

Tartu Ülikool  
Loodus- ja täppisteaduste valdkond  
Matemaatika ja statistika instituut

Margaret Viitung

**Jamesi ruumi alternatiiv  
ja lineaarse mõõtmeprobleem**

Matemaatika eriala  
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja Aleksei Lissitsin

Tartu 2017

# Jamesi ruumi alternatiiv ja lineaarse mõõtme probleem

Bakalaureusetöö

Margaret Viitung

**Lühikokkuvõte** Bakalaureusetöö koosneb kahest osast. Neist esimeses konstrueeritakse Banachi ruumide  $\ell_p$ -summade abil mitterefleksiivne Banachi ruum, mis on isomorfne oma teise kaasruumiga. See on toodud omadustega alternatiivne näide Jamesi ruumile. Teises osas modifitseeritakse loodud konstruktsiooni ja selle abil tuuakse uus lahendus lineaarse mõõtme probleemile. Töö põhineb A. Plichko ja M. Wójtowiczi artiklil 2003. aasta "*Note on a Banach Space Having Equal Linear Dimension with its Second Dual*", mis omakorda kasutab Ezrohhi 1998. aasta artiklis "*On linear dimension*" loodud konstruktsiooni.

**CERCS teaduseriala:** P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

**Märksõnad:** refleksiivsus, lineaarne mõõde, Jamesi ruum.

## James' Space Alternative and the Linear Dimension Problem

Bachelor's thesis

Margaret Viitung

**Abstract** This Bachelor's thesis consists of two parts. In the first part, a non-reflexive Banach space, which is isomorphic to its second dual, is constructed using Cartesian  $\ell_p$ -products of Banach spaces. It is an alternative example to James' space with the these properties. In the second part, the created construction is modified to give a new solution to the linear dimension problem. The thesis is based on A. Plichko and M. Wójtowicz's article "*Note on a*

*Banach Space Having Equal Linear Dimension with its Second Dual*”, which uses the construction created by Erokhi in his article “*On linear dimension*”.

**CERCS research specialisation:** P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

**Märksõnad:** reflexivity, linear dimension, James’ space.

# Sisukord

Sissejuhatus	5
<b>1</b> Vajalikud mõisted ja eelteadmised	<b>7</b>
<b>2</b> Jamesi ruumi alternatiiv	<b>9</b>
2.1 Refleksiivsus . . . . .	9
2.2 Alamruumi täiendatavus . . . . .	12
2.3 Banachi ruumide $\ell_p$ -summa . . . . .	17
2.4 Teise kaasruumiga isomorfne mitterefleksiivne Banachi ruum . . . . .	22
<b>3</b> Lineaarse mõõtmeprobleem	<b>23</b>
3.1 Ruumideaal . . . . .	23
3.2 Kvaasikaasruumid . . . . .	23
3.3 Lineaarse mõõtmeprobleem . . . . .	26
<b>Kirjandus</b>	<b>28</b>

## Sissejuhatus

1950. aastal tõi R. C. James esimesena näite pikalt otsitud mitterefleksiivsest Banachi ruumist (vt. alapeatükk 1.1), mis on isomorfne oma teise kaasruumiga [3].

Lineaarse mõõtme probleemi püstitas Banach 1932. aastal [4]. Nimelt, kui ruum  $X$  on isomorfne mingi ruumi  $Y$  alamruumiga ja ruum  $Y$  on isomorfne mingi ruumi  $X$  alamruumiga, kas sellest järeldeb, et ruumid  $X$  ja  $Y$  on isomorfsed? Selle probleemi klassikaline lahendus esitati Banachi ja Mazuri poolt 1933. aastal [5].

Käesolev bakalaureusetöö põhineb A. Plichko ja M. Wójtowiczi 2003. aasta artiklil “*Note on a Banach Space Having Equal Linear Dimension with its Second Dual*” [1]. See artikkel kasutab Ezrohhi 1948. aasta artiklit “*On linear dimension*” [2], milles püüti leida uut lahendust lineaarse mõõtme probleemile. See lahendus osutus valeks. Plichko ja Wójtowicz aga näitasid, kuidas Ezrohhi poolt loodud konstruktsiooniga anda alternatiiv Jamesi ruumile ja sarnase konstruktsiooniga anda alternatiivne lahendus lineaarse mõõtme probleemile.

Bakalaureusetöö koosneb kahest osast.

Esimeses osas seletatakse lahti Ezrohhi konstruktsioon, mis kasutab Banachi ruumide  $\ell_p$ -summasid. Näidatakse Plichko-Wójtowiczi artikli eeskujul, et loodud ruum on mitterefleksiivne Banachi ruum, mis on isomorfne oma teise kaasruumiga.

Töö teises osas muudetakse konstruktsiooni nii, et see tooks lihtsa lahenduse lineaarse mõõtme probleemile. Selle osa tõestus kasutab kvaasikaasruume ja erineb Plichko-Wójtowiczi omast, milles kasutatakse Grothendiecki

ruumide omadusi. See on uus ja mõnevõrra lihtsam lähenemine.

# 1 Vajalikud mõisted ja eelteadmised

Selles osas esitame hiljem vajalikke definitsioone ja abitulemusi. Seejuures kasutame järgmisi tähistusi:

Suured tähed  $X$  ja  $Y$  tähistavad Banachi ruume üle ühe ja sama korpuse  $\mathbb{K}$ , kus  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  või  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Kujutuse  $A : X \rightarrow Y$  korral tähistame kujutist  $A(X) = \{A(x) \mid x \in X\}$ . Kõigi ruumide  $X$  ja  $Y$  vahel tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite Banachi ruumi  $A : X \rightarrow Y$  tähistame  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Tähituse  $\mathcal{L}(X)$  all mõistame ruumi  $\mathcal{L}(X, X)$ . Kõigi pidevate lineaarsete funktsionaalide  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  nimetatakse ruumi  $X$  kaasruumiks ja tähistame  $X^*$ . Seejuures ruumi  $X$  teist kaasruumi (tema kaasruumi  $X^*$  kaasruumi) tähistme  $X^{**}$  ja  $k$ -ndat kaasruumi  $X^{(k)}$ .

**Definitsioon.** Olgu  $X$  ja  $Y$  normeeritud ruumid ning  $T : X \rightarrow Y$  bijektsioon. Öeldakse, et  $T$  on *isomorfism*, kui ta on lineaarne, pidev ja tema pöördoperaator  $T^{-1}$  on pidev. Siis öeldakse ka, et normeeritud ruumid  $X$  ja  $Y$  on *isomorfsed* ja kirjutatakse  $X \simeq Y$ .

