СТЕРЕОМЕТРІЯ

по системѣ Лежандра

для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ.

Составилъ

К. ГЕХЕЛЬ,

Докторъ математики въ Дерптѣ.

2. изданіе.

Дерптъ и Рига.

Изданіе типографіи Шнакенбурга.

1880.

СТЕРЕОМЕТРІЯ

по системѣ Лежандра

для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ.

Составилъ

К. ГЕХЕЛЬ,

Докторъ математики въ Дерптѣ.

2. изданіе.

Дерптъ и Рига.

Изданіе типографіи Шнакенбурга.

1880.

Дозволено цензурою Дерптъ, 12. Апрѣля 1880 г.
Цензоръ П. ф. Руммелъ.

Оглавленіе.

I. О прямыхъ линіяхъ и плоскостяхъ въ пространствѣ.

§ 145. 1) Стереометрія разсматриваетъ различныя сочетанія плоскостей и линій въ пространствѣ, изучаетъ геометрическія тѣла и поверхности и даетъ способы ихъ измѣренія.

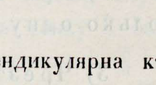
2) Провести плоскость чрезъ данную прямую значитъ провести плоскость такъ, чтобы съ нею вполнѣ совпала данная прямая.

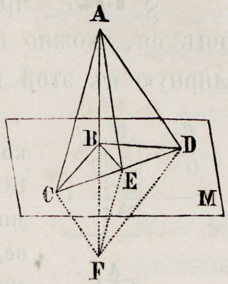
Если прямая имѣетъ съ плоскостью только одну общую точку, а всѣми остальными точками лежитъ внѣ плоскости, то говорятъ, что прямая пересѣкаетъ плоскость.

Если прямая линія пересѣкаетъ плоскость и перпендикулярна къ всѣмъ прямымъ, проведеннымъ въ этой плоскости чрезъ точку пересѣченія, то она называется перпендикуляромъ къ плоскости, а плоскость перпендикулярна къ прямой линіи.

Прямая линія и плоскость параллельны, если онѣ при произвольномъ продолженіи въ обѣ стороны не пересѣкаются; точно такъ же и двѣ плоскости параллельны, если не пересѣкаются, сколько бы онѣ не были продолжены.

3) Двѣ прямыя, лежащія въ одной плоскости, всегда параллельны, если при произвольномъ продолженіи не встрѣчаются. Но въ пространствѣ двѣ прямыя могутъ имѣть такое положеніе, что не встрѣчаются при призвольномъ продолженіи, а всетаки не параллельны. Положимъ что двѣ плоскости C и D проходятъ чрезъ прямую AB, и что изъ двухъ какихъ нибудь точекъ этой прямой возставлены къ ней перпендикуляры AC и BD, одинъ въ плоскости C, другой въ





Соединимъ двѣ произвольныя точки C и D прямыхъ BC и BD линіею CD, которая пересѣкаетъ BE въ точкѣ E, продолжимъ AB по другую сторону плоскости M такъ что BF = AB, и проведемъ AC, AE, AD, FC, FE, FD. Такъ какъ

AC = FC и AD = FD (§ 28, 2), то (§ 24),

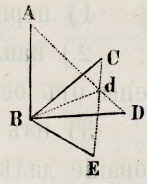
△ ACD ≅ FCD, слѣд. ∡ ACD = FCD, и (§ 17)

△ ACE ≅ FCE, слѣд. AE = FE, потому (§ 24)

△ ABE ≅ FBE, слѣд. ∡ ABE = FBE, и потому

AB ⊥ BE.

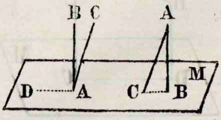
§ 150. Если три прямыя CB, DB, EB перпендикулярны къ одной и той же прямой AB въ одной и той же точкѣ B, то онѣ находятся въ одной плоскости, которая перпендикулярна къ прямой AB.



Проведемъ чрезъ двѣ изъ этихъ линій BC и BE плоскость CBE. Линія AB будетъ перпендикулярна къ этой плоскости (§ 149). Если положимъ, что BD не лежитъ въ плоскости CBE, то мы можемъ чрезъ линіи BD и AB провести плоскость ABd, которая пересѣчетъ CBE по линіи Bd, такъ что BC, Bd и BE будутъ лежать въ одной и той же плоскости CBE. Такъ какъ AB ⊥ CBE, то AB перпендикулярна и къ Bd, лежащей въ плоскости CBE. Въ такомъ случаѣ къ прямой AB въ одной и той же плоскости ABD чрезъ точку B были бы проведены два перпендикуляра Bd и BD, что не возможно (§ 11), слѣд. не можетъ быть также, чтобы линія BD лежала внѣ плоскости CBE.

Слѣдствіе. Если прямой уголъ ABD обращается около одной изъ своихъ сторонъ AB, какъ около оси, то другая сторона BD опишетъ плоскость, перпендикулярную къ AB.

§ 151. Изъ данной точки A, находящейся на плоскости M или внѣ ея, можно провести только одинъ перпендикуляръ AB къ плоскости M.



Положимъ, что кромѣ линіи AB еще и линія AC ⊥ M, тогда проведя чрезъ AB и AC плоскость, которая пересѣчетъ плоскость M въ первомъ случаѣ по линіи AD, а во второмъ по BC, мы получимъ въ первомъ случаѣ ∡ BAD = R = CAD, а въ второмъ тре—къ ABC, имѣющій два прямыхъ угла, что одинаково невозможно.

плоскости D; эти перпендикуляры не будутъ параллельны между собою, но и не пересѣкутся.

§ 146. Чрезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести только одну плоскость; слѣдовательно положеніе плоскости совершенно опредѣляется тремя точками, не лежащими на одной прямой.

Положимъ, что двѣ точки будутъ соединены прямою, чрезъ которую проведена плоскость. Обращая около прямой, какъ около неподвижной оси, эту плоскость, мы ей можемъ дать безконечно большое число различныхъ положеній. Возмемъ гдѣ нибудь внѣ прямой еще точку и будемъ вращать плоскость до тѣхъ поръ, пока она не пройдетъ и чрезъ эту точку, тогда отъ малѣйшаго вращенія плоскость должна оставить взятую нами третью точку, слѣдовательно положеніе плоскости, проходящей чрезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой, неизмѣнно, и всѣ плоскости, проходящія чрезъ три общія точки, сольются.

§ 147. 1) Чрезъ двѣ пересѣкающіяся или параллельныя прямыя можно провести только одну плоскость, потому что всѣ плоскости, проходящія чрезъ двѣ такія линіи, будутъ имѣть три общія точки, не лежащія на одной прямой, и потому совмѣщаются.

2) Чрезъ данную точку въ пространствѣ можно провести только одну линію параллельную данной прямой.

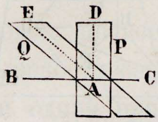
3) Чрезъ четыре или болѣе точки можно провести или только одну плоскость или ни одной.

§ 148. Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія.

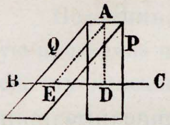
Если бы между точками, общими той и другой плоскости, были три не лежащія на одной прямой точки, то плоскости слились бы, а не пересѣклись.

§ 149. Если прямая AB, пересѣкающая плоскость M въ точкѣ B, перпендикулярна къ двумъ прямымъ BC и BD, проведеннымъ на плоскости M чрезъ точку пересѣченія B, то она перпендикулярна и ко всякой другой прямой BE, проведенной чрезъ ея основаніе B на той же плоскости, а слѣд. перпендикулярна и къ самой плоскости.

§ **152.** Чрезъ точку A, находящуюся на прямой BC или внѣ ея, можно провести только одну плоскость P, перпендикулярную къ этой прямой.



Положимъ, что кромѣ P можно провести еще плоскость $Q \perp BC$, тогда, проведя въ первомъ случаѣ чрезъ BC плоскость, которая пересѣчетъ плоскости P и Q по линіямъ AD и AE, получимъ $\measuredangle BAD = R = BAE$. Проведя же во второмъ случаѣ плоскость чрезъ точку A и линію BC, получимъ тре—къ ADE съ двумя прямыми углами. Такъ какъ оба слѣдствія невозможны, то и самое предположеніе, что $Q \perp BC$, также невозможно.

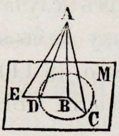


§ **153.** Если изъ точки A, лежащей внѣ плоскости M, проведемъ къ этой плоскости перпендикуляръ AB и нѣсколько наклонныхъ AC, AD, AE . . ., то

1) перпендикуляръ будетъ короче всякой наклонной;

2) наклонныя AC и AD, которыхъ основанія равно удалены отъ основанія перпендикуляра, равны между собою;

3) изъ двухъ наклонныхъ AE и AC та болѣе, которой основаніе далѣе отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.

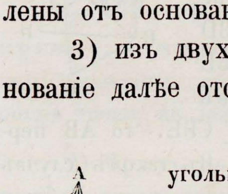


1) Всякая наклонная, напр. AC, какъ гипотенуза прямоугольнаго тре—ка, болѣе катета AB.

2) Если $BC = BD$, то $\triangle ABC \cong ABD$ (§ 17), слѣд. $AC = AD$.

3) Если $BE > BC$, и если въ тре—кѣ ABE будетъ проведена линія AD такъ, что $BD = BC$, то $AE > AD$ (§ 28, 3), слѣд. и $AE > AC$.

Слѣдствіе. Перпендикуляръ AB, какъ кратчайшая линія, которую можно провести изъ точки A на плоскость M, служитъ мѣрою разстоянія точки A отъ плоскости M.

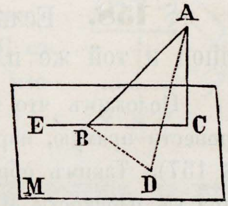


§ **154.** 1) Если изъ концовъ прямой линіи AB опустимъ на какую нибудь площадь M перпендикуляры AC и BD, то прямая CD, соединяющая ихъ основанія C и D, называется проэкціею линіи AB на плоскость M. Плоскость M, въ которой лежитъ проэкція линій AB, называется плоскостью проэкцій, а плоскость ACBD, проходящая чрезъ перпендикуляры AC и BD, — проэктирующею плоскостью.

2) Когда прямая AB пересѣкаетъ плоскость M (какъ въ фигурѣ § 155), тогда проэкція прямой AB будетъ разстояніе (BC) точки пересѣченія B отъ основанія перпендикуляра AC, опущеннаго изъ другаго конца на плоскость. — Уголъ ABC, заключающійся между линіею AB и ея проэкціею BC, называется угломъ наклоненія линіи AB на плоскость M, или просто угломъ линіи AB съ плоскостью M.

§ 155. Уголъ ABC наклоненія линіи AB съ плоскостью M есть самый меньшій изъ всѣхъ угловъ, которые наклонная AB образуетъ съ прямыми, проведенными на плоскости M чрезъ ея основаніе B, напр. съ прямою BD.

Отложимъ $BD = BC$ и проведемъ AD. Такъ какъ $AC \perp M$, то $AC < AD$ (§ 153, 1), слѣд. и $\measuredangle ABC < ABD$ (§ 32).



Слѣдствія. 1) Уголъ ABE, смежный съ ABC, самый большой изъ всѣхъ угловъ, которые прямая AB образуетъ съ прямыми, проведенными въ плоскости M чрезъ ея основаніе B.

2) Уголъ, который наклонная AB образуетъ съ какою нибудь прямую въ плоскости M, тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе уголъ, образуемый этою прямою съ проэкціею наклонной AB. Если двѣ прямыя, проходящія чрезъ точку B въ плоскости M, образуютъ равные углы съ проэкціею прямой AB, то онѣ образуютъ равные углы съ самою прямою AB.

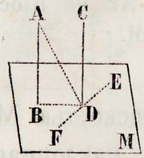
§ 156. Линія DE, проведенная въ плоскости M чрезъ основаніе наклонной AB перпендикулярно къ ея проэкціи BC, перпендикулярна и къ самой наклонной AB.

Отложимъ $BD = BE$ и проведемъ AD, AE, CD, CE, тогда $CD = CE$ (§ 28, 2), слѣд. $AD = AE$ (§ 153, 2), и потому $\triangle ABD \cong ABE$ (§ 24), изъ чего слѣдуетъ, что $\measuredangle ABD = ABE$ и $AB \perp DE$.

Слѣдствія. 1) Прямая DE перпендикулярна къ плоскости, проходящей чрезъ линіи AB и BC (§ 149).

2) Кратчайшее разстояніе линій DE и AC, не параллельныхъ и не встрѣчающихся, есть линія BC, перпендикулярная къ обѣимъ прямымъ, потому что соединивъ двѣ другія произвольныя точки A и E этихъ линіи, мы получимъ $AE > AB > BC$ (§ 23, 1 и § 153, 3).

§ 157. Если изъ двухъ параллельныхъ линій одна (AB) перпендикулярна къ плоскости M, то и другая (CD) перпендикулярна къ этой плоскости.



Соединимъ прямою BD основанія параллельныхъ линій, проведемъ въ плоскости M прямую EF ⊥ BD, и соединимъ точки A и D. Такъ какъ AB ⊥ BD и CD ∥ AB, то и CD ⊥ BD (§ 8 слѣд.). Линія FE перпендикулярна къ плоскости ADB (§ 156, 1), слѣд. и къ линіи CD, лежащей въ этой плоскости. Такъ какъ теперь CD перпендикулярна къ BD и FE, то CD ⊥ M (§ 149).

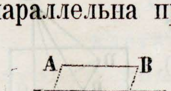
§ 158. Если двѣ прямыя AB и CD перпендикулярны къ одной и той же плоскости M, то онѣ параллельны. (Фиг. § 157).

Положимъ что CD не параллельна AB, тогда чрезъ точку D можно провести прямую, параллельную AB, которая будетъ перпендикулярна къ M (§ 157). Такимъ образомъ мы получили бы въ точкѣ D два перпендикуляра къ плоскости M, что невозможно (§ 151).

§ 159. Двѣ линіи въ пространствѣ, параллельныя третьей, параллельны между собою.

Плоскость, проведенная перпендикулярно къ третьей линіи, должна быть перпендикулярна и къ двумъ остальнымъ (§ 157), потому двѣ первыя прямыя, какъ перпендикуляры къ одной и той же плоскости, параллельны между собою (§ 158).

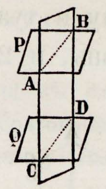
§ 160. Прямая AB параллельна плоскости M, если она параллельна прямой CD, лежащей въ этой плоскости.



Если бы прямая AB, лежащая въ плоскости ABCD, пересѣкла плоскость M, то это могло бы случиться только въ какой нибудь точкѣ прямой CD, общаго пересѣченія обѣихъ плоскостей; но AB ∥ CD, слѣд. прямая AB не можетъ пересѣчь плоскость M.

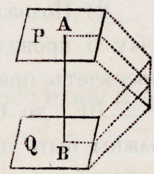
Слѣдствіе. Чрезъ какую нибудь точку внѣ плоскости можно провести безчисленное множество прямыхъ, параллельныхъ этой плоскости. Если чрезъ произвольную точку на плоскости проведутся на ней въ различныхъ направленіяхъ прямыя, а чрезъ точку внѣ плоскости параллельныя имъ, то эти послѣднія будутъ параллельны и плоскости.

§ 161. Пересѣченія AB и CD двухъ параллельныхъ плоскостей P и Q третьею плоскостью, параллельны между собою.



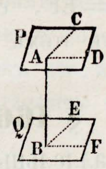
Прямыя AB и CD, лежащія въ одной и той же плоскости, не могутъ пересѣчься, потому что онѣ находятся въ то же время въ параллельныхъ плоскостяхъ P и Q, слѣдовательно параллельны между собою.

§ 162. Двѣ плоскости P и Q, перпендикулярныя къ одной и той же прямой AB, параллельны между собою.



Если бы плоскости пересѣклись, то соединивъ какую нибудь точку C, лежащую на линіи пересѣченія, съ точками A и B, мы получили бы тре—къ ABC съ двумя прямыми углами, что не возможно, слѣд. плоскости P и Q должны быть параллельны.

§ 163. Если двѣ плоскости P и Q параллельны, то прямая AB, перпендикулярная къ одной плоскости Q, перпендикулярна и къ другой P.



Проведемъ чрезъ AB двѣ произвольныя плоскости, которыя пересѣкутъ плоскость P по линіямъ AC и AD, а плоскость Q по линіямъ BE и BF. Такъ какъ AC $\parallel$ BE, AD $\parallel$ BF (§ 161) и $\measuredangle$ ABE $=$ R $=$ ABF (§ 145, 2), то и $\measuredangle$ BAC $=$ R $=$ BAD (§ 8, слѣд.), слѣдовательно AB $\perp$ P (§ 149).

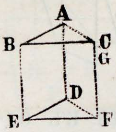
§ 164. Параллельныя линіи AB и CD, заключающіяся между параллельными плоскостями P и Q, равны между собою.

Проведемъ чрезъ AB и CD плоскость, тогда линіи пересѣченія этой плоскости съ плоскостями P и Q параллельны (§ 161), слѣдовательно ABCD параллелограмъ, и потому AB $=$ CD.

Слѣдствія. 1) Параллельныя плоскости во всѣхъ своихъ точкахъ равно удалены другъ отъ друга, потому что прямыя AB и CD и въ такомъ случаѣ будутъ равны, когда онѣ перпендикулярны къ обѣимъ плоскостямъ.

2) Всякая прямая, проведенная между двумя параллельными плоскостями перпендикулярно къ каждой изъ нихъ, служитъ мѣрою разстоянія этихъ плоскостей другъ отъ друга.

§ 165. Если стороны двухъ угловъ ABC и DEF, лежащихъ въ разныхъ плоскостяхъ и обращенныхъ отверстіями въ одну и туже сторону, взаимно параллельны, то 1) такіе углы равны, и 2) плоскости ихъ параллельны.

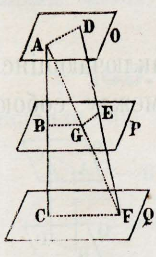


1) Отложимъ BA = ED, BC = EF, и проведемъ AC, DF, BE . . ., тогда ABED будетъ параллелограмъ (§ 34, 2) и потому AD $\#$ BE. Точно также CF $\#$ BE, слѣд. AD $\#$ CF, т. е. ACFD параллелограмъ, откуда AC = DF. Такъ какъ $\triangle$ ABC $\cong$ DEF (§ 24), то $\measuredangle$ ABC = DEF.

2) Положимъ, что плоскости ABC и DEF не параллельны, и что чрезъ точку B проведена плоскость, которая параллельна къ плоскости DEF и пересѣчетъ прямую CF въ точкѣ G, тогда GF = BE (164); но такъ какъ CF = BE, то GF = CF, что невозможно, почему плоскости ABC и DEF должны быть параллельны.

Слѣдствіе. Если соединить концы трехъ равныхъ и параллельныхъ прямыхъ BE, AD, CF, не лежащихъ въ одной плоскости, то образуются равные тре—ки, которыхъ плоскости параллельны. Такъ какъ BE $\#$ AD $\#$ CF, то AB = DE, AC = DF, BC = EF, слѣд. $\triangle$ ABC $\cong$ DEF и по прежнему доказательству плоскости этихъ тре—ковъ параллельны.

§ 166. Двѣ прямыя въ пространствѣ AC и DF дѣлятся параллельными плоскостями O, P, Q на пропорціональныя части.



Соединимъ точки A и F прямою AF, которая пересѣчетъ плоскость P въ точкѣ G, и проведемъ чрезъ точки A, D, F, и чрезъ точки A, C, F плоскости, которыя пересѣкутся съ плоскостями O, P, Q по линіямъ AD, GE и CF, BG. Такъ какъ AD || GE, CF || BG (§ 161), то получаемъ (§ 88)

AB : BC = (AG : GF =) DE : EF.

§ 167. 1) Неопредѣленное пространство, содержащееся между двумя пересѣкающимися плоскостями, называется двуграннымъ угломъ; самыя плоскости сторонами, а линія пересѣченія сторонъ — ребромъ двуграннаго угла.

2) Два двугранные угла равны, если ихъ можно такъ наложить другъ на друга, что ихъ ребра и стороны совпадутъ.

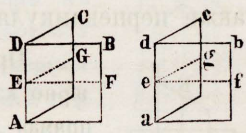
Если одна плоскость пересѣкаетъ другую такъ, что по обѣимъ сторонамъ образуетъ съ ней равные двугранные угла, то эти углы называются **прямыми**, а каждая изъ плоскостей **перпендикулярною** къ другой.

3) Если изъ какой нибудь точки ребра двуграннаго угла въ плоскостяхъ сторонъ возставимъ перпендикуляры къ ребру, то образованный ими уголъ называется **линейнымъ угломъ** двуграннаго, ими **угломъ наклоненія** плоскостей сторонъ.

Плоскость линейнаго угла перпендикулярна къ ребру двуграннаго угла (149).

