TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Tanel Kipper

# Daugaveti ja $\Delta$-punktid Banachi ruumides – ühtne vaatenurk

Matemaatika eriala
Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad : Märt Põldvere
Rainis Haller
Kati Ain

Tartu 2021

## Daugaveti ja $\Delta$-punktid Banachi ruumides – ühtne vaatenurk

Magistritöö

Tanel Kipper

**Lühikokkuvõte.** Magistritöös vaadeldakse järgmisi mõisteid: Daugaveti punktid ja $*$-nõrgad Daugaveti punktid ning $\Delta$-punktid ja $*$-nõrgad $\Delta$-punktid Banachi ruumides. Need mõisted kujutavad endast vastavalt Daugaveti omaduse ning diametraalse lokaalse diameeter-2 omaduse lokaliseeringuid. Töö põhitulemus on üks geomeetriline teoreem, millest järelduvad nimetatud nelja tüüpi punktide tuntud kirjeldused. Abitulemusena põhiteoreemi tõestuse tarvis tõestatakse üldisem versioon hästituntud Ivahno ja Kadetsi lemmast viilude sisalduvuse kohta.

**CERCS teaduseriala:** P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
**Märksõnad:** Banachi ruumid, ühikkera viilud Banachi ruumides, nõrk topoloogia, Daugaveti omadus, diameeter-2 omadused

## Daugavet and $\Delta$-points in Banach spaces – a unified approach

Magistritöö

Tanel Kipper

**Abstract.** In this Master's thesis, the following notions have been considered: Daugavet points and weak* Daugavet points, and $\Delta$-points and weak* $\Delta$-points in Banach spaces. These notions are localisations of the Daugavet property and the diametral local diameter-2 property, respectively. The main result of this thesis is a geometric theorem which implies known characterisations of the aforementioned four types of points. As an auxiliary result for the proof of the main theorem, a more general version of a well-known lemma of Ivakhno and Kadets on inclusion of slices is proven.

**CERCS research specialisation:** P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
**Key words:** Banach spaces, slices of unit ball in Banach spaces, weak topology, Daugavet property, diameter-2 properties

# Sisukord

# Sissejuhatus

Aastal 1963 tõestas I. Daugavet [Д], et iga kompaktse operaatori $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$ korral

$$\|I + T\| = 1 + \|T\|. \tag{D}$$

Aastal 1965 üldistasid C. Foiaş ja I. Singer [FS] Daugaveti tulemuse teatavale ruumi $C[0,1]$ hõlmavale ruumide $C(K)$ klassile ning näitasid, et nimetatud klassi ruumide puhul kehtib võrdus (D) koguni iga vaadeldavas ruumis tegutseva nõrgalt kompaktse operaatori puhul. Aastal 1966 laiendas G. Lozanovski [Л] Daugaveti tulemuse ruumile $L_1[0,1]$, tõestades, et iga ruumis $L_1[0,1]$ tegutsev kompaktne operaator $T$ rahuldab võrdust (D).

Nimetatud Daugaveti tulemuse järgi on võrdusele (D) hakatud kirjanduses viitama kui *Daugaveti võrdusele.* Aastal 2000 tõestasid V. Kadets, R. Shvydkoy, G. Sirotkin ja D. Werner [KShSW, teoreem 2.3], et kui iga mingis Banachi ruumis tegutsev ühemõõtmeline operaator rahuldab Daugaveti võrdust – s.t vastavalt artiklis [KShSW] sissetoodud terminoloogiale sellel ruumil on *Daugaveti omadus* – siis rahuldab Daugaveti võrdust koguni iga selles ruumis tegutsev nõrgalt kompaktne operaator (vt teoreemi 1.4 allpool). Samas artiklis anti Daugaveti omadusele kirjeldus [KShSW, lemmad 2.1 ja 2.2] (vt ka [W, lemmad 2.2 ja 2.4 ning järeldus 2.3]), mis kasutab ainult ruumi $X$ (ja kaasruumi $X^*$) termineid (vt teoreemi 1.6 allpool) – erinevalt (Daugaveti omaduse) definitsioonist, mis on esitatud ruumis $X$ tegutsevate operaatorite terminites.

Aastal 2013 tõid T.A. Abrahamsen, V. Lima ja O. Nygaard [ALN, definitsioon 1.1] sisse Banachi ruumi *diameeter-*2 *omadused* (vt definitsiooni 1.5 allpool) – nn "suurte viilude" omadused – (vt nt kirjeid [2]–[7], [15] ja [16] artikli [ALN] kirjanduse loetelus). Aastal 2018 tõid J. Becerra Guerrero, G. Lópes-Pérez, A. Rueda Zoca [BLR$^{18}$] sisse diameeter-2 omaduste *diametraalsed versioonid* (vt definitsiooni 1.6 allpool), mis sisuliselt olid kirjanduses esinenud ka juba varem. Neist *diametraalne lokaalne diameeter-*2 *omadus* oli varem artiklites [IK] ning [AHNTT] ja [ALNT] esinenud teiste nimetuste all. Artiklis [BLR$^{18}$] püstitatud küsimusele – kas *diametraalne tugev diameeter-*2 *omadus* on tegelikult sama, mis Daugaveti omadus? – vastas aastal 2021 jaatavalt V. Kadets [K]. Aastal 2020 tõid T.A. Abrahamsen, R. Haller, V. Lima ja K. Pirk [AHLP] sisse *Daugaveti punkti* ja *Δ-punkti* mõisted, lokaliseerides sellega vastavalt Daugaveti omaduse ja diametraalse lokaalse diameeter-2 omaduse mõisted: *Banachi ruumil on Daugaveti omadus parajasti siis, kui iga tema ühiksfääri punkt on Daugaveti punkt, ning diametraalne lokaalne diameeter-*2 *omadus parajasti siis, kui iga tema ühiksfääri punkt on Δ-punkt.*

Käesoleva magistritöö põhieesmärk on anda Daugaveti punktidele ja Δ-punktidele ning nende mõistete duaalsetele versioonidele – $*$-nõrkadele Daugaveti punktidele ja $*$-nõrkadele Δ-punktidele – ühtne käsitlus. Täpsemalt, töö eesmärk on tõestada teoreem 2.1, millest järelduvad vastavalt nimetatud nelja tüüpi punkte kirjeldavad laused 1.10–1.13 (millest omakorda järelduvad vastavalt Daugaveti omadust ja diametraalset diameeter-2 omadust kirjeldavad teoreemid 1.6 ja 1.8). Seejuures abitulemusena teoreemi 2.1 tõestuse tarvis tõestatakse hästituntud Ivahno–Kadetsi lemmat [IK, lemma 2.1] üldistav lemma 2.3.

Töö koosneb kahest paragrahvist. Esimeses paragrahvis esitatakse töös kasutatavad põhimõisted ja vajalikud taustateadmised. Käsitletavad teemad on ühikkera viilud, nõrgad topoloogiad Banachi ruumis, Daugaveti omadus, diameeter-2 omadused ning Daugaveti ja $\Delta$-punktid; samuti esitatakse üks edasises vajaminev Hahn–Banachi eraldamisteoreem. Igale nimetatud teemadest on pühendatud omaette jaotis. Teise paragrahvi esimeses jaotises sõnastatakse magistritöö põhiteoreem 2.1 ning näidatakse, kuidas sellest järelduvad laused 1.10–1.13, teises jaotises tõestatakse paar abitulemust teoreemi 2.1 tõestuse tarvis, kolmandas tõestatakse teoreem 2.1, neljandas tõestatakse see teoreem alternatiivse tõestusskeemi kaudu ning viiendas tõestatakse Ivahno–Kadetsi lemmat [IK, lemma 2.1] üldistav lemma 2.3.

Kõikjal magistritöös on $X$ mittetriviaalne reaalne Banachi ruum (mittetriviaalsuse all mõistetakse siin, et $X \neq \{0\}$, s.t $X$ ei ole nullruum). Töös kasutatakse Banachi ruumide teooriale omaseid standardseid tähistusi. Ruumi $X$ ühiksfääri ja kinnist ühikkera tähistatakse vastavalt sümbolitega $S_X$ ja $B_X$, s.t

$$S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\} \quad \text{ja} \quad B_X := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Ruumi $X$ kaasruumi tähistatakse sümboliga $X^*$, s.t $X^*$ on pidevate lineaarsete funktsionaalide $x^* : X \to \mathbb{R}$ Banachi ruum, kus funktsionaali $x^*$ norm on defineeritud võrdusega $\|x^*\| := \sup\limits_{x \in B_X} |x^*(x)|$. Ruumi $X$ ühikoperaatorit tähistatakse sümboliga $I_X$ või lihtsalt $I$, s.t $I : X \ni x \mapsto x \in X$. Kui $B$ on ruumi $X$ alamhulk ning $\tau$ on mingi lokaalselt kumer topoloogia ruumil $X$, siis hulga $B$ $\tau$-sulundit tähistatakse sümboliga $\overline{B}^\tau$; seejuures hulga $B$ sulundit normi topoloogias tähistatakse lihtsalt $\overline{B}$. Hulga $B$ lineaarset katet, kumerat katet ja $\tau$-kinnist kumerat katet tähistatakse vastavalt sümbolitega $\operatorname{span} B$, $\operatorname{co} B$ ja $\overline{\operatorname{co}}^\tau B$, s.t $\operatorname{span} B$, $\operatorname{co} B$ ja $\overline{\operatorname{co}}^\tau B$ on vastavalt vähimad hulga $B$ vektoralamruum, kumer alamhulk ja $\tau$-kinnine kumer alamhulk, mis sisaldavad hulka $B$. Seejuures hulga $B$ kinnist kumerat katet normi topoloogias tähistatakse lihtsalt $\overline{\operatorname{co}}\, B$. Märgime, et $\overline{\operatorname{co}}^\tau B = \overline{\operatorname{co} B}^\tau$ ja $\overline{\operatorname{co}}\, B = \overline{\operatorname{co} B}$. Ruumi $X$ topoloogilist kaasruumi topoloogia $\tau$ suhtes ehk, teisisõnu, lokaalselt kumera ruumi $(X, \tau)$ topoloogilist kaasruumi tähistatakse sümboliga $(X, \tau)'$ või, kui topoloogia $\tau$ roll on kontekstist selge, siis lihtsalt $X'$, s.t $(X, \tau)'$ on $\tau$-pidevate lineaarsete funktsionaalide $X \to \mathbb{R}$ vektorruum.

Üleskirjutuste lihtsustamise eesmärgil samastame me sageli Banachi ruumi sisestuse tema teise kaasruumi selle ruumi endaga, kirjutades ruumi $X$ ja selle ruumi elemendi $x$ puhul $j_X(X)$ ja $j_X x$ asemel lihtsalt vastavalt $X$ ja $x$, kus $j_X : X \to X^{**}$ on loomulik sisestus, s.t kõikide $x \in X$ ja $x^* \in X^*$ korral $(j_X x)(x^*) = x^*(x)$.