**Lause 1** (Banachi teoreem pöördoperaatorist, vt nt 139 [6]). *Olgu  $X$  ja  $Y$  Banachi ruumid ning operaator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  bijektiivne. Siis ka pöördoperaator  $A^{-1}$  on pidev ja lineaarne, st  $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ .*

Siit on ilmne, et pidev lineaarne bijektsioon Banachi ruumide vahel on isomorfism.

**Definitsioon.** Operaatori  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  kaasoperaatoriks nimetatakse operaatorit  $A^* : Y^* \rightarrow X^*$ , mis on määratud võrdusega

$$A^*(g) = g(A), \quad g \in Y^*.$$

**Lause 2** (vt nt lk 178 [6]). *Kui  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , siis ka  $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ .*

**Lause 3** (vt nt lk 179 [6]). *Kui  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  ja leidub  $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ , siis on olemas ka  $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$  ning  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .*

Siit on selge, et kui kujutus  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  on isomorfism, siis on isomorfism ka  $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ .

**Definitsioon.** Operaatori  $A : X \rightarrow Y$  graafikuks nimetatakse otsekorrutise  $X \times Y$  alamhulka  $\{(x, A(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ .

**Lause 4** (teoreem kinnisest graafikust, vt nt lk 148 [6]). *Olgu  $X$  ja  $Y$  Banachi ruumid ning  $A : X \rightarrow Y$  lineaarne operaator. Kui operaatori  $A$  graafik on kinnine ruumis  $X \times Y$ , siis  $A$  on pidev.*

## 2 Jamesi ruumi alternatiiv

Selles peatükis selgitatakse, milles seisneb refleksiivsus, ja tutvutakse Banachi ruumide  $\ell_p$ -summadega. Neid teadmisi kasutades näidatakse, kuidas Plichko-Wójtowiczi artikkel kasutab Ezrohhi konstruktsiooni Jamesi ruumi alternatiivi loomisel.

### 2.1 Refleksiivsus

Järgnev käsitlus põhineb suuresti E. Oja ja P. Oja õpikul “*Funktsionaalanaliis*” [6].

Olgu  $X$  Banachi ruum üle korpuse  $\mathbb{K}$  ja  $X^{**}$  tema teine kaasruum. Vaatame funktsionaali  $F_x : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ , mis on defineeritud võrdusega

$$F_x(f) = f(x), f \in X^*.$$

Saab vahetult kontrollida, et kujutus  $F_x$  on lineaarne. Funktsionaali  $F_x$  normi leiame rakendades järgmisi tulemusi.

**Lause 5** (Hahn-Banach, vt nt lk 165 [6]). *Olgu  $Y$  normeeritud ruumi  $X$  alamruum. Kui  $f_0 : Y \rightarrow \mathbb{K}$  on pidev lineaarne funktsionaal, siis leidub talle pidev lineaarne jätk  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  nii, et  $\|f\| = \|f_0\|$ .*

**Järeldus 6.** (teoreem piisavast arvust funktsionaalidest) *Olgu  $X \neq \{0\}$ . Siis iga  $x \in X$  korral leidub  $f \in X^*$  nii, et  $\|f\| = 1$  ja  $f(x) = \|x\|$ .*

**Järeldus 7.** *Iga  $x \in X$  korral  $\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|f(x)\|$ .*

Nüüd saame

$$\|F_x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |F_x(f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = \|x\|.$$

Defineerime nüüd kujutuse  $j_X : X \rightarrow X^{**}$  seosega

$$j_X(x) = F_x, x \in X.$$

Kujutust  $j_X$  nimetatakse ruumi  $X$  *kanooniliseks sisestuseks* teise kaasruumi  $X^{**}$ . Kujutus  $j_X$  on ka lineaarne, sest

$$\begin{aligned} j_X(x_1 + x_2)(f) &= F_{x_1+x_2}(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \\ &= F_{x_1}(f) + F_{x_2}(f) = j_X(x_1)(f) + j_X(x_2)(f), \\ j_X(\lambda x)(f) &= F_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda j_X(x)(f), \end{aligned}$$

kus  $x_1, x_2, x \in X$  ja  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On selge, et  $\|j_X(x)\| = \|x\|$ ,  $x \in X$ .

Seega kujutus  $j_X$  on isomeetriline isomorfism ruumi  $X$  ja teise kaasruumi  $X^{**}$  alamruumi  $j_X(X)$  vahel.

**Lemma 8** (vt nt lk 181 [6]). *Olgu  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Siis kehtib võrdus*

$$A^{**} j_X = j_Y A.$$

**Definitsioon.** Öeldakse, et Banachi ruum  $X$  on *refleksiivne*, kui tema kanooniline sisestus  $j_X$  oma teise kaasruumi on sürjektsioon.

**Lemma 9.** *Refleksiivse ruumiga isomorfne normeeritud ruum on refleksiivne.*

*Tõestus.* Olgu  $X$  refleksiivne ruum,  $Y$  normeeritud ruum ja  $T : X \rightarrow Y$  isomorfism. Siis ka operaatori  $T$  kaasoperaator  $T^*$  on isomorfism ja  $T^{**}$  isomorfism. See tähendab, et  $T^{**}$  on sürjektsioon.

Näitame, et  $Y$  on refleksiivne. See tähendab, et  $j_Y(Y) = Y^{**}$ . Valime vabalt elemendi  $y^{**} \in Y^{**}$ .

Tänu kujutuse  $T^{**}$  sürjektiivsusele leidub  $x^{**} \in X^{**} = j_X(X)$  nii, et  $y^{**} = T^{**}(x^{**}) = T^{**}j_X x$  mingi  $x \in X$  korral. Seega  $y^{**} = j_Y(T(x))$ . See tähendab, et  $y^{**} \in j_Y(Y)$ . Teisisõnu,  $j_Y$  on sürjektsioon, mis tähendab, et  $Y$  on refleksiivne.  $\square$

**Lause 10** (Pettis). *Refleksiivse ruumi kinnine alamruum on refleksiivne.*

*Tõestus.* Olgu  $X$  refleksiivne ruum ja olgu  $Z \subset X$  kinnine alamruum. Olgu  $i : Z \rightarrow X$  sisestusoperaator. Teame, et  $j_X i = i^{**} j_Z$ .