Въ какой бы точки ребра мы ни образовали линейные углы, всѣ они равны между собою (§ 165).

§ 168. Два двугранные угла BADC и badc относятся какъ ихъ линейные углы FEG и feg.



Если двугранные углы равны, то и ихъ линейные углы также равны. Наложимъ одинъ двугранный уголъ на другой такъ, чтобы они совпали другъ съ другомъ, и точка e упала въ точку E, тогда линіи ef и EF, eg и EG должны такъ же совмѣститься, потому что углы fea и FEA, gea и GEA какъ прямые равны между собою.

Если же двугранные углы не равны, но соизмѣримы, такъ что ихъ общую мѣру, которая также двугранный уголъ, можно отложить въ BADC m разъ, и въ badc n разъ, то будемъ имѣть

$$BADC : badc = m : n.$$

При отложеніи общей мѣры въ двугранныхъ углахъ линейный уголъ FEG раздѣляется на m, а уголъ feg на n равныхъ частей, потому что равнымъ двуграннымъ угламъ соотвѣтствуютъ и равные линейные углы, слѣд. будетъ

$$FEG : feg = m : n.$$

Изъ обѣихъ этихъ пропорцій слѣдуетъ что

$$BADC : badc = FEG : feg.$$

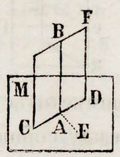
Если углы BADC и badc несоизмѣримы, то разсуждая подобно какъ въ § 53 можно доказать, что отношеніе двугранныхъ угловъ не можетъ быть ни болѣе, ни менѣе отношенія линейныхъ угловъ FEG и feg, и слѣд. будетъ равно ему.

§ 169. Слѣдствія. 1) Двугранный уголъ измѣряется **соотвѣтствующимъ ему линейнымъ угломъ**. Если мы примемъ прямой двугранный уголъ за единицу мѣры двугранныхъ угловъ вообще, то числовая величина всякаго двуграннаго угла будетъ равна числовой величинѣ его линейнаго угла, т. е. всякій изъ нихъ, измѣрянный своею единицею, даетъ одно и тоже число.

2) Такъ какъ измѣреніе двуграннаго угла приводится къ измѣренію соотвѣтствующаго ему линейнаго, то и дуга круга, заключающаяся между сторонами линейнаго угла, можетъ также служить мѣрою соотвѣтствующаго ему двуграннаго угла.

3) Двугранные углы бываютъ острые, прямые, тупые, дополнительные, смежные, вертикальные и. т. д., смотря по тому, какое изъ этихъ названій соотвѣтствуетъ ихъ линейнымъ угламъ. Точно также: двугранные вертикальные углы равны; сумма двухъ смежныхъ двугранныхъ угловъ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ и. т. д.

§ 170. Если прямая AB перпендикулярна къ плоскости M, то и всякая плоскось CF, проведенная чрезъ эту прямую, также перпендикулярна къ плоскости M.



Проведемъ на плоскости M прямую AE перпендикулярно къ линіи CD пересѣченія обѣихъ плоскостей, тогда прямая AB, какъ перпендикуляръ къ плоскости M, будетъ перпендикулярна и къ каждой изъ прямыхъ CD и AE. BAE, уголъ наклоненія обѣихъ плоскостей прямой, слѣдовательно плоскость CF $\perp$ M.

§ 171. Слѣдствія. 1) Если три прямыя AB, AC, AE, пересѣкающіяся въ одной точкѣ A, взаимно перпендикулярны, то всякая изъ нихъ перпендикулярна къ плоскости, проходящей чрезъ двѣ остальныя, и плоскости M, CF и BAE взаимно перпендикулярны,

2) Плоскость угла наклоненія двухъ плоскостей перпендикулярна къ каждой изъ нихъ.

3) Проэктирующая плоскость какой либо прямой перпендикулярна къ плоскости проэкцій.

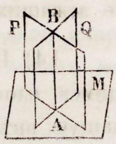
§ 172. Если двѣ плоскости M и CF взаимно перпендикулярны, то прямая AB, проведенная въ одной плоскости CF перпендикулярно къ линіи пересѣченія CD, будетъ перпендикулярна и къ другой плоскости M. (Фиг. § 170).

Если проведемъ въ плоскости M прямую AE $\perp$ CD, то $\measuredangle$ BAE = R, потому что CF $\perp$ M, а такъ какъ и $\measuredangle$ BAC = R, то AB $\perp$ M (§ 149).

§ 173. Если двѣ плоскости M и CF взаимно перпендикулярны, и изъ какой нибудь точки ихъ пересѣченія будетъ проведенъ перпендикуляръ AB къ одной изъ этихъ плоскостей напр. M, то этотъ перпендикуляръ долженъ лежатъ въ другой плоскости CF. (Фиг. § 170).

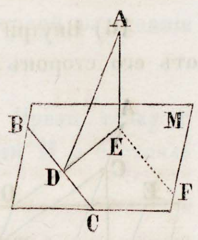
Предположимъ, что AB не лежитъ въ CF, тогда въ этой плоскости изъ точки A можно было бы провести перпендикулярную къ общему сѣченію CD прямую, которая въ тоже время перпендикулярна къ плоскости M (§ 172); слѣдовательно въ точкѣ A мы имѣли бы два перпендикуляра къ плоскости M, что невозможно (§ 151).

§ 174. Если двѣ плоскости P и Q перпендикулярны къ третьей M, то и линія AB пересѣченія двухъ первыхъ плоскостей перпендикулярна къ третьей плоскости.



Если возставимъ изъ точки A перпендикуляръ къ плоскости M, то онъ долженъ находиться въ плоскости P и въ плоскости Q (§ 173), слѣдовательно этотъ перпендикуляръ будетъ общимъ пересѣченіемъ AB плоскостей P и Q.

§ 175. Задачи.



1) Опустить перпендикуляръ на плоскость M изъ точки A, лежащей внѣ плоскости.

2) Изъ данной точки, лежащей на плоскости M, возставить перпендикуляръ къ этой послѣдней.

3) Чрезъ точку P, лежащую 1) на прямой AB, 2) внѣ прямой AB, провести плоскость, перпендикулярную къ этой прямой.

4) Провести плоскость, параллельную данной плоскости M и проходящую чрезъ точку A.

5) Провести плоскость, которая бы проходила чрезъ точку A, и отстояла на одно и тоже разстояніе отъ трехъ данныхъ точекь O, M, N.

6) На данной плоскости M найти точку, равно удаленную отъ данныхъ точекъ O, P, Q, лежащихъ внѣ этой плоскости.

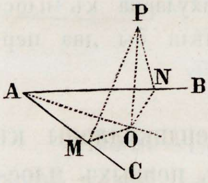
7) На плоскости даны три точки A, B, C, не лежащія на одной прямой; найти внѣ плоскости точку, равно отстоящую отъ данныхъ.

8) Провести чрезъ данную прямую AD плоскость, которая бы была перпендикулярна къ данной плоскости M, 1) если AD лежитъ въ плоскости M (фиг. § 170), 2) если AD пересѣкаетъ плоскость M (фиг. § 157).

9) Чрезъ данную точку P провести плоскость, параллельную данной прямой AB, и перпендикулярную данной плоскости M.

10) Провести плоскость, которая бы была равно удалена отъ данныхъ точекъ A, B, C, D, не лежащихъ въ одной и тойже плоскости.

11) Дана плоскость M и двѣ точки A и B внѣ ея. Провести на плоскости M прямую, которой разстоянія отъ A и B равнялись бы линіямъ a и b.



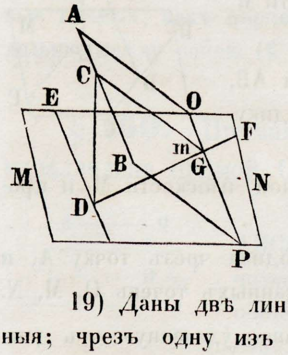
12) Даны двѣ прямыя AB и AC, которыя пересѣкаются въ точкѣ A. Провести плоскость такъ, чтобы каждая точка этой плоскости, напр. точка P, была равно удалена отъ прямыхъ AB и AC.

13) Провести плоскость, равно отстоящую отъ трехъ данныхъ не лежащихъ въ одной и тойже плоскости, параллельныхъ A, B, C.

14) Провести плоскость, перпендикулярную къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ M и N такъ, чтобы она прошла чрезъ точку P, лежащую внѣ этихъ плоскостей.

15) Чрезъ точку P провести прямую параллельно пересѣкающимся плоскостямъ M и N.

16) Внутри двуграннаго угла провести прямую, которой разстоянія отъ его сторонъ равнялись бы линіямъ m и n.



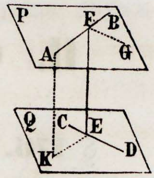
17) Провести плоскость, которая бы проходила чрезъ прямую OP, лежащую на плоскости MN, и составляла съ этою плоскостью уголъ, равный m.

18) Чрезъ прямую AB, параллельную данной плоскости MN, провести плоскость, катораяа бы составила съ данной плоскостью уголъ m.

19) Даны двѣ линіи AB и DF, не пересѣкающіяся и не параллельныя; чрезъ одну изъ нихъ (DF) провести плоскость, параллельную другой AB.

20) Чрезъ данную точку P провести прямую, которая бы пересѣкла двѣ не пересѣкающіяся и не параллельныя прямыя M и N.

21) Чрезъ данную точку P провести плоскость, которая бы была параллельна двумъ линіямъ M и N, не пересѣкающимся и не параллельнымъ.



22) Чрезъ двѣ линіи AB и CD, не пересѣкающіяся и не параллельныя, провести двѣ параллельныя плоскости.

23) Найти кратчайшее разстояніе двухъ линіи AB и CD, не пересѣкающихся и не параллельныхъ, т. е. провести прямую, перпендикулярную къ линіямъ AB и CD (§ 156, 2).

24) Чрезъ точку P, лежащую внѣ плоскости M, провести къ этой послѣдней наклонную, которая бы была параллельна данной плоскости N, и равнялась данной прямой Q.

25) Даны точка P, плоскость M и параллельная ей прямая AB. Чрезъ точку P провести прямую, которая бы пересѣкла линію AB и плоскость M такъ, чтобы отрѣзокъ ея, заключающійся между линіею AB и плоскостью M, равнялся прямой a.

26) Между двумя линіями AB и CD, не лежащими въ одной плоскости, провести прямую, параллельную линіи EF, которая не лежитъ ни съ одною изъ данныхъ линій въ одной плоскости.

27) Чрезъ данную прямую AB провести плоскость, которой разстояніе отъ данной точки P равнялось бы прямой a.

28) Чрезъ данную точку P провести плоскость, которой разстояніе отъ данной прямой AB равнялось бы прямой a.

29) Дана плоскость M, прямая AB и точка P. Чрезъ точку P провести прямую, которая бы была параллельна плоскости M и отстояла отъ прямой AB на разстояніе a.

30) Чрезъ точку P провести прямую, которой разстоянія отъ двухъ данныхъ прямыхъ AB и CD, не лежащихъ въ одной плоскости, равнялись бы линіямъ a и b.

31) Даны двѣ не лежащія въ одной плоскости прямыя AB и CD. На одной изъ нихъ опредѣлить точку, которая 1) отстояла бы отъ другой прямой на разстояніе a, 2) была бы равно удалена отъ другой прямой и отъ точки P, лежащей внѣ обѣихъ прямыхъ.

32) Дана плоскость M, прамая AB и точка P. На прямой найти точку, равно удаленную отъ точки P и плоскости M.

33) Провести плоскость такъ, чтобы она имѣла отъ данныхъ точехъ A, B, C, не лежащихъ на одной прямой, разстоянія a, b, c.

II. О многогранныхъ углахъ.

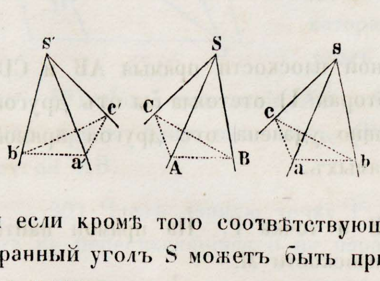
§ 176. 1) Если нѣсколько плоскостей пересѣкаются въ одной и тойже точкѣ, то неопредѣленное пространство, заключающееся между этими плоскостями, называется *многограннымъ* или *тѣлеснымъ угломъ*, а точка общаго пересѣченія плоскостей — *вершиною* многограннаго угла.

Плоскости, составляющія многогранный уголъ, называются его *сотoронами* или *гранями*, а прямыя линіи, по которымъ пересѣкаются стороны, — *ребрами* угла. Линейные углы, составляемые ребрами, называются *плоскими углами*. Каждыя двѣ послѣдовательныя грани образуютъ двугранный уголъ.

По числу граней или плоскихъ угловъ, которое всегда равно числу реберъ, тѣлесные углы бываютъ 3, 4, 5 . . . гранные. Подъ именемъ *частей* тѣлеснаго угла подразумѣваются его плоскіе и двугранные углы, напр. трегранный уголъ имѣетъ шесть частей, три плоскихъ угла и три двугранныхъ.

2) Два тѣлесные углы *равны*, когда при наложеніи другъ на друга они совпадаютъ всѣми своими частями.

Въ равныхъ тѣлесныхъ углахъ всѣ плоскіе и двугранные углы одного порознь равны тѣмъ же частямъ другаго, но обратно изъ равенства частей двухъ тѣлесныхъ угловъ слѣдуетъ равенство самыхъ угловъ только въ такомъ случаѣ, когда соотвѣтственно равныя части въ обоихъ углахъ *одинаково расположены*. Если же равныя части расположены въ обратномъ порядкѣ, напр. въ одномъ углѣ такой порядокъ слѣва на право, какой въ другомъ справа на лѣво, то такіе тѣлесные углы при наложеніи совмѣститься не могутъ и называются *симметрическими*.

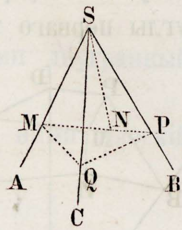


Если въ трегранныхъ углахъ S, s, s′ будетъ

$$\measuredangle ASB = asb = a's'b'$$
$$\measuredangle ASC = asc = a's'c'$$
$$\measuredangle BSC = bsc = b's'c',$$

и если кромѣ того соотвѣтствующіе двугранные углы равны, тогда трегранный уголъ S можетъ быть приведенъ въ совпаденіе съ угломъ s, но не можетъ совпадать съ угломъ s′. Углы S и s равны между собою, но S и s′ симметричны. Два тѣлесные угла, симметричные третьему, равны между собою.

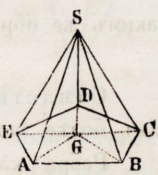
§ 177. Во всякомъ трегранномъ углѣ SABC сумма двухъ плоскихъ угловъ болѣе третьяго.



Если всѣ плоскіе углы равны, то предложеніе ясно само собою; если же они не равны, то слѣдуетъ только доказать, что наибольшій уголъ менѣе суммы двухъ остальныхъ. Пусть ASB наибольшій изъ плоскихъ угловъ. Соединимъ двѣ произвольныя точки на сторонахъ этого угла прямою MP и отложимъ въ его плоскости уголъ $MSN = ASC$, а на ребрѣ SC линію $SQ = SN$. Проведемъ прямыя MQ и PQ, тогда $\triangle MSN \cong MSQ$ (§ 17), слѣд. $MN = MQ$. Такъ какъ $MQ + PQ > PM$, то и $PQ > PN$. Въ тре—кахъ PSQ и PSN сторона PS общая, а $SQ = SN$, слѣд. $\measuredangle PSQ > PSN$ (§ 32), и такъ

$$PSQ + MSQ > PSN + MSN \text{ или}$$
$$BSC + ASC > ASB.$$

§ 178. Во всякомъ многогранномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ всегда менѣе четырехъ прямыхъ.



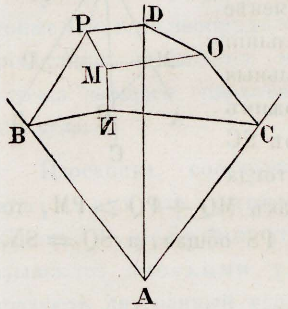
Пересѣчемъ стороны угла S произвольною плоскостію ABCDE, и изъ какой нибудь точки G происшедшаго мно—ка проведемъ къ вершинамъ его угловъ прямыя; тогда около G ѹбразуется столько же тре—ковъ AGB, BGC . . ., сколько ихъ находится около вершины S многограннаго угла, слѣд. и сумма угловъ какъ тѣхъ, такъ и другихъ тре—ковъ будетъ одна и таже. Но по § 177

$$\measuredangle ABC < SBA + SBC,$$
$$\measuredangle BCD < SCB + SCD \text{ и т. д.,}$$

посему сумма угловъ мно—ка ABCDE менѣе суммы угловъ при основаніяхъ тре—ковъ ASB, BSC . . ., слѣд. сумма угловъ ASB, BSC . . . при вершинѣ S должна быть менѣе суммы угловъ около точки G, т. е. менѣе четырехъ прямыхъ.

Примѣчаніе. Если одинъ или нѣсколько угловъ мно—ка ABCDE входящіе, т. е. такіе, которыхъ отверстія обращены къ внѣшней сторонѣ мно—ка, то сумма плоскихъ угловъ при вершинѣ S можетъ быть равна или болѣе четырехъ прямыхъ.

§ 179. Если изъ произвольной точки M внутри треграннаго угла ABCD проведутся плоскости перпендикулярно къ его ребрамъ, то эти плоскости образуютъ другой трегранный уголъ MNOP, котораго плоскіе углы дополняютъ соотвѣтствующіе двугранные углы, а двугранные соотвѣтствующіе плоскіе углы перваго трегграннаго угла до двухъ прямыхъ.



Пусть ребра трегграннаго угла A пересѣчены плоскостями въ точкахъ B, C, D. По самому построенію уголъ NBP есть линейный двугграннаго угла при ребрѣ AB, слѣд. $\measuredangle$ ABN = R и равнымъ образомъ $\measuredangle$ ACN = R. Плоскости BM и CM перпендикулярны къ плоскости BAC, проходящей чрезъ перпендикуляры AB и AC къ плоскостямъ BM и CM (§ 170); слѣд. прямая MN $\perp$ BAC (§ 174), а потому $\measuredangle$ MNB = R = MNC, такъ что BNC есть линейный уголъ двугграннаго при ребрѣ MN. Точно также можно доказать, что $\measuredangle$ MPB = R = MPD. Такъ какъ въ четыреугольникѣ MNBP сумма всѣхъ угловъ равна 4R, и углы N и P прямые, то

$$\measuredangle \text{NBP} + \text{NMP} = 2\text{R}.$$

Въ четыреугольникѣ BACN по той же причинѣ

$$\measuredangle \text{BAC} + \text{BNC} = 2\text{R}.$$

Такимъ же образомъ можно доказать, что

$$\measuredangle \text{NCO} + \text{NMO} = 2\text{R}. \text{ и т. д.}$$

Слѣдствіе. Чѣмъ тупѣе одинъ изъ обоихъ трегранныхъ угловъ, тѣмъ болѣе заостренъ другой и обратно.

Ребра каждаго изъ этихъ угловъ перпендикулярны къ сторонамъ другаго.

Каждый изъ трегранныхъ угловъ A и M называется полярнымъ угломъ другаго.

§ 180. Во всякомъ трегранномъ углѣ сумма трехъ двугранныхъ угловъ болѣе 2 прямыхъ и мѣнѣе 6 прямыхъ.

Обозначимъ чрезъ A, B, C двугранные углы даннаго трегграннаго угла, и чрезъ M, N, P соотвѣтствующіе плоскіе углы его полярнаго угла, тогда (§ 179)

$$\text{A} + \text{M} = 2\text{R}$$
$$\text{B} + \text{N} = 2\text{R}$$
$$\text{C} + \text{P} = 2\text{R}, \text{ слѣд.}$$
$$(\text{A} + \text{B} + \text{C}) + (\text{M} + \text{N} + \text{P}) = 6\text{R}.$$

Такъ какъ M + N + P < 4R (§ 178), то

$$\text{A} + \text{B} + \text{C} > 2\text{R} \text{ и}$$
$$\text{A} + \text{B} + \text{B} < 6\text{R}.$$

§ 181. **Два трегранные угла равны между собою или симметричны, если въ нихъ соотвѣтственно равны:**

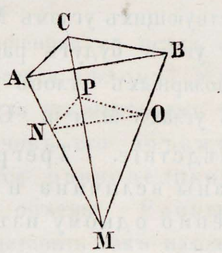
1) три плоскіе угла, или

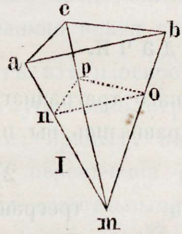
2) три двугранные угла, или

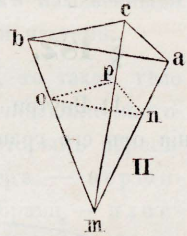
3) два плоскіе угла и лежащій между ними двугранный уголъ, или

4) два двугранные угла и лежащій между ними плоскій уголъ.