Kui $Y$ on mingi Banachi ruum üle sama korpuse, mis $X$ (ehk siis antud konkreetsel juhul üle korpuse $\mathbb{R}$, s.t $Y$ on reaalne Banachi ruum), ning $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$, siis operaator $x^* \otimes y \colon X \to Y$ on defineeritud võrdusega

$$(x^* \otimes y)(x) = x^*(x)\, y, \quad x \in X.$$

Lineaarse operaatori $T \colon X \to Y$ kujutusruumi tähistame sümboliga $\operatorname{ran} T$ ja tuuma sümboliga $\ker T$.

# 1 Vajalikke eelteadmisi

Meenutame, et kõikjal käesolevas töös on $X$ mittetriviaalne reaalne Banachi ruum.

## 1.1 Ühikkera viilu mõiste

**Definitsioon 1.1.** Kui $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$, siis hulka

$$S(x^*, \alpha) := \{x \in B_X \colon x^*(x) > 1 - \alpha\},$$

nimetatakse ühikkera $B_X$ *viiluks.* Seejuures, kui $\Gamma$ on kaasruumi $X^*$ vektoralamruum ja $x^* \in \Gamma$, siis viilule $S(x^*, \alpha)$ viidatakse kui $\Gamma$-*viilule.*

Märgime, et ühikkera viil on alati mittetühi hulk. Tõepoolest, olgu $x^* \in S_{X^*}$ ning olgu $\alpha > 0$. Kuna $\sup\{x^*(x) \colon x \in B_X\} = \|x^*\| = 1$, siis leidub $x \in B_X$ nii, et $x^*(x) > 1 - \alpha$, aga see tähendab, et $x \in S(x^*, \alpha)$.

**Lemma 1.1.** *Olgu $y^* \in X^* \setminus \{0\}$ ning olgu $c < \|y^*\|$. Siis hulk*

$$S := \{x \in B_X : y^*(x) > c\}$$

*on ühikkera $B_X$ viil. Seejuures, kui $\Gamma$ on kaasruumi $X^*$ vektoralamruum ja $y^* \in \Gamma$, siis $S$ on ühikkera $B_X$ $\Gamma$-viil.*

TÕESTUS. Mis tahes $x \in X$ korral

$$y^*(x) > c \iff \frac{y^*}{\|y^*\|}(x) > \frac{c}{\|y^*\|} \iff \frac{y^*}{\|y^*\|}(x) > 1 - \left(1 - \frac{c}{\|y^*\|}\right),$$

seega, kui defineerida $x^* := \frac{y^*}{\|y^*\|}$ ja $\alpha := 1 - \frac{c}{\|y^*\|}$, siis $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$, kusjuures $S = \{x \in B_X \colon x^*(x) > 1 - \alpha\} = S(x^*, \alpha)$. Seejuures, kui $\Gamma$ on kaasruumi $X^*$ vektoralamruum ja $y^* \in \Gamma$, siis $x^* \in S_\Gamma$ ning seega $S$ on ühikkera $B_X$ $\Gamma$-viil. $\square$

**Definitsioon 1.2.** Kui $x \in S_X$ ja $\alpha > 0$, siis hulka

$$S(x, \alpha) := \{x^* \in B_{X^*} \colon x^*(x) > 1 - \alpha\},$$

nimetatakse (kaasruumi $X^*$) ühikkera $B_{X^*}$ $*$-*nõrgaks viiluks.*

Teisisõnu, (kaasruumi $X^*$) ühikkera $B_{X^*}$ $*$-nõrk viil on ühikkera $B_{X^*}$ $\Gamma$-viil, kus $\Gamma = X$ või, täpsemalt, $\Gamma = j_X(X)$, kus $j_X \colon X \to X^{**}$ on loomulik sisestus – kirjutades $\Gamma = X$, samastame me vastavalt sissejuhatuses kirjeldatud konventsioonile ruumi $X$ tema teise kaasruumi $X^{**}$ alamruumiga $j_X(X)$.

## 1.2 Nõrgad topoloogiad Banachi ruumis

Olgu $\Gamma \subset X^*$ vektoralamruum. Meenutame, et *(nõrgaks) topoloogiaks* $\sigma(X,\Gamma)$ ruumil $X$ nimetatakse vähimat topoloogiat (ruumil $X$), mille suhtes kõik funktsionaalid $x^* \in \Gamma$ on pidevad. Punkti $x \in X$ ümbruste baasiks topoloogias $\sigma(X,\Gamma)$ on näiteks kogum $\{U_{x;x_1^*,\dots,x_n^*;\varepsilon}\colon n \in \mathbb{N},\ x_1^*,\dots,x_n^* \in \Gamma,\ \varepsilon > 0\}$, kus

$$U_{x;x_1^*,\dots,x_n^*;\varepsilon} := \big\{z \in X\colon |x_i^*(x) - x_i^*(z)| < \varepsilon \text{ iga } i \in \{1,\dots,n\} \text{ korral}\big\}.$$

(Nõrk) topoloogia $\sigma(X,\Gamma)$ on lokaalselt kumer topoloogia. Märgime, et ruumi $X$ elementide pere $(x_\alpha)$ koonduvus elemendiks $x \in X$ topoloogias $\sigma(X,\Gamma)$ tähendab, et iga funktsionaali $x^* \in \Gamma$ korral koondub väärtuste pere $\big(x^*(x_\alpha)\big)$ väärtuseks $x^*(x)$, s.t

$$x_\alpha \underset{\alpha}{\to} x \text{ topoloogias } \sigma(X,\Gamma) \quad \iff \quad x^*(x_\alpha) \underset{\alpha}{\to} x^*(x) \text{ iga } x^* \in \Gamma \text{ korral.}$$

Ruumi $X$ topoloogiline kaasruum topoloogia $\sigma(X,\Gamma)$ suhtes $\big(X,\sigma(X,\Gamma)\big)' = \Gamma$ (vt nt [M, lk 207, teoreem 2.4.11]).

Topoloogiat $w := \sigma(X,X^*)$ nimetatakse *nõrgaks topoloogiaks* (ruumil $X$). Nõrga topoloogia elementidele viidatakse kui *nõrgalt lahtistele alamhulkadele.*

**Teoreem 1.2** (Mazuri teoreem; vt nt [M, lk 216, teoreem 2.5.16])**.** *Ruumi $X$ kumera alamhulga sulund normi topoloogias ja nõrgas topoloogias on samad. Niisiis, ruumi $X$ kumer alamhulk on normi topoloogias kinnine parajasti siis, kui ta on nõrgas topoloogias kinnine.*

Topoloogiat $w^* := \sigma(X^*,X)$ (või, täpsemalt, $w^* := \sigma\big(X^*, j_X(X)\big)$, kus $j_X\colon X \to X^{**}$ on ruumi $X$ loomulik sisestus teise kaasruumi $X^{**}$ – üleskirjutuses $\sigma(X^*,X)$ me samastame vastavalt sissejuhatuses kirjeldatud konventsioonile ruumi $X$ tema loomuliku sisestusega $j_X(X) \subset X^{**}$) nimetatakse *$*$-nõrgaks topoloogiaks* (kaasruumil $X^*$).

Magistritöös vaadeldakse ühikkera $B_X$ suhtelist nõrka topoloogiat, s.t topoloogiat $\{U \cap B_X\colon U \in w\}$. Selle topoloogia elementidele viidatakse kui ühikkera $B_X$ *suhteliselt nõrgalt lahtistele alamhulkadele.*

Jaotises 1.4 on diametraalse diameeter-2 omaduse definitsiooni analüüsides mugav viidata järgmisele lausele.

**Lause 1.3.** *Kui ruum $X$ on lõpmatumõõtmeline, siis ühikkera $B_X$ mis tahes mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk $W$ lõikab ühiksfääri $S_X$, s.t $W \cap S_X \neq \emptyset$.*

Tõestus. Eeldame, et ruum $X$ on lõpmatumõõtmeline. Olgu $W$ ühikkera $B_X$ mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk ning olgu $z \in W$ selline, et $\|z\| < 1$.

Hulga $W$ lahtisuse tõttu (ühikkera $B_X$ suhtelises nõrgas topoloogias) leiduvad $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ ja $\varepsilon > 0$ nii, et

$$z \in \big\{u \in B_X \colon |x_i^*(u - z)| < \varepsilon \text{ iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral}\big\} \subset W.$$

Fikserime vabalt $y \in \left(\bigcap_{i=1}^n \ker x_i^*\right) \setminus \{0\}$ (selline $y$ leidub, sest ruum $X$ esitub otsesummana $X = F \oplus \bigcap_{i=1}^n \ker x_i^*$, kus alamruum $F$ on ülimalt $n$-mõõtmeline, ning seega ruumi $X$ lõpmatumõõtmelisuse tõttu $\bigcap_{i=1}^n \ker x_i^* \neq \{0\}$) ja vaatleme funktsiooni

$$\phi \colon [0, \infty) \ni t \longmapsto \|z + ty\| \in \mathbb{R}.$$

Kuna $\phi(0) = \|z\| < 1$ ja $\phi(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ (sest iga $t > 0$ korral $\phi(t) \geqslant t\|y\| - \|z\|$, kusjuures $t\|y\| - \|z\| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$), siis Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest leidub $t > 0$ nii, et $\phi(t) = 1$. Aga nüüd $u := z + ty \in W \cap S_X$. Tõepoolest, $u \in W$, sest iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$x_i^*(u) = x_i^*(z + ty) = x_i^*(z) + t x_i^*(y) = x_i^*(z),$$

ning $\|u\| = \|z + ty\| = \phi(t) = 1$. □

## 1.3 Daugaveti omadus

Olgu $Y$ reaalne Banachi ruum.

**Definitsioon 1.3.** Öeldakse, et pidev lineaarne operaator $T \colon X \to Y$ on

- *ühemõõtmeline,* kui tema kujutisruum $\{Tx \colon x \in X\}$ on ruumi $Y$ ühemõõtmeline alamruum;
- *kompaktne,* kui ta kujutab ruumi $X$ kinnise ühikkera (normi topoloogias) suhteliselt kompaktseks hulgaks ruumis $Y$, s.t hulk $\{Tx \colon x \in B_X\}$ on (normi topoloogias) suhteliselt kompaktne hulk ruumis $Y$;
- *nõrgalt kompaktne,* kui ta kujutab ruumi $X$ kinnise ühikkera nõrgas topoloogias suhteliselt kompaktseks hulgaks ruumis $Y$, s.t hulk $\{Tx \colon x \in B_X\}$ on nõrgas topoloogias suhteliselt kompaktne hulk ruumis $Y$.