Nätame, et  $j_Z$  on sürjektiivne. Selleks fikseerime vabalt  $z^{**} \in Z^{**}$ . Siis  $i^{**}(z^{**}) \in j_X(X) = X^{**}$ . See tähendab, et leidub  $x \in X$  nii, et  $i^{**}z^{**} = j_X(x)$ . Näitame, et  $x \in Z$ . Oletame vastuväiteliselt, et  $x \notin Z$ . Hahn-Banachi teoreemi põhjal tähendab see, et leidub  $x^* \in X^*$  nii, et  $x^*|_Z = 0$  ja  $|x^*(x)| = 1$ . See tähendab, et  $i^*x^* = 0$ , aga  $x^*(x) \neq 0$ . Seega  $(i^{**}z^{**})(x^*) = z^{**}(i^*x^*) = 0$  ja samas  $(i^{**}z^{**})(x^*) = (j_X(x))(x^*) = x^*(x) \neq 0$ . Oleme saanud vastuolu. Järelikult  $x \in Z$ .

Seega  $i^{**}j_Z(x) = j_X i(x) = j_X(x) = i^{**}z^{**}$ , kuna  $i^{**}$  on injektiivne, saame  $j_Z(x) = z^{**}$ .  $\square$

**Järeldus 11** (Pettis). *Olgu  $X$  Banachi ruum. Siis  $X$  on refleksiivne parajasti siis, kui tema kaasruum  $X^*$  on refleksiivne.*

*Tõestus. Tarvilikkus.* Eeldame, et  $X$  on refleksiivne ja näitame, et siis ka  $X^*$  on refleksiivne. Selleks peame veenduma, et iga  $x^{***} \in X^{***}$  korral leidub  $x^* \in X^*$  nii, et  $j_{X^*}(x^*) = x^{***}$ . See tähendab, et

$$(j_{X^*}x^*)(x^{**}) = (x^{***})(x^{**}), \quad x^{**} \in X^{**}.$$

Teame, et  $X^{**} = j_X(X)$ . Seega piisab näidata, et  $(j_{X^*})(j_X x) = x^{***}(j_X x)$  iga  $x \in X$  korral. Seega on kujutus  $j_{X^*}$  sürjektsioon.

*Piisavus.* Olgu  $X^*$  refleksiivne. Tõestatu põhjal tähendab see, et ka  $X^{**}$  on refleksiivne. Tänu lausele 10 teame, et kujutis  $j_X(X)$  ruumi  $X^{**}$  kinnise alamruumina on refleksiivne. Kujutise  $j_X(X)$  kinnisuseks piisab näha, et tänu ruumi  $X$  täielikkusele ja faktile, et  $j_X$  on isomorfism, on täielik ka alamhulk  $j_X(X)$ . Ning täielik alamhulk on kinnine. Kuna  $j_X(X)$  on refleksiivne ja  $j_X$  on isomorfism, siis lemma 9 põhjal on  $X$  refleksiivne.  $\square$

Teame, et  $c_0^* \simeq \ell_1$  ja  $c_0^{**} \simeq \ell_1^* \simeq \ell_\infty$ . Kirjeldame nüüd kujutust  $j_{c_0}$ . Olgu  $x = (x_n) \in c_0$ . Kuna  $x \in \ell_\infty$ , siis iga  $f = (\alpha_n) \in \ell_1$  korral

$$x(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \alpha_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n = f(x).$$

Järelikult  $F_x = x$ , mistõttu  $j_{c_0}(x) = x$ ,  $x \in c_0$ . Seega  $j_{c_0}(c_0) \simeq c_0 \neq \ell_\infty$  ehk ruum  $c_0$  pole refleksiivne. Tänu järeldusele 11 on selge, et refleksiivne pole siis ka ruum  $c_0^* \simeq \ell_1$ .

## 2.2 Alamruumi täiendatavus

Alljärgnev alapeatükk tugineb oma käsitluses tugevasti Joosep Lippuse bakalaureuse tööle “Alamruumide täiendatavus” [9].

**Definitsioon.** Olgu  $X$  vektorruum ning  $Y$  ja  $Z$  tema alamruumid. Kui iga element  $x \in X$  esitub ühesel viisil summana  $x = y + z$ , kus  $y \in Y$  ja  $z \in Z$ , siis öeldakse, et  $X$  on alamruumide  $Y$  ja  $Z$  *sisemine otsesumma* (tähistatakse  $X = Y \dot{\oplus} Z$ ).

**Definitsioon.** Olgu  $X$  Banachi ruum ja  $Y \subset X$  tema kinnine alamruum. Öeldakse, et  $Y$  on *täiendatav ruumis*  $X$ , kui leidub kinnine alamruum  $Z \subset X$  nii, et  $X = Y \dot{\oplus} Z$ .

**Definitsioon.** Olgu  $X$  vektorruum. Lineaarset operaatorit  $P : X \rightarrow X$  nimetatakse *projektoriks*, kui  $P^2 = P$ .

**Lemma 12.** *Olgu  $Y$  vektorruumi  $X$  alamruum. Lineaarne operaator on projektor ja  $P(X) = Y$  parajasti siis, kui  $P(X) \subset Y$  ja  $P(y) = y$  iga  $y \in Y$  korral. Seejuures  $P(X) = \{x \in X \mid P(x) = x\}$ .*

*Tõestus.* Olgu  $P : X \rightarrow X$  projektor. Näitame esmalt, et  $P(X) = \{x \in X \mid P(x) = x\}$ . Kui  $P(x) = x$ , siis  $x \in P(X)$ . Kui aga  $x \in P(X)$ , siis leidub  $y \in X$  nii, et  $P(y) = x$ . Nüüd  $P(x) = P^2(y) = P(y) = x$ .

*Tarvilikkus.* Eelneva põhjal ilmne.

*Piisavus.* Valime vabalt  $x \in X$ . Kuna  $P(X) \subset Y$ , siis  $P(x) = y \in Y$ . Seega  $P^2(x) = P(y) = y = P(x)$  ja  $P^2 = P$ . Kuna iga  $y \in Y$  korral  $P(y) = y$ , siis eelneva põhjal  $Y \subset P(X)$ . Järelikult  $P(X) = Y$ .  $\square$

Kujutuse tuuma all mõistame kõikide lähtruumi elemente hulka, mis kujutuvad sihtruumi null elemendiks ehk kujutise  $A : X \rightarrow Y$  tuum on

$$\ker A = \{x \in X \mid A(x) = 0\}.$$

**Lemma 13.** *Olgu  $X$  vektorruum ja  $P$  projektor. Siis  $P(X) = \ker(I - P)$  ja  $(I - P)(X) = \ker P$ .*

*Tõestus.* Esimese võrduse tõestamiseks näitame, et  $P(X) \subset \ker(I - P)$  ja  $\ker(I - P) \subset P(X)$ . Olgu  $x \in P(X)$ . Eelneva põhjal tähendab see, et  $P(x) = x$  ehk  $x - P(x) = 0$  ja järelikult  $x \in \ker(I - P)$ . Olgu nüüd  $x \in \ker(I - P)$ , see tähendab  $x - P(x) = 0$  ehk  $P(x) = x$ . Eelneva põhjal saame sellest järeldada, et  $x \in P(X)$ .

