A-12067

HARILIKUD
DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Prof. ALBERT BORKVELL

HARILIKUD
DIFERENTSIAALVÕRRANDID

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS“
TARTU 1941

i 48560133

Peatoimetaja H. Kruus. Vastutav toimetaja A. Laasi. Tehniline toimetaja E. Kollom. Korrektor A. Tigane. Ladumisele antud 14. I 1941. MB 3571. Trükkimisele antud 10. III 1941. Laotihedus trpg. 27456. Trükipoognaid 16,5. Autoripoognaid 6,9. Paberi formaat 67 × 95 · 1/16. Trükiarv 1000 eks. Trükitud „Ilutrüki“ trükikojas, 1941. Tartu, 21. juuni tän. 58. Tellim. nr. 246.
Hind 15 rbl.

Альберт Борквелл: „Обыкновенные диференциальные уравнения“. На эстонском языке. Эгосиздат „Научная Литература“, Тарту.

Tartu Ülikooli Raamatukogu

Eessõna.

Käesoleva teose eesmärgiks on tutvustada lugejat harilikkude diferentsiaalvõrranditega reaalmuutujate vallas, nende võrrandite lahendusviisidega ja saadud lahendite omaduste ning iseärasustega, ja varustada lugejat uurimisvahendiga, mis on rakendatav eriti tehniliste probleemide käsitlemisel.

Et teos on määratud eeskätt tulevastele inseneridele, siis on ta koostatud nõnda, et lugeja vajaks teoreetilise osa läbitöötamiseks ainult põhilisi eelteadmisi kõrgemast matemaatikast ja suudaks seega omandada tarvilikud teadmised diferentsiaalvõrrandite alalt võimalikult minimaalse ajaga. Seepärast on teoses käsitlust leidnud lihtsamad, kuid praktiliselt sagedamini esinevad diferentsiaalvõrrandite tüübid, mille hulgas peatähtsus on antud lineaarsetele võrranditele, mis insenerile oma teaduse mõistmiseks ja arendamiseks on möödapääsematud.

Et lugejat mitte koormata liigse teoreetilise materjaliga, on teoses rohkesti kasutatud intuitiivset meetodit; seepärast on jäetud ka täiesti kõrvale diferentsiaalvõrrandite lahendite olemasolulaused.

Teos on jaotatud neljaks peatükiks, millest esimene on pühendatud esimese järgu diferentsiaalvõrrandite tähtsamatele tüüpidele, kuna teise järgu diferentsiaalvõrranditele kui tehnikas väga sageli esinevatele on antud omaette, II peatükk. III peatükk on määratud kõrgema järgu, üldiselt n-järgu diferentsiaalvõrrandite käsitlemiseks, millest kaaluvama osa moodustavad lineaarsed võrrandid, kuna IV peatükk on juurde lisatud selleks, et anda sissejuhatavaid mõisteid ja lahendusviise diferentsiaalvõrrandite süsteemide alalt.

Diferentsiaalvõrrandite lahendusviiside selgituseks on igas §-s läbi töötatud vastavad näidised ja toodud, kus see vajalik, ka vastavad graafikud, mis tunduvalt illustreerivad tekstis arendatud teoreetilist materjali. Peale selle on iga peatüki lõppu paigutatud täienduseks vastavas peatükis esitatud teoreetilisele osale omaette §-na harjutusülesanded, mis on ühtlasi varustatud vastustega, et võimaldada lugejale raamatu läbitöötamisel omandatud teadmiste ja oskuste vajalikku kontrolli.

Tallinn, detsember 1940.

Autor.

Sisukord.

Lk.

§ 1. Diferentsiaalvõrrandi mõiste 9

I peatükk.

Esimese järgu diferentsiaalvõrrandid.

§ 2. Muutujate eraldamine 20
§ 3. Homogeensed diferentsiaalvõrrandid 26
§ 4. Homogeenseks taanduvad diferentsiaalvõrrandid 32
§ 5. Lineaarne diferentsiaalvõrrand 36
§ 6. Bernoulli' võrrand 42
§ 7. Diferentsiaalvõrrandi $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ otsene inteegrimine 45
§ 8. Integreeriv tegur 49
§ 9. Funktsiooni või argumendi suhtes ilmutatavad diferentsiaalvõrrandid 62
§ 10. Lagrange'i võrrand 66
§ 11. Clairaut' võrrand 68
§ 12. Iseärased lahendid 73
§ 13. Isogonaalsed ja ortogonaalsed trajektoorid 86
§ 14. Paralleelsed kõverad 90
§ 15. Evolvendid 94
§ 16. Diferentsiaalvõrrandi graafiline lahendamine 97
§ 17. Integraalkõverate kuju uurimine 101
§ 18. Harjutusülesandeid 105

II peatükk.

Teise järgu diferentsiaalvõrrandid.

§ 19. Teise järgu diferentsiaalvõrrandi määramine 113
§ 20. Teise järgu diferentsiaalvõrrandi geomeetriline tõlgendus . . . 117
§ 21. Diferentsiaalvõrrandid, milles ilmsesti puudub argument või tundmata funktsioon 119

Lk.
§ 22. Füüsikalisi rakendusi 124
§ 23. Konstantsete koefitsientidega lineaarne diferentsiaalvõrrand . . 136
§ 24. Homogeenne lineaarne diferentsiaalvõrrand 150
§ 25. Üldine lineaarne diferentsiaalvõrrand 154
§ 26. Diferentsiaalvõrrandi graafiline lahendamine 159
§ 27. Harjutusülesandeid 161

III peatükk.

n-järgu diferentsiaalvõrrandid.

§ 28. n-järgu diferentsiaalvõrrandi määramine 164
§ 29. Diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine 169
§ 30. Homogeenne lineaarne diferentsiaalvõrrand 176
§ 31. Üldine lineaarne diferentsiaalvõrrand 195
§ 32. Diferentsiaaloperaator 199
§ 33. Konstantsete koefitsientidega lineaarne diferentsiaalvõrrand . . 203
§ 34. Konstantsete koefitsientidega homogeenne lineaarne diferentsiaalvõrrand 209
§ 35. Määramata koefitsientide meetod 218
§ 36. Diferentsiaalvõrrandi lahendamine ridade abil 226
§ 37. Harjutusülesandeid 229

IV peatükk.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemid.

§ 38. Diferentsiaalvõrrandite süsteemi määramine 231
§ 39. Normaalsüsteemi lahendamine 233
§ 40. Üldine lahendamisviis 242
§ 41. Lineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteem 244
§ 42. Harjutusülesandeid 251
Ülesannete vastused 253

§ 1. Diferentsiaalvõrrandi mõiste.

1. Võrrandit, milles peale tundmata funktsiooni ja argumentide esinevad veel tundmata funktsiooni tuletised (või funktsiooni ja argumentide diferentsiaalid), nimetatakse d i f e r e n t - s i a a l v õ r r a n d i k s.

Diferentsiaalvõrrandit, milles tundmata funktsioon on ainult ühe muutuja funktsioon ja milles esinevad seega selle funktsiooni harilikud tuletised, s. o.

$$F\left(x\,,\ y\,,\ \frac{dy}{dx}\,,\ \frac{d^2y}{dx^2}\,,\ \ldots\,,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0\,,$$

kus y on x-i funktsioon, nimetatakse h a r i l i k u k s d i f e - r e n t s i a a l v õ r r a n d i k s.

Diferentsiaalvõrrandit, milles tundmata funktsioon on mitme muutuja funktsioon ja milles esinevad seega selle funktsiooni osatuletised, nagu

$$G\left(x\,,\ y\,,\ z\,,\ \frac{\partial z}{\partial x}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,,\ \ldots\,,\ \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right)=0\,,$$

kus z on x-i ja y funktsioon, nimetatakse o s a t u l e t i s t e g a d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i k s.

Nii on näiteks

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2}+y\,\frac{dy}{dx}=0$$

harilik diferentsiaalvõrrand ja

$$x\,\frac{\partial z}{\partial y}-y\,\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

osatuletistega diferentsiaalvõrrand.

Käesolevas teoses käsitleme ainult harilikke diferentsiaalvõrrandeid ja nimetame neid edaspidi lihtsalt diferentsiaalvõrranditeks.

Kui diferentsiaalvõrrandis esineva kõrgeima tuletise järk on n, siis nimetatakse seda võrrandit n-järgu diferentsiaalvõrrandiks. Näiteks

$$(2x - 3y) - x\frac{dy}{dx} = 0$$

ehk

$$(2x - 3y)dx - x\,dy = 0$$

on esimese järgu diferentsiaalvõrrand; võrrandid

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{9} = 0$$

ja

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = x$$

on teise järgu diferentsiaalvõrrandid.

Kui diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

vasak pool F on täispolünoom funktsiooni tuletiste $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ suhtes, kusjuures kõrgeima tuletise $\frac{d^ny}{dx^n}$ suurim aste on m, siis nimetatakse seda võrrandit m-astme diferentsiaalvõrrandiks. Näiteks

$$y^2 = 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

on esimese järgu ja teise astme diferentsiaalvõrrand, kuna

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

on teise järgu ja esimese astme diferentsiaalvõrrand.

Diferentsiaalvõrrandit

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

mille vasak pool F on lineaarne avaldis tundmata funktsiooni ja ta tuletiste suhtes, nimetatakse lineaarseks diferents i a a l v õ r r a n d i k s. n-järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} +$$
$$+ P_n(x)y = Q(x)\,,$$

kus

$$y\,,\quad \frac{dy}{dx}\,,\quad \frac{d^2y}{dx^2}\,,\quad \ldots\,,\quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

on esimeses astmes ja

$$P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ Q(x)$$

on mistahes x-i funktsioonid.

2. Diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x\,,\ y\,,\ \frac{dy}{dx}\,,\ \frac{d^2y}{dx^2}\,,\ \ldots\,,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

lahendamine seisab niisuguse funktsiooni $y = \varphi(x)$ otsimises, mis seda diferentsiaalvõrrandit rahuldaks. Funktsiooni $y = \varphi(x)$ nimetatakse diferentsiaalvõrrandi l a h e n d i k s ehk i n t e g r a a l i k s, kui diferentsiaalvõrrandis y asendamisel $\varphi(x)$-ga, $\frac{dy}{dx}$ asendamisel $\varphi'(x)$-ga, ..., $\frac{d^ny}{dx^n}$ asendamisel $\varphi^{(n)}(x)$-ga saame samasuse. Diferentsiaalvõrrand on lahendatud ehk inteegritud, kui on leitud kõik tema integraalid.

Et lahendada näiteks esimese järgu diferentsiaalvõrrand

$$F\left(x\,,\ y\,,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0\,,$$

selleks tuleb määrata niisugune funktsioon

$$y = \varphi(x)\,,$$

mille tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)\,,$$

et asendades saaksime samasuse

$$F[x\,,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)] = 0\,.$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - y \cos x = 0$$

lahend on

$$y = e^{\sin x},$$

sest arvutades

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x$$

ja asendades saame samasuse

$$e^{\sin x} \cos x - e^{\sin x} \cos x = 0 .$$

Samuti on selle diferentsiaalvõrrandi lahendid

$$y = 3e^{\sin x}, \quad y = -\frac{1}{2} e^{\sin x}, \quad y = \sqrt{5}\, e^{\sin x}$$

ehk üldiselt

$$y = ce^{\sin x},$$

kus c on mistahes konstantne suurus ehk p a r a m e e t e r, sest arvutades

$$\frac{dy}{dx} = ce^{\sin x} \cos x$$

ja asendades näeme, et

$$ce^{\sin x} \cos x - ce^{\sin x} \cos x = 0 .$$

Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$$

lahend on

$$y = \sin x ,$$

sest arvutades

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

ja asendades saame

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} .$$

Üldiselt on viimase diferentsiaalvõrrandi lahendiks

$$y = \sin (x + c) ,$$

kus c on parameeter, sest arvutades

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x + c)$$

ja asendades saame

$$\cos(x + c) = \sqrt{1 - \sin^2(x + c)} \; .$$

Andes leitud lahendites

$$y = ce^{\sin x}, \quad y = \sin(x + c)$$

parameetrile c teatavaid väärtusi, saame geomeetriliselt rea kõveraid, mis nimetatakse vastava diferentsiaalvõrrandi **i n t e g r a a l k õ v e r a t e k s**. Seega lahendid

$$y = ce^{\sin x}, \quad y = \sin(x + c)$$

esitavad geomeetriliselt **k õ v e r a t e   p a r v i**, kus c on parve parameeter.

3. Üldiselt on kõverate parv parameetriga c antud võrrandiga

$$y = \varphi(x, c)$$

ehk ilmutamata kujus

$$\Phi(x, y, c) = 0 \; .$$

Diferentsides funktsiooni

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

saame

$$\frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \; .$$

Kõrvaldades neist kahest võrrandist parameetri c, saame esimese järgu diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \; ,$$

mida rahuldab funktsioon

$$\Phi(x, y, c) = 0 \; .$$

See tähendab, et kui ilmutame viimasest funktsioonist y, s. o.

$$y = \varphi(x, c) \; ,$$

ja arvutame siis

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x, c)$$

ning asetame leitud y ja $\frac{dy}{dx}$ väärtused diferentsiaalvõrrandisse

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0,$$

saame

$$F[x,\ \varphi(x,\ c),\ \varphi'(x,\ c)]=0,$$

mille vasak pool, sõltumata parameetrist c, on samaselt 0.

Funktsiooni

$$\Phi\ (x,\ y,\ c)=0$$

ehk ilmutatult

$$y=\varphi(x,\ c)$$

nimetatakse diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$$

üldlahendiks ehk üldintegraaliks.

Iga üksik lahend, mis saadakse üldlahendist, andes parameetrile c kindla väärtuse, on diferentsiaalvõrrandi erilahend ehk eriintegraal.

Diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x,\ y,\frac{dy}{dx}\right)=0$$

erilahendi määramiseks peavad olema antud teatavad lisaandmed otsitava funktsiooni $\varphi(x)$ kohta. Et leida lahend $\varphi(x)$, mis omab $x=x_0$ puhul väärtust y_0, s. o. mis rahuldab algtingimust

$$\varphi(x_0)=y_0,$$

kus x_0 ja y_0 on algväärtused, selleks asendame üldlahendis

$$\Phi\ (x,\ y,\ c)=0$$

$x=x_0$ ja $y=y_0$, saame

$$\Phi\ (x_0,\ y_0,\ c)=0,$$

mis kujutab võrrandit ühe tundmatuga c. Kui see võrrand omab üht ja ainult üht lahendit $c=c_0$, siis määravad algväärtused x_0 ja y_0 ühe erilahendi

$$\Phi\ (x,\ y,\ c_0)=0$$

ehk ilmutatult

$$y = \varphi(x),$$

mis geomeetriliselt määrab ühe ja ainult ühe integraalkõvera, mis tasapinnal läbib punkti $(x_0 | y_0)$.

Kuid võib ka juhtuda, et mõned algväärtused ei võimalda parameetri c leidmist. Näiteks, kui diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on funktsioon

$$y^2 = cx,$$

mis esitab geomeetriliselt paraboolide parve, siis algväärtuste $x = 0$ ja $y = 0$ puhul saaksime $0 = c \cdot 0$, mis kehtib iga c puhul, s. o. kõik paraboolid läbivad punkti $(0 | 0)$. Seega algväärtuste $x = 0$ ja $y = 0$ puhul diferentsiaalvõrrandil puudub ühene erilahend.

a) Ringjooni esitavat funktsiooni

$$\Phi(x, y, c) = x^2 + y^2 - c^2 = 0,$$

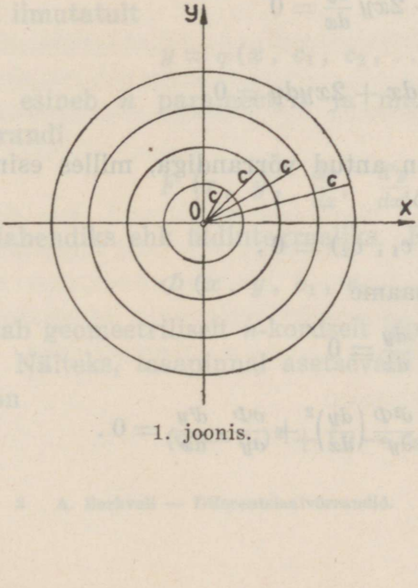
kus c on parameetriks (1. joon.), diferentsides saame

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

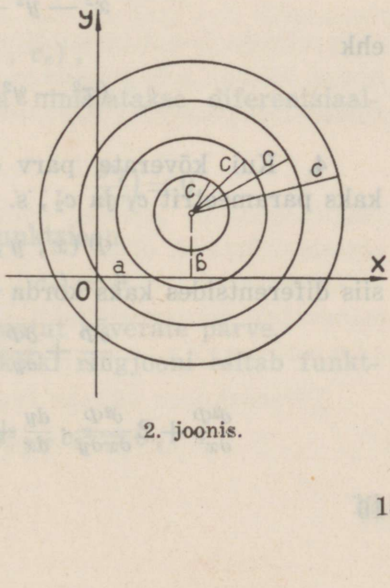
ehk

$$xdx + ydy = 0,$$

mis on vastav diferentsiaalvõrrand, mille üldlahend esitab tähendatud ringjoonte parve, mille keskpunktid on nullpunktis.



1. joonis.



2. joonis.

b) Kui ringjooni esitab funktsioon

$$(x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0,$$

kus c on parameetriks (2. joon.), siis vastav diferentsiaalvõrrand on

$$2(x-a)+2(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

ehk

$$(x-a)dx+(y-b)dy=0.$$

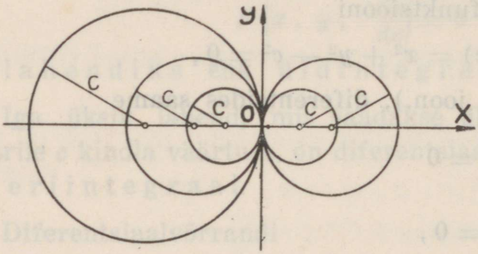
c) Kui ringjooned läbivad nullpunkti ja nende keskpunktid asetsevad X-teljel (3. joon.), siis neid ringjooni esitab funktsioon

$$(x-c)^2+y^2-c^2=0,$$

kus c on parameetriks. Diferentsides saame

$$2(x-c)+2y\frac{dy}{dx}=0.$$

Kõrvaldame viimasest võrrandist c; selleks korrutame selle võrrandi x-ga ja siis lahutame temast ringjoonte võrrandi, saame vastava diferentsiaalvõrrandi



3. joonis.

$$x^2-y^2+2xy\frac{dy}{dx}=0$$

ehk

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0.$$

4. Kui kõverate parv on antud võrrandiga, milles esineb kaks parameetrit c_1 ja c_2, s. o.

$$\Phi(x, y, c_1, c_2)=0,$$

siis diferentsides kaks korda saame

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Kõrvaldame neist kolmest võrrandist parameetrid c_1 ja c_2, saame teise järgu diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x\,,\, y\,,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0\,,$$

mida rahuldab funktsioon

$$\Phi\,(x\,,\, y\,,\, c_1\,,\, c_2) = 0\,,$$

mis esitab geomeetriliselt kahekordselt lõpmatut kõverate parve.

Funktsiooni

$$\Phi\,(x\,,\, y\,,\, c_1\,,\, c_2) = 0$$

ehk ilmutatult

$$y = \varphi(x\,,\, c_1\,,\, c_2)$$

nimetatakse diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x\,,\, y\,,\, \frac{dy}{dx}\,,\, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

üldlahendiks ehk üldintegraaliks. Erilahendi saamiseks tuleb siin parameetritele c_1 ja c_2 anda vastavad kindlad väärtused.

Analoogiliselt jätkates võime saada kolmanda, neljanda jne., üldiselt n-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x\,,\, y\,,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2}\,,\, \ldots\,,\, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0\,,$$

mida rahuldab funktsioon

$$\Phi\,(x\,,\, y\,,\, c_1\,,\, c_2\,,\, \ldots\,,\, c_n) = 0$$

ehk ilmutatult

$$y = \varphi(x\,,\, c_1\,,\, c_2\,,\, \ldots\,,\, c_n)\,,$$

kus esineb n parameetrit ja mida nimetatakse diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x\,,\, y\,,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2},\, \ldots\,,\, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

üldlahendiks ehk üldintegraaliks. Funktsioon

$$\Phi\,(x\,,\, y\,,\, c_1\,,\, c_2\,,\, \ldots\,,\, c_n) = 0$$

esitab geomeetriliselt n-kordselt lõpmatut kõverate parve.

Näiteks, tasapinnal asetsevaid kõiki ringjooni esitab funktsioon

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 - c_3{}^2 = 0\,,$$

kus c_1, c_2 ja c_3 on parameetriteks. Diferentsides kolm korda saame

$$2(x-c_1)+2(y-c_2)\frac{dy}{dx}=0$$

$$2+2(y-c_2)\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

$$2(y-c_2)\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0\,.$$

Kahes viimases võrrandis ei esine enam parameetreid c_1 ja c_3. Parameetri c_2 kõrvaldamiseks kahest viimasest võrrandist korrutame esimese avaldisega $\frac{d^3y}{dx^3}$ ja teise avaldisega $\frac{d^2y}{dx^2}$ ning siis lahutame esimesest teise, saame kolmanda järgu diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\cdot\frac{d^3y}{dx^3}-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\cdot\frac{dy}{dx}=0\,,$$

mille integraalkõverad on kõik ringjooned tasapinnal.

5. Nagu nägime, omab iga n-järgu diferentsiaalvõrrand, mis on tuletatud võrrandist

$$\Phi\,(x\,,\ y\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ \ldots,\ c_n)=0$$

diferentsimise ja parameetrite kõrvaldamise teel, lõpmata palju integraale, mis sõltuvad n meelevaldsest parameetrist ja on antud võrrandiga

$$\Phi\,(x\,,\ y\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ \ldots,\ c_n)=0\,,$$

mida nimetasime n-järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks. Sellest ei või aga veel järeldada, et nii saadud n-järgu diferentsiaalvõrrand ei oma veel teisi integraale, mis ei esine üldintegraalis

$$\Phi\,(x\,,\ y\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ \ldots,\ c_n)=0\,.$$

Nagu edaspidi näeme, esineb tõepoolest juhtumeid, kus diferentsiaalvõrrand omab üksikuid integraale, mis pole tuletatavad üldintegraalist, missugused väärtused me ka annaksime seal esinevatele parameetritele. Niisuguseid integraale nimetatakse s i n g u l a a r s e t e k s ehk i s e ä r a s t e k s integraalideks.

Diferentsides näiteks funktsiooni

$$(x+c)^2+y(y-1)=0$$

saame

$$2(x+c)+(2y-1)\frac{dy}{dx}=0 .$$

Kõrvaldades neist võrranditest parameetri c, leiame diferentsiaalvõrrandi

$$(2y-1)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+4y(y-1)=0 ,$$

mille üldlahend on

$$(x+c)^2+y(y-1)=0 .$$

Peale selle rahuldab leitud diferentsiaalvõrrandit veel funktsioon

$$y=1 ,$$

mis ei esine üldlahendis ja mis on seega iseärane lahend.

6. Kui meil on vabalt antud n-järgu diferentsiaalvõrrand

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

ja meil ei ole teada, kas see diferentsiaalvõrrand on tuletatud teatavast n parameetriga võrrandist diferentsimise ja parameetrite kõrvaldamise teel, siis ei või me veel eespool-öeldu põhjal järeldada, et ta omab tingimata üldlahendit

$$\Phi\,(x\,,\ y\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ \ldots,\ c_n)=0 .$$

Siin meie ei hakka tõestama üldjuhul üldlahendi olemasolu, vaid asume otsekohe teatavate lihtsamate, kuid praktiliselt tähtsamate diferentsiaalvõrrandite tüüpide käsitlemisele, kus võrrandi lahendamine taandub üksikute määramata integraalide arvutamisele, s. o. üksikutele k v a d r a t u u r i d e l e, mis võimaldavad otseselt üldlahendit leida.

I peatükk.

Esimese järgu diferentsiaalvõrrandid.

§ 2. Muutujate eraldamine.

1. Et lahendada diferentsiaalvõrrand, selleks on vaja leida kõik ta integraalid, s. o. üldintegraal ja iseärased integraalid, kui viimased on olemas.

Kõige lihtsam harilikkudest esimese järgu diferentsiaalvõrranditest on võrrand

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,,$$

kus $f(x)$ on ainult x-i funktsioon. Selle diferentsiaalvõrrandi lahendamine seisab funktsiooni $f(x)$ integraali leidmises, s. o.

$$y = \int f(x)\,dx = \varphi(x) + c\,,$$

mis on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend, kus c on inteegrimiskonstant ehk parameeter.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

üldlahend on

$$y = \int \frac{dx}{x} = \ln x + \ln c$$

ehk

$$y = \ln cx\,,$$

kus $\ln c$ on inteegrimiskonstandiks. See üldlahend esitab geomeetriliselt logaritmilisi kõveraid.

2. Vaatleme esimese järgu diferentsiaalvõrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

kus

$$M(x, y) = f_1(x)f_2(y), \quad N(x, y) = f_3(x)f_4(y),$$

s. o.

$$f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0.$$

Siin kujutab ühe kui ka teise diferentsiaali koefitsient kahe funktsiooni korrutist, milledest üks funktsioon sõltub ainult ühest muutujast ja teine funktsioon ainult teisest muutujast, mistõttu on võimalik muutujaid eraldada nii, et võrrandi üks osa sõltub ainult x-st ja dx-st ning teine osa y-st ja dy-st, s. o.

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0,$$

mida võime lahendada kahe määramata integraali ehk kahe kvadratuuri abil. Sest kui märgime diferentsiaalvõrrandi kujus

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)} + \frac{f_4(y)}{f_2(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

kus y ja $\frac{dy}{dx}$ on x-i funktsioonid, siis viimast võrdust inteegrides saame

$$\int \left[\frac{f_1(x)}{f_3(x)} + \frac{f_4(y)}{f_2(y)} \cdot \frac{dy}{dx}\right]dx = C$$

ehk

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

Kui siin vastavad eriintegraalid on $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(y)$, siis antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$\varphi_1(x) + C_1 + \varphi_2(y) + C_2 = C$$

ehk

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(y) = c,$$

s. o.

$$\varphi(x, y) = c,$$

kus $c = C - C_1 - C_2$. Need lahendid esitavad teatud kõverate parve. Andes parameetrile c ühe kindla väärtuse, saame eriintegraali, mis määrab geomeetriliselt ühe integraalkõvera.

a) Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$x(1-y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

üldlahendi saame, kui eraldame muutujad, s. o.

$$\frac{ydy}{1-y^2} + \frac{xdx}{1+x^2} = 0,$$

ja integreerime

$$\int \frac{ydy}{1-y^2} + \int \frac{xdx}{1+x^2} = C$$

ehk

$$-\frac{1}{2}\ln(1-y^2) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln c,$$

kus märgime integreerimiskonstandiks $C = \frac{1}{2}\ln c$, saame

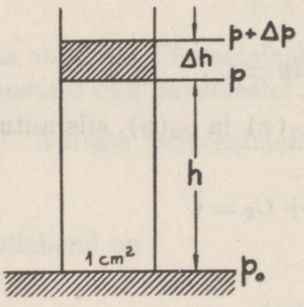
$$\frac{1+x^2}{1-y^2} = c,$$

millest

$$y = \sqrt{\frac{c-1-x^2}{c}}.$$

b) **Leida kõrgus h merepinnast, kui õhurõhk selles kõrguses on p.**

Kui kõrgus h kasvab Δh võrra, siis õhurõhu kasv $\Delta p < 0$, sest $p < p_0$ (4. joon.), kus p_0 on õhurõhk veepinnal. Õhurõhk 1 cm² pinnale sõltub õhusamba kaalust, mis mõjub 1 cm² pinnale. Õhusamba, kõrgusega Δh, kaal on



4. joonis.

$$1 \cdot \Delta h \cdot \varrho,$$

kus ϱ on õhutihedus, mis on võrdeline õhurõhuga p, kui temperatuur on ühtlane. Seega kõrguse h puhul

$$\varrho = kp$$

ja kõrguse $h + \Delta h$ puhul

$$\varrho = k(p + \Delta p),$$

kus k on konstantne võrdetegur. Võtame õhusamba, kõrgusega Δh, keskmise tiheduse, mis peitub kp ja $k(p+\Delta p)$ vahel, s. o.

$$\varrho = k(p + \Theta \cdot \Delta p),$$

kus $0 < \Theta < 1$. Siis

$$1 \cdot \Delta h \cdot k(p + \Theta \cdot \Delta p) = -\Delta p ,$$

kus miinusmärk on sellepärast, et positiivsele Δh vastab negatiivne Δp. Seega

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -k(p + \Theta \cdot \Delta p) ,$$

ja kui $\Delta h \to 0$, siis

$$\frac{dp}{dh} = -kp ,$$

mis on õhurõhu diferentsiaalvõrrand, mis kehtib argumendi h iga väärtuse puhul. Eraldades muutujad

$$\frac{dp}{p} = -k dh$$

ja inteegrides

$$\int \frac{dp}{p} = -k \int dh ,$$

s. o.

$$\ln p = -kh + \ln c ,$$

leiame üldlahendi

$$p = ce^{-kh} .$$

Erilahendi saamiseks peavad olema antud veel lisaandmed. Et merepinnal on $h = 0$ ja $p = p_0$, siis algtingimusest

$$p_0 = ce^{-k \cdot 0}$$

leiame, et

$$c = p_0 ,$$

ja erilahend on seega

$$p = p_0 e^{-kh} ,$$

millest

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p} ,$$

kus p saadakse baromeetri abil.

Sama saaduse saame, kui kasutame õhurõhu diferentsiaalvõrrandi lahendamisel määratud integraale, märkides algväätused vastavalt määratud integraalide alumisteks rajadeks, s. o.

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -k \int_{0}^{h} dh,$$

millest

$$\ln p - \ln p_0 = -kh$$

ja

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p}.$$

Kui lugeda siin $p_0 = 1$, siis

$$h = -\frac{\ln p}{k}.$$

c) **Leida vabalt langeva keha kiirus t sekundi möödumisel.**

Olgu langeva keha mass m, mis langemisel ei oma väga suurt kiirust. Siis on õhutakistus R võrdeline keha langemise kiirusega v, s. o.

$$R = kv,$$

kus k on konstantne võrdetegur.

Keha langemine toimub siin kahe tungi mõjul: raskustungi mg, mis on suunatud allapoole, ja takistustungi kv, mis teotseb eelmisele vastassuunas, mõjul. Seega

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

mis esitab esimese järgu diferentsiaalvõrrandit. Muutujaid eraldades

$$\frac{m}{mg - kv} dv = dt$$

ja inteegrides

$$\int_{0}^{v} \frac{mdv}{mg - kv} = \int_{0}^{t} dt,$$

sest langemise algmomendil $v = 0$ ja $t = 0$, saame

$$-\frac{m}{k} \Big| \ln (mg - kv) \Big|_{0}^{v} = \Big| t \Big|_{0}^{t}$$

ehk

$$\frac{mg - kv}{mg} = e^{-\frac{k}{m}t},$$

millest keha langemise kiirus

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Kui siin t lõpmata kasvab, s. o. $t \to \infty$, siis $v \to \frac{mg}{k}$. Kui algkiiruseks võtta $v = v_0$, siis

$$-\frac{m}{k}\Big|\ln(mg - kv)\Big|_{v_0}^{v} = \Big|t\Big|_0^t$$

ehk

$$\frac{mg - kv}{mg - kv_0} = e^{-\frac{k}{m}t},$$

millest

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Siin samuti, kui $t \to \infty$, siis $v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \to 0$ ja $v \to \frac{mg}{k}$.

3. Kui esimese järgu diferentsiaalvõrrand

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

esitab m-astme diferentsiaalvõrrandit, s. o.

$$F_0(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + F_1(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + F_{m-1}(x, y)\frac{dy}{dx} + \\ + F_m(x, y) = 0,$$

kus m on positiivne täisarv, siis sellel võrrandil on tuletise $\frac{dy}{dx}$ suhtes m juurt, mis on x-i ja y funktsioonid. Oletame, et meil on võimalik tuletise suhtes seda diferentsiaalvõrrandit lahendada ja leida m juurt, siis saame m esimese astme diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = f_2(x, y), \quad \ldots, \quad \frac{dy}{dx} = f_m(x, y).$$

Kui need diferentsiaalvõrrandid on lahendatavad muutujate eraldamise teel, siis saame nende üldlahendid kujus

$$\varphi_1(x, y) = c, \quad \varphi_2(x, y) = c, \quad \ldots, \quad \varphi_m(x, y) = c,$$

mis esitavad kõverate parvi. Kõikide kõverate parvede võrrand on siis

$$[\varphi_1(x, y) - c] \cdot [\varphi_2(x, y) - c] \cdots [\varphi_m(x, y) - c] = 0,$$

mis on ühtlasi m-astme diferentsiaalvõrrandi üldlahend, sest temaga määratud iga funktsioon rahuldab üht võrranditest

$$\varphi_1(x, y) = c, \quad \varphi_2(x, y) = c, \quad \ldots, \quad \varphi_m(x, y) = c$$

ja seega üht diferentsiaalvõrranditest

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = f_2(x, y), \quad \ldots, \quad \frac{dy}{dx} = f_m(x, y)$$

ning järelikult ka m-astme diferentsiaalvõrrandit.

Näiteks teise astme diferentsiaalvõrrandit

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0$$

tuletise $\frac{dy}{dx}$ suhtes lahendades saame kaks diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{x}.$$

Eraldades muutujad

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{dx}{x}$$

ja integreerides saame vastavalt nende üldlahendid

$$2\sqrt{y} - \ln x = c, \quad 2\sqrt{y} + \ln x = c.$$

Järelikult, antud teise astme diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$(2\sqrt{y} - \ln x - c)(2\sqrt{y} + \ln x - c) = 0$$

ehk

$$(2\sqrt{y} - c)^2 - \ln^2 x = 0,$$

millest

$$y = \frac{(c \pm \ln x)^2}{4}.$$

§ 3. Homogeensed diferentsiaalvõrrandid.

Kui esimese järgu diferentsiaalvõrrandis

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

koefitsiendid M ja N on ühe ja sama astme homogeensed x ja y funktsioonid, siis nimetatakse seda võrrandit h o m o g e e n s e k s diferentsiaalvõrrandiks, mida võime sel juhul esitada kujus

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks, et võimalik oleks muutujaid eraldada, märgime

$$\frac{y}{x} = t, \quad \text{s. o.} \quad y = xt,$$

kus t on uus muutuja; siis

$$dy = xdt + tdx.$$

Asetades need väärtused homogeensesse võrrandisse $\frac{y}{x}$ ja dy asemele, saame

$$\frac{xdt + tdx}{dx} = f(t)$$

ehk

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x},$$

milles muutujad on teineteisest eraldatud, kui $f(t) - t \neq 0$. Saadud võrrandit integreerides

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln cx$$

leiame t, s. o.

$$t = \varphi(x, c),$$

ja lõpuks

$$y = x \cdot \varphi(x, c),$$

mis on homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

Juhul, kui võrrand

$$f(t) - t = 0$$

omab juuri

$$t_1, \ t_2, \ \ldots, \ t_m,$$

siis

$$y = xt_1, \quad y = xt_2, \quad \ldots, \quad y = xt_m$$

on homogeense diferentsiaalvõrrandi iseärased lahendid. Need on tõepoolest diferentsiaalvõrrandi lahendid, sest kui

$$\frac{y}{x} = t\,,$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(t) = t_1\,, \quad \text{või } t_2\,, \quad \ldots, \quad \text{või } t_m\,,$$

sest $f(t) - t = 0$.

a) Näiteks, homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$(2x - y)dx - (x - 5y)dy = 0$$

ehk

$$\left(2 - \frac{y}{x}\right)dx - \left(1 - 5 \cdot \frac{y}{x}\right)dy = 0$$

üldlahendi leidmiseks märgime

$$\frac{y}{x} = t\,, \quad dy = xdt + tdx\,.$$

Asendades saame

$$(2 - t)dx - (1 - 5t)(xdt + tdx) = 0$$

ja eraldades muutujad

$$\frac{5t - 1}{5t^2 - 2t + 2}\,dt + \frac{dx}{x} = 0\,,$$

millest

$$\int \frac{5t - 1}{5t^2 - 2t + 2}\,dt + \int \frac{dx}{x} = C$$

ehk

$$\frac{1}{2}\ln(5t^2 - 2t + 2) + \ln x = \frac{1}{2}\ln c\,,$$

kui märgime $C = \frac{1}{2}\ln c$; siis

$$\ln(5t^2 - 2t + 2) + \ln x^2 = \ln c$$

ja

$$5x^2t^2 - 2x^2t + 2x^2 = c\,.$$

Asendades $t = \frac{y}{x}$, saame antud homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

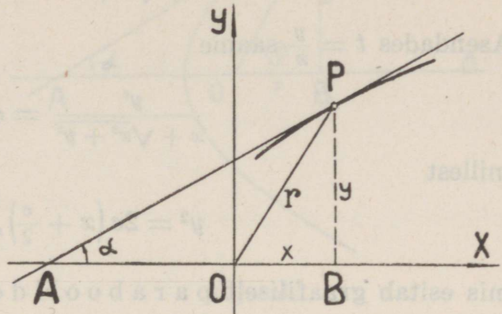
$$2x^2 - 2xy + 5y^2 = c\,,$$

mis esitab graafiliselt e l l i p s i t e p a r v e, kui $c > 0$.

b) **Leida kõver, mille iga punkti abstsissi x ja raadiusvektori r summa on võrdne puutuja alusega.**

Märgime kõvera punktist $P \equiv (x \mid y)$ raadiusvektori $PO = r$ ja puutuja selles punktis tõusunurgaga α (5. joon.). Siis puutuja alus on

$$AB = \frac{y}{\tan \alpha} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$$



5. joonis.

ja seega

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = x + r,$$

millest

$$ydx = (x + r)dy.$$

Et

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

siis

$$ydx = (x + \sqrt{x^2 + y^2})dy,$$

mis on homogeenne diferentsiaalvõrrand, sest jagades võrrandi mõlemad pooled x-ga, saame

$$\frac{y}{x} dx = \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right] dy.$$

Märgime

$$\frac{y}{x} = t, \quad dy = xdt + tdx.$$

Asendades saame

$$tdx = (1 + \sqrt{1 + t^2})(xdt + tdx)$$

ehk muutujaid eraldades

$$\frac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t\sqrt{1 + t^2}} dt + \frac{dx}{x} = 0;$$

inteegrime

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1 + t^2}} + \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dx}{x} = \ln c$$

ehk

$$-\ln \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} + \ln t + \ln x = \ln c,$$

millest

$$\frac{xt^2}{1+\sqrt{1+t^2}} = c.$$

Asendades $t = \frac{y}{x}$ saame

$$\frac{y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = c,$$

millest

$$y^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right),$$

mis esitab graafiliselt p a r a b o o l i d e p a r v e, lagipunktidega $\left(-\frac{c}{2}\,\middle|\,0\right)$ ja ühise fookusega nullpunktis.

c) Leida kõver, mille puhul nullpunktist väljuvad kiired on pärast kõveras peegeldumist paralleelsed X-teljega.

Käesolev näidis on homogeense diferentsiaalvõrrandi klassiline ülesanne.

Olgu kiir $\overrightarrow{CP} \parallel X$-teljega (6. joon.) ja pärast peegeldumist läbigu nullpunkti. Tõmbame punktis P puutuja AD. Siis kiire peegeldumisel $\widehat{DPC} = \widehat{APO}$. Et $\widehat{PAO} = \widehat{DPC}$, siis $\widehat{APO} = \widehat{PAO}$ ja $\widehat{POB} = 2 \cdot \widehat{PAO}$, s. o.

$$\beta = 2\alpha.$$

Et siin

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \tan\beta = \frac{y}{x}$$

ja

$$\tan\beta = \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},$$

siis

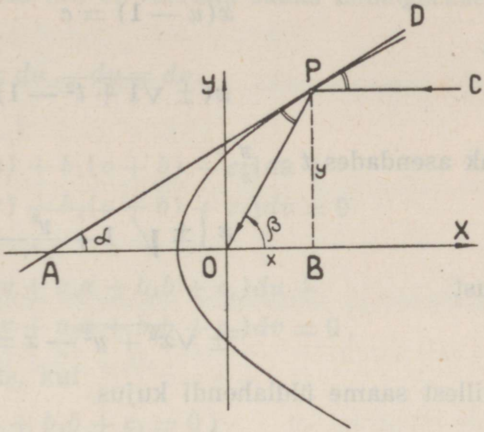
$$\frac{y}{x} = \frac{2\,\frac{dy}{dx}}{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ehk

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\,\frac{dy}{dx} - y = 0\,,$$

mis on teise astme homogeenne diferentsiaalvõrrand. Lahendades selle võrrandi tuletise $\frac{dy}{dx}$ suhtes, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$



6. joonis.

ehk

$$dy = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}\,dx\,,$$

ja märkides

$$\frac{y}{x} = t\,, \quad dy = x dt + t dx\,,$$

saame

$$x dt + t dx = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + t^2}}{t}\,dx$$

ehk muutujaid eraldades

$$\frac{t dt}{1 + t^2 \mp \sqrt{1 + t^2}} + \frac{dx}{x} = 0\,.$$

Edasi kasutame asendusmeetodit

$$\pm \sqrt{1 + t^2} = u\,, \quad t dt = u du\,,$$

siis diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\frac{du}{u - 1} + \frac{dx}{x} = 0\,,$$

mille integraal on

$$\ln(u - 1) + \ln x = \ln c$$

ehk

$$x(u-1)=c$$

ja

$$x(\pm\sqrt{1+t^2}-1)=c$$

ehk asendades $t=\frac{y}{x}$

$$x\left(\pm\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}-1\right)=c,$$

kust

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}-x=c,$$

millest saame üldlahendi kujus

$$y^2=2c\left(x+\frac{c}{2}\right),$$

kus c on 0-st erinev mistahes konstantne suurus.

Saadud üldlahend esitab graafiliselt paraboolide parve, lagipunktidega $\left(-\frac{c}{2}\middle|0\right)$ ja ühise fookusega nullpunktis.

Pöörates üht neist paraboolidest ümber X-telje, saame pöördparaboloidi ehk nn. paraboolse peegli, mille nõgusal pinnal X-teljega paralleelsed kiired peegelduvad ja ühinevad fookuses ning ümberpöördult.

§ 4. Homogeenseks taanduvad diferentsiaalvõrrandid.

1. Kui diferentsiaalvõrrand

$$M(x, y)dx+N(x, y)=0$$

esineb kujus

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0,$$

mis ei ole homogeenne, siis on üldiselt võimalik teisendada teda telgede rööplükkega

$$x=u+a, \quad y=v+b$$

nõnda, et ta saaks homogeenseks, kusjuures a ja b on konstantsed suurused, mida tuleb valida nii, et võrrand saaks homogeenseks.

Et siin

$$dx = du\,,\quad dy = dv\,,$$

siis asendades saame

$$\begin{aligned}&[a_1(u+a)+b_1(v+b)+c_1]du+\\&+[a_2(u+a)+b_2(v+b)+c_2]dv=0\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}&(a_1u+b_1v+a_1a+b_1b+c_1)du+\\&+(a_2u+b_2v+a_2a+b_2b+c_2)dv=0\,,\end{aligned}$$

mis muutub homogeenseks, kui

$$\left.\begin{aligned}a_1a+b_1b+c_1=0\\a_2a+b_2b+c_2=0\end{aligned}\right\}.$$

Selle võrrandsüsteemi lahendus a ja b suhtes annab a ja b väärtused, mis uues koordinaadistikus muudavad antud diferentsiaalvõrrandi homogeenseks, s. o.

$$(a_1u+b_1v)du+(a_2u+b_2v)dv=0\,.$$

Näiteks, diferentsiaalvõrrandi

$$(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$$

homogeenseks muutmiseks märgime

$$x=u+a\,,\quad y=v+b\,,$$

millest

$$dx=du\,,\quad dy=dv\,.$$

Paigutame need väärtused antud võrrandisse, saame

$$(u+v+a+b-2)du+(u-v+a-b+4)dv=0\,.$$

Et viimane võrrand oleks homogeenne, selleks tuleb a ja b valida niisugused, et

$$\left.\begin{aligned}a+b-2=0\\a-b+4=0\end{aligned}\right\},$$

mille lahendus annab

$$a=-1\,,\quad b=3\,.$$

Antud diferentsiaalvõrrand saab seega

$$x = u - 1\,, \quad y = v + 3$$

puhul homogeenseks, s. o. omab kuju

$$(u + v)du + (u - v)dv = 0\,,$$

mida lahendame eespool-käsiteldud viisil, tähistades

$$\frac{v}{u} = t\,, \quad dv = udt + tdu\,.$$

Asendades ja muutujaid eraldades saame

$$\frac{1 - t}{1 + 2t - t^2}\,dt + \frac{du}{u} = 0\,,$$

mille integraal on

$$\frac{1}{2}\ln\,(1 + 2t - t^2) + \ln u = \frac{1}{2}\,\ln C$$

ehk

$$(1 + 2t - t^2)u^2 = C\,.$$

Kõrvaldame t, asendades $t = \frac{v}{u}$, saame

$$\left(1 + 2\,\frac{v}{u} - \frac{v^2}{u^2}\right)u^2 = C$$

ehk

$$u^2 + 2uv - v^2 = C\,,$$

ja lõpuks kõrvaldame u ja v, asendades $u = x + 1$ ja $v = y - 3$, saame üldlahendi

$$(x + 1)^2 + 2(x + 1)(y - 3) - (y - 3)^2 = C$$

ehk

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = c\,,$$

kus $c = C + 14$. Saadud võrrand esitab geomeetriliselt h ü p e r b o o l i d e p a r v e.

2. Diferentsiaalvõrrandit

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

võime telgede rööplükkega muuta homogeenseks ainult siis, kui

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Kui aga $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ehk

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k\,,$$

s. o.

$$a_1 = a_2k\,, \quad b_1 = b_2k$$

ja seega

$$(a_2kx + b_2ky + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0\,,$$

siis võime kasutada asendust

$$a_2x + b_2y = t\,,$$

millest

$$dy = \frac{dt - a_2dx}{b_2}\,,$$

kusjuures saame diferentsiaalvõrrandi

$$(kt + c_1)dx + (t + c_2)\left(\frac{dt - a_2dx}{b_2}\right) = 0\,,$$

kus võime eraldada muutujad, s. o.

$$\frac{t + c_2}{a_2(t + c_2) - b_2(kt + c_1)}\,dt = dx\,.$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

üldlahendi leidmiseks märgime

$$x + y = t\,, \quad dy = dt - dx\,.$$

Asendades saame

$$(t + 1)dx + (2t - 1)(dt - dx) = 0$$

ehk

$$\frac{2t - 1}{t - 2}\,dt = dx\,,$$

mille integraal on

$$2t + 3 \ln (t - 2) = x + c\,.$$

Paigutades t asemele $x + y$ saame

$$2(x + y) + 3 \ln (x + y - 2) = x + c$$

ehk

$$x + 2y + 3 \ln (x + y - 2) = c\,.$$

§ 5. Lineaarne diferentsiaalvõrrand.