Funktsionaalanalüüsi põhikursusest teame, et iga ühemõõtmeline operaator $T \colon X \to Y$ esitub kujul $T = x^* \otimes y$, kus $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ ja $y \in Y \setminus \{0\}$ ning

$$x^* \otimes y \colon X \ni x \mapsto x^*(x)\, y \in Y.$$

Märgime, et operaatori $x^* \otimes y$ norm

$$\|x^* \otimes y\| = \|x^*\|\,\|y\|$$

ja kaasoperaator

$$(x^* \otimes y)^* = y \otimes x^* \colon Y^* \to X^*$$

(või, täpsemalt, $(x^* \otimes y)^* = j_Y y \otimes x^* \colon Y^* \to X^*$, kus $j_Y \colon Y \to Y^{**}$ on ruumi $Y$ loomulik sisestus teise kaasruumi $Y^{**}$ – üleskirjutuses $y \otimes x^*$ me samastame vastavalt sissejuhatuses kirjeldatud konventsioonile elemendi $y \in Y$ tema loomuliku sisestusega $j_Y y \in Y^{**}$), kus

$$(y \otimes x^*)\, y^* = (j_Y y \otimes x^*)\, y^* = (j_Y y)(y^*)\, x^* = y^*(y)\, x^*, \qquad y^* \in Y^*.$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \|x^* \otimes y\| &= \sup_{x \in B_X} \|(x^* \otimes y)\, x\| = \sup_{x \in B_X} \|x^*(x)\, y\| \\ &= \sup_{x \in B_X} |x^*(x)|\, \|y\| = \Big( \sup_{x \in B_X} |x^*(x)| \Big) \|y\| = \|x^*\|\, \|y\| \end{aligned}$$

ning mis tahes $y^* \in Y^*$ ja $x \in X$ korral

$$\begin{aligned} \big((x^* \otimes y)^*\, y^*\big)(x) &= y^*\big((x^* \otimes y)\, x\big) = y^*\big(x^*(x)\, y\big) = x^*(x)\, y^*(y) = \big(y^*(y)\, x^*\big)(x) \\ &= \big((y \otimes x^*)\, y^*\big)(x), \end{aligned}$$

järelikult $(x^* \otimes y)^*\, y^* = (y \otimes x^*)\, y^*$ ja seega $(x^* \otimes y)^* = y \otimes x^*$.

**Märkus.** Nii ühemõõtmeliste, kompaktsete ja nõrgalt kompaktsete operaatorite definitsioon 1.3 kui ka eelmises lõigus ühemõõtmeliste operaatorite kohta kirjutatu jääb sõna-sõnalt samaks, kui eeldada, et $X$ ja $Y$ on kompleksed Banachi ruumid.

**Definitsioon 1.4** (vt [KShSW] või [W, definitsioon 2.1])**.** Öeldakse, et ruumil $X$ on Daugaveti omadus, kui iga ühemõõtmelise operaatori $T \colon X \to X$ korral

$$\|I + T\| = 1 + \|T\|. \tag{1.1}$$

Funktsionaalanalüüsi põhikursuses käsitletavatest ruumidest on Daugaveti omadus ruumidel $C[0,1]$, $L_1[0,1]$ ja $L_\infty[0,1]$ (vt nt [W, lk 78, näited (a) ja (b)]).

Järgnev teoreem ütleb et kui ruumil $X$ on Daugaveti omadus, siis Daugaveti võrdus (1.1) kehtib mitte ainult iga ühemõõtmelise, vaid koguni iga nõrgalt kompaktse operaatori $T \colon X \to X$ korral.

**Teoreem 1.4** (vt [KShSW, teoreem 2.3]; vt ka [W, teoreem 2.7])**.** *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruumil $X$ on Daugaveti omadus;*

(ii) *iga kompaktne operaator $T \colon X \to X$ rahuldab Daugaveti võrdust* (1.1)*;*

(iii) *iga nõrgalt kompaktne operaator* $T\colon X \to X$ *rahuldab Daugaveti võrdust* (1.1)*;*

(iv) *iga* $x \in S_X$ *ja iga* $x^* \in S_{X^*}$ *korral* $\|I - x^* \otimes x\| = 2$.

Märgime, et teoreemis 1.4 on "raske implikatsioon" ainult (i)⇒(iii): implikatsioonid (iii)⇒(ii)⇒(i) on ilmsed; samaväärsuse (i)⇔(iv) tõestuseks piisab tähele panna, et nii tingimus (i) kui ka tingimus (iv) on samaväärsed järgmise tingimusega:

(i') *iga ühemõõtmeline operaator* $T\colon X \to X$*, mille norm on* 1*, rahuldab Daugaveti võrdust* (1.1)*.*

Tõepoolest samaväärsus (i')⇔(iv) ja implikatsioon (i)⇒(i') on ilmsed; implikatsioon (i')⇒(i) järeldub vahetult järgmisest hästituntud lemmast.

**Lemma 1.5.** *Olgu* $x, y \in X$ *sellised, et* $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$*. Siis mis tahes* $\alpha, \beta \geqslant 0$ *korral* $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$*.*

TÕESTUS. Olgu $\alpha, \beta \geqslant 0$. Ühelt poolt,

$$\|\alpha x + \beta y\| \leqslant \|\alpha x\| + \|\beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|.$$

Teiselt poolt, eeldades sümmeetria põhjal üldisust kitsendamata, et $\alpha \geqslant \beta$,

$$\begin{aligned}
\|\alpha x + \beta y\| &= \|\alpha(x + y) - (\alpha - \beta)y\| \\
&\geqslant \alpha\|x + y\| - (\alpha - \beta)\|y\| \\
&= \alpha(\|x\| + \|y\|) - (\alpha - \beta)\|y\| \\
&= \alpha\|x\| + \beta\|y\|.
\end{aligned}$$

□

Järgnev teoreem 1.6 kirjeldab Daugaveti omadust ainult ruumi $X$ (ja kaasruumi $X^*$) termineid kasutades – erinevalt (Daugaveti omaduse) definitsioonist, mis on esitatud ruumis $X$ tegutsevate operaatorite terminites. Niisuguse kirjelduse abil on konkreetsetel juhtudel tavaliselt palju lihtsam Daugaveti omaduse olemasolu kontrollida kui definitsiooni põhjal.

Artikli [W] eeskujul tähistame etteantud elemendi $x \in S_X$ ja reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral

$$\Delta_\varepsilon(x) := \{y \in B_X \colon \|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon\}.$$

**Teoreem 1.6** (vt [KShSW, lemmad 2.1 ja 2.2] ja [W, lemmad 2.2 ja 2.4 ning järeldus 2.3])**.** *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruumil* $X$ *on Daugaveti omadus;*

(i') *iga* $x \in S_X$ *ja iga* $x^* \in S_{X^*}$ *korral* $\|I - x^* \otimes x\| = 2$*;*

(ii) *iga* $x \in S_X$*, iga ühikkera* $B_X$ *viilu* $S$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub* $y \in S$ *nii, et*

$$\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon;$$

(ii') *iga* $x^* \in S_{X^*}$*, iga ühikkera* $B_{X^*}$ $*$*-nõrga viilu* $S$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub* $y^* \in S$ *nii, et*

$$\|y^* - x^*\| \geqslant 2 - \varepsilon;$$

(iii) *iga* $x \in S_X$*, iga ühikkera* $B_X$ *viilu* $S$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub ühikkera* $B_X$ *viil* $S' \subset S$ *nii, et*

$$\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon \quad \text{iga } y \in S' \text{ korral;}$$

(iii') *iga* $x^* \in S_{X^*}$*, iga ühikkera* $B_{X^*}$ $*$*-nõrga viilu* $S$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub ühikkera* $B_{X^*}$ $*$*-nõrk viil* $S' \subset S$ *nii, et*

$$\|y^* - x^*\| \geqslant 2 - \varepsilon \quad \text{iga } y \in S' \text{ korral;}$$

(iv) *iga* $x \in S_X$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral* $B_X = \overline{\text{co}}\, \Delta_\varepsilon(x)$*;*

(iv') *iga* $x^* \in S_{X^*}$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral* $B_{X^*} = \overline{\text{co}}^{w^*}\, \Delta_\varepsilon(x^*)$*.*

## 1.4 Diameeter-2 omadused

Kui $n \in \mathbb{N}$ ning $B_1, \ldots, B_n \subset X$ ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, siis hulka

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \colon x_i \in B_i,\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

nimetatakse hulkade $B_1, \ldots, B_n$ *kumeraks kombinatsiooniks.*

Meenutame, et tõkestatud alamhulga $B \subset X$ *diameeter* $\operatorname{diam} B$ on defineeritud võrdusega

$$\operatorname{diam} B = \sup\{\|x - y\| \colon x, y \in B\}.$$

**Definitsioon 1.5** (vt [ALN, definitsioon 1.1])**.** Öeldakse, et ruumil $X$ on

- *lokaalne diameeter*-2 *omadus* (lühidalt, *LD*2*P*), kui iga ühikkera $B_X$ viilu diameeter on 2;
- *diameeter*-2 *omadus* (lühidalt, *D*2*P*), kui iga ühikkera $B_X$ suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga diameeter on 2;
- *tugev diameeter*-2 *omadus* (lühidalt, *SD*2*P*), kui iga ühikkera $B_X$ viilude kumera kombinatsiooni diameeter on 2.

Kui ruumil $X$ on Daugaveti omadus, siis on tal ka SD2P (vt nt [ALN, teoreem 4.4]); kui ruumil $X$ on SD2P, siis on tal ka D2P (sest iga ühikkera suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk sisaldab Bourgaini lemma põhjal (vt nt [GGMS, lk 26, lemma II.1]) viilude kumera kombinatsiooni); kui ruumil $X$ on D2P, siis on tal ka LD2P (sest ühikkera viil on selle ühikkera suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk). Vastupidised väited üldjuhul ei kehti: ruumil $c_0$ on SD2P, kuid mitte Daugaveti omadust; artiklites [HL] ja [ABL] esitati teineteisest sõltumatult üks ja sama näide Banachi ruumist, millel on D2P, kuid mitte SD2P (vt [HL, teoreem 1] ja [ABL, teoreem 3.2] ning [ALN, teoreem 3.2]); artiklis [BLR$^{15}$] tõestati, et kui Banachi ruum sisaldab ruumiga $c_0$ isomorfse alamruumi, siis sellel ruumil leidub ekvivalentne ümbernormeering, milles (kinnise) ühikkera iga viilu diameeter on 2, kuid samas sellel ühikkeral leidub kui tahes väikese diameetriga suhteliselt nõrgalt lahtisi alamhulki (veel üks näide LD2P ja D2P sedavõrd "ekstreemse" erinevuse kohta konstrueeriti hiljuti artiklis [ALMT]).

Näitame, et kui $X$ on lõplikumõõtmeline, siis tal ei ole omadust LD2P. Kui $K \subset X$ on kumer ja $x \in K$, siis öeldakse, et $x$ on alamhulga $K$ *ekstreemumpunkt* (vt nt [M, lk 264, definitsioon 2.10.1]), kui tingimusest $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, kus $y, z \in K$ ja $0 < \lambda < 1$, järeldub, et $y = z = x$. On lihtne näha, et ekstreemumpunkti definitsioonis piisab vaadelda juhtu $\lambda = \frac{1}{2}$, s.t $x \in K$ on kumera alamhulga $K$ ekstreemumpunkt parajasti siis, kui tingimusest $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, kus $y, z \in K$, järeldub, et $y = z = x$. On hästi teada, et kui $X$ on lõplikumõõtmeline, siis kinnise ühikkera $B_X$ suhteline normi topoloogia ja nõrk topoloogia ühtivad ning seega ühikkera $B_X$ iga ekstreemumpunkt sisaldub kui tahes väikese diameetriga viilus [LLT, teoreem]. Seega veendumaks, et lõplikumõõtmelisel ruumil $X$ ei ole omadust LD2P, piisab näidata, et ühikkeral $B_X$ leidub ekstreemumpunkte.