Veendume veel, et operaator  $I - P$  on projektor. Tõepoolest,

$$(I - P)^2 = (I - P)(I - P) = I^2 - P - P + P^2 = I - P - P + P = I - P.$$

Nüüd saame eelneva võrduse põhjal  $(I - P)(X) = \ker(I - (I - P)) = \ker P$ .

□

**Lemma 14.** *Olgu  $X$  Banachi ruum. Tema kinnine alamruum  $Y$  on täiendatav parajasti siis, kui leidub projektor  $P \in \mathcal{L}(X)$  nii, et  $Y = P(X)$ .*

*Tõestus. Tarvilikkus.* Olgu  $Y \subset X$  täiendatav alamruum. Definitsiooni kohaselt tähendab see, et leidub kinnine alamruum  $Z \subset X$  nii, et  $X = Y \dot{\oplus} Z$ . Seega iga  $x \in X$  on üheselt esitatav kujul  $x = y + z$ , kus  $y \in Y$  ja  $z \in Z$ . Defineerime operaatori  $P : X \rightarrow X$  seosega  $P(x) = y$  ja näitame, et  $P$  ongi otsitav operaator.

Kontrollime esmalt, et operaator  $P$  on lineaarne. Selleks fikseerime vabalt  $x_1, x_2 \in X$ . Eelduse kohaselt leiduvad siis  $y_1, y_2 \in Y$  ja  $z_1, z_2 \in Z$  nii, et  $x_1 = y_1 + z_1$  ja  $x_2 = y_2 + z_2$ . Operaatori  $P$  definitsiooni kohaselt

$$P(x_1 + x_2) = P(y_1 + z_1 + y_2 + z_2) = P(y_1 + y_2 + z_1 + z_2) = y_1 + y_2 = P(x_1) + P(x_2).$$

Valime nüüd vabalt  $x \in X$  ja  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Seejuures olgu elemendi  $x$  esitus  $x = y + z$ . Siis

$$P(\lambda x) = P(\lambda(y + z)) = P(\lambda y + \lambda z) = \lambda y = \lambda P(x).$$

Seega on  $P$  lineaarne operaator.

Operaatori  $P$  definitsioonist on selge, et  $P(X) \subset Y$ . Olgu  $y \in Y$  suvaline. Element  $y$  esitub ruumi  $X = Y \dot{\oplus} Z$  elemendina kui  $y = y + 0$ . Operaatori  $P$  definitsiooni põhjal  $P(y) = y$ . Lemma 12 põhjal on  $P$  projektor ja  $P(X) = Y$ .

Näitame nüüd, et projektor  $P$  on pidev. Selleks kasutame teoreemi kinnisest graafikust. Selle kohaselt on Banachi ruumide vahel tegutsev lineaarne operaator pidev, kui tema graafik on kinnine.

Veendume, et projektori  $P$  graafik on kinnine. Vaatleme jada  $(x_n) \subset X$ , kus  $x_n \rightarrow x$ . Olgu  $P(x_n) \rightarrow y$ . Näitame, et siis  $P(x) = y$ . Projektori  $P$  definitsiooni kohaselt iga  $n \in \mathbb{N}$  korral  $x_n = P(x_n) + z_n$ , kus  $z_n \in Z$ . Kuna  $x_n \rightarrow x$  ja  $P(x_n) \rightarrow y$ , siis  $z_n = x_n - P(x_n) \rightarrow x - y$ . Alamruumi  $Z$  kinnisuse tõttu  $x - y \in Z$  ja alamruumi  $Y = P(X)$  kinnisuse tõttu  $y \in P(X)$ . Järelikult leidub  $x_0 \in X$  nii, et  $y = P(x_0)$ . Seega  $x = P(x_0) + (x - y)$ . Projektori  $P$  definitsiooni kohaselt saame  $y = P(x_0) = P(x)$ . Seega on projektori  $P$  graafik kinnine.

Veendusime, et projektor  $P$  on lineaarne ja rakendades teoreemi kinnisest graafikust, saame, et  $P \in \mathcal{L}(X)$ .

*Piisavus.* Eeldame, et leidub projektor  $P \in \mathcal{L}(X)$  nii, et  $P(X) = Y$ . Iga elemendi  $x \in X$  korral  $x = P(x) + (x - P(x))$ . Kuna  $P$  ja  $I - P$  on mõlemad pidevad projektorid, siis  $P(X)$  ja  $(I - P)(X)$  on mõlemad kinnised ruumi  $X$  alamruumid. Tähistades  $y = P(x)$  ja  $z = (I - P)(x)$ , saame elemendi  $x$  esituse  $x = y + z$ ,  $y \in P(X)$  ja  $z \in (I - P)(X)$ .

Näitame, et see esitus on ühene. Olgu veel  $x = y_1 + z_1$ , kus  $y_1 \in P(X)$  ja  $z_1 \in (I - P)(X)$ . Lemma 13 põhjal  $(I - P)(X) = \ker P$ , ehk  $P(z_1) = 0$ . Seega  $P(x) = y_1$ . Samas  $y_1 \in P(X)$ , mistõttu  $P(y_1) = y_1$ . Seega  $y = P(x) = y_1$  ja  $z_1 = x - y_1 = x - P(x) = z$ . Esitus on seega ühene, mistõttu tähistades  $Y = P(X)$  saame  $X = Y \dot{\oplus} (I - P)(X)$ .  $\square$

**Lause 15** (Dixmier). *Olgu  $X$  normeeritud ruum ning olgu  $j_X : X \rightarrow X^{**}$  ja  $j_{X^*} : X^* \rightarrow X^{***}$  kanoonilised sisestused. Siis  $j_{X^*} j_X^*$  on projektor, mille*

kujutisruum on isomorfne ruumiga  $X^*$ . Teisisõnu,  $X^*$  on alati täiendatav ruumis  $X^{***}$ .