Докажемъ, что всѣ части трегранныхъ угловъ M, m (I) и m (II) удовлетворяющихъ одному изъ 4хъ приведенныхъ условій соотвѣтственно равны, при чемъ углы M и m (I), въ кото рихъ соотвѣтственно равныя части одинаково расположены, равны между собою, а углы M и m (II) симметричны, потому что въ нихъ соотвѣтственно равныя части расположены въ обратномъ порядкѣ. Представимъ себѣ что во всѣхъ трегранныхъ углахъ грани MBC и mbc лежатъ въ плоскости бумаги, а ребра MA и ma выдаются передъ бумагою. — Доказательство равенства частей въ равныхъ и симметричныхъ трегранныхъ углахъ одно и тоже. Соотвѣтствующіе двугранные углы тѣлесныхъ угловъ будемъ называть чрезъ A, B, C и a, b, c.







1) Пусть $\measuredangle AMB = amb$, $\measuredangle AMC = amc$, $\measuredangle BMC = bmc$. Отложимъ на двухъ соотвѣтствующихъ ребрахъ равные отрѣзки MN и mn, и изъ точекъ N и n проведемъ плоскости PNO и pno, перпендикулярныя къ ребрамъ AM и am. Тогда легко выводится, что

$$\triangle MNO \cong mno,\ \measuredangle MNP \cong mnp,$$
$$\triangle MOP \cong mop,\ \triangle NOP \cong nop,$$

слѣд. $\measuredangle ONP = onp$, т. е. $\measuredangle A = a$. Такимъ же построеніемъ на другихъ ребрахъ можно доказать, что $\measuredangle B = b$ и $\measuredangle C = c$. Изъ этого слѣдуетъ равенство угловъ M и m (I), и симметричность угловъ M и m (II).

2) Пусть $A = a$, $B = b$, $C = c$. Если построимъ полярные углы, соотвѣтствующіе даннымъ треграннымъ M и m, то въ нихъ плоскіе углы равны, потому что дополняютъ равные углы до 2R. (§ 179), слѣд. по предъидущему и соотвѣтствующіе двугранные углы также равны. Отсюда слѣдуетъ обратно равенство соотвѣтствующихъ пло-

скихъ угловъ данныхъ трегранныхъ M и m, потому M и m (I) равны, а M и m (II) симметричны.

3) Пусть $\measuredangle AMB = amb$, $\measuredangle AMC = amc$, $A = a$. Если при ребрахъ MA и ma сдѣлаемъ тоже построеніе какъ въ первомъ случаѣ, тогда по нашему условію $\measuredangle ONP = onp$. Такъ какъ

$$\triangle MNO \cong mno, \triangle MNP \cong mnp,$$
$$\triangle NOP \cong nop, \triangle MOP \cong mop,$$

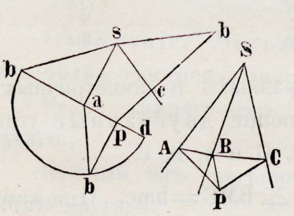
то $\measuredangle BMC = bmc$, слѣд. по первому случаю и $B = b$, $C = c$.

4) Пусть $A = a$, $B = b$, $\measuredangle AMB = amb$. Въ полярныхъ углахъ соотвѣтствующихъ угламъ M и m два плоскіе и лежащій между ними двугранный уголъ будутъ равны, слѣд. по третьему случаю и остальныя части полярныхъ угловъ также равны, изъ чего слѣдуетъ, что въ данныхъ углахъ M и m $C = c$, $\measuredangle AMC = amc$, $\measuredangle BMC = bmc$.

Слѣдствіе. Трегранный уголъ вполнѣ опредѣляется, если даны величина и расположеніе трехъ его частей, соотвѣтственно одному изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ.

§ 182. Задачи.

1) Внутри даннаго треграннаго угла найти точку, которой разстоянія отъ его граней равнялись бы прямымъ a, b, c.



2) По даннымъ тремъ плоскимъ угламъ треграннаго угла SABC найти съ помощію построенія на плоскости одинъ изъ его двугранныхъ угловъ, напр. уголъ, лежащій при ребрѣ AS.

3) Въ трегранномъ углѣ SABC даны два плоскихъ угла ASB и ASC, и заключающійся между ними двугранный уголъ BAP. Найти построеніемъ на плоскости третій плоскій уголъ.

4) Въ трегранномъ углѣ даны два его двугранные угла A и B, и заключающійся между ними плоскій уголъ M. Найти два остальные плоскіе угла и третій двугранный уголъ.

5) По тремъ двуграннымъ угламъ A, B, C треграннаго угла найти его плоскіе углы.

6) Построить трегранный уголъ по тремъ даннымъ плоскимъ угламъ ASB, ASC, CSD.

7) Построить трегранный уголъ по двумъ даннымъ его плоскимъ угламъ и заключающемуся между ними двугранному углу.

8) Построить трегранный уголъ, равный данному углу SABC.

9) При данной прямой въ данной точкѣ построить трегранный уголъ, равный данному.

III. О Многогранникахъ.

§ 183. 1) Часть пространства, ограниченная со всѣхъ сторонъ кривыми поверхностями или плоскостями, называется тѣломъ, а граница или предѣлъ тѣла — его поверхностью. Если мы измѣряемъ тѣло съ помощію соотвѣтствующей единицы, то получимъ его объемъ. Два тѣла, независимо отъ ихъ формы, называются равновеликими или равномѣрными, если они имѣютъ равные объемы. Равными же тѣла называются тогда, когда можно ихъ представить такъ наложенными другъ на друга, что они совпадутъ взаимно всѣми своими частями.

2) Если поверхность тѣла состоитъ изъ плоскостей, то такое тѣло называется многогранникомъ. Многоугольники, ограничивающіе многогранникъ, называются его сторонами; прямыя, по которымъ пересѣкаются стороны, — ребрами, точки пересѣченія реберъ — вершинами, а углы, образованные двумя послѣдовательными ребрами — плоскими углами. При каждомъ ребрѣ лежитъ двугранный уголъ, а при каждой вершинѣ — многогранный или по крайней мѣрѣ трегранный уголъ.

Изъ многогранниковъ мы будемъ разсматривать только выпуклые т. е. такіе, въ которыхъ каждый двугранный уголъ менѣе 2R, такъ что каждая сторона многогранника при своемъ продолженіи не встрѣтитъ поверхности многогранника.

3) Всякая прямая, соединяющая двѣ вершины многогранника и не лежащая въ плоскости какой—либо его стороны, называется діагональю многогранника. Плоскость, разсѣкающая многогранникъ и проходящая чрезъ ребро и вершину или чрезъ два ребра, называется діагональною плоскостью.

4) Многогранники называются подобными, если они огранничены подобными и одинаково расположенными сторонами, пересѣкающимися подъ соотвѣтственно равными двугранными углами.

5) Изъ опредѣленія равенства тѣлъ видно, что въ равныхъ многогранникахъ всѣ части (стороны, ребра, плоскіе и двугранные углы) одного должны быть равны соотвѣтствующимъ частямъ другаго, и что равныя

части совершенно одинаково расположены, если мы помѣстимъ оба многогранника какими либо двумя соотвѣтственными сторонами по одну и туже сторону какой либо плоскости.

Но обратно изъ равенства всѣхъ частей не слѣдуетъ всегда равенство самыхъ многогранниковъ. Если соотвѣтственно равныя части расположены въ обратномъ порядкѣ, то многогранники будутъ симметричны и при наложеніи другъ на друга не совпадутъ всѣми своими частями.

Два многогранника, симметричные третьему, равны между собою. — Изображеніе многогранника въ плоскомъ зеркалѣ симметрично ему самому.

§ 184. Многогранникъ, въ которомъ двѣ противоположныя стороны равные и параллельные многоугольники, а всѣ прочія стороны параллелограмы, называется призмою. Эти два противоположныхъ многоугольника служатъ основаніями призмы. Совокупность площадей всѣхъ параллелограмовъ составляетъ боковую поверхность призмы. Призмы бываютъ трехсторонними, четырехсторонними..., смотря по числу сторонъ многоугольниковъ, служащихъ основаніями.

Высота призмы есть разстояніе между ея основаніями, т. е. перпендикуляръ, опущенный изъ произвольной точки верхняго основанія на нижнее. Прямыя, по которымъ пересѣкаются плоскости, образующія боковую поверхность, называются боковыми ребрами. — Если боковыя ребра перпендикулярны къ основанію, тогда призма называется прямою, и каждое ребро равно высотѣ призмы; во всякомъ же другомъ положеніи ребръ призма называется косою, или наклонною, и ея высота менѣе боковаго ребра.

Всякое сѣченіе призмы плоскостью, параллельною основанію, образуетъ фигуру, равную основанію, потому что въ полученномъ такимъ образомъ мно—кѣ и въ основаніи какъ стороны такъ и углы соотвѣтственно равны (§ 161, § 33, § 165).

Каждой вершинѣ призмы прилежатъ три плоскіе угла. Всякая n—сторонная призма имѣетъ $n + 2$ ограничивающихъ ее плоскостей, $2n$ вершины и $3n$ реберъ.

§ 185. 1) Если основаніе призмы будетъ параллелограмъ, то такую призму называютъ параллелепипедомъ, слѣд. параллелепипедъ ограничивается шестью параллелограмами.

Въ параллелепипедѣ каждые два противолежащіе параллелограма, напр. AF и DG равны другъ другу и лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ, потому что стороны этихъ параллелограмовъ соотвѣтственно равны и параллельны ($AB \# DC$, $AE \# DH$...), слѣд. и углы параллелограмовъ равны (§ 165, 1) а потому AF ≅ DG и AF ∥ DG (§ 165, 2).

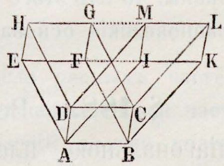
Всякія двѣ противолежащія стороны параллелепипеда можно разсматривать какъ основанія. Разстояніе сторонъ, принятыхъ за основанія, будетъ высота параллелепипеда.

Параллелепипедъ, въ которомъ боковыя стороны перпендикулярны къ основанію, называется прямымъ, въ противномъ же случаѣ — косымъ. Очевидно, что въ прямомъ параллелепипедѣ всѣ боковыя стороны прямоугольники; если сверхъ того и основанія прямоугольники, то параллелепипедъ называется прямоугольнымъ. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ каждыя двѣ пересѣкающіяся стороны образуютъ прямые двугранные углы.

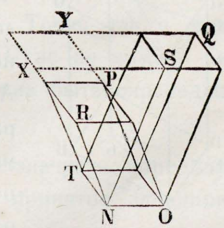
2) Кубомъ называется прямоугольный параллелепипедъ, ограниченный со всѣхъ сторонъ квадратами.

§ 186. Два параллелепипеда, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики.

Дадимъ параллелепипедамъ такое положеніе, что ихъ нижнія основанія совмѣстятся, а верхнія будутъ лежать въ одной и тойже плоскости. При этомъ могутъ быть два случая, а именно будутъ кромѣ того двѣ боковыя стороны лежать въ одной плоскости или нѣтъ.

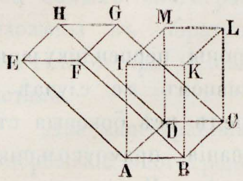


1) Параллелепипеды AH и AL, имѣющіе общее основаніе ABCD, ограничены съ двухъ боковъ параллельными плоскостями ABKE и DCLH, отчего ихъ верхнія основанія лежатъ между параллельными прямыми EK и HL. — Двѣ трехстороннія призмы AEIDHM и BFKCGL равны, такъ какъ легко доказать, что всѣ ихъ части соотвѣтственно равны и совершенно одинаково расположены. Если мы отнимемъ отъ всего тѣла ABHL первую призму, то получимъ параллелепипедъ AL, а если отнимемъ вторую, то получимъ параллелепипедъ BH, изъ чего слѣдуетъ, что эти параллелепипеды равны между собою.

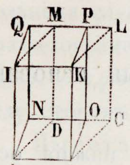


2) Параллелепипеды NP и NQ имѣютъ общее нижнее основаніе TO, а верхнія основанія лежатъ въ одной плоскости, но не между параллельными прямыми. Продолжимъ плоскости OS, TQ, TR, OE, чтобы образовать новый параллелепипедонъ NG, который будетъ имѣть основаніями TO и XY. Такъ какъ по предъидущему каждый изъ данныхъ параллелепипедовъ равенъ этому новому, то они должны быть равны и между собою.

§ 187. Всякій параллелепипедъ ABCDEFH можетъ быть обращенъ въ прямоугольный, имѣющій съ нимъ равновеликое основаніе и равную высоту.

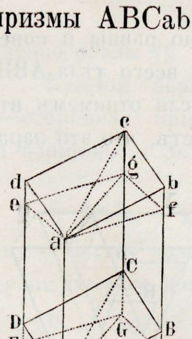


Проведемъ чрезъ ребра AB, BC, CD, AD плоскости, перпендикулярныя къ нижнему основанію ABCD, и продолжимъ до пересѣченія съ ними плоскость верхняго основанія, тогда полученный такимъ образомъ параллелепипедъ ABML будетъ имѣть съ даннымъ одно и тоже основаніе и равную высоту, а потому будетъ равновеликъ данному (§ 186). Если теперь AC прямоугольникъ, то прямоугольный параллелепипедъ ABML и будетъ требуемый.



Если же AC не прямоугольникъ, то стоитъ только чрезъ ребра AI и BK провести плоскости, перпендикулярныя къ сторонѣ ABKI, и продолжать сторону CLMD, тогда образуется прямоугольный параллелепипедъ ABPQ, который равновеликъ съ ABML (§ 186, 1), потому что за основаніе обоихъ параллелепипедовъ можно принять ихъ общую сторону ABIK. Кромѣ того, такъ какъ въ этихъ параллелепипедахъ основанія равновелики, ABON = ABCD (§ 79, слѣд.), и высоты равны, то изъ этого слѣдуетъ, что параллелепипеды ABGH и ABPQ имѣютъ равновеликіе основанія, равныя высоты и объемы.

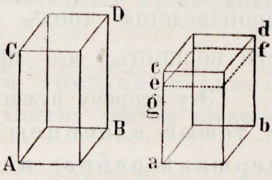
§ 188. Всякій параллелепипедъ ABCDabcd раздѣлится діагональною плоскостью на двѣ равновеликія трехсторонніа призмы ABCabc и ADCadc.



Проведемъ чрезъ оконечности ребра Aa перпендикулярныя къ нему плоскости, тогда параллелепипедъ AFGEafge, образованный пересѣченіемъ этихъ плоскостей съ боковыми сторонами даннаго параллелепипеда будетъ прямой и раздѣляется діагональною плоскостью на двѣ равныя призмы AFGafg и AEGaeg, потому что ихъ части равны и одинаково расположены. Такъ какъ по той же самой причины многогранныя тѣла ABCGF и abcgf, ACDEG и acdeg попарно равны, то половины прямаго параллелепипеда равновелики по одиначкѣ косымъ призмамъ ABCabc и ADCadc, слѣд. и эти послѣднія также равновелики другъ другу.

Слѣдствіе. Трехстороннія призмы, на которыя раздѣляется косой параллелепипедъ діагональною плоскостью, симметричны другъ другу.

§ 189. Прямоугольные параллелепипеды AD и ad, имѣющіе равныя основанія, относятся какъ ихъ высоты.



Если высоты AC и ac соизмѣримы и ихъ общая мѣра заключается m разъ въ AC, и n разъ въ ac, тогда

$$AC : ac = m : n.$$

Представимъ себѣ, что по всей длинѣ сторонъ AC и ac отложена общая мѣра и чрезъ полученныя такимъ образомъ точки дѣленія проведены плоскости, параллельныя основаніямъ параллелепипедовъ, тогда AD раздѣлится на m, и ad на n равныхъ параллелепипедовъ (§ 186), такъ что

$$AD : ad = m : n.$$

Изъ обѣихъ пропорцій получимъ

$$AD : ad = AC : ac.$$

Эта пропорція должна существовать и въ такомъ случаѣ, когда высоты AC и ac несоизмѣримы. Положимъ что эта пропорція не вѣрна, а существуетъ другая

$$AD : ad = AC : ag,$$

гдѣ $ag < ac$. Раздѣлимъ сторону AC на токое число равныхъ частей, чтобы каждая изъ нихъ была $< gc$. Если будемъ откладывать эти части на линіи ac, начиная отъ точки a, то одно изъ дѣленій должно упасть гдѣ нибудь въ точкѣ e между g и c. Проведемъ чрезъ точку e плоскость, параллельную плоскости ab, тогда параллелепипеды AD a af, имѣющіе соизмѣримыя высоты, будутъ относиться

$$AD : af = AC : ac.$$

Изъ обѣихъ пропорцій получимъ

$$ad : af = ag : ae,$$

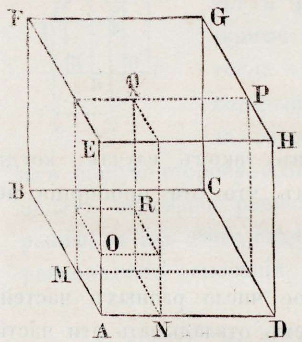
что невозможно, потому что $ad > af$, а $ag < ae$. Точно также можно доказать, что четвертый членъ пропорціи $AD : ad = AC : ac$ не можетъ быть болше линіи ac, а потому эта пропорція всегда должна быть справедлива.

§ 190. Измѣрить какое нибудь тѣло значитъ опредѣлить, сколько разъ заключается въ немъ другое тѣло, принятое за единицу мѣры. Какъ для измѣренія площадей пользуются квадратомъ, построеннымъ на единицѣ длины, точно также для измѣренія объема или кубическаго содержанія тѣла употребляютъ за единицу кубъ, котораго ребро есть какая нибудь единица длины. Кубъ, котораго ребро футъ, дюймъ и т. д., называется кубическимъ футомъ, дюймомъ и т. д.

Для опредѣленія объема тѣла нѣтъ надобность, измѣрять его непосредственно кубическою единицею, но достаточно измѣрять линейною единицею нѣкоторыя линіи, отъ которыхъ зависитъ величина тѣла.

§ 191. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію трехъ его реберъ, пересѣкающихся въ одной изъ его вершинъ, или произведенію его основанія на высоту.

Эту теорему нужно понимать такъ: Если мы измѣряемъ одною и тоюже единицею длины три пересѣкающіяся въ одной вершинѣ ребра, и получимъ числа m, n, p, то параллелепипедъ, измѣрянный соотвѣтствующею кубическою единицею, дастъ число mnp.



Положимъ, что AG прямоугольный параллелепипедъ, и какая нибудь единица линейной мѣры, напр. футъ, заключается m разъ въ ребрѣ AB, n разъ въ AD, p разъ въ AE, при чѣмъ m, n, p могутъ быть цѣлыми дробными и ирраціональными числами. Отложимъ отъ вершины A по тремъ ребрамъ линіи AM, AN, AO, равныя единицѣ длины, такъ что $AB = m \,.\, AM$, $AD = n \,.\, AN$, $AE = p \,.\, AO$. Проведемъ чрезъ точку M плоскость, параллельную сторонѣ AH, чрезъ точку N плоскость параллельную сторонѣ AF, и чрезъ точку O плоскость параллельную основанію AC, тогда полученное такимъ образомъ тѣло AR будетъ кубическая единица, соотвѣтствующая принятой нами линейной. Такъ какъ параллелепипедъ AQ и кубъ AR имѣютъ общее основаніе, то они относятся какъ $AE : AO$ (§ 189), и такъ какъ AE равна p разъ взятой линіи AO, то и кубъ AR нужно взять p разъ, чтобы образовать параллелепипедъ AQ, слѣд.

$$AQ = p \,.\, AR.$$

Параллелепипеды AP и AQ имѣютъ общее основаніе ME и при томъ $AD = n \,.\, AN$, потому AQ должно взять n разъ, чтобы образовать AP, слѣд.

$$AP = n \,.\, AQ \text{ или } AP = n \,.\, p \,.\, AR.$$

Наконецъ параллелепипеды AG и AP имѣютъ общее основаніе AH и кромѣ того $AB = m \,.\, AM$, слѣд.

$$AG = m \,.\, AP, \text{ и такъ какъ } AP = n \,.\, p \,.\, AR, \text{ то}$$

$$AG = mnp \,.\, AR \quad \text{или} \quad \frac{AG}{AR} = mnp.$$

Такъ какъ mn есть площадь основанія, и p высота даннаго параллелепипеда AG, то его объемъ mnp равенъ произведенію основанія mn на высоту p.

Если m, n, p цѣлыя числа, напр. 3, 4, 5, то отложивъ принятую линейную единицу на ребрахъ AB, AD, AE и проведя изъ точекъ дѣленія плоскости параллелныя сторонамъ параллелепипеда, мы убѣдимся наглядно, что онъ заключаетъ $3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 60$ соотвѣтствующихъ кубическихъ единицъ.

