_hinnad[step] = payoff(a_hinnad[step])
        opt_hinnad.append(a_hinnad[step])
    y = range(0,n+1)
```

```
    for j in reversed(y):
        hind1 = []
        for step in range(0,j):
            a_hinnad[step] = (e**(-r*delta_t)*(p*a_hinnad[step]+(1-p)*
            a_hinnad[step+1]))
            hind1.append(a_hinnad[step])
        for step in range(0,j):
            a_hinnad[step] = hind1[step]
    v0s.append(a_hinnad[step])
t1=time()
print(t1-t0)

X = arange(30,151)
Y = v0s
plot(X, Y)

xlabel('Sammude arv (n)',fontsize=20)
ylabel('Optsiooni hind ($V_0$)',fontsize=20)
title('')
grid(True)
ylim((11.58,11.72))
savefig("euroopa.pdf")
show()
```

Alumise barjääriga $L = 90$ optsiooni hinna leidmine, kasutades kombinatoorika valemeid.

```
from math import*
import math
from pylab import*
import numpy as np
S = 95.0     #alusvara alghind
volat = 0.25 #alusvara volatiilsus
r = 0.1      #riskivaba intressimäär
E = 100      #täitmishind
T = 1.0      #optsiooni eluaeg (aastates)
q = 1        #ostuoptsiooni korral, q = -1 müügioptsiooni korral
L = 90
v0s = []
```

```
from time import*
t0 = time()
for m1 in range(30,151):              #ajahetkede arv
    m2 = m1-1                       #ajahetkede arv binoompuus
    delta_t = T/m1                   #ajahetk
    u = exp(volat*sqrt(delta_t))    #ülesliikumine
    d = 1/u                         #allaliikumine
    p = (exp(r*delta_t)-d)/(u-d)    #ülesliikumise tõenäosus
    l = log(L/S)                    #barjääri L log-hind
    def muu(x):
        return (r-volat**2/2)*x
    def var(x):
        return volat**2*x
    if m2%2==0:
        for j in range(-m2,m2+1):
            if l+2*j*volat*sqrt(delta_t)>=
            (muu(delta_t)-volat*sqrt(delta_t)) and (l+2*j*volat*sqrt(delta_t)<
            muu(delta_t)+volat*sqrt(delta_t)):
                j_tarn = j
        muu1 = l+2*j_tarn*volat*sqrt(delta_t)
        k0b = 2*j_tarn
    else:
        for j in range(-m2,m2+1):
            if (l+(2*j+1)*volat*sqrt(delta_t)>=muu(delta_t)-
            volat*sqrt(delta_t)) and (l+(2*j+1)*volat*sqrt(delta_t)<
            muu(delta_t)+volat*sqrt(delta_t)):
                j_tarn = j
        muu1 = l+(2*j_tarn+1)*volat*sqrt(delta_t)
        k0b = 2*j_tarn+1
    def payoff(f):
        if q == 1:
            pay_off_func = max(f-E,0)
            return pay_off_func
        elif q == -1:
            pay_off_func = max(E-f,0)
            return pay_off_func
    k0a = k0b+2
    k0c = k0b-2
    S_B = S*u**k0b*e**l
```

```
S_A = S*u**k0a*e**l
S_C = S*u**k0c*e**l

def fact(i):
    if i==0:
        return 1
    else:
        return i*fact(i-1)
def comb(k,n):
    if n>k:
       if k<0:
          return 0
       elif n<0:
          return 0
       else:
          return fact(n)/(fact(k)*fact(n-k))
    else:
       return False
b_sum = []
for j1 in range(0,int(math.ceil((m2+k0b)/2))):
    if S_B*u**(m2-j1)*d**j1<L:
        hind_b = 0
    else:
        hind_b = S_B*u**(m2-j1)*d**j1
    b = (comb(j1,m2)-comb(j1-k0b,m2))*p**(m2-j1)*(1-p)**j1*
    payoff(hind_b)
    b_sum.append(b)
B = sum(b_sum)
a_sum = []
for j2 in range(0,int(math.ceil((m2+k0a)/2))):
    if S_A*u**(m2-j2)*d**j2<L:
        hind_a = 0
    else:
        hind_a = S_A*u**(m2-j2)*d**j2
    a = (comb(j2,m2)-comb(j2-k0a,m2))*p**(m2-j2)*(1-p)**j2*
    payoff(hind_a)
    a_sum.append(a)
A = sum(a_sum)
c_sum = []
```

```
    for j3 in range(0,int(math.ceil((m2+k0c)/2))):
        if S_C*u**(m2-j3)*d**j3<L:
            hind_c = 0
        else:
            hind_c = S_C*u**(m2-j3)*d**j3
        c = (comb(j3,m2)-comb(j3-k0c,m2))*p**(m2-j3)*(1-p)**j3*
        payoff(hind_c)
        c_sum.append(c)
    C = sum(c_sum)
    V_B = e**(-r*(T-delta_t))*B
    V_A = e**(-r*(T-delta_t))*A
    V_C = e**(-r*(T-delta_t))*C

    beeta = muu1-muu(delta_t)
    alfa = beeta+2*volat*sqrt(delta_t)
    gamma = beeta-2*volat*sqrt(delta_t)
    det = (beeta-alfa)*(gamma-beeta)*(gamma-alfa)
    det_u = (beeta*gamma+var(delta_t))*(gamma-beeta)
    det_m = (alfa*gamma+var(delta_t))*(alfa-gamma)
    det_d = (alfa*beeta+var(delta_t))*(beeta-alfa)
    Pu = det_u/det
    Pm = det_m/det
    Pd = det_d/det
    V_0 = e**(-r*delta_t)*(Pu*V_A+Pm*V_B+Pd*V_C)
    v0s.append(V_0)
t1=time()
print(t1-t0)

X = arange(30,151)
Y = v0s
plot(X, Y)
xlabel('Sammude arv (m1)',fontsize=20)
ylabel('Optsiooni hind ($V_0$)',fontsize=20)
title('')
grid(True)
savefig("alumine.pdf")
show()
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Mailis Rannaveer,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Barjääriga optsiooni hinna leidmine bino-trinoommeetodi abil", mille juhendaja on Toomas Raus,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 04.06.2014