Esimese järgu lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\,,$$

kus y ja $\frac{dy}{dx}$ on esimeses astmes ning $P(x)$ ja $Q(x)$ on pidevad x-i funktsioonid. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leidmiseks käsitleme siinkohal kaht lahendamisviisi.

a) **Bernoulli' meetod:**

Tähistame

$$y = uv\,,$$

kus u ja v on uued muutujad, s. o. tundmatud x-i funktsioonid, siis

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\,.$$

Paigutame y ja $\frac{dy}{dx}$ väärtused antud diferentsiaalvõrrandisse, saame

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

ehk

$$u\frac{dv}{dx} + v\left[\frac{du}{dx} + P(x)u\right] = Q(x)\,,$$

milles u olgu valitud nõnda, et

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0\,,$$

kust eraldades muutujad

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx$$

ja integrides leiame

$$\ln u = -\int P(x)dx\,, \quad u = e^{-\int P(x)dx}\,,$$

kus integrimiskonstanti ei tarvitse märkida, sest et meil tuleb anda u-le mingi niisugune väärtus, mis rahuldaks võrrandit

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0\,.$$

Vastava u valiku puhul võime diferentsiaalvõrrandi esitada kujus

$$u\frac{dv}{dx} = Q(x)\,,$$

millest

$$dv = Q(x)\frac{dx}{u} = Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx$$

ja

$$v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + c$$

ning

$$y = uv = e^{-\int P(x)dx}\Big[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + c\Big].$$

Kui $Q(x) = 0$, siis on meil tegemist y ja $\frac{dy}{dx}$ suhtes homogeense diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0\,,$$

kus muutujad on eraldatavad, s. o.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx\,,$$

mille integraal on

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln c$$

ja seega

$$y = ce^{-\int P(x)dx}\,.$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

üldlahendi leidmiseks märgime

$$y = uv\,,$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ja antud diferentsiaalvõrrand teisendub kujuks

$$u \frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) = x,$$

kus u valime nõnda, et

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$$

ehk

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x},$$

mida inteegrides saame

$$\ln u = \ln x, \quad u = x.$$

v leiame võrrandist

$$u \frac{dv}{dx} = x,$$

kus $u = x$, ja seega

$$dv = dx$$

ning

$$v = \int dx = x + c.$$

Diferentsiaalvõrrandi üldlahend on siis

$$y = uv = x(x + c)$$

ehk

$$y = x^2 + cx,$$

mis esitab nullpunkti läbivate paraboolide parve.

b) **Lagrange'i meetod:**

Võtame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

asemel enne homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0,$$

milles eraldame muutujad

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

ja inteegrime, saame viimase võrrandi üldlahendi

$$\ln y + \int P(x)dx = \ln C\,, \quad y = Ce^{-\int P(x)dx}\,.$$

Asendame selles üldlahendis vabalt võetava konstandi C niisuguse x-i funktsiooniga, et see üldlahend muutuks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

üldlahendiks. Olgu

$$C = \varphi(x)$$

niisugune, et

$$y = \varphi(x)e^{-\int P(x)dx}$$

oleks lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks, kui $Q(x) \neq 0$. Viimast funktsiooni diferentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)e^{-\int P(x)dx} - \varphi(x)e^{-\int P(x)dx}\,P(x)\,.$$

Asetame y ja $\frac{dy}{dx}$ väärtused diferentsiaalvõrrandisse

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\,,$$

saame

$$\varphi'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)\varphi(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)\varphi(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

ehk

$$\varphi'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)\,,$$

millest

$$\varphi'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

ja

$$\varphi(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + c\,.$$

Asetame saadud $\varphi(x)$-i väärtuse võrrandisse

$$y = \varphi(x) e^{-\int P(x)dx},$$

saame

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + c \right].$$

Näiteks eelmise diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

üldlahendi leidmiseks võtame homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

ja leiame enne selle üldlahendi

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln y = \ln x + \ln C, \quad y = Cx.$$

Märgime

$$C = \varphi(x),$$

siis

$$y = x\varphi(x)$$

ja

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) + x\varphi'(x),$$

mida algvõrrandisse asetades saame

$$\varphi(x) + x\varphi'(x) - \varphi(x) = x$$

ehk

$$\varphi'(x) = 1,$$

mille integraal on

$$\varphi(x) = x + c.$$

Seega

$$y = x^2 + cx.$$

c) Kasutame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$$

üldlahendi leidmiseks otseselt valemit

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + c\right].$$

Siin

$$P(x) = -\frac{2}{x+1}, \quad Q(x) = (x+1)^2.$$

Siis

$$\int P(x)dx = -2\int\frac{dx}{x+1} = -2\ln(x+1)\,.$$

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{2\ln(x+1)} = (x+1)^2,$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-2\ln(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2},$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx = \int dx = x + c\,.$$

Seega üldlahend on

$$y = (x+1)^2(x+c)\,.$$

d) **Leida elektrivoolu tugevus I ajamomendil t, kui takistus on R ja endainduktsioon on L.**

Elektromotoorne jõud E on ajaga t järgmises funktsionaalses seoses

$$E = E_0\sin(\omega t)\,,$$

kus E_0 ja ω on konstantsed suurused. Et takistuse R puhul elektromotoorne jõud on RI ja endainduktsiooni L puhul $L\frac{dI}{dt}$ siis

$$E_0\sin(\omega t) = RI + L\frac{dI}{dt}$$

ehk

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E_0}{L}\sin(\omega t)\,,$$

mis kujutab lineaarset diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend on

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\,dt + c\right] =$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t}\left[E_0 e^{\frac{R}{L}t}\,\frac{R\sin(\omega t) - L\omega\cos(\omega t)}{R^2 + L^2\omega^2} + c\right]$$

ehk

$$I = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}\left[R \sin(\omega t) - L\omega \cos(\omega t)\right] + ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Kui ajamomendil $t = 0$ on ka $I = 0$, siis

$$c = \frac{E_0 L\omega}{R^2 + L^2\omega^2},$$

ja erilahend sel puhul on

$$I = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}\left[R \sin(\omega t) - L\omega \cos(\omega t) + L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

§ 6. Bernoulli' võrrand.

Diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

kus $n \neq 0$ ega 1, nimetatakse Bernoulli' võrrandiks. Vastasel korral, kui n oleks 0 või 1, esitaks ta lineaarset diferentsiaalvõrrandit.

a) Bernoulli' võrrandi lahendamiseks jagame võrrandi mõlemad pooled y^n-ga, s. o.

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

ja võtame uue muutuja

$$z = y^{1-n},$$

mille tuletis

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

kust

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Asendame võrrandis y^{1-n} ja $y^{-n}\frac{dy}{dx}$ uute avaldistega, saame

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

ehk

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)\,,$$

mis on nüüd lineaarne diferentsiaalvõrrand, mille üldlahend on

$$z=e^{-(1-n)\int P(x)dx}\left[(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx+c\right].$$

Et $y=z^{\frac{1}{1-n}}$, siis Bernoulli' võrrandi üldlahend on

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx+c\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Näiteks diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^2\ln x}{x}$$

esitab Bernoulli' võrrandit, kus

$$P(x)=\frac{1}{x}\,,\quad Q(x)=\frac{\ln x}{x}\,,\quad n=2\,.$$

Siin

$$e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

ja

$$(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx+c=-\int\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx+c=$$

$$=-\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx+c=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+c.$$

Seega käesoleva diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y=\frac{1}{x}\left[\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+c\right]^{-1}$$

ehk

$$y=\frac{1}{\ln x+cx+1}.$$

b) Bernoulli' võrrandi

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

üldlahendi võime leida ka tähistades

$$y = uv\,,$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Asendades y ja $\frac{dy}{dx}$ vastavate avaldistega, saame

$$u\frac{dv}{dx} + v\left[\frac{du}{dx} + P(x)u\right] = Q(x)u^n v^n\,,$$

kus valime u nõnda, et

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0\,,$$

mille lahend on

$$u = e^{-\int P(x)dx}.$$

Seega tuleb meil lahendada diferentsiaalvõrrand

$$u\frac{dv}{dx} = Q(x)u^n v^n\,,$$

ehk

$$\frac{dv}{dx} = Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}\,v^n.$$

Eraldades muutujad

$$\frac{dv}{v^n} = Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}\,dx$$

ja inteegrides saame

$$\frac{v^{1-n}}{1-n} = \int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}\,dx + C\,,$$

millest

$$v = \left[(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}\,dx + c\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

kus $c = (1-n)C$. Seega üldlahend on

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}\,dx + c\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

§ 7. Diferentsiaalvõrrandi $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ otsene integreerimine.

Kui diferentsiaalvõrrandis

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$M(x, y)$ ja $N(x, y)$ on mingisuguse kahe muutuja funktsiooni $\varphi(x, y)$ osatuletised, võetud vastavalt x ja y suhtes, s. o.

$$M(x, y) = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} = \varphi_x(x, y)$$

$$N(x, y) = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} = \varphi_y(x, y),$$

ja seega diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\varphi_x(x, y)dx + \varphi_y(x, y)dy = 0$$

ehk

$$d\varphi(x, y) = 0,$$

s. o. kui diferentsiaalvõrrandi vasak pool kujutab funktsiooni $\varphi(x, y)$ täisdiferentsiaali, siis saame diferentsiaalvõrrandit inteegrida o t s e s e l t, m u u t u j a i d e r a l d a m a t a, ja leida üldintegraali kujus

$$\varphi(x, y) = c.$$

Et näha, kas diferentsiaalvõrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

saab otseselt inteegrida, s. o. kas võrrandi vasak pool kujutab funktsiooni $\varphi(x, y)$ täisdiferentsiaali, nii et

$$M(x, y) = \varphi_x(x, y), \quad N(x, y) = \varphi_y(x, y),$$

selleks võtame $M(x, y)$ osatuletise y suhtes ja $N(x, y)$ osatuletise x-i suhtes. Kui nüüd $M_y(x, y)$ ja $N_x(x, y)$ on pidevad x-i ja y funktsioonid ning

$$M_y(x, y) = N_x(x, y),$$

siis diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

vasak pool kujutab funktsiooni $\varphi(x, y)$ täisdiferentsiaali. Järelikult sel juhul saame diferentsiaalvõrrandit inteegrida otseselt. Võrdus

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

on t a r v i l i k j a p i i s a v t i n g i m u s selleks, et diferentsiaalvõrrand

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

oleks otseselt inteegritav.

Et näidata tingimuse tarvilikkust, selleks oletame, et võrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

vasak pool on teatava funktsiooni $\varphi(x, y)$ täisdiferentsiaal, s. o.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy =$$
$$= \varphi_x(x, y)dx + \varphi_y(x, y)dy .$$

Et

$$M_y(x, y) = \varphi_{xy}(x, y)$$

ja

$$N_x(x, y) = \varphi_{yx}(x, y) ,$$

siis pidevuse tõttu

$$\varphi_{xy}(x, y) = \varphi_{yx}(x, y)$$

ja seega tingimus

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

on täidetud.

Ümberpöördult, kui tingimus

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

on rahuldatud, siis võime näidata, et leidub niisugune funktsioon $\varphi(x, y)$, et

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = d\varphi(x, y) ,$$

s. o.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x, y), \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x, y) .$$

Valime alul $\varphi(x, y)$ nii, et oleks täidetud esimene võrdus

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = M(x, y) .$$

Selleks on küllalt, kui võtame

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \psi(y) ,$$

kus inteegritavas funktsioonis vaatleme y-d kui konstanti ja $\psi(y)$ tähendab inteegrimiskonstanti, mis üldiselt sõltub teisest muutujast y. Katsume nüüd $\psi(y)$ määrata nõnda, et oleks täidetud ka teine võrdus

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = N(x, y) .$$

Selleks peab olema

$$\int_{x_0}^{x} M_y(x, y)dx + \psi'(y) = N(x, y) ,$$

ehk et

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) ,$$

siis

$$\int_{x_0}^{x} N_x(x, y)dx + \psi'(y) = N(x, y) .$$

Et

$$\int_{x_0}^{x} N_x(x, y)dx = \Big| N(x, y) \Big|_{x_0}^{x} = N(x, y) - N(x_0, y) ,$$

siis

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \psi'(y) = N(x, y)$$

ehk

$$\psi'(y) = N(x_0, y) ,$$

millest

$$\psi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy .$$

Järelikult

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy$$

ning otseselt integreeritava diferentsiaalvõrrandi üldlahend on $\varphi(x, y) = c$, s. o.

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = c,$$

kus esimest funktsiooni integreeritakse ainult x-i suhtes.

Et x_0 ja y_0 on vabalt võetud suurused, siis võib neid nii valida, et

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0,$$

ning diferentsiaalvõrrandi üldlahend on siis

$$\int_{0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{0}^{y} N(0, y)\,dy = c.$$

Kui aga üks või teine integreeritav funktsioon katkeb punktis $x_0 = 0$ ja $y_0 = 0$, siis tuleb valida x_0 ja y_0 jaoks mingi muu väärtuste paar.

a) Diferentsiaalvõrrandis

$$(2x + 6xy - 1)\,dx + (3x^2 + 2y + 1)\,dy = 0$$

on

$$M(x, y) = 2x + 6xy - 1$$

$$N(0, y) = 2y + 1$$

ja

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) = 6x.$$

Seega saame

$$\int_{0}^{x} (2x + 6xy - 1)\,dx + \int_{0}^{y} (2y + 1)\,dy = c$$

ehk

$$x^2 + 3x^2y - x + y^2 + y = c,$$

mis on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

b) Diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{y}{x}\,dx + \ln x\,dy = 0$$

saame inteegrida otseselt, sest et

$$M_y(x\,,y) = N_x(x\,,y) = \frac{1}{x}\,,$$

kuid siin ei saa võtta $x_0 = 0$, sest siis $N(0\,,y) = \ln 0 = -\infty$, millel pole mõtet. Märgime siin $x_0 = e$ ja $y_0 = 0$, siis

$$\int_e^x \frac{y}{x}\,dx + \int_0^y \ln e\,dy = c\,,$$

s. o.

$$\left| y \ln x \right|_e^x + \left| y \right|_0^y = c\,,$$

ja üldlahend on

$$y \ln x = c\,.$$

§ 8. Inteegriv tegur.

1. Diferentsiaalvõrrandit

$$2x(y^3+1)\,dx + 3x^2y^2dy = 0$$

võime inteegrida otseselt, sest kui

$$M(x\,,y) = 2x(y^3+1)\,,\quad N(x\,,y) = 3x^2y^2\,,$$

siis

$$M_y(x\,,y) = N_x(x\,,y) = 6xy^2\,.$$

Kui aga jagame selle diferentsiaalvõrrandi mõlemad pooled x-ga, siis saame diferentsiaalvõrrandi

$$2(y^3+1)\,dx + 3xy^2dy = 0\,,$$

mida ei saa enam otseselt inteegrida, sest kui

$$M(x\,,y) = 2(y^3+1)\,,\quad N(x\,,y) = 3xy^2\,,$$

siis

$$M_y(x, y) = 6y^2, \quad N_x(x, y) = 3y^2,$$

s. o.

$$M_y(x, y) \neq N_x(x, y).$$

Siit järeldame, et viimast diferentsiaalvõrrandit saaksime otseselt inteegrida ainult siis, kui me selle diferentsiaalvõrrandi mõlemad pooled korrutame teguriga x.

Samuti ei saa näiteks diferentsiaalvõrrandit

$$\left(\frac{x^2}{y} - y\right) dx + 2x dy = 0$$

otseselt inteegrida, sest kui

$$M(x, y) = \frac{x^2}{y} - y, \quad N(x, y) = 2x,$$

siis

$$M_y(x, y) = -\frac{x^2}{y^2} - 1, \quad N_x(x, y) = 2,$$

s. o.

$$M_y(x, y) \neq N_x(x, y).$$

Kui aga korrutame võrrandi mõlemad pooled teguriga $\frac{y}{x^2}$, siis saame diferentsiaalvõrrandi kujus

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0,$$

mida võib inteegrida otseselt, sest siin

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) = -\frac{2y}{x^2}.$$

Tekib küsimus, kas diferentsiaalvõrrandit

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

mille vasakpoolne osa ei kujuta mingi funktsiooni täisdiferentsiaali ja mida ei saa seega otseselt inteegrida, võib alati muuta niisuguseks, et teda saaks otseselt inteegrida, kui me võrrandi mõlemad pooled korrutame teatava teguriga $\mu(x, y)$, mida nimetatakse diferentsiaalvõrrandi i n t e e g r i v a k s t e g u r i k s.

Kui diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

vasakpoolne osa ei ole mingi funktsiooni täisdiferentsiaal ning diferentsiaalvõrrand pole seega otseselt inteegritav, siis tuleks leida niisugune inteegriv tegur $\mu(x, y)$, millega korrutatult diferentsiaalvõrrand muutuks otseselt inteegritavaks, s. o. võrrandiks

$$M(x, y)\mu(x, y)dx + N(x, y)\mu(x, y)dy = 0$$

ehk lühidalt

$$M\mu dx + N\mu dy = 0,$$

mille vasak pool kujutab teatava funktsiooni täisdiferentsiaali.

Oletame, et diferentsiaalvõrrandi üldlahendit esitab funktsioon

$$\varphi(x, y) = c,$$

mida diferentsides saame

$$d\varphi(x, y) = 0$$

ehk

$$\varphi_x(x, y)dx + \varphi_y(x, y)dy = 0,$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}.$$

Et antud diferentsiaalvõrrandi järgi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

siis

$$\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

ehk

$$\frac{\varphi_x(x, y)}{M(x, y)} = \frac{\varphi_y(x, y)}{N(x, y)}.$$

Korrutame diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

mõlemad pooled avaldisega $\frac{\varphi_x(x, y)}{M(x, y)}$, saame

$$\varphi_x(x, y)dx + N(x, y)\frac{\varphi_x(x, y)}{M(x, y)}dy = 0.$$

Tartu Ülikooli Raamatukogu

Et

$$\frac{\varphi_x(x, y)}{M(x, y)} = \frac{\varphi_y(x, y)}{N(x, y)},$$

siis leiame

$$\varphi_x(x, y)dx + \varphi_y(x, y)dy = 0,$$

mis kujutab otseselt inteegritavat diferentsiaalvõrrandit, kusjuures

$$\frac{\varphi_x(x, y)}{M(x, y)} = \frac{\varphi_y(x, y)}{N(x, y)} = \mu(x, y)$$

on diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

inteegriv tegur.

Siit aga nähtub, et kui diferentsiaalvõrrandi üldlahend on teadmata, siis on ka teadmata võrrandi inteegriv tegur. Seega tuleks diferentsiaalvõrrandi inteegrivat tegurit otsida teisel teel. Eelmine arutlus näitab ainult, et niisugune inteegriv tegur on olemas.

Kui diferentsiaalvõrrandi

$$M\mu dx + N\mu dy = 0$$

vasakpoolne osa on funktsiooni $\varphi(x, y)$ täisdiferentsiaal, siis

$$\frac{\partial}{\partial y}(M\mu) = \frac{\partial}{\partial x}(N\mu),$$

s. o.

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

ehk lühidalt

$$\mu M_y + M\mu_y = \mu N_x + N\mu_x,$$

mis kujutab μ suhtes osatuletistega diferentsiaalvõrrandit, mille lahend on inteegriv tegur.

Et vältida osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendust, selleks vaatleme edaspidi ainult üksikuid erijuhtumeid inteegriva teguri leidmiseks, lähtudes diferentsiaalvõrrandist

$$\mu M_y + M\mu_y = \mu N_x + N\mu_x$$

ehk

$$\mu(M_y - N_x) = N\mu_x - M\mu_y ,$$

mis on t a r v i l i k j a p i i s a v t i n g i m u s selleks, et μ oleks diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

inteegrivaks teguriks.

2. Kui diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

inteegriv tegur on ainult ühe muutuja, näiteks x-i funktsioon, s. o. $\mu(x)$, siis tingimuses

$$\mu(M_y - N_x) = N\mu_x - M\mu_y$$

on

$$\mu_x = \frac{d\mu}{dx}, \quad \mu_y = 0$$

ning seega saame hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\mu(M_y - N_x) = N\frac{d\mu}{dx}$$

ehk

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}.$$

Viimase võrrandi vasakul poolel puudub y, järelikult puudub y ka paremal poolel, s. o. ka parem pool on x-i funktsioon või erijuhul konstantne suurus. Peale selle on ta pidev x-i funktsioon, sest M_y ja N_x on eelduse järgi pidevad. Tähendab, kui diferentsiaalvõrrandi inteegriv tegur on ainult x-i funktsioon, siis ka

$$\frac{M_y - N_x}{N}$$

ei sõltu y-st, ja ümberpöördult, kui

$$\frac{M_y - N_x}{N}$$

ei sõltu y-st, siis on olemas niisugune inteegriv tegur $\mu(x)$, mis on ainult x-i funktsioon. $\mu(x)$ leidmiseks eraldame muutujad

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{N}dx$$

ja integreerime

$$\ln\mu=\int\frac{M_y-N_x}{N}dx+\ln c,$$

millest

$$\mu(x)=ce^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx},$$

mis esitab x-st sõltuvaid inteegrivaid tegureid. Võttes näiteks $c=1$, saame ühe kindla inteegriva teguri

$$\mu(x)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}.$$

Analoogiliselt saaksime, kui diferentsiaalvõrrandi inteegriv tegur on ainult y funktsioon, s. o. $\mu(y)$, et

$$\mu(y)=ce^{\int\frac{N_x-M_y}{M}dy},$$

kus $\frac{N_x-M_y}{M}$ peab olema ainult y funktsioon, ja kui $c=1$, siis

$$\mu(y)=e^{\int\frac{N_x-M_y}{M}dy}.$$

a) Diferentsiaalvõrrand

$$2(y^3+1)dx+3xy^2dy=0,$$

nagu nägime, otseselt ei inteegru. Tema inteegriv tegur on ainult x-i funktsioon, sest

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{6y^2-3y^2}{3xy^2}=\frac{1}{x}.$$

Järelikult

$$\mu(x)=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x,$$

mis on inteegrivaks teguriks, kui $c=1$.

b) Lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$[P(x)y-Q(x)]dx+dy=0$$

inteegriv tegur on samuti ainult x-i funktsioon, sest et

$$\frac{M_y - N_x}{N} = P(x)$$

ja seega

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Kasutades saadud inteegrivat tegurit, saame otseselt inteegritava diferentsiaalvõrrandi

$$[P(x)y - Q(x)]e^{\int P(x)dx}\,dx + e^{\int P(x)dx}\,dy = 0\,,$$

kus nüüd

$$M_y(x\,,y) = N_x(x\,,y) = P(x)e^{\int Px(dx)}.$$

Inteegrides saame

$$y\int_{x_0}^{x} P(x)e^{\int P(x)dx}\,dx - \int_{x_0}^{x} Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + e^{\int P(x_0)dx_0}\int_{y_0}^{y} dy = C$$

ehk

$$y\left|e^{\int P(x)dx}\right|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + e^{\int P(x_0)dx_0}(y - y_0) = C\,,$$

millest

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int_{x_0}^{x} Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + c\right],$$

kus $c = y_0 e^{\int P(x_0)dx_0} + C$.

c) Diferentsiaalvõrrandi

$$(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$$

inteegriv tegur, nagu näeme, ei ole x-i funktsioon, sest

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2xy - 3y^2 + y^2}{1 - xy^2} = \frac{2y(x - y)}{1 - xy^2}\,;$$

kuid ta on y funktsioon, sest et

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-y^2 - 2xy + 3y^2}{xy^2 - y^3} = -\frac{2}{y}\,.$$

Tähendab,

$$\mu(y) = e^{-2\int\frac{dy}{y}} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$$

on selle diferentsiaalvõrrandi integriv tegur, millega korrutades saame diferentsiaalvõrrandi kujus

$$(x - y)dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)dy = 0,$$

kus nüüd

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) = -1.$$

Et teine integritav funktsioon saab $x_0 = 0$ ja $y_0 = 0$ puhul lõpmatuks, selleks märgime lõpmatuse vältimiseks $x_0 = 0$ ja $y_0 = 1$, s. o. võtame

$$\int_0^x (x - y)dx + \int_1^y \frac{dy}{y^2} = C,$$

millest

$$\left|\frac{x^2}{2} - xy\right|_0^x - \left|\frac{1}{y}\right|_1^y = C$$

ehk

$$\frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} = c,$$

kus $c = C - 1$.

3. Kui diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

integriv tegur on korrutise xy funktsioon, s. o. $\mu(xy) = \mu(z)$, siis tingimuses

$$\mu(M_y - N_x) = N\mu_x - M\mu_y$$

on

$$\mu_x = y\frac{d\mu}{dz}, \quad \mu_y = x\frac{d\mu}{dz}$$

ja seega

$$\mu(M_y - N_x) = (yN - xM)\frac{d\mu}{dz},$$

millest

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{yN-xM}\,dz$$

ja

$$\ln\mu=\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}\,dz+\ln c\,,$$

kust

$$\mu(xy)=\mu(z)=ce^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}\,dz}$$

ehk kui $c=1$, siis üks integeeriv tegur on

$$\mu(xy)=\mu(z)=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}\,dz},$$

kus

$$\frac{M_y-N_x}{yN-xM}$$

peab olema korrutise $xy=z$ funktsioon.

Näiteks, sääraselt võib lahendada diferentsiaalvõrrandit

$$(y+xy^2)\,dx+(x-x^2y)\,dy=0\,,$$

kui tähistame $xy=z$; siis

$$\frac{M_y-N_x}{yN-xM}=\frac{(1+2xy)\;-(1-2xy)}{y(x-x^2y)-x(y+xy^2)}=-\frac{2}{xy}=-\frac{2}{z}$$

ja integeeriv tegur on (kui $c=1$)

$$\mu=e^{-2\int\frac{dz}{z}}=\frac{1}{z^2}=\frac{1}{x^2y^2}\,.$$

Peale korrutamist saadud integeeriva teguriga saame diferentsiaalvõrrandi

$$\left(\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0\,,$$

kus nüüd

$$M_y(x\,,y)=N_x(x\,,y)=-\frac{1}{x^2y^2}\,.$$

Et integritavad funktsioonid ei muutuks lõpmatuks, selleks märgime $x_0 = 1$ ja $y_0 = 1$, s. o.

$$\int_1^x \left(\frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{x}\right) dx + \int_1^y \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right) dy = C,$$

millest

$$\left| -\frac{1}{xy} + \ln x \right|_1^x - \left| \frac{1}{y} + \ln y \right|_1^y = C$$

ehk

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{xy} = c,$$

kus $c = C - 1$.

4. Kui diferentsiaalvõrrandi

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

inteegriv tegur on jagatise $\frac{y}{x}$ funktsioon, s. o. $\mu\left(\frac{y}{x}\right) = \mu(z)$, siis tingimuses

$$\mu(M_y - N_x) = N\mu_x - M\mu_y$$

on

$$\mu_x = -\frac{y}{x^2}\frac{d\mu}{dz}, \quad \mu_y = \frac{1}{x}\frac{d\mu}{dz}$$

ja seega

$$\mu(M_y - N_x) = -\left(\frac{y}{x^2} N + \frac{1}{x} M\right)\frac{d\mu}{dz},$$

millest

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{x^2(N_x - M_y)}{yN + xM} dz$$

ja

$$\ln \mu = \int \frac{x^2(N_x - M_y)}{yN + xM} dz + \ln c,$$

kust

$$\mu\left(\frac{y}{x}\right) = \mu(z) = ce^{\int \frac{x^2(N_x - M_y)}{yN + xM} dz}$$

ja kui $c = 1$, siis inteegriv tegur on

$$\mu\left(\frac{y}{x}\right) = \mu(z) = e^{\int \frac{x^2(N_x - M_y)}{yN + xM} dz},$$

kus

$$\frac{x^2(N_x - M_y)}{yN + xM}$$

peab olema jagatise $\frac{y}{x} = z$ funktsioon.

Näiteks, diferentsiaalvõrrandit

$$\left(\frac{3y^2}{x} - \frac{y}{x^2} + 2y\right) dx + \left(\frac{8y^2}{x} + \frac{1}{x} + 3y\right) dy = 0$$

saab lahendada, märkides $\frac{y}{x} = z$; siis

$$\frac{x^2(N_x - M_y)}{yN + xM} = \frac{x^2\left[\left(-\frac{8y^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) - \left(\frac{6y}{x} - \frac{1}{x^2} + 2\right)\right]}{\left(\frac{8y^3}{x} + \frac{y}{x} + 3y^2\right) + \left(3y^2 - \frac{y}{x} + 2xy\right)} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{z}$$

ja inteegriv tegur on

$$\mu = e^{-\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{x}{y}.$$

Korrutades antud diferentsiaalvõrrandi mõlemaid pooli saadud inteegriva teguriga saame

$$\left(3y - \frac{1}{x} + 2x\right) dx + \left(8y + \frac{1}{y} + 3x\right) dy = 0\,,$$

kus nüüd

$$M_y(x\,, y) = N_x(x\,, y) = 3\,.$$

Viimast võrrandit otseselt inteegrides, märkides $x_0 = 1$ ja $y_0 = 1$, saame

$$\int_1^x \left(3y - \frac{1}{x} + 2x\right) dx + \int_1^y \left(8y + \frac{1}{y} + 3\right) dy = C\,,$$

millest võime esitada üldlahendi kujus

$$x^2 + 3xy + 4y^2 + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = c\,,$$

kus $c = C + 8$.

5. Kui diferentsiaalvõrrandi

$$M(x\,, y)dx + N(x\,, y)dy = 0$$

inteegriv tegur on näiteks ruutude summa $x^2 + y^2$ funktsioon,

s. o. $\mu(x^2+y^2)=\mu(z)$, siis tingimuses

$$\mu(M_y - N_x) = N\mu_x - M\mu_y$$

on

$$\mu_x = 2x\frac{d\mu}{dz}, \quad \mu_y = 2y\frac{d\mu}{dz}$$

ja seega

$$\mu(M_y - N_x) = 2(xN - yM)\frac{d\mu}{dz},$$

millest

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{2(xN - yM)}dz$$

ja

$$\ln\mu = \frac{1}{2}\int\frac{M_y - N_x}{xN - yM}dz + \ln c,$$

kust

$$\mu(x^2+y^2) = \mu(z) = ce^{\frac{1}{2}\int\frac{M_y - N_x}{xN - yM}dz}$$

ja kui $c = 1$, siis

$$\mu(x^2+y^2) = \mu(z) = e^{\frac{1}{2}\int\frac{M_y - N_x}{xN - yM}dz},$$

kus

$$\frac{M_y - N_x}{xN - yM}$$

peab olema ruutude summa $x^2 + y^2 = z$ funktsioon.

Selle võttega võime lahendada näiteks diferentsiaalvõrrandit

$$(\sqrt{x^2+y^2} - x)dx + (\sqrt{x^2+y^2} - y)dy = 0.$$

Siin

$$\frac{M_y - N_x}{xN - yM} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x(\sqrt{x^2+y^2} - y) - y(\sqrt{x^2+y^2} - x)} = -\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{z}$$

ja inteegriv tegur on

$$\mu = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

mis muudab diferentsiaalvõrrandi otseselt inteegritavaks, s. o.

$$\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx + \left(1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dy = 0 ,$$

kus nüüd

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) = \frac{xy}{2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

Et nimetaja ei häviks, selleks märgime $x_0 = 1$ ja $y_0 = 0$, s. o.

$$\int_1^x \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx + \int_0^y \left(1 - \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}\right) dx = C ,$$

millest saame üldlahendi

$$x + y - \sqrt{x^2 + y^2} = c ,$$

kus $c = C + 2$.

6. Analoogiliselt eelnevaga võiksime käsitella veel tervet rida juhtumeid, kus inteegriv tegur on mingi z-i funktsioon, mis omakord on nõuetekohaselt valitud x-i ja y funktsioon, näiteks $z = \frac{1}{x^2}$, $z = \frac{1}{y^2}$, $z = x^2 - y^2$ jne. Kuid piirdume eespool-toodud juhtumitega. Nende puhul tuleb iga kord leida vahe

$$M_y(x, y) - N_x(x, y) .$$

Kui see vahe on 0, siis on juba avaldis

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

täisdiferentsiaal. On aga see vahe 0-st erinev, siis tuleb vaadelda, kas

$\frac{M_y - N_x}{N}$ on x-i funktsioon,

$\frac{N_x - M_y}{M}$ „ y „

$\frac{M_y - N_x}{yN - xM}$ „ xy „

$\frac{x^2(N_x - M_y)}{yN + xM}$ „ $\frac{y}{x}$ „

$\frac{M_y - N_x}{xN - yM}$ „ $x^2 + y^2$ „

Kui diferentsiaalvõrrandi inteegriva teguri leidmine allub ühele neist juhtumeist, siis võime leida inteegriva teguri, millega korrutatult saame diferentsiaalvõrrandit otseselt inteegrida.

§ 9. Funktsiooni või argumendi suhtes ilmutatavad diferentsiaalvõrrandid.

Eespool-käsiteldud juhtudel oletasime, et diferentsiaalvõrrandit

$$F\left(x\,,\,y\,,\frac{dy}{dx}\right)=0$$

saab ilmutada tuletise $\frac{dy}{dx}$ suhtes. Kuid praktiliselt ei ole see iga kord võimalik, nagu näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$2\frac{dy}{dx}\ln\frac{dy}{dx}-y=0$$

puhul. Siis katsume teda ilmutada kas funktsiooni y või argumendi x suhtes.

1. Oletame, et diferentsiaalvõrrandit

$$F\left(x\,,\,y,\frac{dy}{dx}\right)=0$$

saab ilmutada funktsiooni y suhtes, s. o.

$$y=f\left(x\,,\,\frac{dy}{dx}\right),$$

kus nüüd y-d vaatleme kui sõltuvat muutujat ning x-i ja $\frac{dy}{dx}$-i kui sõltumatuid muutujaid, kusjuures $\frac{dy}{dx}$ on omakorda x-i funktsioon. Tähistame siin $\frac{dy}{dx}=p$, siis

$$y=f(x\,,p)\,,$$

ja diferentsime

$$\frac{dy}{dx}=f_x(x\,,p)+f_p\,(x\,,p)\,\frac{dp}{dx}\,,$$

millest

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-f_x\,(x\,,p)}{f_p(x\,,p)}\,,$$

kus nüüd parem pool on x-i ja p funktsioon, s. o.

$$\frac{dp}{dx} = \psi(x, p).$$

Kui siin x lugeda argumendiks ja p funktsiooniks, siis viimast võrrandit võime vaadelda kui tuletise suhtes ilmutatud diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahendi leidmine on meil juba teada, s. o.

$$p = \varphi(x, c).$$

Asetades saadud p väärtuse võrrandisse

$$y = f(x, p)$$

p asemele saame

$$y = f[x, \varphi(x, c)],$$

mis on diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ ehk } y = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

üldlahend.

Et lahendada näiteks diferentsiaalvõrrandit

$$2\frac{dy}{dx} \ln \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

selleks ilmutame teda y suhtes ja märgime $\frac{dy}{dx} = p$, s. o.

$$y = 2p \ln p.$$

Diferentsides

$$\frac{dy}{dx} = (2 \ln p + 2) \frac{dp}{dx}$$

ja muutujaid eraldades

$$\frac{2(\ln p + 1)}{p} dp = dx$$

ehk

$$\frac{2 \ln ep}{p} dp = dx,$$

leiame inteegrides

$$\ln^2 ep = x + c,$$

kust

$$p = e^{\sqrt{x+c}-1}.$$

Asetame p väärtuse võrrandisse

$$y = 2p \ln p$$

saame antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = 2e^{\sqrt{x+c}-1}(\sqrt{x+c}-1).$$

Ülaltähendatud lahendusviisi puhul, lugedes p parameetriks, tihti lihtsustub integraalkõverate geomeetriline käsitlus, kui diferentsiaalvõrrandi üldlahendi avaldame parameetrilises kujus, s. o. jätame x ja y avaldatuks parameetri p kaudu. Käesoleval juhul on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend parameetrilises kujus

$$\left.\begin{aligned} x &= \ln^2 ep - c \\ y &= 2p \ln p \end{aligned}\right\},$$

mille järgi integraalkõverate käsitlus osutub ka siin nähtavasti lihtsamaks kui eelmise üldlahendi järgi, kus koordinaadid x ja y on omavahel funktsionaalses seoses.

2. Oletame, et diferentsiaalvõrrandit

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

saab ilmutada argumendi x suhtes, s. o.

$$x = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right),$$

kus nüüd x-i vaatleme kui sõltuvat muutujat ning y ja $\frac{dy}{dx}$ kui sõltumatuid muutujaid, kusjuures $\frac{dy}{dx}$ on omakorda y funktsioon. Tähistades $\frac{dy}{dx} = p$, s. o.

$$x = f(y, p),$$

ja diferentsides seda funktsiooni y suhtes, saame

$$\frac{dx}{dy} = f_y(y, p) + f_p(y, p)\frac{dp}{dy},$$

millest

$$\frac{dp}{dy}=\frac{\frac{1}{p}-f_y(y,p)}{f_p(y,p)}$$

ehk

$$\frac{dp}{dy}=\psi(y,p)\ ,$$

kus y-d vaatleme kui argumenti ja p-d kui funktsiooni ning võrrandit kui tuletise suhtes ilmutatud diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend on

$$p=\varphi(y,c)\,.$$

Tähendab, diferentsiaalvõrrandi

$$x=f\left(y\,,\frac{dy}{dx}\right)$$

üldlahend on siis

$$x=f[y,\ \varphi(y,c)]\,.$$

Ilmutades näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=x+y\frac{dy}{dx}$$

x-i suhtes ja märkides $\frac{dy}{dx}=p$, saame

$$x=y\sqrt{1+p^2}-yp\,,$$

mida y suhtes diferentsides saame

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{1+p^2}-p+\left(\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}-y\right)\frac{dp}{dy}\,.$$

Eraldades muutujad

$$\frac{pdp}{1+p^2}+\frac{dy}{y}=0\,,$$

saame inteegrides

$$\frac{1}{2}\ln(1+p^2)+\ln y=\ln c$$

ehk

$$\sqrt{1+p^2}=\frac{c}{y},$$

millest

$$p=\frac{\sqrt{c^2-y^2}}{y}.$$

Asetame kahest viimasest võrdusest $\sqrt{1+p^2}$ ja p väärtused võrrandisse

$$x = y\sqrt{1+p^2} - yp\,,$$

saame antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$x = c - \sqrt{c^2 - y^2}$$

ehk

$$x^2 + y^2 - 2cx = 0\,,$$

mis esitab graafiliselt nullpunkti läbivate ringjoonte parve, mille keskpunktid asetsevad X-teljel, sest saadud võrrand kinnises kujus on

$$(x-c)^2 + y^2 = c^2\,.$$

§ 10. Lagrange'i võrrand.

Funktsiooni y suhtes ilmutatud diferentsiaalvõrrandit

$$y = x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

nimetatakse L a g r a n g e'i v õ r r a n d i k s.

Tähistame selles võrrandis $\frac{dy}{dx} = p$, s. o.

$$y = x\varphi(p) + \psi(p)\,,$$

ja diferentsime

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,\frac{dp}{dx}$$

ehk

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,\frac{dp}{dx}\,.$$

Lugedes siin p argumendiks ja x funktsiooniks, esitame viimase võrrandi kujus

$$\frac{dx}{dp} - x\,\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\,,$$

mis kujutab nüüd lineaarset diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahendi võime leida § 5-s esitatud võttega, kui $p - \varphi(p) \neq 0$.

Olgu selle lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$x = f_1(p, c),$$

mille asetame võrrandisse

$$y = x\varphi(p) + \psi(p),$$

saame

$$y = f_1(p, c)\varphi(p) + \psi(p) = f_2(p, c).$$

Seega oleme x ja y väljendanud parameetri p kaudu. Järelikult on Lagrange'i võrrandi üldlahend parameetrilises kujus

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(p, c) \\ y &= f_2(p, c) \end{aligned}\right\}.$$

Kui on võimalik neist võrranditest kõrvaldada parameeter p, siis võime Lagrange'i võrrandi üldlahendi esitada kujus

$$\Phi(x, y, c) = 0.$$

Näiteks diferentsiaalvõrrand

$$y = 2x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

kujutab Lagrange'i võrrandit. Tähistades $\frac{dy}{dx} = p$ saame

$$y = 2xp - p^2,$$

mida diferentsides leiame

$$\frac{dy}{dx} = 2p + (2x - 2p)\frac{dp}{dx},$$

millest

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 2,$$

mis on lineaarne diferentsiaalvõrrand, kus

$$P(x) = \frac{2}{p}, \quad Q(x) = 2,$$

ja mille üldlahend on

$$x = e^{-2\int\frac{dp}{p}}\left[2\int e^{2\int\frac{dp}{p}}dp + c\right]$$

ehk

$$x = \frac{2p}{3} + \frac{c}{p^2}.$$

Paigutame x-i väärtuse algvõrrandisse, saame

$$y = \frac{p^2}{3} + \frac{2c}{p}.$$

Tähendab, antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend parameetrilises kujus on

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2p}{3} + \frac{c}{p^2} \\ y &= \frac{p^2}{3} + \frac{2c}{p} \end{aligned}\right\}.$$

§ 11. Clairaut' võrrand.

Lagrange'i võrrandis oli tingimuseks, et $p \neq \varphi(p)$. Kui aga $p = \varphi(p)$, siis Lagrange'i võrrand omab kuju

$$y = xp + \psi(p)$$

ehk

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

mis kannab C l a i r a u t' v õ r r a n d i nime.

Clairaut' võrrandi lahendame analoogiliselt Lagrange'i võrrandiga. Diferentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

Et $\frac{dy}{dx} = p$, siis

$$\frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0.$$

See võrdus kehtib, kui

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

millest

$$p = c.$$

Asetame selle p väärtuse Clairaut' võrrandisse, saame ühtlasi võrrandi üldlahendi

$$y = cx + \psi(c)\,,$$

mis on esimese astme võrrand. Seega Clairaut' võrrandi üldlahend esitab geomeetriliselt sirgete parve. Integraalkõverad on siin sirgete parv, mille tõus on vastavalt võrdne parameetriga c.

Samuti kehtib võrdus

$$\frac{dp}{dx}\,[x + \psi'(p)] = 0\,,$$

kui

$$x + \psi'(p) = 0$$

ehk

$$x = -\psi'(p)\,,$$

mida Clairaut' võrrandisse asetades saame

$$y = -p\psi'(p) + \psi(p)\,.$$

Kõrvaldades võrrandsüsteemist

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(p) \\ y &= -p\psi'(p) + \psi(p) \end{aligned}\right\}$$

parameetri p, leiame samuti Clairaut' võrrandi lahendi

$$\Psi\,(x\,, y) = 0\,,$$

kus puudub parameeter c.

Graafik, mis saadud lahendile vastab, ei ole enam sirge joon, vaid kõver, sest puutuja tõus $p = \frac{dy}{dx}$ on siin parameetriks, mis ei oma ainult üht ja sama konstantset väärtust. Et puutepunkti asendi muutumine sellel graafikul tingib puutuja tõusu muutumise, siis tähendatud graafik ei või kujutada ka sirget joont. Seega Clairaut' võrrandi lahendit $\Psi\,(x\,, y) = 0$ ei ole võimalik saada võrrandi üldlahendist $y = cx + \psi(c)$, kuigi annaksime parameetrile c mistahes väärtusi. Clairaut' võrrandi lahend $\Psi\,(x\,, y) = 0$ on seega singulaarne ehk iseärane lahend.

Clairaut' võrrandi iseärane lahend esitab sirgete parve

$$y = cx + \psi(c)$$

mähisjoont, s. o. integraalkõverate ühispuutujat. Sest kui integraalkõveraid (praegusel korral sirgete parve) esitab võrrand

$$y = cx + \psi(c) ,$$

siis nende mähisjoont esitavad parameetrilised võrrandid

$$\left.\begin{aligned} y &= cx + \psi(c) \\ 0 &= x + \psi'(c) \end{aligned}\right\} .$$

Kõrvaldada neist võrranditest parameeter c on sama, kui kõrvaldaksime võrranditest

$$\left.\begin{aligned} y &= px + \psi(p) \\ 0 &= x + \psi'(p) \end{aligned}\right\}$$

parameetri p, ning seepärast saame

$$\Psi (x , y) = 0 .$$

Seega Clairaut' võrrandi iseärane lahend

$$\Psi (x , y) = 0$$

esitab sama võrrandi üldlahendiga

$$y = cx + \psi(c)$$

määratud sirgete parve mähisjoont.

Näiteks diferentsiaalvõrrand

$$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{a\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}},$$

kus $a =$ konst., kujutab Clairaut' võrrandit. Tähistame $\frac{dy}{dx} = p$, s. o.

$$y = xp - \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}},$$

ja diferentsime

$$\frac{dy}{dx} = p + \left[x - \frac{a}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}}\right]\frac{dp}{dx},$$

millest

$$\frac{dp}{dx}\left[x - \frac{a}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}}\right] = 0 .$$

Võrrandist

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

saame

$$p = c$$

ning üldlahend on seega

$$y = cx - \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}},$$

mis esitab sirgete parve.

Võttes võrrandi

$$x - \frac{a}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}} = 0,$$

millest

$$x = \frac{a}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}},$$

ja paigutades x-i väärtuse algvõrrandisse, saame

$$y = \frac{ap}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}} - \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$$

ehk

$$y = -\frac{ap^3}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}}.$$

Tähendab, antud diferentsiaalvõrrandi iseärast lahendit kujutavad parameetrilised võrrandid

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}} \\ y &= -\frac{ap^3}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}} \end{aligned}\right\},$$

mis esitavad graafiliselt sirgete parve

$$y = cx - \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}}$$

mähisjoont.

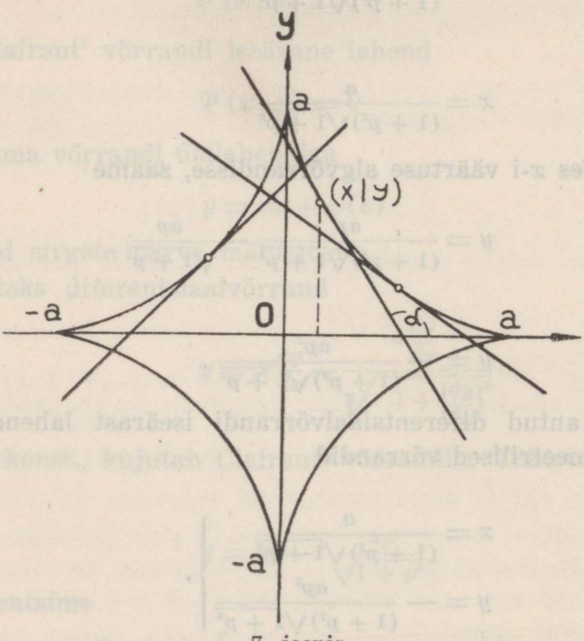
Et kõrvaldada mähisjoone parameetrilistest võrranditest parameeter p, selleks viime mõlema võrrandi mõlemad pooled astmesse $\frac{2}{3}$, s. o.

$$\left.\begin{aligned} x^{\frac{2}{3}} &= \frac{a^{\frac{2}{3}}}{1+p^2} \\ y^{\frac{2}{3}} &= \frac{a^{\frac{2}{3}} p^2}{1+p^2} \end{aligned}\right\},$$

ja liidame saadud võrrandid, saame mähisjoone võrrandi kujus

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

See sirgete parve mähisjoone võrrand esitab kõverat, mida nimetatakse a s t r o i d i k s (7. joon.), mille puutujate koordinaat-



7. joonis.

telgede vahelised lõigud on isekeskis võrdsed, sest et vabalt võetud punktis $(x\,|\,y)$ puutuja lõigu projektsioon X-teljel on

$$x + \frac{y}{\tan(180^\circ - \alpha)} = x - \frac{y}{\tan \alpha} = x - \frac{y}{p},$$

kusjuures

$$x - \frac{y}{p} = a \cos (180^0 - \alpha) = - a \cos \alpha =$$

$$= - \frac{a}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \mp \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}},$$

millest

$$y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}},$$

mis kujutab astroidi puutuja võrrandit, kus a on puutuja lõik koordinaattelgede vahel, mis on üks ja sama kõigi puutujate puhul.