Слѣдствія. 1) Объемъ куба равенъ третьей степени числа, выражающаго длину его ребра. Посему третью степень числа называютъ его кубомъ.

2) Если двѣ какія нибудь линейныя мѣры относятся какъ $m:n$, то соотвѣтствующія кубическія мѣры относятся какъ $m^3:n^3$. Нпр.

1 Метръ = 10 дециметровъ = 100 сантиметровъ,

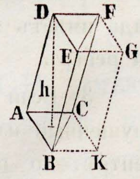
1 кубичный метръ = 1000 куб. децим. = 1000000 куб. сантим.

1 футъ = 12 дюймамъ, 1 куб. футъ = 1728 куб. дюймамъ.

§ 192. Объемъ всякаго параллелепипеда равенъ произведенію изъ его основанія на высоту.

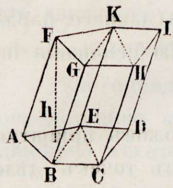
Такъ какъ всякій параллелепипедъ равновеликъ прямоугольному, имѣющему съ нимъ равновеликое основаніе и равную высоту (§ 187), а объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію основанія на высоту (§ 191), то и объемъ всякаго параллелепипеда равенъ произведенію основанія на высоту.

§ 193. Объемъ всякой призмы равенъ произведенію ея основанія на высоту.



1) Разсмотримъ сначала треугольную призму ABCDEF которой высота h. Проведя изъ точекъ B, C, E, F линіи, параллельныя ребрамъ AC, AB, DF, DE, дополнимъ призму до параллелепипеда AG, имѣющаго туже высоту h. Такъ какъ $AG = ABKC \times h$ (§ 192) и призма $ABCDEF = \frac{1}{2} AG$ (§ 188), то

$$ABCDEF = \frac{ABKC}{2} \times h = ABC \times h.$$



2) Многоугольную призму ABCDEFGHIK можно раздѣлить на нѣсколько треугольныхъ, имѣющихъ съ нею туже высоту h. Объемы этихъ призмъ будутъ, $ABE \times h$, $BCE \times h$, $CDE \times h$, слѣд. сумма ихъ, т. е. объемъ многоугольной призмы равна

$$(ABE + BCE + CDE)\,h = ABCDE \times h.$$

§ 194. Слѣдствія. 1) **Два параллелепипеда или двѣ призмы, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.**

2) **Параллелепипеды или призмы относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.**

3) **Параллелепипеды или призмы, имѣющія равновеликія основанія, относятся какъ ихъ высоты, а имѣющія равныя высоты, относятся какъ основанія.**

§ 195. 1) Многогранникъ, котораго одна сторона многоугольникъ, а всѣ остальныя—треугольники, имѣющіе одну общую вершину, называется пирамидою. Пирамиду можно построить, проведя послѣдовательно плоскости чрезъ каждую изъ сторонъ какого нибудь мно—ка и точку, не лежащую съ нимъ въ одной плоскости. Точка, въ которой сходятся всѣ тре—ки, называется вершиною пирамиды, а сторона, противолежащая этой вершинѣ, — основаніемъ. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины пирамиды на плоскость основанія, называется высотою пирамиды.

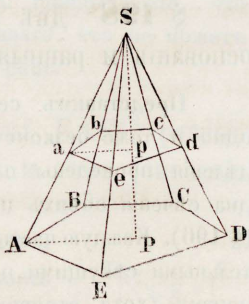
2) Пирамиды бываютъ трехсторонній четырехсторонній и т. д. смотря по числу сторонъ основанія или по числу тре—ковъ, составляющихъ боковую поверхность. Самая простая изъ всѣхъ пирамидъ — трехсто-ронняя, потому что она образована четырмя плоскостями, а чтобы зам-кнуть пространство со всѣхъ сторонъ нужно по крайней мѣрѣ 4 плоскости. Всѣ тѣлесные углы пирамиды въ такомъ случаѣ трехгранны, и всякая изъ ея сторонъ можетъ быть принята за основаніе. Всякая n—сторонняя пирамида имѣетъ $n + 1$ ограничивающихъ ее плоскостей, $n + 1$ вершинъ и $2n$ реберъ.

3) Если основаніе пирамиды правильный мно—къ, и перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, пересѣчетъ это послѣднее въ его центрѣ, то пирамида называется правильною. Въ ней всѣ боковыя стороны равнобедренные треугольники.

4) Если пирамида пересѣкается плоскостью, параллельною основанію, то часть ея, заключающаяся между плоскостью сѣченія и основаніемъ,

называется усѣченною пирамидою, а разстояніе двухъ ея параллельныхъ сторонъ — высотою усѣченной пирамиды. Всякая n—сторонняя усѣченная пирамида имѣетъ n + 2 ограничивающихъ ее плоскостей, 2n вершинъ и 3n реберъ.

§ 196. Если пирамида SABCDE будетъ пресѣчена плоскостью, параллельною основанію, то 1) сѣченіе abcde будетъ мно—къ, подобный основанію ABCDE, 2) площади подобныхъ мно—ковъ ABCDE и abcde относятся какъ квадраты ихъ разстояній (SP и sp) отъ вершины пирамиды.



1) Стороны мно—ковъ ABCDE и abcde параллельны (§ 161), отчего и углы ихъ соотвѣтственно равны (§ 165). Кромѣ того мы имѣемъ пропорціи:

$$AB : ab = (AS : aS =)\ AE : ae = ED : ed \ldots$$

слѣд. $ABCDE \backsim abcde$.

2) Проведемъ чрезъ ребро SA и высоту SP плоскость. Линіи AP и ap сѣченія этой плоскости съ плоскостями ABCDE и abcde параллельны, почему $\triangle ASP \backsim aSp$, а такъ какъ кромѣ того и $\triangle ASB \backsim aSb$, то

$$SP : Sp = SA : Sa = AB : ab, \text{ или}$$

$$SP^2 : Sp^2 = AB^2 : ab^2. \quad \text{Но по § 101}$$

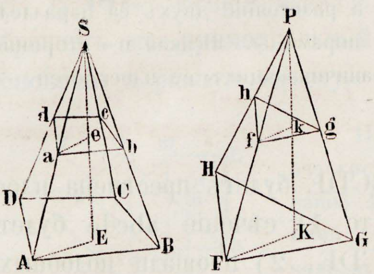
$$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2, \quad \text{слѣд.}$$

$$ABCDE : abcde = SP^2 : Sp^2.$$

Слѣдствія. 1) Если пирамида разсѣчена плоскостью, параллельною основанію, то отрѣзанная такимъ образомъ меньшая пирамида подобна цѣлой (§ 183, 5).

2) Основанія подобныхъ пирамидъ относятся какъ квадраты ихъ высотъ.

§ 197. Если двѣ пирамиды SABCD и PFGH, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, пересѣчены плоскостями, параллельными основаніямъ, на равныхъ разстояніяхъ (Se = Pk) отъ вершины, то площади пересѣченій (abcd и fgh) равновелики.



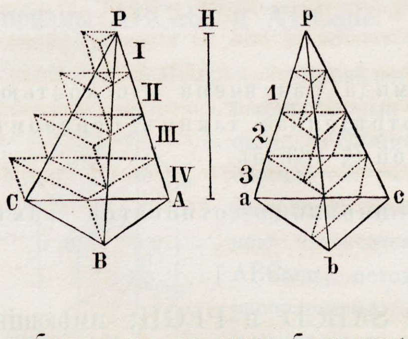
Положимъ, что обѣ пирамиды помѣщены своими основаніями въ одной и тойже плоскости и пересѣчены плоскостью, ей параллельною. Если SE и PK высоты пирамидъ, то (§ 196)

$$ABCD : abcd = SE^2 : Se^2$$
$$FGH : fgh = PK^2 : Pk^2.$$

Но по условію
$ABCD = FGH, \quad SE = PK, \quad Se = Pk,$
потому и $SE^2 = PK^2$, $Se^2 = Pk^2$, слѣд. и
$abcd = fgh.$

§ 198 Двѣ трехсторонні пирамиды имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.

Представимъ себѣ, что высоты обѣихъ пирамидъ раздѣлены на одно и тоже безконечно большое число равныхъ частей и чрезъ точки дѣленія проведены плоскости, параллельныя основаніямъ, тогда каждыя два сѣченія обѣихъ пирамидъ, одинаково удаленныя отъ вершинъ, равны (§ 196). Каждую часть пирамиды, заключающуюся между двумя послѣдовательными сѣкущими плоскостями, можно разсматривать какъ трегранную призму (хотя строго говоря она усѣченная пирамида), потому что два безконечно близкія сѣченія пирамиды безъ замѣтной ошибки равны одно другому. Такимъ образомъ пирамида разложится на безконечно большое числа чрезвычайно низкихъ призмъ, и такъ какъ каждая изъ нихъ въ одной пирамидѣ равна соотвѣтствующей ей въ другой, то и суммы ихъ т. е. самыя пирамиды должны быть такъ же равны.



Другое доказательство. Помѣстимъ обѣ пирамиды ихъ основаніями въ одной плоскости, и предположимъ, что $PABC > pabc$ и именно что

$$PABC - pabc = Q.$$

Разность Q всегда можно представить въ видѣ призмы, которой основаніе ABC, а высота x. Раздѣлимъ общую высоту H обѣихъ пирамидъ на такое число равныхъ частей, чтобы каждая изъ нихъ была менѣе x, и чрезъ точки дѣленія проведемъ плоскости, параллельныя основаніямъ ABC и abc, тогда каждыя два сѣченія, равно удаленныя отъ основанія, будутъ равны (§ 197). Построимъ въ первой пирамидѣ на ея основаніи и на каждомъ сѣченіи внѣшнія призмы I, II, III...., которыхъ боковыя ребра параллельны ребру

AP, а во второй пирамидѣ построимъ подъ каждымъ сѣченіемъ внутреннія призмы 1, 2, 3. . . . такъ, чтобы ихъ боковыя ребра были параллельны ребру ap, тогда по равенству основаній и высотъ (§ 194, 1) будетъ I = 1, II = 2, III = 3, такъ что нижная призма IV составляетъ разность между суммою всѣхъ внѣшнихъ и суммою всѣхъ внутренныхъ призмъ. Такъ какъ

$$I + II + III + IV > PABC$$

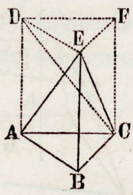
$$I + 2 + 3 \quad < pabc, \text{ то}$$

$$(I + II + III + IV) - (1 + 2 + 3) > PABC - pabc, \text{ т. е.}$$

$$IV > Q.$$

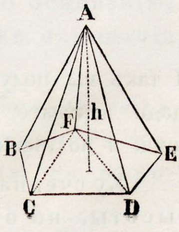
Однакожъ призма IV не можетъ быть болѣе призмы Q, потому что хотя обѣ онѣ имѣютъ одно и тоже основаніе ABC, но высота призмы IV выбрана нами менѣе x, высоты призмы Q, слѣд. преположеніе, что PABC > pabc, невозможно. Точно также можно доказать, что не можетъ быть PABC < pabc, а потому должно быть PABC = pabc.

§ 199. Объемъ трехсторонней пирамиды EABC равенъ трети объема призмы, имѣющей съ нею одно и тоже основаніе и туже высоту.



Если изъ вершинъ A и C проведемъ линіи AD и CF параллельныя ребру BE, и чрезъ точку E плоскость параллельную основанію ABC, то образуется трехсторонняя призма ABCDEF, которая имѣетъ одно и тоже основаніе и туже высоту съ данной пирамидою. Чрезъ это построеніе къ данной трехсторонней пирамидѣ EABC прибавится четырехсторонняя EACFD. Проведя плоскость ECD, мы раздѣлимъ EACFD на двѣ трехстороннія пирамиды EACD и ECDF, которыя равновелики (§ 198). Но пирамиды ECDF и EABC имѣютъ равныя основанія DEF и ABC и равныя высоты (§ 164, 1) и потому равновелики. Такимъ образомъ три равновеликія пирамиды EACD, ECDF, EABC составляютъ призму ABCDEF, слѣд. EABC есть третья часть этой призмы.

§ 200. Объемъ всякой пирамиды равенъ третьей части произведенія ея основанія на высоту.



Для трехсторонней пирамиды это предложеніе прямо слѣдуетъ изъ § 193 и § 199.

Многосторонняя пирамида ABCDEF можетъ быть раздѣлена на трехстороннія ABCF, ACDF, ADEF, имѣющія съ нею одну и туже высоту h. Объемы этихъ пирамидъ будутъ

$$\tfrac{1}{3}h \,.\, BCF, \quad \tfrac{1}{3}h \,.\, CDF, \quad \tfrac{1}{3}h \,.\, DEF,$$

слѣд. сумма ихъ или объемъ многосторонней пирамиды

$$ABCDEF = \tfrac{1}{3}h\,(BCF + CDF + DEF) = \tfrac{1}{3}h\,.\,BCDEF.$$

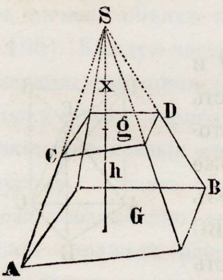
§ 201. Слѣдствія. 1) Двѣ пирамиды, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.

2) Объемъ всякой пирамиды равенъ трети объема призмы, имѣющей тѣже основаніе и высоту.

3) Пирамиды, имѣющія равновеликія основанія, относятся какъ ихъ высоты, имѣющія же равныя высоты, относятся какъ ихъ основанія.

§ 202. Опредѣлить объемъ усѣченной пирамиды ABCD по данной высотѣ h и основаніямъ G и g.

Представимъ себѣ, что стороны усѣченной пирамиды продолжены до пересѣченія ихъ въ вершинѣ S, такъ что усѣченная пирамида дополнится до цѣлой SAB. Обозначимъ высоту верхней дополнительной пирамиды чрезъ x, тогда (§ 200)



вся пирамида $SAB = \tfrac{1}{3}G\,(h + x)$,

верхняя пирамида $SCD = \tfrac{1}{3}gx$, слѣд.

усѣченная пирамида $ABCD = \tfrac{1}{3}G\,(h + x) - \tfrac{1}{3}gx$ или

$$ABCD = \tfrac{1}{3}\,[Gh + (G - g)\,x].$$

Для выраженія x посредствомъ данныхъ величинъ мы имѣемъ (§ 196, 2)

$$G : g = (h + x)^2 : x^2 \text{ или } \sqrt{G} : \sqrt{g} = h + x : x,$$

$$x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}, \text{ слѣд.}$$

$$ABCD = \tfrac{1}{3}\left[Gh + (G - g)\,\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\right] \text{ или}$$

$$ABCD = \tfrac{1}{3}h\left[G + \frac{G - g}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \times \sqrt{g}\right]. \text{ Но}$$

$$G - g = (\sqrt{G} + \sqrt{g})(\sqrt{G} - \sqrt{g}), \text{ слѣд.}$$

$$\frac{G - g}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = \sqrt{G} + \sqrt{g}, \text{ и потому}$$

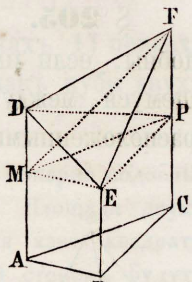
$$ABCD = \tfrac{1}{3}h\,[G + (\sqrt{G} + \sqrt{g})\sqrt{g}] \text{ или}$$

$$ABCD = \tfrac{1}{3}h\,(G + \sqrt{Gg} + g).$$

И такъ мы получимъ объемъ усѣченной пирамиды, если сложимъ площади верхняго и нижняго основанія и среднее геометрическое между ними, и полученную сумму умножимъ на треть высоты.

Усѣченная пирамида равновелика полной пирамидѣ тойже высоты, но основаніе которой равновелико суммѣ верхнаго и нижняго основанія и средняго пропорціальнаго между обоими основаніями усѣченной пирамиды.

§ 203. Объемъ трехсторонней призмы ABCDEF, усѣченной непараллельно основанію, равняется произведенію ея основанія ABC на треть суммы перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ D, E, F на основаніе ABC.



Чрезъ вершину E, которая ближе всѣхъ прочихъ къ основанію ABC, проведемъ плоскость EMP, параллельную этому послѣднему; тогда $\triangle$ MEP $\cong$ ABC (§ 184). Усѣченная призма раздѣлится на призму ABCMEP и на четырехстороннюю пирамиду EMDFP. Эту послѣднюю можно разсѣчь плоскостью EDP на двѣ трехстороннія пирамиды DMEP и FDEP.

Проведемъ плоскость EFM, тогда

$\triangle$ FDP = FMP (§ 80, слѣд.), и потому

пир. EFDP = пир. EFMP (198), т. е.

пир. FDEP = пир. FMEP.

Если обозначимъ разстоянія вершинъ E, D, F отъ основанія ABC чрезъ h, $h+m$, $h+p$, то m и p будутъ разстояніями вершинъ D и F отъ плоскости EMP, слѣд. имѣемъ (§ 193, § 200)

$$\text{призма } ABCMEP = ABC \times h = ABC \times \frac{h+h+h}{3}$$

$$\text{пирамида } DMEP = MEP \times \frac{m}{3} = ABC \times \frac{m}{3}$$

$$\text{пир. } FDEP = \text{пир. } FMEP = MEP \times \frac{p}{3} = ABC \times \frac{p}{3}.$$

Сложивъ эти три равенства, найдемъ что

$$ABCDEF = ABC \times \frac{h+(h+m)+(h+p)}{3}.$$

Слѣдствія. 1) Такъ какъ это выраженіе равно

$$\tfrac{1}{3} ABC\,h + \tfrac{1}{3} ABC\,(h+m) + \tfrac{1}{3} ABC\,(h+p), \text{ то}$$

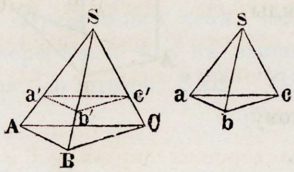
трехсторонняя призма, усѣченная непараллельно основанію, равновелика тремъ пирамидамъ, имѣющимъ тоже основаніе ABC, а вершины въ вершинахъ D, E, F.

2) Если призма прямая, то высоты ея будутъ боковыя ребра, слѣд. объемъ прямой трехсторонней призмы, усѣченной непараллельно основанію, равняется произведенію ея основанія на одну треть суммы всѣхъ боковыхъ реберъ.

§ 204. Симметричные многогранники равновелики.

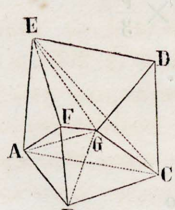
Симметричныя пирамиды равновелики, потому что объемъ пирамиды зависитъ только отъ ея высоты и площади основанія, а въ симметрическихъ многогранникахъ всѣ соотвѣтственныя части равны между собою. Такъ какъ два симметричные многогранника могутъ быть разсѣчены плоскостями на равное число попарно симметрическихъ пирамидъ, то они должны имѣть равные объемы.

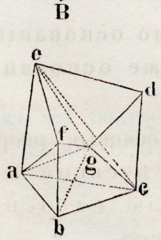
§ 205. Двѣ трехсторонния пирамиды SABC и sabc подобны, если имѣютъ по равному двугранному углу, заключающемуся между двумя соотвѣтственно подобными и одинаково расположенными сторонами.



Пусть $\triangle ASB \sim asb$, $\triangle ASC \sim asc$ и двугранный уголъ $BASC = basc$. Отложимъ $Sa' = sa$, $Sb' = sb$, $Sc' = sc$ и проведемъ чрезъ точки a', b', c', плоскость, тогда пирамида $Sa'b'c \cong sabc$ (§ 181, 3) Такъ какъ $\triangle ASB \sim a'Sb'$ и $\triangle ASC \sim a'Sc'$, то $AB \parallel a'b'$ и $AC \parallel a'c'$ (§ 89). Изъ параллельности этихъ линій слѣдуетъ параллельность плоскостей ABC и $a'b'c'$ (§ 165, 2), и потому пирамиды $SABC$ и $Sa'b'c'$ подобны (§ 196, слѣд. 1), слѣд. и $SABC \sim sabc$.

§ 206. Два подобные многогранника ABCDEFG и abcdefg можно разложить на равное число соотвѣтственно подобныхъ и одинаково расположенныхъ пирамидъ.