*Tõestus.* On selge, et pidevate lineaarsete operaatorite kompostisioon  $j_{X^*}j_X^* \in \mathcal{L}(X^{***})$ . Paneme veel tähele, et

$$(j_{X^*}j_X^*)(j_{X^*}j_X^*) = j_{X^*}I_{X^*}j_X^* = j_{X^*}j_X^*.$$

Seega kujutus  $j_{X^*}j_X^*$  on projektor. Teame, et kujutus  $j_X^*$  on sürjektsioon. Tänu sellele saame

$$j_{X^*}j_X^*(X^{***}) = j_{X^*}(X^*) \simeq X^*.$$

□

**Lemma 16.** *Olgu  $X \simeq Y$  ja ruumi  $X$  kanooniline kujutis  $j_X(X)$  täiendatav tema teises kaasruumis  $X^{**}$ . Siis on ka ruumi  $Y$  kanooniline kujutis  $j_Y(Y)$  täiendatav tema teises kaasruumis  $Y^{**}$ .*

*Tõestus.* Olgu  $T \in \mathcal{L}(Y, X)$  isomorfism. Teame, et siis on ka  $T^{**} \in \mathcal{L}(Y^{**}, X^{**})$  isomorfism. Olgu  $P_X \in \mathcal{L}(X^{**})$  projektor alamruumile  $j_X(X)$ . Vaatame kujutust  $P_Y = j_Y T^{-1} j_X^{-1} P_X T^{**}$ . On lihtne veenduda, et  $P_Y \in \mathcal{L}(Y^{**})$  ja  $P_Y(Y^{**}) = j_Y(Y)$ . Jääb veel näidata, et  $P_Y$  on projektor. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} P_Y^2 &= (j_Y T^{-1} j_X^{-1} P_X T^{**})(j_Y T^{-1} j_X^{-1} P_X T^{**}) \\ &= j_Y T^{-1} j_X^{-1} P_X (j_X T) T^{-1} j_X^{-1} P_X T^{**} = j_Y T^{-1} j_X^{-1} P_X (j_X j_X^{-1}) P_X T^{**} \\ &= j_Y T^{-1} j_X^{-1} (P_X P_X) T^{**} = j_Y T^{-1} j_X^{-1} P_X T^{**} = P_Y. \end{aligned}$$

□

Tänu teadmisele, et  $c_0^* \simeq \ell_1$  [6, vt nt lk 163], saame järgmise järelduse.

**Järeldus 17.** *Ruum  $\ell_1$  on täiendatav oma teises kaasruumis  $\ell_1^{**}$ .*

## 2.3 Banachi ruumide $\ell_p$ -summa

Alljärgnev käsitlus tugineb Pietchi raamatule “*Operator Ideals*” [7].

**Definitsioon.** Olgu  $X_i, i \in I \subset \mathbb{N}$ , Banachi ruumid ja  $1 \leq p < \infty$ , antud arv. Siis Banachi ruumide  $X_i$   $\ell_p$ -summaks  $(\sum_{i \in I} X_i)_{\ell_p}$  nimetatakse kõigi selliste järjestite  $x = (x_i)_{i \in I}$  hulka, kus  $x_i \in X_i, i \in I$ , ja  $(\|x_i\|) \in \ell_p$ , kui  $I$  on lõpmatu.

Tehted Banachi ruumide  $\ell_p$ -summas on defineeritud punktiviisi.

**Lemma 18** (vt nt lk 35 [7]). *Vektorruum  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n)_{\ell_p}$  on Banachi ruum normiga  $\|x\| = (\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$ .*

**Lemma 19.** *Ruum  $X_j, j \in I$ , on isomorfne täiendatava alamruumiga ruumis  $(\sum_{i \in I} X_i)_{\ell_p}$ .*

*Tõestus.* Olgu  $j \in I$  fikseeritud. Vaatame kujutust  $T : X_j \rightarrow (\sum_{i \in I} Y_i)_{\ell_p}$ , kus  $Y_i = 0$ , kui  $i \neq j$ , ja  $Y_i = X_j$ , kui  $i = j$ , mis on defineeritud seosega

$$T(x) = (0, 0, \dots, 0, x, 0, \dots), \quad x \in X_j$$

kus  $x$  on jada  $j$ -s liige. Kuna Banachi ruumide  $\ell_p$ -summas on tehted defineeritud punktiviisi, on kujutuse  $T$  lineaarsus ilmne. Tema pidevuse näitamiseks veendume normi tõkestatuses

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| = 1.$$

Näitame nüüd, et ruum  $(\sum_{i \in I} Y_i)_{\ell_p}$  on ruumi  $(\sum_{i \in I} X_i)_{\ell_p}$  täiendatav alamruum. Selleks defineerime kujutuse  $P : (\sum_{i \in I} Y_i)_{\ell_p} \rightarrow (\sum_{i \in I} X_i)_{\ell_p}$  seosega

$$P(x) = (0, 0, \dots, 0, x_j, 0, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots) \in \left( \sum_{i \in I} X_i \right)_{\ell_p}.$$

Näitame, et kujutus  $P$  on projektor. Taaskord on ilmne, et  $P$  on lineaarne. Jääb veel veenduda, et ta on pidev. Selleks paneme tähele, et

$$\|P\|^p = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\|^p = \sup_{\|x\| \leq 1} \|x_j\|^p \leq 1.$$

Kujutuse  $P$  definitsioonist on ka ilmne, et  $P^2 = P$ . Kokkuvõttes olemegi saanud, et  $P$  on projektor.  $\square$

**Märkus 1.** Edaspidi tähistame kahe Banachi ruumi  $X$  ja  $Y$   $\ell_p$ -summat konkreetset  $\ell_p$  ruumi märkimata. Võime nii teha, sest mis tahes  $1 \leq p, q < \infty$  korral leidub  $C > 0$  nii, et saame kirjutada

$$\|(x, y)\|_{\ell_p} = \|(\|x\|, \|y\|)\|_{\ell_p^2} \leq C \|(\|x\|, \|y\|)\|_{\ell_q^2} = C \|(x, y)\|_{\ell_q}.$$

See tähendab, et lõpliku otsesumma  $X \oplus Y$   $\ell_p$ - ja  $\ell_q$ -normid on ekvivalentsed.

**Lause 20.** Olgu  $X$  Banachi ruum ning  $Y$  ja  $Z$  tema alamruumid, kusjuures  $X = Y \dot{\oplus} Z$ . Siis  $X \oplus Y \simeq Z$ .

*Tõestus.* Defineerime kujutuse  $T : Y \oplus Z \rightarrow X$  seosega

$$T(y, z) = y + z.$$

Kujutuse  $T$  lineaarsus ja bijektiivsus on vahetult kontrollitavad. Et kujutus oleks isomorfism, piisab 1 põhjal näidata selle normi tõkestatust. Tänu eelnevale märkusele piisab, kui näitame tõkestatust Banachi ruumide  $\ell_1$ -normi järgi. Tõepoolest,

$$\|T\| = \sup_{\|y+z\| \leq 1} \|T(y, z)\| = \sup_{\|y+z\| \leq 1} \|y + z\| \leq 1.$$

Seega kujutus  $T$  on isomorfism.  $\square$

**Lause 21.** Banachi ruumide  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$   $\ell_p$ -summal on järgmised omadused:

1.  $X \oplus Y \simeq Y \oplus X$
2.  $(X \oplus Y) \oplus Z \simeq X \oplus (Y \oplus Z)$ ,
3.  $X \oplus Y \simeq X \oplus Z$ , kui  $Y \simeq Z$ .