§ 12. Iseärased lahendid.

1. Oletame, et diferentsiaalvõrrand

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

omab üldlahendit

$$\Phi(x, y, c) = 0.$$

Clairaut' võrrandi puhul nägime, et integraalkõverate parve

$$y = cx + \psi(c)$$

mähisjoon esitab ka Clairaut' võrrandi integraalkõverat, mida ei või saada integraalkõverate parvest ühegi c väärtuse puhul ja mida nimetatakse seepärast singulaarseks ehk iseäraseks integraalkõveraks.

Üldiselt, kui integraalkõverate parv

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

omab mähisjoont

$$\Psi(x, y) = 0,$$

siis see mähisjoon esitab alati diferentsiaalvõrrandi integraalkõverat. Sest kui võtame mähisjoonel mistahes punkti $(x \mid y)$, siis selles punktis mähisjoon puudutab üht integraalkõverat parvest $\Phi(x, y, c) = 0$ ja tal on selles punktis integraalkõveraga ühine puutuja, tõusuga $\frac{dy}{dx}$. See punkt on ühtlasi integraalkõvera punkt, mille koordinaadid x ja y ning puutuja tõus $\frac{dy}{dx}$ rahuldavad diferentsiaalvõrrandit

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 .$$

Et mähisjoon ei kuulu üldiselt integraalkõverate parve

$$\Phi (x, y, c) = 0$$

hulka, siis nimetatakse teda singulaarseks ehk iseäraseks integraalkõveraks ja vastavat funktsiooni

$$\Psi (x, y) = 0$$

singulaarseks ehk iseäraseks lahendiks.

Nagu edaspidi näeme, võib iseärane lahend erijuhul ühtida teatava erilahendiga, s. o. integraalkõverate parve mähisjoon võib juhuslikult ka kuuluda parve kõverate hulka.

a) Kõverate parve võrrand

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 - 9 = 0 ,$$

kus c on parameetriks, esitab ringjooni raadiusega 3. Mähisjoone leidmiseks võtame osatuletise parameetri c suhtes

$$\frac{\partial}{\partial c} [(x - c)^2 + (y - c)^2 - 9] = 0$$

ehk

$$-2(x - c) - 2(y - c) = 0 ,$$

millest

$$c = \frac{x + y}{2} .$$

Paigutame saadud c väärtuse kõverate parve võrrandisse, saame

$$\left(x - \frac{x + y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x + y}{2}\right)^2 - 9 = 0$$

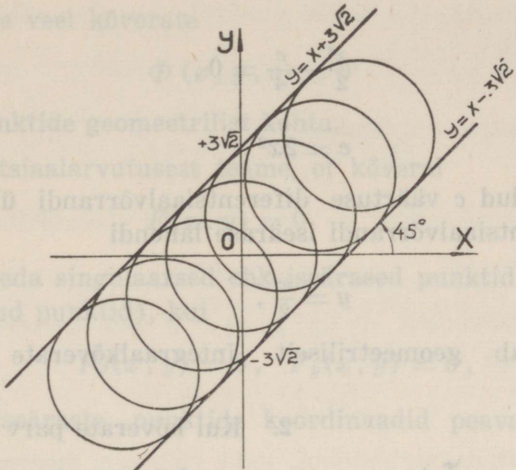
ehk

$$y = x \pm 3\sqrt{2} ,$$

mis esitab kaht paralleelset sirget, tõusunurgaga 45^0. Need sirged on ringjoonte mähisjooned (8. joon.).

b) Diferentsiaalvõrrandi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x^3 \frac{dy}{dx} + 8x^2 y = 0$$



8. joonis.

üldlahendi leidmiseks märgime $\frac{dy}{dx} = p$ ja ilmutame võrrandi y suhtes, s. o.

$$y = \frac{xp}{2} - \frac{p^2}{8x^2}.$$

Diferentsides

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4x^3} + \left(\frac{x}{2} - \frac{p}{4x^2}\right)\frac{dp}{dx},$$

millest

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x},$$

ja integreerides leiame

$$\ln p = \ln x + \ln c\,, \quad p = cx\,.$$

Paigutame saadud p väärtuse diferentsiaalvõrrandisse, saame üldlahendi

$$(cx)^2 - 4x^3 \cdot cx + 8x^2 y = 0$$

ehk

$$y = \frac{cx^2}{2} - \frac{c^2}{8}.$$

Iseärase lahendi leidmiseks võtame osatuletise parameetri c suhtes

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{cx^2}{2} - \frac{c^2}{8} - y\right) = 0$$

ehk

$$\frac{x^2}{2} - \frac{c}{4} = 0,$$

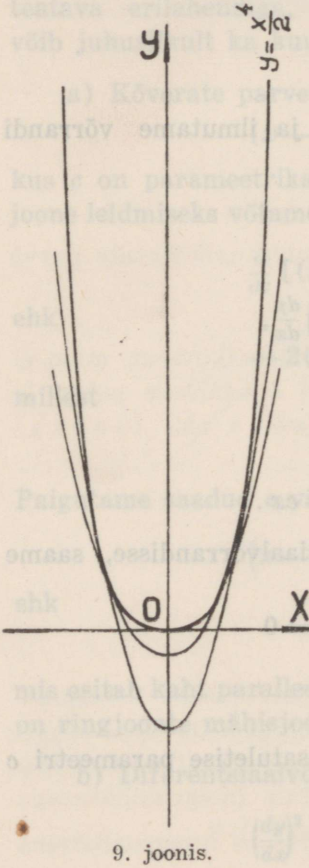
millest

$$c = 2x^2.$$

Asetame saadud c väärtuse diferentsiaalvõrrandi üldlahendisse, saame diferentsiaalvõrrandi iseärase lahendi

$$y = \frac{x^4}{2},$$

millele vastab geomeetriliselt integraalkõverate mähisjoon (9. joon.).



9. joonis.

2. Kui kõverate parv

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

omab mähisjoont, siis selle joone mistahes punkti koordinaadid rahuldavad võrrandeid

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, c) = 0 \\ \Phi_c(x, y, c) = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Kõrvaldades neist võrranditest parameetri c, saame võrrandi

$$D(x, y) = 0,$$

kus $D(x, y)$ nimetatakse võrrandi $\Phi(x, y, c) = 0$ d i s k r i m i n a n d i k s. Diskriminantvõrrandit rahuldavad mähisjoone iga punkti koordinaadid, kuid peale selle võivad diskriminantvõrrandit rahuldada veel kõverate

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

singulaarsete ehk iseäraste punktide koordinaadid, s. o. võrrand

$$D(x, y) = 0$$

esitab üldiselt mähisjoont

$$\Psi(x, y) = 0$$

ja peale selle veel kõverate

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

iseäraste punktide geomeetrilist kohta.

Diferentsiaalarvutusest teame, et kõveral

$$F(x, y) = 0$$

võivad asetseda singulaarsed ehk iseärased punktid (sõlm-, tipp- või isoleeritud punktid), kui

$$F_x(x, y) = 0, \quad F_y(x, y) = 0,$$

kusjuures iseäraste punktide koordinaadid peavad rahuldama võrrandeid

$$F(x, y) = 0, \quad F_x(x, y) = 0, \quad F_y(x, y) = 0.$$

Kui nüüd integraalkõveral

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

on iseärased punktid, siis nende punktide koordinaadid peavad rahuldama võrrandeid

$$\Phi(x, y, c) = 0, \quad \Phi_x(x, y, c) = 0, \quad \Phi_y(x, y, c) = 0,$$

mille juured on ühtlasi iseäraste punktide koordinaadid. Kui iseäraste punktide geomeetriline koht moodustab joone, siis selle joone iga punkti koordinaadid rahuldavad neid kolme võrrandit.

Ümberpöördult, kui

$$\Phi(x, y, c) = 0, \quad \Phi_x(x, y, c) = 0, \quad \Phi_y(x, y, c) = 0,$$

siis, kõrvaldades võrranditest

$$\Phi_x(x, y, c) = 0, \quad \Phi_y(x, y, c) = 0$$

parameetri c, saaksime

$$G(x, y) = 0,$$

mis määrab üldiselt joone, kusjuures ainult selle joone punktid v õ i v a d o l l a iseärasteks punktideks. Seega, kui iseärased punktid on olemas, siis nende punktide koordinaadid rahuldavad ikka võrrandit

$$G(x, y) = 0.$$

Kui seejuures võrrandiga

$$D(x, y) = 0$$

määratud kõvera punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$G(x, y) = 0,$$

siis integraalkõveratel $\Phi\ (x, y, c) = 0$ võib asetseda iseäraseid punkte ja seega võrrand

$$D(x, y) = 0$$

ei tarvitse esitada mähisjoont, vaid võib olla iseäraste punktide geomeetriliseks kohaks.

Kuid võib juhtuda, et võrrand

$$D(x, y) = 0$$

esitab mitut joont, kusjuures siis mõni neist võib olla mähisjooneks ja mõni iseäraste punktide geomeetriliseks kohaks.

Samuti võib juhtuda, et võrrand

$$D(x, y) = 0$$

esitab joont, mis on ühtlasi mähisjooneks kui ka iseäraste punktide geomeetriliseks kohaks. Seepärast tuleb iseärase lahendi leidmisel alati kindlaks teha, kas diskriminantvõrrandiga antud funktsioon esitab mähisjoont või mitte, s. o. kas ta annab iseärase lahendi või mitte.

a) Diferentsiaalvõrrandi

$$(y - 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4 = 0$$

üldlahend on

$$(y - 1)^3 - 9(x + c)^2 = 0,$$

sest et

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{2}{\sqrt{y-1}}, \quad \sqrt{y-1}\,dy = \pm\,2dx,$$

$$\int\sqrt{y-1}\,dy = \pm 2\int dx, \quad (y-1)\sqrt{y-1} = \pm\,3(x + c)$$

ja

$$[(y-1)\sqrt{y-1}-3(x+c)]\cdot[(y-1)\sqrt{y-1}+3(x+c)]=0$$

ehk

$$(y-1)^3-9(x+c)^2=0\,.$$

Iseärase lahendi leidmiseks võtame osatuletise parameetri c suhtes

$$\frac{\partial}{\partial c}[(y-1)^3-9(x+c)^2]=0$$

ehk

$$-18(x+c)=0\,,$$

millest

$$c=-x\,.$$

Paigutame c väärtuse üldlahendisse, saame diskriminantvõrrandi

$$(y-1)^3=0$$

ehk

$$y-1=0\,,$$

mis esitab X-teljega paralleelset sirget. See sirge ei ole aga integraalkõverate mähisjoon, vaid sellel sirgel asetsevad integraalkõverate iseärased punktid, sest kui

$$\frac{\partial}{\partial x}[(y-1)^3-9(x+c)^2]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[(y-1)^3-9(x+c)^2]=0$$

ehk

$$-18(x+c)\;=0$$

$$3(y-1)^2=0\,,$$

millest

$$x=-c\,,\quad y=1\,,$$

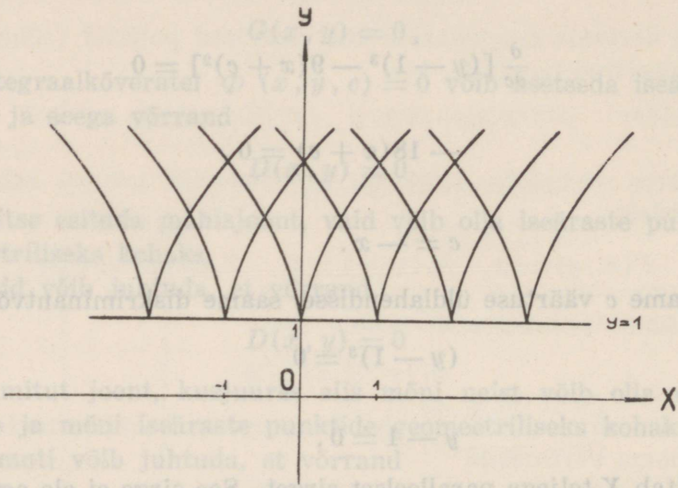
siis punktide koordinaadid $(-c\,|\,1)$ rahuldavad integraalkõverate parve võrrandit

$$(y-1)^3-9(x+c)^2=0$$

kui ka diskriminantvõrrandit

$$y - 1 = 0 \, .$$

Seega sirge $y - 1 = 0$ on diferentsiaalvõrrandi iseäraste punktide geomeetriline koht. Need iseärased punktid on integraalkõverate tipp-punktid (10. joon.). Järelikult pole $y - 1 = 0$ dife-



10. joonis.

rentsiaalvõrrandi iseärane lahend, mis nähtub ka sellest, et ta diferentsiaalvõrrandit ei rahulda.

b) Diferentsiaalvõrrandi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{4(y-1)}{(3y-2)^2} = 0$$

üldlahend on

$$y^2(y-1) + (x-c)^2 = 0 \, ,$$

sest et

$$dx = \pm \frac{3y-2}{2\sqrt{1-y}} \, dy \, ,$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \int \frac{3y-2}{\sqrt{1-y}} \, dy \, , \quad x = \mp \, y\sqrt{1-y} + c$$

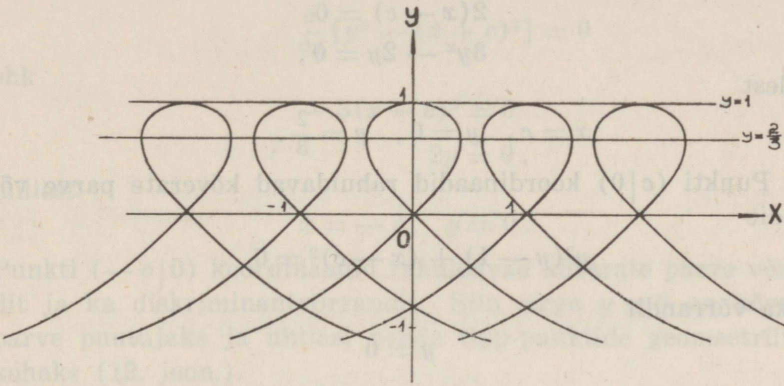
ja

$$(x - c - y\sqrt{1-y})(x - c + y\sqrt{1-y}) = 0$$

ehk

$$y^2(y-1) + (x-c)^2 = 0\,,$$

mis esitab kõverate parve (11. joon.).



11. joonis.

Iseärase lahendi leidmiseks võtame

$$\frac{\partial}{\partial c}[y^2(y-1) + (x-c)^2] = 0$$

ehk

$$-2(x-c) = 0\,,$$

millest

$$c = x\,.$$

Asetades c väärtuse kõverate parve võrrandisse, saame diskriminantvõrrandi

$$y^2(y-1) = 0\,,$$

kust leiame

$$y = 0\,, \quad y - 1 = 0,$$

milledest esimene esitab X-telge ja teine X-teljega paralleelset sirget.

Vaatleme edasi, kas saadud sirged esitavad mähisjooni või iseäraste punktide geomeetrilisi kohti. Kui kõverate parvel on iseäraseid punkte, siis

$$\frac{\partial}{\partial x}[y^2(y-1)+(x-c)^2]=0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}[y^2(y-1)+(x-c)^2]=0$$

ehk

$$2(x-c)=0$$
$$3y^2-2y=0\,,$$

millest

$$x=c\,,\quad y=0\,,\quad y=\frac{2}{3}\,.$$

Punkti $(c\,|\,0)$ koordinaadid rahuldavad kõverate parve võrrandit

$$y^2(y-1)+(x-c)^2=0$$

ja ka võrrandit

$$y=0$$

ning seega sirge $y=0$ on iseäraste punktide asukoht. Kuid punkti $\left(c\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)$ koordinaadid ei rahulda kõverate parve võrrandit ja seega sirge $y=\frac{2}{3}$ ei sisalda iseäraseid punkte. Tähendab, sirgetest, mille võrrandid olid $y=0$ ja $y-1=0$, esimene määrab iseäraste punktide geomeetrilise koha ja teine mähisjoone. Järelikult on ainult $y-1=0$ diferentsiaalvõrrandi iseärane lahend.

Nagu jooniselt näeme, on iseärased punktid kõverate kahekordsed sõlmpunktid.

c) Kui kõverate parve võrrand on näiteks

$$y^2-(x+c)^3=0\,,$$

siis mähisjoone saamiseks võtame

$$\frac{\partial}{\partial c}[y^2-(x+c)^3]=0$$

ehk

$$-3(x+c)^2=0\,,$$

millest

$$c = -x,$$

ja diskriminantvõrrand on siis

$$y = 0.$$

Iseäraste punktide saamiseks võtame

$$\frac{\partial}{\partial x}[y^2 - (x+c)^3] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[y^2 - (x+c)^3] = 0$$

ehk

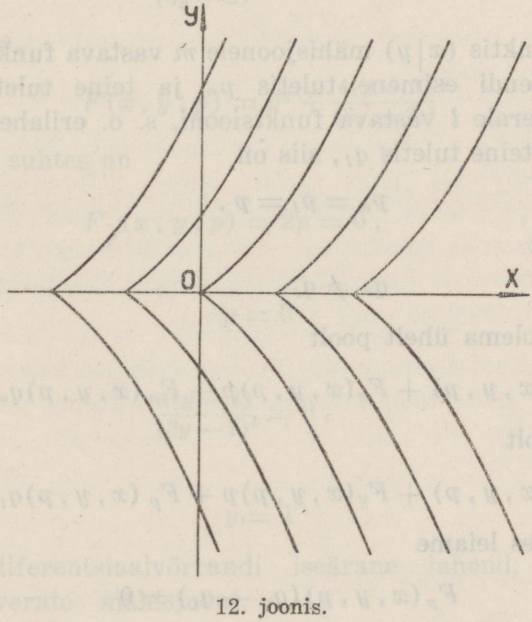
$$-3(x+c)^2 = 0$$

$$2y = 0,$$

millest

$$x = -c, \quad y = 0.$$

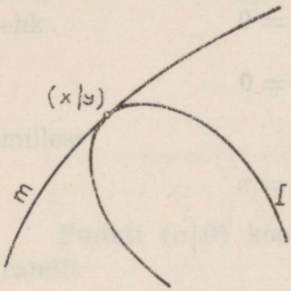
Punkti $(-c \mid 0)$ koordinaadid rahuldavad kõverate parve võrrandit ja ka diskriminantvõrrandit. Siin sirge $y = 0$ on kõverate parve puutujaks ja ühtlasi nende tipp-punktide geomeetriliseks kohaks (12. joon.).



12. joonis.

3. Diferentsiaalvõrrandi iseärase lahendi võime saada ka ilma üldlahendit leidmata, mistõttu on iseärane lahend kergesti leitav.

Vaatleme mähisjoonel m mistahes punkti $(x \mid y)$ ja olgu l seda punkti läbiv integraalkõverate parve kõver (13. joon.). Et mõlemad kõverad m ja l on integraalkõverad, siis peavad vastavad funktsioonid rahuldama diferentsiaalvõrrandit



13. joonis.

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ehk

$$F(x, y, p) = 0,$$

kus $p = \frac{dy}{dx}$. Need funktsioonid peavad aga ka rahuldama võrrandit

$$F_x(x, y, p) + F_y(x, y, p)p + F_p(x, y, p)q = 0,$$

kus $q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, mis on saadud võrrandi $F(x, y, p) = 0$ diferentsimisel.

Olgu punktis $(x \mid y)$ mähisjoonele m vastava funktsiooni, s. o. iseärase lahendi esimene tuletis p_m ja teine tuletis q_m ning integraalkõverale l vastava funktsiooni, s. o. erilahendi esimene tuletis p_l ja teine tuletis q_l, siis on

$$p_m = p_l = p,$$

kuna üldiselt

$$q_m \neq q_l.$$

Seega peab olema ühelt poolt

$$F_x(x, y, p) + F_y(x, y, p)p + F_p(x, y, p)q_m = 0$$

ja teiselt poolt

$$F_x(x, y, p) + F_y(x, y, p)p + F_p(x, y, p)q_l = 0,$$

kust lahutades leiame

$$F_p(x, y, p)(q_m - q_l) = 0.$$

Et aga üldiselt $q_m - q_l \neq 0$, siis peab olema

$$F_p(x, y, p) = 0,$$

mida peavad rahuldama iseärase integraalkõvera iga punkti koordinaadid.

Kõrvaldades võrranditest

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, p) &= 0 \\ F_p(x, y, p) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

p, saame

$$E(x, y) = 0,$$

kus $E(x, y)$ nimetatakse võrrandi $F(x, y, p) = 0$ diskriminandiks. Siin on $E(x, y) = 0$ diferentsiaalvõrrandi iseärane lahend $\Psi(x, y) = 0$ või $\Psi(x, y)$ on diskriminandi $E(x, y)$ üks teguritest.

Näiteks eespool-käsiteldud diferentsiaalvõrrandi

$$p^2 + \frac{4(y-1)}{(3y-2)^2} = 0$$

vasaku poole

$$F(x, y, p) = p^2 + \frac{4(y-1)}{(3y-2)^2}$$

osatuletis p suhtes on

$$F_p(x, y, p) = 2p = 0,$$

millest

$$p = 0$$

ja seega

$$\frac{4(y-1)}{(3y-2)^2} = 0,$$

kust

$$y = 1$$

on selle diferentsiaalvõrrandi iseärane lahend, mis esitab integraalkõverate mähisjoont.

§ 13. Isogonaalsed ja ortogonaalsed trajektoorid.

Kui kõverate parve

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

lõikab ühe ja sama nurga ω all mõne teise kõverate parve iga kõver, siis nimetatakse teise parve kõveraid esimese kõverate parve *isogonaalseteks trajektoorideks*. See on isogonaalsete trajektooride parv. Erijuhul, kui kõverate lõikumisel $\omega = 90^0$, siis teise parve kõveraid nimetatakse *ortogonaalseteks trajektoorideks*, mis moodustavad ortogonaalsete trajektooride parve.

Otsime kõverate parve võrrandile

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

teise niisuguse võrrandi, mis esitaks kõveraid, mis lõikaksid antud parve kõveraid nurga ω all, s. o. antud kõverate parve isogonaalsete trajektooride võrrandi. Selleks moodustame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

mille üldlahend oleks

$$\Phi(x, y, c) = 0.$$

Siis antud kõverate parv esitab leitud diferentsiaalvõrrandi integraalkõveraid, mille mistahes punkti $(x \mid y)$ peab läbima isogonaalne trajektoor ja moodustama integraalkõveraga nurga ω, mis on integraalkõvera ja isogonaalse trajektoori lõikepunktis tõmmatud puutujate vaheline nurk (14. joon.).

Kui integraalkõvera puutuja tõusunurk punktis $(x \mid y)$ on α ja isogonaalse trajektoori puutuja tõusunurk samas punktis on β, siis

$$\beta = \alpha + \omega$$

ja

$$\tan \beta = \tan(\alpha + \omega) = \frac{\tan \alpha + \tan \omega}{1 - \tan \alpha \tan \omega}.$$

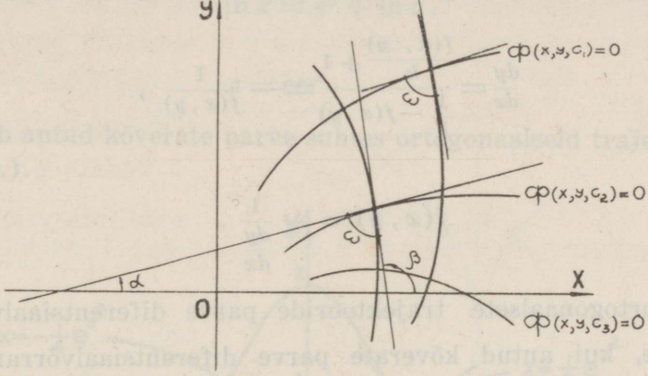
Et

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ja $\tan\omega$ on antud suurus, siis

$$\tan\beta = \frac{f(x, y) + \tan\omega}{1 - f(x, y)\cdot\tan\omega},$$

mis väljendab nüüd isogonaalse trajektoori mistahes punkti koordinaatide ja selles punktis tõmmatud puutuja tõusu funktsio-



14. joonis.

naalset seost. Seega on ta isogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrand. Tähistame siin tõusu $\tan\beta = \frac{dy}{dx}$ ja $\tan\omega = k$, siis isogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + k}{1 - kf(x, y)},$$

mille üldlahend esitab isogonaalseid trajektoore, mis lõikumisel iga kõveraga parvest $\Phi\ (x, y, c) = 0$ moodustavad ühe ja sama nurga ω.

Ilmutades isogonaalsete trajektooride parve võrrandi $f(x, y)$ suhtes saame

$$f(x, y) = \frac{\frac{dy}{dx} - k}{1 + k\frac{dy}{dx}},$$

millest nähtub, et isogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrandi saamiseks tuleb antud kõverate parve diferentsiaalvõrrandis $\frac{dy}{dx}$ asendada avaldisega

$$\frac{\frac{dy}{dx} - k}{1 + k\frac{dy}{dx}},$$

kus k on kõverate lõikenurga tangens.

Ortogonaalsete trajektooride puhul $k = \tan 90^0 = \infty$ ja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{f(x\,,\,y)}{k} + 1}{\frac{1}{k} - f(x\,,y)} = -\frac{1}{f(x\,,y)}\,,$$

millest

$$f(x\,,y) = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\,.$$

Seega ortogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrand saadakse, kui antud kõverate parve diferentsiaalvõrrandis $\frac{dy}{dx}$ asendada tema pöördväärtusega vastupidise märgiga, s. o.

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\,.$$

a) Leiame kõverate parve

$$y = ce^{-x^2}$$

ortogonaalsete trajektooride võrrandi.

Antud kõverate parve diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dy}{dx} = ce^{-x^2}(-2x)$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = -2xy\,.$$

Ortogonaalsete trajektooride diferentsiaalvõrrandi leidmiseks asendame $\frac{dy}{dx}$ avaldisega $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, saame

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2xy}.$$

Muutujaid eraldades leiame selle diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$\int\frac{dx}{x}=2\int ydy$$

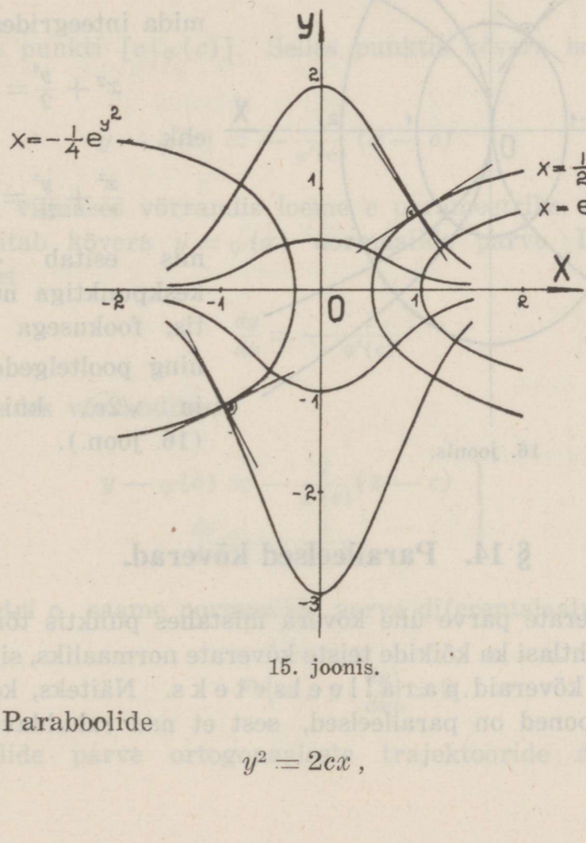
ehk

$$\ln x=y^2+\ln c\,,$$

millest

$$x=ce^{y^2},$$

mis esitab antud kõverate parve suhtes ortogonaalseid trajektoore (15. joon.).



15. joonis.

b) Paraboolide

$$y^2=2cx\,,$$

kus c on parameetriks, ortogonaalsed trajektoorid on ellipsid.

Tõepoolest, paraboolide diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2c}}{2\sqrt{x}}$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

ja ortogonaalsete trajektooride diferentsiaalvõrrand

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y}{2x}$$

ehk

$$2x\,dx + y\,dy = 0\,,$$

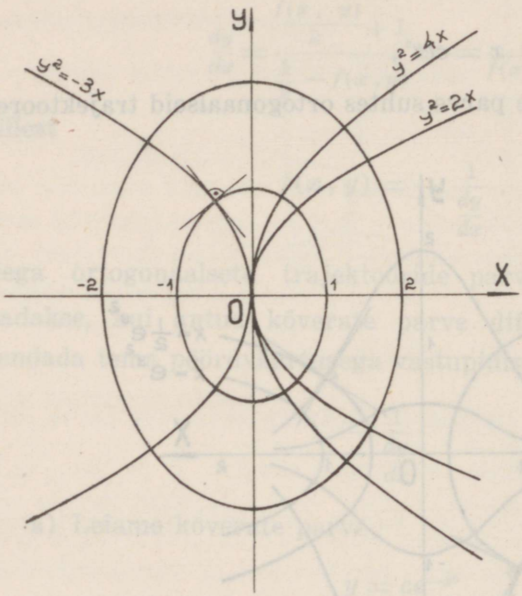
mida inteegrides saame

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = c$$

ehk

$$\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{2c} = 1\,,$$

mis esitab ellipseid keskpunktiga nullpunktis, fookusega Y-teljel ning pooltelgedega $\sqrt{c}$ ja $\sqrt{2c}$, kui $c > 0$ (16. joon.).



16. joonis.

§ 14. Paralleelsed kõverad.

Kui kõverate parve ühe kõvera mistahes punktis tõmmatud normaal on ühtlasi ka kõikide teiste kõverate normaaliks, siis nimetatakse neid kõveraid p a r a l l e e l s e t e k s. Näiteks, kontsentrilised ringjooned on paralleelsed, sest et nad rahuldavad seda tingimust.

Et leida kõikide kõverate võrrand, mis oleksid paralleelsed antud kõveraga, mille võrrand on

$$y = \varphi(x),$$

selleks tõmbame antud kõverale vabalt võetud punktides normaalid, mis peavad siis olema ka teistele kõveratele normaalideks. Seega antud kõver on normaalide parve ortogonaalseks trajektooriks, ja ümberpöördult, antud kõvera ortogonaalseteks trajektoorideks on normaalide parv. Tähendab, et leida antud kõveraga paralleelsete kõverate parve võrrand, selleks tuleb enne leida normaalide parve võrrand ja siis normaalide parve ortogonaalsete trajektooride võrrand.

Võtame kõveral

$$y = \varphi(x)$$

mistahes punkti $[c \,|\, \varphi(c)]$. Selles punktis kõvera normaali võrrand on

$$y - \varphi(c) = -\frac{1}{\varphi'(c)}(x - c).$$

Kui viimases võrrandis loeme c parameetriks, siis see võrrand esitab kõvera $y = \varphi(x)$ normaalide parve. Diferentsides näeme, et

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\varphi'(c)}.$$

Kõrvaldades võrranditest

$$\left.\begin{aligned} y - \varphi(c) &= -\frac{1}{\varphi'(c)}(x - c) \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\varphi'(c)} \end{aligned}\right\}$$

parameetri c, saame normaalide parve diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Normaalide parve ortogonaalsete trajektooride diferentsiaalvõrrandi saamiseks asendame normaalide parve diferentsiaalvõrrandis $\frac{dy}{dx}$ avaldisega $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, s. o.

$$F\left(x,\, y,\, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)=0\,,$$

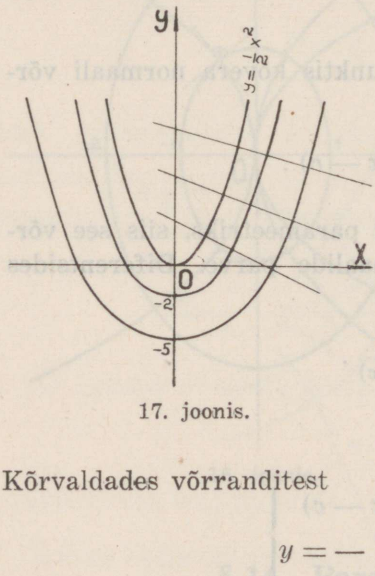
mille üldlahend esitab siis kõverate parve, mis on paralleelsed antud kõveraga $y=\varphi(x)$.

Näiteks võrrand

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

esitab nullpunkti läbivat parabooli (17. joon.), kusjuures

$$\frac{dy}{dx}=x\,.$$



17. joonis.

Kui $x=c$ lugeda parameetriks, siis parabooli normaalide parve võrrand on

$$y-\frac{1}{2}c^2=-\frac{1}{c}(x-c)$$

ehk

$$y=-\frac{x}{c}+\frac{c^2}{2}+1\,,$$

kust

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{c}\,.$$

Kõrvaldades võrranditest

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{x}{c}+\frac{c^2}{2}+1\\ \frac{dy}{dx}&=-\frac{1}{c}\end{aligned}\right\}$$

parameetri c, saame normaalide parve diferentsiaalvõrrandi

$$y=x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+1\,,$$

mis kujutab Clairaut' võrrandit, mille üldlahend esitab sirgete parve.

Asetame saadud diferentsiaalvõrrandisse $\frac{dy}{dx}$ asemele $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, saame normaalide parve ortogonaalsete trajektooride ehk antud parabooliga paralleelsete kõverate diferentsiaalvõrrandi

$$y = x\left(-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2} + 1,$$

mille üldlahend on otsitavate paralleelsete kõverate võrrand.

Viimane diferentsiaalvõrrand kujutab Lagrange'i võrrandit. Märgime $\frac{dy}{dx} = p$, siis

$$y = -\frac{x}{p} + \frac{p^2}{2} + 1$$

ja diferentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{p} + \left(\frac{x}{p^2} + p\right)\frac{dp}{dx},$$

millest

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p(p^2+1)} = \frac{p^2}{p^2+1},$$

mis on lineaarne diferentsiaalvõrrand, kus

$$P(p) = -\frac{1}{p(p^2+1)},\ Q(p) = \frac{p^2}{p^2+1}.$$

Lahendades leiame

$$x = e^{\int \frac{dp}{p(p^2+1)}}\left[\int \frac{p^2}{p^2+1} \cdot e^{-\int \frac{dp}{p(p^2+1)}} dp + c\right] =$$

$$= e^{\int\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)dp} \cdot \left[\int \frac{p^2}{p^2+1} \cdot e^{\int\left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p}\right)dp} dp + c\right] =$$

$$= e^{\ln p - \frac{1}{2}\ln(p^2+1)} \cdot \left[\int \frac{p^2}{p^2+1} \cdot e^{\frac{1}{2}\ln(p^2+1) - \ln p} dp + c\right] =$$

$$= e^{\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}} \cdot \left[\int \frac{p^2}{p^2+1} \cdot e^{\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}} dp + c\right] =$$

$$=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\left[\int\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\,dp+c\right]=$$

$$=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}[\sqrt{p^2+1}+c]=p+\frac{cp}{\sqrt{p^2+1}},$$

mida paigutades võrrandisse

$$y=-\frac{x}{p}+\frac{p^2}{2}+1$$

x-i asemele saame

$$y=\frac{p^2}{2}-\frac{c}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Seega antud parabooliga paralleelsete kõverate parameetrilised võrrandid on

$$\left.\begin{aligned} x&=p+\frac{cp}{\sqrt{p^2+1}}\\ y&=\frac{p^2}{2}-\frac{c}{\sqrt{p^2+1}}\end{aligned}\right\}.$$

17. joonisel esinevad antud parabooliga paralleelsed kõverad, mida esitavad saadud parameetrilised võrrandid, kui $c=2$ ja $c=5$.

§ 15. Evolvendid.

Diferentsiaalarvutuses nägime, et kõvera kõveruse keskpunktide kogu moodustas samuti kõvera, mida nimetasime antud kõvera e v o l u u d i k s, kusjuures evoluudi puutujad olid ühtlasi antud kõverale normaalideks.

Kui on antud kõvera võrrand, siis võime leida evoluudi võrrandi, ja ümberpöördult, kui on antud evoluudi võrrand, võime leida ka algkõvera ehk e v o l v e n d i võrrandi.

Et evoluudi puutujad on evolvendile normaalideks, siis evoluudi puutujate parve võrrand on ühtlasi evolvendi normaalide parve võrrandiks. Evolvent on seega oma normaalide ehk evoluudi puutujate ortogonaalne trajektoor.

Olgu evoluudi võrrand

$$y = \varphi(x) .$$

Võtame evoluudil mistahes punkti $[c \,|\, \varphi(c)]$ ja selles punktis evoluudi puutuja, mille võrrand on

$$y - \varphi(c) = \varphi'(c)(x - c) .$$

Kui c lugeda parameetriks, siis viimane võrrand esitab evoluudi $y = \varphi(x)$ puutujate parve, kusjuures

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(c) .$$

Kõrvaldame võrranditest

$$\left.\begin{aligned} y - \varphi(c) &= \varphi'(c)(x - c) \\ \frac{dy}{dx} &= \varphi'(c) \end{aligned}\right\}$$

parameetri c, saame evoluudi puutujate parve diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 ,$$

mis on ühtlasi otsitava evolventide parve normaalide diferentsiaalvõrrandiks. Evolventide parve kui ortogonaalsete trajektooride diferentsiaalvõrrandi saame, kui paigutame saadud võrrandisse $\frac{dy}{dx}$ asemele $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, s. o.

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0 ,$$

mille üldlahend esitab siis evolventide parve.

Näiteks parabooli (evoluudi)

$$y = \frac{1}{2} x^2 ,$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = x ,$$

puutujate parve võrrand on

$$y - \frac{1}{2} c^2 = c(x - c)$$

ehk

$$y = cx - \frac{c^2}{2},$$

kust

$$\frac{dy}{dx} = c.$$

Kõrvaldame võrranditest

$$\left. \begin{aligned} y &= cx - \frac{c^2}{2} \\ \frac{dy}{dx} &= c \end{aligned} \right\}$$

parameetri c, saame parabooli puutujate ehk evolventide normaalide diferentsiaalvõrrandi

$$y = x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2,$$

mis kujutab Clairaut' võrrandit. Evolventide parve diferentsiaalvõrrandi saame sellest võrrandist, paigutades $\frac{dy}{dx}$ asemele $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, s. o.

$$y = x \left(-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right) - \frac{1}{2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2},$$

mille üldlahend esitab evolventide parve.

Et viimane diferentsiaalvõrrand kujutab Lagrange'i võrrandit, siis

$$y = -\frac{x}{p} - \frac{1}{2p^2}$$

ja

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{p} + \left(\frac{x}{p^2} + \frac{1}{p^3} \right) \frac{dp}{dx},$$

millest

$$\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p^2(p^2+1)},$$

mis on lineaarne diferentsiaalvõrrand, kus

$$P(p) = -\frac{1}{p(p^2+1)},\ Q(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

Saadud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$x = e^{\int \frac{dp}{p(p^2+1)}} \cdot \left[\int \frac{1}{p^2(p^2+1)} \cdot e^{-\int \frac{dp}{p(p^2+1)}} dp + c\right] =$$

$$= e^{\ln \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}} \cdot \left[\int \frac{e^{\ln \frac{\sqrt{p^2+1}}{p}}}{p^2(p^2+1)} dp + c\right] =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \left[\int \frac{\sqrt{p^2+1}}{p^3(p^2+1)} dp + c\right] =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \left[\frac{1}{4} \ln \frac{p^2+2+2\sqrt{p^2+1}}{p^2} - \frac{\sqrt{p^2+1}}{2p^2} + c\right].$$

Paigutame võrrandisse

$$y = -\frac{x}{p} - \frac{1}{2p^2}$$

x-i asemele saadud väärtuse, saame

$$y = -\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{p^2+2+2\sqrt{p^2+1}}{p^2} + c\right).$$

Seega antud parabooli evolventide parve parameetrilised võrrandid on

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{p^2+2+2\sqrt{p^2+1}}{p^2} - \frac{\sqrt{p^2+1}}{2p^2} + c\right) \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{p^2+2+2\sqrt{p^2+1}}{p^2} + c\right) \end{aligned}\right\}.$$

§ 16. Diferentsiaalvõrrandi graafiline lahendamine.

1. Esimese järgu diferentsiaalvõrrand

$$F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

kujutab geomeetrilises mõttes funktsionaalset seost integraalkõvera mistahes punkti $(x|y)$ koordinaatide ja integraalkõvera puutuja tõusu $\frac{dy}{dx}$ vahel selles punktis.

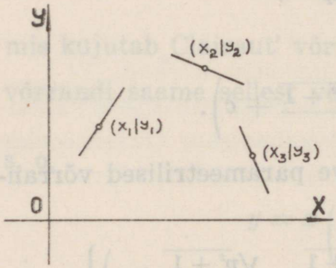
Kui diferentsiaalvõrrandit

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

on võimalik ilmutada tuletise $\frac{dy}{dx}$ suhtes, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

siis $f(x, y)$ väljendab selle diferentsiaalvõrrandi integraalkõvera puutuja tõusu punktis $(x|y)$, mille järgi võime joonestada selles punktis integraalkõvera puutuja, ilma integraalkõvera kuju teadmata. Andes muutujaile x ja y mistahes väärtusi (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., saame vastavates punktides integraalkõverate puutujate tõusud $f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2)$, $f(x_3, y_3)$, ..., ja seega ka vastavad puutujad (18. joon.). Niisuguste puutujatega võime täita kogu tasapinna, kus siis tekib nn. integraalkõverate s i h t i d e v ä l i.



18. joonis.

Integraalkõverate sihtide välja võime kujutada ka nõnda, et märgime tasapinnal need integraalkõverate punktid, milles integraalkõverate puutujad moodustavad ühe ja sama tõusunurga α. Siis saame võrrandi

$$f(x, y) = \tan\alpha,$$

mis esitab punktide geomeetrilist kohta, mille iga punkti läbiva integraalkõvera puutuja tõus on konstantne suurus. See punktide geomeetriline koht moodustab joone, mida nimetatakse integraalkõverate sihtide välja i s o k l i i n i k s. Nii saame i s o k l i i n i d e v ä l j a.

Joonestades näiteks isokliinid, mille võrrandid on

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 1, \quad f(x, y) = 2, \quad \ldots,$$

saame rea kõveraid (või erijuhul sirgeid), mille punktides integraalkõverate tõus on teada, ja seega võime saada integraalkõverate sihtide välja.

Näiteks kui diferentsiaalvõrrandis

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

märgime $\alpha = 30^0$, siis $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja vastava isokliini võrrand on

$$y = -\sqrt{3}\,x\ ,$$

mis esitab nullpunkti läbivat sirget, mille mistahes punkti läbiva integraalkõvera puutuja tõusunurk on 30^0.

Analoogiliselt võime märkida näiteks, et

$$\alpha = 60^0\ ,\ 90^0\ ,\ 120^0\ ,\ 150^0\ ,\ 180^0\ ,$$

kus vastavalt

$$\tan\alpha = \sqrt{3}\ ,\ \infty\ ,\ -\sqrt{3}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ 0\ ,$$

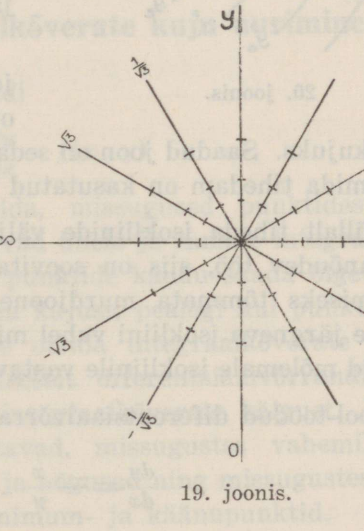
siis isokliinide võrrandid on

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x\ ,\quad y = 0\ ,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x\ ,\quad y = \sqrt{3}x\ ,$$

$$x = 0\ ,$$

mis esitavad samuti nullpunkti läbivaid sirgeid, mille punktid võimaldavad määrata antud diferentsiaalvõrrandi integraalkõverate sihtide välja (19. joon.).



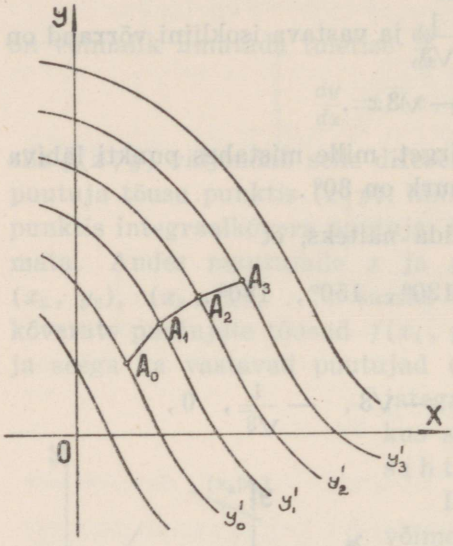
19. joonis.

2. Isokliinide välja saab kasutada diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ligikaudseks graafiliseks lahendamiseks, s. o. tema integraalkõverate ligikaudse kuju leidmiseks.

Et saada integraalkõverat, mis läbib antud punkti $A_0 \equiv (x_0 | y_0)$, selleks joonestame isokliinide välja nõnda, et üks isokliin läbiks punkti A_0 (20. joon.). Olgu sellele isokliinile vastav integraalkõvera tõus $y_0' = \tan \alpha_0$, s. o.



20. joonis.

$$f(x_0, y_0) = y_0' = \tan \alpha_0,$$

siis tõmbame punktist A_0 sirglõigu A_0A_1 tõusuga y_0' kuni lõikumiseni järgneva isokliiniga, millele vastav integraalkõvera tõus olgu $y_1' = \tan \alpha_1$. Sirglõigu A_0A_1 otsapunktist A_1 tõmbame uue sirglõigu A_1A_2 tõusuga y_1' kuni lõikumiseni temale järgneva isokliiniga jne.