**Lause 1.7.** *Lõplikumõõtmelise normeeritud ruumi mittetühjal kompaktsel kumeral alamhulgal leidub ekstreemumpunkt.*

TÕESTUS. Olgu $X$ lõplikumõõtmeline ning olgu $K$ tema mittetühi kompaktne kumer alamhulk. Näitame, et hulgal $K$ leidub ekstreemumpunkt. Alamhulk $K$ on kompaktne ka vektorruumi $X$ eukleidilise normi $\|\cdot\|$ suhtes, seega saavutab $\|\cdot\|$ hulgal $K$ maksimumi mingis punktis $x$, mis osutub ektreemumpunktiks. Tõepoolest, oletame, et hulga $K$ mingite elementide $y$ ja $z$ korral $x = \frac{y+z}{2}$. Sel juhul $\|x\| = \frac{\|y\|+\|z\|}{2}$, sest

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &\leqslant \frac{(\|y\| + \|z\|)^2}{4} = \frac{\|y\|^2 + 2\|y\|\|z\| + \|z\|^2}{4}\\ &\leqslant \frac{\|x\|^2 + 2\|x\|\|x\| + \|x\|^2}{4}\\ &= \|x\|^2.\end{aligned}$$

Kui $\|y\| < \|z\|$, siis saaksime vastuolu $\|x\| < \|z\|$. Kui $\|y\| > \|z\|$, siis saaksime vastuolu $\|x\| < \|y\|$. Seega peab kehtima $\|y\| = \|z\|$, millest eukleidilise normi range kumeruse tõttu saame $x = y = z$. □

**Definitsioon 1.6** (vt [BLR[18]]). Öeldakse, et ruumil $X$ on

- *diametraalne lokaalne diameeter*-2 *omadus* (lühidalt, *DLD*2*P*), kui iga ühikkera $B_X$ viilu $S$, iga $x \in S \cap S_X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et $\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon$;

- *diametraalne diameeter*-2 *omadus* (lühidalt, *DD*2*P*), kui iga ühikkera $B_X$ suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga $W$, iga $x \in W \cap S_X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in W$ nii, et $\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon$;

- *diametraalne tugev diameeter*-2 *omadus* (lühidalt, *DSD*2*P*), kui iga ühikkera $B_X$ suhteliselt nõrgalt lahtiste alamhulkade kumera kombinatsiooni $C$, iga $x \in C$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in C$ nii, et $\|y - x\| \geqslant \|x\| + 1 - \varepsilon$.

Seoses DD2P definitsiooniga meenutame, et kui ruum $X$ on lõpmatumõõtmeline, siis tema ühikkera $B_X$ iga mittetühja suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga $W$ korral $W \cap S_X \neq \emptyset$ (vt lauset 1.3).

Märgime, et DLD2P oli kirjanduses esinenud varemgi, enne artikli [BLR[18]] ilmumist: artiklis [IK] nimetati selle omadusega Banachi ruume *halbade projektsioonidega ruumideks;* artiklites [AHNTT] ja [ALNT] esines see omadus nimetuse all *LD*2*P*+.

On ilmne, et igast diametraalsest diameeter-2 omadusest definitsioonis 1.6 järeldub vastav diameeter-2 omadus definitsioonis 1.5. Vastupidine väide ei kehti: isegi omadusest SD2P ei järeldu üldjuhul omadust DLD2P – nt ruumil $c_0$ on SD2P, kuid mitte DLD2P. On teada ka, et omadusest DD2P ei järeldu üldjuhul omadust SD2P (vt nt [BLR[18], näide 2.2 ning lause 2.3 tõestusele järgnev lõik]). Pole teada, kas omadusest LD2P järeldub omadus D2P (vt [AHNTT, küsimus 3]).

Samuti on ilmne, et kui ruumil $X$ on DSD2P, siis on tal ka DD2P, ning kui ruumil $X$ on DD2P, siis on tal ka DLD2P. Artiklis [BLR[18], näide 3.3] näidati, et Daugaveti omadusest järeldub DSD2P; selles artiklis püstitatud küsimusele – kas DSD2P on tegelikult sama, mis Daugaveti omadus? – vastas artiklis [K] jaatavalt V. Kadets. DD2P olemasolust ruumil $X$ ei järeldu DSD2P olemasolu sellel ruumil (isegi mitte SD2P olemasolu – vt eelmist lõiku). Pole teada, kas DLD2P olemasolust ruumil $X$ järeldub DD2P olemasolu sellel ruumil (vt [BLR[18], küsimus 4.1]), s.t pole teada, kas LD2P ja DD2P on tegelikult üks ja sama omadus.

Järgnev teoreem, mis kirjeldab omadust DLD2P on Daugaveti omadust kirjeldava teoreemi sümmeetriline analoog.

**Teoreem 1.8** (vt [IK, teoreem 1.4], [ALNT, teoreemid 3.2 ja 3.5] ja [W, lk 95, probleem (7)]). *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *iga* $x \in S_X$ *ja iga sellise* $z^* \in X^*$ *korral, mille puhul* $z^*(x) = 1$, *kehtib võrratus* $\|I - z^* \otimes x\| \geqslant 2$;

(ii) *ruumil* $X$ *on DLD2P;*

(ii') *iga ühikkera* $B_{X^*}$ $*$*-nõrga viilu* $S$, *iga* $x^* \in S_{X^*} \cap S$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub* $y^* \in$ *nii, et*

$$\|y^* - x^*\| \geqslant 2 - \varepsilon;$$

(iii) *iga ühikkera* $B_X$ *viilu* $S$, *iga* $x \in S_X \cap S$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub ühikkera* $B_X$ *viil* $S' \subset S$ *nii, et*

$$\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon \quad \textit{iga } y \in S' \textit{ korral;}$$

(iii') *iga ühikkera* $B_{X^*}$ $*$*-nõrga viilu* $S$, *iga* $x^* \in S_{X^*} \cap S$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub ühikkera* $B_{X^*}$ $*$*-nõrk viil* $S' \subset S$ *nii, et*

$$\|y^* - x^*\| \geqslant 2 - \varepsilon \quad \textit{iga } y^* \in S' \textit{ korral;}$$

(iv) *iga* $x \in S_X$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral* $x \in \overline{\mathrm{co}}\, \Delta_\varepsilon(x)$;

(iv') *iga* $x^* \in S_{X^*}$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral* $x^* \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*} \Delta_\varepsilon(x^*)$.

**Märkus.** Ivahno ja Kadetsi teoreemis [IK, teoreem 1.4] on tingimuse (i) asemel tingimus

(i') iga (pideva lineaarse) ühemõõtmelise projektori $P : X \mapsto X$ korral $\|I - P\| \geqslant 2$.

Näitame, et tingimused (i) ja (i') on samaväärsed. Selleks piisab näidata, et järgmised tingimused on samaväärsed:

(1) $P = z^* \otimes x$, kus $x \in S_X$ ja $z^* \in X^*$ on sellised, et $z^*(x) = 1$;

(2) $P \colon X \to X$ on (pidev lineaarne) ühemõõtmeline projektor.

(1)$\Rightarrow$(2). Kehtigu (1). Operaatori $P$ pidevus, lineaarsus ja ühemõõtmelisus järelduvad otse esitusest $P = z^* \otimes x$. Jääb näidata, et $P$ on projektor, s.t $P^2 = P$: mis tahes $u \in X$ korral

$$P^2 u = P(Pu) = P\big(z^*(u)\, x\big) = z^*(u)\, Px = z^*(u)\, z^*(x)\, x = z^*(u)\, x = Pu,$$

niisiis tõepoolest $P^2 = P$.

(2)$\Rightarrow$(1). Kehtigu (2). Siis operaatori ühemõõtmelisuse tõttu leiduvad $z^* \in Z^*$ ja $x \in S_X$ nii, et $P = z^* \otimes x$. Jääb näidata, et $z^*(x) = 1$. Selleks valime $u \in X$ nii, et $z^*(u) \neq 0$. Nüüd, arvestades, et $P$ on projektor,

$$z^*(u)\, x = Pu = P^2 u = P(Pu) = P\big(z^*(u)\, x\big) = z^*(u)\, Px = z^*(u)\, z^*(x)\, x$$

milles järeldub, et $z^*(x) = 1$, nagu soovitud.

## 1.5 Daugaveti punktid ja $\Delta$-punktid

**Definitsioon 1.7** (vt [AHLP]). (a) Öeldakse, et punkt $x \in S_X$ on

- *Daugaveti punkt,* kui $B_X = \overline{\mathrm{co}}\,\Delta_\varepsilon(x)$ iga $\varepsilon > 0$ korral;
- $\Delta$-*punkt,* kui $x \in \overline{\mathrm{co}}\,\Delta_\varepsilon(x)$ iga $\varepsilon > 0$ korral.

(b) Öeldakse, et punkt $x^* \in S_{X^*}$ on

- $*$-*nõrk Daugaveti punkt,* kui $B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}}\,\Delta_\varepsilon(x^*)$ iga $\varepsilon > 0$ korral;
- $*$-*nõrk* $\Delta$-*punkt,* kui $x^* \in \overline{\mathrm{co}}\,\Delta_\varepsilon(x^*)$ iga $\varepsilon > 0$ korral.

Järgnev lause on vahetu järeldus vastavalt teoreemide 1.6 ja 1.8 samaväärsustest (i)$\Leftrightarrow$(iv)$\Leftrightarrow$(iv') ja (ii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Leftrightarrow$(iv') ning definitsioonist 1.7.

**Lause 1.9.** (a) *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruumil $X$ on Daugaveti omadus;*

(ii) *iga ühiksfääri $S_X$ punkt on Daugaveti punkt;*

(iii) *iga ühiksfääri $S_{X^*}$ punkt on $*$-nõrk Daugaveti punkt.*

(b) *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruumil $X$ on DLD2P;*

(ii) *iga ühiksfääri $S_X$ punkt on $\Delta$-punkt;*

(iii) *iga ühiksfääri $S_{X^*}$ punkt on $*$-nõrk $\Delta$-punkt.*

Järgnevad laused 1.10–1.13 kirjeldavad vastavalt Daugaveti punkte, $*$-nõrkasid Daugaveti punkte, $\Delta$-punkte ja $*$-nõrkasid $\Delta$-punkte.

Teoreemi 1.6 samaväärsused (i')$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv) järelduvad vahetult järgnevast lausest.

**Lause 1.10.** *Olgu $x \in S_X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *iga $x^* \in S_{X^*}$ korral $\|I - x^* \otimes x\| = 2$;*

(ii) *iga ühikkera $B_X$ viilu $S$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et*
$$\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon;$$

(iii) *iga ühikkera $B_X$ viilu $S$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ühikkera $B_X$ viil $S' \subset S$ nii, et*
$$\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon \quad \textit{iga } y \in S' \textit{ korral;}$$

(iv) *punkt $x$ on Daugaveti punkt.*

Teoreemi 1.6 samaväärsused (i')⇔(ii')⇔(iii')⇔(iv') järelduvad vahetult järgnevast lausest.