Пусть одна сторона ABCDE будетъ пятиугольникъ, къ которому какъ къ основанію примыкаютъ два четыреугольника BCGF и DEFG и три тре—ка ABF, AEF и CDG. Проведя изъ вершины G діагональныя плоскости, мы разсѣчемъ многогранникъ на трехсторонния пирамиды GCDE, GACE, GABC, GAEF, GABF. Другой многогранникъ, въ которомъ тѣже буквы обозначаютъ соотвѣтствующія вершины, и части котораго расположены въ томъ же порядкѣ, разсѣчемъ также плоскостями изъ вершины g. Такъ какъ въ обоихъ многогранникахъ всѣ двугранные углы попарно равны другъ другу (§ 183, 4) и кромѣ того всѣ стороны многогранниковъ подобны [а потому и тре—ки, на которые они распадаются соотвѣтственно подобны (§ 100, 2)], то по § 205 пирамида GCDE $\backsim$ gcde, GABC $\backsim$ gabc, GAEF $\backsim$ gaef, GABF $\backsim$ gabf, потому что каждая пара этихъ пирамидъ имѣетъ по равному двугранному углу, заключающемуся между двумя соотвѣтственно подобными и одинаково расположенными сторонами. Наконецъ пирамида GAEC $\backsim$ gaec (§ 205), потому что стороны ACE $\backsim$ ace, GCE $\backsim$ gce и лежащіе при ребрѣ CE и ce углы равны, какъ дополненія до двухъ прямыхъ двухъ равныхъ двугранныхъ угловъ въ пирамидахъ GCDE и gcde.

§ 207. **Въ двухъ подобныхъ многогранникахъ 1) поверхности относятся какъ квадраты, а 2) объемы — какъ кубы двухъ сходственныхъ реберъ.**

1) Въ двухъ подобныхъ многогранникахъ стороны попарно подобны, и потому всѣ соотвѣтствующія ребра пропорціональны. Площади двухъ соотвѣтствующихъ сторонъ многогранниковъ относятся какъ квадраты соотвѣтствующихъ реберъ, почему и суммы площадей сторонъ будутъ относиться также какъ квадраты реберъ.

2) Если многогранниками будутъ двѣ трехстороннія пирамиды P и p, то обозначивъ ихъ основанія чрезъ G и g, а высоты чрезъ H и h, и какія нибудь два соотвѣтствующія ребра чрезъ K и k, получимъ (§ 196, слѣд. 2)

$$G : g = H^2 : h^2, \quad \text{слѣд. и}$$
$$GH : gh = H^3 : h^3. \quad \text{Но такъ какъ}$$
$$GH : gh = P : p$$
$$H^3 : h^3 = K^3 : k^3, \quad \text{то}$$
$$P : p = K^3 : k^3.$$

Два подобные многогранника разсѣкаются площадями на равное число подобныхъ и одинаково расположенныхъ пирамидъ (§ 206) а подобныя пирамиды относятся какъ кубы ихъ соотвѣтствующихъ реберъ. Такъ какъ кромѣтого въ подобныхъ многогранникахъ соотвѣтствующія ребра пропорціональны, то ясно, что сумма пирамидъ однаго многогранника будетъ относиться къ суммѣ всѣхъ пирамидъ другаго какъ кубы соотвѣтствующихъ реберъ.

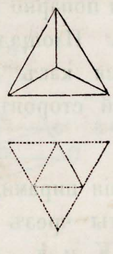
Слѣдствіе. Соотвѣтствующія ребра двухъ подобныхъ многогранниковъ относятся какъ квадратные корни изъ числовой величины поверхностей, или какъ кубическіе корни изъ числовой величины объемовъ многогранниковъ.

Если напр. дано построить многогранникъ, который бы былъ подобенъ данному и имѣлъ вдвое большую поверхность, то два соотвѣтствующія ребра должны относиться какъ $1 : \sqrt{2}$. Если же объемъ искомаго многогранника долженъ быть вдвое болѣе объема даннаго, то соотвѣтствующія ребра должны относиться какъ $1 : \sqrt[3]{2}$.

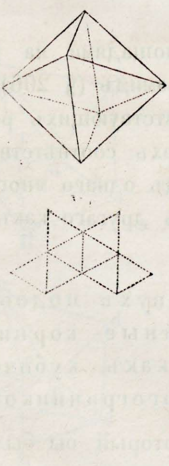
§ 208. Правильными многогранниками называются такіе, которые ограничены со всѣхъ сторонъ равными правильными многоугольниками, и въ которыхъ всѣ тѣлесные углы между собою равны.

Могутъ быть только пять различныхъ правильныхъ многогранниковъ.

Слѣдующія фигуры представляютъ эти многогранники и ихъ поверхности, разпрямленныя въ плоскость, но взятыя въ меньшемъ масштабѣ.

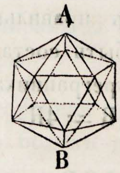


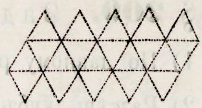
1) Для образованія тѣлеснаго угла нужно по крайней мѣрѣ 3 многоугольника, и сумма плоскихъ угловъ, ограничивающихъ многогранный уголъ, должна быть менѣе, четырехъ прямыхъ (§ 178). Если мы представимъ себѣ, что три равные правильные треугольника составлены вмѣстѣ такъ, что образуютъ тѣлесный уголъ, то сумма всѣхъ плоскихъ угловъ, лежащихъ около вершины тѣлеснаго будетъ равна $3 \times \frac{2}{3}R = 2R$, а отверстіе этого угла можетъ быть закрыто правильнымъ тре—комъ, равнымъ остальнымъ. Такое тѣло, ограниченное четырмя тре—ками есть правильный четырегранникъ или тетраэдръ.



2) Представимъ себѣ, что четыре равные правильные треугольника, пересѣкающіеся подъ равными двугранными углами, образуютъ тѣлесный уголъ, тогда сумма плоскихъ угловъ этого тѣлеснаго менѣе 4R, и отверстіе его представляетъ квадратъ. Если мы приложимъ два составленные такимъ образомъ четырегранные угла ихъ отверстіями одинъ къ другому, то образуется ограниченный осмью тре—ками правильный осмигранникъ или октаэдръ.

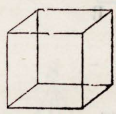
3) Если составимъ тѣлесный уголъ изъ пяти равныхъ правильныхъ треугольниковъ, пересѣкающихся подъ равными двугранными





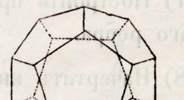
углами, тогда сумма плоскихъ угловъ такого тѣлеснаго менѣе 4R, и его отверстіе будетъ представлять правильный пяти—къ. Наложимъ два такіе угла A и B, одинъ сверху, другой снизу на поясъ, сложенный изъ 10 такихъ же тре—ковъ, такъ чтобы пять тре—ковъ пояса совпали своими боками съ краями отверстія тѣлеснаго угла A, и пять тре—ковъ съ краями отверстія угла B, тогда образуется ограниченный 20 тре—ками правильный двадцатигранникъ или икосаэдръ.

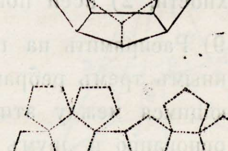
Изъ шести правильныхъ тре—ковъ нельзя составить тѣлеснаго угла, потому что шесть плоскихъ угловъ такого угла равнялись бы $6 \times \frac{2}{3}R = 4R$. Такимъ образомъ видно, что изъ правильнаго тре—ка можно составить только три различныхъ правильнихъ многогранниковъ.



4) Изъ трехъ равныхъ квадратовъ образуется трегранный уголъ, котораго отверстіе можно закрыть, приложивъ еще три такіе же квадрата. Ограниченное шестью равными квадратами тѣло есть правильный шестигранникъ или кубъ или гексаэдръ.

Изъ 4 квадратовъ нельзя составить тѣлеснаго угла, потому что сумма его плоскихъ угловъ равнялась бы 4R.





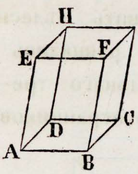
5) Изъ трехъ равныхъ правильныхъ пятиугольниковъ можно составить тѣлесный уголъ, потому что сумма плоскихъ угловъ такого угла $3 \times \frac{6}{5}R < 4R$. Представимъ себѣ, что къ каждой сторонѣ правильнаго пятиугольника приложено по одинаковому съ нимъ пятиугольнику такъ, что около каждой его вершины составится по трегранному углу. Тогда образуется полузамкнутая поверхность, въ которой края отверстія состоитъ изъ 5 входящихъ и 5 выходящихъ угловъ. Если двѣ составленныя такимъ образомъ поверхности сложить такъ, чтобы выходящіе углы одной вошли во вдавшіеся углы другой, то получится многогранникъ, ограниченный 12 пятиугольниками и называемый правильнымъ двѣнадцатигранникомъ или додекаэдромъ.

Изъ правильныхъ многоугольниковъ большаго числа сторонъ не могутъ быть составлены многограники, потому что уже сумма плоскихъ угловъ трегранника, составленнаго изъ правильныхъ шестиугольниковъ $= 3 \times \frac{4}{3}R = 4R$.

§ 209. Задачи.

1) По данному ребру a построить кубъ.

2) Разсѣчь кубъ плоскостью такъ, чтобы линія сѣченія была правильный шестиугольникъ.



3) Даны длина и положеніе трехъ выходящихъ изъ одной точки прямыхъ; построить параллелепипедъ, у котораго эти прямыя были бы ребрами.

4) Даны величина и положеніе двухъ не пересѣкающихса и не параллельныхъ прямыхъ AB и FG; построить параллелепипедъ, у котораго эти линіи были бы ребрами.

5) Построить параллелепипедъ, подобный данному такъ, чтобы прямая a была однимъ изъ его реберъ, которое соотвѣтствуетъ одному изъ реберъ даннаго параллелепипеда.

6) Построить прямоугольный параллелепипедъ, который бы имѣлъ ребро a и былъ равновеликъ кубу, котораго ребро равно линіи b.

7) Построить призму по данному основанію, величинѣ и положенію боковаго ребра.

8) Начертитъ квадрать, котораго площадь равнялась бы 1) боковой поверхности, 2) всей поверхности данной призмы или пирамиды.

9) Распрямить на плоскости поверхность 1) трехсторонней призмы по даннымъ тремъ ребрамъ какого либо ея угла и плоскимъ угламъ, заключающимся между этими ребрами, 2) пятисторонней призмы по данному основанію и двумъ прилежащимъ гранямъ.

10) Обратить 1) многостороннюю призму въ трехстороннюю, 2) многостороннюю призму въ параллелепипедъ.

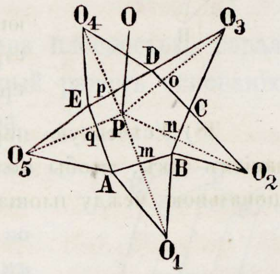
11) Усѣченную трехстороннюю призму обратить въ прямую, которой основаніе равнялось бы сѣченію данной призмы плоскостью, перпендикулярною къ боковымъ ребрамъ.

12) По даннымъ боковымъ ребрамъ трехсторонней пирамиды и образованнымъ ими плоскимъ угламъ начертить ея поверхность на плоскости, въ видѣ сплошной фигуры.

13) По даннымъ шести ребрамъ трехсторонней пирамиды начертить ея поверхность на плоскости въ видѣ сплошной фигуры.

14) Начертить на плоскости поверхность трехсторонней пирамиды, которой основаніе и его углы наклоненія относительно боковъ даны.

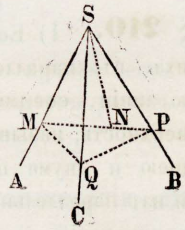
15) Начертить на плоскости поверхность пирамиды, если даны основаніе ABCDE, высота OP и точка P пересѣченія основанія съ высотою.



16) Начертить на плоскости поверхность пирамиды, если даны: основаніе ABCDE, боковое ребро BO и тѣлесный уголъ B.

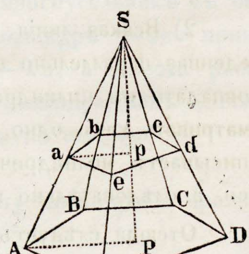
17) Дано основаніе ABCDE пирамиды и двѣ ея смежныя грани ABO и BCO, построить на плоскости въ видѣ сплошной фигуры поверхность этой пирамиды.

18) Чрезъ точку M на ребрѣ AS треграннаго угла провести плоскость MPQ такъ, чтобы площади трехъ боковыхъ сторонъ пирамиды SMPQ были равны между собою.



19) Раздѣлить трехстороннюю пирамиду пополамъ плоскостью, проходящею чрезъ ея вершину и пересѣкающею основаніе по прямой даннаго направленія.

20) Пирамиду SABCDE раздѣлить плоскостью, параллельною основанію 1) такъ, чтобы площади основанія и сѣченія относились какъ линіи m и n, 2) такъ, чтобы поверхность отсѣченной пирамиды Sabcde составляла треть поверхности цѣлой пирамиды.



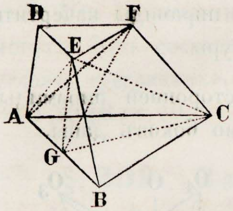
21) Построить тетраэдръ 1) по данному ребру, 2) по данной высотѣ.

22) Построить октаэдръ 1) по данному ребру, 2) по данной діагонали.

23) Построить додекаэдръ, котораго ребро равнялось бы линіи a.

24) Построить икосаэдръ, котораго ребро равнялось бы a.

25) Начертить на плоскости уголъ наклоненія двухъ смежныхъ плоскостей 1) тетраэдра, 2) октаэдра, 3) додекаэдра, 4) икосаэдра.



26) Построить треугольникъ, котораго площадь была бы среднею пропорціональною между площадями основаній данной усѣченной пирамиды ABCDEF.

27) Даны двѣ n—стороннія пирамиды, имѣющія равныя высоты и подобныя основанія; построить трехстороннюю пирамиду, которая бы была среднею пропорціональною между данными.

28) Усѣченную пирамиду разсѣчь плоскостью, параллельною основаніямъ такъ, чтобы полученная площадь сѣченія была среднею пропорціональною между площадями основаній данной усѣченной пирамиды.

IV. О цилиндрѣ.

§ 210. 1) Если прямая движется по окружности двухъ круговъ, лежащихъ въ параллельныхъ плоскостяхъ, постоянно оставаясь параллельною линіи, соединяющей центры этихъ круговъ, то образуется кривая поверхность, называемая цилиндрическою; тѣло, ограниченное этою послѣднею и двумя параллельными кругами, называется цилиндромъ, каждый изъ параллельныхъ круговъ—основаніемъ, линія, соединяющая центры основаній, — осью, а разстояніе плоскостей основаній другъ отъ друга — высотою цилиндра.

2) Всякая линія, соединяющая двѣ точки обоихъ основаній и проведенная параллельно оси, называется образующею. Эта линія должна совпадать съ цилиндрическою поверхностью, потому что ее можно разсматривать какъ одно изъ положеній прямой, которая своимъ движеніемъ описываетъ цилиндрическую поверхность. Всѣ образующія параллельны оси, а слѣдовательно и другъ другу и равны между собою (§ 164).

Отсюда слѣдуетъ, что всякое сѣченіе, проходящее чрезъ ось или параллельное оси параллелограмъ.

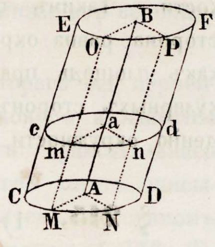
3) Прямымъ цилиндромъ называется такой, въ которомъ ось перпендикулярна основанію. При всякомъ же другомъ положеніи оси цилиндръ называется косымъ. Въ прямомъ цилиндрѣ всѣ образующія перпендикулярны основанію и равняются его высотѣ, въ косомъ же цилиндрѣ высота всегда менѣе образующей.

Если представимъ себѣ, что прямоугольникъ обращается около одной изъ своихъ сторонъ, какъ около неподвижной оси, то другая сторона опишетъ прямой цилиндръ.

Въ прямомъ цилиндрѣ всѣ сѣченія, проходящія чрезъ ось его или параллельно ей, прямоугольники.

4) Два цилиндра подобны, если ихъ оси наклонены подъ равными углами къ основаніямъ и если отношенія ихъ осей къ радіусамъ основаній равны.

§ 211. Всякое сѣченіе (cmd) цилиндра плоскостью, параллельною основанію, образуетъ кругъ, который равенъ основанію, и котораго центръ лежитъ на оси цилиндра.



Проведемъ чрезъ ось по двумъ произвольнымъ направленіямъ плоскости, которыя пересѣкутъ основанія и параллельную имъ плоскость сѣченія по линіямъ Am и am, AN и an. Такимъ образомъ получатся параллелограмы AMam и ANan (§ 210, 2 и § 161), слѣдовательно $AM = am$ и $AN = an$; а такъ какъ $AM = AN$, то и $am = an$, т. е. точки m и n одинаково удалены отъ a. Это заключеніе справѣдливо для всѣхъ точечъ, лежащихъ на кривой пересѣченія цилиндра, слѣдовательно эта кривая есть кругъ, котораго центръ находится на оси цилиндра, а радіусъ равенъ радіусу его основанія.

§ 212. Объемъ цилиндра равенъ произведенію площади его основанія на высоту.

Мы разсматривали кругъ какъ правильный многоугольникъ съ безконечно большимъ числомъ сторонъ, потому и цилиндръ можно принимать за призму, которой основаніе такой мно—къ, а высота равна высотѣ цилиндра. Отсюда слѣдуетъ, что объемъ цилиндра, какъ объемъ призмы, равняется произведенію площади основанія на высоту.

§ 213. 1) Если обозначимъ чрезъ h высоту цилиндра, а чрезъ r радіусъ его основанія, то

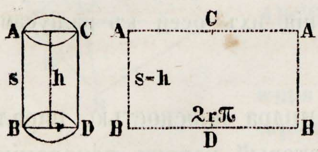
$$\text{объемъ цилиндра} = r^2\pi h,$$

2) Цилиндры, имѣющіе равныя основянія и равныя высоты, равновелики.

3) Цилиндры относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

4) Цилиндры, имѣющіе равныя основанія, относятся какъ ихъ высоты, а имѣющіе равныя высоты, какъ основанія, а слѣд. и какъ квадраты радіусовъ основаній (§ 141).

§ 214. Боковая поверхность прямаго цилиндра равна произведенію окружности его основанія на высоту.



Такъ какъ всякая прямая, параллельная оси цилиндра, и соединяющая двѣ точки, лежащія на верхнемъ и нижнемъ его основаніи, совпадаетъ съ боковою поверхностью цилиндра, то мы можемъ представить себѣ эту поверхность разсѣченною по длинѣ одной изъ образующихъ и развернутою на плоскости. Такимъ образомъ получится прямоугольникъ, котораго одна сторона равна окружности основанія, а другая высотѣ цилиндра. Такъ какъ площадь прямоугольника равна произведенію двухъ его перпендикулярныхъ сторонъ, то боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности его основанія на высоту.

§ 215. 1) Если обозначимъ чрезъ h высоту прямаго цилиндра, чрезъ s образующую, и чрезъ r радіусъ основанія, тогда окружность основанія будетъ $2r\pi$, слѣд.

боковая поверхность цилиндра $= 2r\pi h = 2r\pi s$.

2) Такъ какъ площадь основанія $= \pi r^2$, то вся поверхность (O) прямаго цилиндра равна $2r\pi h + r^2\pi + r^2\pi$, т. е.

$$O = 2r\pi\,(r + h) = 2r\pi\,(r + s).$$

§ 216. 1) Два подобные цилиндра C и c относятся какъ кубы радіусовъ ихъ основаній или какъ кубы производящихъ.

2) Боковыя поверхности O и o двухъ подобныхъ цилиндровъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ основаній или квадраты ихъ производящихъ.

1) Пусть A и a будутъ, оси S и s производящія, R и r радіусы основаніи, H и h высоты цилиндровъ, тогда (§ 213, 1)

$$C : c = R^2\pi H : r^2\pi h = R^2H : r^2h.$$

Но по § 210, 4 $A : a = S : s = R : r = H : h$, и $S^3 : s^3 = R^3 : r^3$, откуда

$$C : c = R^3 : r^3 = S^3 : s^3.$$

2) Такъ какъ (§ 215, 1) $O : o = 2R\pi S : 2r\pi s = RS : rs$, то и

$$O : o = R^2 : r^2 = S^2 : s^2.$$

V. О конусѣ.

§ **217.** 1) Если прямая AB (фиг. § 218) движется по окружности ABC круга такъ, что постоянно проходитъ чрезъ неподвижную точку A, лежащую внѣ плоскости круга, то образованная ея движеніемъ кривая поверхность называется коническою, а тѣло, ограниченное этою поверхность и площадью круга, — конусомъ; движущаяся прямая называется образующею, неподвижная точка A — вершиною, кругъ BDC — основаніемъ, линія AE, соединяющая вершину A съ центромъ основанія E — осью, а перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, — высотою конуса.

2) Прямымъ конусомъ называется такой, котораго ось перпендикулярна къ основанію, въ противномъ случаѣ конусъ называется косымъ. Прямой конусъ образуется движеніемъ прямоугольнаго тре—ка около однаго изъ его катетовъ, причемъ другой катетъ описываетъ основаніе, а гипотенуза боковую поверхность конуса. Въ прямомъ конусѣ высота совпадаетъ съ осью и всѣ образующія равны (§ 153, 2).