*Tõestus.* Tänu märkusele 1 piisab, kui tõestame lause mis tahes ekvivalentse normi jaoks. Siinkohal kasutame  $\ell_1$  normi.

1. Defineerime kujutuse  $T : X \oplus_{\ell_1} Y \rightarrow Y \oplus_{\ell_1} X$  seosega  $T(x, y) = (y, x)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Kujutus  $T$  on ilmselt lineaarne sürjektsioon ning on lihtne näha, et see säilitab ka normi.
2. Olgu kujutus  $T : (X \oplus_{\ell_1} Y) \oplus_{\ell_1} Z \rightarrow X \oplus_{\ell_1} (Y \oplus_{\ell_1} Z)$  defineeritud seosega  $T((x, y), z) = (x, (y, z))$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $z \in Z$ . On ilmne, et  $T$  on korrektselt defineeritud lineaarne sürjektsioon.

Näitame, et  $T$  säilitab normi. Fikseerime vabalt  $x \in X$ ,  $y \in Y$  ja  $z \in Z$ .

Vaatame normi

$$\begin{aligned} \|T((x, y), z)\| &= \|(x, (y, z))\| = \|x\| + \|(y, z)\| = \\ &= \|x\| + \|y\| + \|z\| = \|(x, y)\| + \|z\| = \|((x, y), z)\|. \end{aligned}$$

Seega on  $T$  isomorfism ruumide  $(X \oplus_{\ell_1} Y) \oplus_{\ell_1} Z$  ja  $X \oplus_{\ell_1} (Y \oplus_{\ell_1} Z)$  vahel.

3. Olgu  $\varphi$  isomorfism Banachi ruumide  $Y$  ja  $Z$  vahel. Defineerime kujutuse  $T : X \oplus Y \rightarrow X \oplus Z$  seosega  $T(x, y) = (x, \varphi(y))$ . Kuna  $\varphi$  on lineaarne,

on selge, et ka  $T$  on lineaarne. Näitame veel, et  $T$  on tõkestatud ja seega pidev. Tõepoolest,

$$\|T\| = \sup_{\|(x,y)\| \leq 1} \|T(x,y)\| = \sup_{\|(x,y)\| \leq 1} \|(x, \varphi(y))\| \leq \infty,$$

sest  $\varphi$  on tõkestatud.

□

Lauses 21 tõestatud omadusi saab loomulikul viisil laiendada mis tahes lõplikule Banachi ruumide  $\ell_p$ -summale. Samuti on teisest omadusest selge, et lõpliku  $\ell_p$ -summa puhul võime sulud ära jätta.

**Lause 22.** *Olgu  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ja  $Y$  Banachi ruumid. Nende  $\ell_p$ -summadel on siis järgmised omadused:*

1.  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n)_{\ell_p} \simeq X_i \oplus \left( \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} X_n \right)_{\ell_p}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,
2.  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n)_{\ell_p} \simeq Y \oplus \left( \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} X_n \right)_{\ell_p}$ , kui  $X_i \simeq Y$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

*Tõestus.* 1. Fikseerime vabalt  $i \in \mathbb{N}$ . Defineerime kujutuse  $T : (\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n)_{\ell_p} \rightarrow X_i \oplus_{\ell_p} \left( \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} X_n \right)_{\ell_p}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , seosega  $T(x) = x_i \oplus (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots)$ , kus  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{N}$  ja  $x_n \in X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Kujutus  $T$  on korrektselt defineeritud lineaarne sürjektsioon. Selleks, et  $T$  oleks isomorfism jääb veel näidata, et ta säilitab normi. Tõepoolest,

$$\|T(x)\|^p = \|x_i\|^p + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} \|x_n\|^p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^p = \|x\|^p.$$

2. Eelneva põhjal ilmne.

□

**Lemma 23.** Kujutus  $T : \ell_1 \oplus_{\ell_1} \ell_1 \rightarrow \ell_1$ , kus

$$T(x, y) = z, \quad x = (x_n), y = (y_n), z = (z_n) \in \ell_1,$$

kusjuures

$$\begin{cases} z_n = x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{kui } n \text{ on paartu,} \\ z_n = y_{\frac{n}{2}}, & \text{kui } n \text{ on paarisarv,} \end{cases}$$

on isomeetiline isomorfism.

*Tõestus.* Ilmselt on kujutus  $T$  korrektselt defineeritud lineaarne sürjektsioon. Näitame, et  $T$  säilitab normi. Selleks fikseerime vabalt  $x, y \in \ell_1$  ja vaatame elementi  $(x, y) \in (\ell_1 \oplus \ell_1)_{\ell_1}$ , mille norm avaldub kujul

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Siis

$$\begin{aligned} \|T(x, y)\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}, n \text{ on paartu}} |x_{\frac{n+1}{2}}| + \sum_{n \in \mathbb{N}, n \text{ on paaris}} |y_{\frac{n}{2}}| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|. \end{aligned}$$

□

Märgime, et  $\ell_2$  normi korral sarnaselt defineeritud kujutus  $T$  pole isomeetiline isomorfism.

**Lause 24** (vt nt lk 35 [7]).  $(\sum_{i \in I} X_i)_{\ell_p}^* \simeq (\sum_{i \in I} X_i^*)_{\ell_q}$ , kus  $p, q \in (1, \infty)$  on sellised, et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Olgu  $p, q \in (1, \infty)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Sobiv isomorfism on kujul  $T : \left(\sum_{i \in I} X_i^*\right)_{\ell_q} \rightarrow \left(\sum_{i \in I} X_i\right)_{\ell_p}^*$ , mis on defineeritud seosega

$$T(f_1, f_2, \dots) = f,$$

kus  $f(x_1, x_2, \dots) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots)$ ,  $f_i \in X_i^*$  ja  $x_i \in X_i$ .

## 2.4 Teise kaasruumiga isomorfne mitterefleksiivne

### Banachi ruum

**Teoreem 1.** *Olgu  $X = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \ell_1^{(2k)}\right)_{\ell_2}$ . Siis ruum  $X$  on mitterefleksiivne Banachi ruum, mis on isomorfne oma teise kaasruumiga.*

*Tõestus.* On selge, et  $X$  on Banachi ruum. Alapeatükis 1.1 nägime, et ruum  $\ell_1$  on mitterefleksiivne. Lemma 19 põhjal on ruum  $\ell_1$  isomorfne täiendatava alamruumiga (seega kinnine) ruumis  $X$  ja järelduse 11 põhjal on seega mitterefleksiivne ka ruum  $X$  ise.

