Auhinnatöö
366 572

T R Ü

MATEMAATIKA - LOODUSTEADUSKOND

Füüsika osakond

V õ i s t l u s t ö ö

TÄIELIK SISEPEEGELDUMINE JA TEMAGA SEOTUD EFEKTID

Tartu Riikliku Ülikooli Ôpetatud Nõukogu koosoleku otsusega 29. aprillist 1954. a. on käesolev võistlustöö tunnistatud esimese auhinna vääriliseks.

I. Maaroos.
Teaduslik sekretär

Министерство Культуры СССР — NSVL Kultuurministeerium — Tartu R.K. Ülikooli Ühisteeder

Nikolai Kristoffel
IV kursuse üliõpilane

Juhendaja: Van.õp. P.Kard
Teoreetilise füüsika kateeder

S i s u k o r d

I. Sissejuhatus.

II. A.A.Eichenvald'i teooria.

III. Väli optiliselt hõredamas keskkonnas.

IV. Energia voolujooned teises keskkonnas.

V. Väli optiliselt tihedamas keskkonnas.

VI. Energia voolujooned esimeses keskkonnas.

VII. Katselised kinnitused energia tungimise kohta teise keskkonda täieliku sisepeegeldumise korral.

VIII. P.G.Kard'i teooria.

IX. L.M.Brehovskih'i teooria.

X. L.M.Brehovskih'i teooria rakendamisvõimalustest elliptilise polarisatsiooni korral.

XI. Difraktsiooni arvestamine P.G.Kard'i teoorias.

XII. γ-nihke eksperimentaalse avastamise võimalikkusest.

XIII. Kasutatud kirjanduse loetelu.

Peatükk I

S i s s e j u h a t u s .

Suurt huvi pakub energia liikumise küsimus optiliselt hõredamas keskkonnas täieliku sisepeegeldumise korral. Kuigi teises keskkonnas puudub kindla suunaga murdunud kiir, elektromagnetiline väli on seal siiski olemas ja seega ka elektromagnetiline energia. Lisaks sellele esinevad siin veel mitmed huvitavad efektid.

Esimesena püüdis täieliku sisepeegeldumise korral optika valemeis esinevate kompleksete suuruste tähendust tõlgendada Fresnel. Edaspidi probleemi uuriti peamiselt eksperimentaalselt, kuni 1909.a. Moskva Ülikooli professor A.A.Eichenvald töötas selle küsimuse teoreetiliselt läbi lineaarselt polariseeritud valguse (langemistasapinnas ja sellega risti) jaoks. A.Wiegrefe uuris sama probleemi veidi üldisema juhu jaoks - meelevaldses suunas lineaar - polariseeritud valguse korral. Viimasel ajal on kirjanduses ilmunud mitmed huvitavad tööd sellelt alalt, näiteks /4/.Kuid meile pakub eriti huvi autori juhendaja P.G.Kard'i töö kiirte nihete alalt /3/.

Käesoleva töö ülesandeks on esitada kokkuvõtlikult põhilised teoreetilised ja eksperimentaalsed teadmised täielikust sisepeegeldumisest, kusjuures teooriat arendame elliptiliselt polariseeritud langeva valguse jaoks. Siin töös esitatu oleks sobivaks teadmiste baasiks kõigile, kes tahavad edaspidi tegeleda täieliku sisepeegeldumise uurimisega.

Täielik sisepeegeldumine leiab aset valguse üleminekul optiliselt tihedamast keskkonnast optiliselt hõredamasse keskkonda, langemisnurkade puhul, mis on suuremad täieliku sisepeegeldumise piirnurgast. Viimane määratakse seosest

$$\sin \Theta_{piir} = n \quad , \qquad (1)$$

kus n on kahe keskkonna suhteline murdumisnäitaja.

Olgu meil tegemist kahe homogeense dielektrilise keskkonnaga. Keskkondade murdumisnäitajad vastavalt olgu n_1 ja n_2.