3) Всякое сѣченіе, проходящее чрезъ вершину конуса, есть треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны — образующія, а третья — хорда основанія конуса. Если сѣченіе проходитъ чресъ ось, то треугольникъ состоитъ изъ двухъ образующихъ и діаметра основанія. Въ прямомъ конусѣ всѣ его сѣченія равнобедренные тре—ки, а всѣ осевыя сѣченія образуютъ равные равнобедренные тре—ки, перпендикулярныя къ основанію.

4) Два конуса подобны, если ихъ оси наклонены подъ одинаковыми углами къ основаніямъ и относятся какъ радіусы основаній.

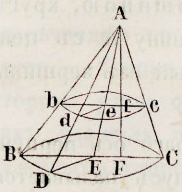
5) Если конусъ разсѣкается плоскостью, параллельною основанію, то часть его, заключающаяся между плоскостью сѣченія и основаніемъ, называется усѣченнымъ конусомъ, остальная же часть, заключающаяся между плоскостью сѣченія и вершиною, дополнительнымъ конусомъ.

Основаніе конуса и площадь его сѣченія называются основяніями, разстояніе основаній другъ отъ друга — высотою, а линія, соединяющая центры основаній — осью усѣченнаго конуса. Смотря потому, будетъ ли ось перпендикулярна къ основаніямъ или нѣтъ, конусъ называется прямымъ или косымъ.

Всякая прямая, совпадающая съ боковою поверхностью конуса и соединяющая двѣ точки основаній, проходитъ при продолженіи чрезъ вершину дополнительнаго конуса, и называется образующею. Въ прямомъ конусѣ всѣ образующія равны.

§ **218.** 1) Всякое сѣченіе bdc конуса, параллельное основанію BDC, есть кругъ, котораго центръ находится на оси AE конуса.

2) Площадь основанія конуса и площадь сѣченія, проведеннаго параллельно основанію, относятся какъ квадраты ихъ разстояній (AF, Af) отъ вершины.



1) Проведемъ чрезъ ось въ произвольныхъ направленіяхъ двѣ плоскости, которыя пересѣкутъ основаніе и параллельную ему плоскость сѣченія по линіямъ BC и bc, DE и de, тогда BC || bc и DE || de (§ 161). Изъ подобія тре—ковъ слѣдуетъ

$$BE : be = AE : ae = DE : de.$$

Такъ какъ BE = DE, то и be = de. Точно также можно доказать, что разстояніе точки e отъ остальныхъ точекъ линіи сѣченія равно be, слѣд. кривая сѣченія есть кругъ.

2) Если прямая AF перпендикулярна къ основаніямъ BDC и bdc, то изъ подобія тре—ковъ слѣдуетъ

$$BE : be = AB : ab = AF : af, \text{ слѣд. и}$$
$$BE^2 : be^2 = AB^2 : ab^2 = AF^2 : af^2.$$

Такъ какъ площади круговъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ, то

$$\text{кругъ } BE : \text{кругъ } be = AB^2 : ab^2 = AF^2 : af^2.$$

§ **219.** 1) Если конусъ разсѣченъ плоскостью параллельною основанію, то полученный такимъ образомъ меншій конусъ подобенъ цѣлому (§ 217, 4).

2) Площади основаній подобныхъ конусовъ относятся какъ квадраты высотъ конусовъ.

§ **220.** Объемъ всякаго конуса равенъ трети произведенія площади его основанія на высоту.

Если разсматривать кругъ какъ правильный многоугольникъ безчисленнаго числа сторонъ, то конусъ можно принимать за пирамиду съ безконечно большимъ числомъ граней, изъ чего слѣдуетъ, что объемъ конуса, какъ и пирамиды, равенъ трети произведенія площади основанія на высоту.

§ 221. 1) Обозначимъ чрезъ h высоту конуса, и чрезъ r радіусъ его основанія, тогда основаніе $= r^2\pi$. слѣд.

$$\text{объемъ конуса} = \tfrac{1}{3}r^2\pi h.$$

2) Если s будетъ образующая прямаго конуса, и r радіусъ основанія, то высота конуса $= \sqrt{s^2 - r^2}$, а

$$\text{объемъ} = \tfrac{1}{3}r^2\pi\sqrt{s^2 - r^2}$$

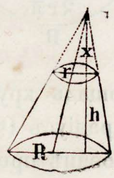
3) Два конуса, имѣющіе равные основанія и равныя высоты, равновелики.

4) Два конуса относятся какъ произведенія ихъ осно ваній на высоты.

5) Объемъ конуса равновеликъ трети объема цилиндра, имѣющаго съ конусумъ равныя основаніе и высоту.

§ 222. Опредѣлить объемъ усѣченнаго конуса по данной высотѣ h и радіусамъ R и r верхняго и нижняго основаній.

Положимъ, что усѣченный конусъ дополненъ до цѣлаго чрезъ продолженіе его боковой поверхности. Если назовемъ высоту дополнительнаго конуса чрезъ x, то высота цѣлаго будетъ $x + h$, слѣд. (§ 221, 1)



$$\text{цѣлый конусъ} = \tfrac{1}{3}R^2\pi\,(h+x)$$

$$\text{дополнительный} = \tfrac{1}{3}r^2\pi x, \quad \text{слѣд.}$$

$$\text{усѣченный} = \tfrac{1}{3}R^2\pi\,(h+x) - \tfrac{1}{3}r^2\pi x,$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi\left[R^2h + (R^2 - r^2)\,x\right].$$

Такъ какъ $R : r = h + x : x$, то

$$x = \frac{hr}{R - r}, \quad \text{потому}$$

$$\text{усѣченный конусъ} = \tfrac{1}{3}\pi\left(R^2h + \frac{R^2 - r^2}{R - r}\cdot hr\right)$$

Но $R^2 - r^2 = (R + r)\,(R - r)$, слѣд.

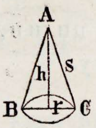
$$\text{усѣченный конусъ} = \tfrac{1}{3}\pi h\left[R^2 + (R + r)\,r\right]$$

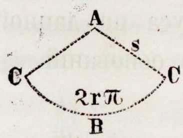
$$= \tfrac{1}{3}\pi h\,(R^2 + Rr + r^2).$$

Это выраженіе можетъ быть представлено и въ слѣдующемъ видѣ: $\tfrac{1}{3}h\,(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr)$, и такъ какъ $\pi Rr = \sqrt{\pi R^2 . \pi r^2}$, то объемъ усѣченнаго конуса равенъ объему полнаго той же высоты, но основаніе котораго равновелико суммѣ верхняго и нижняго основаній усѣченнаго конуса, сложенной съ среднимъ геометрическимъ между этими же основаніями.

Слѣд. Если положимъ въ выраженіи $\frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$, что радіусъ меньшаго основанія $r = 0$, то получимъ $\frac{1}{3}R^2\pi h$, т. е. выраженіе объема цѣлаго конуса; а положивъ $R = r$, получимъ $R^2\pi h$, т. е. выраженіе объема цилиндра.

§ 223. Боковая поверхность прямаго конуса равна половинѣ произведенія окружности его основанія на производящую.





Такъ какъ прямая, соединяющая вершину конуса съ какою—либо точкою основанія, совпадаетъ съ боковою поверхностью, то мы можемъ представить себѣ что поверхность конуса разрѣзана по какой—либо образующей и развернута на плоскости. Такъ какъ всѣ точки окружности основанія равно удалены отъ вершины, то развернутая боковая поверхность конуса будетъ круговой вырѣзокъ, котораго радіусъ равенъ образующей конуса, а дуга — окружности основанія. Площадь круговаго вырѣзка равняется половинѣ произведенія его дуги на радіусъ (§ 139), слѣд. и боковая поверхность прямаго конуса равна половинѣ произведенія его окружности основанія на образующую.

§ 224. 1) Если обозначимъ чрезъ s образующую прямаго конуса, и чрезъ r радіусъ основанія, тогда окружность основанія будетъ равна $2r\pi$, слѣд.

$$\text{боковая поверхность} = rs\pi.$$

2) Вся поверхность конуса будетъ равна

$$rs\pi + r^2\pi = r\pi(r + s).$$

3) Если будутъ даны радіусъ основанія r, и высота конуса h, то образующая $s = \sqrt{r^2 + h^2}$, слѣд.

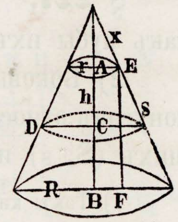
$$\text{боковая поверхность} = r\pi\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\text{вся поверхность} = r\pi\left(r + \sqrt{r^2 + h^2}\right).$$

4) Окружность средняго сѣченія конуса, т. е. сѣченія, проведеннаго параллельно основанію и дѣлящаго высоту пополамъ, равна половинѣ окружности основанія, потому что окружность основанія относится къ окружности сѣченія, какъ радіусъ первой окружности къ радіусу второй,

радіусы же эти относятся какъ цѣлая высота къ половинѣ. Отсюда видно, что боковая поверхность конуса равна произведенію окружности средняго сѣченія на производящую.

§ **225.** Опредѣлить боковую поверхность прямаго усѣченнаго конуса по данной производящей s и радіусамъ R и r нижняго и верхняго основаній.



Представимъ себѣ, что усѣченный конусъ дополненъ до цѣлаго и обозначимъ образующую дополнительнаго чрезъ x, а цѣлаго чрезъ $s + x$, тогда

боков. пов. цѣлаго кон. $= R\,(s + x)\,\pi$

боков. пов. дополн. кон. $= rx\pi$, слѣд.

боков. пов. усѣч. кон. $= R\,(s + x)\,\pi - rx\pi$

$$= \big(Rs + (R - r)\,x\big)\,\pi.$$

Такъ какъ $R : r = s + x : x$, то

$$x = \frac{rs}{R - r}, \quad \text{слѣд.}$$

боков. пов. усѣч. кон. $= (Rs + rs)\,\pi$

$$= (R + r)\,\pi s,$$

Это выраженіе равно $(\pi R + \pi r)\,s$, слѣд. боковая поверхность усѣченнаго конуса равна полусуммѣ окружностей нижняго и верхняго основанія, умноженной на образующую.

§ **226.** 1) Если чрезъ средину оси AB проведемъ плоскость, параллельную основанію, тогда радіусъ круга сѣченія

$$CD = \frac{R + r}{2}, \text{ и окружность его } = 2\left(\frac{R + r}{2}\right)\pi.$$

Выраженіе боковой поверхности усѣченнаго конуса $(R + r)\pi s$ показываетъ, что боковая поверхность усѣченнаго прямаго конуса равна произведенію его образующей на окружность средняго сѣченія.

2) Вся поверхность прямаго усѣченнаго конуса равна

$$(R + r)\,\pi s + R^2\pi + r^2\pi = \pi\left[R^2 + r^2 + (R + r)s\right].$$

3) Если въ формулѣ $(R + r)\,\pi s$ положимъ $r = o$, то получимъ выраженіе боковой поверхности цѣлаго конуса, а положивъ $R = r$ получимъ $2r\pi s$, т. е. выраженіе боковой поверхности цилиндра (§ 215, 1).

4) Если кромѣ R и r дана высота $AB = h$ прямаго усѣченнаго конуса, то опустивъ изъ точки E на нижнее основаніе конуса перпендикуляръ $EF = h$, получимъ $s = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$; тогда боковая поверхность M и вся поверхность O усѣченнаго конуса будутъ равны

$$M = (R + r)\pi\sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

$$O = \pi\left[R^2 + r^2 + (R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2}\right]$$

§ 227. 1) Объемы двухъ подобныхъ конусовъ относятся какъ кубы ихъ осей или радіусовъ.

2) Боковыя поверхности O и o двухъ подобныхъ прямыхъ конусовъ относятся какъ квадраты ихъ осей (A, a), или образующихъ (S, s) или радіусовъ (R, r).

1) Такъ какъ объемъ конуса равенъ трети объема цилиндра, имѣющаго съ нимъ равное основаніе и равную высоту (§ 221, 5), а объемы подобныхъ цилиндровъ относятся какъ кубы ихъ осей или радіусовъ (§ 216), то объемы конусовъ будутъ имѣть тоже отношеніе.

2) Такъ какъ $O : o = RS\pi : rs\pi$, и

$A : a = R : r = S : s$, то и

$O : o = R^2 : r^2 = S^2 : s^2 = A^2 : a^2$.

§ 228. Задачи.

1) Построить цилиндръ и конусъ, если даны радіусъ основанія r высота h и уголъ a наклоненія оси къ основанію.

2) Даны радіусъ основанія и высота прямаго цилиндра. Построить другой прямой цилиндръ, котораго боковая поверхность равнялась бы всей поверхности, а основаніе—основанію перваго цилиндра.

3) Начертить кругъ, котораго площадь равнялась бы цѣлой поверхности 1) прямаго цилиндра, 2) прямаго конуса, которыхъ радіусы основанія и высоты даны.

4) Начертить кругъ, котораго площадь равнялась бы всей поверхности прямаго усѣченнаго конуса.

5) Даны два подобные конуса; построить третій, который бы былъ подобемъ даннымъ, а объемъ его былъ среднее геометрическое между ихъ объемами.

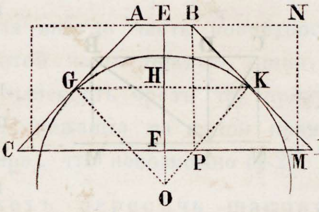
6) Построить цилиндръ, который бы былъ подобенъ данному цилиндру и котораго поверхность относилась бы къ поверхности даннаго цилиндра, какъ $m : n$.

7) Въ прямой цилиндръ вписать прямой же параллелепипедъ, котораго ребра основанія относились бы между собою какъ $1 : \sqrt{2}$. Это отношеніе берутъ, если желаютъ вырубить изъ бревна брусокъ, который бы могъ вынести наибо́льшую тяжесть.

8) Выразить въ линіяхъ отношеніе между объемами двухъ данныхъ конусовъ.

9) Построить цилиндръ и конусъ, сумма объемовъ которыхъ равнялась бы объему даннаго усѣченнаго конуса, а высота всѣхъ трехъ тѣлъ была бы одинакова.

10) Дано сѣченіе ABCD по оси EF усѣченнаго прямаго конуса. Построить прямой цилиндръ одинаковой съ конусомъ высоты, такъ что боковая поверхность равнялась бы боковой поверхности усѣченнаго конуса.

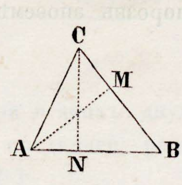


11) Усѣченный прямой конусъ разсѣчь плоскостью, параллельною основаніямъ такъ, что бы площадь сѣченія была среднею пропорціональною между площадями основаній.

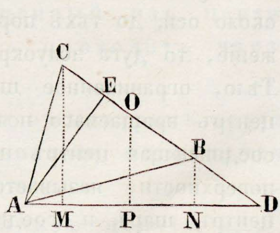
12) Чрезъ точку A, данную внѣ цилиндра, провести плоскость, которая бы коснулась его по образующей.

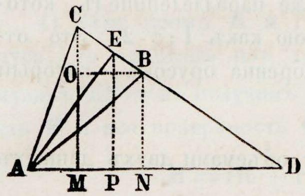
13) Чрезъ точку A внѣ конуса провести къ нему касательную плоскость.

14) Данный тре—къ ABC вращается около одной изъ его сторонъ AB, какъ около оси; построить конусъ, равновеликій полученному такимъ образомъ тѣлу вращенія такъ, чтобы площадь основанія этого конуса равнялась кривой поверхности, происшедшей отъ вращенія одной изъ сторонъ AC или BC даннаго треугольника.

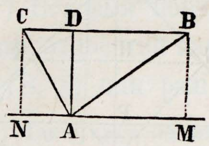


15) Данный тре—къ ABC вращается около проходящей чрезъ вершину A оси AD, которой положеніе дано и которая пересѣкается съ продолженіемъ стороны BC въ точкѣ D. Построить конусъ, котораго высота равнялась бы высотѣ AE даннаго тре—ка, а объемъ—тѣлу, происшедшему отъ вращенія тре—ка ABC.





16) Данный равнобеременный тре—къ ABC вращается около проходящей чрезъ вершину A линіи AD, которой положеніе дано, и которая пересѣкаетъ продолженіе стороны BC въ точкѣ D. Построить конусъ и цилиндръ, которыхъ объемы равнялись бы порознь объему тѣла вращенія, кромѣ того площадь основанія конуса равнялась бы кривой поверхности, описанной линіею BC, а радіусъ основанія цилиндра былъ бы равенъ перпендикуляру AB на CB.



17) Тре—къ ABC вращается около линіи MN, параллельной его сторонѣ BC и проходящей чрезъ вершину A. Построить цилиндръ и конусъ, чтобы объемъ каждаго изъ нихъ равнялся тѣлу, произшедшему отъ вращенія ABC, и кромѣ того чтобы радіусъ основанія цилиндра и высота конуса равнялись высотѣ AD тре—ка.

18) Половина правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ вращается около діаметра круга. (Фиг. § 237). 1) Построить прямой цилиндръ, котораго высота равнялась бы оси AF, а боковая поверхность — поверхности тѣла вращенія. 2) Построить цилиндръ и конусъ, чтобы объемъ каждаго изъ нихъ равнялся объему тѣла вращенія и кромѣ того радіусъ основанія цилиндра и высота конуса равнялись бы порознь апоѳемѣ (OT) вписаннаго многоугольника.

VI. О шарѣ.

§ 229. Если полуокружность вращается около діаметра, какъ около оси, до тѣхъ поръ, пока она возвратится въ первоначальное положеніе, то дуга полуокружности описываетъ шаровую поверхность. Тѣло, ограниченное шаровою поверхностью, называется шаромъ, а центръ вращаемаго полукруга — центромъ шара. — Всякая прямая, соединяющая центръ шара съ какою нибудь точкою, лежащею на его поверхности, называется радіусомъ, а прямая, проходящая чрезъ центръ шара и соединяющая двѣ точки его поверхности, діаметромъ шара.

Изъ самаго образованія шара слѣдуетъ, что всѣ его радіусы, а слѣдовательно и всѣ діаметры равны. Поэтому шаръ можно разсматривать какъ тѣло, ограниченное поверхностью, которой всѣ точки равно отстоятъ отъ одной точки, находящейся внури шара и называемой центромъ.

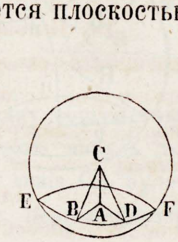
Шары, имѣющіе равные радіусы, равны; потому что если мы представимъ себѣ что они наложены такъ другъ на друга, что ихъ центры совпадаютъ, тогда и всѣ точки ихъ поверхностей должны также совпасть.

§ 230. Поверхность шара есть кривая по всѣмъ направленіямъ поверхность.

Если бы мы предположили, что какая нибудь часть поверхности шара плоска, то могли бы провести на этой части прямую линію, а взявъ на этой прямой три точки и проведя плоскость чрезъ эту прямую и центръ шара, мы получили бы три точки, лежащія на одной прямой и равно отстоящія отъ четвертой (центра шара), что невозможно (§ 29, 1).

Слѣдствіе. Прямая линія можетъ пересѣчь шаровую поверхность не болѣе какъ въ двухъ точкахъ.

§ 231. Если шаровая поверхность пересѣкается плоскостью, то линія пересѣченія будетъ кругъ.



Если плоскость сѣченія проходитъ чрезъ центръ то справедливость этой теоремы видна изъ самаго опредѣленія шара. Если же сѣкущая плоскость не проходитъ чрезъ центръ C, то опустивъ на эту плоскость изъ центра перпендикуляръ CA и соединивъ двѣ какія либо точки B и D линіи пересѣченія съ точками A и C, мы будемъ имѣть $\triangle CAB \cong CAD$ (§ 25 слѣд.), слѣд. $AB = AD$. Этотъ выводъ справедливъ для всякихъ двухъ точекъ линіи пересѣченія, и потому всѣ точки этой послѣдней равно удалены отъ точки A, слѣд. линія пересѣченія есть кругъ.

§ 232. 1) Перпендикуляръ, опущенный изъ центра шара на пересѣкающую его плоскость проходитъ чрезъ центръ круга сѣченія.

2) Линія, соединяющая центръ шара съ центромъ круга, произшедшаго отъ сѣченія шара плоскостью, перпендикулярна къ этой послѣдней.

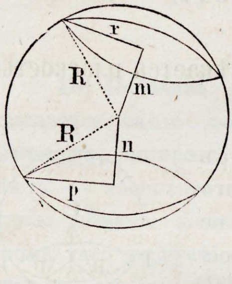
3) Перпендикуляръ, возставленный изъ центра круга сѣченія, пройдетъ чрезъ центръ шара, потому что онъ долженъ совпасть съ прямою, соединяющею эти центры (§ 151).

4) Перпендикуляры, возставленные изъ центровъ двухъ какихъ либо непараллельныхъ круговъ сѣченій встрѣчаются въ центрѣ шара.

5) Центры двухъ параллельныхъ сѣченій лежатъ на одномъ и томъ же діаметрѣ, перпендикулярномъ къ плоскостямъ обоихъ сѣченій.