Lause 24 põhjal teame, et  $X^{**} \simeq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell_1^{(2k)}\right)_{\ell_2}$ . Seega jääb teoreemi kehtivuseks näidata, et  $X \simeq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell_1^{(2k)}\right)_{\ell_2}$ .

Lausete 15 ja 23 põhjal võime kirjutada

$$\ell_1^{**} \simeq Y \oplus \ell_1 \simeq Y \oplus \ell_1 \oplus \ell_1 \simeq \ell_1^{**} \oplus \ell_1.$$

Tänu sellele isomorfismile ja  $\ell_p$ -summa omadustele saamegi

$$\begin{aligned} X &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \ell_1^{(2k)}\right)_{\ell_2} \simeq \ell_1 \oplus \ell_1^{**} \oplus \left(\sum_{k=2}^{\infty} \ell_1^{(2k)}\right)_{\ell_2} \simeq \\ &\simeq \ell_1^{**} \oplus \left(\sum_{k=2}^{\infty} \ell_1^{(2k)}\right)_{\ell_2} \simeq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell_1^{(2k)}\right)_{\ell_2} \simeq X^{**}. \end{aligned}$$

Teisisõnu, oleme näidanud, et mitterefleksiivne Banachi ruum  $X$  on isomorfne oma teise kaasruumiga. □

### 3 Lineaarse mõõtmeprobleem

Alljärgnevas osas toome lahenduse lineaarse mõõtmeprobleemile, konstrueerides teoreemis 2 ruumi Plichko-Wójtowiczi artikli eeskujul. Teoreemi 2 tõestus on aga meie arvates lihtsam ja kasutab Grothendiecki ruumide asemel kvaasikaasruume.

#### 3.1 Ruumideaal

**Definitsioon.** Banachi ruumide klass  $A$  on *ruumideaal*, kui kehtivad järgmised tingimused

1. ühemõõtmeline Banachi ruum  $\mathbb{K} \in A$ ,
2. kui  $X_1, X_2$  kuuluvad klassi  $A$ , siis ka  $X_1 \oplus X_2$  kuulub klassi  $A$ ,
3. kui  $Z \simeq Y$  ja  $Y \subset X$  on täiendatav alamruum, siis ruumi  $X$  kuulumisest klassi  $A$  järeldub ruumi  $Z$  kuulumine klassi  $A$ .

Definitsioonist on selge, et ruumideaal on kinnine isomorfismi suhtes.

Tuntumad näited ruumideaalidest on kõikide Banachi ruumide klass, kõikide lõplikumõõtmeliste Banachi ruumide klass ja kõikide refleksiivsete ruumide klass.

#### 3.2 Kvaasikaasruumid

**Definitsioon.** Banachi ruumi  $X$  nimetatakse *kvaasikaasruumiks*, kui tema kanooniline kujutis  $j_X(X)$  on täiendatav tema teises kaasruumis  $X^{**}$ .

Lause 15 põhjal on ilmne, et iga kaasruum on kvaasikaasruum.

**Lause 25** (vt nt lk 68[7]). *Kõigi kvaasikaasruumide klass on ruumideaal.*

*Tõestus.* Olgu  $A$  kõigi kvaasikaasruumide klass. Lemma 16 põhjal on  $A$  kinnine isomorfismi suhtes.

1. Ilmne tänu teadmisele, et ühemõõtmelise Banachi ruumi  $\mathbb{K}$  teine kaasruum on isomorfne tema endaga.
2. Olgu  $X$  ja  $Y$  kvaasikaasruumid. Vaatame nende summa  $X \oplus Y$  kanoonilist kujutist  $j_{X \oplus Y}(X \oplus Y)$  ruumis  $(X \oplus Y)^{**}$ . Lausest 24 teame, et  $(X \oplus Y)^{**} \simeq X^{**} \oplus Y^{**}$ . Lause 21 alapunkti 3 põhjal on selge, et  $X \oplus Y \simeq j_X(X) \oplus j_Y(Y)$ .

On jäänud veel näidata, et  $j_X(X) \oplus j_Y(Y)$  on täiendatav alamruum ruumis  $X^{**} \oplus Y^{**}$ . Defineerime kujutuse  $P : X^{**} \oplus Y^{**} \rightarrow X^{**} \oplus Y^{**}$  seosega

$$P(x, y) = (P_X(x), P_Y(y)), \quad x \in X \text{ ja } y \in Y,$$

kus  $P_X$  ja  $P_Y$  on projektorid vastavatele kanoonilistele kujutistele. Kuna Banachi ruumide  $\ell_p$ -summas on tehted defineeritud punktiviisi, on lihtne näha, et defineeritud kujutus on pidev ja lineaarne. Vahetult on võimalik kontrollida, et kujutus  $P$  on projektor alamruumile  $j_X(X) \oplus j_Y(Y)$  nagu vaja.

3. Olgu  $Z \simeq Y$  ja  $Y \subset X$  täiendatav alamruum. Seejuures olgu  $X$  kvaasikaasruum. Nagu tõestuse alguses meenutatud, siis piisab siin näidata, et  $j_Y(Y)$  on täiendatav teises kaasruumis  $Y^{**}$ .

□

**Lemma 26** (vt nt lk 46 [8]). *Igal lõpmatul loenduval hulgal  $S$  leidub miteloenduv alamhulkade süsteem  $(A_i)_{i \in I}$  nii, et süsteemi mis tahes kahe hulga ühisosa on lõplik.*

*Tõestus.* Üldisust kitsendamata võime lugeda hulga  $S$  võrdseks ratsionaalarvude hulgaga  $\mathbb{Q}$ . Mis tahes irratsionaalarvu  $\rho$  korral leidub ratsionaalarvude jada  $(r_n)$  nii, et  $r_n \rightarrow \rho$ . Siis hulgad kujul  $A_\rho = \{r_n \mid r_n \rightarrow \rho\}$  tõestavad lemma. □

Olgu  $A \subset \mathbb{N}$ . Siis hulga  $\ell_\infty(A)$  all mõistame hulga  $\ell_\infty$  alamhulka kujul

$$\ell_\infty(A) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty \mid x_n = 0, \text{ kui } n \notin A\}.$$

**Lemma 27** (vt nt lk 46 [8]). *Olgu  $T : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$  tõkestatud operaator, kusjuures  $T(x) = 0$  iga  $x \in c_0$  korral. Siis leidub lõpmatu  $A \subset \mathbb{N}$  nii, et iga  $x \in \ell_\infty(A)$  korral  $T(x) = 0$ .*

*Tõestus.* Vaatame naturaalarvude hulga mingite lõpmatute alamhulkade süsteemi  $(A_i)_{i \in I}$  nagu lemmas 26. Oletame, et iga hulga jaoks leidub element  $x^i \in \ell_\infty(A_i)$  nii, et  $T(x^i) \neq 0$ . Kuna saame alati elemente  $x^i$  normeerida, võime üldisust kitsendamata eeldada, et  $\|x^i\|_\infty = 1$  iga  $i \in I$  korral.