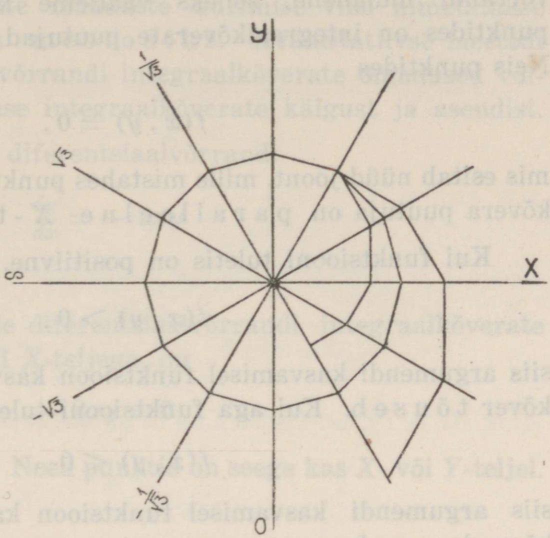
Niimoodi saame murdjoone $A_0A_1A_2 \ldots$, mis on otsitava integraalkõvera ligikaudseks kujuks. Saadud joon on seda lähem otsitavale integraalkõverale, mida tihedam on kasutatud isokliinide väli.

Et küllalt tiheda isokliinide välja joonestamine on üldiselt väga aeganõudev töö, siis on soovitav täpsema integraalkõvera kuju saamiseks tõmmata murdjoone $A_0A_1A_2 \ldots$ iga osa kahe teineteisele järgneva isokliini vahel mitte ühele isokliinile vastava sihiga, vaid mõlemale isokliinile vastavate sihtide keskmisega.

Eespool-toodud diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

integraalkõverateks on kontsentrilised ringjooned keskpunktiga nullpunktis. Selle võrrandi graafilise lahenduse puhul saame murdjooned, mis kujutavad ringjoonte lähendusi. Iga ringjoone asemel võime saada graafilisel lahendamisel kolm murdjoont, joonestades murdjoone osa mingi kahe isokliini vahele — üks kord ühele isokliinile vastava sihiga, teine kord teisele isokliinile vastava sihiga ja kolmas kord mõlemale isokliinile vastavate sihtide keskmisega (21. joon.), milledest viimane murdjoon kujutab otsitava ringjoone kui integraalkõvera kõige täpsemat lähendust.



21. joonis.

§ 17. Integraalkõverate kuju uurimine.

Et diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

puhul meie ei saa ette öelda, missugused punktidest $(x_1 | y_1)$, $(x_2 | y_2)$, $(x_3 | y_3)$, ... kuuluvad ühele ja samale integraalkõverale, siis ei ole ka kerge nende punktide kaudu saada õiget kujutlust integraalkõverate käigust ja kujust, pealegi kui punktide arv on piiratud. Sel juhul võime otsida integraalkõverate mõningaid omadusi, mis saadakse otseselt diferentsiaalvõrrandist ja mis võimaldavad ettekujutuse integraalkõverate käigust. Need omadused, nagu näeme, näitavad, missugustes vahemikkudes on integraalkõverad kumerad ja nõgusad ning missugustes punktides on nende maksimum-, miinimum- ja käänupunktid.

Et saada kujutlust diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

integraalkõverate käigust, ilma et meil teada oleks diferentsiaalvõrrandi üldlahend, selleks vaatleme kõigepealt, missugustes punktides on integraalkõverate puutujad paralleelsed X-teljega. Neis punktides

$$f(x, y) = 0,$$

mis esitab nüüd joont, mille mistahes punktis tõmmatud integraalkõvera puutuja on p a r a l l e e l n e X - t e l j e g a.

Kui funktsiooni tuletis on positiivne, s. o.

$$f(x, y) > 0,$$

siis argumendi kasvamisel funktsioon kasvab ja seega integraalkõver t õ u s e b. Kui aga funktsiooni tuletis on negatiivne, s. o.

$$f(x, y) < 0,$$

siis argumendi kasvamisel funktsioon kahaneb ning integraalkõver l a n g e b.

Käänupunktide asukoha määramiseks võtame funktsiooni teise tuletise

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_x(x, y) + f_y(x, y)\frac{dy}{dx}$$

ehk

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y),$$

kus peab olema

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y) = 0,$$

mis esitab joont, mille punktid esinevad k ä ä n u p u n k t i d e n a.

Kui funktsiooni teine tuletis on positiivne, s. o.

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y) > 0,$$

siis järeldame, et integraalkõver on n õ g u s. On aga funktsiooni teine tuletis negatiivne, s. o.

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y) < 0,$$

siis on integraalkõver k u m e r.

Sääraselt tuletise suhtes ilmutatud diferentsiaalvõrrandist saadud integraalkõverate omaduste uurimise viisi nimetatakse **kvantitatiivseks meetodiks**. Kvantitatiivse meetodi abil leitud diferentsiaalvõrrandi integraalkõverate omadused võimaldavad meile kujutluse integraalkõverate käigust ja asendist.

Oletame näiteks, et diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

üldlahend on teadmata.

Punktides, kus selle diferentsiaalvõrrandi integraalkõverate puutujad on paralleelsed X-teljega, on

$$-2xy = 0,$$

millest $x = 0$ või $y = 0$. Need punktid on seega kas X- või Y-teljel.

Kui

$$-2xy > 0,$$

siis x ja y on isesuguste märkidega ning seega II ja IV kvadrandis diferentsiaalvõrrandi integraalkõverad tõusevad. Kui aga

$$-2xy < 0,$$

siis x ja y on ühesuguste märkidega ning seega I ja III kvadrandis integraalkõverad langevad.

Funktsiooni teine tuletis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2y - 2x\frac{dy}{dx}$$

ehk

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2y + 4x^2y$$

peab olema käänupunktides võrdne 0-ga, s. o.

$$2y(2x^2 - 1) = 0,$$

kust

$$y = 0, \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tähendab, integraalkõverate käänupunktid asetsevad sirgel $y=0$ või sirgetel $x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$.

Integraalkõverate nõgususe korral

$$2y(2x^2-1) > 0 .$$

Kui siin $y > 0$, siis $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$, ja kui $y < 0$, siis $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Seega I ja II kvadrandis on integraalkõverad nõgusad vahemikes

$$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \frac{1}{\sqrt{2}} < x < \infty,$$

ning III ja IV kvadrandis on integraalkõverad kumerad vahemikus

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Integraalkõverate kumeruse puhul

$$2y(2x^2-1) < 0 .$$

Kui siin $y > 0$, siis $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ja kui $y < 0$, siis $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tähendab, I ja II kvadrandis on integraalkõverad kumerad vahemikus

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ning III ja IV kvadrandis on integraalkõverad kumerad vahemikes

$$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \frac{1}{\sqrt{2}} < x < \infty .$$

Saadud omadustest järeldub, et antud diferentsiaalvõrrandi integraalkõverate maksimum- ja miinimumpunktid asetsevad sirgel

$$x = 0 ,$$

s. o. Y-teljel, ning käänupunktid sirgetel

$$x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 .$$

Need leitud omadused maksimum-, miinimum- ja käänupunktide asukoha suhtes ning samuti ka integraalkõverate kumeruse ja nõgususe vahemikkude kohta võimaldavad meile kujutluse diferentsiaalvõrrandi

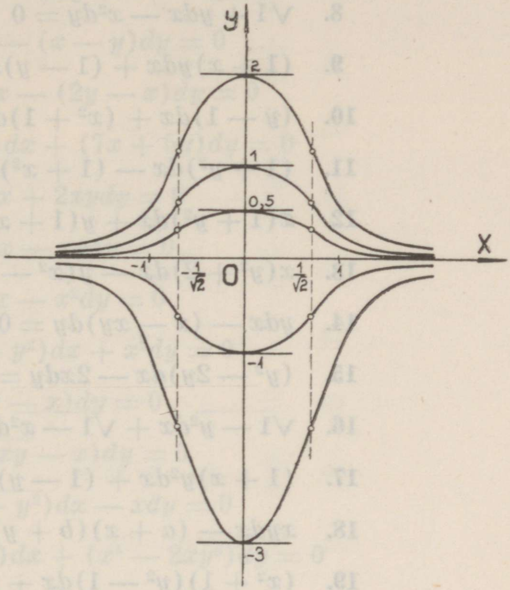
$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

integraalkõverate käigust ja asendist.

Integraalkõverate täpse kuju võimaldab selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y = ce^{-x^2}.$$

22. joonisel esinevad integraalkõverad, mida esitavad diferentsiaalvõrrandi erilahendid



22. joonis.

$$y = 2e^{-x^2}, \quad y = e^{-x^2}, \quad y = \frac{1}{2}e^{-x^2}, \quad y = -e^{-x^2}, \quad y = -3e^{-x^2}.$$

§ 18. Harjutusülesandeid.

Lahendada diferentsiaalvõrrandid muutujate eraldamise teel:

1. $e^x dx + y dy = 0$
2. $x dx + y dy = 0$
3. $y dx - x dy = 0$
4. $y dx - 2x dy = 0$
5. $xy dx - dy = 0$

6. $(x - a)dx + ydy = 0$

7. $(y - a)dx + x^2dy = 0$

8. $\sqrt{1 + y}dx - x^2dy = 0$

9. $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$

10. $(y - 1)dx + (x^2 + 1)dy = 0$

11. $(1 + y^2)dx - (1 + x^2)dy = 0$

12. $x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$

13. $x(y^2 + 2)dx - y(x^2 - 2)dy = 0$

14. $ydx - (x - xy)dy = 0$

15. $(y^2 - 2y)dx - 2xdy = 0$

16. $\sqrt{1 - y^2}dx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$

17. $(1 + x)y^2dx + (1 - y)x^2dy = 0$

18. $xydx - (a + x)(b + y)dy = 0$

19. $(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xydy = 0$

20. $e^xdx - (1 + e^x)dy = 0$

21. $2x(1 + e^y)dx - e^y(1 + x^2)dy = 0$

22. $\sin x \cos ydx + \cos x \sin ydy = 0$

23. $\cos x \cos ydx - \sin x \sin ydy = 0$

24. $y \ln ydx - \sin xdy = 0$

25. $(y + \sqrt{1 + y^2})dx - (x - \sqrt{1 + x^2})dy = 0$

26. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{xy}{4} = 0$

27. $(1 + x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2y^2 = 0$

28. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (2x - 1)\frac{dy}{dx} + x^2 - 3x = 0$

29. $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0\,.$

Lahendada homogeensed ja homogeenseks taanduvad diferentsiaalvõrrandid:

30. $(x - y)dx - xdy = 0$

31. $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$

32. $(2x - y)dx - (2y - x)dy = 0$

33. $(10x + 8y)dx + (7x + 5y)dy = 0$

34. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$

35. $(y^2 - x^2)dx - xydy = 0$

36. $(x^2 + y^2)dx - x^2dy = 0$

37. $(x^2 + xy + y^2)dx + x^2dy = 0$

38. $y^2dx + x(y - x)dy = 0$

39. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

40. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$

41. $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$

42. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 0$

43. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}} = 0$

44. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} = 0$

45. $[y^2 + (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}]dx - xydy = 0$

46. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

47. $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$

48. $(3y - 2x - 7)dx + (4x - 5y + 13)dy = 0$

49. $(x + 7y + 2)dx - (3x + 5y + 6)dy = 0$

50. $(4x + 3y - 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$

51. $(x - 2y + 9)dx - (3x - 6y + 19)dy = 0$

52. $(2x + 3y - 1)dx - (4x + 6y + 1)dy = 0$.

Lahendada lineaarsed diferentsiaalvõrrandid:

53. $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = \frac{ax}{1-x^2}$

54. $\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$

55. $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$

56. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = -x$

57. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

58. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$

59. $\frac{dy}{dx} - y = e^x\left(x + \frac{1}{x}\right)$

60. $\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}$

61. $\frac{dy}{dx} - ay = \cos x$

62. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x} = \frac{\cos x}{1+x}$

63. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin x$

64. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \frac{1}{\cos x}$

65. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$

66. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

67. $\frac{dy}{dx} - y \tan x = 2 \cos^2 x$

68. $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$

69. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arc\,tan} x}{1+x^2}$

70. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lahendada Bernoulli' diferentsiaalvõrrandid:

71. $\frac{dy}{dx} + 2y = y^3$

72. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$

73. $\frac{dy}{dx} + 2xy = y^2$

74. $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2} = \frac{x^2y^2}{1+x^2}$

75. $\frac{dy}{dx} + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

76. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

77. $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = y^2 \cot x$

78. $\frac{dy}{dx} + 3y \tan x = y^4 \sin x$.

Inteegrida otseselt:

79. $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$

80. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0$

81. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$

82. $\left(3 - \frac{2x}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$.

83. $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$.

Lahendada diferentsiaalvõrrandid inteegriva teguri abil:

84. $(x^2 + y^2 - 2x)dx + 2ydy = 0$

85. $2xydx + (y^2 + 3x^2)dy = 0$

86. $(x^2y + y + 1)dx + (x + x^3)dy = 0$

87. $(ay - e^{bx})dx + dy = 0$

88. $(1+3xy)dx+x^2dy=0$

89. $y(xy+1)dx-xdy=0$

90. $y^2dx+(xy-1)dy=0$

91. $(x^2y-y^3+a^2y)dx-(x^3-xy^2-a^2x)dy=0$

92. $2xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$

93. $y(1-xy\ln x)dx+xdy=0$

94. $(\cos x+y\tan x)dx-dy=0$

95. $(x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0$.

Lahendada diferentsiaalvõrrandid, ilmutades neid x-i või y suhtes:

96. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y=0$

97. $4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{dy}{dx}-x=0$

98. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dx}-x+1=0$

99. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2x\frac{dy}{dx}+y=0$.

Lahendada Clairaut' ja Lagrange'i diferentsiaalvõrrandid ja leida iseärased lahendid:

100. $y=x\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

101. $y=x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

102. $y=x\frac{dy}{dx}+a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

103. $y=x\frac{dy}{dx}+\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

104. $y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

105. $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

106. $y = x\frac{dy}{dx} - e^{\frac{dy}{dx}}$

107. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} - y = 0$

108. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

109. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0$

110. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0$

111. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + e^x = 0$

112. $(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

113. $x(2y-x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y(2x-y) = 0.$

Leida kõverate parve ortogonaalsed trajektoorid:

114. $x^2 + y^2 + 2cy = 0$

115. $y = ce^x$

116. $x^3y^3 = c$

117. $y^2 = 2x + c$

118. $x^2 + y^2 - 2cx - 1 = 0$

119. $(x^2 + y^2)^2 - c^2xy = 0$

120. $y^2(2c - x) - x^3 = 0$

121. $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0.$

122. Leida kõvera võrrand, kui puutuja projektsioon X-teljel on konstantne suurus a.

123. Leida kõvera võrrand, kui puutuja projektsioon X-teljel on kaks korda suurem kui puutepunkti abstsiss.

124. Leida kõvera võrrand, kui raadiusvektori ja vastava abstsissi summa on võrdne puutuja projektsiooniga X-teljel.

125. Leida kõvera võrrand, kui Y-telg jagab puutepunkti ja X-telje vahelise puutuja kaheks võrdseks osaks.

126. Leida kõvera võrrand, kui X-teljest, puutujast ja nullpunktist tõmmatud raadiusvektorist piiratud kolmnurga pindala on konstantne suurus a^2.

127. Õhus, mille temperatuur on 20^0, aine temperatuur langeb 20 min. jooksul 100^0-lt 60^0-ni. Mitme minuti pärast aine temperatuur langeb 30^0-ni, kui aine temperatuuri muutus õhus on võrdeline aine ja õhu temperatuuride vahega?

128. Mitme minuti jooksul tühjeneb veega täidetud koonusekujuline lehter, kui pool vett jookseb temast välja 2 min. jooksul?

129. Püssikuul tungib 10 cm paksusesse lauda kiirusega 400 m/sek. ja väljub lauast 0,0005 sek. pärast. Leida kuuli kiirus lauast väljumise momendil, oletades, et laua takistus on võrdeline kuuli kiiruse kuubiga.

130. 100 kg koguraskusega parašütisti langemise kiirus õhus on 5 m/sek. Leida parašüti raadius, kui õhu takistus lugeda võrdeliseks langemise kiiruse ruuduga, kusjuures võrdetegur $k = 0{,}8084 \cdot \frac{S}{R}$, kus S on parašüti suurringi pindala m^2-tes ja R on parašütisti raskus kg-des.

II peatükk.

Teise järgu diferentsiaalvõrrandid.

§ 19. Teise järgu diferentsiaalvõrrandi määramine.

Diferentsiaalvõrrandit, milles funktsiooni teine tuletis esineb kõrgeima järgu tuletisena, nimetatakse **teise järgu diferentsiaalvõrrandiks**, s. o.

$$F\left(x\,,\ y\,,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

ehk

$$F(x\,,\ y\,,\ y'\,,\ y'') = 0\,,$$

mille lahendamisel tuleb leida niisugused funktsioonid, mis seda diferentsiaalvõrrandit rahuldavad.

1. Vaatleme kahe parameetriga c_1 ja c_2 kõverate parve esitavat funktsiooni

$$\Phi\,(x\,,\ y\,,\ c_1\,,\ c_2) = 0$$

ning diferentsime seda funktsiooni kaks korda ja kõrvaldame siis võrranditest

$$\Phi(x\,,\ y\,,\ c_1,\ c_2) = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

parameetrid c_1 ja c_2, saame teise järgu diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x\,,\,y\,,\,\frac{dy}{dx}\,,\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0\,,$$

mille üldlahend on

$$\Phi\,(x\,,\,y\,,\,c_1\,,\,c_2)=0\,.$$

Võrrand

$$\Phi\,(x\,,\,y\,,\,c_1\,,\,c_2)=0$$

kujutab geomeetriliselt kahekordselt lõpmatut kõverate parve. Fikseerides parameetrite c_1 ja c_2 väärtused, saame teise järgu diferentsiaalvõrrandi erilahendi, mis määrab ühe ja ainult ühe integraalkõvera.

Näiteks, et leida diferentsiaalvõrrand, mille integraalkõverad kujutavad ringjooni raadiusega r, s. o.

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2-r^2=0\,,$$

kus c_1 ja c_2 on parameetriteks, selleks diferentsime seda ilmutamata funktsiooni kaks korda

$$2(x-c_1)+2(y-c_2)\,\frac{dy}{dx}=0$$

$$2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2(y-c_2)\,\frac{d^2y}{dx^2}=0\,,$$

millest

$$y-c_2=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$x-c_1=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\,.$$

Asetame need väärtused algvõrrandisse, saame teise järgu diferentsiaalvõrrandi

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3-r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0\,,$$

ehk

$$r = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

mis väljendab ringjoonte kõverusraadiust.

2. Argumendi ja kahe parameetri c_1 ja c_2 funktsioon

$$\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$$

võimaldab ainult siis tuletada teise järgu diferentsiaalvõrrandit

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

mille üldlahendit ta esitab, kui võrrandis

$$\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$$

parameetrid c_1 ja c_2 on o l u l i s e d, s. o. kui see võrrand esitab funktsiooni

$$y = \varphi(x, c_1, c_2),$$

kus parameetrid c_1 ja c_2 pole ühendatavad üheks parameetriks, nii et

$$\varphi(x, c_1, c_2) = \psi[x, c(c_1, c_2)] = \psi(x, c).$$

Vastasel korral saaksime diferentsimise ja parameetrite kõrvaldamise teel esimese järgu diferentsiaalvõrrandi.

Näiteks funktsiooni

$$y = c_1 e^{2x+c_2},$$

kus võime märkida $c_1 e^{c_2} = c$, saame kujutada argumendi ja ühe parameetri funktsioonina

$$y = ce^{2x},$$

mis esitab esimese järgu diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

üldlahendit.

Samuti argumendi ja kahe parameetri ilmutamata funktsioon

$$y^2 - 2c_1xy - c_2x^2 = 0$$

ei esita teise järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendit, sest et ta on sama, mis argumendi ja ühe parameetri funktsioon

$$y = cx\,,$$

mille saame eelmist võrrandit y suhtes ilmutades, s. o.

$$y = c_1x \pm \sqrt{c_1^2x^2 + c_2x^2} = x(c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + c_2}) = cx\,,$$

kus $c = c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + c_2}$.

Diferentsides näeme samuti, et funktsioon

$$y^2 - 2c_1xy - c_2x^2 = 0$$

ei esita teise järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendit. Diferentsime seda funktsiooni ainult üks kord ja kõrvaldame võrranditest

$$y^2 - 2c_1xy - c_2x^2 = 0$$

$$c_1y + c_2x + (c_1x - y)\frac{dy}{dx} = 0$$

näiteks c_2, saame

$$\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)(c_1x - y) = 0\,,$$

mis annab kaks võrrandit

$$x\frac{dy}{dx} - y = 0\,, \quad c_1x - y = 0\,,$$

milledest esimene on esimese järgu diferentsiaalvõrrand ja teine on selle esimese järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

Siit selgub, et need kaks parameetrit ei ole olulised. Olulised oleksid nad ainult siis, kui neid ei saaks funktsiooni teisendusel muuta üheks parameetriks.

Kui parameetrid c_1 ja c_2 ei ole olulised, s. o.

$$\varphi(x\,, c_1\,, c_2) = \psi[x\,, c(c_1\,, c_2)] = \psi(x\,, c)\,,$$

siis diferentsides seda funktsiooni c_1 ja c_2 suhtes

$$\varphi_{c_1}(x, c_1, c_2) = \psi_c(x, c) c_{c_1}(c_1, c_2)$$

$$\varphi_{c_2}(x, c_1, c_2) = \psi_c(x, c) c_{c_2}(c_1, c_2)$$

ja jagades

$$\frac{\varphi_{c_1}(x, c_1, c_2)}{\varphi_{c_2}(x, c_1, c_2)} = \frac{c_{c_1}(c_1, c_2)}{c_{c_2}(c_1, c_2)} = \omega(c_1, c_2)$$

näeme, et sel juhul, kui parameetrid c_1 ja c_2 ei ole olulised, siis saadud jagatis ei sõltu x-st.

Ümberpöördult, kui meil on antud teise järgu diferentsiaalvõrrand

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

mida rahuldab funktsioon

$$\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0,$$

kus c_1 ja c_2 on olulised parameetrid, siis nimetatakse seda funktsiooni teise järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

§ 20. Teise järgu diferentsiaalvõrrandi geomeetriline tõlgendus.

1. Integraalkõvera kõverusraadius kõvera punktis $(x|y)$ on

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Et $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha$, kus α on integraalkõvera puutuja tõusunurk punktis $(x|y)$, siis

$$r = \frac{(1 + \tan^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}\cos^3\alpha},$$

kust

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r\cos^3\alpha}.$$

Asetame diferentsiaalvõrrandisse

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

tuletiste $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ asemele nende väärtused, saame

$$F\left(x, y, \tan\alpha, \frac{1}{r\cos^3\alpha}\right) = 0$$

ehk

$$F_0(x, y, \alpha, r) = 0,$$

millest nähtub, et teise järgu diferentsiaalvõrrand väljendab funktsionaalset seost kõvera mistahes punkti koordinaatide ning selles punktis tõmmatud puutuja tõusunurga ja kõverusraadiuse vahel.

2. Kahe parameetriga integraalkõverate võrrandist

$$\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$$

nähtub, et tasapinnal vabalt võetud punkti $(x_0 | y_0)$ läbib määramata palju integraalkõveraid. Sest kui seda punkti läbib integraalkõver, mille võrrand on

$$\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0,$$

siis kehtib võrdus

$$\Phi(x_0, y_0, c_1, c_2) = 0,$$

kus nüüd c_1 ja c_2 võivad omada määramata palju väärtusi. Seega vastavalt c_1 ja c_2 väärtustele võime kujundada läbi punkti $(x_0 | y_0)$ kuitahes palju integraalkõveraid.

Kui aga tasapinnal peale punkti $(x_0 | y_0)$ on veel antud integraalkõvera puutuja tõus selles punktis, s. o. y_0', siis kehtivad võrdused

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0, c_1, c_2) = 0 \\ \Phi_x(x_0, y_0, c_1, c_2) + \Phi_y(x_0, y_0, c_1, c_2) \cdot y_0' = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Kui see võrrandsüsteem omab üht ja ainult üht lahendite paari

$$c_1 = \varphi_1(x_0, y_0, y_0')$$
$$c_2 = \varphi_2(x_0, y_0, y_0'),$$

siis võime läbi punkti $(x_0 | y_0)$ kujundada ühe ja ainult ühe integraalkõvera, mille võrrand on

$$\Phi[x, y, \varphi_1(x_0, y_0, y_0'), \varphi_2(x_0, y_0, y_0')] = 0$$

ehk

$$\Phi_0(x, y, x_0, y_0, y_0') = 0,$$

mis esitab teise järgu diferentsiaalvõrrandi erilahendit algväärtusega x_0, y_0 ja y_0'.

§ 21. Diferentsiaalvõrrandid, milles ilmsesti puudub argument või tundmata funktsioon.

Kui teise järgu diferentsiaalvõrrandis ilmsesti puudub argument või tundmata funktsioon, s. o.

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

või

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

siis üldlahendi leidmiseks harilikult teisendatakse teise järgu diferentsiaalvõrrand esimese järgu diferentsiaalvõrrandiks, kusjuures selle esimese järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahend on siis

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c_1\right) = 0,$$

mida nimetatakse teise järgu diferentsiaalvõrrandi **e s i m e s e k s i n t e g r a a l i k s.** Esimene integraal kujutab omakorda jälle esimese järgu diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend

$$\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$$

on ühtlasi teise järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

1. Kui teise järgu diferentsiaalvõrrandis ilmsesti puudub argument, s. o.

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 .$$

siis ilmutame selle diferentsiaalvõrrandi funktsiooni teise tuletise suhtes

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$$

ja tähistame

$$\frac{dy}{dx} = p ,$$

millest

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} .$$

Viimane võrdus kehtib ikka, sest et p on siin y funktsioon, kus y on omakorda x-i funktsiooniks. Järelikult on p seega x-i liitfunktsioon, kus p sõltub x-st y kaudu. Tähendatud võrdus väljendab seega liitfunktsiooni diferentsimise seadust.

Asetame uued tähised diferentsiaalvõrrandisse, saame

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p) ,$$

mis kujutab nüüd esimese järgu diferentsiaalvõrrandit, kus p on y funktsiooniks. Lahendades leiame

$$p = \varphi_1(y, c_1) ,$$

mis on teise järgu diferentsiaalvõrrandi esimene integraal. Et $p = \frac{dy}{dx}$, siis saame jälle esimese järgu diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(y, c_1) ,$$

mille üldlahend

$$y = \varphi(x\,,\,c_1\,,\,c_2)$$

on ühtlasi käesoleva teise järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks, oluliste parameetritega c_1 ja c_2.

Analoogiliselt toimime, kui teise järgu diferentsiaalvõrrandis peale argumendi puudub veel funktsiooni esimene tuletis, s. o.

$$F\left(y\,,\,\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0\,,$$

kust siis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

ehk

$$p\,\frac{dp}{dy} = f(y)\,,$$

mille integraal on

$$p = \varphi_1(y\,,\,c_1)$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(y\,,\,c_1)\,,$$

millest saame üldlahendi

$$y = \varphi(x\,,\,c_1\,,\,c_2)\,.$$

Näiteks teise järgu diferentsiaalvõrrandi

$$(y+1)\,\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0\,,$$

kus ilmsesti puudub argument x, lahendamiseks märgime

$$\frac{dy}{dx} = p\,,$$

kust

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy}\,,$$

mille asetamisel saame esimese järgu diferentsiaalvõrrandi

$$(y+1)\,p\,\frac{dp}{dy} - p^2 = 0\,.$$

Muutujaid eraldades

$$\frac{dp}{p} - \frac{dy}{y+1} = 0$$

ja inteegrides

$$\ln p - \ln (y+1) = \ln c_1$$

saame

$$p = c_1(y+1)$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = c_1(y+1) ,$$

mille integraal

$$\ln (y+1) = c_1 x + \ln c_2$$

määrab ühtlasi antud teise järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y + 1 = c_2 e^{c_1 x} .$$

2. Kui teise järgu diferentsiaalvõrrandis ilmsesti puudub tundmata funktsioon y, s. o.

$$F\left(x , \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 ,$$

siis ilmutame selle diferentsiaalvõrrandi funktsiooni teise tuletise suhtes

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x , \frac{dy}{dx}\right)$$

ja tähistame

$$\frac{dy}{dx} = p ,$$

millest

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

saame

$$\frac{dp}{dx} = f(x , p) ,$$

mis kujutab nüüd esimese järgu diferentsiaalvõrrandit, kus p on x-i funktsiooniks. Lahendades leiame esimese integraali

$$p = \varphi_1(x , c_1)$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, c_1),$$

mille üldlahend

$$y = \varphi(x, c_1, c_2)$$

on ühtlasi teise järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

Analoogiliselt toimime, kui teise järgu diferentsiaalvõrrandis peale tundmata funktsiooni puuduks veel selle funktsiooni esimene tuletis, või argument, või argument ja funktsiooni esimene tuletis mõlemad.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

lahendamiseks tähistame

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

millest

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

siis

$$(1 + x^2)\frac{dp}{dx} - 2xp = 0.$$

Muutujaid eraldades

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1 + x^2}$$

ja integreerides

$$\ln p = \ln (1 + x^2) + \ln c_1$$

saame

$$p = c_1(1 + x^2)$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = c_1(1 + x^2),$$

mille integraal määrab antud teise järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = c_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + c_2 .$$

§ 22. Füüsikalisi rakendusi.

1. Leida keha liikumise seadus, kui keha, mille mass on m, liigub horisontaalsel tasapinnal, kusjuures õhutakistus on kv, kus k on konstant ja v on keha liikumise kiirus.

Keha liikumisel horisontaalsel tasapinnal on tung $m\frac{d^2s}{dt^2}$ vastupidi suunatud õhutakistusele $kv = k\frac{ds}{dt}$, s. o.

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -k\frac{ds}{dt},$$

mis kujutab teise järgu diferentsiaalvõrrandit, kus ilmsesti puudub keha liikumisel ärakäidud tee pikkust väljendav funktsioon s ja ühtlasi ka aega väljendav argument t. Et siin

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$

siis

$$m\frac{dv}{dt} = -kv$$

ehk muutujaid eraldades

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt .$$

Inteegrides leiame esimese integraali

$$\ln v = -\frac{k}{m}t + \ln c_1 ,$$

millest saame keha liikumise kiiruse

$$v = c_1 e^{-\frac{k}{m}t} .$$

Parameetri c_1 fikseerimiseks määrame keha liikumise algtingimuse: kui keha liikumise algmomendi $t = 0$ puhul lugeda

$v = v_0$, kus v_0 on keha liikumise algkiirus, siis $c_1 = v_0$ ja keha liikumise kiirus on

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Et $v = \frac{ds}{dt}$, siis

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

mida integreerides saame keha liikumisel ärakäidud tee pikkuse

$$s = v_0 \int e^{-\frac{k}{m}t} dt + c_2$$

ehk

$$s = c_2 - \frac{v_0 m}{k} e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Parameetri c_2 määramiseks märgime veel keha liikumise teise algtingimuse, s. o. et keha liikumise algmomendil $t = 0$ loeme $s = 0$, siis $c_2 = \frac{v_0 m}{k}$ ja ärakäidud tee pikkus on

$$s = \frac{v_0 m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right),$$

mis on ühtlasi antud teise järgu diferentsiaalvõrrandi erilahend algtingimustega, et liikumise algmomendi $t = 0$ puhul on $s = 0$ ja $\frac{ds}{dt} = v_0$.

Selle erilahendi leiame samuti, kui kasutame määratud integraale. Et kiirus muutub siin v_0-st v-ni, kui aeg muutub 0-st t-ni, siis

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt$$

ehk

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m} t,$$

millest

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}$$

ehk

$$\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}.$$

Et tee pikkus muutub 0-st s-ni, kui aeg muutub 0-st t-ni, siis

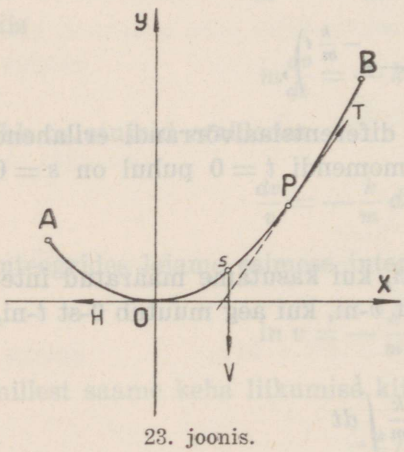
$$\int_0^s ds = v_0 \int_0^t e^{-\frac{k}{m} t} dt$$

ehk

$$s = \frac{v_0 m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right).$$

2. Aheljoon.

Punktides A ja B rippuv niit omab raskustungi mõjul kõverat kuju, mida nimetatakse a h e l j o o n e k s (23. joon.).



23. joonis.

Loeme aheljoone miinimumpunkti koordinaatide nullpunktiks ja puutuja aheljoonele selles punktis abstsissteljeks. Märgime aheljoonel mistahes punkti P ja vaatleme aheljoone kaart OP, millele mõjuvad järgmised tungid: 1) kaare OP raskustung V, mis on suunatud vertikaalselt allapoole ja mis on ühtlasi niidi osa OP raskus, s. o. $V = \varrho s$, kus ϱ on niidi tihedus ja s on kaare OP pikkus, 2) tung T, mis mõjub punktis P puutujat mööda, ja 3) tung H, mis mõjub horisontaalselt punktis O puutujat (X-telge) mööda. Siin H on konstantne suurus. Nende kolme tungi V, T ja H mõjul on OP tasakaalus.

Seega on nende tungide projektsioonide summa nii X-teljel kui ka Y-teljel võrdne 0-ga. Et X-teljel V projektsioon on 0, T projektsioon on $T \cos \alpha$ ja H projektsioon on $-H$, siis

$$T \cos \alpha - H = 0\,;$$

ja et Y-teljel V projektsioon on $-V$, T projektsioon on $T \sin \alpha$ ja H projektsioon on 0, siis

$$T \sin \alpha - V = 0\,.$$

Neist kahest võrdusest saame

$$\tan \alpha = \frac{V}{H} = \frac{\varrho s}{H},$$

kus $\frac{\varrho}{H}$ on konstantne suurus, mille tähistame $\frac{1}{a}$-ga. Siis

$$\tan \alpha = \frac{s}{a}\,.$$

Et punktis P on $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$, siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a},$$

mida diferentsides saame

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\,\frac{ds}{dx}\,.$$

Et

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

siis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

mis on aheljoone diferentsiaalvõrrand. See on teise järgu diferentsiaalvõrrand, milles ilmsesti puudub tundmata funktsioon kui ka argument.

Selle diferentsiaalvõrrandi lahendamisel leiame ainult tema ühe erilahendi, ja nimelt selle, mis esitab nullpunkti läbivat ja

X-telge puutuvat integraalkõverat, s. o. üht kindlat aheljoont. Märgime

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

millest

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

siis saame esimese järgu diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$$

ehk

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Et punktis O algväärtused on $x = 0$ ja $\frac{dy}{dx} = p = \tan\alpha = 0$, siis

$$\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}\int_0^x xp$$

ehk

$$\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \frac{x}{a},$$

millest

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x}{a}}$$

ja

$$p = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

Et punktis O algväärtused on $x = 0$ ja $y = 0$, siis

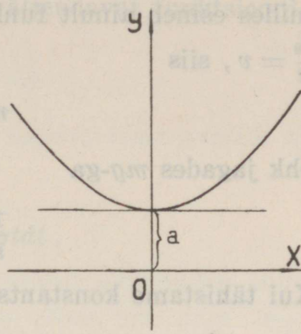
$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}\, dx$$

ehk

$$y = a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} - 1\right),$$

mis on nullpunkti läbiva aheljoone võrrand.

Kui teiseks algtingimuseks võtta $x = 0$, $y = a$, siis aheljoone võrrand omaks kuju (24. joon.)



24. joonis.

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

3. **Leida õhutakistuse tegur *k* langeva keha puhul.**

Oletame, et kerakujuline keha, mille mass on m, langeb alla teatavast kõrgusest s. õhk avaldab seejuures vastusurvet ja keha langemine seetõttu ei toimu mitte lihtsa õhuta ruumis langemise seaduse järgi.

Vabalt langeva keha liikumine, kui teda langemisel takistab õhu vastusurve, mis oleneb keha suurusest ja kujust, toimub kahe tungi mõjul: raskustungi mg, mis on suunatud vertikaalselt allapoole, ja takistustungi R, mis teotseb eelmisele vastassuunas, mõjul. Seega

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - R.$$

õhu takistus on kiiruse juures, mis väiksem kui 0,1 m/sek., võrdeline keha langemise kiirusega, suurema kiiruse puhul aga võrdeline keha langemise kiiruse ruuduga. Oletame, et

$$R = k\frac{SQ}{g}v^2 = k\frac{SQ}{g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

kus S on katsekeha diametraalse läbilõike pindala, Q — kuupmeetri õhu kaal katseajal, v — keha langemise kiirus ja k — otsitav õhutakistuse tegur. Seega saame teise järgu diferentsiaalvõrrandi

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\frac{SQ}{g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

milles esineb ainult funktsiooni esimene ja teine tuletis. Et siin $\frac{ds}{dt} = v$, siis

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - k\,\frac{SQ}{g}\,v^2$$

ehk jagades mg-ga

$$\frac{1}{g}\,\frac{dv}{dt} = 1 - \frac{kSQ}{mg^2}\,v^2.$$

Kui tähistame konstantse teguri

$$\frac{kSQ}{mg^2} = c^2,$$

siis

$$\frac{1}{g}\,\frac{dv}{dt} = 1 - c^2v^2$$

ehk

$$\frac{dv}{1 - c^2v^2} = g\,dt$$

ja

$$\int\limits_0^v \frac{dv}{1 - c^2v^2} = g\int\limits_0^t dt,$$

sest langemise alguses $v = 0$ ja $t = 0$. Kasutades vasakpoolse integraali suhtes ratsionaalsete murdfunktsioonide inteegrimisvõtet, võime märkida

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^v \frac{dv}{1 + cv} + \frac{1}{2}\int\limits_0^v \frac{dv}{1 - cv} = gt,$$

kust nüüd

$$\frac{1}{2c}\ln(1 + cv) - \frac{1}{2c}\ln(1 - cv) = gt$$

ehk

$$\frac{1 + cv}{1 - cv} = e^{2cgt},$$

millest

$$v = \frac{1}{c}\,\frac{e^{2cgt} - 1}{e^{2cgt} + 1} = \frac{1}{c}\,\frac{e^{cgt} - e^{-cgt}}{e^{cgt} + e^{-cgt}} = \frac{1}{c}\tanh cgt.$$

Et leida keha langemise tee pikkust väljendavat funktsiooni, selleks lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{c} \tanh cgt\,.$$

Inteegrides saame

$$\int_0^s ds = \frac{1}{c} \int_0^t \tanh cgtdt\,,$$

$$s = \frac{1}{c} \int_0^t \frac{\sinh cgt}{\cosh cgt}\, dt = \frac{1}{c^2 g} \int_0^t \frac{d(\cosh cgt)}{\cosh cgt} = \frac{1}{c^2 g} \ln \cosh cgt\,,$$

millest

$$e^{sc^2 g} = \cosh cgt\,.$$

Teades katselisel teel s ja t, võime leida viimasest võrdusest c väärtuse ning seega ühtlasi õhu takistuse teguri k, sest

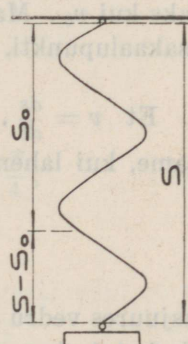
$$k = \frac{mg^2}{SQ} c^2\,.$$

4. Leida vedru võnkumise seadus, kui vedru otsas on kehake, mille mass on m, ja vedru pikkus tasakaalus olles on s_0 (25. joon.).

Kehakese võnkumise korral tekib vedru deformatsioon $s - s_0$. Sellega ühtlasi tekib ka vedru pikkuse muutumisel vastupidi suunatud elastiline tung $m \frac{d^2 s}{dt^2}$, mis püüab vedru tasakaalustada ja mis on võrdeline deformatsiooniga, s. o.

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -k(s - s_0)\,,$$

kus konstant $k > 0$. Saadud võrrand kujutab teise järgu diferentsiaalvõrrandit, milles esinevad funktsioon ja funktsiooni teine tuletis. Kui tähistame siin



25. joonis.

$$\frac{ds}{dt} = v\,,$$

siis

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\,\frac{dv}{ds}$$

ja diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$mv\,\frac{dv}{ds} = -\,k(s - s_0)\;,$$

mida integrides leiame vedru võnkumise kiiruse v, mis muutub v_0-st v-ni, kui vedru pikkus muutub s_0-st s-ni, sest võnkumise momendil, mil kehake läbib tasakaalupunkti, on deformatsioon 0 ja kiirus v_0, s. o.

$$m\int_{v_0}^{v} v\,dv = -\,k\int_{s_0}^{s}(s - s_0)\,ds$$

ehk

$$m\left|\frac{v^2}{2}\right|_{v_0}^{v} = -\,k\left|\frac{(s - s_0)^2}{2}\right|_{s_0}^{s}\;,$$

millest

$$v = \sqrt{v_0{}^2 - \frac{k}{m}\,(s - s_0)^2}\;.$$

Saadud valemist nähtub, et kiirus v ei või saada iialgi suuremaks kui v_0. Maksimaalväärtust omab kiirus siis, kui keha läbib tasakaalupunkti, s. o. kui deformatsioon on 0, siis $v = v_0$.

Et $v = \frac{ds}{dt}$, siis vedru võnkumisel ärakäidud tee pikkuse saame, kui lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0{}^2 - \frac{k}{m}\,(s - s_0)^2}\;,$$

kusjuures vedru pikkus muutub s_0-st s-ni, kui võnkumise aeg muutub 0-st t-ni, s. o.

$$\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{v_0{}^2 - \frac{k}{m}\,(s - s_0)^2}} = \int_{0}^{t} dt$$

ehk

$$\left|\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{s-s_0}{v_0}\right)\right|_{s_0}^{s}=\left|\,t\,\right|_{0}^{t},$$

millest

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{s-s_0}{v_0}\right)=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t$$

ja

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{s-s_0}{v_0}=\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right),$$

kust saame vedru võnkumisel ärakäidud tee pikkuse

$$s=s_0+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$$

ehk

$$s=s_0+a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right),$$

mis esitab harmoonilise võnkumise seadust, kus amplituud

$$a=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ja täisvõnke aeg

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Kõige suurem deformatsioon on siis, kui

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t=\frac{\pi}{2}\quad\text{ehk}\quad t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{T}{4};$$

seega on kõige suurem deformatsioon

$$s-s_0=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}=a.$$

Diferentsides harmoonilist võnkumist väljendavat funktsiooni aja suhtes, saame kiiruse

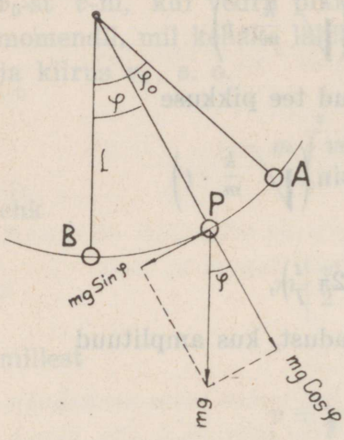
$$v=\frac{2\pi a}{T}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right),$$

ning viimast funktsiooni aja suhtes diferentsides saame kiirenduse

$$w = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

5. Pendel.

Olgu pendli mass m ja ta algasend punktis A, kusjuures vastav amplituud on φ_0 (26. joon.). Lahutame vabalt võetud punktis P raskustungi mg, mis on suunatud vertikaalselt allapoole, kaheks komponendiks: $mg \sin\varphi$ ja $mg \cos\varphi$. Neist komponentidest avaldab pendli liikumisse mõju ainult puutujat mööda suunatud tung, s. o. $mg \sin\varphi$, mida püüab tasakaalustada vastupidi suunatud tung $m\frac{d^2s}{dt^2}$. Kui õhu hõõrumist mitte arvestada, siis



26. joonis.

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin\varphi$$

ehk

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin\varphi.$$

Et $s = l\varphi$, kus l on pendli pikkus, siis

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g \sin\varphi$$

ehk

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\varphi,$$

mis on teise järgu diferentsiaalvõrrand, kus φ on t funktsiooniks. Tähistame

$$\frac{d\varphi}{dt} = p,$$

millest

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = p\frac{dp}{d\varphi},$$

ja võtame $\sin\varphi$ asemele nurga φ, oletades, et pendli võnkumise amplituud on väike, siis saame esimese järgu diferentsiaalvõrrandi

$$p\frac{dp}{d\varphi}=-\frac{g}{l}\varphi$$

ehk

$$pdp=-\frac{g}{l}\varphi d\varphi\,.$$

Kui nurk $\varphi=\varphi_0$, siis punktis A on pendli võnkumise kiirus 0 ja seega ka $p=0$, sest et

$$v=\frac{ds}{dt}=l\frac{d\varphi}{dt}=lp=0\,.$$

Inteegrides vastavates rajades

$$\int\limits_0^p pdp=-\frac{g}{l}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\varphi d\varphi$$

saame

$$p=\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{{\varphi_0}^2-\varphi^2}$$

ehk

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{{\varphi_0}^2-\varphi^2}\,.$$

Kui $\varphi=\varphi_0$, siis $t=0$, ja inteegrides

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{{\varphi_0}^2-\varphi^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}\int\limits_0^t dt$$

saame

$$\arcsin\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)-\arcsin 1=\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t$$

ehk

$$\arcsin\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)=\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t+\frac{\pi}{2}\,,$$

millest

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

ja

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$$

ning

$$s = l\varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right),$$

mis määrab pendli võnkumise seaduse.

Pendli täisvõnke kestuse ehk perioodi T saame, kui asendame $\varphi = -\varphi_0$ ja $t = \frac{T}{2}$, s. o.

$$-\varphi_0 = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{T}{2}\right),$$

millest

$$\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{T}{2}\right) = -1$$

ja

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{T}{2} = \pi,$$

kust nüüd pendli täisvõnke kestus on

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 23. Konstantsete koefitsientidega lineaarne diferentsiaalvõrrand.

Diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = Q(x),$$

kus a_1 ja a_2 on reaalsed konstantsed suurused, nimetatakse konstantsete koefitsientidega teise järgu lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks.

Selle diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks võtame vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$$

ja tähistame

$$y = e^{\lambda x},$$

kus λ on tundmata konstantne suurus. Siis

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

ja homogeenne võrrand omab kuju

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0,$$

millest nähtub, et $y = e^{\lambda x}$ rahuldab homogeenset diferentsiaalvõrrandit, kui λ on ruutvõrrandi

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

juur.

Viimane ruutvõrrand, nagu näeme, saadakse homogeensest diferentsiaalvõrrandist, kui $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ ja y asemele märgime vastavalt λ^2, λ ja $\lambda^0 = 1$. Selle ruutvõrrandi, mida nimetatakse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = Q(x)$$

k a r a k t e e r s e k s ehk i s e l o o m u l i k u k s v õ r r a n d i k s, juured λ_1 ja λ_2 võivad olla reaalsed (erinevad või võrdsed) või kompleksarvud.