**Lause 1.11.** *Olgu $x^* \in S_{X^*}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *iga $x \in S_X$ korral $\|I - x^* \otimes x\| = 2$;*

(ii) *iga ühikkera $B_{X^*}$ $*$-nõrga viilu $S$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y^* \in S$ nii, et*

$$\|y^* - x^*\| \geqslant 2 - \varepsilon;$$

(iii) *iga ühikkera $B_{X^*}$ $*$-nõrga viilu $S$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ühikkera $B_{X^*}$ $*$-nõrk viil $S' \subset S$ nii, et*

$$\|y^* - x^*\| \geqslant 2 - \varepsilon \quad \text{iga } y^* \in S' \text{ korral;}$$

(iv) *punkt $x^*$ on $*$-nõrk Daugaveti punkt.*

Teoreemi 1.8 samaväärsused (i')⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv) järelduvad vahetult järgnevast lausest.

**Lause 1.12.** *Olgu $x \in S_X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *iga $z^* \in X^*$ korral, mille puhul $z^*(x) = 1$, kehtib võrratus $\|I - z^* \otimes x\| \geqslant 2$;*

(ii) *iga ühikkera $B_X$ viilu $S$ korral, mille puhul $x \in S$, ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et*

$$\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon;$$

(iii) *iga ühikkera $B_X$ viilu $S$ korral, mille puhul $x \in S$, ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ühikkera $B_X$ viil $S' \subset S$ nii, et*

$$\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon \quad \text{iga } y \in S' \text{ korral;}$$

(iv) *punkt $x$ on $\Delta$-punkt.*

Teoreemi 1.8 samaväärsused (i')⇔(ii')⇔(iii')⇔(iv') järelduvad vahetult järgnevast lausest.

**Lause 1.13.** *Olgu $x^* \in S_{X^*}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *iga $z \in X$ korral, mille puhul $x^*(z) = 1$, kehtib võrratus $\|I - x^* \otimes z\| \geqslant 2$;*

(ii) *iga ühikkera $B_{X^*}$ $*$-nõrga viilu $S$ korral, mille puhul $x^* \in S$, ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y^* \in S$ nii, et*

$$\|y^* - x^*\| \geqslant 2 - \varepsilon;$$

(iii) *iga ühikkera $B_{X^*}$ $*$-nõrga viilu $S$ korral, mille puhul $x^* \in S$, ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ühikkera $B_{X^*}$ $*$-nõrk viil $S' \subset S$ nii, et*

$$\|y^* - x^*\| \geqslant 2 - \varepsilon \quad \text{iga } y^* \in S' \text{ korral;}$$

(iv) *punkt $x^*$ on $\Delta$-punkt.*

## 1.6 Üks Hahn–Banachi eraldamisteoreem

Järgmise paragrahvi lause 2.6 implikatsiooni (ii)$\Rightarrow$(i) tõestus (ning seega ühtlasi ka käesoleva töö põhiteoreemi 2.1 implikatsiooni (iv)$\Rightarrow$(ii) tõestus) toetub järgmisele Hahn–Banachi eraldamisteoreemi versioonile.

**Teoreem 1.14** (vt nt [M, lk 180, teoreem 2.2.28])**.** *Olgu $Z$ lokaalselt kumer ruum, olgu $K, C \subset Z$ kumerad alamhulgad, kusjuures $K$ on kompaktne ja $C$ on kinnine, ning olgu $K \cap C = \emptyset$. Siis leidub funktsionaal $z^* \in Z'$ nii, et*

$$\max\{z^*(z) \colon z \in K\} < \inf\{z^*(z) \colon z \in C\}.$$

# 2 Põhiteoreem

Selles paragrahvis tõestame me magistritöö põhiteoreemi 2.1, millest järeldub igaüks lausetest 1.10–1.13 (millest omakorda järelduvad vahetult vastavalt Daugaveti omadust ja $\Delta$-punkte kirjeldavad teoreemid 1.6 ja 1.8).

## 2.1 Põhiteoreemi sõnastus ja võrdlus lausetega 1.10–1.13

Magistritöö põhiteoreemi 2.1 sõnastamiseks vajame me *normeeriva* alamruumi mõistet.

**Definitsioon 2.1.** Öeldakse, et kaasruumi $X^*$ vektoralamruum $\Gamma$ on *normeeriv,* kui iga $x \in X$ korral

$$\|x\| = \sup\{x^*(x) \colon x^* \in S_\Gamma\}.$$

**Teoreem 2.1.** *Olgu $\Gamma$ kaasruumi $X^*$ normeeriv vektoralamruum. Tähistame sümboliga $\tau$ nõrga topoloogia $\sigma(X, \Gamma)$ ruumil $X$. Olgu $x, z \in S_X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *iga $z^* \in \Gamma$ korral, mille puhul $z^*(z) = 1$, kehtib võrratus $\|I - z^* \otimes x\| \geqslant 2$;*

(ii) *iga ühikkera $B_X$ $\Gamma$-viilu $S$ korral, mille puhul $z \in S$, ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et*

$$\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon;$$

(iii) *iga ühikkera $B_X$ $\Gamma$-viilu $S$ korral, mille puhul $z \in S$, ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ühikkera $B_X$ $\Gamma$-viil $S' \subset S$ nii, et*

$$\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon \quad \text{iga } y \in S' \text{ korral;}$$

(iv) *iga $\varepsilon > 0$ korral $z \in \overline{\mathrm{co}}^\tau \Delta_\varepsilon(x)$.*

Lause 1.12 on teoreemi 2.1 erijuht, kus $\Gamma = X^*$ ja $z = x$. Märgime, et sel juhul on $\tau$ ruumi $X$ nõrk topoloogia $w$ ning seega teoreemi 2.1 väites (iv) Mazuri teoreemi 1.2 põhjal

$$\overline{\mathrm{co}}^\tau \Delta_\varepsilon(x) = \overline{\mathrm{co}}^w \Delta_\varepsilon(x) = \overline{\mathrm{co}}\, \Delta_\varepsilon(x). \tag{2.1}$$

Lause 1.13 on teoreemi 2.1 erijuht, kus ruumi $X$ rollis on kaasruum $X^*$, alamruumi $\Gamma$ rollis on $X$ (või, täpsemalt, $\Gamma$ rollis on $j_X(X)$, kus $j_X \colon X \to X^{**}$ on loomulik sisestus – öeldes, et $\Gamma$ rollis on $X$, samastame me vastavalt sissejuhatuses kirjeldatud konventsioonile ruumi $X$ tema teise kaasruumi $X^{**}$ alamruumiga $j_X(X)$) ning nii elemendi $x \in S_X$ kui ka elemendi $z \in S_{X^*}$ rollis on element $x^* \in S_{X^*}$. Sel juhul on $\tau$ ruumi $X^*$ $*$-nõrk topoloogia $w^*$.

Järeldades teoreemist 2.1 lauset 1.10, on mugav toetuda järgnevale lemmale.

**Lemma 2.2.** *Olgu ruum $X$ vähemalt kahemõõtmeline, olgu $\Gamma \subset X^*$ normeeriv vektoralamruum ning olgu $x \in X$ selline, et $\|x\| > 1$. Siis leidub $x^* \in S_\Gamma$ nii, et $x^*(x) = 1$.*

Tõestus. Kuna $\|x\| > 1$, siis alamruumi $\Gamma$ normeerivuse tõttu leidub $w^* \in B_\Gamma$ nii, et $w^*(x) > 1$. Defineerime $z^* := \frac{w^*}{w^*(x)}$; siis $z^* \in \Gamma$, kusjuures $\|z^*\| < 1$ ja $z^*(x) = 1$. Fikseerime vabalt $y^* \in \{v^* \in \Gamma\colon v^*(x) = 0\} \setminus \{0\}$. Selline $y \in \Gamma$ leidub, sest $x|_\Gamma$ (või, täpsemalt, $(j_X x)|_\Gamma$, kus $j_X\colon X \to X^{**}$ on ruumi $X$ loomulik sisestus teise kaasruumi $X^{**}$ – üleskirjutuses $x|_\Gamma$ me samastame vastavalt sissejuhatuses kirjeldatud konventsioonile elemendi $x \in X$ tema loomuliku sisestusega $j_X x \in X^{**}$) on lineaarne funktsionaal ning seega alamruum $\Gamma$ esitub otsesummana $\Gamma = \operatorname{span}\{z^*\} \oplus \ker(x|_\Gamma)$, kusjuures $\ker(x|_\Gamma) \neq \{0\}$ (sest kuna ruum $X$ on vähemalt kahemõõtmeline ja alamruum $\Gamma$ on normeeriv, siis ka $\Gamma$ on vähemalt kahemõõtmeline). Vaatleme funktsiooni

$$\phi\colon [0,\infty) \ni t \longmapsto \|z^* + ty^*\| \in \mathbb{R}.$$

Kuna $\phi(0) = \|z^*\| < 1$ ja $\phi(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ (sest iga $t > 0$ korral $\phi(t) \geqslant t\|y^*\| - \|z^*\|$, kusjuures $t\|y^*\| - \|z^*\| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$), siis Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest leidub $t > 0$ nii, et $\phi(t) = 1$. Aga nüüd $x^* := z^* + ty^* \in S_X$, sest $\|z^* + ty^*\| = \phi(t) = 1$, ning

$$x^*(x) = (z^* + ty^*)(x) = z^*(x) + ty^*(x) = z^*(x) = 1.$$

$\square$

Järeldamaks teoreemist 2.1 lauset 1.10, fikseerime vabalt $x \in S_X$ ning paneme tähele, et teoreemist 2.1, võttes seal $\Gamma = X^*$, järeldub järgmiste väidete samaväärsus:

(i') *iga $z \in S_X$ ja iga $z^* \in X^*$ korral, mille puhul $z^*(z) = 1$, kehtib võrratus $\|I - z^* \otimes x\| \geqslant 2$;*

(ii') *iga $z \in S_X$, iga ühikkera $B_X$ viilu $S$ korral, mille puhul $z \in S$, ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et $\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon$;*

(iii') *iga $z \in S_X$, iga ühikkera $B_X$ viilu $S$ korral, mille puhul $z \in S$, ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ühikkera $B_X$ viil $S' \subset S$ nii, et $\|y - x\| \geqslant 2 - \varepsilon$ iga $y \in S'$ korral;*

(iv') *iga $z \in S_X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral $z \in \overline{\operatorname{co}}^w \Delta_\varepsilon(x)$.*

Eelnevad väited (ii')–(iv') on ilmselt samaväärsed vastavalt lause 1.10 väidetega (ii)–(iv) – siin samaväärsus (iv')$\Leftrightarrow$(iv) järeldub võrdusteahela (2.1) teisest võrdusest. Jääb veenduda, et väide (i') on samaväärne lause 1.10 väitega (i). Selleks vaatleme järgmisi väiteid:

(i”) *iga* $x^* \in S_{X^*}$ *ja iga* $\alpha > 1$ *korral* $\|I - \alpha x^* \otimes x\| \geqslant 2$*;*