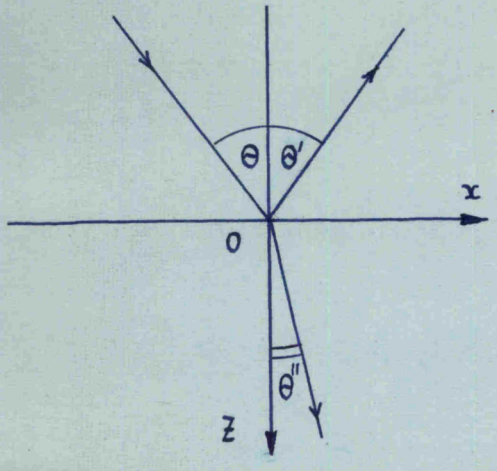
$n_1 > n_2$, kuna teine keskkond on optiliselt hõredam. Seega

$$\frac{n_2}{n_1} = n < 1 .$$

Tähistame langemisnurga Θ, murdumisnurga Θ'' (peegeldumisnurk $\Theta' = \Theta$). x-telje suuname mööda lahutustasapinda paremale, z-telje alla, siis y-telg on positiivse suunaga meie poole risti joonise tasapinnaga (vt. joonis nr.1).

Murdumisseaduse kohaselt $\frac{\sin\Theta}{\sin\Theta''} = \frac{n_2}{n_1}$, kust leiame

$$\sin\Theta'' = \frac{\sin\Theta}{n} . \qquad (2)$$



Joonis nr.1.

Vaatame kuidas avaldub murdumisnurga kosiinus.

$$\cos\Theta'' = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\Theta}{n^2}} .$$

Kuna täieliku sisepeegeldumise korral $\frac{\sin\Theta}{n} > 1$, siis ka $\frac{\sin^2\Theta}{n^2} > 1$ ja ruutjuure all on negatiivne suurus. See tähendab, et meil on tegemist kompleksse murdumisnurgaga.

$$\cos\Theta'' = \pm\frac{i}{n}\sqrt{\sin^2\Theta - n^2} .$$

Siin tuleb võtta ainult märk miinus, kuna vastasel korral me saaksime, et võnkumiste amplituudid teises keskkonnas kasvavad piiramatult kaugenemisega lahutuspinnast, mis aga ei vasta tegelikkusele. Seega

$$\cos\Theta'' = -\frac{i}{n}\sqrt{\sin^2\Theta - n^2} . \qquad (3)$$

Edasi asume välja uurimisele teises keskkonnas, elliptiliselt polariseeritud langeva valguse korral, kuid enne tutvume veel Eichenvaldi teooriaga, mis käsitleb lihtsamat juhtu - lineaarselt polariseeritud valgust.

Peatükk II

A. A. Eichenvaldi teooria.

Esimesena andis täieliku sisepeegeldumise teooria Moskva Ülikooli professor A.A.Eichenvald. Tema töö /1/ omab suurt printsipiaalset tähtsust veel tänapäevalgi, kuna Eichenvaldi põhilised tulemused on kinnitust leidnud ka edaspidi ja on kogu täieliku sisepeegeldumise probleemi uurimise aluseks.

Eichenvald uurib sisepeegeldumist tasapinnalise, lineaarselt polariseeritud langeva laine korral, kusjuures ta vaatleb ainult polarisatsiooni langemistasapinnas ja risti sellega.

Ta lähtub oma töös Maxwelli võrrandeist. Et Eichenvaldi tulemused leidsid ka katselist kinnitust, siis on ta töö veel üheks tõestuseks Maxwelli valguse elektromagnetilisele teooriale (Eichenvaldi töö ilmus 1909.a. ja valguse olemuse probleem oli siis veel küllaltki aktuaalne).

Kasutades lisaks Maxwelli võrrandeile ääretingimusi elektri- ja magnetvektori jaoks Eichenvald leiab, et energia tungib teise keskkonda, kuid valguse intensiivsus kahaneb väga kiiresti kaugenemisega lahutuspinnast.