Leidub  $n \in \mathbb{N}$  nii, et hulk  $I_n = \{i \in I \mid T(x^i)_n \neq 0\}$  on loendumatu. Tõepoolest, oletame, et iga  $n \in \mathbb{N}$  korral on hulk  $I_n$  loenduv. Sel juhul on loenduv ka nende loenduv ühend  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$ , mis on vastuolus lemmaga 26. Niisamuti leidub  $k \in \mathbb{N}$  nii, et hulk  $I_{n,k} = \{i \in I \mid |T(x^i)_n| \geq k^{-1}\}$  on loendumatu. Tõepoolest, kui hulk  $I_{n,k}$  oleks loenduv iga  $k \in \mathbb{N}$  korral, siis peaks olema loenduv ka nende loenduv ühend  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_{n,k} = \{i \in I \mid |x_n^i| \geq k^{-1}\} = I_n$ . Valime iga  $i \in I_{n,k}$  jaoks arvu  $\alpha_i$  nii, et  $|\alpha_i| = 1$  ja  $\alpha_i x_n^i = |x_n^i|$ .

Olgu  $F \subset I_{n,k}$  lõplik. Tähistame  $y = \sum_{i \in F} \alpha_i x^i$ . Kuna mis tahes kahe erineva  $x^i$  võrdsete nullist erinevate liikmete hulk on lõplik, võime vaadata  $y = u + v$ , kus  $\|u\|_\infty \leq 1$  ja  $v$  nullist erinevate liikmete hulk on lõplik. Kuna  $v \in c_0$ , siis

$$\|T(y)\|_\infty = \|T(u)\|_\infty \leq \|T\|.$$

Siit

$$e_n^*(T(y)) = \sum_{i \in F} |T(x^i)_n| \leq \|T\|.$$

Seega, kui  $|F| = m$ , siis  $mk^{-1} \leq \|T\|$ , st  $m \leq k\|T\|$ . Kuna see kehtib iga  $I_{n,k}$  lõpliku alamhulga korral, oleme näidanud, et hulk  $I_{n,k}$  on lõplik. Oleme saanud vastuolu.  $\square$

**Lause 28** (Phillips-Sobczyk [8, vt nt lk 46]). *Ei leidu tõkestatud projektorit ruumist  $\ell_\infty$  ruumi  $c_0$ .*

*Tõestus.* Oletame vastuväiteliselt, et leidub projektor  $P : \ell_\infty \rightarrow c_0$ . Vaatame nüüd operaatorit  $I - P$ . Lemma 27 põhjal saame  $P(x) = x$  iga  $x \in \ell_\infty(A)$ , kus  $A \subset \mathbb{N}$  on lõpmatu. On ilmne, et  $\ell_\infty(A) \not\subseteq c_0$ . Oleme saanud vastuolu.  $\square$

**Järeldus 29.** *Ruum  $c_0$  pole kvaasikaasruum.*

*Tõestus.* Oletame vastuväiteliselt, et ruum  $c_0$  on kvaasikaasruum. See tähendab, et  $j_{c_0}(c_0)$  on täiendatav alamruum ruumis  $\ell_\infty$ , mis on vastuolus lausega 28.  $\square$

### 3.3 Lineaarse mõõtmeprobleem

Teame, et ruum  $X$  on alati isomorfne alamruumiga  $j_X(X)$  oma teises kaasruumis  $X^{**}$ . Järgnevalt konstrueerime ruumi  $X$  nii, et ruum  $X^{**}$  oleks isomorfne mingi alamruumiga ruumis  $X$ , aga ruumid  $X$  ja  $X^{**}$  pole isomorfsed.

**Teoreem 2.** Olgu  $X = \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_0^{(2k)} \right)_{\ell_2}$ . Siis  $X^{**}$  on isomorfne alamruumiga ruumis  $X$ , aga pole isomorfne ruumiga  $X$ .

*Tõestus.* Lause 24 põhjal  $X^{**} \simeq \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_0^{(2k)} \right)_{\ell_2}$ . Nüüd lause 6 omaduse 1 põhjal saame

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} c_0^{(2k)} \right)_{\ell_2} \simeq c_0 \oplus \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_0^{(2k)} \right)_{\ell_2} \simeq c_0 \oplus X^{**}.$$

Seega  $X^{**}$  on isomorfne täiendatava alamruumiga ruumis  $X$ .

Oletame nüüd vastuväiteliselt, et  $X \simeq X^{**}$ . Kuna  $X^{**}$  on kvaasikaasruum, peaks siis kvaasikaasruum olema ka ruum  $X$ . Lemma 19 põhjal on  $c_0$  täiendatav alamruum ruumis  $X$ . Seega peaks ka  $c_0$  olema kvaasikaasruum. See on vastuolus järeldusega 29. □

## Kirjandus

- [1] A. Plichko, M. Wójtcowicz *Note on a Banach Space Having Equal Linear Dimension with its Second Dual*, *Extracta Mathematicae*, **18** (2003), 311–314.
- [2] I. A. Ezrohhi *On linear dimension*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **62** (1948) 35–38.
- [3] R. C. James *Bases and reflexivity of Banach spaces*, *Ann. of Math.*, **52** (1950), 518–527.
- [4] S. Banach *Theorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów, 1932.
- [5] S. Banach, S. Mazur *Zur Theorie der Linearen Dimension*, *Studia Math.*, **4** (1933), 100–112.
- [6] E. Oja, P. Oja *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu (1991).
- [7] A. Pietsch *Operator Ideals*, North Holland Publishing Company (1980).
- [8] F. Albiac, N. J. Kalton *Topics in Banach Space Theory*, Springer Inc, (2006).
- [9] J. Lippus *Alamruumide täiendatavus*, Tartu (2002).

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Margaret Viitung,

- annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Jamesi ruumi alternatiiv ja lineaarse mõõtme probleem", mille juhendaja on Aleksei Lissitsin,
  - reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
  - üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
- olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
- kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **11.05.2017**