6) Кругъ сѣченія опредѣляется тремя точками на поверхности шара (§ 146).

§ 233. 1) Сѣченія, находящіяся на равныхъ разстояніяхъ отъ центра шара, равны. 2) Плоскости равныхъ сѣченій находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ центра шара. 3) Сѣченія тѣмъ болѣе, чѣмъ ближе къ центру шара. 4) Изъ двухъ неравныхъ сѣченій бо́льшее находится ближе къ центру чѣмъ меньшее.



Если изъ центра шара на двѣ сѣкущія плоскости опустимъ перпендикуляры m и n, то эти послѣдніе будутъ служить разстояніями плоскостей отъ центра шара и пройдутъ чрезъ центры сѣченій. Проведемъ въ обоихъ кругахъ сѣченій радіусы r и p и соединимъ ихъ концы съ центромъ шара радіусомъ R; тогда изъ происшедшихъ такимъ образомъ прямоугольныхъ тре—ковъ будемъ имѣть

$$R^2 = r^2 + m^2 \quad \text{и} \quad R^2 = p^2 + n^2, \quad \text{слѣд.}$$

$$r^2 + m^2 = p^2 + n^2.$$

1) Если $m = n$, то $r^2 = p^2$ или $r = p$.

2) Если $r = p$, то $m^2 = n^2$ или $m = n$.

3) Если $n < m$, то $p^2 > r^2$ или $p > r$.

4) Если $p > r$, то $n^2 < m^2$ или $n < m$.

§ 234. 1) Сѣченіе, проходящее чрезъ центръ шара, называется большимъ кругомъ, всѣ же остальныя — малыми кругами.

2) Всѣ большіе круги одного и того же шара равны между собою, потому что имѣютъ равные радіусы.

3) Два большіе круга дѣлятся взаимно пополамъ, такъ какъ ихъ плоскости проходятъ чрезъ центръ шара, потому и линія пере-

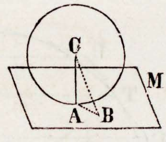
сѣченія плоскостей пройдетъ также чрезъ центръ и будетъ общимъ діаметромъ обоихъ круговъ.

4) Посредствомъ наложенія легко удостовѣриться, что шаръ и его поверхность дѣлятся пополамъ всякою плоскостью, проходящею чрезъ центръ шара. Каждая половина шара называется полушаріемъ.

5) Чрезъ двѣ діаметрально противоположныя точки поверхности шара можно провести безчисленное множество большихъ круговъ, а чрезъ двѣ не діаметрально противоположныя только одинъ большой и безчисленное множество малыхъ круговъ.

§ 235. 1) Если плоскость M перпендикулярна къ радіусу AC въ концѣ его A, то она касается шара, т. е. имѣетъ съ нимъ только одну общую точку.

2) Плоскость M, касательная къ шару, перпендикулярна къ радіусу AC, проходящему чрезъ точку касанія.



1) Если $AC \perp M$, то соединивъ центръ C съ произвольною точкою B лежащею въ плоскости M (за исключеніемъ точки A), получимъ $CB > CA$ (153, 1); слѣд. B и всякая другая точка плоскости M, за исключеніемъ точки A, лежать внѣ шара.

2) Если плоскость M имѣетъ съ шаромъ только одну общую точку A, то всякая прямая BC, соединяющая центръ C съ какою нибудь точкою B плоскости M, будетъ болѣе радіуса CA, слѣд. линія CA будетъ кратчайшее разстояніе точки C отъ плоскости M, т. е. перпендикуляръ изъ точки C на плоскость M.

Слѣдствія. 1) Перпендикуляръ, опущенный изъ центра шара на касательную къ нему плоскость, пересѣчетъ эту послѣднюю въ точкѣ касанія.

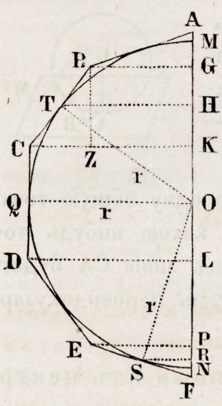
2) Перпендикуляръ къ касательной плоскости, возставленный въ точкѣ ея касанія, пройдетъ чрезъ центръ шара (§ 151).

§ 236. 1) Всякая плоскость, пересѣкающая шаръ, дѣлитъ его на два шаровые отрѣзка или сегмента. Если сѣкущая плоскость пройдетъ чрезъ центръ шара, то каждый сегментъ будетъ полушаріемъ. Площадь круга сѣченія называется основаніемъ сегмента. Если проведемъ діаметръ перпендикулярно къ основанію, то часть его, лежащая между центромъ основанія и поверхностью шара, называется высотою шароваго сегмента.

2) Часть шаровой поверхности, заключающаяся между двумя параллельными сѣкущими плоскостями, называется зоною или шаровымъ поясомъ, а часть шара, лежащая между этими плоскостями, шаровымъ слоемъ. Площади параллельныхъ круговъ служатъ шаровому слою основаніями, а разстояніе между основаніями — высотою, такъ что эта послѣдняя, измѣряется частію радіуса шара, перпендикулярнаго къ основаніямъ и заключающагося между ними. — Если одна изъ параллельныхъ плоскостей касательна къ шару, то образуется сегментъ, имѣющій только одно основаніе.

3) Если вырѣзокъ круга сдѣлаетъ полный оборотъ около одного изъ радіусовъ, его ограничивающихъ, то образуется шаровой вырѣзокъ или сѣкторъ, а дуга круговаго вырѣзка описываетъ при этомъ поверхность шароваго сегмента.

§ 237. Поверхность шара равна $4r^2\pi$, если r означаетъ радіусъ шара.



Если около полукруга MQN, котораго радіусъ r, опишемъ полупериметръ прав. мно—ка ABCDEF съ четнымъ числомъ сторонъ и представимъ себѣ, что вся фигура обращается около линіи AF, то ABCDEF опишетъ тѣло вращенія, а каждая изъ сторонъ — поверхность конуса, или полнаго, или усѣченнаго плоскостью, параллельною основанію, или наконецъ цилиндра. Опустимъ изъ вершинъ мно—ка перпендикуляры на ось AF, тогда отрѣзки оси AG, GK, KL . . . будутъ высотами полученныхъ отъ вращенія мно—ка полныхъ и усѣченныхъ конусовъ и цилиндра.

1) Чтобы вычислить поверхность усѣченнаго конуса, образованнаго движеніемъ линіи BC, проведемъ изъ точки B прямую $BZ \perp CK$ и изъ средины T стороны BC, т. е. изъ точки ея прикосновенія съ кругомъ, прямую $TH \perp AF$ и кромѣ того радіусъ $To = r$. Такъ какъ TH будетъ радіусъ круга средняго сѣченія усѣченнаго конуса, то (§ 226, 1).

Поверхность $BC = 2\pi \,.\, TH \,.\, BC.$

Но (по § 93, 2) $\triangle BCZ \sim TOH$, слѣд.

$BC : TO = BZ : TH$ или

$BC : r = GK : TH$, т. е.

$BC \,.\, TH = r \,.\, GK$, слѣд.

поверхность $BC = 2\pi r \,.\, GK.$

2) Чтобы вычислить поверхность цилиндра, образованнаго движеніемъ линіи CD, проведемъ изъ точки касанія Q радіусъ QO. Такъ какъ $QO = DL$, то (§ 215, 1)

$$\text{поверхность } CD = 2\pi r \,.\, KL.$$

3) Наконецъ чтобы вычислить поверхность полнаго конуса, проведемъ изъ точки касанія S прямую $SR \perp AF$ и радіусъ SO, тогда (по § 224, 4)

$$\text{поверхность } EF = 2\pi \,.\, SR \,.\, EF.$$

$$\text{Но такъ такъ } \triangle EFP \sim OSR, \quad \text{то}$$

$$EF : r = FP : SR \quad \text{или} \quad EF \,.\, SR = r \,.\, FP, \quad \text{слѣд.}$$

$$\text{поверхность } EF = 2\pi r \,.\, FP.$$

Изъ всего этого видно, что поверхность цилиндра и полнаго или усѣченнаго конуса равняется окружности большаго круга ($2\pi r$), умноженной на высоту тѣла, такъ что

$$\text{пов. } AB = 2\pi r \,.\, AG$$

$$\text{пов. } BC = 2\pi r \,.\, GK$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{пов. } EF = 2\pi r \,.\, PF.$$

Сложивъ всѣ эти части, получимъ:

$$\begin{aligned}\text{поверхность тѣла вращенія} &= 2\pi r\,(AG + GK \ldots\ldots + PF)\\ &= 2\pi r \,.\, AF.\end{aligned}$$

Увеличивая число сторонъ описаннаго мно—ка, мы можемъ сдѣлать разность между его периметромъ и окружностью менѣе всякой данной величины. Съ увеличеніемъ числа сторонъ величина оси AF приближается къ величинѣ діаметра, въ которую она и обращается, если число сторонъ мно—ка будетъ безконечно велико, т. е. когда мно—къ обратится въ кругъ, въ какомъ случаѣ тѣло вращенія обратится въ шаръ. Если въ выраженіе $2\pi r \,.\, AF$ воставимъ $AF = 2r$, тогда

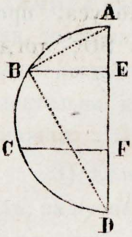
$$\text{поверхность шара} = 4r^2\pi.$$

§ 238. 1) Поверхность шара въ 4 раза больше площади его большаго круга.

2) Поверхности шаровъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ. Если O и o поверхности шаровъ, R и r радіусы, D и d діаметры, то

$$O : o = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$

§ **239.** Поверхность шароваго пояса равна $2\pi r h$, если h высота пояса, а r радіусъ шара.



Будемъ обращать полуокружность ABCD около діаметра AD, къ которому прямыя BE и CF перпендикулярны, тогда дуга AB опишетъ поверхность шароваго сегмента, а дуга BC — шаровой поясъ, которыхъ высоты будутъ AE и EF. Такимъ же образомъ какъ при вычисленіи поверхности шара въ § 237 выводится, что поверхность шароваго сегмента или пояса равняется окружности большаго круга, умноженной на высоту сегмента или пояса. Если $AE = h$, то поверхность $AB = 2\pi r h$, и если $EF = h$, то поверхность $BC = 2\pi r h$.

§ **240.** 1) Поверхности сегментовъ или поясовъ одного и того же шара относятся какъ ихъ высоты.

2) Поверхность сегмента или пояса относится къ поверхности шара, какъ его высота къ діаметру шара.

3) Если проведемъ хорду AB (фиг. 2 § 239), то изъ прямоугольнаго тре—ка ABD получимъ (§ 97, 2),

$$AB^2 = AD \,.\, AE = 2r \,.\, AE, \text{ слѣд. и}$$

$$2\pi r \,.\, AE = \pi \,.\, AB^2, \text{ т. е.}$$

Поверхность шароваго сегмента равняется площади круга, котораго радіусъ равенъ линейному разстоянію вершины сегмента отъ окружности основанія.

§ **241.** Объемъ шара равенъ $\frac{4}{3} r^3 \pi$, если r радіусъ шара.

Первое доказательство. Пусть ABDC будетъ квадратъ, котораго стороны равны радіусу r, AD діагональ квадрата и BGC четверть окружности, описанной радіусомъ r. Если будемъ обращать всю фигуру около линіи AC, какъ около оси, то квадратъ опишетъ прямой цилиндръ, тре—къ ACD — прямой конусъ, а четверть круга BGC — полушаріе. Если разсѣчемъ всѣ эти тѣла двумя плоскостями, перпендикулярными къ AC и безконечно близкими другъ къ другу, то цилиндрическій слой EF, шаровой слой EG и коническій EH можно разсматривать какъ прямые цилиндры съ безконечно малою высотою, которую назовемъ чрезъ h. Тогда

$$\text{цилиндрическіе слой} = EF^2.\pi h$$

$$\text{шаровый слой} = EG^2.\pi h$$

$$\text{коническій слой} = EH^2.\pi h.$$

Проведемъ линію AG, тогда въ $\triangle AEG$

$$EG^2 = AG^2 - AE^2.$$

Такъ какъ $AG = EF$ и $AE = EH$, потому что $\angle CAD = CDA = EHA$, то

$$EG^2 = EF^2 - EH^2, \text{ слѣд.}$$

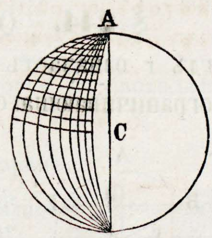
$$EG^2 \pi h = EF^2 \pi h - EH^2.\pi h,$$

т. е. шаровой слой равенъ цилиндрическому слою безъ коническаго. Три тѣла цилиндръ, полуокружность и конусъ, описанныя фигурами ABDC, ABGC, и ACD можно представить разсѣченными на безконечное множество такихъ безконечно тонкихъ слоевъ. Между частями тѣлъ вращенія, отсѣченными каждыми двумѣ послѣдовательными плоскостями будетъ существовать выведенное нами отношеніе, а потому и между суммами всѣхъ этихъ частей, т. е. полушаріемъ, цилиндромъ и конусомъ будетъ та же зависимость, т. е. если

$$\text{цилиндръ} = r^3\pi, \text{ конусъ} = \tfrac{1}{3}r^3\pi, \text{ то}$$

$$\text{полушаріе} = r^3\pi - \tfrac{1}{3}r^3\pi = \tfrac{2}{3}r^3\pi, \text{ или}$$

$$\text{весь шаръ} = \tfrac{4}{3}r^3\pi.$$



Второе доказательство. Представимъ себѣ, что чрезъ концы діаметра AB проведено безчисленное множество большихъ круговъ и безчисленное множество малыхъ круговъ, перпендикулярныхъ діаметру AB. Тогда вся поверхность шара раздѣлится на безчисленное множество четыреугольниковъ и треугольниковъ, которые по причинѣ своей малости могутъ быть приняты за плоскіе. Если представимъ, что точки пересѣченія этихъ круговъ будутъ соединены съ центромъ шара, то шаръ распадется на безконечно малыя пирамиды. Высота каждой изъ этихъ пирамидъ равна радіусу шара (r), а сумма ихъ—объемовъ равна суммѣ всѣхъ ихъ основаній (т. е. поверхности шара), умноженной на треть общей высоты (т. е. радіуса r). Такъ какъ поверхность шара $= 4r^2\pi$, то объемъ шара $= 4r^2\pi \times \frac{1}{3}r = \frac{4}{3}r^3\pi$, т. е. **объемъ шара равенъ трети произведенія его поверхности на радіусъ.**

§ **242.** 1) Если обозначимъ чрезъ d діаметръ шара, то $\frac{d}{2} = r$, слѣд.

$$\text{объемъ шара} = \frac{4}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi.$$

2) Объемы K и k двухъ шаровъ относятся какъ кубы ихъ радіусовъ (R и r) или діаметровъ (D и d) потому что

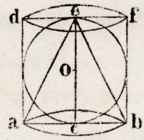
$$K : k = \tfrac{4}{3}R^3\pi : \tfrac{4}{3}r^3\pi = R^3 : r^3 = D^3 : d^3.$$

3) Если объемъ шара $\frac{4}{3}r^3\pi$ извѣстенъ, а требуется вычислить поверхность шара, то обозначая эту послѣднюю чрезъ x, можемъ поставить,

$$\tfrac{4}{3}r^3\pi = \tfrac{1}{3}rx, \text{ слѣд. } x = 4r^2\pi.$$

§ **243.** (Архимедъ.) Если около шара опишемъ прямой цилиндръ, а въ этотъ послѣдній впишемъ прямой конусъ такъ, чтобы большой кругъ шара былъ общимъ основаніемъ цилиндра и конуса, а діаметръ шара общею высотою этихъ же тѣлъ, то будемъ имѣть такое отношеніе:

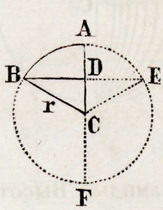
$$\text{объемъ кон.} : \text{об. шара} : \text{об. цил.} = 1 : 2 : 3.$$



Если обозначимъ чрезъ r радіусъ шара, то объемы конуса, шара и цилиндра будутъ $\frac{2}{3}r^3\pi$, $\frac{4}{3}r^3\pi$, $2r^3\pi$, слѣд. объемы этихъ трехъ тѣлъ относятся какъ

$$\tfrac{2}{3}r^3\pi : \tfrac{4}{3}r^3\pi : 2r^3\pi = 1 : 2 : 3.$$

§ **244.** Объемъ сферическаго вырѣзка равняется $\frac{2}{3}\pi r^2 h$, гдѣ r означаетъ радіусъ шаръ, а h высоту шароваго сегмента, ограничивающаго шаровой вырѣзокъ.



Пусть ABC будетъ круговой секторъ, отъ обращенія котораго около радіуса AC получился шаровой секторъ ABCEA. Такъ какъ шаръ можно разсматривать какъ совокупность пирамидъ, имѣющихъ безконечно малыя основанія и равную радіусу шара высоту, то и шаровой секторъ можно разбить на подобныя же пирамиды. Изъ этого представленія легко найти объемъ сектора, умноживъ ограничивающую его поверхность шароваго сегмента на треть радіуса. Если AD = h, то поверхность шароваго сегмента, описаннаго вращеніемъ дуги AB около радіусу AC, равна $2\pi rh$, слѣд. объемъ сектора $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

§ 245. Объемъ сферическаго сегмента равняется $h^2\pi(r - \frac{1}{3})$, гдѣ r радіусъ шара, а h высота сегмента.

Если въ круговомъ секторѣ ABCEA (фиг. § 244) проведемъ радіусъ AC перпендикулярно къ хордѣ BC и всю фигуру будемъ вращать около радіуса AC, то отъ вращенія сектора получимъ сферическій секторъ, отъ вращенія площади ABD — сферическій сегментъ, и наконецъ отъ вращенія тре—ка BDC — прямой конусъ. Изъ самаго образованія сегмента ABEA видно, что онъ равняется сектору ABCEA безъ прямаго конуса CBE. Обозначивъ AC чрезъ r, а AD чрезъ h, получимъ

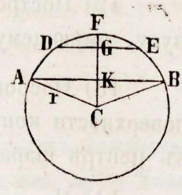
$CD = r - h$ и $BD^2 = r^2 - (r - h)^2 = (2r - h)\,h$, слѣд.

конусъ $CBE = \frac{1}{3}BD^2\pi \,.\, CD = \frac{1}{3}(2r - h)\,h\pi\,(r - h)$.

Но такъ какъ секторъ $ABCEA = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, то

$$\text{сегментъ} = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}(2r - h)\,h\pi\,(r - h)$$
$$= \frac{1}{3}h\pi\left[2r^2 - (2r - h)(r - h)\right]$$
$$= \frac{1}{3}h\pi\,(3r - h) = h^2\pi\,(r - \frac{1}{3}h).$$

§ 246. Сферическій слой ADEB равенъ разности между сегментами FABF и FAEF. Если даны высоты сегментовъ $FK = H$ и $FG = h$, и радіусъ шара $AC = r$, то



$$\text{сфер. слой} = H^2\pi\,(r - \frac{1}{3}H) - h^2\pi\,(r - \frac{1}{3}h)$$
$$= \pi r\,(H^2 - h^2) - \frac{1}{3}(H^3 - h^3).$$

§ 247. Задачи.

1) Провести къ шару касательную плоскость, которая бы проходила чрезъ данную точку P, лежащую внѣ шара.

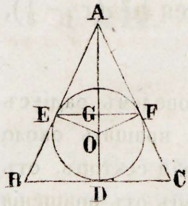
2) Провести плоскость касательную къ двумъ шарамъ.

3) Построить цилиндръ, котораго основаніе равнялось бы большему кругу шара, а боковая поверхность была равновелика данному поясу того же шара.

4) Построить кругъ, котораго плошадь равновелика данному шаровому поясу.

5) Раздѣлить параллельными кругами поверхность шара на части, которыя бы относились какъ m : n : p.

6) Построить шаровой поясъ, который бы относился къ площади основанія его какъ m : n.



7) Данъ прямой конусъ. Построить въ немъ шаръ, который бы соприкасался съ боковою поверхностью конуса по кругу, и касался основанія конуса въ центрѣ (D); выразить радіусъ (EG) круга соприкосновенія конуса съ шаромъ посредствомъ образующей (AB) и радіуса основанія (BD).

8) Около даннаго конуса описать шаръ, котораго поверхность прошла бы чрезъ вершину конуса и совмѣстилась съ окружностью основанія.

9) Въ данную трехстороннюю пирамиду вписать шаръ, который бы коснулся каждой стороны пирамиды.

10) Даны радіусы a, b, c трехъ шаровъ, лежащихъ на одной плоскости и соприкасающихся между собою. Найти стороны тре—ка, котораго вершины лежатъ въ точкахъ прикосновенія плоскости съ шароми.