(i’’’) *iga* $x^* \in S_{X^*}$ *ja iga* $\alpha \geqslant 1$ *korral* $\|I - \alpha x^* \otimes x\| \geqslant 2$*.*

Paneme tähele, et (i’)⇒(i”) (sest mis tahes $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 1$ korral $\|\alpha x^*\| > 1$ ning seega tingimuse (i’) kehtides leidub lemma 2.2 põhjal $z \in S_X$ nii, et $\alpha x^*(z) = 1$; siin me arvestasime et tingimuse (iv’) kehtides – ja seega ka tingimuse (i’) kehtides – ei saa ruum $X$ olla ühemõõtmeline) ja (i’’’)⇒(i’) (sest kui $z \in S_X$ ja $z^* \in X^*$ on sellised, et $z^*(z) = 1$, siis $\|z^*\| \geqslant 1$ ning seega $z^* = \alpha x^*$, kus $\alpha = \|z^*\| \geqslant 1$ ja $x^* := \frac{z^*}{\|z^*\|} \in S_{X^*}$). Väitest (i”) järeldub lause 1.10 väide (i) (sest väite (ii”) kehtides mis tahes $x^* \in S_{X^*}$ korral $\|I - x^* \otimes x\| = \lim\limits_{\alpha \to 1+} \|I - \alpha x^* \otimes x\| \geqslant 2$ ning seega $\|I - x^* \otimes x\| = 2$). Lause 1.10 väitest (i) järeldub väide (i’’’) (sest lause 1.10 väite (i) kehtides mis tahes $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha \geqslant 1$ korral lemma 1.5 põhjal $\|I - \alpha x \otimes x^*\| = 1 + \alpha \geqslant 2$). Kokkuvõttes oleme saanud, et väide (i’) on samaväärne lause 1.10 väitega (i).

Järeldamaks teoreemist 2.1 lauset 1.11, fikseerime vabalt $x^* \in S_{X^*}$ ning paneme tähele, et teoreemist 2.1, võttes seal ruumi $X$ rolli kaasruumi $X^*$ ja alamruumi $\Gamma$ rolli ruumi $X$ (või, täpsemalt, võttes $\Gamma$ rolli $j_X(X)$, kus $j_X \colon X \to X^{**}$ on loomulik sisestus) ning arvestades, et sel juhul $\tau$ on $*$-nõrk topoloogia kaasruumil $X^*$, järeldub järgmiste väidete samaväärsus:

(i’) *iga* $z^* \in S_{X^*}$ *ja iga* $z \in X$ *korral, mille puhul* $z^*(z) = 1$*, kehtib võrratus* $\|I_{X^*} - z \otimes x^*\| \geqslant 2$*;*

(ii’) *iga* $z^* \in S_X$*, iga ühikkera* $B_{X^*}$ $*$*-nõrga viilu* $S$ *korral, mille puhul* $z^* \in S$*, ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub* $y^* \in S$ *nii, et* $\|y^* - x^*\| \geqslant 2 - \varepsilon$*;*

(iii’) *iga* $z^* \in S_X$*, iga ühikkera* $B_{X^*}$ $*$*-nõrga viilu* $S$ *korral, mille puhul* $z^* \in S$*, ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub ühikkera* $B_{X^*}$ $*$*-nõrk viil* $S' \subset S$ *nii, et* $\|y^* - x^*\| \geqslant 2 - \varepsilon$ *iga* $y^* \in S'$ *korral;*

(iv’) *iga* $z^* \in S_{X^*}$ *ja iga* $\varepsilon > 0$ *korral* $z^* \in \overline{\mathrm{co}}^{w^*} \Delta_\varepsilon(x)$*.*

Eelnevad väited (ii’)–(iv’) on ilmselt samaväärsed vastavalt lause 1.11 väidetega (ii)–(iv). Jääb veenduda, et väide (i’) on samaväärne lause 1.11 väitega (i). Ühelt poolt, eeldame, et kehtib (i’). Kui $x \in S_X$, siis Hahn–Banachi teoreemi järelduse põhjal leidub $z^* \in S_{X^*}$ nii, et $z^*(x) = 1$, seega tingimuse (i’) põhjal

$$\|I - x^* \otimes x\| = \|(I - x^* \otimes x)^*\| = \|I_{X^*} - x \otimes x^*\| \geqslant 2,$$

järelikult $\|I - x^* \otimes x\| = 2$; niisiis lause 1.11 väide (i) kehtib. Teiselt poolt, eeldame, et kehtib lause 1.11 väide (i). Olgu $z^* \in S_{X^*}$ ja iga $z \in X$ sellised, et $z^*(z) = 1$. Siis $\|z\| \geqslant 1$, seega $z = \alpha x$, kus $\alpha := \|z\| \geqslant 1$ ja $x := \frac{z}{\|z\|} \in S_X$.

Eelduse põhjal lause 1.11 väite (i) kehtivusest $\|I - x^* \otimes x\| = 2$, seega lemma 1.5 põhjal

$$\begin{aligned}\|I_{X^*} - z \otimes x^*\| &= \|(I - x^* \otimes z)^*\| = \|I - x^* \otimes z\| \\ &= \|I - x^* \otimes \alpha x\| = \|I - \alpha x^* \otimes x\| = 1 + \alpha \geqslant 2;\end{aligned}$$

niisiis väide (i') kehtib.

## 2.2 Abitulemused põhiteoreemi tõestuseks

Teoreemi 2.1 implikatsiooni (i)$\Rightarrow$(iii) tõestuses on mugav toetuda järgnevale lemmale, mis üldistab hästituntud Ivahno–Kadetsi lemmat [IK, lemma 2.1].

**Lemma 2.3** (vrd [IK, lemma 2.1])**.** *Olgu $\Gamma$ kaasruumi $X^*$ normeeriv vektoralamruum. Olgu $z \in S_X$, olgu $z^* \in S_\Gamma$ ja $\alpha > 0$ sellised, et $z \in S(z^*, \alpha)$, ning olgu $0 < \beta < \alpha$. Siis leidub $u^* \in S_\Gamma$ nii, et $z \in S(u^*, \beta) \subset S(z^*, \alpha)$.*

Ivahno–Kadetsi lemma [IK, lemma 2.1] on lemma 2.3 erijuht, kus $\Gamma = X^*$. Teine oluline erijuht lemmast 2.3 on juht, kus ruumi $X$ rollis on kaasruum $X^*$ ning $\Gamma = X$ (või, täpsemalt, $\Gamma = j_X(X)$ – kirjutades $\Gamma = X$ me samastame ruumi $X$ tema loomuliku sisestusega $j_X(X) \subset X^{**}$). See erijuht – järgnev järeldus 2.4 on kirjeldatav kui Ivahno–Kadetsi lemma $*$-nõrk versioon. Märgime, et see tulemus esines ilma tõestuseta artikli [BLR[18]] preprindiversioonides, kuid selle artikli ilmunud versioonist jäi ta mingil põhjusel välja.

**Järeldus 2.4.** *Olgu $z^* \in S_{X^*}$, olgu $z \in S_X$ ja $\alpha > 0$ sellised, et $z^* \in S(z, \alpha)$, ning olgu $0 < \beta < \alpha$. Siis leidub $u \in S_X$ nii, et $z^* \in S(u, \beta) \subset S(z, \alpha)$.*

Lemma 2.3 tõestame me jaotises 2.5. Märgime, et kuigi see tõestus järgib Ivahno–Kadetsi lemma tõestuse põhiideed, on ta Ivahno–Kadetsi lemma tõestusest tehniliselt mõnevõrra keerukam – nende tõestus on lihtsam tänu asjaolule, et kui $\Gamma = X^*$, siis iga $x \in X$ korral leidub $x^* \in S_\Gamma$ nii, et $x^*(x) = \|x\|$; üldjuhul (eeldusel, et $\Gamma$ on kaasruumi $X^*$ normeeriv vektoralamruum) niisugust funktsionaali $x^*$ alati ei tarvitse eksisteerida.

Järgnev lemma on nõrgem versioon lemmast 2.3, mille tõestus on lemma 2.3 tõestusest mõnevõrra lihtsam, ning mis teeb teoreemi 2.1 implikatsiooni (i)$\Rightarrow$(iii) tõestamisel ära sama töö, mis lemma 2.3.

**Lemma 2.5.** *Olgu $\Gamma$ kaasruumi $X^*$ normeeriv vektoralamruum. Olgu $z \in S_X$, olgu $z^* \in S_\Gamma$ ja $\alpha > 0$ sellised, et $z \in S(z^*, \alpha)$, ja olgu $\varepsilon > 0$. Siis leiduvad $u^* \in S_\Gamma$ ja $\beta > 0$ nii, et $\beta < \varepsilon$ ja $z \in S(u^*, \beta) \subset S(z^*, \alpha)$.*

TÕESTUS. Valime $\gamma \in (0, \alpha)$ nii, et $z^*(z) > 1 - \gamma$. Tähistame $\delta := \alpha - \gamma > 0$ ja valime $C, d > 0$ nii, et

$$\frac{d}{C} < \delta \quad \text{ja} \quad \frac{C\gamma + d}{C + 1} < \varepsilon.$$

Alamruumi $\Gamma \subset X^*$ normeerivuse tõttu leidub $a^* \in S_\Gamma$, mille korral $a^*(z) > 1-d$.

Defineerime hulga

$$S := \{x \in B_X \colon Cz^*(x) + a^*(x) > C(1-\gamma) + 1 - d\}.$$

Kuna

$$\|Cz^* + a^*\| \geqslant Cz^*(z) + a^*(z) > C(1-\gamma) + 1 - d,$$

siis $z \in S$ ja lemma 1.1 põhjal on hulk $S$ ühikkera $B_X$ $\Gamma$-viil. Defineerime $w^* := Cz^* + a^* \in \Gamma$, $u^* := \frac{w^*}{\|w^*\|} \in S_\Gamma$ ja $\beta := 1 - \frac{C(1-\gamma)+1-d}{\|w^*\|}$ (paneme tähele, et eelneva võrratusteahela põhjal $\beta > 0$); siis $\|w^*\| \leqslant C\|z^*\| + \|a^*\| = C + 1$ ning $S = S(u^*, \beta)$, kusjuures

$$1 - \beta = \frac{C(1-\gamma)+1-d}{\|w^*\|} \geqslant \frac{C+1-(C\gamma+d)}{C+1} = 1 - \frac{C\gamma + d}{C+1} > 1 - \varepsilon,$$

millest $\beta < \varepsilon$. Jääb näidata, et $S \subset S(z^*, \alpha)$. Mistahes $x \in S$ korral

$$Cz^*(x) + 1 \geqslant Cz^*(x) + a^*(x) > C(1-\gamma) + 1 - d,$$

seega

$$z^*(x) > 1 - \gamma - \frac{d}{C} > 1 - \gamma - \delta = 1 - \alpha,$$

järelikult $x \in S(z^*, \alpha)$. □

Teoreemi 2.1 samaväärsus (ii)$\Leftrightarrow$(iv) järeldub vahetult järgnevast lausest.