Eichenvald näitab, et ei ole võimalik leida murdunud kiire jaoks kindlat suunda, mis rahuldaks ääretingimusi, kuid sellest hoolimata murdunud kiir on olemas ja ta suund muutub ajas järgmise seaduse alusel:

$$\tan \vartheta = -\frac{a}{\kappa} \cdot \tan \frac{2\pi}{T}(t - ax),$$

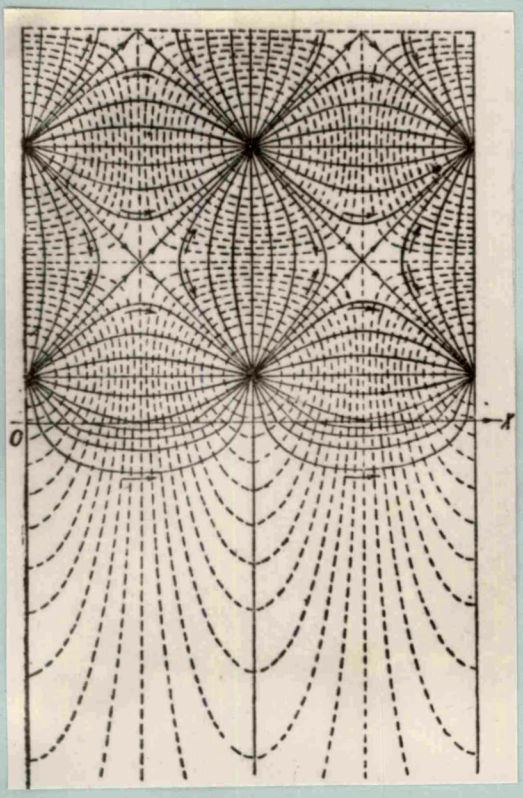
kus

$$\kappa = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{v_1}.$$

Siin φ on langemisnurk; ϑ -murdumisnurk; $1/a$ -faasikiirus x -telje suunas; v_1 -valguse levimise kiirus esimeses keskkonnas.

Eichenvald leiab välja teises keskkonnas ja sellest lähtudes ka Poynting-Umovi vektori komponendid, millised ta langemistasapinnas polariseeritud valguse jaoks saab kujus

$$\begin{cases} f_z = -A^2 \frac{\varepsilon}{8\pi K} \cdot e^{-\frac{4\pi K}{\tau} \cdot z} \cdot \sin \frac{4\pi}{\tau}(t - ax) \\ f_x = A^2 \frac{\varepsilon a}{8\pi K} e^{-\frac{4\pi K}{\tau} \cdot z} \cdot [1 - \cos \frac{4\pi}{\tau}(t - ax)] \end{cases} \qquad (4)$$



Nende komponentide abil leiab Eichenvald ka energia voolujoonte võrrandid. Voolujoonte kuju koos välja tungjoontega on näidatud kõrvaloleval fotol. Pidevad kõverad tähendavad voolujooni, katkendlikud - välja tungjooni.

Eichenvald leiab, et energia sisenemine ja väljumine teisest keskkonnast toimub erinevates kohtades samal ajamomendil. Nende kohtade vaheline kaugus on

$$x = \frac{\tau}{4a} = \frac{\lambda}{4} .$$

Seal, kus $f_z < 0$, energia väljub teisest keskkonnast, kus $f_z > 0$, seal energia tungib teise keskkonda.

Eichenvald resümeerib selle järgnevalt:

"Langeva kiire energia nagu sukelduks teise keskkonda, selleks, et uuesti väljuda tervikuna esimesse keskkonda peegeldunud kiires. Kuid energia sisenemine ja väljumine toimub erinevates kohtades erinevatel ajamomentidel, aga antud ajahetke jaoks kohtades, mis asuvad teineteisest samal kaugusel kui pool kaugust samade faaside vahel x -telge mööda".

Eichenvald näitab Voigt'i vaate ekslikkust, kes arvas, et kuna f_x omab alati positiivset väärtust, siis mööda lahutuspinda levib iseseisev kiir, mis kujutab endast valguse pikilainetust.

Voigt väidab küll, et valguse ristlainetus toimub ainult konstantse amplituudi korral, kuid ka see ebaselgus kaob, kui panna tähele, et x - telje suunas energia levimise teed (kiirt) ei

saa vaadelda iseseisvana. Ta on vaid energia liikumistee projektsioon x -teljele. Eichenvald uuris muide ka välja esimeses keskkonnas ja näitas, et seal peaks siis ka ilmuma Voigt'i pikilainetustega kiir, kuid esimeses keskkonnas valguse amplituudide konstantsuse kohta kahtlust olla ei saa. Seda küsimust puudutame veelkord hiljem.