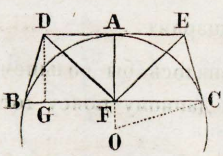
11) Построить шаровой секторъ, котораго объемъ равнялся бы объему, а ограничивающій его шаровой сегментъ — основанію косаго конуса.

12) Построить шаровой сегментъ, котораго объемъ равняется конусу, имѣющему съ нимъ общее основаніе, а вершину въ центрѣ шара.

13) Посроить шаровой сегментъ, котораго поверхность равняется поверхности конуса, имѣющаго съ первымъ общее основаніе, а вершину въ центрѣ шара.

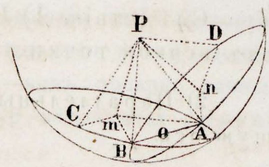
14) На основаніи щароваго сегмента построить равновеликій ему конусъ.

15) Отъ даннаго шара отрѣзать сегментъ, котораго объемъ относился бы къ объему соотвѣтствующаго ему сектора какъ m : n.



16) Около шароваго сегмента BAC описанъ прямой усѣченный конусъ BDEC равной съ сегментомъ высоты и при томъ такъ, что всѣ образующія этого конуса касаются шара въ точкахъ основанія сегмента. Обратить тѣло, заключающееся между поверхностью шара и усѣченнаго конуса, въ полный конусъ, который бы имѣлъ равную съ сегментомъ высоту.

17) Даны высота h и радіусы a, и b верхняго и нижняго основаній шароваго слоя. Построить цилиндръ, котораго высота $= \frac{1}{2}h$, и котораго объемъ, сложенный съ шаромъ діаметра h, равновеликъ данному шаровому слою.



18) Доказать, что чрезъ четыре точки A, B, C, D, не лежащія въ одной плоскости, можно провести только одну сферическую поверхность.

19) Около данной трехсторонней пирамиды описать сферическую поверхность.

20) Описать шаровую поверхность, которая бы прошла чрезъ всѣ точки двухъ пересѣкающихся въ пространствѣ круговъ.

21) Описать шаровую поверхность, если дана какая нибудь часть этой поверхности.

22) Доказать, что внутри всякаго правильнаго многогранника есть точка, которая равно удалена отъ всѣхъ его вершинъ, и отъ всѣхъ сторонъ.

23) Около правильнаго многогранника описать шаръ, и въ правильномъ многогранникѣ вписать шаръ.

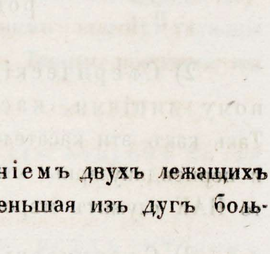
24) Описать шаръ, который бы касался всѣхъ реберъ правильнаго многогранника.

---

§ 248. Подъ сферическимъ разстояніемъ двухъ лежащихъ на одномъ и томъ же шарѣ точекъ разумѣется меньшая изъ дугъ большаго круга, проходящаго чрезъ эти точки.

Полюсами какого либо круга, проведеннаго на шарѣ, называются точки, въ которыхъ діаметръ, перпендикулярный къ плоскости этого круга, пересѣкаетъ поверхность шара. Діаметръ, соединяющій полюсы круга называется осью этого послѣдняго

§ 249. Каждый изъ полюсовъ равно удаленъ отъ всѣхъ точекъ соотвѣтствующаго ему круга.



Положимъ что діаметръ AB перпендикуляренъ къ площади большаго круга CDE и малаго FGK. Дуги AC, AD, BC, BD . . равны между собою, потому что каждая изъ нихъ есть четверть окружности.

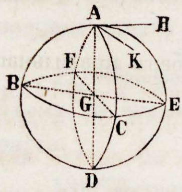
Относительно малаго круга хорды AF и AG равны (§ 153, 2), слѣд. и дуги AF и AG, BF и BG также равны.

Слѣдствія. 1) Каждый полюсъ большаго круга отстоитъ отъ всякой точки этого послѣдняго на 90^o.

2) Параллельные круги имѣютъ общіе полюсы и общую ось.

3) Если точка A шара отстоитъ на 90^o отъ двухъ какихъ либо точекъ C и D, того же шара не лежащихъ на концахъ одного и того же діаметра, то она есть полосъ большаго круга, проходящаго чрезъ эти точки.

Такъ какъ дуга $AC = AD = 90^o$, то $\measuredangle AOC = AOD = R$, а потому AO перпендикулярна къ плоскости CDE, слѣд. A есть полюсъ круга CDE.



§ 250. 1) Угломъ двухъ большихъ круговъ, напр. CAE называется уголъ наклоненія плоскостей этихъ круговъ. — Уголъ CAE называется сферическимъ угломъ, дуги AC и AE его сторонами, а точка A — его вершиною.

2) Сферическій уголъ CAE равенъ углу HAK, образованному линіями, касающимися его сторонъ въ вершинѣ A. Такъ какъ эти касательныя находятся въ плоскостяхъ сторонъ AC и AE, и перпендикулярны къ линіи AD пересѣченія этихъ плоскостей (§ 48 2), то HAK служитъ мѣрою наклоненія плоскостей (§ 107, 3).

3) Сферическій уголъ CAE измѣряется дугою CE, описанною изъ его вершины A четвертью окружности большаго круга, какъ радіусомъ, и заключающеюся между сторонами этого угла. Такъ какъ $\measuredangle AGC = AGE = R$, то $\measuredangle CGE$ будетъ угломъ наклоненія плоскостей кругъ CA и EA; но дуга CE служитъ мѣрою углу CGE, слѣд. она будетъ измѣрять и уголъ CAE.

4) Часть поверхности шара, ограниченная двумя полуокружностями большаго круга называется сферическимъ двусторонникомъ. Оба сферическіе угла двусторонника равны.

5) Часть поверхности шара, ограниченная тремя дугами большихъ круговъ, называется сферическимъ треугольникомъ. Сферическіе тре—ки, подобно прямолинейнымъ, бываютъ прямоугольные, тупоугольные и остроугольные. Мы будемъ разсматривать только такіе сферическіе треугольники, которыхъ стороны и углы, каждый въ отдѣльности, менѣе 180^o.

6) Равными сферическими тре—ками называются такіе, которые при взаимномъ наложеніи другъ на друга совмѣщаются всѣми своими частями. Если же всѣ части сферическихъ тре—ковъ попарно равны, но расположены въ обратномъ порядкѣ, то тре—ки называются симметричными.

§ 251. Если чрезъ центръ шара и стороны сферическаго тре—ка проведемъ плоскости, то получится трегранный уголъ, котораго плоскіе углы равны сторонамъ, а двугранные равны угламъ сферическаго тре—ка. Такимъ образомъ каждому сфер. тре—ку соотвѣтствуетъ трегранный уголъ, съ вершиною въ центрѣ шара и наоборотъ, — каждому трегранному углу соотвѣтствуетъ сферическій тре—къ, который получится, если мы какимъ нибудь радіусомъ изъ вершины трегранняго угла какъ изъ центра опишемъ шара, при чемъ точки пересѣченія реберъ угла съ поверхностью шара будутъ вершинами сферическаго тре—ка.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что всѣ теоремы, выведенныя въ §§ 177 до 184 для плоскихъ и двугранныхъ угловъ трегранняго угла, могутъ быть прямо отнесены къ сферическимъ тре—камъ, если мы вмѣсто двугранныхъ и плоскихъ угловъ трегранняго вставимъ соотвѣтствующія части сферическаго тре—ка, т. е. стороны и углы. Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія теоремы.

1) Въ сферическомъ тре—кѣ сумма двухъ сторонъ болѣе третьей. (§ 177).

2) Въ сферическомъ тре—кѣ сумма всѣхъ сторонъ менѣе 4R, т. е. менѣе периметра большаго круга сферы (§ 178).

3) Сумма трехъ угловъ сферическаго тре—ка болѣе 2R и менѣе 6R. (§ 180).

4) Два сферическіе те—ка равны или симметричны, если въ нихъ попарно равны:

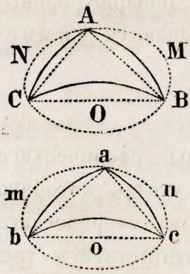
a) три стороны (§ 181, 1), или

b) три угли (§ 181, 2), или

c) двѣ стороны и лежащій между ними уголъ (§ 181, 3), или

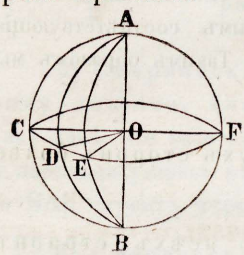
d) два угла и лежащая между ними сторона (§ 181, 4).

§ 252. Два симметричные тре—ка ABC и abc равновелики.



Такъ какъ дуги AB и ab, AC и ac, AC и bc равны между собою, то и хорды ихъ равны, слѣд. плоскій $\triangle$ ABC $\cong$ abc. Если мы около этихъ тре—ковъ опишемъ окружности, то эти послѣднія будутъ равны между собою, слѣд. и равно удалены отъ центра шара (§ 233, 2), а потому поверхности шаровыхъ сегментовъ, которыхъ основаніями служать эти круги, должны быть равны другъ другу (§ 240, 1). Очевидно, что двухугольная фигура M, ограниченная двумя пересѣкающимися дугами, равна фигурѣ m; подобнымъ образомъ N = n и O = o. Отнявъ отъ равныхъ между собою поверхностей шаровыхъ сегментовъ равныя фигуры M, N, O и m, n, o, мы получимъ въ остаткѣ равновеликіе тре—ки ABC и abc.

§ 253. Поверхность сферическаго двусторонника относится къ поверхности шара, какъ уголъ двусторонника къ четыремъ прямымъ.



Если два сфер. двусторонника имѣютъ равные углы CAD и DAE, то они равны, потому что при наложеніи взаимно закроются. Если одинъ двусторонникъ ADBEA откладывается цѣлое число разъ на другомъ, AEBFA то и уголъ перваго отложится цѣлое число разъ на углѣ втораго, а если большой кругъ CDEF перпендикуляренъ къ сторонамъ двусторонника, то и дуга DE отложится тоже число разъ на дугѣ EF. Если при наложеніи получится остатокъ, то съ помощію такого же какъ въ §§ 53 и 168 пріема можно убѣдиться, что и въ этомъ случаѣ двусторонники будутъ относиться какъ ихъ углы. Разсматривая всю поверхность шара какъ двусторонникъ котораго уголъ = 4R, мы получимъ такую пропорцію: поверхность сфер. двусторонника относится къ поверхности шара, какъ уголъ его къ 4R, или измѣряющая его уголъ дуга къ окружности большаго круга.

§ 254. 1) *Двусторонники того же шара, имѣющіе равные углы, равны между собою.*

2) *Для вычисленія поверхности двусторонника Z по данному углу A и радіусу r или поверхности O шара имѣемъ:*

$$Z : 4r^2\pi = A : 4R \quad \text{или} \quad Z : O = A : 4R, \quad \text{слѣд.}$$

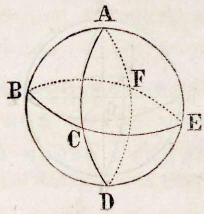
$$Z = \frac{Ar^2\pi}{R} \quad \text{или} \quad Z = \frac{A}{4R} \cdot O.$$

Углы A и R должны быть выражены въ единицахъ одного и тогоже названія, т. е. въ градусахъ минутахъ, или секундахъ.

3) Тѣло K, отсѣкаемое отъ шара плоскостями, проходящими чрезъ стороны двугранника, заключается столько разъ въ шарѣ, сколько разъ уголъ двусторонника заключается въ 4R, т. е.

$$K : \tfrac{4}{3}r3\pi = A : 4R, \text{ слѣд. } K = \frac{r^3\pi}{3R} \cdot A.$$

§ 255. Поверхность сферическаго треугольника ABC относится къ цѣлой поверхности шара O, какъ сферическій избытокъ, т. е. разность между суммою его угловъ и 2R, относится къ 8R.



Продолжимъ стороны тре—ка ABC такъ, чтобы онѣ составили полные круги, которые пересѣкутся въ точкахъ D, E, F, діаметрально противоположныхъ точкамъ A, B, C, тогда (§ 254, 2)

$$ABC + BCD = \text{двустороннику } ABDCA = \frac{A}{4R} \cdot O.$$

$$ABC + ACE = \text{двустороннику } BAECB = \frac{B}{4R} \cdot O$$

$$ABC + ABF = \text{двустороннику } CAFBC = \frac{C}{4R} \cdot O$$

Сложивъ эти равенства и вставивъ ABF = DCE (§ 252), получимъ

$$3ABC + BCD + ACE + DCE = \frac{A + B + C}{4R} . O$$

$$\text{Но } ABC + BCD + ACE + DCE = \tfrac{1}{2} O, \text{ слѣд.}$$

$$2ABC + \tfrac{1}{2} O = \frac{A + B + C}{4R} \cdot O, \text{ откуда}$$

$$ABC = \frac{(A + B + C - 2R)\ O}{8R} \quad \text{или}$$

$$\frac{ABC}{O} = \frac{A + B + C - 2R}{8R}.$$

§ 256. 1) Такъ какъ поверхность шара $O = 4r^2\pi$, то плоскость сферическаго тре—ка выражается помощію угловъ тре—ка и радіуса r такъ:

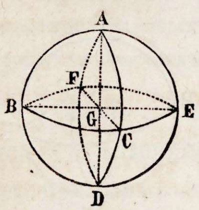
$$\triangle ABC = \frac{A+B+C-2R}{8R} \cdot 4r^2\pi = \frac{A+B+C-2R}{2R} \cdot r^2\pi$$

$$\text{т. е.} \quad \triangle ABC = \frac{A+B+C-180^0}{180^0} \cdot r^2\pi.$$

Въ этихъ формулахъ углы A, B, C и R должны быть выражены въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ угловой мѣры.

2) Всѣ сферческіе тре—ки на одномъ и томъ же шарѣ равновелики, если сумма ихъ угловъ равна.

3) Поверхности сфер. тре—ковъ одного и тогоже шара относятся какъ ихъ сферическіе избытки.



§ 257. 1) Тремя плоскостями, проведенными чрезъ центръ шара перпендикулярно другъ къ другу, шаровая поверхность дѣлится на 8 частей, которыя равны между собою, въ чемъ легко удостовѣриться чрезъ наложеніе. Каждая изъ этихъ частей, напр. ABC, замкнута дугами, равными четвертямъ окружностей большихъ круговъ, пересѣкающихся подъ прямыми, углами, называется сферическимъ октантомъ.

2) За единицу мѣры шаровой поверхности иногда принимается сфер. октантъ. При такой единицѣ мѣры поверхность шара равна 8.

3) Если за единицу угловой мѣры примемъ прямой уголъ, а за единицу мѣры сферической поверхности — сферическій октанть, то поверхность сфер. треугольника равна сферическому избытку.

Такъ какъ сфер. октантъ $= \frac{1}{8} \cdot 4r^2\pi$, то $r^2\pi = 2$ сфер. октантамъ. Вставивъ это выраженіе въ выведенную выше формолу

$$\triangle ABC = \frac{A+B+C-2R}{2R} \cdot r^2\pi, \text{ получимъ}$$

$$\triangle ABC = \left(\frac{A+B+C-2R}{R}\right) \text{ сфер. окт.}$$

Но R и сфер. октантъ единицы мѣры, слѣд.

$$\triangle ABC = A + B + C - 2.$$

Если напр. каждый изъ угловъ сфер. тре—ка ABC равенъ $\frac{4}{3}$R, то $\triangle ABC = \frac{4}{3} \times 3 - 2 = 2$, т. е. равенъ 2 сфер. октантамъ или четверти поверхности сферы.

4) Если обозначимъ чрезъ A отношеніе угла сфер. двусторонника Z

къ прямому углу, то поверхность двусторонника Z равна 2A шаровымъ октантамъ.

Это предложеніе выведется изъ пропорцій $Z:8 = A:4$, слѣд. $Z = 2A$.

5) Поверхность сфер. тре—ка равняется поверхности сфер. двусторонника, котораго уголъ равенъ половинѣ сфер. избытка этого тре—ка.

Обозначимъ чрезъ x уголъ сфер. двусторонника, равновеликаго данному сфер. тре--ку, и приравняемъ выраженія этихъ поверхностей; тогда получимъ (§ 254, 2 и § 256, 1.)

$$\frac{xr^2\pi}{R} = \frac{A + B + C - 2R}{2R} \cdot r^2\pi, \quad \text{слѣд.}$$

$$x = \tfrac{1}{2}(A + B + C) - R.$$

§ 258. 1) Найти поверхность сфер. многоугольника, т. е. части шаровой поверхности, ограниченной болѣе чѣмъ тремя дугами большихъ круговъ, если дано число сторонъ (n), сумма угловъ (S) и радіусъ шара (r).

Проведя изъ какой либо вершины много—ка дуги большихъ круговъ въ остальныя его вершины, мы получимъ (n—2) сферическихъ тре—ковъ. Если обозначимъ чрезъ s, s′, s″ . . . суммы угловъ каждаго изъ этихъ тре—ковъ, то поверхности ихъ будутъ (§ 256, 1):

$$\frac{s - 180^0}{180^0} \cdot r^2\pi, \quad \frac{s' - 180^0}{180^0} \cdot r^2\pi, \quad \frac{s'' - 180^0}{180^0} \cdot r^2\pi \ldots \text{слѣд.}$$

$$\text{мно—къ} = \frac{s + s' + s'' \ldots - (n-2)\,180^0}{180^0} \cdot r^2\pi = \frac{S - (n-2)\,180^0}{180} \cdot r^2\pi$$

гдѣ S должно быть выражено въ градусахъ и частяхъ градуса.

2) Если принимать за единицы мѣры прямой уголъ и сферическій октантъ, то поверхность сфер. мно—ка равна $S - 2(n-2)$.

§ 259. Найти объемъ шаровой пирамиды, т. е. части шара, ограниченной сфер. много—комъ и плоскостями, проведенными чрезъ стороны сфер. мно—ка, если даны радіусъ (r) шара и углы много—ка.

Можно представить себѣ, что шаровая пирамида состоитъ изъ безконечно большаго числа безконечно малыхъ пирамидъ, которыя имѣютъ общую вершину въ центрѣ шара, основанія которыхъ составляютъ ограничивающій пирамиду сфер. мно—къ, а высоты равны радіусу (r) шара. Изъ этого слѣдуетъ, что объемъ шаровой пирамиды равняется поверхноси сфер. мно—ка, умноженной на $\frac{1}{3}$r.

Если основаніе сфер. пирамиды будетъ сфер. тре — къ, котораго углы A, B, C, то объемъ шаровой пирамиды (§ 256, 1)

$$= \frac{A + B + C - 180^0}{540^0} \cdot r^3\pi$$

Если же основаніе мно — къ, въ которомъ n сторонъ и сумма угловъ = S, тогда объемъ шаровой пирамиды (§ 258, 1)

$$= \frac{S - (n - 2)\,180^0}{540^0} \cdot r^3\pi.$$

§ 260. Задачи.

1) На данномъ шарѣ провести большой кругъ, котораго полюсомъ была бы данная точка A.

2) На шарѣ начертить кругъ, котораго полюсъ и радіусъ даны.

3) Провести дугу большаго круга чрезъ данныя двѣ точки на шарѣ.

4) Продолжить данную дугу большаго круга.

5) Найти полюсъ большаго или малаго круга, проведеннаго на шарѣ.

6) Построить сфер. мно—къ, который былъ бы симметриченъ данному сфер. мно—ку.

7) Чрезъ данную точку на дугѣ большаго круга провести дугу, перпендикулярную къ первой.

8) Изъ данной точки, лежащей внѣ большаго круга, провести къ этому кругу перпендикулярную дугу.

9) Раздѣлить пополамъ данную на шарѣ дугу.

10) Раздѣлить пополамъ данный сферическій уголъ.

11) Чрезъ данную на шарѣ точку провести большой кругъ, который бы пересѣкъ другой большой кругъ подъ даннымъ угломъ.

12) При данной точкѣ большаго круга построить сфер. уголъ, равный данному.

13) Около даннаго сфер. тре—ка описать кругъ.

14) Въ данномъ сфер. тре—кѣ вписать кругъ

15) Построить сфер. тре—къ по даннымъ 1) тремъ сторонамъ, 2) тремъ угламъ, 3) двумъ сторонамъ и заключающемуся между ними углу, 4) двумъ угламъ и лежащей между ними сторонѣ.

16) Чрезъ данную на шарѣ точку P провести большой кругъ, который бы касался даннаго малаго круга.

17) Провести большой кругъ, который бы касался даннаго малаго круга K, и имѣлъ бы полюсомъ точку P.

18) Провести большой кругъ, который бы касался двухъ данныхъ малыхъ круговъ.

19) Доказать, что меньшая дуга окружности большаго круга, заключающася между двумя лежащими на шарѣ точками, менѣе дуги всякаго малаго круга, заключеющейся между тѣмъ же точками.

Печатано въ типографіи Шнакенбурга въ Дерптѣ.