**Lause 2.6.** *Olgu $X$ Banachi ruum ning olgu $\Gamma$ kaasruumi $X^*$ vektoralamruum. Tähistame sümboliga $\tau$ nõrga topoloogia $\sigma(X, \Gamma)$ ruumil $X$. Olgu $x, z \in S_X$ ja olgu $\varepsilon > 0$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$z \in \overline{\operatorname{co}}^\tau \Delta_\varepsilon(x)$;*

(ii) *iga ühikkera $B_X$ $\Gamma$-viilu $S$ korral, mille puhul $z \in S$, leidub $u \in S \cap \Delta_\varepsilon(x)$.*

Tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (i). Olgu $z^* \in S_\Gamma$ ja $\delta > 0$ sellised, et $z \in S(z^*, \delta)$, s.t $z^*(z) > 1 - \delta$. Kuna hulk $\{u \in X \colon z^*(u) > 1 - \delta\}$ on punkti $z$ ($\tau$-lahtine) $\tau$-ümbrus, siis tingimuse (i) põhjal leidub $y \in \operatorname{co} \Delta_\varepsilon(x)$ nii, et $z^*(y) > 1 - \delta$, s.t $y \in S(z^*, \delta)$. Kuna $y \in \operatorname{co} \Delta_\varepsilon(x)$, siis leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ning $x_1, \ldots, x_n \in \Delta_\varepsilon(x)$ ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, mille korral $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, nii, et $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Nüüd $\sum_{i=1}^n \lambda_i z^*(x_i) = z^*(y) > 1 - \delta$, millest järeldub, et leidub $i \in \{1, \ldots, n\}$ nii, et $z^*(x_i) > 1 - \delta$. Aga nüüd $x_i \in S(z^*, \delta) \cap \Delta_\varepsilon(x)$, seega võime võtta $u := x_i$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (ii). Oletame vastuväiteliselt, et $z \notin \overline{\operatorname{co}}^\tau \Delta_\varepsilon(x)$. Kuna ühepunktiline hulk $\{z\}$ on kumer ja $\tau$-kompaktne ning hulk $\overline{\operatorname{co}}^\tau \Delta_\varepsilon(x)$ on kumer ja $\tau$-kinnine, siis Hahn–Banachi teoreemi 1.14 põhjal leidub $z^* \in (X, \tau)' = \Gamma$ nii, et $z^*(z) > \sup\{z^*(u) : u \in \overline{\mathrm{co}}^\tau \Delta_\varepsilon(x)\}$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\|z^*\| = 1$, s.t $z^* \in S_\Gamma$. Võtame

$$\delta := 1 - \sup\{z^*(u) : u \in \overline{\mathrm{co}}^\tau \Delta_\varepsilon(x)\} > 0; \tag{2.2}$$

siis $z^*(z) > 1 - \delta$, s.t $z \in S(z^*, \delta)$. Kui nüüd $u \in \Delta_\varepsilon(x)$, siis tingimuse (2.2) põhjal $z^*(u) \leqslant 1 - \delta$, s.t $u \notin S(z^*, \delta)$; niisiis $S(z^*, \delta) \cap \Delta_\varepsilon(x) = \emptyset$, mis on vastuolus tingimusega (ii). □

## 2.3 Põhiteoreemi tõestus

Teoreemi 2.1 tõestus. (i)⇒(iii). Kehtigu (i). Olgu $S$ punkti $z$ sisaldav ühikkera $B_X$ $\Gamma$-viil ning olgu $\varepsilon > 0$. Lemma 2.5 põhjal leiduvad funktsionaal $y^* \in S_\Gamma$ ja reaalarv $\alpha > 0$ nii, et $\alpha < 1$, $\frac{1}{1-\alpha} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ ja $z \in S(y^*, \alpha) \subset S$. Olgu $\alpha_0 \geqslant 0$ selline, et $y^*(z) = 1 - \alpha_0$; siis $\alpha_0 < \alpha$. Defineerime funktsionaali $z^* := \frac{y^*}{y^*(z)}$. Valime reaalarvu $\delta > 0$ selliselt, et $3\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ ja $(1-\alpha_0)(1-3\delta) > 1-\alpha$ (siis $1-3\delta > 0$, millest $\delta < \frac{1}{3}$). Kuna $z^*(z) = 1$, siis tingimuse (i) põhjal $\|I - z^* \otimes x\| \geqslant 2$, seega leidub $y \in S_X$ nii, et $\|(I - z^* \otimes x)\, y\| > 2 - \varepsilon$, järelikult alamruumi $\Gamma$ normeerivuse tõttu leidub $x^* \in S_\Gamma$ nii, et

$$\begin{aligned}\big|\big(x^* - x^*(x)z^*\big)(y)\| &= \big|\big((I_{X^*} - x \otimes z^*)\, x^*\big)(y)\big| = \big|\big((I - z^* \otimes x)^*\, x^*\big)(y)\big| \\ &= \big|x^*\big((I - z^* \otimes x)\, y\big)\big| > 2 - \delta\end{aligned}$$

ning seega $\|x^* - x^*(x)z^*\| > 2 - \delta$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $x^*(x) \leqslant 0$. Defineerime funktsionaali

$$u^* = \frac{x^* - x^*(x)\, z^*}{\|x^* - x^*(x)\, z^*\|}$$

(siin peame silmas, et kuna $\delta < \frac{1}{3}$, siis $\|x^* - x^*(x)\, z^*\| > 2 - \delta > 0$); siis $u^* \in S_\Gamma$.

Olgu $y \in S(u^*, \delta)$ suvaline. Siis

$$1 - \delta < u^*(y) = \frac{x^*(y) - x^*(x)\, z^*(y)}{\|x^* - x^*(x)\, z^*\|} < \frac{x^*(y) - x^*(x)\, z^*(y)}{2 - \delta} \tag{2.3}$$

ning järelikult $z^*(y) > 0$, sest vastasel korral võrratusteahela (2.3) põhjal

$$x^*(y) \geqslant x^*(y) - x^*(x)\, z^*(y) > (2 - \delta)(1 - \delta) > \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9} > 1.$$

Seega jällegi võrratusteahela (2.3) põhjal

$$\begin{aligned}z^*(y) &\geqslant (-x^*(x))\, z^*(y) > (1 - \delta)(2 - \delta) - x^*(y) \\ &\geqslant (1 - \delta)(2 - \delta) - 1 = 1 - 3\delta + \delta^2 > 1 - 3\delta\end{aligned}$$

ning järelikult

$$y^*(y) = y^*(z)\, z^*(y) > (1-\alpha_0)(1-3\delta) > 1-\alpha.$$

Niisiis $y \in S(y^*, \alpha) \subset S$.

Kuna

$$z^*(y) \leqslant \|z^*\| = \frac{1}{y^*(z)} = \frac{1}{1-\alpha_0} < \frac{1}{1-\alpha} < 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

siis

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1 - 3\delta < z^*(y) < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

ning järelikult $|z^*(y) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$; seega

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &\geqslant x^*(y-x) = x^*(y) - x^*(x)\, z^*(y) + x^*(x)\big(z^*(y)-1\big) \\
&> (2-\delta)\, \frac{x^*(y) - x^*(x)\, z^*(y)}{\|x^* - x^*(x)\, z^*\|} - |x^*(x)|\, |z^*(y)-1| \\
&= (2-\delta)\, u^*(y) - |x^*(x)|\, |z^*(y)-1| \\
&> (2-\delta)(1-\delta) - |z^*(y)-1| > 2 - 3\delta + \delta^2 - \frac{\varepsilon}{2} > 2 - \frac{\varepsilon}{2} + \delta^2 - \frac{\varepsilon}{2} \\
&> 2-\varepsilon.
\end{aligned}$$

(iii)$\Rightarrow$(ii) on ilmne, sest ühikkera viil on mittetühi hulk.

(ii)$\Rightarrow$(i). Olgu $z^* \in X^*$ selline, et $z^*(z) = 1$ ning olgu $0 < \varepsilon < 1$. Implikatsiooni tõestuseks piisab leida $y \in B_X$ nii, et $\|y - z^*(y)\, x\| > 2 - 2\varepsilon$, sest niisugusel juhul

$$\|I - z^* \otimes x\| \geqslant \|(I - z^* \otimes x)\, y\| = \|y - z^*(y)\, x\| > 2 - 2\varepsilon,$$

millest järeldub, et $\|I - z^* \otimes x\| \geqslant 2$.

Lemma 1.1 põhjal on hulk $S := \{u \in B_X \colon z^*(u) > 1 - \varepsilon\}$ ühikkera $B_X$ viil. Tingimuse (ii) põhjal leidub $y \in S$ nii, et $\|y - x\| > 2 - \varepsilon$. Vaatleme eraldi kahte teineteist välistavat juhtu:

$$(1) \quad 1 - \varepsilon < z^*(y) \leqslant 1 \qquad \text{ja} \qquad (2) \quad z^*(y) > 1.$$

Juhul (1)

$$\begin{aligned}
\|y - z^*(y)\, x\| &= \|y - x + x - z^*(y)\, x\| \\
&\geqslant \|y - x\| - |1 - z^*(y)|\|x\| > 2 - \varepsilon - \varepsilon = 2 - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Juhul (2) mingi $\gamma > 0$ korral $z^*(y) = 1 + \gamma$ ning seega

$$\begin{aligned}
\|y - z^*(y)\, x\| &= \big\|z^*(y)(y-x) + \big(1 - z^*(y)\big)y\big\| \geqslant |z^*(y)|\|y-x\| - |1 - z^*(y)|\|y\| \\
&> 2 - \varepsilon + 2\gamma - \varepsilon\gamma - \gamma = 2 - \varepsilon + \gamma(1-\varepsilon) > 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

(ii)$\Leftrightarrow$(iv) järeldub vahetult lausest 2.6. □

## 2.4 Alternatiivne skeem põhiteoreemi tõestuseks

Jaotises 2.3 tõestasime käesoleva töö põhiteoreemi 2.1 järgmise skeemi järgi:

$$(i) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i) \qquad \text{ja} \qquad (ii) \Longleftrightarrow (iv).$$

Selles jaotises veendume, et me võinuksime selle teoreemi tõestada ka järgmise skeemi järgi:

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i).$$

Selleks jääb meil tõestada teoreemi 2.1 implikatsioonid (i)⇒(ii) ja (iv)⇒(iii).