1. Olgu iseloomuliku võrrandi

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

juured λ_1 ja λ_2 r e a a l a r v u d. Et

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a_1, \quad \lambda_1 \lambda_2 = a_2,$$

siis võime diferentsiaalvõrrandi esitada kujus

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\frac{dy}{dx}+\lambda_1\lambda_2 y=Q(x)\,,$$

millest

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\lambda_2\frac{dy}{dx}\right)-\lambda_1\left(\frac{dy}{dx}-\lambda_2 y\right)=Q(x)$$

ehk

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}-\lambda_2 y\right)-\lambda_1\left(\frac{dy}{dx}-\lambda_2 y\right)=Q(x)\,.$$

Tähistame

$$\frac{dy}{dx}-\lambda_2 y=z\,,$$

siis asendades saame

$$\frac{dz}{dx}-\lambda_1 z=Q(x)\,,$$

mis kujutab esimese järgu lineaarset diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend on

$$z=e^{\lambda_1 x}\left[\int Q(x)e^{-\lambda_1 x}dx+c_1\right]$$

ehk

$$\frac{dy}{dx}-\lambda_2 y=e^{\lambda_1 x}\left[\int Q(x)e^{-\lambda_1 x}dx+c_1\right],$$

mis kujutab omakorda jälle esimese järgu lineaarset diferentsiaalvõrrandit. Viimast võrrandit lahendades saame

$$y=e^{\lambda_2 x}\left\{\int e^{\lambda_1 x}\left[\int Q(x)e^{-\lambda_1 x}dx+c_1\right]e^{-\lambda_2 x}dx+c_2\right\}$$

ehk

$$\text{(A)}\qquad y=e^{\lambda_2 x}\left\{\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\left[\int Q(x)e^{-\lambda_1 x}dx+c_1\right]dx+c_2\right\};$$

mis on ühtlasi diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2 y=Q(x)$$

üldlahendiks.

Juhul, kui iseloomuliku võrrandi reaalsed juured on võrdsed, s. o. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, siis üldlahend on

$$y = e^{\lambda x}\left\{\int\left[\int Q(x)e^{-\lambda x}\,dx + c_1\right]dx + c_2\right\}$$

ehk

$$\text{(B)} \qquad y = e^{\lambda x}\left[\int\int Q(x)e^{-\lambda x}\,dx dx + c_1 x + c_2\right].$$

a) Kui konstantsete koefitsientidega teise järgu lineaarne diferentsiaalvõrrand on homogeenne, s. o.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2 y = 0\,,$$

ja iseloomuliku võrrandi reaaljuured on isesuurused, s. o. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, siis, märkides üldlahendis (A) $Q(x) = 0$, saame homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = e^{\lambda_2 x}\left[c_1\int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}\,dx + c_2\right],$$

s. o.

$$y = e^{\lambda_2 x}\left[\frac{c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + c_2\right]$$

ehk

$$y = \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Märkides siin $\frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ asemele c_1, võime homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi esitada lihtsustatud kujul

$$(\text{A}_1) \qquad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

b) Kui homogeense diferentsiaalvõrrandi iseloomuliku võrrandi reaaljuured on võrdsed, s. o. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, siis märkides üldlahendis (B) $Q(x) = 0$, saame homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi kujus

$$(\text{B}_1) \qquad y = e^{\lambda x}(c_1 x + c_2)\,.$$

Näiteks, et leida konstantsete koefitsientidega lineaarsete diferentsiaalvõrrandite

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

ja

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 4x^2$$

üldlahendid, selleks koostame vastavad iseloomulikud võrrandid

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

kus esimese võrrandi juured on isesuurused, s. o. $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_2 = 1$, ning teise võrrandi juured on võrdsed, s. o. $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

Esimese diferentsiaalvõrrandi üldlahend on seega

$$y = e^x\left\{\int e^{4x}\left[\int e^x e^{-5x}dx + c_1\right]dx + c_2\right\},$$

s. o.

$$y = e^x\left(-\frac{1}{4}\int dx + c_1\int e^{4x}dx + c_2\right)$$

ehk

$$y = e^x\left(c_1\frac{e^{4x}}{4} + c_2 - \frac{x}{4}\right).$$

Teise diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = e^{-2x}\left[\int\int 4x^2e^{2x}dxdx + c_1x + c_2\right],$$

s. o.

$$y = e^{-2x}\left[\int (2x^2e^{2x} - 2xe^{2x} + e^{2x})dx + c_1x + c_2\right]$$

ehk

$$y = e^{-2x}\left(x^2e^{2x} - xe^{2x} + \frac{e^{2x}}{2} - xe^{2x} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{2} + c_1x + c_2\right)$$

ja lõpuks

$$y = x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{c_1x + c_2}{e^{2x}}.$$

2. Olgu iseloomuliku võrrandi

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

juured λ_1 ja λ_2 kompleksarvud. Et siin iseloomuliku võrrandi koefitsiendid on reaalarvud, siis võrrandi kompleksjuured on kaaskompleksarvud, s. o.

$$\lambda_1 = a + bi\,, \quad \lambda_2 = a - bi\,,$$

kus a ja b on reaalarvud.

Käesoleval juhul diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2 y = Q(x)$$

üldlahendi saamiseks leiame enne diferentsiaalvõrrandite

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b^2 y = 0$$

ja

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b^2 y = Q(x)$$

üldlahendid, kus b on reaalarv.

a) Homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b^2 y = 0$$

iseloomuliku võrrandi

$$\lambda^2 + b^2 = 0$$

juured on imaginaarsed, s. o.

$$\lambda_1 = +bi\,, \quad \lambda_2 = -bi\,.$$

Märgime siin

$$\frac{dy}{dx} = p\,,$$

siis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$$

ja homogeenne võrrand teisendub esimese järgu diferentsiaalvõrrandiks

$$p \frac{dp}{dy} + b^2 y = 0$$

ehk

$$p dp + b^2 y dy = 0 \,,$$

mille integraal

$$p^2 + b^2 y^2 = c_1$$

ehk

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b^2 y^2 = c_1 \,,$$

millest

$$\frac{dy}{\pm \sqrt{\frac{c_1}{b^2} - y^2}} = b dx$$

ja

$$\pm \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{c_1}{b^2} - y^2}} = b \int dx$$

ehk

$$\arcsin\left(\frac{by}{\sqrt{c_1}}\right) = \pm \, (bx + c_2) \,,$$

kust

$$\frac{by}{\sqrt{c_1}} = \pm \sin \, (bx + c_2)$$

ning üldlahend on

$$y = \pm \frac{\sqrt{c_1}}{b} \sin \, (bx + c_2) \,,$$

kus $c_1 \geqq 0$.

Teisendame saadud üldlahendit järgmiselt:

$$y = \pm \frac{\sqrt{c_1}}{b} \sin c_2 \cos bx \pm \frac{\sqrt{c_1}}{b} \cos c_2 \sin bx$$

ja märgime $\pm \frac{\sqrt{c_1}}{b} \sin c_2$ asemele c_1 ja $\pm \frac{\sqrt{c_1}}{b} \cos c_2$ asemele c_2, saame üldlahendi kujus

$$y = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx \,,$$

kus nüüd c_1 ja c_2 on mistahes reaalarvud.

b) Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = Q(x)$$

iseloomuliku võrrandi juured on imaginaarsuurused, s. o. $\pm bi$.

Eespool nägime, et

$$y = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx$$

on iga c_1 ja c_2 väärtuse puhul selle diferentsiaalvõrrandi lahend, kui $Q(x) = 0$. Näitame nüüd, et on võimalik parameetrid c_1 ja c_2 asendada niisuguste x-i funktsioonidega $c_1(x)$ ja $c_2(x)$, et funktsioon

$$y = c_1(x) \cos bx + c_2(x) \sin bx$$

esitaks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = Q(x)$$

üldlahendit. Tähendatud funktsioon y peab rahuldama diferentsiaalvõrrandit, kui temasse paigutada y ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ väärtused. Selleks leiame esiteks $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = - c_1(x) b \sin bx + c_2(x) b \cos bx +$$
$$+ c_1'(x) \cos bx + c_2'(x) \sin bx .$$

Et meil on tegemist siin kahe tundmata funktsiooniga $c_1(x)$ ja $c_2(x)$, siis valime nad nõnda, et viimases võrduses

$$c_1'(x) \cos bx + c_2'(x) \sin bx = 0 ;$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = - c_1(x) b \sin bx + c_2(x) b \cos bx .$$

Edasi leiame teise tuletise

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - c_1'(x) b \sin bx - c_1(x) b^2 \cos bx +$$
$$+ c_2'(x) b \cos bx - c_2(x) b^2 \cos bx$$

ja asetame nüüd saadud y ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ väärtused võrrandisse

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = Q(x)$$

y ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ asemele, saame

$$-c_1'(x)b\sin bx + c_2'(x)b\cos bx = Q(x)\,.$$

Lahendades võrrandsüsteemi

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\cos bx + c_2'(x)\sin bx &= 0 \\ -c_1'(x)b\sin bx + c_2'(x)b\cos bx &= Q(x) \end{aligned}\right\}$$

$c_1'(x)$ ja $c_2'(x)$ suhtes, saame

$$c_1'(x) = -\frac{1}{b}Q(x)\sin bx$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{b}Q(x)\cos bx\,,$$

millest

$$c_1(x) = -\frac{1}{b}\int Q(x)\sin bx dx + c_1$$

$$c_2(x) = \frac{1}{b}\int Q(x)\cos bx dx + c_2\,.$$

Niisuguste $c_1(x)$ ja $c_2(x)$ väärtuste puhul on funktsioon

$$y = c_1(x)\cos bx + c_2(x)\sin bx$$

diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b^2y = Q(x)$$

üldlahend, s. o.

$$\begin{aligned} y = c_1\cos bx + c_2\sin bx &- \\ -\frac{1}{b}\cos bx\int Q(x)\sin bx dx &+ \\ +\frac{1}{b}\sin bx\int Q(x)\cos bx dx &\,, \end{aligned}$$

kus c_1 ja c_2 on mistahes reaalarvud.

c) Kui diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = Q(x)$$

iseloomuliku võrrandi

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

juured λ_1 ja λ_2 on kompleksarvud, s. o.

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + i\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} = a + bi$$

$$\lambda_2 = \frac{a_1}{2} - i\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} = a - bi,$$

kus

$$a = -\frac{a_1}{2}, \quad b = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$$

ehk

$$a_1 = -2a, \quad a_2 = a^2 + b^2,$$

siis üldlahendi leidmiseks märgime

$$y = ze^{ax},$$

kus z on mõni x-i funktsioon, ning seega

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\frac{dz}{dx} + aze^{ax}$$

ja

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}\frac{d^2z}{dx^2} + 2ae^{ax}\frac{dz}{dx} + a^2ze^{ax}.$$

Asetades y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ uued väärtused diferentsiaalvõrrandisse

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = Q(x)$$

y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ asemele ja arvestades, et $a_1 = -2a$ ja $a_2 = a^2 + b^2$, saame

$$e^{ax}\frac{d^2z}{dx^2} + b^2ze^{ax} = Q(x)$$

ehk

$$\frac{d^2z}{dx^2} + b^2z = e^{-ax}Q(x)\,,$$

mille üldlahend saadakse eespool-käsiteldud teise erijuhu kohaselt, s. o.

$$z = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx -$$

$$-\frac{1}{b}\cos bx \int e^{-ax}Q(x)\sin bx dx +$$

$$+\frac{1}{b}\sin bx \int e^{-ax}Q(x)\cos bx dx\,.$$

Et $y = ze^{ax}$, siis diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$\text{(C)} \qquad y = e^{ax}\Big[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx -$$

$$-\frac{1}{b}\cos bx \int e^{-ax}Q(x)\sin bx dx +$$

$$+\frac{1}{b}\sin bx \int e^{-ax}Q(x)\cos bx dx\Big]\,.$$

Näiteks konstantsete koefitsientidega lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = e^{-x}$$

iseloomuliku võrrandi

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

juured on kompleksarvud, s. o.

$$\lambda_1 = -1 + 2i\,, \quad \lambda_2 = -1 - 2i\,,$$

kus $a = -1$ ja $b = 2$. Üldlahendi saame valemi (C) järgi

$$y = e^{-x}\Big(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x -$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2x \int \sin 2x dx +$$

$$+\frac{1}{2}\sin 2x \int \cos 2x dx\Big)\,,$$

s. o.

$$y = e^{-x}\Big(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \\ + \frac{1}{4}\cos^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x\Big)$$

ehk

$$y = e^{-x}\Big(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\Big).$$

3. Homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$$

üldlahend sel juhul, kui iseloomuliku võrrandi juured λ_1 ja λ_2 on kompleksarvud, saadakse valemist (C), paigutades selles valemis $Q(x) = 0$, s. o.

(C₁) $$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)\,,$$

kus

$$a = -\frac{a_1}{2},\ b = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}.$$

N ä i d i s: **Leida pendli võnkumise seadus, kui arvestada õhu hõõrumist, mis on võrdeline pendli liikumise kiirusega.**

Olgu pendli mass m. Tung $m\frac{d^2s}{dt^2}$ on vastupidi suunatud komponenttungile $mg \sin\varphi$ (26. joon.) ja samuti vastupidi suunatud hõõrumisele $k\frac{ds}{dt}$, kus k on õhu hõõrumise koefitsient. Seega

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\varphi - k\frac{ds}{dt}$$

ehk

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{ds}{dt} + g\sin\varphi = 0\,.$$

Märgime $s = l\varphi$ ja võtame $\sin\varphi$ asemele φ, saame konstantsete koefitsientidega homogeense teise järgu diferentsiaalvõrrandi

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{kl}{m}\frac{d\varphi}{dt} + g\varphi = 0$$

ehk

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\varphi = 0\,,$$

kus φ on t funktsiooniks. Selle diferentsiaalvõrrandi iseloomuliku võrrandi

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

juured on

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{g}{l}}.$$

Et õhu hõõrumise koefitsient k on väga väike arv, siis on $\frac{k^2}{4m^2} < \frac{g}{l}$ ja seega on iseloomuliku võrrandi juured kompleksarvud, s. o.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm i\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}} = a \pm bi\,,$$

ja diferentsiaalvõrrandi üldlahend on siis valemi (C_1) järgi

$$\varphi = e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)\,.$$

Määrame c_1 ja c_2. Kui $t = 0$, siis $\varphi = \varphi_0$. Asetades need väärtused üldlahendisse, saame

$$c_1 = \varphi_0\,.$$

Parameetri c_2 määramiseks võtame esimese tuletise

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{at}(-c_1 b \sin bt + c_2 b \cos bt) + \\ + ae^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)\,.$$

Kui siin $t = 0$ ja $c_1 = \varphi_0$, siis $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ning

$$0 = c_2 b + \varphi_0 a\,,$$

millest

$$c_2 = -\frac{\varphi_0 a}{b} = \frac{\varphi_0 k}{2m\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}}}\,.$$

Asetades c_1 ja c_2 väärtused üldlahendisse, saame

$$\varphi = \varphi_0 e^{at}\left(\cos bt - \frac{a}{b}\sin bt\right).$$

Et $s = \varphi l$, siis

$$s = l\varphi_0 e^{at}\left(\cos bt - \frac{a}{b}\sin bt\right)$$

ehk

$$s = l\varphi_0 e^{-\frac{kt}{2m}}\left[\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{k}{2m\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}}\cdot\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}\right)\right],$$

mis määrab pendli võnkumise seaduse, kui arvestada õhu hõõrumist.

Pendli täisvõnke kestuse T saamiseks vaatleme, millal pendli liikumise kiirus saab 0-ks, s. o. $\frac{ds}{dt} = 0$. Diferentsides

$$\frac{ds}{dt} = l\varphi_0 e^{at}(-b\sin bt - a\cos bt) +$$

$$+ l\varphi_0 a e^{a}\left(\cos bt - \frac{a}{b}\sin bt\right)$$

ja asendades $\frac{ds}{dt} = 0$ ja $t = T$, saame

$$0 = -l\varphi_0 e^{aT}\left(b + \frac{a^2}{b}\right)\sin bT,$$

s. o.

$$\sin bT = 0,$$

kust

$$bT = 2\pi$$

ja täisvõnke kestus

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

ehk

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}}.$$

Kui õhu hõõrumist mitte arvestada, siis $k = 0$ ja

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 24. Homogeenne lineaarne diferentsiaalvõrrand.

1. Teise järgu mistahes koefitsientidega homogeenne lineaarne diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0\,,$$

kus $P_1(x)$ ja $P_2(x)$ on x-i funktsioonid.

Selle diferentsiaalvõrrandi üldlahendi võime leida, kui on teada vähemalt üks tema erilahenditest. Olgu diferentsiaalvõrrandi üks erilahend y_1. Üldlahendi leidmiseks märgime

$$y = y_1 z\,,$$

kus z on mõni x-i funktsioon; siis

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dy_1}{dx}\frac{dz}{dx} + y_1\frac{d^2z}{dx^2}\,.$$

Asetame need y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ väärtused homogeensesse diferentsiaalvõrrandisse y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ asemele, saame

$$z\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dy_1}{dx}\frac{dz}{dx} + y_1\frac{d^2z}{dx^2} + P_1(x)z\frac{dy_1}{dx} + P_1(x)y_1\frac{dz}{dx} + P_2(x)y_1 z = 0$$

ehk

$$\left[\frac{d^2y_1}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy_1}{dx} + P_2(x)y_1\right]z + 2\frac{dy_1}{dx}\frac{dz}{dx} + y_1\frac{d^2z}{dx^2} + P_1(x)y_1\frac{dz}{dx} = 0\,.$$

Et y_1 on antud diferentsiaalvõrrandi erilahend, siis

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy_1}{dx} + P_2(x)y_1 = 0$$

ja järelikult

$$y_1\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dy_1}{dx}\frac{dz}{dx} + P_1(x)y_1\frac{dz}{dx} = 0\,.$$

Viimases võrrandis tähistame

$$\frac{dz}{dx} = u\,,$$

millest

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{du}{dx}\,,$$

siis

$$y_1 \frac{du}{dx} + 2\frac{dy_1}{dx} u + P_1(x) y_1 u = 0$$

kujutab esimese järgu diferentsiaalvõrrandit, mida inteegrime muutujate eraldamise teel, s. o.

$$\frac{du}{u} + \left[\frac{2}{y_1}\frac{dy_1}{dx} + P_1(x)\right] dx = 0\,,$$

millest

$$\ln u + 2 \ln y_1 + \int P_1(x)\,dx = \ln c_2$$

ja

$$u = \frac{c_2}{y_1^2}\, e^{-\int P_1(x)dx}$$

ehk

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c_2}{y_1^2}\, e^{-\int P_1(x)dx}$$

ja seega

$$z = c_2 \int \frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{y_1^2}\, dx + c_1$$

ning

$$y = c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{y_1^2}\, dx + c_1 y_1\,,$$

kus $y_1 \displaystyle\int \frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{y_1^2}\, dx$ on homogeense diferentsiaalvõrrandi üks erilahenditest, mille puhul $c_1 = 0$ ja $c_2 = 1$. Märgime

$$y_1 \int \frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{y_1^2} = y_2\,,$$

siis saame

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 ,$$

mis on teise järgu homogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend, kus y_1 ja y_2 on erilahendid ning c_1 ja c_2 mistahes konstantsed suurused.

Kui siin parameetrid c_1 ja c_2 ei ole korraga 0-d ning

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 \neq 0 ,$$

siis öeldakse, et y_1 ja y_2 on lineaarselt sõltumatud funktsioonid. Vastasel korral oleksid nad lineaarselt sõltuvad.

2. Samuti nähtub ka ümberpöördult, et kui y_1 ja y_2 on teise järgu homogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi mistahes lineaarselt sõltumatud erilahendid, siis üldlahend on

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 ,$$

kus c_1 ja c_2 on mistahes konstantsed suurused. Et

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + c_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} ,$$

siis asetades need väärtused võrrandisse

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x) y = 0$$

saame

$$c_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + c_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + P_1(x) c_1 \frac{dy_1}{dx} + P_1(x) c_2 \frac{dy_2}{dx} +$$
$$+ P_2(x) c_1 y_1 + P_2(x) c_2 y_2 = 0$$

ehk

$$c_1 \left[\frac{d^2y_1}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy_1}{dx} + P_2(x) y_1 \right] +$$
$$+ c_2 \left[\frac{d^2y_2}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy_2}{dx} + P_2(x) y_2 \right] = 0 ,$$

mis kehtib ikka, sest et y_1 ja y_2 on diferentsiaalvõrrandi erilahendid. Seega funktsioon $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ rahuldab homogeenset diferentsiaalvõrrandit.

Siin c_1 ja c_2 on olulised parameetrid. Kui c_1 ja c_2 ei oleks olulised parameetrid, siis oleks

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = \psi(x, c),$$

kus võttes osatuletised c_1 ja c_2 suhtes leiame

$$y_1 = \psi_c(x, c) \frac{\partial c}{\partial c_1}, \quad y_2 = \psi_c(x, c) \frac{\partial c}{\partial c_2},$$

kust jagades saame

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{\partial c}{\partial c_1}}{\frac{\partial c}{\partial c_2}}$$

ehk

$$\bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2 = 0,$$

kus $\bar{c}_1 = \frac{\partial c}{\partial c_2}$ ja $\bar{c}_2 = -\frac{\partial c}{\partial c_1}$, mis ütleb, et y_1 ja y_2 on lineaarselt sõltuvad, mis on vastuolus eeldusega. Seega on parameetrid c_1 ja c_2 olulised ning

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

on diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

Näiteks homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (2x - 1) y = 0$$

üks erilahend on

$$y_1 = e^x,$$

sest et

$$\frac{dy_1}{dx} = e^x, \quad \frac{d^2y_1}{dx^2} = e^x$$

ja asendades saame

$$e^x - 2xe^x + (2x - 1) e^x = 0.$$

Teine erilahend on siis

$$y_2 = e^x \int \frac{e^{2\int x dx}}{e^{2x}} dx = e^x \int e^{x^2-2x} dx$$

ja seega üldlahend

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \int e^{x^2-2x} dx .$$

§ 25. Üldine lineaarne diferentsiaalvõrrand.

1. Üldise teise järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x) y = Q(x) ,$$

kus $P_1(x)$, $P_2(x)$ ja $Q(x)$ on x-i mistahes funktsioonid, lahendamiseks oletame, et talle vastav homogeenne diferentsiaalvõrrand

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x) y = 0$$

on juba lahendatud ja selle üldlahend on

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 ,$$

kus y_1 ja y_2 on lineaarselt sõltumatud erilahendid ning c_1 ja c_2 on mistahes konstantsed suurused.

Lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_2(x) y = Q(x)$$

üldlahendi saamiseks on võimalik siis parameetrid c_1 ja c_2 asendada niisuguste x-i funktsioonidega $c_1(x)$ ja $c_2(x)$, et funktsioon

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

kujutab lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendit. Tõepoolest tähendatud funktsioon y peab rahuldama lineaarset diferentsiaalvõrrandit, kui temasse paigutada y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ väärtused. Selleks leiame esiteks $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = c_1(x)\frac{dy_1}{dx} + c_2(x)\frac{dy_2}{dx} + c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 .$$

Et meil on tegemist siin kahe tundmata funktsiooniga $c_1(x)$ ja $c_2(x)$, siis valime nad nõnda, et viimases võrduses

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 ;$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = c_1(x)\frac{dy_1}{dx} + c_2(x)\frac{dy_2}{dx},$$

mille tuletis on

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1(x)\frac{d^2y_1}{dx^2} + c_2(x)\frac{d^2y_2}{dx^2} + c_1'(x)\frac{dy_1}{dx} + c_2'(x)\frac{dy_2}{dx}.$$

Asetame saadud y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ väärtused võrrandisse

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = Q(x)$$

y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ asemele, saame

$$\begin{aligned} c_1(x)\frac{d^2y_1}{dx^2} &+ c_2(x)\frac{d^2y_2}{dx^2} + c_1'(x)\frac{dy_1}{dx} + c_2'(x)\frac{dy_2}{dx} + \\ &+ P_1(x)c_1(x)\frac{dy_1}{dx} + P_1(x)c_2(x)\frac{dy_2}{dx} + \\ &+ P_2(x)c_1(x)y_1 + P_2(x)c_2(x)y_2 = Q(x) \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} c_1(x)&\left[\frac{d^2y_1}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy_1}{dx} + P_2(x)y_1\right] + \\ + c_2(x)&\left[\frac{d^2y_2}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy_2}{dx} + P_2(x)y_2\right] + \\ + c_1'(x)&\frac{dy_1}{dx} + c_2'(x)\frac{dy_2}{dx} = Q(x) . \end{aligned}$$

Et y_1 ja y_2 on homogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendid, siis nurgelised sulgavaldised on võrdsed 0-ga ja seega

$$c_1'(x)\frac{dy_1}{dx} + c_2'(x)\frac{dy_2}{dx} = Q(x) .$$

Lahendades võrrandsüsteemi

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 &= 0 \\ c_1'(x)\frac{dy_1}{dx} + c_2'(x)\frac{dy_2}{dx} &= Q(x) \end{aligned}\right\}$$

$c_1'(x)$ ja $c_2'(x)$ suhtes, leiame

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0, & y_2 \\ Q(x), & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dx}, & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}} = \varphi_1(x)$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1, & 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx}, & Q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dx}, & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}} = \varphi_2(x),$$

kust inteegrides saame

$$c_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + c_1$$

$$c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + c_2.$$

Asetades võrrandisse

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

$c_1(x)$ ja $c_2(x)$ asemele saadud väärtused, saame teise järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = y_1\int \varphi_1(x)dx + y_2\int \varphi_2(x)dx + c_1y_1 + c_2y_2,$$

kus integraalide summa esitab mingisugust x-i funktsiooni, s. o.

$$y_1\int \varphi_1(x)dx + y_2\int \varphi_2(x)dx = \varphi(x),$$

ja üldlahend on siis

$$y = \varphi(x) + c_1 y_1 + c_2 y_2\,,$$

kusjuures homogeense diferentsiaalvõrrandi puhul erilahend $\varphi(x) = 0$.

2. Samuti nähtub ka üldiselt, kui $\varphi(x)$ on diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = Q(x)$$

erilahend, siis tema üldlahend on

$$y = \varphi(x) + c_1 y_1 + c_2 y_2\,,$$

kus y_1 ja y_2 on homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0$$

sõltumatud erilahendid ning c_1 ja c_2 on mistahes konstantsed suurused.

Oletame, et

$$y = \varphi(x) + \psi(x)$$

on diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = Q(x)$$

üldlahend. Siis

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) + \psi'(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x) + \psi''(x)$$

ja diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\varphi''(x) + P_1(x)\varphi'(x) + P_2(x)\varphi(x) +$$
$$+ \psi''(x) + P_1(x)\psi'(x) + P_2(x)\psi(x) = Q(x)\,.$$

Et $\varphi(x)$ on erilahend, siis

$$\varphi''(x) + P_1(x)\varphi'(x) + P_2(x)\varphi(x) = Q(x)$$

ja

$$\psi''(x) + P_1(x)\psi'(x) + P_2(x)\psi(x) = 0\,,$$

mis on homogeenne diferentsiaalvõrrand, mille üldlahend on

$$\psi(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2\,.$$

Tähendab, kui diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = Q(x)$$

erilahend on $y = \varphi(x)$, siis ta üldlahend on

$$y = \varphi(x) + c_1 y_1 + c_2 y_2\,.$$

Näiteks lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1+x^2}{1-x^2}y = \frac{x}{1-x^2}$$

vastava homogeense võrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1+x^2}{1-x^2}y = 0$$

üks erilahenditest on

$$y_1 = \frac{\sin x}{1-x^2}\,,$$

sest et

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{(1-x^2)\cos x + 2x\sin x}{(1-x^2)^2}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{4x(1-x^2)\cos x + (1+8x^2-x^4)\sin x}{(1-x^2)^3}$$

ja asendades saame

$$\frac{4x(1-x^2)\cos x + (1+8x^2-x^4)\sin x}{(1-x^2)^3} -$$

$$-\frac{4x}{1-x^2}\cdot\frac{(1-x^2)\cos x + 2x\sin x}{(1-x^2)^2} - \frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\sin x}{1-x^2} = 0\,.$$

Homogeense diferentsiaalvõrrandi teine erilahend on

$$y_2 = \frac{\sin x}{1-x^2} \int \frac{e^{\int \frac{4x}{1-x^2} dx}}{\left(\frac{\sin x}{1-x^2}\right)^2} dx = \frac{\sin x}{1-x^2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{1-x^2}$$

ja üldlahend

$$y = c_1 \frac{\sin x}{1-x^2} - c_2 \frac{\cos x}{1-x^2}.$$

Et siin

$$c_1'(x) = \varphi_1(x) = x \cos x, \quad c_2'(x) = \varphi_2(x) = x \sin x,$$

siis

$$c_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + c_1 = \int x \cos x dx + c_1 =$$
$$= x \sin x + \cos x + c_1$$

$$c_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + c_2 = \int x \sin x dx + c_2 =$$
$$= -x \cos x + \sin x + c_2$$

ja

$$\varphi(x) = y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx = \frac{x}{1-x^2}$$

ning antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend on seega

$$y = \frac{x + c_1 \sin x - c_2 \cos x}{1-x^2}.$$

§ 26. Diferentsiaalvõrrandi graafiline lahendamine.

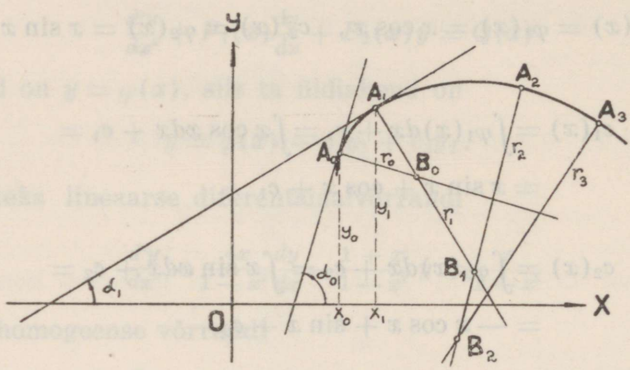
Oletame, et teise järgu diferentsiaalvõrrand on ilmutatav funktsiooni teise tuletise suhtes, s. o.

$$y'' = f(x, y, y'),$$

ja otsime integraalkõverat, mis läbiks punkti $A_0 \equiv (x_0 | y_0)$ ja mille puutuja tõus selles punktis oleks $y_0' = \tan \alpha_0$. Et teise järgu diferentsiaalvõrrand väljendab funktsionaalset seost integraalkõvera mistahes punkti koordinaatide ning selles punktis tõmmatud puutuja tõusu ja kõverusraadiuse r vahel, kusjuures

$$r = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{f(x, y, y')},$$

siis otsitava integraalkõvera käigu määramiseks märgime koordinaadistikus punkti $A_0 \equiv (x_0 | y_0)$ ja läbi selle punkti sirge tõusunurgaga $\alpha_0 = \operatorname{arc\,tan} y_0'$ (27. joon.). See sirge on otsitava



27. joonis.

integraalkõvera puutujaks punktis A_0. Punktis A_0 tõmbame ühtlasi normaali, millel märgime integraalkõvera vastava kõverusraadiuse

$$r_0 = \frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{f(x_0, y_0, y_0')} = A_0B_0,$$

kus B_0 on kõveruse keskpunkt punkti A_0 suhtes.

Kui siin $f(x_0, y_0, y_0') > 0$, siis ka $r_0 > 0$ ja punkt A_0 asetseb seega integraalkõvera nõgusal osal, mille puhul kõveruse keskpunkt tuleb märkida normaalil ordinaatide kasvamise suunas. Kui aga $f(x_0, y_0, y_0') < 0$, siis on $r_0 < 0$ ja punkt A_0 asetseb seega integraalkõvera kumeral osal, mille puhul kõveruse keskpunkt tuleb märkida normaalil ordinaatide kahanemise suunas. 27. joonisel kõverusraadius $r_0 = A_0B_0$ on märgitud normaalil ordinaatide kahanemise suunas.

Joonestame punktist B_0 raadiusega r_0 ringi kaare A_0A_1 ja tõmbame sellele kaarele punktis A_1 puutuja ja normaali. Määrame mõõtmise teel punkti A_1 koordinaadid x_1 ja y_1 ning puutuja tõusunurga α_1 tangensi, s. o. $\tan \alpha_1 = y_1'$. Lugedes punkti A_1 otsitava integraalkõvera punktiks, võime leida selles punktis integraalkõvera vastava kõverusraadiuse

$$r_1 = \frac{(1 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}}{f(x_1, y_1, y_1')} = A_1B_1,$$

kus B_1 on kõveruse keskpunkt punkti A_1 suhtes. Punkt B_1 võib asetseda normaalil ordinaatide kasvamise või kahanemise suunas, olenedes sellest, kas $r_1 > 0$ või $r_1 < 0$.

Edasi joonestame punktist B_1 raadiusega r_1 ringi kaare A_1A_2 ja toimime analoogiliselt eelnevaga, saame kõverusraadiuse r_2, jne.

Niimoodi saame ringide kaartest koosneva joone, mis on otsitava integraalkõvera ligikaudseks kujuks. Saadud joon on seda lähem otsitavale integraalkõverale, mida lühemad on tähendatud ringide kaared.

§ 27. Harjutusülesandeid.

Lahendada teise järgu diferentsiaalvõrrandid:

131. $\frac{d^2y}{dx^2} - x - \sin x = 0$

132. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} = 0.$

133. $\frac{d^2y}{dx^2} - ae^y = 0$

134. $y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

135. $(y-1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

136. $2y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$

137. $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

138. $2\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} - 15y = 0$

139. $\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 36y = 0$

140. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 34y = 0$

141. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = x$

142. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$

143. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

144. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = x^2 + x + 1$

145. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x + 2$

146. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}$

147. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x} + x - 1$

148. $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 6y = \sin x$

149. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \cos x$

150. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x\cos x$

151. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$

152. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = 0$

153. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{x^2-1}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2-1} = 0$

154. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x+1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2+x-8}{x^2}y = 0$

155. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x+1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$

156. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} = x$

157. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}=\frac{1}{x}$

158. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{4}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{6y}{x^2}=\frac{ax^2+b}{x^3}$

159. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3x^2}{x^3+1}\frac{dy}{dx}+\frac{3x}{x^3+1}y=4(x^3+1)$.

160. Keha, mille mass on m, liigub horisontaalsel tasapinnal algkiirusega v_0. Leida keha liikumise seadus, kui õhu takistus on võrdeline keha kiiruse ruuduga, s. o. $R=kv^2$.

161. Missugune seadus valitseb liikumist, kui keha, mille mass on m, liigub tõuketungi mõjul?

162. Missugune seadus valitseb keha vaba langemist õhus, kui õhu takistus on võrdeline keha kiirusega?

163. Keha, mille mass on m, vajub vees algkiirusega $v_0=0$. Leida keha liikumise seadus, kui vee takistus on võrdeline keha kiirusega, s. o. $R=kv$.

III peatükk.

n-järgu diferentsiaalvõrrandid.

§ 28. n-järgu diferentsiaalvõrrandi määramine.

Diferentsiaalvõrrandit, milles funktsiooni n-järgu tuletis esineb kõrgeima järgu tuletisena, nimetatakse n-järgu diferentsiaalvõrrandiks, mille üldkuju on

$$F\left(x\,,\ y\,,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

ehk

$$F(x\,,\ y\,,\ y'\,,\ y''\,,\ \ldots,\ y^{(n)})=0\,,$$

mille lahendamisel tuleb leida niisugused funktsioonid, mis seda diferentsiaalvõrrandit rahuldavad.

1. Vaatleme n parameetriga $c_1\,,\ c_2\,,\ \ldots,\ c_n$ kõverate parve esitavat funktsiooni

$$\Phi\,(x\,,\ y\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\ \ldots,\ c_n)=0\,.$$

Kui siin kõik n parameetrit on olulised, s. o. kui nad pole ühendatavad väiksemaks arvuks parameetriteks, siis võime leida n-järgu diferentsiaalvõrrandi, mille üldlahendiks on tähendatud funktsioon. Diferentsides seda funktsiooni n korda, s. o.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \Phi_1(x, y, y', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y'}\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y'}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y''}\frac{d^3y}{dx^3} =$$

$$= \Phi_3(x, y, y', y'', y''', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y'}\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}}\frac{d^ny}{dx^n} =$$

$$= \Phi_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}; c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

ja kõrvaldades siis võrranditest

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

$$\Phi_1(x, y, y', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

$$\Phi_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

järk-järgult parameetrid $c_1, c_2, \ldots, c_n$, saame n-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Kõrvaldame võrranditest

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

$$\Phi_1(x, y, y', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

näiteks parameetri c_1, saame

$$\Psi_1(x, y, y', c_2, c_3, \ldots, c_n) = 0,$$

mis kujutab esimese järgu diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend on

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0.$$

Iga niisugust esimese järgu diferentsiaalvõrrandit, mis väljendab x, y, y' ja $n-1$ parameetri funktsionaalset seost, nimetatakse n-järgu diferentsiaalvõrrandi $(n-1)$-ks **integraaliks**.

Võttes funktsiooni

$$\Psi_1(x, y, y', c_2, c_3, \ldots, c_n) = 0$$

tuletise

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y'}\frac{d^2y}{dx^2} =$$
$$= \psi_1(x, y, y', y'', c_2, c_3, \ldots, c_n) = 0$$

ja kõrvaldades võrranditest

$$\Psi_1(x, y, y', c_2, c_3, \ldots, c_n) = 0$$
$$\psi_1(x, y, y', y'', c_2, c_3, \ldots, c_n) = 0$$

näiteks c_2, saame

$$\Psi_2(x, y, y', y'', c_3, c_4, \ldots, c_n) = 0,$$

mis on n-järgu diferentsiaalvõrrandi $(n-2)$-ne integraal, milles väljendub funktsionaalne seos x, y, y', y'' ja $n-2$ parameetri vahel.

Analoogiliselt jätkates võime leida n-järgu diferentsiaalvõrrandi iga vahepealse integraali, s. o. üldiselt $(n-k)$-da integraali

$$\Psi_k(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n) = 0,$$

kus $1 \leqq k \leqq n$. n-järgu diferentsiaalvõrrandi esimene integraal on seega

$$\Psi_{n-1}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, c_n) = 0$$

ja n-järgu diferentsiaalvõrrand ise

$$\Psi_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ehk

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

mille üldlahend on

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0.$$

Võrrand

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

kujutab geomeetriliselt n-kordselt lõpmatut kõverate parve ehk k õ v e r a t e p a r v e d e s ü s t e e m i. Fikseerides parameetrite $c_1, c_2, \ldots, c_n$ väärtused, saame n-järgu diferentsiaalvõrrandi erilahendi, mis määrab ühe ja ainult ühe integraalkõvera.

Näiteks, et leida niisugune diferentsiaalvõrrand, mille integraalkõverad kujutaksid tasapinnal ringjooni, s. o.

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 - c_3^2 = 0,$$

kus esineb kolm parameetrit c_1, c_2 ja c_3, selleks diferentsime seda funktsiooni kolm korda

$$2(x - c_1) + 2(y - c_2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(y - c_2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$6\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2(y - c_2)\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Otsitava diferentsiaalvõrrandi saamiseks korrutame teise neist võrranditest avaldisega $\frac{d^3y}{dx^3}$ ja kolmanda avaldisega $\frac{d^2y}{dx^2}$, siis lahutades saadusi saame

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx} = 0,$$

mis kujutab kolmanda järgu diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 - c_3^2 = 0$$

esitab kõiki ringjooni tasapinnal.

Ümberpöördult, kui meil on antud n-järgu diferentsiaalvõrrand

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

mida rahuldab funktsioon

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on kõik olulised parameetrid, siis nimetatakse seda funktsiooni n-järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

2. Kui punkti $(x_0 | y_0)$ läbib integraalkõver, mille võrrand on

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

siis kehtib võrdus

$$\Phi(x_0, y_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_n$ võivad omada määramata palju väärtusi. Seega vastavalt $c_1, c_2, \ldots, c_n$ väärtustele võime kujundada läbi punkti $(x_0 | y_0)$ kuitahes palju integraalkõveraid.

Kui aga peale punkti $(x_0 | y_0)$ on veel teada tuletiste eriväärtused $y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ selles punktis, siis kehtivad võrdused

$$\Phi(x_0, y_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

$$\Phi_1(x_0, y_0, y_0', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

$$\Phi_2(x_0, y_0, y_0', y_0'', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Phi_{n-1}(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0.$$

Kui see võrrandsüsteem omab üht ja ainult üht lahendite süsteemi

$$c_1 = \varphi_1(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$$

$$c_2 = \varphi_2(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_n = \varphi_n(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}),$$

siis saame läbi punkti $(x_0 | y_0)$ kujundada ühe ja ainult ühe integraalkõvera, mille võrrand on

$$\Phi(x, y, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$$

ehk

$$\Phi_0(x, y, x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}) = 0,$$

mis esitab n-järgu diferentsiaalvõrrandi erilahendit algväärtustega $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$.

§ 29. Diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine.

1. Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

üldlahendi leidmiseks tuleb teda järk-järgult inteegrida, kasutades n-kordset kvadratuuri:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)dx + c_1 = \varphi_1(x) + c_1$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int \varphi_1(x)dx + c_1 x + c_2 = \varphi_2(x) + c_1 x + c_2$$

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int \varphi_2(x)dx + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3 = \varphi_3(x) + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_{n-1}(x) + \frac{c_1}{(n-2)!}x^{n-2} + \frac{c_2}{(n-3)!}x^{n-3} + \cdots + c_{n-2}x + c_{n-1}$$

$$y = \varphi_n(x) + \frac{c_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{c_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}x + c_n.$$

Märkides $\frac{c_1}{(n-1)!}$ asemele c_1, $\frac{c_2}{(n-2)!}$ asemele c_2 jne., saame üldlahendi kujus

$$y = \varphi_n(x) + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}x + c_n,$$

mis iga $c_1, c_2, \ldots, c_n$ väärtuste puhul rahuldab antud n-järgu diferentsiaalvõrrandit, kui ainult $f(x)$ on pidev funktsioon.

2. Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

lahendamiseks märgime

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = z,$$

siis

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{dz}{dx}$$

ja antud diferentsiaalvõrrand teisendub esimese järgu diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z),$$

mille üldlahend on

$$z = \varphi_1(x, c_1),$$

mis kujutab nüüd $(n-1)$-järgu diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \varphi_1(x, c_1),$$

mille üldlahendi leiame $n-1$ kvadratuuri abil, s. o.

$$y = \varphi_n(x, c_1) + c_2x^{n-2} + c_3x^{n-3} + \cdots + c_{n-1}x + c_n.$$

Analoogiliselt toimime, kui diferentsiaalvõrrand esineks kujus

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{x}\,\frac{d^3y}{dx^3}$$

lahendamiseks märgime

$$\frac{d^3y}{dx^3} = z,$$

siis

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dz}{dx}$$

ja võrrand omab kuju

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

ehk

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

millest integreerides saame

$$\ln z = \ln x + \ln c_1$$

ehk

$$z = c_1 x,$$

s. o.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = c_1 x,$$

ja kolme kvadratuuri abil leiame

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c_1}{2} x^2 + c_2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{6} x^3 + c_2 x + c_3$$

$$y = \frac{c_1}{24} x^4 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_3 x + c_4 .$$

Märkides $\frac{c_1}{24}$ asemele c_1 ja $\frac{c_2}{2}$ asemele c_2, saame üldlahendi kujus

$$y = c_1 x^4 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 .$$

3. Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

lahendamiseks märgime

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = z,$$

siis

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^2z}{dx^2}$$

ja antud diferentsiaalvõrrand teisendub teise järgu diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f\left(z, \frac{dz}{dx}\right),$$

milles ilmsesti puudub argument x. Selle teise järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahend on (§ 21, p. 1 järgi)

$$z=\varphi_2(x, c_1, c_2),$$

mis kujutab nüüd $(n-2)$-järgu diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\varphi_2(x, c_1, c_2),$$

mille üldlahendi leiame $n-2$ kvadratuuri abil, s. o.

$$y=\varphi_n(x, c_1, c_2)+c_3x^{n-3}+c_4x^{n-4}+\cdots+c_{n-1}x+c_n.$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]-2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx}=0$$

lahendamiseks märgime

$$\frac{dy}{dx}=z,$$

siis

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^2z}{dx^2}$$

ja võrrand teisendub teise järgu diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{d^2z}{dx^2}(1+z^2)-2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=0,$$

milles ilmsesti puudub argument. Edasi märgime

$$\frac{dz}{dx}=p,$$

millest

$$\frac{d^2z}{dx^2}=p\,\frac{dp}{dz},$$

siis

$$p \frac{dp}{dz} (1 + z^2) - 2zp^2 = 0 ,$$

mis annab kaks võrrandit

$$p = 0 , \quad \frac{dp}{p} = \frac{2zdz}{1 + z^2} .$$

Esimesest võrrandist saame $z = c_1$ ja seega

$$y = c_1 x + c_2 ,$$

millest nähtub, et iga sirge tasapinnal on antud diferentsiaalvõrrandi integraalkõveraks.

Teisest võrrandist saame

$$\ln p = \ln (1 + z^2) + \ln c_1 ,$$

kust

$$p = c_1 (1 + z^2)$$

ehk

$$\frac{dz}{dx} = c_1 (1 + z^2)$$

ja

$$\frac{dz}{1 + z^2} = c_1 dx ,$$

mille integraal on

$$\operatorname{arc} \tan z = c_1 x + c_2 ,$$

kust

$$z = \tan (c_1 x + c_2)$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = \tan (c_1 x + c_2)$$

ja antud kolmanda järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = c_3 - \frac{1}{c_1} \ln \cos (c_1 x + c_2) .$$

4. n-järgu diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right),$$

milles ilmsesti puudub tundmata funktsioon, võib taandada $(n-1)$-järgu diferentsiaalvõrrandiks, tähistades

$$\frac{dy}{dx} = z,$$

millest

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}};$$

siis saame

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}}\right).$$

Leides viimase diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$z = \varphi_{n-1}(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}),$$

saame esimese järgu diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_{n-1}(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}),$$

millest saame üldlahendi

$$y = \varphi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) + c_n.$$

Analoogiliselt toimime diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

puhul, kus tähistame

$$\frac{d^k y}{dx^k} = z,$$

millest

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \frac{dz}{dx}, \ldots, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-k} z}{dx^{n-k}}$$

ja saame siis $(n-k)$-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^{n-k} z}{dx^{n-k}} = f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-k-1} z}{dx^{n-k-1}}\right).$$

Kui on võimalik leida selle $(n-k)$-järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$z = \varphi_{n-k}(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}),$$

siis k-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \varphi_{n-k}(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k})$$

üldlahendi leiame k kvadratuuri abil, s. o.

$$y = \varphi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) + c_{n-k+1} x^{k-1} + \\ + c_{n-k+2} x^{k-2} + \cdots + c_{n-1} x + c_n .$$

5. n-järgu diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right),$$

milles ilmsesti puudub argument x, võib taandada $(n-1)$-järgu diferentsiaalvõrrandiks, tähistades

$$\frac{dy}{dx} = z,$$

millest

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = z \frac{dz}{dy},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(z \frac{dz}{dy}\right) = z \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} =$$

$$= z \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}\right) \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \frac{dz}{dy} = z^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + z \left(\frac{dz}{dy}\right)^2$$

jne., saame

$$\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} = f_1\left(y, z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}}\right).$$

6. Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

lahendamiseks märgime

$$\frac{d^k y}{dx^k} = z,$$

millest

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=\frac{dz}{dx}, \ \ldots, \ \frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^{n-k}z}{dx^{n-k}},$$

siis saame $(n-k)$-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^{n-k}z}{dx^{n-k}}=f\left(z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-k-1}z}{dx^{n-k-1}}\right),$$

mis kujutab eelmist diferentsiaalvõrrandit, kus ilmsesti puudub argument x.

§ 30. Homogeenne lineaarne diferentsiaalvõrrand.

Funktsiooni ja ta tuletiste suhtes homogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+P_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=0,$$

kus $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_n(x)$ on x-i mistahes pidevad funktsioonid, üldlahendi võime leida, kui on teada teatud arv tema erilahendeid. Sel puhul tõestame järgmised laused.

1. lause. Kui y_1, y_2, $\ldots$, y_k on homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+P_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=0$$

erilahendid, siis on ka

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ky_k$$

selle diferentsiaalvõrrandi lahend, kus c_1, c_2, $\ldots$, c_k on mistahes konstantsed suurused.

Asetame lauses tähendatud homogeensesse diferentsiaalvõrrandisse funktsiooni ja ta tuletiste asemele

$$\begin{aligned}
y &= c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ky_k\\
y' &= c_1y_1'+c_2y_2'+\cdots+c_ky_k'\\
y'' &= c_1y_1''+c_2y_2''+\cdots+c_ky_k''\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n)} &= c_1y_1^{(n)}+c_2y_2^{(n)}+\cdots+c_ky_k^{(n)},
\end{aligned}$$

saame

$$
\begin{aligned}
& c_1[y_1^{(n)} + P_1(x)y_1^{(n-1)} + P_2(x)y_1^{(n-2)} + \cdots + \\
& \qquad + P_{n-1}(x)y_1' + P_n(x)y_1] + \\
& + c_2[y_2^{(n)} + P_1(x)y_2^{(n-1)} + P_2(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + \\
& \qquad + P_{n-1}(x)y_2' + P_n(x)y_2] + \\
& + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot + \\
& + c_k[y_k^{(n)} + P_1(x)y_k^{(n-1)} + P_2(x)y_k^{(n-2)} + \cdots + \\
& \qquad + P_{n-1}(x)y_k' + P_n(x)y_k] = 0,
\end{aligned}
$$

mis kehtib ikka, sest $y_1, y_2, \ldots, y_k$ on homogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendid ning nurksulgudes esinevad avaldised on seega võrdsed 0-ga.

Eriti kui $k = n$, näeme, et kui $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

erilahendid, siis on ka

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

selle diferentsiaalvõrrandi lahend, kus $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on mistahes konstantsed suurused.

Siin erilahendid ehk funktsioonid $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on lineaarselt sõltumatud, kui nad ei ole seotud samasusega

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0,$$

kus vabalt võetud konstantsed suurused $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ei ole kõik korraga võrdsed 0-ga. Vastasel korral oleksid nad lineaarselt sõltuvad funktsioonid.

Näiteks funktsioonid e^x ja e^{-x} on lineaarselt sõltumatud, sest et võrdus

$$c_1e^x + c_2e^{-x} = 0$$

kehtib samaselt ainult siis, kui $c_1 = c_2 = 0$. Sest tõepoolest, kui oleks

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} = 0,$$

siis saaksime diferentsides

$$c_1 e^x - c_2 e^{-x} = 0.$$

Neid võrdusi liites ja lahutades leiame

$$2c_1 e^x = 0, \quad 2c_2 e^{-x} = 0.$$

Et $e^x \neq 0$ ja $e^{-x} \neq 0$, siis peab olema

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Siin c_1 ja c_2 on funktsioonis

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

olulisteks parameetriteks.

Kuid funktsioonid $x - 2$, $3x + 4$ ja $5x$ on lineaarselt sõltuvad, sest et võrdus $c_1(x-2) + c_2(3x+4) + 5c_3 x = 0$ kehtib mitte ainult siis, kui $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, vaid ka siis, kui $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ ja $c_3 = -1$. Sel juhul c_1, c_2 ja c_3 ei ole funktsioonis

$$y = c_1(x-2) + c_2(3x+4) + 5c_3 x$$

olulisteks parameetriteks, nagu nähtub ka funktsiooni teisendusest

$$y = (c_1 + 3c_2 + 5c_3)x - 2c_1 + 4c_2,$$

mis on sama, kui kahe parameetriga funktsioon

$$y = \bar{c}_1 x + \bar{c}_2,$$

kus $\bar{c}_1 = c_1 + 3c_2 + 5c_3$ ja $\bar{c}_2 = -2c_1 + 4c_2$.

2. lause. Kui homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

erilahendid on $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ja determinant

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \\ y_1', & y_2', & \ldots, & y_n' \\ y_1'', & y_2'', & \ldots, & y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

siis on $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineaarselt sõltumatud.

Oletame, et lauses tähendatud determinant, mis kutsutakse Wronski determinandiks, ei ole võrdne 0-ga, kuid erilahendid on lineaarselt sõltuvad, s. o.

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0.$$

Olgu siin näiteks $c_n \neq 0$, siis

$$y_n = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_{n-1}y_{n-1},$$

kus

$$b_1 = -\frac{c_1}{c_n}, \quad b_2 = -\frac{c_2}{c_n}, \quad \ldots, \quad b_{n-1} = -\frac{c_{n-1}}{c_n},$$

ja

$$y_n' = b_1y_1' + b_2y_2' + \cdots + b_{n-1}y'_{n-1}$$

$$y_n'' = b_1y_1'' + b_2y_2'' + \cdots + b_{n-1}y''_{n-1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_n^{(n-1)} = b_1y_1^{(n-1)} + b_2y_2^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}y_{n-1}^{(n-1)}.$$

Paigutame need $y_n, y_n', y_n'', \ldots, y_n^{(n-1)}$ väärtused Wronski determinandi viimase veeru vastavate elementide asemele, saame determinandi kujus

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_{n-1}, & b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_{n-1}y_{n-1} \\ y_1', & y_2', & \ldots, & y'_{n-1}, & b_1y_1' + b_2y_2' + \cdots + b_{n-1}y'_{n-1} \\ y_1'', & y_2'', & \ldots, & y''_{n-1}, & b_1y_1'' + b_2y_2'' + \cdots + b_{n-1}y''_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots, & y_{n-1}^{(n-1)}, & b_1y_1^{(n-1)} + b_2y_2^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

mille väärtus on aga nüüd determinantide omaduste põhjal võrdne 0-ga. Sellest järeldub, et erilahendite $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineaarse sõltuvuse korral peab ka Wronski determinant olema võrdne 0-ga. Seega oletus on vale. Järelikult, kui Wronski determinant ei ole võrdne 0-ga, siis erilahendid $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ei saa olla lineaarselt sõltuvad, vaid nad on lineaarselt sõltumatud.

Näiteks funktsioonid e^x ja e^{-x}, mille tuletised on vastavalt e^x ja $-e^{-x}$, on lineaarselt sõltumatud, sest

$$\begin{vmatrix} e^x, & e^{-x} \\ e^x, & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

Kuid funktsioonid x^2-2, $3x^2+4$ ja $5x^2$, mille esimesed tuletised on vastavalt $2x$, $6x$ ja $10x$ ning teised tuletised on 2, 6 ja 10, on lineaarselt sõltuvad, sest

$$\begin{vmatrix} x^2-2, & 3x^2+4, & 5x^2 \\ 2x, & 6x, & 10x \\ 2, & 6, & 10 \end{vmatrix} = 4x \cdot \begin{vmatrix} x^2-2, & 3x^2+4, & 5x^2 \\ 1, & 3, & 5 \\ 1, & 3, & 5 \end{vmatrix} = 0 .$$

3. lause. Kui $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

lineaarselt sõltumatud erilahendid, siis

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

on selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend, kus $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on mistahes konstantsed suurused.

a) Tõestuseks näitame, et funktsioonis

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

parameetrid $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on olulised.

Kui need parameetrid ei oleks olulised, siis peaks kehtima seos

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = \psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}),$$

kus

$$C_1 = C_1(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$C_2 = C_2(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{n-1} = C_{n-1}(c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Diferentsides võrduse

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = \psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$$

mõlemaid pooli $c_1, c_2, \ldots, c_n$ suhtes, saame

$$y_1 = \psi_{C_1} \frac{\partial C_1}{\partial c_1} + \psi_{C_2} \frac{\partial C_2}{\partial c_1} + \cdots + \psi_{C_{n-1}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_1}$$

$$y_2 = \psi_{C_1} \frac{\partial C_1}{\partial c_2} + \psi_{C_2} \frac{\partial C_2}{\partial c_2} + \cdots + \psi_{C_{n-1}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n-1} = \psi_{C_1} \frac{\partial C_1}{\partial c_{n-1}} + \psi_{C_2} \frac{\partial C_2}{\partial c_{n-1}} + \cdots + \psi_{C_{n-1}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_{n-1}}$$

$$y_n = \psi_{C_1} \frac{\partial C_1}{\partial c_n} + \psi_{C_2} \frac{\partial C_2}{\partial c_n} + \cdots + \psi_{C_{n-1}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_n}.$$

Võttes saadud võrranditest näiteks $n-1$ esimest võrrandit ja lahendades nad $\psi_{C_1}, \psi_{C_2}, \ldots, \psi_{C_{n-1}}$ suhtes, saame

$$\psi_{C_1} = \frac{\begin{vmatrix} y_1, & \frac{\partial C_2}{\partial c_1}, & \frac{\partial C_3}{\partial c_1}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_1} \\ y_2, & \frac{\partial C_2}{\partial c_2}, & \frac{\partial C_3}{\partial c_2}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n-1}, & \frac{\partial C_2}{\partial c_{n-1}}, & \frac{\partial C_3}{\partial c_{n-1}}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_{n-1}} \end{vmatrix}}{D} =$$

$$= A_{11} y_1 + A_{12} y_2 + \cdots + A_{1(n-1)} y_{n-1}$$

$$\psi_{C_2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial c_1}, & y_1, & \frac{\partial C_3}{\partial c_1}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_1} \\ \frac{\partial C_1}{\partial c_2}, & y_2, & \frac{\partial C_3}{\partial c_2}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial C_1}{\partial c_{n-1}}, & y_{n-1}, & \frac{\partial C_3}{\partial c_{n-1}}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_{n-1}} \end{vmatrix}}{D} =$$

$$= A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + \cdots + A_{2(n-1)}y_{n-1}$$

. . . .

$$\psi_{C_{n-1}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial c_1}, & \frac{\partial C_2}{\partial c_1}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-2}}{\partial c_1}, & y_1 \\ \frac{\partial C_1}{\partial c_2}, & \frac{\partial C_2}{\partial c_2}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-2}}{\partial c_2}, & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial C_1}{\partial c_{n-1}}, & \frac{\partial C_2}{\partial c_{n-1}}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-2}}{\partial c_{n-1}}, & y_{n-1} \end{vmatrix}}{D} =$$

$$= A_{(n-1)1}y_1 + A_{(n-1)2}y_2 + \cdots + A_{(n-1)(n-1)}y_{n-1},$$

kus

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial c_1}, & \frac{\partial C_2}{\partial c_1}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_1} \\ \frac{\partial C_1}{\partial c_2}, & \frac{\partial C_2}{\partial c_2}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial C_1}{\partial c_{n-1}}, & \frac{\partial C_2}{\partial c_{n-1}}, & \ldots, & \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_{n-1}} \end{vmatrix}$$

ja A-d on ainult $c_1, c_2, \ldots, c_n$ funktsioonid, olles seega x-st sõltumatud. Asetades viimasesse võrrandisse

$$y_n = \psi_{C_1} \frac{\partial C_1}{\partial c_n} + \psi_{C_2} \frac{\partial C_2}{\partial c_n} + \cdots + \psi_{C_{n-1}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial c_n}$$

leitud $\psi_{C_1}, \psi_{C_2}, \ldots, \psi_{C_{n-1}}$ väärtused, saame

$$y_n = \bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2 + \cdots + \bar{c}_{n-1} y_{n-1},$$

kus $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_{n-1}$ on x-st sõltumatud. Järelikult on erilahendid $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineaarselt sõltuvad, vastupidi eeldusele, ja seega on lahendis

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

parameetrid $c_1, c_2, \ldots, c_n$ olulised.

b) Näitame veel, et üldlahend

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

esitab homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + P_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x) y = 0$$

kõiki lahendeid, s. o. et me võime saada selle diferentsiaalvõrrandi mistahes lahendi üldlahendist

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n,$$

valides seal vastavalt parameetrid $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

α) Tõestame seda kõigepealt esimese järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y' + P(x) y = 0$$

suhtes.

Olgu siin y_1 mingi erilahend, mis ei ole samaselt võrdne 0-ga, ja y mistahes erilahend, siis on

$$y' + P(x) y = 0$$

$$y_1' + P(x) y_1 = 0 .$$

Arvutades mõlemast võrdusest $P(x)$, saame

$$P(x) = -\frac{y'}{y}$$

$$P(x) = -\frac{y_1'}{y_1}$$

ja seega

$$\frac{y'}{y}=\frac{y_1'}{y_1},$$

kust inteegrides leiame

$$\ln y = \ln y_1 + \ln c$$

ehk

$$y = cy_1,$$

mis ütleb, et üldlahend cy_1 esitab tõepoolest kõiki lahendeid.

β) Oletame nüüd, et lause on kehtiv $(n-1)$-järgu diferentsiaalvõrrandi kohta, ja näitame, et ta jääb siis kehtima ka n-järgu diferentsiaalvõrrandi kohta.

Selleks teeme n-järgu diferentsiaalvõrrandis

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+P_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=0$$

asenduse

$$y = y_1\int z\,dx,$$

kus y_1 on mingi erilahend ja z on mõni x-i funktsioon. Siis

$$y' = y_1 z + y_1'\int z\,dx$$

$$y'' = y_1 z' + 2y_1' z + y_1''\int z\,dx$$

$$y''' = y_1 z'' + 3y_1' z' + 3y_1'' z + y_1'''\int z\,dx$$

. . . .

$$y^{(n)} = y_1 z^{(n-1)} + ny_1' z^{(n-2)} + \frac{n(n-1)}{2}y_1'' z^{(n-3)} + \cdots +$$

$$+ ny_1^{(n-1)}z + y_1^{(n)}\int z\,dx.$$

Paigutame need $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ väärtused n-järgu homogeensesse diferentsiaalvõrrandisse ja jagame võrrandi mõlemad pooled y_1-ga, saame $(n-1)$-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$z^{(n-1)}+F_1(x)z^{(n-2)}+F_2(x)z^{(n-3)}+\cdots+$$

$$+F_{n-2}(x)z'+F_{n-1}(x)z=0,$$

kus

$$F_1(x) = n\frac{y_1'}{y_1} + P_1(x)$$

$$F_2(x) = \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{y_1''}{y_1} + (n-1)P_1(x)\frac{y_1'}{y_1} + P_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{n-1}(x) = n\frac{y_1^{(n-1)}}{y_1} + (n-1)P_1(x)\frac{y_1^{(n-2)}}{y_1} +$$
$$+ (n-2)P_2(x)\frac{y_1^{(n-3)}}{y_1} + \cdots + 2P_{n-2}(x)\frac{y_1'}{y_1} + P_{n-1}(x)$$

ning integraali $\int z dx$ sisaldav liige on võrdne 0-ga, sest ta koefitsient

$$y_1^{(n)} + P_1(x)y_1^{(n-1)} + P_2(x)y_1^{(n-2)} + \cdots +$$
$$+ P_{n-1}(x)y_1' + P_n(x)y_1 = 0\,,$$

kus y_1 on homogeense diferentsiaalvõrrandi erilahend.

Et siin

$$\int z dx = \frac{y}{y_1}\,,$$

siis on

$$z = \left(\frac{y}{y_1}\right)'.$$

Et n-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

erilahendid on

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,$$

siis on $(n-1)$-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$z^{(n-1)} + F_1(x)z^{(n-2)} + F_2(x)z^{(n-3)} + \cdots +$$
$$+ F_{n-2}(x)z' + F_{n-1}(x)z = 0$$

erilahenditeks

$$z_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)',\quad z_2 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)',\quad \ldots,\quad z_{n-1} = \left(\frac{y_n}{y_1}\right)',$$

mis võivad olla kas lineaarselt sõltumatud või mitte.

Kui need erilahendid on lineaarselt sõltumatud, siis vastav üldlahend on

$$c_2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + c_3\left(\frac{y_3}{y_1}\right)' + \cdots + c_n\left(\frac{y_n}{y_1}\right)'$$

ehk

$$c_2z_1 + c_3z_2 + \cdots + c_nz_{n-1}\,,$$

mis peab oletuse põhjal sisaldama kõiki lahendeid, seega ka lahendit

$$z = \left(\frac{y}{y_1}\right)',$$

kus y on antud n-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

mistahes lahend. Järelikult peab olema

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = c_2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + c_3\left(\frac{y_3}{y_1}\right)' + \cdots + c_n\left(\frac{y_n}{y_1}\right)',$$

kust inteegrides saame

$$\frac{y}{y_1} = c_2\frac{y_2}{y_1} + c_3\frac{y_3}{y_1} + \cdots + c_n\frac{y_n}{y_1} + c_1$$

ehk

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n\,,$$

millest nähtub, et lahend y esineb tõepoolest üldlahendis

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n\,.$$

Kui nüüd erilahendid

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1}$$

oleksid lineaarselt sõltuvad, siis peaks nende vahel valitsema seos

$$c_2z_1 + c_3z_2 + \cdots + c_nz_{n-1} = 0$$

ehk

$$c_2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + c_3\left(\frac{y_3}{y_1}\right)' + \cdots + c_n\left(\frac{y_n}{y_1}\right)' = 0,$$

kust inteegrides saame

$$c_2 \frac{y_2}{y_1} + c_3 \frac{y_3}{y_1} + \cdots + c_n \frac{y_n}{y_1} = - c_1$$

ehk

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0 ,$$

mis on aga võimatu, sest erilahendid

$$y_1 , y_2 , \ldots , y_n$$

on lineaarselt sõltumatud. Seega peavad ka erilahendid

$$z_1 , z_2 , \ldots , z_{n-1}$$

olema lineaarselt sõltumatud.

4. l a u s e. Kui n-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + P_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x) y = 0$$

üks erilahend on teada, siis võime selle võrrandi taandada $(n-1)$-järgu homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks.

Olgu y_1 teadaolev erilahend. Märgime

$$y = y_1 \int z dx ,$$

mille asendusel n-järgu homogeensesse diferentsiaalvõrrandisse, nagu eelmises lauses nägime, saame $(n-1)$-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$z^{(n-1)} + F_1(x) z^{(n-2)} + F_2(x) z^{(n-3)} + \cdots + F_{n-2}(x) z' + F_{n-1}(x) z = 0 .$$

Seega

$$y = y_1 \int z dx$$

määrab n-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + P_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x) y = 0$$

üldlahendi, kui meil on teada $(n-1)$-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$z^{(n-1)} + F_1(x)z^{(n-2)} + F_2(x)z^{(n-3)} + \cdots + \\ + F_{n-2}(x)z' + F_{n-1}(x)z = 0$$

üldlahend z.

Kui viimase diferentsiaalvõrrandi lineaarselt sõltumatud erilahendid on

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1},$$

siis n-järgu diferentsiaalvõrrandi erilahendid on

$$y_1, \quad y_2 = y_1\int z_1dx, \quad y_3 = y_1\int z_2dx, \quad \ldots, \quad y_n = y_1\int z_{n-1}dx,$$

mis on samuti lineaarselt sõltumatud. Sest kui oleks

$$c_1y_1 + c_2y_1\int z_1dx + c_3y_1\int z_2dx + \cdots + c_ny_1\int z_{n-1}dx = 0,$$

s. o.

$$c_1 + c_2\int z_1dx + c_3\int z_2dx + \cdots + c_n\int z_{n-1}dx = 0,$$

siis saaksime diferentsides

$$c_2z_1 + c_3z_2 + \cdots + c_nz_{n-1} = 0,$$

mis on võimatu, sest $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ on lineaarselt sõltumatud. Seega annavad need erilahendid üldlahendi

$$y = c_1y_1 + c_2y_1\int z_1dx + c_3y_1\int z_2dx + \cdots + c_ny_1\int z_{n-1}dx.$$

Näiteks kolmanda järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y''' - \frac{1}{x}y'' + \frac{2}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = 0$$

üks erilahend on $y_1 = x^2$. Siis märgime

$$y = x^2\int zdx,$$

kust

$$y' = x^2 z + 2x \int z dx$$

$$y'' = x^2 z' + 4xz + 2 \int z dx$$

$$y''' = x^2 z'' + 6xz' + 6z .$$

Asetades tuletiste väärtused antud diferentsiaalvõrrandisse, saame teise järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$z'' + \frac{5}{x} z' + \frac{4}{x^2} z = 0 ,$$

mille üks erilahend on $z_1 = x^{-2}$. Märgime siin

$$z = x^{-2} \int u dx ,$$

millest

$$z' = x^{-2} u - 2x^{-3} \int u dx$$

$$z'' = x^{-2} u' - 4x^{-3} u + 6x^{-4} \int u dx .$$

Asendades saame esimese järgu diferentsiaalvõrrandi

$$u' + \frac{u}{x} = 0 ,$$

mille üldlahend on

$$u = \frac{C_1}{x} .$$

Siis

$$z = x^{-2} \left(C_1 \int \frac{dx}{x} + C_2 \right)$$

ehk

$$z = x^{-2} (C_1 \ln x + C_2)$$

ja

$$y = x^2 \left[\int x^{-2} (C_1 \ln x + C_2) dx + C_3 \right]$$

ehk

$$y = - C_1 x \ln x - (C_1 + C_2) x + C_3 x^2 .$$

Seega antud kolmanda järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = x(c_1 + c_2 x + c_3 \ln x)\,,$$

kus $c_1 = -C_1 - C_2$, $c_2 = C_3$ ja $c_3 = -C_1$, mis on mistahes konstantsed suurused.

5. l a u s e. Kui n-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + P_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x) y = 0$$

kaks erilahendit on teada, siis võime selle võrrandi taandada $(n-2)$-järgu homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks.

Olgu y_1 ja y_2 teadaolevad erilahendid. Märgime siin

$$y = y_1 \int z_1 dx + y_2 \int z_2 dx\,,$$

kus x-i funktsioonid z_1 ja z_2 valime nõnda, et funktsiooni tuletises

$$y' = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_1' \int z_1 dx + y_2' \int z_2 dx$$

saab

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 = 0\,,$$

millest

$$z_2 = -\frac{y_1}{y_2} z_1 = \varphi(x) z_1\,.$$

Siis

$$y' = y_1' \int z_1 dx + y_2' \int z_2 dx$$

$$y'' = y_1'' \int z_1 dx + y_2'' \int z_2 dx + \psi_0(x) z_1$$

$$y''' = y_1''' \int z_1 dx + y_2''' \int z_2 dx + \psi_0(x) z_1' + \psi_1(x) z_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \int z_1 dx + y_2^{(n)} \int z_2 dx + \psi_0(x) z_1^{(n-2)} + \psi_1(x) z_1^{(n-3)} + \cdots + \\ + \psi_{n-2}(x) z_1\,.$$

Paigutame need y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ väärtused n-järgu homogeensesse diferentsiaalvõrrandisse ja jagame võrrandi mõlemad pooled $\psi_0(x)$-ga, saame $(n-2)$-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$z_1^{(n-2)} + F_1(x) z_1^{(n-3)} + F_2(x) z_1^{(n-4)} + \cdots +$$
$$+ F_{n-3}(x) z_1' + F_{n-2}(x) z_1 = 0 ,$$

kus

$$F_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)} + P_1(x)$$

$$F_2(x) = \frac{\psi_2(x)}{\psi_0(x)} + P_1(x) \frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)} + P_2(x)$$

. . . .

$$F_{n-2}(x) = \frac{\psi_{n-2}(x)}{\psi_0(x)} + P_1(x) \frac{\psi_{n-3}(x)}{\psi_0(x)} + \cdots + P_{n-3}(x) \frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)} + P_{n-2}(x)$$

ning integraale $\int z_1 dx$ ja $\int z_2 dx$ sisaldavad liikmed on võrdsed 0-ga, sest et nende vastavad koefitsiendid

$$y_1^{(n)} + P_1(x) y_1^{(n-1)} + P_2(x) y_1^{(n-2)} + \cdots +$$
$$+ P_{n-1}(x) y_1' + P_n(x) y_1 = 0$$
$$y_2^{(n)} + P_1(x) y_2^{(n-1)} + P_2(x) y_2^{(n-2)} + \cdots +$$
$$+ P_{n-1}(x) y_2' + P_n(x) y_2 = 0 ,$$

kus y_1 ja y_2 on n-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendid.

Seega

$$y = y_1 \int z_1 dx + y_2 \int \varphi(x) z_1 dx ,$$

kus $\varphi(x) = -\frac{y_1}{y_2}$, määrab n-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + P_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x) y = 0$$

üldlahendi, kui on teada $(n-2)$-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$z_1^{(n-2)} + F_1(x) z_1^{(n-3)} + F_3(x) z_1^{(n-4)} + \cdots +$$
$$+ F_{n-3}(x) z_1' + F_{n-2}(x) z_1 = 0$$

üldlahend z_1.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$y''' + \frac{2}{x} y'' - \frac{4}{x^2} y' + \frac{4}{x^3} y = 0$$

kaks erilahendit on $y_1 = x$ ja $y_2 = x^2$. Üldlahendi leidmiseks märgime

$$y = x\int z_1 dx + x^2 \int z_2 dx ,$$

mille tuletises

$$y' = xz_1 + x^2 z_2 + \int z_1 dx + 2x \int z_2 dx$$

valime

$$xz_1 + x^2 z_2 = 0 ,$$

millest

$$z_2 = -\frac{1}{x} z_1 .$$

Et nüüd

$$y = x\int z_1 dx + x^2 \int z_2 dx$$

$$y' = \int z_1 dx + 2x \int z_2 dx$$

$$y'' = -z_1 + 2\int z_2 dx$$

$$y''' = -z_1' - \frac{2}{x} z_1 ,$$

siis y, y', y'' ja y''' väärtuste asetamisel antud võrrandisse saame esimese järgu diferentsiaalvõrrandi

$$z_1' + \frac{4}{x} z_1 = 0 ,$$

mille üldlahend on

$$z_1 = \frac{C_1}{x^4} .$$

Antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on siis

$$y = x\left(C_1 \int \frac{dx}{x^4} + C_2\right) - x^2 \left(C_1 \int \frac{dx}{x^5} + C_3\right)$$

ehk

$$y = -\frac{C_1}{12x^2} + C_2 x - C_3 x^2 ,$$

mis on sama, mis

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{c_3}{x^2} .$$

6. lause. **Kui n-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi**

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

k erilahendit on teada, siis võime selle võrrandi taandada $(n-k)$-järgu homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks.

Olgu $y_1, y_2, \ldots, y_k$ teadaolevad erilahendid. Märgime siin

$$y = y_1 \int z_1 dx + y_2 \int z_2 dx + \cdots + y_k \int z_k dx ,$$

kus $z_1, z_2, \ldots, z_k$ on x-i funktsioonid, mis valime nõnda, et funktsiooni järk-järgulisel diferentsimisel

$$\begin{aligned}
y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + y_k z_k &= 0 \\
y_1' z_1 + y_2' z_2 + \cdots + y_k' z_k &= 0 \\
y_1'' z_1 + y_2'' z_2 + \cdots + y_k'' z_k &= 0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots & \\
y_1^{(k-2)} z_1 + y_2^{(k-2)} z_2 + \cdots + y_k^{(k-2)} z_k &= 0 ,
\end{aligned}$$

millest võime $z_2, z_3, \ldots, z_k$ avaldada z_1 kaudu, s. o.

$$z_2 = \varphi_1(x) z_1 , \; z_3 = \varphi_2(x) z_1 , \ldots , \; z_k = \varphi_{k-1}(x) z_1 .$$

Siis

$$\begin{aligned}
y' &= y_1' \int z_1 dx + y_2' \int z_2 dx + \cdots + y_k' \int z_k dx \\
y'' &= y_1'' \int z_1 dx + y_2'' \int z_2 dx + \cdots + y_k'' \int z_k dx \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
y^{(k-1)} &= y_1^{(k-1)} \int z_1 dx + y_2^{(k-1)} \int z_2 dx + \cdots + y_k^{(k-1)} \int z_k dx \\
y^{(k)} &= y_1^{(k)} \int z_1 dx + y_2^{(k)} \int z_2 dx + \cdots + y_k^{(k)} \int z_k dx + \psi_0(x) z_1 \\
y^{(k+1)} &= y_1^{(k+1)} \int z_1 dx + y_2^{(k+1)} \int z_2 dx + \cdots + y_k^{(k+1)} \int z_k dx + \\
&\quad + \psi_0(x) z_1' + \psi_1(x) z_1 \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
y^{(n)} &= y_1^{(n)} \int z_1 dx + y_2^{(n)} \int z_2 dx + \cdots + y_k^{(n)} \int z_k dx + \\
&\quad + \psi_0(x) z_1^{(n-k)} + \psi_1(x) z_1^{(n-k-1)} + \cdots + \psi_{n-k}(x) z_1 ,
\end{aligned}$$

mille paigutamisel homogeensesse diferentsiaalvõrrandisse kaovad integraale sisaldavad avaldised. Jagades siis võrrandi mõlemad pooled $\psi_0(x)$-ga saame $(n-k)$-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$z_1^{(n-k)} + F_1(x) z_1^{(n-k-1)} + F_2(x) z_1^{(n-k-2)} + \cdots + \\ + F_{n-k-1}(x) z_1' + F_{n-k}(x) z_1 = 0 ,$$

kus

$$F_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)} + P_1(x)$$

$$F_2(x) = \frac{\psi_2(x)}{\psi_0(x)} + P_1(x) \frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)} + P_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{n-k}(x) = \frac{\psi_{n-k}(x)}{\psi_0(x)} + P_1(x) \frac{\psi_{n-k-1}(x)}{\psi_0(x)} + \cdots + \\ + P_{n-k-1}(x) \frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)} + P_{n-k}(x) .$$

Tähendab,

$$y = y_1 \int z_1 dx + y_2 \int \varphi_1(x) z_1 dx + \cdots + y_k \int \varphi_{k-1}(x) z_1 dx$$

määrab n-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + P_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x) y = 0$$

üldlahendi, kui on teada $(n-k)$-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$z_1^{(n-k)} + F_1(x) z_1^{(n-k-1)} + F_2(x) z_1^{(n-k-2)} + \cdots + \\ + F_{n-k-1}(x) z_1' + F_{n-k}(x) z_1 = 0$$

üldlahend z_1.

§ 31. Üldine lineaarne diferentsiaalvõrrand.

1. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots +$$
$$+ P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = Q(x)$$

üldlahendi saamiseks tuleb leida enne vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

üldlahend, mille kaudu võime saada siis eelmise mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi.

Oletame, et homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n,$$

kus $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on lineaarselt sõltumatud erilahendid ja $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on mistahes konstantsed suurused. Näitame, et mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi saamiseks on võimalik $c_1, c_2, \ldots, c_n$ asendada niisuguste x-i funktsioonidega $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$, et

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n$$

esitab selle diferentsiaalvõrrandi üldlahendit. Tõepoolest, tähendatud lahend peab siis rahuldama mittehomogeenset diferentsiaalvõrrandit, kui temasse paigutada $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ väärtused. Selleks diferentsime funktsiooni

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n$$

x-i suhtes, saame

$$y' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2' + \cdots + c_n(x)y_n' +$$
$$+ c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \cdots + c_n'(x)y_n.$$

Et meil on siin tegemist n tundmata funktsiooniga $c_1(x)$, $c_2(x), \ldots, c_n(x)$, siis valime nad nõnda, et viimases võrduses

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \cdots + c_n'(x)y_n = 0,$$

siis

$$y' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2' + \cdots + c_n(x)y_n' .$$

Samuti igas järgnevas tuletises valime

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)y_1' + c_2'(x)\,y_2' + \cdots + c_n'(x)y_n' = 0\\
&c_1'(x)y_1'' + c_2'(x)\,y_2'' + \cdots + c_n'(x)y_n'' = 0\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 ,
\end{aligned}$$

siis nende $n-1$ tingimuse kohaselt saame

$$\begin{aligned}
y\ &= c_1(x)y_1 + c_2(x)\,y_2 + \cdots + c_n(x)y_n\\
y' &= c_1(x)y_1' + c_2(x)\,y_2' + \cdots + c_n(x)y_n'\\
y'' &= c_1(x)y_1'' + c_2(x)\,y_2'' + \cdots + c_n(x)y_n''\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
y^{(n-1)} &= c_1(x)y_1^{(n-1)} + c_2(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}\\
y^{(n)} &= c_1(x)y_1^{(n)} + c_2(x)y_2^{(n)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)} +\\
&\quad + c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} .
\end{aligned}$$

Asetame saadud y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ väärtused diferentsiaalvõrrandisse

$$\begin{aligned}
&y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots +\\
&\qquad + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = Q(x),
\end{aligned}$$

saame

$$\begin{aligned}
&c_1(x)\,[y_1^{(n)} + P_1(x)y_1^{(n-1)} + P_2(x)y_1^{(n-2)} + \cdots +\\
&\qquad + P_{n-1}(x)y_1' + P_n(x)y_1] +\\
&+ c_2(x)\,[y_2^{(n)} + P_1(x)y_2^{(n-1)} + P_2(x)y_2^{(n-2)} + \cdots +\\
&\qquad + P_{n-1}(x)y_2' + P_n(x)y_2] +\\
&+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot +\\
&+ c_n(x)\,[y_n^{(n)} + P_1(x)y_n^{(n-1)} + P_2(x)y_n^{(n-2)} + \cdots +\\
&\qquad + P_{n-1}(x)y_n' + P_n(x)y_n] +\\
&+ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = Q(x) .
\end{aligned}$$

Et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on homogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendid, siis nurksulgudes esinevad avaldised on võrdsed 0-ga ja järelikult

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = Q(x) .$$

Seega peavad $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, ..., $c_n'(x)$ rahuldama võrrandsüsteemi

$$\begin{aligned}
c_1'(x)y_1 + c_2'(x)\, y_2 + \cdots + c_n'(x)y_n &= 0 \\
c_1'(x)y_1' + c_2'(x)\, y_2' + \cdots + c_n'(x)y_n' &= 0 \\
c_1'(x)y_1'' + c_2'(x)\, y_2'' + \cdots + c_n'(x)y_n'' &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} &= 0 \\
c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} &= Q(x) ,
\end{aligned}$$

kus süsteemi determinant (kui Wronski determinant) pole 0, sest $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on lineaarselt sõltumatud erilahendid. Lahendades leiame

$$c_1'(x) = \varphi_1(x) , \quad c_2'(x) = \varphi_2(x) , \quad \ldots, \quad c_n'(x) = \varphi_n(x) ,$$

kust inteegrides saame

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= \int \varphi_1(x)dx + c_1 \\
c_2(x) &= \int \varphi_2(x)dx + c_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
c_n(x) &= \int \varphi_n(x)dx + c_n .
\end{aligned}$$

Asetame võrdusse

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n$$

$c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$ asemele saadud väärtused, saame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots +$$
$$+ P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = Q(x)$$

üldlahendi

$$y = y_1\int \varphi_1(x)dx + y_2\int \varphi_2(x)dx + \cdots + y_n\int \varphi_n(x)dx +$$
$$+ c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n,$$

kus integraalide summa esitab mingisugust x-i funktsiooni, s. o.

$$y_1\int \varphi_1(x)dx + y_2\int \varphi_2(x)dx + \cdots + y_n\int \varphi_n(x)dx = \varphi(x),$$

ning üldlahend on seega

$$y = \varphi(x) + c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n\,,$$

kus $\varphi(x)$ on mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis vastab parameetrite väärtustele $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

2. Ümberpöördult võime samuti näidata, et kui $\varphi(x)$ on lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = Q(x)$$

erilahend, siis selle võrrandi üldlahend on

$$y = \varphi(x) + c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n\,,$$

kus $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

lineaarselt sõltumatud erilahendid ning $c_1, c_2, \ldots, c_n$ mistahes konstantsed suurused.

Oletame, et

$$y = \varphi(x) + \psi(x)$$

on diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = Q(x)$$

üldlahend; siis

$$y' = \varphi'(x) + \psi'(x)$$
$$y'' = \varphi''(x) + \psi''(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x) + \psi^{(n)}(x)\,,$$

mida diferentsiaalvõrrandisse asetades saame

$$\varphi^{(n)}(x)+P_1(x)\varphi^{(n-1)}(x)+P_2(x)\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots+$$
$$+P_{n-1}(x)\varphi'(x)+P_n(x)\varphi(x)+$$
$$+\psi^{(n)}(x)+P_1(x)\psi^{(n-1)}(x)+P_2(x)\psi^{(n-2)}(x)+\cdots+$$
$$+P_{n-1}(x)\psi'(x)+P_n(x)\psi(x)=Q(x)\,.$$

Et siin $\varphi(x)$ on erilahend, siis

$$\varphi^{(n)}(x)+P_1(x)\varphi^{(n-1)}(x)+P_2(x)\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots+$$
$$+P_{n-1}(x)\varphi'(x)+P_n(x)\varphi(x)=Q(x)$$

ja seega

$$\psi^{(n)}(x)+P_1(x)\psi^{(n-1)}(x)+P_2(x)\psi^{(n-2)}(x)+\cdots+$$
$$+P_{n-1}(x)\psi'(x)+P_n(x)\psi(x)=0\,,$$

kus nüüd viimane võrdus esitab homogeenset diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend on

$$\psi(x)=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n\,.$$

Tähendab, kui $\varphi(x)$ on lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+P_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=Q(x)$$

erilahend, siis tema üldlahend on

$$y=\varphi(x)+c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n\,.$$

§ 32. Diferentsiaaloperaator.

1. Märgime funktsiooni tuletise sümbolina tähe D, s. o.

$$Df(x)=f'(x)\,,$$

ja funktsiooni n-järgu tuletise puhul

$$D^nf(x)=f^{(n)}(x)\,,$$

kus sümboli D nimetame **diferentsiaaloperaatoriks.**

n-järgu lineaarse diferentsiaalavaldise

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y ,$$

kus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on konstantsed suurused, võime esitada siis kujus

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y$$

ehk lühemalt

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y ,$$

kus nüüd viimast avaldist ei tule vaadelda mitte kui kahe teguri korrutist, vaid kui eelviimase avaldise sümboolset tähist, sest et sümbolitel $D^n, D^{n-1}, \ldots, D$ ilma funktsioonita pole mõtet. Saadud sümbol

$$D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

on **n-järgu lineaarne diferentsiaaloperaator,** mida rakendame funktsioonile $f(x)$, et saada n-järgu lineaarset diferentsiaalavaldist.

Esimese järgu lineaarne diferentsiaaloperaator on

$$D - \lambda_1 ,$$

mida rakendades funktsioonile $f(x)$ saame esimese järgu lineaarse diferentsiaalavaldise, s. o.

$$(D - \lambda_1) f(x) = D f(x) - \lambda_1 f(x) = f'(x) - \lambda_1 f(x) .$$

Kui rakendame funktsioonile $f(x)$ operaatorit $D - \lambda_1$ ja edasi saadusele rakendame operaatorit $D - \lambda_2$, siis saame teise järgu lineaarse diferentsiaalavaldise, s. o.

$$\begin{aligned}
(D - \lambda_2)(D - \lambda_1) f(x) &= (D - \lambda_2)[f'(x) - \lambda_1 f(x)] = \\
&= D[f'(x) - \lambda_1 f(x)] - \lambda_2 [f'(x) - \lambda_1 f(x)] = \\
&= D f'(x) - \lambda_1 D f(x) - \lambda_2 f'(x) + \lambda_1 \lambda_2 f(x) = \\
&= f''(x) - \lambda_1 f'(x) - \lambda_2 f'(x) + \lambda_1 \lambda_2 f(x) = \\
&= f''(x) - (\lambda_1 + \lambda_2) f'(x) + \lambda_1 \lambda_2 f(x) ,
\end{aligned}$$

mis on sama, mis

$$[D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2]f(x) ,$$

kusjuures

$$D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2$$

on vastav teise järgu lineaarne diferentsiaaloperaator.

Analoogiliselt leiame, et

$$(D - \lambda_3)(D - \lambda_2)(D - \lambda_1)f(x) =$$
$$= [D^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)D^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)D - \lambda_1\lambda_2\lambda_3]f(x) ,$$

ja üldiselt

$$(D - \lambda_n)(D - \lambda_{n-1}) \cdots (D - \lambda_1)f(x) =$$
$$= [D^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)D^{n-1} + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots +$$
$$+ \lambda_{n-1}\lambda_n)D^{n-2} - \cdots + (-1)^n \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n]f(x) .$$

Operaatori $D - \lambda$ n-kordset rakendamist funktsioonile $f(x)$ tähistame $(D - \lambda)^n$, s. o.

$$(D - \lambda)^n f(x) = \left[D^n - \binom{n}{1}\lambda D^{n-1} + \binom{n}{2}\lambda^2 D^{n-2} - \cdots +\right.$$
$$\left. + (-1)^n \lambda^n\right] f(x) .$$

2. Vaatleme n-järgu lineaarset diferentsiaaloperaatorit

$$D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1}D + a_n ,$$

kus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on reaalarvud, kui algebralist n-astme polünoomi, mille võime lahutada n esimese astme teguriks

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_n) ,$$

kus võrrandi

$$D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1}D + a_n = 0$$

juured $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ võivad olla reaal- või kompleksarvud.

Nimetame neid juuri ühtlasi diferentsiaaloperaatori

$$D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

juurteks.

Et

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$$

$$a_2 = (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1} \lambda_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n ,$$

siis võime n-järgu diferentsiaalavaldist

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) f(x)$$

esitada kujus

$$[D^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) D^{n-1} + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1} \lambda_n) D^{n-2} - \ldots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n] f(x) =$$
$$= (D - \lambda_n)(D - \lambda_{n-1}) \cdots (D - \lambda_1) f(x) .$$

Seega laseb n-järgu lineaarne diferentsiaaloperaator ennast sümboolselt teguriteks lahutada nagu vastav n-astme polünoom.

Et algebralise n-astme polünoomi tegureid võime kirjutada mistahes järjekorras, siis ka n-järgu lineaarse diferentsiaaloperaatori sümboolseid tegureid võime märkida samuti mistahes järjekorras. Seega

$$(D - \lambda_n) \cdots (D - \lambda_2)(D - \lambda_1) f(x) =$$
$$= (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_n) f(x) ,$$

kus nüüd funktsioonile $f(x)$ tuleb rakendada operaatorit $D - \lambda_n$, siis operaatorit $D - \lambda_{n-1}$ jne., ning lõpuks operaatorit $D - \lambda_1$.

Kui mõni diferentsiaaloperaatori juurtest $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ on kompleksarv, näiteks

$$\lambda_n = a + bi ,$$

siis koefitsientide $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalsuse tõttu on olemas ka kaaskompleksarv, näiteks

$$\lambda_{n-1} = a - bi .$$

Et korrutises

$$(D - \lambda_{n-1})(D - \lambda_n) = D^2 - 2aD + a^2 + b^2 = D^2 + \alpha D + \beta$$

$\alpha = -2a$ ja $\beta = a^2 + b^2$ on reaalarvud, siis on sel juhul n-järgu diferentsiaalavaldises üks lineaarne diferentsiaaloperaator teisejärguline, s. o.

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_{n-2})(D^2 + \alpha D + \beta) f(x) .$$

On aga juurtest $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ k paari kompleksarve, siis n-järgu lineaarne diferentsiaalavaldis esineb sümboolselt kujus

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_{n-2k})(D^2 + \alpha_1 D + \beta_1) \cdot$$
$$\cdot (D^2 + \alpha_2 D + \beta_2) \cdots (D^2 + \alpha_k D + \beta_k) f(x) ,$$

millest nähtub, et n-järgu lineaarset diferentsiaaloperaatorit on ikka võimalik esitada sümboolselt reaalsete koefitsientidega esimese ja teise järgu lineaarsete diferentsiaaloperaatorite korrutisena, kusjuures funktsioonile $f(x)$ võime mistahes järjekorras järk-järgult rakendada saadud operaatoreid.

Kui mõned diferentsiaaloperaatori juurtest $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ on võrdsed, siis n-järgu lineaarse diferentsiaaloperaatori vastavad sümboolsed tegurid on samuti võrdsed.

§ 33. Konstantsete koefitsientidega lineaarne diferentsiaalvõrrand.

Diferentsiaaloperaatorit kasutades võime n-järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) ,$$

kus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on konstantsed koefitsiendid, märkida kujus

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = Q(x) .$$

Vaadeldes siin esinevat n-järgu lineaarset diferentsiaal-operaatorit kui reaalsete koefitsientidega algebralist n-astme polünoomi või kui lineaarse diferentsiaalvõrrandi iseloomuliku võrrandi

$$D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n = 0$$

vasakut poolt, mille juured on $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, mis on ühtlasi diferentsiaaloperaatori juurteks, siis võime, nagu nägime, n-järgu diferentsiaaloperaatori ikka esitada reaalsete koefitsientidega esimese ja teise järgu lineaarsete diferentsiaaloperaatorite korrutisena ja seega märkida konstantsete koefitsientidega lineaarse diferentsiaalvõrrandi sümboolselt

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_m)(D^2+\alpha_1 D+\beta_1)\cdot$$
$$\cdot(D^2+\alpha_2 D+\beta_2)\cdots(D^2+\alpha_k D+\beta_k)y = Q(x),$$

kus $m+2k=n$, kusjuures diferentsiaaloperaatori juurtest $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ on reaalarvud ja $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n$ on kompleksarvud.