Teoreemi 2.1 implikatsioonide (i)⇒(ii) ja (iv)⇒(iii) tõestus. (i)⇒(ii). Kehtigu (i). Fikseerime vabalt elementi $z$ sisaldava ühikkera $B_X$ $\Gamma$-viilu $S$ ja reaalarvu $\varepsilon > 0$. Lemma 2.5 põhjal leiduvad $y^* \in S_\Gamma$ ja $\beta \in (0,1)$ nii, et $\frac{1}{1-\beta} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ ja $z \in S(y^*, \beta) \subset S$. Olgu reaalarv $\gamma$ selline, et $y^*(z) = 1 - \gamma$; siis $0 < \gamma < \beta$. Valime reaalarvu $\delta > 0$ nii, et $(1-\delta)(1-\gamma) > 1 - \beta$. Defineerime funktsionaali $z^* := \frac{y^*}{y^*(z)}$. Siis $z^* \in \Gamma$, kusjuures $z^*(z) = 1$; seega tingimuse (i) põhjal $\|I - z^* \otimes x\| \geqslant 2$, järelikult leidub $y \in B_X$ nii, et

$$\|y - z^*(y)\, x\| = \|(I - z^* \otimes x)\, y\| \geqslant 2 - \min\Big\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta\Big\}.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $z^*(y) \geqslant 0$. Siis

$$1 + z^*(y) \geqslant \|y\| + |z^*(y)|\, \|x\| \geqslant \|y - z^*(y)\, x\| \geqslant 2 - \min\Big\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta\Big\},$$

millest $z^*(y) \geqslant 1 - \min\big\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta\big\}$. Seega $y^*(y) = z^*(y)\, y^*(z) > (1-\delta)(1-\gamma) > 1 - \beta$, mistõttu $y \in S(y^*, \beta) \subset S$. Kuna

$$z^*(y) = \frac{y^*(y)}{y^*(z)} = \frac{y^*(y)}{1-\gamma} \leqslant \frac{1}{1-\gamma} < \frac{1}{1-\beta} < 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

siis $|z^*(y) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ ning järelikult

$$\begin{aligned} \|y - x\| &= \big\|y - z^*(y)\, x + \big(z^*(y) - 1\big)x\big\| \geqslant \|y - z^*(y)\, x\| - |z^*(y) - 1|\, \|x\| \\ &> 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

(iv)⇒(iii). Kehtigu (iv). Olgu $z^* \in S_\Gamma$ ja $\alpha > 0$ sellised, et $z \in S(z^*, \alpha)$, s.t $z^*(z) > 1 - \alpha$, ning olgu $\varepsilon > 0$. Valime reaalarvud $\gamma, \delta > 0$ selliselt, et

$$z^*(z) > 1 - \gamma \quad \text{ja} \quad \gamma + \delta \leqslant \alpha,$$

ning seejärel reaalarvud $C, d > 0$ selliselt, et

$$\frac{d}{C} \leqslant \delta \quad \text{ja} \quad C\gamma + 2d \leqslant \varepsilon.$$

Kuna hulk $\{u \in X\colon z^*(u) > 1-\gamma\}$ on punkti $z$ ($\tau$-lahtine) $\tau$-ümbrus, siis tingimuse (iv) põhjal leidub element $a \in \operatorname{co}\Delta_{\frac{d}{2}}(x)$ nii, et $z^*(a) > 1-\gamma$, s.t $a \in S(z^*,\gamma)\cap\operatorname{co}\Delta_{\frac{d}{2}}(x)$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a \in \Delta_{\frac{d}{2}}(x)$. Sel juhul $\|a-x\| \geqslant 2-\frac{d}{2}$, seega alamruumi $\Gamma$ normeerivuse tõttu leidub $x^* \in S_\Gamma$ nii, et $x^*(a-x) > 2-d$. Siit järeldub, et $x^*(a) > 1-d$ ja $-x^*(x) > 1-d$. Tähistame

$$S' := \big\{u \in B_X\colon\ Cz^*(u)+x^*(u) > C(1-\gamma)+1-d\big\}.$$

Kuna

$$\|Cz^*+x^*\| \geqslant Cz^*(a)+x^*(a) > C(1-\gamma)+1-d,$$

siis lemma 1.1 põhjal on hulk $S'$ ühikkera $B_X$ $\Gamma$-viil.

Olgu $u \in S'$ suvaline. Siis

$$Cz^*(u)+1 \geqslant Cz^*(u)+x^*(u) > C(1-\gamma)+1-d,$$

seega

$$z^*(u) > 1-\gamma-\frac{d}{C} \geqslant 1-\gamma-\delta \geqslant 1-\alpha,$$

s.t $u \in S(z^*,\alpha)$. Kuna

$$C+x^*(u) > Cz^*(u)+x^*(u) > C(1-\gamma)+1-d,$$

siis $x^*(u) > 1-C\gamma-d$ ning seega

$$\|u-x\| \geqslant x^*(u-x) > 1-C\gamma-d+1-d = 2-(C\gamma+2d) \geqslant 2-\varepsilon.$$

□

## 2.5 Lemma 2.3 tõestus

Lemma 2.3 tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\alpha \leqslant 3$. Valime reaalarvud $\gamma,\delta > 0$ nii, et $\beta < \gamma < \alpha$, $z^*(z) > 1-\gamma$ ja $\gamma+\delta \leqslant \alpha$. Kuna

$$\frac{1-\frac{\beta}{4}+C(1-\gamma)}{1+C} \xrightarrow[C\to 0+]{} 1-\frac{\beta}{4},$$

siis leidub reaalarv $D > 0$ nii, et

$$0 < C < D \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1-\frac{\beta}{4}+C(1-\gamma)}{1+C} > 1-\frac{\beta}{2}. \tag{2.4}$$

Seejuures võime eeldada, et $D\delta < \frac{\beta}{4}$ ning et $2D < 1-\frac{\beta}{4}$. Valime funktsionaali $a^* \in S_\Gamma$ nii, et $a^*(z) > 1-D\delta$. Kuna me võime üldisust kitsendamata eeldada, et ruum $X$ on vähemalt kahemõõtmeline, siis ka alamruum $\Gamma$ on vähemalt kahemõõtmeline, seega me saame sellise funktsionaali $a^*$ valida nii, et $z^*$ ja $a^*$ on lineaarselt sõltumatud.

Olgu $C_0 > 0$ võrrandi $F(C) = 1-\beta$ lahend tundmatu $C$ suhtes, kus

$$F(C) := \frac{1 - D\delta + C(1-\gamma)}{\|a^* + Cz^*\|}.$$

Selline lahend leidub Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest, sest funktsioon $F$ on pidev ning $F(0) = 1-D\delta > 1-\beta$ ja $F(C) \xrightarrow[C\to\infty]{} 1-\gamma < 1-\beta$. Märgime, et $C_0 \geqslant D$, sest kui $0 < C < D$, siis implikatsiooni (2.4) põhjal

$$F(C) > \frac{1 - \frac{\beta}{4} + C(1-\gamma)}{\|a^* + Cz^*\|} \geqslant \frac{1 - \frac{\beta}{4} + C(1-\gamma)}{1+C} > 1 - \frac{\beta}{2} > 1-\beta$$

(siin me arvestasime, et kuna $C(1-\gamma) > -2C > -2D$, siis $1-\frac{\beta}{4}+C(1-\gamma) > 0$).

Defineerime $u^* := \frac{a^*+C_0z^*}{\|a^*+C_0z^*\|}$; siis $u^* \in S_\Gamma$, kusjuures $z \in S(u^*, \beta)$, sest

$$u^*(z) = \frac{a^*(z) + C_0 z^*(z)}{\|a^* + C_0 z^*\|} > \frac{1 - D\delta + C_0(1-\gamma)}{\|a^* + C_0 z^*\|} = F(C_0) = 1-\beta.$$

Jääb näidata, et $S(u^*, \beta) \subset S(z^*, \alpha)$. Kui $x \in S(u^*, \beta)$, siis

$$1 + C_0 z^*(x) \geqslant a^*(x) + C_0 z^*(x) > (1-\beta)\|a^* + C_0 z^*\| = 1 - D\delta + C_0(1-\gamma)$$

ning seega

$$z^*(x) > 1 - \gamma - \frac{D}{C_0}\delta \geqslant 1 - \gamma - \delta \geqslant 1 - \alpha;$$

niisiis $x \in S(z^*, \alpha)$. □

# Kirjandus


[AHNTT] T.A. Abrahamsen, P. Hájek, O. Nygaard, J. Talponen, S. Troyanski, *Diameter* 2 *properties and convexity.* Studia Math. **232** (2016), no. 3, 227–242.

[AHLP] T.A. Abrahamsen, R. Haller, V. Lima, K. Pirk, *Delta- and Daugavet-points in Banach spaces,* Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **63** (2020), no. 2, 475–496.

[ALMT] T.A. Abrahamsen, V. Lima, A. Martiny, S. Troyanski, *Daugavet- and delta-points in Banach spaces with unconditional bases,* Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B **8** (2021), 379–398.

[ALN] T.A. Abrahamsen, V. Lima, O. Nygaard, *Remarks on diameter* 2 *properties,* J. Convex Anal. **20** (2013), no. 2, 439–452.

[ALNT] T.A. Abrahamsen, V. Lima, O. Nygaard, S. Troyanski, *Diameter two properties, convexity and smoothness,* Milan J. Math. **84** (2016), no. 2, 231–242.

[ABL] M.D. Acosta, J. Becerra Guerrero, G. Lópes-Pérez, *Stability results of diameter two properties,* J. Convex Anal. **22** (2015), no. 1, 1–17.

[BLR$^{15}$] J. Becerra Guerrero, G. Lópes-Pérez, A. Rueda Zoca, *Big slices versus big relatively weakly open subsets in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. **428** (2015), no. 2, 855–865.

[BLR$^{18}$] J. Becerra Guerrero, G. Lópes-Pérez, A. Rueda Zoca, *Diametral diameter two properties in Banach spaces,* J. Convex Anal. **25** (2018), no. 3, 817–840.

[FS] C. Foiaş, I. Singer, *Points of diffusion of linear operators and almost diffuse operators in spaces of continuous functions,* Math. Z. **87** (1965), 434–450.

[GGMS] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, W. Schachermayer, *Some topological and geometrical structures in Banach spaces,* Mem. Amer. Math. Soc. **378** (1987), 1–116.

[HL] R. Haller, J. Langemets, *Two remarks on diameter* 2 *properties,* Proc. Estonian Acad. Sci. **63** (2014), no. 1, 2–7.

[IK] Y. Ivakhno, V. Kadets, *Unconditional sums of spaces with bad projections,* Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh. **645** (2004), no. 54, 30–35.

[K] V. Kadets, *The diametral strong diameter 2 property of Banach spaces is the same as the Daugavet property,* Proc. Amer. Math. Soc. **149** (2021), no. 6, 2579–2582.

[KShSW] V.M. Kadets, R.V. Shvidkoy, G.G. Sirotkin, D. Werner, *Banach spaces with the Daugavet property,* Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 2, 855–873.

[LLT] B.-L. Lin, P.-K. Lin, S. L. Troyanski, *Characterizations of denting points,* Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), no. 3, 526–528.

[M] R.E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory,* Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[W] D. Werner, *Recent progress on the Daugavet property,* Irish Math. Soc. Bull. **46** (2001), 77–97.

[Д] И.К. Даугавет, *Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве $C$,* Успехи мат. наук **18** (1963), вып. 5 (113), 157–158.

[Л] Г.Я. Лозановский, *О почти интегральных операторах в $KB$-пространствах,* Вестник Ленинград. унив., сер. мат. мех. астроном. **21** (1966), вып. 2, 35–44.

**Lihtlitsents lõputöö reproduktseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Tanel Kipper

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Daugaveti ja $\Delta$-punktid Banachi ruumides - ühtne vaatenurk", mille juhendajad on Märt Põldvere, Rainis Haller ja Kati Ain, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Tanel Kipper
16.08.2021