Konstantsete koefitsientidega n-järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tähistame saadud sümboolses kujus

$$(D-\lambda_2)(D-\lambda_3)\cdots(D^2+\alpha_k D+\beta_k)y = z_1,$$

siis saame esimese järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$(D-\lambda_1)z_1 = Q(x)$$

ehk

$$z_1' - \lambda_1 z_1 = Q(x),$$

mille üldlahend on

$$z_1 = e^{\lambda_1 x}\left[\int Q(x)e^{-\lambda_1 x}\,dx + c_1\right] = \varphi_1(x, c_1).$$

Edasi $(n-1)$-järgu diferentsiaalvõrrandis

$$(D-\lambda_2)(D-\lambda_3)\cdots(D^2+\alpha_k D+\beta_k)y = \varphi_1(x, c_1)$$

tähistame

$$(D-\lambda_3)(D-\lambda_4)\cdots(D^2+\alpha_k D+\beta_k)y = z_2,$$

siis saame

$$(D-\lambda_2)z_2=\varphi_1(x\,,\,c_1)$$

ehk

$$z_2'-\lambda_2 z_2=\varphi_1(x\,,\,c_1)\,,$$

mis kujutab jälle esimese järgu lineaarset diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend on

$$z_2=e^{\lambda_2 x}\Big[\int\varphi_1(x\,,\,c_1)e^{-\lambda_2 x}\,dx+c_2\Big]=\varphi_2(x\,,\,c_1\,,\,c_2)\,.$$

Analoogiliselt jätkates leiame, et

$$z_m=\varphi_m(x\,,\,c_1\,,\,c_2\,,\,\ldots\,,\,c_m)\,,$$

kus nüüd $2k$-järgu diferentsiaalvõrrandis

$$(D^2+\alpha_1 D+\beta_1)\cdots(D^2+\alpha_k D+\beta_k)y=\varphi_m(x\,,\,c_1\,,\,c_2\,,\,\ldots\,,\,c_m)$$

tähistame

$$(D^2+\alpha_2 D+\beta_2)\cdots(D^2+\alpha_k D+\beta_k)y=z_{m+2}\,,$$

siis

$$(D^2+\alpha_1 D+\beta_1)z_{m+2}=\varphi_m(x\,,\,c_1\,,\,c_2\,,\,\ldots\,,\,c_m)\,,$$

ehk

$$z''_{m+2}+a_1 z'_{m+2}+\beta_1 z_{m+2}=\varphi_m(x\,,\,c_1\,,\,c_2\,,\,\ldots\,,\,c_m)\,,$$

mis on konstantsete koefitsientidega teise järgu lineaarne diferentsiaalvõrrand, mille üldlahendi leiame § 23 esitatud võttega. Olgu üldlahend

$$z_{m+2}=\varphi_{m+2}(x\,,\,c_1\,,\,c_2\,,\,\ldots\,,\,c_{m+1}\,,\,c_{m+2})\;;$$

siis $(2k-2)$-järgu diferentsiaalvõrrandis

$$(D^2+\alpha_2 D+\beta_2)\cdots(D^2+\alpha_k D+\beta_k)y=$$
$$=\varphi_{m+2}(x\,,\,c_1\,,\,c_2\,,\,\ldots\,,\,c_{m+2})$$

tähistame

$$(D^2 + \alpha_3 D + \beta_3) \cdots (D^2 + \alpha_k D + \beta_k) = z_{m+4},$$

saame

$$(D^2 + \alpha_2 D + \beta_2) z_{m+4} = \varphi_{m+2}(x, c_1, c_2, \ldots, c_{m+2})$$

ehk

$$z''_{m+4} + \alpha_2 z'_{m+4} + \beta_2 z_{m+4} = \varphi_{m+2}(x, c_1, c_2, \ldots, c_{m+2}),$$

mis on jälle konstantsete koefitsientidega teise järgu lineaarne diferentsiaalvõrrand, mille üldlahend olgu

$$z_{m+4} = \varphi_{m+4}(x, c_1, c_2, \ldots, c_{m+3}, c_{m+4}).$$

Analoogiliselt jätkates saame viimase konstantsete koefitsientidega teise järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + \alpha_k y' + \beta_k y = \varphi_{n-2}(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}),$$

mille üldlahend

$$y = \varphi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

on ühtlasi n-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x)$$

üldlahendiks.

Kokkuvõttes võime märkida, et konstantsete koefitsientidega n-järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x)$$

lahendamiseks teisendame teda esimese ja teise järgu lineaarsete diferentsiaaloperaatorite korrutise kaudu sümboolseks kujuks

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_m)(D^2 + \alpha_1 D + \beta_1) \cdots$$
$$\cdots (D^2 + \alpha_k D + \beta_k) y = Q(x),$$

kus $m + 2k = n$, ja lahendame järk-järgult esimese ja teise järgu lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

$$(D-\lambda_1)z_1 = Q(x)$$

$$(D-\lambda_2)z_2 = z_1$$

$$(D-\lambda_3)z_3 = z_2$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(D-\lambda_m)z_m = z_{m-1}$$

$$(D^2+\alpha_1 D+\beta_1)z_{m+2} = z_m$$

$$(D^2+\alpha_2 D+\beta_2)z_{m+4} = z_{m+2}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(D^2+\alpha_k D+\beta_k)z_n = z_{n-2},$$

kusjuures kõik või mõned operaatoreist $D-\lambda_i (i=1, 2, \ldots, m)$ või operaatoreist $D^2+\alpha_j D+\beta$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ võivad olla võrdsed. Viimase võrrandi üldlahend on ühtlasi n-järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

Konstantsete koefitsientidega homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

lahendamisel on ülaltähendatud esimese ja teise järgu lineaarsetest diferentsiaalvõrranditest esimese võrrandi parempoolne osa võrdne 0-ga, s. o.

$$(D-\lambda_1)z_1 = 0.$$

Näiteks neljanda järgu diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(4)} - 16y = x$$

võime esitada kujus

$$(D^4-16)y = x$$

ehk

$$(D-2)(D+2)(D^2+4)y = x,$$

kus tähistame

$$(D+2)(D^2+4)y = z_1;$$

siis saame esimese järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$(D-2)z_1 = x$$

ehk

$$z_1' - 2z_1 = x,$$

mille üldlahend

$$z_1 = e^{2x}\left(\int xe^{-2x}dx + c_1\right) = c_1e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

annab kolmanda järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$(D+2)(D^2+4)y = c_1e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Edasi tähistame

$$(D^2+4)y = z_2;$$

siis esimese järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$(D+2)z_2 = c_1e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

ehk

$$z_2' + 2z_2 = c_1e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

üldlahend

$$z_2 = e^{-2x}\left[\int\left(c_1e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}dx + c_2\right] =$$

$$= e^{-2x}\left(\frac{c_1}{4}e^{4x} - \frac{x}{4}e^{2x} + c_2\right) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{x}{4},$$

kus $\frac{c_1}{4}$ asendame c_1-ga, annab teise järgu lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$(D^2+4)y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{x}{4}$$

ehk

$$y'' + 4y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{x}{4},$$

mille üldlahend (§ 23 p. 2 lit. b järgi)

$$y = c_3\cos 2x + c_4\sin 2x -$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2x\int\left(c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{x}{4}\right)\sin 2x dx +$$

$$+\frac{1}{2}\sin 2x\int\left(c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{x}{4}\right)\cos 2x dx$$

on ühtlasi antud neljanda järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks. Et siin

$$\int e^{\pm 2x} \sin 2x dx = \frac{1}{4} e^{\pm 2x}\left(\pm \sin 2x - \cos 2x\right)$$

$$\int e^{\pm 2x} \cos 2x dx = \frac{1}{4} e^{\pm 2x}\left(\pm \cos 2x + \sin 2x\right)$$

$$\int x \sin 2x dx = \frac{1}{4} (\sin 2x - 2x \cos 2x)$$

$$\int x \cos 2x dx = \frac{1}{4} (\cos 2x + 2x \sin 2x) ,$$

siis

$$\begin{aligned} y = {} & c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x - \\ & - \frac{1}{2} \cos 2x \left[\frac{c_1}{4} e^{2x}\left(\sin 2x - \cos 2x\right) + \right. \\ & \left. + \frac{c_2}{4} e^{-2x}\left(- \sin 2x - \cos 2x\right) - \frac{1}{16} (\sin 2x - 2x \cos 2x)\right] + \\ & + \frac{1}{2} \sin 2x \left[\frac{c_1}{4} e^{2x}\left(\cos 2x + \sin 2x\right) + \right. \\ & \left. + \frac{c_2}{4} e^{-2x}\left(- \cos 2x + \sin 2x\right) - \frac{1}{16} (\cos 2x + 2x \sin 2x)\right] = \\ & = c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + \frac{c_1}{8} e^{2x} + \frac{c_2}{8} e^{-2x} - \frac{x}{16} . \end{aligned}$$

Märkides $\frac{c_1}{8}$ asemele c_1 ja $\frac{c_2}{8}$ asemele c_2, saame üldlahendi kujus

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x - \frac{x}{16} .$$

§ 34. Konstantsete koefitsientidega homogeenne lineaarne diferentsiaalvõrrand.

Et eelmises §-s käsiteldud konstantsete koefitsientidega lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamisviis nõuab kaunis pikaldast toimingut, seepärast käsitleme konstantsete koefitsientidega homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

üldlahendi leidmiseks teist lahendamisviisi, mis viib kiiremini eesmärgile.

1. Oletame kõigepealt, et homogeenset diferentsiaalvõrrandit

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

on võimalik esitada sümboolses kujus

$$(D - \lambda)^n y = 0,$$

kus kõik diferentsiaaloperaatori n juurt on võrdsed reaalarvud.

Et korrutise xy tuletised diferentsiaaloperaatori kaudu on

$$\begin{aligned} Dxy &= xDy + y \\ D^2xy &= xD^2y + 2Dy \\ D^3xy &= xD^3y + 3D^2y \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ D^nxy &= xD^ny + nD^{n-1}y, \end{aligned}$$

ja kui y_1 on diferentsiaalvõrrandi

$$(D - \lambda)^m y = 0$$

lahend, siis xy_1 on diferentsiaalvõrrandi

$$(D - \lambda)^{m+1} y = 0$$

lahendiks, sest et

$$\begin{aligned} (D - \lambda)^{m+1} xy_1 &= x(D - \lambda)^{m+1} y_1 + (m+1)(D - \lambda)^m y_1 = \\ &= x(D - \lambda)(D - \lambda)^m y_1 + (m+1)(D - \lambda)^m y_1, \end{aligned}$$

kus nüüd

$$(D - \lambda)^m y_1 = 0,$$

siis ka

$$(D - \lambda)^{m+1} xy_1 = 0.$$

Et diferentsiaalvõrrandi

$$(D - \lambda) y = 0$$

lahend on $e^{\lambda x}$, siis eelöeldu põhjal diferentsiaalvõrrandi

$$(D-\lambda)^2 y=0$$

lahendid on $e^{\lambda x}$ ja $xe^{\lambda x}$; diferentsiaalvõrrandi

$$(D-\lambda)^3 y=0$$

lahendid on $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$ ja $x^2e^{\lambda x}$ jne., ning üldiselt diferentsiaalvõrrandi

$$(D-\lambda)^n y=0$$

lahendid on

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{n-1}e^{\lambda x},$$

mida nimetatakse antud homogeense diferentsiaalvõrrandi p õ h i l a h e n d i t e k s.

Seega homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$(D-\lambda)^n y=0$$

üldlahendi võime esitada kujus

$$y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}+c_3x^2e^{\lambda x}+\cdots+c_nx^{n-1}e^{\lambda x}$$

ehk

$$y=e^{\lambda x}(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_nx^{n-1}),$$

kus põhilahendid $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $x^2e^{\lambda x}$, ..., $x^{n-1}e^{\lambda x}$ on lineaarselt sõltumatud erilahendid ja seega c_1, c_2, ..., c_n olulised parameetrid. Sest tõepoolest, kui lahendid

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{n-1}e^{\lambda x}$$

oleksid lineaarselt sõltuvad, siis peaks olema

$$c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}+c_3x^2e^{\lambda x}+\cdots+c_nx^{n-1}e^{\lambda x}=0,$$

s. o.

$$c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_nx^{n-1}=0,$$

mis võib olla samaselt 0 ainult siis, kui kõik koefitsiendid $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on 0-d.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$$

ehk

$$(D - 1)^4 y = 0$$

põhilahendid on

$$e^x, \quad xe^x, \quad x^2e^x, \quad x^3e^x$$

ja üldlahend on seega

$$y = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3) .$$

2. Oletame, et homogeenne diferentsiaalvõrrand

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

on paarisjärguline, s. o. $n = 2k$, ja olgu diferentsiaaloperaatori k juurt võrdsed kompleksarvud, siis ülejäänud k juurt on võrdsed kaaskompleksarvud ning diferentsiaalvõrrandi võime esitada kujus

$$(D^2 + \alpha D + \beta)^k y = 0 .$$

Siin näeme samuti, et kui y_1 on diferentsiaalvõrrandi

$$(D^2 + \lambda D + \beta)^m y = 0$$

lahend, siis xy_1 on diferentsiaalvõrrandi

$$(D^2 + \alpha D + \beta)^{m+1} y = 0$$

lahendiks, sest nagu võime kergesti veenduda

$$\begin{aligned}
(D^2 + \alpha D + \beta)^{m+1} xy_1 &= x(D^2 + \alpha D + \beta)^{m+1} y_1 + \\
&+ (m + 1)(D^2 + \alpha D + \beta)^m (2D + \alpha) y_1 = \\
&= x(D^2 + \alpha D + \beta)(D^2 + \alpha D + \beta)^m y_1 + \\
&+ (m + 1)(D^2 + \alpha D + \beta)^m (2D + \alpha) y_1 .
\end{aligned}$$

Et

$$(D^2 + \alpha D + \beta)^m y_1 = 0\,,$$

siis ka

$$(D^2 + \alpha D + \beta)^{m+1} x y_1 = 0\,.$$

Et diferentsiaalvõrrandi

$$(D^2 + \alpha D + \beta) y = 0$$

lahendid on

$$e^{ax} \cos bx\,, \quad e^{ax} \sin bx\,,$$

kus $a = -\frac{\alpha}{2}$ ja $b = \sqrt{\beta^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$, siis diferentsiaalvõrrandi

$$(D^2 + \alpha D + \beta)^2 y = 0$$

lahendid on

$$e^{ax} \cos bx\,, \quad x e^{ax} \cos bx\,,$$
$$e^{ax} \sin bx\,, \quad x e^{ax} \sin bx\,;$$

diferentsiaalvõrrandi

$$(D^2 + \alpha D + \beta)^3 y = 0$$

lahendid on

$$e^{ax} \cos bx\,, \quad x e^{ax} \cos bx\,, \quad x^2 e^{ax} \cos bx$$
$$e^{ax} \sin bx\,, \quad x e^{ax} \sin bx\,, \quad x^2 e^{ax} \sin bx\,,$$

jne., ning üldiselt diferentsiaalvõrrandi

$$(D^2 + \alpha D + \beta)^k y = 0$$

lahendid on

$$e^{ax} \cos bx\,, \quad x e^{ax} \cos bx\,, \quad \ldots\,, \quad x^{k-1} e^{ax} \cos bx\,,$$
$$e^{ax} \sin bx\,, \quad x e^{ax} \sin bx\,, \quad \ldots\,, \quad x^{k-1} e^{ax} \sin bx\,,$$

mis on viimase diferentsiaalvõrrandi põhilahenditeks. Järelikult on homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$(D^2 + \alpha D + \beta)^k y = 0$$

üldlahend siis

$$y = e^{ax}(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1}) \cos bx +$$
$$+ e^{ax}(c_{k+1} + c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \cdots + c_nx^{k-1}) \sin bx ,$$

kus põhilahendid on lineaarselt sõltumatud erilahendid ja seega $c_1, c_2, \ldots, c_n$ olulised parameetrid. Sest tõepoolest, kui lahendid

$$e^{ax} \cos bx , \quad xe^{ax} \cos bx , \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{ax} \cos bx ,$$
$$e^{ax} \sin bx , \quad xe^{ax} \sin bx , \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{ax} \sin bx$$

oleksid lineaarselt sõltuvad, siis peaks olema

$$e^{ax}(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1}) \cos bx +$$
$$+ e^{ax}(c_{k+1} + c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \cdots + c_nx^{k-1}) \sin bx = 0 ,$$

millest

$$\tan bx = -\frac{c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1}}{c_{k+1} + c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \cdots + c_nx^{k-1}} .$$

Et tangensfunktsioon saab lõpmata paljude argumendi väärtuste puhul 0-ks ja lõpmata paljude argumendi väärtuste puhul lõpmatuks, siis peab olema võrranditel

$$c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_kx^{k-1} = 0$$

ja

$$c_{k+1} + c_{k+2}x + c_{k+3}x^2 + \cdots + c_nx^{k-1} = 0$$

lõpmata palju juuri, mis on ainult siis võimalik, kui

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_n = 0 .$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25 = 0$$

ehk

$$(D^2 - 4D + 5)^2 y = 0$$

puhul $a = 2$ ja $b = 1$. Põhilahendid on siin

$$e^{2x} \cos x , \quad xe^{2x} \cos x , \quad e^{2x} \sin x , \quad xe^{2x} \sin x$$

ning diferentsiaalvõrrandi üldlahend on seega

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2 x)\cos x + e^{2x}(c_3 + c_4 x)\sin x\,.$$

3. Kui konstantsete koefitsientidega homogeenne diferentsiaalvõrrand

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

teisendub sümboolseks kujuks

$$(D-\lambda_1)^{\mu_1}(D-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(D-\lambda_m)^{\mu_m}(D^2+\alpha_1 D+\beta_1)^{\nu_1}\cdot$$
$$\cdot(D^2+\alpha_2 D+\beta_2)^{\nu_2}\cdots(D^2+\alpha_k D+\beta_k)^{\nu_k}y = 0\,,$$

kus

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m + 2\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + 2\nu_k = n\,,$$

siis tema üldlahendi saamiseks leiame järk-järgult diferentsiaalvõrrandite

$$(D-\lambda_1)^{\mu_1}y = 0$$
$$(D-\lambda_2)^{\mu_2}y = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$(D-\lambda_m)^{\mu_m}y = 0$$
$$(D^2+\alpha_1 D+\beta_1)^{\nu_1}y = 0$$
$$(D^2+\alpha_2 D+\beta_2)^{\nu_2}y = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(D^2+\alpha_k D+\beta_k)^{\nu_k}y = 0$$

vastavad põhilahendid

$$e^{\lambda_i x},\ xe^{\lambda_i x},\ x^2 e^{\lambda_i x},\ \dots,\ x^{\mu_i - 1}e^{\lambda_i x}\,,$$

$$e^{a_j x}\cos b_j x\,,\ xe^{a_j x}\cos b_j x\,,\ x^2 e^{a_j x}\cos b_j x\,,\ \dots,\ x^{\nu_j - 1}e^{a_j x}\cos b_j x\,,$$

$$e^{a_j x}\sin b_j x\,,\ xe^{a_j x}\sin b_j x\,,\ x^2 e^{a_j x}\sin b_j x\,,\ \dots,\ x^{\nu_j - 1}e^{a_j x}\sin b_j x\,,$$

kus $i=1, 2, \ldots, m$ ja $j=1, 2, \ldots, k$. Siin iga ülaltoodud $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, 2\nu_1, 2\nu_2, \ldots, 2\nu_k$ järgu diferentsiaalvõrrandi iga lahend rahuldab ühtlasi n-järgu homogeenset diferentsiaalvõrrandit, sest kui näiteks y_1 on võrrandi

$$(D-\lambda_i)^{\mu_i} y = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

või võrrandi

$$(D^2 + a_j D + \beta_j)^{\nu_j} y = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

lahend, siis

$$(D-\lambda_i)^{\mu_i} y_1 = 0$$

või

$$(D^2 + \alpha_j D + \beta_j)^{\nu_j} y_1 = 0$$

ja meil tuleb n-järgu homogeenses diferentsiaalvõrrandis ülejäänud diferentsiaaloperaatoreid järk-järgult rakendada 0-le, mis annab ikka 0. Järelikult n-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend on siis

$$\begin{aligned} y = \sum \Big[& e^{\lambda_i x}\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_{\mu_i} x^{\mu_i - 1}\right) + \\ & + e^{a_j x}\left(c_{\mu_i+1} + c_{\mu_i+2}\, x + \cdots + c_{\mu_i+\nu_j}\, x^{\nu_j - 1}\right) \cos b_j\, x + \\ & + e^{a_j x}\left(c_{\mu_i+\nu_j+1} + c_{\mu_i+\nu_j+2}\, x + \cdots + c_{\mu_i+2\nu_j}\, x^{\nu_j - 1}\right) \sin b_j\, x \Big]. \end{aligned}$$

4. Erijuhul, kui diferentsiaaloperaatori juured $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ on kõik reaalsed ja isesuurused, siis võrrandsüsteem

$$\begin{gathered} (D-\lambda_1) y = 0 \\ (D-\lambda_2) y = 0 \\ \cdots\cdots \\ (D-\lambda_n) y = 0 \end{gathered}$$

annab n-järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi põhilahendid

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x},$$

ning üldlahend on seega

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x},$$

kus $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, ..., $e^{\lambda_n x}$ on lineaarselt sõltumatuteks erilahenditeks. Et erilahendid on siin lineaarselt sõltumatud, nähtub sellest, et Wronski determinant

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x}, & \ldots, & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, & \lambda_2 e^{\lambda_2 x}, & \ldots, & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x}, & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x}, & \ldots, & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \ldots, & \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1}, & \lambda_2^{n-1}, & \ldots, & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x} (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \ldots (\lambda_{n-1} - \lambda_n) \neq 0,$$

sest et iga λ on isesuurune.

Näiteks neljanda järgu homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0$$

ehk

$$(D-1)(D+1)(D-2)(D+3)y = 0$$

puhul $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ ja $\lambda_4 = -3$, kusjuures põhilahendid

$$e^x, \quad e^{-x}, \quad e^{2x}, \quad e^{-3x}$$

annavad diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-3x}.$$

§ 35. Määramata koefitsientide meetod.

1. Kui konstantsete koefitsientidega lineaarses diferentsiaalvõrrandis

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x)$$

$a_n \neq 0$ ja parempoolne osa kujutab m-astme ratsionaalset täisfunktsiooni, s. o.

$$Q(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m ,$$

siis võib leida selle diferentsiaalvõrrandi erilahendi nn. m ä ä r a m a t a k o e f i t s i e n t i d e m e e t o d i abil. Sel juhul lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendiks on samuti mingisugune m-astme funktsioon

$$\varphi(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m ,$$

mille koefitsiendid $B_0 , B_1 , \ldots , B_m$ tuleb määrata.

Kui diferentsiaalvõrrandi lahendiks on

$$\varphi(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m ,$$

siis

$$\varphi'(x) = m B_0 x^{m-1} + (m-1) B_1 x^{m-2} + \cdots + B_{m-1}$$

$$\varphi''(x) = m(m-1) B_0 x^{m-2} + (m-1)(m-2) B_1 x^{m-3} + \cdots + B_{m-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(n)}(x) = m(m-1) \cdots (m-n+1) B_0 + \cdots + B_{m-n} .$$

Asetades $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ..., $\varphi^{(n)}(x)$ väärtused lineaarse diferentsiaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ asemele, saame m-astme funktsiooni

$$F_0(B_0) x^m + F_1(B_0 , B_1) x^{m-1} + \cdots + F_{m-1}(B_0 , B_1 , \ldots , B_{m-1}) x + F_m(B_0 , B_1 , \ldots , B_m) ,$$

kus $F_k(B_0 , B_1 , \ldots , B_k)$ on koefitsientide $B_0 , B_1 , \ldots , B_k$

lineaarne funktsioon ($k = 0, 1, 2, \ldots, m$). See m-astme funktsioon on võrdne $Q(x)$-ga, s. o.

$$F_0(B_0)x^m + F_1(B_0, B_1)x^{m-1} + \cdots + F_{m-1}(B_0, B_1, \ldots, B_{m-1})x + \\ + F_m(B_0, B_1, \ldots, B_m) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + \\ + A_{m-1}x + A_m .$$

Võrrutades samaastmeliste argumentide koefitsiendid saame $m+1$ lineaarset võrrandit

$$\begin{aligned} F_0(B_0) &= A_0 \\ F_1(B_0, B_1) &= A_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_{m-1}(B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}) &= A_{m-1} \\ F_m(B_0, B_1, \ldots, B_m) &= A_m . \end{aligned}$$

Et avaldises $F_k(B_0, B_1, \ldots, B_k)$ on A_k koefitsiendiks $a_n \neq 0$, siis võime saadud võrrandsüsteemist järk-järgult arvutada koefitsiendid $B_0, B_1, \ldots, B_m$, mis teevad funktsiooni

$$\varphi(x) = B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_{m-1}x + B_m$$

lineaarse diferentsiaalvõrrandi erilahendiks.

Kui aga $a_n = 0$ ja peale selle veel üldiselt $a_{n-1} = 0$, $a_{n-2} = 0$, $\ldots$, $a_{n-k-1} = 0$, siis diferentsiaalvõrrand esineb kujus

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-k-1}y^{(k+1)} + a_{n-k}y^{(k)} = Q(x) ,$$

kus $a_{n-k} \neq 0$ ja

$$Q(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m .$$

Siin võib tähistada $y^{(k)} = z$ ja võrrand omab kuju

$$z^{(n-k)} + a_1z^{(n-k-1)} + a_2z^{(n-k-2)} + \cdots + a_{n-k-1}z' + a_{n-k}z = Q(x) ,$$

mille lahendiks on samuti m-astme funktsioon

$$B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_{m-1}x + B_m .$$

Et siin z on m-astme funktsioon, siis võrrandist $y^{(k)} = z$ järeldub, et $\varphi(x)$ on siis $(m + k)$-astme funktsioon, mida võib esitada kujus

$$\varphi(x) = x^k(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_{m-1}x + B_m)\,,$$

kus $B_0, B_1, \ldots, B_m$ leitakse samuti määramata koefitsientide meetodi abil.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$y''' + y'' - y' - y = x^2 - 3x + 5$$

erilahendi

$$\varphi(x) = B_0x^2 + B_1x + B_2$$

saame, kui paigutame

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= B_0x^2 + B_1x + B_2 \\ \varphi'(x) &= 2B_0x + B_1 \\ \varphi''(x) &= 2B_0 \\ \varphi'''(x) &= 0 \end{aligned}$$

diferentsiaalvõrrandisse y, y', y'' ja y''' asemele, s. o.

$$2B_0 - (2B_0x + B_1) - (B_0x^2 + B_1x + B_2) = x^2 - 3x + 5$$

ehk

$$-B_0x^2 - (2B_0 + B_1)x + (2B_0 - B_1 - B_2) = x^2 - 3x + 5\,,$$

millest

$$\begin{aligned} -B_0 &= 1 \\ -2B_0 - B_1 &= -3 \\ 2B_0 - B_1 - B_2 &= 5\,, \end{aligned}$$

kust lahendades leiame, et

$$B_0 = -1\,, \quad B_1 = 5\,, \quad B_2 = -12\,.$$

Seega erilahend on

$$\varphi(x) = -x^2 + 5x - 12\,.$$

Et vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

ehk

$$(D+1)^2(D-1)y = 0$$

põhilahendid on e^x, e^{-x} ja xe^{-x}, siis antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = c_1e^x + e^{-x}(c_2 + c_3x) - x^2 + 5x - 12 .$$

2. Kui konstantsete koefitsientidega lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = Q(x)$$

parempoolne osa kujutab funktsiooni

$$e^{ax}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m) ,$$

kus a ei ole diferentsiaaloperaatori

$$D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

juur, siis diferentsiaalvõrrandi lahendiks on funktsioon

$$\varphi(x) = e^{ax}(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_{m-1}x + B_m) ,$$

kus B_0, B_1, ..., B_m tuleb leida määramata koefitsientide meetodiga.

Märgime siin

$$y = e^{ax}z ,$$

siis

$$\begin{aligned}
y' &= e^{ax}(z' + az)\\
y'' &= e^{ax}(z'' + 2az' + a^2z)\\
y''' &= e^{ax}(z''' + 3az'' + 3a^2z' + a^3z)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y^{(n)} &= e^{ax}\left(z^{(n)} + naz^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2z^{(n-1)} + \cdots + a^nz\right).
\end{aligned}$$

Asetades need väärtused diferentsiaalvõrrandisse y, y', y'', ..., $y^{(n)}$

asemele ja taandades võrrandi mõlemad pooled e^{ax}-ga, saame diferentsiaalvõrrandi

$$z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + b_2 z^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1} z' + b_n z = \\ = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m ,$$

kus $b_1, b_2, \ldots, b_n$ on konstantsed suurused ja

$$b_n = a^n + a_1 a^{n-1} + a_2 a^{n-2} + \cdots + a_{n-1} a + a_n .$$

Kui $b_n \neq 0$, s. o. kui a ei ole diferentsiaaloperaatori juur, siis viimase diferentsiaalvõrrandi lahendiks on

$$B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m$$

ja seega antud diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = \\ = e^{ax} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m)$$

lahendiks on

$$\varphi(x) = e^{ax} (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m) .$$

Kui aga a on diferentsiaaloperaatori juur, siis ei ole raske näha, et diferentsiaalvõrrandi lahendiks on funktsioon

$$\varphi(x) = x e^{ax} (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m)$$

ja k-kordse juure puhul

$$\varphi(x) = x^k e^{ax} (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m) ,$$

kus $B_0, B_1, \ldots, B_m$ leitakse samuti määramata koefitsientide meetodi abil.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$y''' + y'' - y' - y = e^{-x} (x^2 - 3x + 5)$$

ehk

$$(D+1)^2 (D-1) y = e^{-x} (x^2 - 3x + 5)$$

puhul on $a = -1$ ja diferentsiaaloperaatoril on sama arv kahekordseks juureks. Seega diferentsiaalvõrrandi erilahend $\varphi(x)$ esineb kujus

$$\varphi(x) = x^2 e^{-x}(B_0x^2 + B_1x + B_2)$$

ehk

$$\varphi(x) = e^{-x}(B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2)\,,$$

kusjuures

$$\varphi'\,(x) = e^{-x}[-B_0x^4 + (4B_0 - B_1)x^3 + (3B_1 - B_2)x^2 + 2B_2x]$$

$$\varphi''\,(x) = e^{-x}[B_0x^4 - (8B_0 - B_1)x^3 + (12B_0 - 6B_1 + B_2)x^2 + \\ + (6B_1 - 4B_2)x + 2B_2]$$

$$\varphi'''(x) = e^{-x}[-B_0x^4 + (12B_0 - B_1)x^3 - (36B_0 - 9B_1 + B_2)x^2 + \\ + (24B_0 - 18B_1 + 6B_2)x + 6B_1 - 6B_2]\,.$$

Paigutades $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ ja $\varphi'''(x)$ väärtused diferentsiaalvõrrandisse y, y', y'' ja y''' asemele saame

$$e^{-x}[-24B_0x^2 + (24B_0 - 12B_1)x + (6B_1 - 4B_2)] = \\ = e^{-x}(x^2 - 3x + 5)\,,$$

millest

$$\begin{aligned} -24B_0 &= 1 \\ 24B_0 - 12B_1 &= -3 \\ 6B_1 - 4B_2 &= 5\,, \end{aligned}$$

kust leiame, et

$$B_0 = -\frac{1}{24}\,, \quad B_1 = \frac{1}{6}\,, \quad B_2 = -1\,.$$

Diferentsiaalvõrrandi erilahend on seega

$$\varphi(x) = x^2 e^{-x}\left(-\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{6}x - 1\right)$$

ning üldlahend

$$y = c_1e^x + e^{-x}(c_2 + c_3x) + x^2e^{-x}\left(-\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{6}x - 1\right)$$

ehk

$$y = c_1e^x + e^{-x}\left(c_2 + c_3x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4\right).$$

3. Kui konstantsete koefitsientidega lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x)$$

parempoolne osa kujutab funktsiooni

$$e^{ax}(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m) \cos bx$$

või

$$e^{ax}(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m) \sin bx\,,$$

kus a ja b on niisugused, et $a + bi$ ei ole diferentsiaaloperaatori

$$D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

juur, siis analoogiliselt eelnevaga võime näidata, et diferentsiaalvõrrandi erilahend on

$$\varphi(x) = e^{ax}(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m) \cos bx + \\ + e^{ax}(D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \cdots + D_{m-1} x + D_m) \sin bx\,,$$

kus $B_0, B_1, \ldots, B_m$ ja $D_0, D_1, \ldots, D_m$ on määramata koefitsiendid.

Kui aga a ja b on niisugused, et $a + bi$ on diferentsiaaloperaatori juur, siis erilahend on

$$\varphi(x) = xe^{ax}(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m) \cos bx + \\ + xe^{ax}(D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \cdots + D_{m-1} x + D_m) \sin bx$$

ning k-kordse juure $a + bi$ puhul

$$\varphi(x) = x^k e^{ax}(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_{m-1} x + B_m) \cos bx + \\ + x^k e^{ax}(D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \cdots + D_{m-1} x + D_m) \sin bx\,.$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$y'' - 2y' + y = e^{-x}(x^2 + 1) \cos x$$

puhul, kus $m = 2$ ning $a = -1$ ja $b = 1$, on vastaval diferentsiaaloperaatoril kahekordne reaalne juur $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Seega erilahendi määrab funktsioon

$$\varphi(x) = e^{-x}(B_0x^2 + B_1x + B_2)\cos x + \\ + e^{-x}(D_0x^2 + D_1x + D_2)\sin x,$$

mille tuletised on

$$\varphi'(x) = e^{-x}[(-B_0 + D_0)x^2 + (2B_0 - B_1 + D_1)x + \\ + (B_1 - B_2 + D_2)]\cos x + e^{-x}[(-B_0 - D_0)x^2 + \\ + (-B_1 + 2D_0 - D_1)x + (-B_2 + D_1 - D_2)]\sin x,$$

$$\varphi''(x) = e^{-x}[-2D_0x^2 + (4D_0 - 2D_1)x + \\ + (2B_0 - 2B_1 + 2D_1 - 2D_2)]\cos x + e^{-x}[2B_0x^2 + \\ + (2B_0 - 4D_0)x + (-2B_0 + 2B_1 + 2D_0 - 2D_1)]\sin x.$$

Asetades võrrandisse y, y' ja y'' asemele $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ ja $\varphi''(x)$ väärtused, saame

$$[(3B_0 - 4D_0)x^2 + (-4B_0 + 3B_1 + 4D_0 - 4D_1)x + \\ + (2B_0 - 4B_1 + 3B_2 + 2D_1 - 4D_2)]\cos x + \\ + [(4B_0 + 3D_0)x^2 + (2B_0 + 2B_1 - 6D_0 + 3D_1)x + \\ + (-2B_1 + 4B_2 + 2D_0 - 4D_1 + 3D_2)]\sin x = \\ = (x^2 + 1)\cos x,$$

kust nüüd

$$(3B_0 - 4D_0)x^2 + (-4B_0 + 3B_1 + 4D_0 - 4D_1)x + \\ + (2B_0 - 4B_1 + 3B_2 + 2D_1 - 4D_2) = x^2 + 1$$

$$(4B_0 + 3D_0)x^2 + (2B_0 + 2B_1 - 6D_0 + 3D_1)x + \\ + (-2B_1 + 4B_2 + 2D_0 - 4D_1 + 3D_2) = 0,$$

ja seega

$$3B_0 - 4D_0 = 1$$

$$-4B_0 + 3B_1 + 4D_0 - 4D_1 = 0$$

$$2B_0 - 4B_1 + 3B_2 + 2D_1 - 4D_2 = 1$$

$$4B_0 + 3D_0 = 0$$
$$2B_0 + 2B_1 - 6D_0 + 3D_1 = 0$$
$$-2B_1 + 4B_2 + 2D_0 - 4D_1 + 3D_2 = 0\,,$$

mille lahendus annab

$$B_0 = \frac{3}{25}\,,\quad B_1 = -\frac{36}{425}\,,\quad B_2 = -\frac{667}{10625}\,,$$
$$D_0 = -\frac{4}{25}\,,\quad D_1 = -\frac{146}{425}\,,\quad D_2 = -\frac{3444}{10625}\,.$$

Diferentsiaalvõrrandi erilahend on seega

$$\varphi(x) = e^{-x}\left(\frac{3}{25}x^2 - \frac{36}{425}x - \frac{667}{10625}\right)\cos x +$$
$$+ e^{-x}\left(-\frac{4}{25}x^2 - \frac{146}{425}x - \frac{3444}{10625}\right)\sin x$$

ning üldlahend on

$$y = e^x(c_1 + c_2x) + \frac{e^{-x}}{10625}[(1275x^2 - 900x - 667)\cos x -$$
$$- (1700x^2 + 3650x + 3444)\sin x]\,.$$

§ 36. Diferentsiaalvõrrandi lahendamine ridade abil.

Diferentsiaalvõrrandi

$$F(x\,,\, y\,,\, y'\,,\, y''\,,\, \ldots\,,\, y^{(n)}) = 0$$

lahenduseks võime kasutada Taylori rida. Selleks tuleb leida niisugune funktsioon arendusreana, mis seda diferentsiaalvõrrandit rahuldaks.

Ilmutame diferentsiaalvõrrandi kõrgeima järgu tuletise suhtes, s. o.

$$y^{(n)} = f(x\,,\, y\,,\, y'\,,\, y''\,,\, \ldots\,,\, y^{(n-1)})\,,$$

ja vaatleme siin $y^{(n)}$-i kui $x\,,\, y\,,\, y'\,,\, y''\,,\, \ldots\,,\, y^{(n-1)}$ funktsiooni. Diferentsime viimast funktsiooni x-i suhtes

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}$$

ja paigutame $y^{(n)}$ asemele tema eespool-esineva väärtuse, saame

$$y^{(n+1)} = f_1(x\,,\, y\,,\, y'\,,\, y''\,,\, \ldots\,,\, y^{(n-1)})\,,$$

kus nüüd $y^{(n+1)}$ sõltub samadest suurustest x, y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$. Saadud funktsiooni edasi diferentsides

$$y^{(n+2)} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}$$

ja paigutades $y^{(n)}$ asemele ta väärtuse saame

$$y^{(n+2)} = f_2(x\,,\ y\,,\ y'\,,\ y''\,,\ \ldots,\ y^{(n-1)})\,,$$

kus $y^{(n+2)}$ sõltub jälle samadest suurustest x, y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$. Analoogiliselt jätkates leiame, et

$$\begin{aligned} y^{(n+3)} &= f_3(x\,,\ y\,,\ y'\,,\ y''\,,\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \\ y^{(n+4)} &= f_4(x\,,\ y\,,\ y'\,,\ y''\,,\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

kus $y^{(n+3)}$, $y^{(n+4)}$, ... sõltuvad ikka ainult suurustest x, y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$.

Kui vabalt võetava argumendi eriväärtuse $x = x_0$ puhul vastavad funktsiooni ja ta tuletiste väärtused on $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y'' = y_0''$, ..., $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, siis

$$\begin{aligned} y_0^{(n)} &= f\,(x_0\,,\ y_0\,,\ y_0'\,,\ y_0''\,,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}) \\ y_0^{(n+1)} &= f_1(x_0\,,\ y_0\,,\ y_0'\,,\ y_0''\,,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}) \\ y_0^{(n+2)} &= f_2(x_0\,,\ y_0\,,\ y_0'\,,\ y_0''\,,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Kasutades nüüd funktsiooni arendust Taylori reana, saame

$$\begin{aligned} y &= y_0 + (x - x_0) y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y_0'' + \frac{(x-x_0)^3}{3!} y_0''' + \cdots + \\ &+ \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} y_0^{(n-1)} + \frac{(x-x_0)^n}{n!} y_0^{(n)} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} y_0^{(n+1)} + \cdots = \\ &= y_0 + (x - x_0) y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y_0'' + \frac{(x-x_0)^3}{3!} y_0''' + \cdots + \\ &+ \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} y_0^{(n-1)} + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f(x_0\,,\ y_0\,,\ y_0'\,,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}) + \\ &+ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f_1(x_0\,,\ y_0\,,\ y_0'\,,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}) + \cdots, \end{aligned}$$

mille koonduvuse korral võime rida kasutada funktsiooni y arvutamiseks. Kindlate $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ puhul kujutab saadud rida diferentsiaalvõrrandi eriintegraali. Erijuhul, kui $x_0 = 0$, siis funktsioon esineb Mac-Laurini arendusreana. Kui aga vaadelda suurusi $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ kui parameetreid, siis saadud rida esitab diferentsiaalvõrrandi üldintegraali.

Kui näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + b^2 y = 0$$

puhul märgime, et $x_0 = 0$ ja vastavad funktsiooni ja ta tuletise väärtused on $y = y_0$ ja $y' = y_0'$, siis diferentsides saame

$$y''' = - b^2 y'$$

$$y^{(4)} = - b^2 y'' = b^4 y$$

$$y^{(5)} = b^4 y'$$

$$y^{(6)} = b^4 y'' = - b^6 y$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ja

$$y_0'' = - b^2 y_0$$

$$y_0''' = - b^2 y_0'$$

$$y_0^{(4)} = b^4 y_0$$

$$y_0^{(5)} = b^4 y_0'$$

$$y_0^{(6)} = - b^6 y_0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Paigutame $y_0'', y_0''', y_0^{(4)}, \ldots$ väärtused Mac-Laurini ritta

$$y = y_0 + x y_0' + \frac{x^2}{2!} y_0'' + \frac{x^3}{3!} y_0''' + \frac{x^4}{4!} y_0^{(4)} + \frac{x^5}{5!} y_0^{(5)} + \cdots,$$

saame

$$y = y_0 + x y_0' - \frac{b^2 x^2}{2!} y_0 - \frac{b^2 x^3}{3!} y_0' + \frac{b^4 x^4}{4!} y_0 +$$

$$+ \frac{b^4 x^5}{5!} y_0' - \ldots = y_0 \left[1 - \frac{(bx)^2}{2!} + \frac{(bx)^4}{4!} - \cdots \right] +$$

$$+ \frac{y_0'}{b} \left[(bx) - \frac{(bx)^3}{3!} + \frac{(bx)^5}{5!} - \cdots \right],$$

mis koondub iga x-i väärtuse puhul ja on sama, mis

$$y = y_0 \cos bx + \frac{y_0'}{b} \sin bx\,.$$

§ 37. Harjutusülesandeid.

Lahendada diferentsiaalvõrrandid:

164. $y''' - 27e^{3x} - 120x^3 = 0$

165. $y^{(5)} - xe^x = 0$

166. $y''' - x \ln x = 0$

167. $xy'' + y' - 3x - 1 = 0$

168. $xy^{(4)} - y''' - 2x^3 = 0$

169. $y''y^{(4)} - y''' = 0$

170. $y''' - 7y' + 6y = 0$

171. $y''' - 3y'' + 4y = 0$

172. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

173. $y^{(4)} - 4y''' + 3y'' + 4y' - 4y = 0$

174. $y^{(4)} - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0$

175. $y^{(4)} - y = 0$

176. $y''' + y'' - 7y' - 15y = 0$

177. $y''' + y'' - y' + 15y = 0$

178. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

179. $y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0$

180. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = x$

181. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = x + 4$

182. $y^{(4)} - 8y''' + 18y'' - 27y = 3x^2 + 5x + 8$

183. $y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$

184. $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$

185. $y^{(4)} - y = e^x$

186. $y''' + 2y'' - y' - 2y = x + e^x$

187. $y''' - 3y' + 2y = e^x(18x + 12)$

188. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{-x}(2x^2 + 5x + 8)$

189. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = e^{2x}(8x^2 + 15x + 23)$

190. $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x$

191. $y^{(4)} - y = xe^x + \cos x$

192. $y''' + \frac{1}{x} y'' + \frac{3}{x^2} y' - \frac{8}{x^3} y = 0$

193. $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0$

194. $x^2y'' + xy' + y = x$

195. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$.

IV peatükk.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemid.

§ 38. Diferentsiaalvõrrandite süsteemi määramine.

n diferentsiaalvõrrandit, milles n tundmata funktsiooni sõltuvad ühest ja samast argumendist, moodustavad diferentsiaalvõrrandite süsteemi. Näiteks kolme diferentsiaalvõrrandiga süsteem on

$$F_1(t\,,\, x\,,\, x'\,,\, x''\,,\, \ldots,\, x^{(n_1)},\, y\,,\, y'\,,\, y''\,,\, \ldots,\, y^{(m_1)},$$
$$z\,,\, z'\,,\, z''\,,\, \ldots,\, z^{(k_1)}) = 0$$
$$F_2(t\,,\, x\,,\, x'\,,\, x''\,,\, \ldots,\, x^{(n_2)},\, y\,,\, y'\,,\, y''\,,\, \ldots,\, y^{(m_2)},$$
$$z\,,\, z'\,,\, z''\,,\, \ldots,\, z^{(k_2)}) = 0$$
$$F_3(t\,,\, x\,,\, x'\,,\, x''\,,\, \ldots,\, x^{(n_3)},\, y\,,\, y'\,,\, y''\,,\, \ldots,\, y^{(m_3)},$$
$$z\,,\, z'\,,\, z''\,,\, \ldots,\, z^{(k_3)}) = 0\,,$$

kus t on argumendiks ning x, y ja z on t funktsioonideks.

Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemis peale argumendi ja tundmata funktsioonide esinevad ainult funktsioonide esimese järgu tuletised üksikult, siis nimetatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemi normaalsüsteemiks. Nii on

$$F_1(t\,,\, x\,,\, x',\, y\,,\, z) = 0$$
$$F_2(t\,,\, x\,,\, y\,,\, y',\, z) = 0$$
$$F_3(t\,,\, x\,,\, y\,,\, z\,,\, z') = 0$$

ehk tuletiste suhtes ilmutatult

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_3(t, x, y, z)$$

kolme diferentsiaalvõrrandiga normaalsüsteem.

Iga diferentsiaalvõrrandite süsteemi on ikka võimalik teisendada normaalsüsteemiks, kui asendada tundmata funktsioonide tuletised, peale kõrgeimate tuletiste, uute muutujatega ja lugeda need muutujad lisafunktsioonideks. Kui näiteks kolme diferentsiaalvõrrandiga süsteemis

$$F_1(t, x, x', x'', x''', y, y', y'', z, z') = 0$$

$$F_2(t, x, x', x'', y, y', y'', y''', z, z') = 0$$

$$F_3(t, x, x', x'', y, y', y'', z, z', z'') = 0$$

tähistame

$$x' = x_1, \quad x'' = x_1' = x_2, \quad x''' = x_2'$$

$$y' = y_1, \quad y'' = y_1' = y_2, \quad y''' = y_2'$$

$$z' = z_1, \quad z'' = z_1',$$

siis saame kaheksa diferentsiaalvõrrandiga ja kaheksa tundmata funktsiooniga (endiste ja lisafunktsioonidega) normaalsüsteemi

$$x' = x_1, \ x_1' = x_2, \ y' = y_1, \ y_1' = y_2, \ z' = z_1$$

$$F_1(t, x, x_1, x_2, x_2', y, y_1, y_2, z, z_1) = 0$$

$$F_2(t, x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, y_2', z, z_1) = 0$$

$$F_3(t, x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z, z_1, z_1') = 0$$

ehk ilmutatult

$$x' = x_1, \ x_1' = x_2, \ y' = y_1, \ y_1' = y_2, \ z' = z_1$$

$$x_2' = f_1(t, x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z, z_1)$$

$$y_2' = f_2(t, x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z, z_1)$$

$$z_1' = f_3(t, x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z, z_1),$$

kus $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z$ ja z_1 on t funktsioonid.

Sääraselt diferentsiaalvõrrandite süsteemist saadud normaalsüsteemis sisalduv võrrandite (kui ka kõikide tundmata funktsioonide) arv on ikka võrdne algsüsteemi funktsioonide kõrgeimate tuletiste järkude summaga. Kui n tundmata funktsiooniga diferentsiaalvõrrandite süsteemis nende funktsioonide kõrgeimate tuletiste järgud on $m_1, m_2, \ldots, m_n$, siis vastavas normaalsüsteemis on võrrandite kui ka funktsioonide arv $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. Käesoleval juhul x-i kõrgeima tuletise järk on 3, y kõrgeima tuletise järk on samuti 3 ja z-i kõrgeima tuletise järk on 2. Järelikult on normaalsüsteemi võrrandite arv 8.

§ 39. Normaalsüsteemi lahendamine.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendamisel tuleb leida niisugused argumendi funktsioonid, mis rahuldaksid süsteemi võrrandeid. Need funktsioonid moodustavad siis diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendite süsteemi. Et iga diferentsiaalvõrrandite süsteemi on ikka võimalik teisendada normaalsüsteemiks, siis selleks käsitleme käesolevas §-s ainult normaalsüsteemi lahendamisviisi.

1. Kahe tundmata funktsiooniga x ja y normaalsüsteemi

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y)$$

lahendamiseks taandame süsteemi üheks diferentsiaalvõrrandiks ühe tundmata funktsiooniga x või y. Selleks leiame $\frac{d^2x}{dt^2}$ või $\frac{d^2y}{dt^2}$. Võtame siin

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ja asendame parempoolses osas $\frac{dx}{dt}$ ja $\frac{dy}{dt}$ oma vastavate väärtustega $f_1(t, x, y)$ ja $f_2(t, x, y)$, saame

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_{11}(t, x, y).$$

Lahendades antud normaalsüsteemi võrrandid x ja y suhtes ning paigutades saadud x ja y väärtused viimasesse teise järgu diferentsiaalvõrrandisse x ja y asemele, saame ühe tundmata funktsiooniga teise järgu diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(t\,,\ x\,,\frac{dx}{dt}\,,\ \frac{d^2x}{dt^2}\right)=0\,,$$

mille üldlahend on

$$x=\varphi_1(t\,,\ c_1\,,\ c_2)\,.$$

Edasi leiame

$$\frac{dx}{dt}=\varphi_1{}'(t\,,\ c_1\,,\ c_2)$$

ja paigutame antud normaalsüsteemi esimesse võrrandisse x ja $\frac{dx}{dt}$ asemele nende vastavad väärtused $\varphi_1(t\,,\ c_1\,,\ c_2)$ ja $\varphi_1{}'(t\,,\ c_1\,,\ c_2)$, saame

$$y=\varphi_2(t\,,\ c_1\,,\ c_2)\,.$$

Seega kahe tundmata funktsiooniga x ja y normaalsüsteemi üldlahendite süsteemi määravad argumendi t ja kahe olulise parameetri c_1 ja c_2 funktsioonid

$$x=\varphi_1(t\,,\ c_1\,,\ c_2)$$

$$y=\varphi_2(t\,,\ c_1\,,\ c_2)\,.$$

2. n tundmata funktsiooniga $x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n$ normaalsüsteemi

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(t\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt}=f_2(t\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt}=f_n(t\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n)$$

lahendamiseks taandame süsteemi üheks n-järgu diferentsiaalvõrrandiks ühe tundmata funktsiooniga. Selleks leiame näiteks $\frac{dx_1}{dt}$ tuletised n-järguni. Diferentsides

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\,\frac{dx_n}{dt}$$

ja paigutades $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$ asemele normaalsüsteemist nende väärtused saame

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = f_{11}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Viimast funktsiooni diferentsides

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = \frac{\partial f_{11}}{\partial t} + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_{n}}{\partial x_3} \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f_{11}}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

ja samuti paigutades $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$ asemele normaalsüsteemist nende väärtused saame

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = f_{12}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Edasi leiame analoogiliselt toimides

$$\frac{d^4x_1}{dt^4} = f_{13}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = f_{1(n-1)}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Valime võrrandsüsteemist

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = f_{11}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = f_{12}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = f_{1(n-1)}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$n-1$ võrrandit, näiteks

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = f_{11}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = f_{12}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = f_{1(n-1)}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

lahendame need $x_2, x_3, \ldots, x_n$ suhtes

$$x_2 = f_{21}\left(t, x_1, \frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^3x_1}{dt^3}, \ldots, \frac{d^nx_1}{dt^n}\right)$$

$$x_3 = f_{22}\left(t, x_1, \frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^3x_1}{dt^3}, \ldots, \frac{d^nx_1}{dt^n}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = f_{2(n-1)}\left(t, x_1, \frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^3x_1}{dt^3}, \ldots, \frac{d^nx_1}{dt^n}\right)$$

ja paigutame saadud $x_2, x_3, \ldots, x_n$ väärtused diferentsiaalvõrrandisse

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$x_2, x_3, \ldots, x_n$ asemele, saame ühe tundmata funktsiooniga n-järgu diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \frac{d^2x_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx_1}{dt^n}\right) = 0,$$

mille üldlahend olgu

$$x_1 = \varphi_1(t, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Võttes tuletised

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1'(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \varphi_1''(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = \varphi_1^{(n)}(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

ja paigutades $x_1, \frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^3x_1}{dt^3}, \ldots, \frac{d^nx_1}{dt^n}$ väärtused $x_2, x_3, \ldots, x_n$ suhtes ilmutatud funktsioonidesse $f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2(n-1)}$, saame

$$x_2 = \varphi_2(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$x_3 = \varphi_3(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \varphi_n(t, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Seega määravad n tundmata funktsiooniga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ normaalsüsteemi üldlahendite süsteemi argumendi t ja n olulise parameetri $c_1, c_2, \ldots, c_n$ funktsioonid

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(t, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\
x_2 &= \varphi_2(t, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
x_n &= \varphi_n(t, c_1, c_2, \ldots, c_n),
\end{aligned}
$$

kusjuures mõnes neist funktsioonidest võib esineda vähem kui n parameetrit.

Andes parameetritele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ teatud kindlad väärtused, saame normaalsüsteemi erilahendite süsteemi [1].

Näiteks lineaarse normaalsüsteemi

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= t - x + y + z \\
\frac{dy}{dt} &= t + x + y + z \\
\frac{dz}{dt} &= t + x + y - z
\end{aligned}
$$

lahendamiseks leiame $\frac{d^2x}{dt^2}$ ja $\frac{d^3x}{dt^3}$, s. o.

$$
\frac{d^2x}{dt^2} = 1 - \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 1 + t + 3x + y - z
$$

$$
\frac{d^3x}{dt^3} = 1 + 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = 1 + 3t - 3x + 3y + 5z,
$$

kust

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{8}\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{5}{8}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{3}{2}x - t - \frac{3}{4} \\
z &= \frac{1}{8}\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{3}{8}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Paigutades saadud y ja z-i väärtused normaalsüsteemi esimesse võrrandisse saame konstantsete koefitsientidega kolmanda järgu

---

[1] Peale selle võivad diferentsiaalvõrrandite süsteemil olla veel iseärased lahendid, mille teooriat me siinkohal ei käsitle.

lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 4x = 2$$

ehk

$$(D + 1)(D + 2)(D - 2)x = 2\,,$$

mille üldlahend on

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{2t} - \frac{1}{2}\,.$$

Võttes tuletised

$$\frac{dx}{dt} = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t} + 2c_3e^{2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c_1e^{-t} + 4c_2e^{-2t} + 4c_3e^{2t}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -c_1e^{-t} - 8c_2e^{-2t} + 8c_3e^{2t}$$

ja paigutades x, $\frac{d^2x}{dt^2}$ ja $\frac{d^3x}{dt^3}$ väärtused eespool-esinevatesse y ja z-i suhtes ilmutatud funktsioonidesse, saame

$$y = -c_1e^{-t} + 2c_3e^{2t} - t$$

$$z = c_1e^{-t} - c_2e^{-2t} + c_3e^{2t} - \frac{1}{2}\,.$$

Tähendab, antud normaalsüsteemi üldlahendite süsteemi määravad argumendi t ja kolme olulise parameetri c_1, c_2 ja c_3 funktsioonid

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{2t} - \frac{1}{2}$$

$$y = -c_1e^{-t} + 2c_3e^{2t} - t$$

$$z = c_1e^{-t} - c_2e^{-2t} + c_3e^{2t} - \frac{1}{2}\,.$$

3. n tundmata funktsiooniga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ normaalsüsteemi

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n)$$

lahendamiseks võime mõnikord süsteemi võrrandeid teatavate tehete abil korraldada nõnda, et neist saaksime uue võrrandi kujus

$$\frac{d}{dt}\Big[\psi_1(t\,,\;x_1\,,\;x_2\,,\;\ldots\,,\;x_n)\Big]=0$$

ehk

$$d\psi_1(t\,,\;x_1\,,\;x_2\,,\;\ldots\,,\;x_n)=0\,,$$

kus ψ_1 on normaalsüsteemis esinevatest tundmata funktsioonidest ja argumendist kombineeritud funktsioon. Siis

$$\psi_1(t\,,\;x_1\,,\;x_2\,,\;\ldots\,,\;x_n)=c_1\,,$$

kus c_1 on parameetriks. Viimane võrrand on normaalsüsteemi ü h e k s i n t e g r a a l i k s. Ilmutades sellest võrrandist ühe tundmata funktsiooni ja asetades tema väärtuse normaalsüsteemi võrranditesse, saame normaalsüsteemis tundmata funktsioonide kui ka võrrandite arvu vähendada ühe võrra, s. o. saame $n-1$ diferentsiaalvõrrandiga normaalsüsteemi.

Kui aga n tundmata funktsiooniga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ normaalsüsteemi võrrandeid on võimalik teatavate tehete abil korraldada nõnda, et saaksime normaalsüsteemi k a k s i n t e g r a a l i

$$\psi_1(t\,,\;x_1\,,\;x_2\,,\;\ldots\,,\;x_n)=c_1$$

ja

$$\psi_2(t\,,\;x_1\,,\;x_2\,,\;\ldots\,,\;x_n)=c_2\,,$$

mis ei sõltu teineteisest, s. o. mis ei ole omavahel funktsionaalses seoses, siis saame nende asendamisel n diferentsiaalvõrrandiga normaalsüsteemi muuta $n-2$ diferentsiaalvõrrandiga normaalsüsteemiks.

Kui n tundmata funktsiooniga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ normaalsüsteemist on võimalik saada kõik n i n t e g r a a l i

$$\begin{aligned}
&\psi_1(t\,,\;x_1\,,\;x_2\,,\;\ldots\,,\;x_n)=c_1\\
&\psi_2(t\,,\;x_1\,,\;x_2\,,\;\ldots\,,\;x_n)=c_2\\
&\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\\
&\psi_n(t\,,\;x_1\,,\;x_2\,,\;\ldots\,,\;x_n)=c_n\,,
\end{aligned}$$

mis on üksteisest sõltumatud, siis seega antud n diferentsiaalvõrrandiga normaalsüsteem on ühtlasi lahendatud, kusjuures viimastest võrranditest võime leida üldlahendite süsteemi kujus

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ x_2 &= \varphi_2(t, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n &= \varphi_n(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)\,. \end{aligned}$$

Näiteks normaalsüsteemi

$$\frac{dx}{dt} = y - z\,, \quad \frac{dy}{dt} = z - x\,, \quad \frac{dz}{dt} = x - y$$

võrrandeid liites saame

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0$$

ehk

$$d(x + y + z) = 0\,,$$

kust leiame süsteemi ühe integraali

$$x + y + z = C_1\,.$$

Korrutades antud normaalsüsteemi esimese võrrandi x-ga, teise y-ga ja kolmanda z-ga ning viimaseid liites saame

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0$$

ehk

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 0\,;$$

millest leiame süsteemi teise integraali

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2\,.$$

Et nüüd

$$y + z = C_1 - x\,,\quad y^2 + z^2 = C_2 - x^2$$

ja

$$(C_1 - x)^2 = (y + z)^2 = y^2 + z^2 + 2yz = (C_2 - x^2) + 2yz\,,$$

millest

$$2yz = (C_1 - x)^2 - (C_2 - x^2)\,,$$

siis

$$(y - z)^2 = y^2 + z^2 - 2yz = 2(C_2 - x^2) - (C_1 - x)^2$$

ja

$$y - z = \sqrt{2(C_2 - x^2) - (C_1 - x)^2}$$

ehk

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(C_2 - x^2) - (C_1 - x)^2}\,,$$

mille integraal

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2(C_2 - x^2) - (C_1 - x)^2}} + C_3 = C_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{C_1 - 3x}{\sqrt{2(3C_2 - C_1^2)}}$$ [1],

millest

$$x = \frac{C_1}{3} - \frac{\sqrt{2(3C_2 - C_1^2)}}{3} \sin\left(C_3\sqrt{3} - t\sqrt{3}\right)$$

ehk

$$x = c_1 + c_2 \cos t\sqrt{3} + c_3 \sin t\sqrt{3}\,,$$

kus

$$c_1 = \frac{C_1}{3}\,,\quad c_2 = -\frac{\sqrt{2(3C_2 - C_1^2)}}{3} \sin C_3\sqrt{3}\,,$$

$$c_3 = \frac{\sqrt{2(3C_2 - C_1^2)}}{3} \cos C_3\sqrt{3}\,.$$

---

[1] Vt. A. Borkvell, Matemaatilise analüüsi põhijooned, § 78, p. j.

Teised funktsioonid y ja z leiame võrranditest

$$y + z = C_1 - x, \quad y^2 + z^2 = C_2 - x^2,$$

paigutades x-i asemele tema väärtuse.

§ 40. Üldine lahendamisviis.

1. Kahe diferentsiaalvõrrandiga süsteemi

$$F_1(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n_1)}, y, y', y'', \ldots, y^{(m_1)}) = 0$$
$$F_2(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n_2)}, y, y', y'', \ldots, y^{(m_2)}) = 0$$

lahendamiseks teisendame selle süsteemi üheks diferentsiaalvõrrandiks, kõrvaldades süsteemist funktsiooni x ja ta tuletised või funktsiooni y ja viimase tuletised. Kõrvaldame näiteks y. Funktsiooni y ja ta tuletiste kõrvaldamise otstarbel diferentsime esimest võrrandit m_2 korda ja teist võrrandit m_1 korda. Siis saame $m_1 + m_2 + 2$ diferentsiaalvõrrandit, milles peale argumendi t ning funktsiooni x ja ta tuletiste esinevad veel

$$y, y', y'', \ldots, y^{(m_1+m_2)}.$$

Et diferentsiaalvõrrandite arv on $m_1 + m_2 + 2$ ning y ja ta tuletiste arv on $m_1 + m_2 + 1$, siis on ikka võimalik y ja tema tuletisi kõrvaldada neist võrranditest. Selleks lahendame neist võrranditest $m_1 + m_2 + 1$ võrrandit $m_1 + m_2 + 1$ tundmatuga y, y', y'', $\ldots$, $y^{(m_1+m_2)}$ viimaste suhtes, s. o.

$$\begin{aligned}
y &= f(t, x, x', x'', \ldots) \\
y' &= f_1(t, x, x', x'', \ldots) \\
y'' &= f_2(t, x, x', x'', \ldots) \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
y^{(m_1+m_2)} &= f_{m_1+m_2}(t, x, x', x'', \ldots),
\end{aligned}$$

ja paigutame saadud y, y', y'', $\ldots$, $y^{(m_1+m_2)}$ väärtused süsteemi ülejäänud $(m_1 + m_2 + 2)$-se võrrandisse, saame

$$F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

kus n on võrdne suuremaga arvudest $n_1 + m_2$ või $n_2 + m_1$. Inteegrides leiame

$$x = \varphi_1(t, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Võttes vajaliku arvu viimase funktsiooni tuletisi

$$x' = \varphi_1'(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
$$x'' = \varphi_1''(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

ja paigutades võrrandisse

$$y = f(t, x, x', x'', \ldots)$$

$x, x', x'', \ldots$ asemele nende väärtused saame

$$y = \varphi_2(t, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Kahe antud diferentsiaalvõrrandiga süsteemi üldlahendite süsteemi määravad seega argumendi t ja oluliste parameetrite $c_1, c_2, \ldots, c_n$ funktsioonid

$$x = \varphi_1(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
$$y = \varphi_2(t, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

2. Kolme diferentsiaalvõrrandiga süsteemi

$$F_1(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n_1)}, y, y', y'', \ldots, y^{(m_1)}, z, z', z'', \ldots, z^{(k_1)}) = 0$$

$$F_2(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n_2)}, y, y', y'', \ldots, y^{(m_2)}, z, z', z'', \ldots, z^{(k_2)}) = 0$$

$$F_3(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n_3)}, y, y', y'', \ldots, y^{(m_3)}, z, z', z'', \ldots, z^{(k_3)}) = 0$$

lahendamisel tuleb vaadata, mitu korda peab diferentsima esimest, teist ja kolmandat võrrandit, et neist siis oleks võimalik kõrvaldada kaks tundmata funktsiooni ühes nende tuletistega, et saada üht diferentsiaalvõrrandit ühe tundmata funktsiooniga. Kui näiteks kõrvaldada süsteemist y ja z ning nende tuletised, siis selleks vaatame, kumb arvudest $m_2 + k_3$ ja $m_3 + k_2$ on suurem, mis näitab, mitu korda tuleb diferentsida esimest võrrandit; samuti vaatame, kumb arvudest $m_1 + k_3$ ja $m_3 + k_1$ on suurem, mis näitab, mitu korda tuleb diferentsida teist võrrandit, ja lõpuks vaatame, kumb arvudest $m_1 + k_2$ ja $m_2 + k_1$ on suurem, mis näitab, mitu korda tuleb diferentsida kolmandat võrrandit.

Saades diferentsimisel küllaldase arvu diferentsiaalvõrrandeid, võime neist kõrvaldada y ja z ning nende tuletised ja saada ühe diferentsiaalvõrrandi ühe tundmata funktsiooniga x, kusjuures nüüd edaspidine lahendamise käik on analoogiline eespooltoodud käsitlusviisiga.

Analoogilise võttega võime lahendada üldse n diferentsiaalvõrrandiga ja n tundmata funktsiooniga süsteemi.

§ 41. Lineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteem.

1. Funktsioonide $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja nende tuletiste suhtes homogeensete lineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} + P_{11}(t)x_1 + P_{12}(t)x_2 + \cdots + P_{1n}(t)x_n = 0 \\
&\frac{dx_2}{dt} + P_{21}(t)x_1 + P_{22}(t)x_2 + \cdots + P_{2n}(t)x_n = 0 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&\frac{dx_n}{dt} + P_{n1}(t)x_1 + P_{n2}(t)x_2 + \cdots + P_{nn}(t)x_n = 0,
\end{aligned}$$

kus $P_{11}(t), \ldots, P_{nn}(t)$ on mistahes t funktsioonid, üldlahendite süsteemi võime leida ka tema erilahendite süsteemide kaudu.

Kui homogeensete diferentsiaalvõrrandite süsteemi erilahendite süsteemid on

$$x_1 = x_{k1}, \quad x_2 = x_{k2}, \quad \ldots, \quad x_n = x_{kn},$$

kus $k=1, 2, \ldots, n$, siis selle süsteemi lahendite süsteemi määravad funktsioonid

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \cdots + c_n x_{1n} \\
x_2 &= c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \cdots + c_n x_{2n} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \cdots + c_n x_{nn} ,
\end{aligned}
$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on mistahes konstantsed suurused. Sest asetades funktsioonide $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja nende vastavate tuletiste väärtused antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi mistahes võrrandisse, näeme, et süsteemi iga võrrand on sel puhul ikka rahuldatud. Järelikult funktsioonid

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \cdots + c_n x_{1n} \\
x_2 &= c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \cdots + c_n x_{2n} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \cdots + c_n x_{nn}
\end{aligned}
$$

esitavad siis homogeensete diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendite süsteemi.

Siin erilahendite süsteemid

$$x_{k1}, \quad x_{k2}, \quad \ldots, \quad x_{kn},$$

kus $k=1, 2, \ldots, n$, nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks, kui nad ei ole seotud samasustega

$$
\begin{aligned}
c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \cdots + c_n x_{1n} &= 0 \\
c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \cdots + c_n x_{2n} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \cdots + c_n x_{nn} &= 0 ,
\end{aligned}
$$

kus vabalt võetud konstantsed suurused $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ei ole kõik korraga võrdsed 0-ga. Vastasel korral oleksid erilahendite süsteemid lineaarselt sõltuvad.

Kui erilahendite süsteemid

$$x_{k1}, \quad x_{k2}, \quad \ldots, \quad x_{kn},$$

kus $k = 1, 2, \ldots, n$, on lineaarselt sõltuvad, siis on determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

Kui oletaksime, et $\Delta \neq 0$ ja erilahendite süsteemid on siiski lineaarselt sõltuvad, siis

$$\begin{aligned} c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \cdots + c_n x_{1n} &= 0 \\ c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \cdots + c_n x_{2n} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \cdots + c_n x_{nn} &= 0 . \end{aligned}$$

Sel juhul, kui näiteks $c_n \neq 0$, võime märkida

$$\begin{aligned} x_{1n} &= b_1 x_{11} + b_2 x_{12} + \cdots + b_{n-1} x_{1(n-1)} \\ x_{2n} &= b_1 x_{21} + b_2 x_{22} + \cdots + b_{n-1} x_{2(n-1)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{nn} &= b_1 x_{n1} + b_2 x_{n2} + \cdots + b_{n-1} x_{n(n-1)} , \end{aligned}$$

kus

$$b_1 = -\frac{c_1}{c_n}, \quad b_2 = -\frac{c_2}{c_n}, \quad \ldots, \quad b_{n-1} = -\frac{c_{n-1}}{c_n} .$$

Paigutades need $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$ väärtused determinandi viimasesse veergu vastavate elementide asemele, saame determinandi kujus

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1(n-1)}, & b_1 x_{11} + b_2 x_{12} + \cdots + b_{n-1} x_{1(n-1)} \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2(n-1)}, & b_1 x_{21} + b_2 x_{22} + \cdots + b_{n-1} x_{2(n-1)} \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{n(n-1)}, & b_1 x_{n1} + b_2 x_{n2} + \cdots + b_{n-1} x_{n(n-1)} \end{vmatrix} ,$$

mis on aga determinantide omaduste põhjal võrdne 0-ga. Seega oletus on vale. Järelikult, kui $\Delta \neq 0$, siis erilahendite süsteemid ei saa olla lineaarselt sõltuvad, vaid nad on lineaarselt sõltumatud.

Nagu ühe homogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi puhul lahend

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n ,$$

kus erilahendid $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on lineaarselt sõltumatud, esitab üldlahendit, sisaldades ühtlasi kõiki diferentsiaalvõrrandi lahendeid, nii esitab ka homogeensete lineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteemi puhul lahendite süsteem

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \cdots + c_n x_{1n} \\ x_2 &= c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \cdots + c_n x_{2n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \cdots + c_n x_{nn} , \end{aligned}$$

kus erilahendite süsteemid

$$x_{k1}, \quad x_{k2}, \quad \ldots, \quad x_{kn} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

on lineaarselt sõltumatud, üldlahendite süsteemi, sisaldades ühtlasi kõiki diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendite süsteeme.

2. Mittehomogeensete lineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} + P_{11}(t)x_1 + P_{12}(t)x_2 + \cdots + P_{1n}(t)x_n = Q_1(t) \\ &\frac{dx_2}{dt} + P_{21}(t)x_1 + P_{22}(t)x_2 + \cdots + P_{2n}(t)x_n = Q_2(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{dx_n}{dt} + P_{n1}(t)x_1 + P_{n2}(t)x_2 + \cdots + P_{nn}(t)x_n = Q_n(t) \end{aligned}$$

võime lahendada kvadratuuride abil, kui on teada vastava homogeensete diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} + P_{11}(t)x_1 + P_{12}(t)x_2 + \cdots + P_{1n}(t)x_n = 0 \\ &\frac{dx_2}{dt} + P_{21}(t)x_1 + P_{22}(t)x_2 + \cdots + P_{2n}(t)x_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{dx_n}{dt} + P_{n1}(t)x_1 + P_{n2}(t)x_2 + \cdots + P_{nn}(t)x_n = 0 \end{aligned}$$

üldlahendite süsteem

$$x_1 = c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \cdots + c_n x_{1n}$$

$$x_2 = c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \cdots + c_n x_{2n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \cdots + c_n x_{nn}.$$

Mittehomogeensete diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendamiseks asendame siin c_1, c_2, ..., c_n niisuguste t funktsioonidega $c_1(t)$, $c_2(t)$, ..., $c_n(t)$, et

$$x_1 = c_1(t) x_{11} + c_2(t) x_{12} + \cdots + c_n(t) x_{1n}$$

$$x_2 = c_1(t) x_{21} + c_2(t) x_{22} + \cdots + c_n(t) x_{2n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = c_1(t) x_{n1} + c_2(t) x_{n2} + \cdots + c_n(t) x_{nn}$$

esitaks mittehomogeensete diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldlahendite süsteemi. Diferentsime viimaseid funktsioone

$$\frac{dx_1}{dt} = c_1(t) \frac{dx_{11}}{dt} + c_2(t) \frac{dx_{12}}{dt} + \cdots + c_n(t) \frac{dx_{1n}}{dt} +$$
$$+ c_1'(t) x_{11} + c_2'(t) x_{12} + \cdots + c_n'(t) x_{1n}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = c_1(t) \frac{dx_{21}}{dt} + c_2(t) \frac{dx_{22}}{dt} + \cdots + c_n(t) \frac{dx_{2n}}{dt} +$$
$$+ c_1'(t) x_{21} + c_2'(t) x_{22} + \cdots + c_n'(t) x_{2n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = c_1(t) \frac{dx_{n1}}{dt} + c_2(t) \frac{dx_{n2}}{dt} + \cdots + c_n(t) \frac{dx_{nn}}{dt} +$$
$$+ c_1'(t) x_{n1} + c_2'(t) x_{n2} + \cdots + c_n'(t) x_{nn}$$

ja asetame x_1, x_2, ..., x_n kui ka vastavad $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ..., $\frac{dx_n}{dt}$ väärtused mittehomogeensete diferentsiaalvõrrandite süsteemi,

saame

$$
\begin{aligned}
&c_1'(t)x_{11} + c_2'(t)x_{12} + \cdots + c_n'(t)x_{1n} = Q_1(t) \\
&c_1'(t)x_{21} + c_2'(t)x_{22} + \cdots + c_n'(t)x_{2n} = Q_2(t) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&c_1'(t)x_{n1} + c_2'(t)x_{n2} + \cdots + c_n'(t)x_{nn} = Q_n(t) ,
\end{aligned}
$$

sest et

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_{1k}}{dt} + P_{11}x_{1k} + P_{12}x_{2k} + \ldots + P_{1n}x_{nk} = 0 \\
&\frac{dx_{2k}}{dt} + P_{21}x_{1k} + P_{22}x_{2k} + \ldots + P_{2n}x_{nk} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{dx_{nk}}{dt} + P_{n1}x_{1k} + P_{n2}x_{2k} + \ldots + P_{nn}x_{nk} = 0 ,
\end{aligned}
$$

kus $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}$ on homogeensete diferentsiaalvõrrandite süsteemi lineaarselt sõltumatud erilahendite süsteemid. Et siin

$$
\begin{vmatrix}
x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n} \\
x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{nn}
\end{vmatrix} \neq 0 ,
$$

siis lahendades võrrandsüsteemi

$$
\begin{aligned}
&c_1'(t)x_{11} + c_2'(t)x_{12} + \cdots + c_n'(t)x_{1n} = Q_1(t) \\
&c_1'(t)x_{21} + c_2'(t)x_{22} + \cdots + c_n'(t)x_{2n} = Q_2(t) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&c_1'(t)x_{n1} + c_2'(t)x_{n2} + \cdots + c_n'(t)x_{nn} = Q_n(t)
\end{aligned}
$$

$c_1'(t), c_2'(t), \ldots, c_n'(t)$ suhtes leiame

$$
c_1'(t) = \psi_1(t) , \quad c_2'(t) = \psi_2(t) , \quad \ldots, \quad c_n'(t) = \psi_n(t) ,
$$

kust inteegrides saame

$$c_1(t) = \int \psi_1(t)\,dt + c_1$$

$$c_2(t) = \int \psi_2(t)\,dt + c_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n(t) = \int \psi_n(t)\,dt + c_n\,.$$

Mittehomogeensete lineaarsete difereentsiaalvõrrandite süsteemi üldlahendite süsteemi määravad seega funktsioonid

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{11}\int \psi_1(t)\,dt + x_{12}\int \psi_2(t)\,dt + \cdots + x_{1n}\int \psi_n(t)\,dt + \\
&\quad + c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n} \\
x_2 &= x_{21}\int \psi_1(t)\,dt + x_{22}\int \psi_2(t)\,dt + \cdots + x_{2n}\int \psi_n(t)\,dt + \\
&\quad + c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= x_{n1}\int \psi_1(t)\,dt + x_{n2}\int \psi_2(t)\,dt + \cdots + x_{nn}\int \psi_n(t)\,dt + \\
&\quad + c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_nx_{nn}
\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(t) + c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n} \\
x_2 &= \varphi_2(t) + c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= \varphi_n(t) + c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_nx_{nn}\,,
\end{aligned}$$

kui tähistame

$$\begin{aligned}
x_{11}\int \psi_1(t)\,dt + x_{12}\int \psi_2(t)\,dt + \cdots + x_{1n}\int \psi_n(t)\,dt &= \varphi_1(t) \\
x_{21}\int \psi_1(t)\,dt + x_{22}\int \psi_2(t)\,dt + \cdots + x_{2n}\int \psi_n(t)\,dt &= \varphi_2(t) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\
x_{n1}\int \psi_1(t)\,dt + x_{n2}\int \psi_2(t)\,dt + \cdots + x_{nn}\int \psi_n(t)\,dt &= \varphi_n(t)\,.
\end{aligned}$$

§ 42. Harjutusülesandeid.

Lahendada võrrandsüsteemid:

196. $\frac{dx}{dt} + 5x - 3y = 0$

$\frac{dy}{dt} + 15x - 7y = 0$

197. $\frac{dx}{dt} - \frac{y^2}{x} = 0$

$\frac{dy}{dt} - \frac{x^2}{y} = 0$

198. $\frac{dx}{dt} - \frac{x^2}{y} = 0$

$\frac{dy}{dt} - \frac{y^2}{x} = 0$

199. $\frac{dx}{dt} - y = 0$

$\frac{dy}{dt} - x = e^t + e^{-t}$

200. $\frac{dx}{dt} - 4x - y = -36t$

$\frac{dy}{dt} + 2x - y = -2e^t$

201. $\frac{dx}{dt} + 2x + 4y = 4t + 1$

$\frac{dy}{dt} + x - y = \frac{3}{2}t^2$

202. $\frac{dx}{dt} - y - z = 0$

$\frac{dy}{dt} - x - z = 0$

$\frac{dz}{dt} - x - y = 0$

203. $\frac{dx}{dt} + x - y - z = 0$

$\frac{dy}{dt} - x + y - z = 0$

$\frac{dz}{dt} - x - y - z = 0$

204. $\frac{dx}{dt} - 3x + y - z = 0$

$\frac{dy}{dt} + x - 5y + z = 0$

$\frac{dz}{dt} - x + y - 3z = 0$

205. $\frac{dx}{dt} - yz = 0$

$\frac{dy}{dt} - xz = 0$

$\frac{dz}{dt} - \frac{xz^2}{y} = 0$

206. $\frac{dx}{dt} + 2x - 3y - 4z = -3t$

$\frac{dy}{dt} + 6x - 7y - 6z = -7t + 1$

$\frac{dz}{dt} - x + y - z = t$

207. $\frac{dx}{dt} + x + y = t^2$

$\frac{dy}{dt} + y + z = 2t$

$\frac{dz}{dt} + z = t$

208. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4y = 0$

$\frac{d^2y}{dt^2} - 4x = 0$

209. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4x = 0$

$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 4y = 0$

210. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 4x + 12 = 0$

$\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} - y + 7 = 0$

211. $$\frac{d^2x}{dt^2} - y - z = 0$$
$$\frac{dy}{dt} + yz - t^2 = 0$$
$$\frac{d^3z}{dt^3} + xt = 0$$

212. $$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0\,.$$

Ülesannete vastused.

§ 18.

1. $2e^x + y^2 = c$.
2. $x^2 + y^2 = c$.
3. $y = cx$.
4. $y^2 = cx$.
5. $y = ce^{\frac{x^2}{2}}$.
6. $(x - a)^2 + y^2 = c$.
7. $x \ln (y - a) = cx + 1$.
8. $2x\sqrt{1 + y} = cx - 1$.
9. $x - y + \ln xy = c$.
10. $\ln (y - 1) + \operatorname{arc\,tan} x = c$.
11. $\operatorname{arc\,tan} x - \operatorname{arc\,tan} y = c$ ehk $\frac{x - y}{1 + xy} = C$.
12. $(1 + x^2)(1 + y^2) = c$.
13. $\frac{x^2 - 2}{y^2 + 2} = c$.
14. $x = cye^{-y}$.
15. $y = \frac{2}{1 - cx}$.
16. $\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,sin} y = c$ ehk $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = C$.
17. $\frac{x + y}{xy} + \ln \frac{y}{x} = c$.

18. $x - y - \ln (a + x)^a y^b = c$.

19. $x^2 e^{x^2}(y^2 - 1) = c$.

20. $y^2 - 2 \ln (1 + e^x) = c$.

21. $\frac{1 + x^2}{1 + e^y} = c$.

22. $\cos x \cos y = c$.

23. $\sin x \cos y = c$.

24. $y = ce^{\tan \frac{x}{2}}$.

25. $x^2 - y^2 + x\sqrt{1 + x^2} + y\sqrt{1 + y^2} +$
$$+ \ln (x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = c.$$

26. $y = \left(c \pm \frac{x\sqrt{x}}{12}\right)^2$.

27. $y = ce^{\sqrt{1 + x^2}}$.

28. $\left(x^2 + y^2 - 2x + \frac{1}{8} - c\right)\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{8} - c\right) = 0$.

29. $\left(y - \frac{c}{x}\right)\left(y - \frac{c}{x^2}\right) = 0$.

30. $x(x - 2y) = c$.

31. $\ln (x^2 + y^2) - 2 \arctan \left(\frac{y}{x}\right) = c$.

32. $(x - y)(x + y)^3 = c$.

33. $(x + y)^2(2x + y)^3 = c$.

34. $x^2 + y^2 = cx$.

35. $\frac{y^2}{2x^2} + \ln x = c$.

36. $\ln x - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2y - x}{x\sqrt{3}}\right) = c$.

37. $x = (x + y) \ln cx$.

38. $xy^2 = c(2y - x)$.

39. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = c$.

40. $c^2x^2 - 2cy - 1 = 0$.

41. $x^3 + y^3 = cxy$.

42. $y^2 = 2x^2 \ln cx$.

43. $\ln cx + e^{-\frac{y}{x}} = 0$.

44. $y = xe^{1+cx}$.

45. $(x + y)\ln x - xe^{\frac{y}{x}} = c$.

46. $x^2 - xy + y^2 + x - y = c$.

47. $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = c$.

48. $(y - x - 3)(5y - 2x - 9)^2 = c$.

49. $x + 5y + 2 = c(x - y + 2)^4$.

50. $x - 3y + 8 \ln (x - 2y + 1) = c$.

51. $2x - 3y + 8 \ln (x - 2y + 1) = c$.

52. $7x - 14y - 3 \ln (14x + 21y - 1) = c$.

53. $y = a + c\sqrt{1 - x^2}$.

54. $y = (1 + x^2)(x + c)$.

55. $y = e^{2x}(e^x + c)$.

56. $y = x^2(c - \ln x)$.

57. $2y = (x + 1)^4 + c(x + 1)^2$.

58. $y = e^x\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{c}{x}$.

59. $y = e^x \left(\ln x + \frac{x^2}{2} + c\right)$.

60. $y = e^{-x^2}\left(\frac{x}{2} + c\right)$.

61. $y = ce^{ax} + \frac{\sin x - a \cos x}{a^2 + 1}$.

62. $y = \frac{\sin x + c}{1 + x}$.

63. $y = \frac{\sin^2 x + c}{2 \cos x}$.

64. $y = \sin x + c \cos x$.

65. $y = \tan \frac{x(x + c)}{2}$.

66. $y = \sin x - 1 + ce^{-\sin x}$.

67. $3y = 2 \tan x(3 - \sin^2 x) + \frac{c}{\cos x}$.

68. $y = \frac{c - \cos x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

69. $y = \operatorname{arc\,tan} x - 1 + ce^{-\operatorname{arc\,tan} x}$.

70. $y = (x + \sqrt{1 + x^2})(\operatorname{arc\,sin} x + c)$.

71. $y^2 \left(ce^{4x} + \frac{1}{2}\right) = 1$.

72. $xy(c - \ln x) = 1$.

73. $y\left(c - \int e^{-x^2}dx\right) = e^{-x^2}$.

74. $y = \frac{2\sqrt{1 + x^2}}{c - x\sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$.

75. $4ye^{2x^2} = (x^2 + c)^2$.

76. $y = \left(\frac{\ln \cos x + c}{x} + \tan x\right)^2$.

77. $\ln(\sin x) - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos^2 x}{y} + c = 0$.

78. $y^3(3 \cos^{10} x + 10c) - 10 \cos^9 x = 0$.

79. $\frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^3}{3} = c$.

80. $x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3} y^3 = c$.

81. $xe^y - y^2 = c$.

82. $3x - \frac{x^2 + 1}{y} = c$.

83. $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$.

84. $\mu = e^x; \quad e^x(x^2 + y^2) = c$.

85. $\mu = y^2; \quad x^2y^3 + \frac{y^5}{5} = c$.

86. $\mu = \frac{1}{1+x^2}$; $xy + \operatorname{arc}\tan x = c$.

87. $\mu = e^{ax}$; $y = ce^{-ax} + \frac{e^{bx}}{a+b}$.

88. $\mu = x$; $x^2(1+2xy) = c$.

89. $\mu = \frac{1}{y^2}$; $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c$.

90. $\mu = \frac{1}{y}$; $xy - \ln y = c$.

91. $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$; $x^2 + y^2 - cxy - a^2 = 0$.

92. $\mu = \frac{1}{y^2}$; $x^2y + \frac{1}{y} = c$.

93. $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$; $\frac{\ln^2 x}{2} - \frac{1}{xy} = c$.

94. $\mu = \cos x$; $y \cos x - \frac{1}{2}\sin x \cos x - \frac{x}{2} = c$.

95. $\mu = e^x$; $e^x(x \sin y + y \cos y - \sin y) = c$.

96. $\begin{cases} x = 2p + \frac{4p^3}{3} + c \\ y = p^2 + p^4. \end{cases}$

97. $\begin{cases} x = 4p^3 - 3p^2 + 2p \\ y = 3p^4 - 2p^3 + p^2 + c. \end{cases}$

98. $\begin{cases} x = p^2 + p + 1 \\ y = \frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{2}p + c. \end{cases}$

99. $y^2 = c(2x - c)$.

100. $y = cx + c^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$.

101. $y = cx + \frac{1}{c}$; $y^2 = 4x$.

102. $y = cx + a\sqrt{1+c^2}$; $x^2 + y^2 = a^2$.

103. $y = cx + \sqrt{1-c^2}$; $y^2 - x^2 = 1$.

104. $y = cx - \frac{1}{c^2}; \quad y^3 = -\frac{27}{4} x^2 .$

105. $y = (\sqrt{x+1} + c)^2; \quad y = 0 .$

106. $y = cx - e^c ; \quad y = x(\ln x - 1) .$

107. $y = c^2 + cx - \frac{x^2}{4}; \quad y = -\frac{x^2}{2} .$

108. $y = 2\sqrt{c(c-x)} .$

109. $y = c(x+1) - c^2; \quad y = \frac{(x+1)^2}{4} .$

110. $y = c(x-c)^2; \quad y = \frac{4}{27} x^3 .$

111. $y = ce^x + \frac{1}{c} ; \quad y^2 = 4e^x .$

112. $y = cx \pm \sqrt{1-c^2}; \quad y^2 - x^2 = 1 .$

113. $y = x .$

114. $x^2 + y^2 - 2Cx = 0 .$

115. $y^2 = 2(C - x) .$

116. $x^2 - y^2 = C .$

117. $ye^x = C .$

118. $x^2 + y^2 - 2Cy + 1 = 0 .$

119. $(x^2 + y^2)^2 - C(x^2 - y^2) = 0 .$

120. $(x^2 + y^2)^2 - C(2x^2 + y^2) = 0 .$

121. $(x^2 + y^2)^2 - 2Cxy = 0 .$

122. $y = c\sqrt[a]{e^x} .$

123. Parabool parameetriga $p = \frac{c}{2}$.

124. $y^2 = 2cx + c^2 .$

125. $y^2 = cx .$

126. $x = cy + \frac{a^2}{y} .$

127. 60 min.

128. 4,6 min.

129. $133\frac{1}{3}$ m/sek.

130. 3,92 m.

§ 27.

131. $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1 x + c_2$.

132. $y = \frac{1}{12}(x + c_1)^3 + c_2$.

133. $x = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln \frac{\sqrt{c_1 + ae^y} - \sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1 + ae^y} + \sqrt{c_2}} + c_2$.

134. $y = c_1 e^{c_2 x}$.

135. $y = \frac{x + c_1}{x + c_2}$.

136. $4c_1(y - c_1) = (x - c_2)^2$.

137. $y = c_1 e^x + c_2 e^{6x}$.

138. $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-5x}$.

139. $y = e^{6x}(c_1 + c_2 x)$.

140. $y = e^{-3x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$.

141. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

142. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{7}{4}$.

143. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x$.

144. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{9} x - \frac{11}{54}$.

145. $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x) + \frac{1}{4} x^3 + \frac{3}{4} x^2 + \frac{7}{8} x + 1$.

146. $y = e^{2x}\left(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2}\right)$.

147. $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{10} e^{2x} + \frac{1}{2} x - 1$.

148. $y = c_1 e^x + c_2 e^{6x} + \frac{5}{74} \sin x + \frac{7}{74} \cos x$.

149. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{8} \cos x$.

150. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{4}(1 + x) \sin x$.

151. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \cos x \cdot \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$.

152. $y = \frac{1}{x^2}(c_1 x + c_2)$.

153. $y = c_1(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c_2(x - \sqrt{x^2 - 1})$.

154. $y = e^x(c_1 x^4 + c_2 x^{-2})$.

155. $y = c_1 e^x + c_2(x + 1)$.

156. $y = x\left(c_1 + c_2 \ln x + \frac{x^2}{4}\right)$.

157. $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) + \frac{1}{2} x$.

158. $y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{1}{2} ax + \frac{b}{12x}$.

159. $y = c_1 x + c_2(x^3 - 2) + \frac{1}{3} x^5 + 2x^2$.

160. $v = \frac{mv_0}{m + kv_0 t}$; $s = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{k}{m} v_0 t\right)$.

161. $s\sqrt{\frac{k}{m}} + \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m} s^2} = v_0 e^{t\sqrt{\frac{k}{m}}}$.

162. $v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$; $s = \frac{g}{k}\left(t - \frac{1 - e^{-kt}}{k}\right)$.

163. $s = \frac{m^2 g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) + \frac{mg}{k} t$.

§ 37.

164. $y = e^{3x} + x^6 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$.

165. $y = xe^x - 5e^x + c_1 x^4 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5$.

166. $y = \frac{x}{24}\left(\ln x - \frac{1}{12}\right) + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$.

167. $y = \frac{3}{4} x^2 + x + c_1 \ln x + c_2 .$

168. $y = \frac{1}{120} x^6 + \frac{c_1}{24} x^4 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_3 x + c_4 .$

169. $y = c_2 e^{c_1 x} + c_3 x + c_4 .$

170. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x} .$

171. $y = c_1 e^{-x} + e^{2x}(c_2 + c_3 x) .$

172. $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) .$

173. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x}(c_3 + c_4 x) .$

174. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x .$

175. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x .$

176. $y = c_1 e^{3x} + e^{-2x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x) .$

177. $y = c_1 e^{-3x} + e^x (c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x) .$

178. $y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x .$

179. $y = (c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x + c_5 x + c_6 .$

180. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{1}{6} x - \frac{11}{36} .$

181. $y = c_1 + c_2 x + e^{-x}(c_3 + c_4 x) + \frac{1}{6} x^3 + x^2 .$

182. $y = c_1 e^{-x} + e^{3x}(c_2 + c_3 x + c_4 x^2) - \frac{1}{9} x^2 - \frac{5}{27} x - \frac{4}{9} .$

183. $y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + x^3 .$

185. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x e^x .$

186. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x e^x - \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} .$

187. $y = e^x (c_1 + c_2 x + x^2 + x^3) + c_3 e^{-2x} .$

188. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - e^{-x} \frac{36x^2 + 168x + 299}{432} .$

189. $y = c_1 e^{3x} + e^{2x} \left(c_2 + c_3 x - 27x^2 - \frac{31}{6} x^3 - \frac{2}{3} x^4 \right) .$

191. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x + \frac{ex}{8}(x^2 - 3x) - \frac{x}{4}\sin x$.

192. $y = c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x) + c_3x^2$.

193. $y = (c_1 + c_2\ln x)x + \frac{c_3}{x}$.

194. $y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) + \frac{x}{2}$.

195. $y = x(c_1 + c_2x + c_3\ln x) + \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2}x\ln^2 x$.

§ 42.

196. $x = e^t(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t)$

$y = e^t[(2c_1 + c_2)\cos 3t + (2c_2 - c_1)\sin 3t]$.

197. $x = \sqrt{c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}}$

$y = \sqrt{c_1e^{2t} - c_2e^{-2t}}$.

198. $x = \frac{1}{c_1e^t + c_2e^{-t}}$

$y = \frac{1}{-c_1e^t + c_2e^{-t}}$.

199. $x = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}t(e^t - e^{-t})$

$y = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}t(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

200. $x = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + 6t - e^t - 1$

$y = -2c_1e^{2t} - c_2e^{3t} + 12t + 3e^t + 10$.

201. $x = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} + t^2 + 1$

$y = -c_1e^{2t} + \frac{1}{4}c_2e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2$.

202. $x = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$

$y = c_1e^{2t} + c_3e^{-t}$

$z = c_1e^2 - (c_2 + c_3)e^{-t}$.

203. $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$

$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - c_3 e^{-2t}$

$z = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$.

204. $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t}$

$y = c_2 e^{3t} - 2c_3 e^{6t}$

$z = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t}$.

205. $x^2 + y^2 = c_1$

$z = c_2 y$

$\frac{1}{2c_2\sqrt{c_1}} \ln \frac{x - \sqrt{c_1}}{x + \sqrt{c_1}} - t = c_3$.

206. $x = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$

$y = c_1 e^{t} + 3c_3 e^{3t} + t$

$z = c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t}$.

207. $x = e^{-t}(c_1 t^2 + c_2 t + c_3) + t^2 - 3t + 3$

$y = e^{-t}(-2c_1 t - c_2) + t$

$z = 2c_1 e^{-t} + t - 1$.

210. $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t + 3$

$y = 5c_1 \sin t - 5c_2 \cos t + 4c_3 \sin 2t - 4c_4 \cos 2t + 7$.