Eichenvald teeb ka ühe olulise vea. Ta nimelt väidab, et energiavoo intensiivsus teises keskkonnas ei olene langeva valguse polarisatsioonist. See väide Eichenvaldi järgi kehtib eeldusel, kui teises keskkonnas amplituudid A ja B (vt. valemid (5)) on võrdsed. Kuid see ei tähenda veel, et langevas valguses oleksid vastavad amplituudid võrdsed, ning seda juhtu ei saa vaadelda nii, nagu oleks meil tegemist ainult erinevusega polarisatsiooni suunas. Kui valida langevas laines amplituudid võrdseteks, isegi siis ei kehti Eichenvaldi väide. See on Eichenvaldi vea üks külg. Eichenvaldi väite ekslikkus nähtub neljandas peatükis saadud avaldistest Poynting-Umovi vektori komponentide jaoks (valemid (27)) ja ka Eichenvaldi tööst andast.

Väljavektorite komponendid saab Eichenvald järgmisel kujul:

$$
\begin{aligned}
E_x &= A\, e^{-\frac{2\pi K}{\tau}\cdot z}\cdot \cos\tfrac{2\pi}{\tau}(t-ax)\\
E_z &= A\,\tfrac{a}{K}\, e^{-\frac{2\pi K}{\tau}\cdot z}\cdot \sin\tfrac{2\pi}{\tau}(t-ax)\\
M_y &= -A\,\tfrac{\varepsilon}{cK}\cdot e^{-\frac{2\pi K}{\tau}\cdot z}\cdot \sin\tfrac{2\pi}{\tau}(t-ax)\\
M_x &= B\,\tfrac{c}{\mu}\, a\, e^{-\frac{2\pi K}{\tau}\cdot z}\cdot \cos\tfrac{2\pi}{\tau}(t-ax)\\
M_z &= B\,\tfrac{c}{\mu}\, a\, e^{-\frac{2\pi K}{\tau}\cdot z}\cdot \sin\tfrac{2\pi}{\tau}(t-ax)\\
E_y &= B\, e^{-\frac{2\pi K}{\tau}\cdot z}\cdot \sin\tfrac{2\pi}{\tau}(t-ax)\,.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Siin E tähendab elektrivektorit ja M magnetvektorit. A ja B on vastavad amplituudid.

Poynting-Umovi vektori komponendid langemistasapinnas polariseeritud valguse jaoks on:

$$\begin{cases} f_z = \frac{c}{4\pi} E_x M_y \\ f_x = -\frac{c}{4\pi} E_z M_y \end{cases}.$$

Neist valemeist kasutades (5), saame valemid (4). Poynting-Umovi vektori komponendid valguse jaoks, mis on polariseeritud risti langemistasandiga on:

$$\begin{cases} f_z = -\frac{c}{4\pi} E_y M_x \\ f_x = \frac{c}{4\pi} E_y M_z \end{cases}.$$

Kasutades (5) ja arvutades leiame:

$$\begin{cases} f_z = -B^2 \frac{\varepsilon}{8\pi\kappa} \sqrt{\sin^2\varphi - n^2} \cdot e^{-\frac{4\pi\kappa}{\tau} z} \cdot \sin\frac{4\pi}{\tau}(t - ax) \\ f_x = B^2 \frac{\varepsilon a}{8\pi\kappa^2} (\sin^2\varphi - n^2)\, e^{-\frac{4\pi\kappa}{\tau} z} \cdot \left[1 - \cos\frac{4\pi}{\tau}(t - ax)\right] \end{cases} \qquad (6)$$

Eichenvald väidab, et kui $A = B$, siis valemid (6) ja (4) on identsed. Tema töös valemeid (6) toodud ei ole. Võrreldes nüüd valemeid (6) ja (4) näeme, et nad ei ole identsed kui $A = B$. See on Eichenvaldi vea teine külg.

Lähtudes oma teoreetilisest tööst Eichenvald võtab täieliku sisepeegeldumise pildi kokku järgmiselt:

1) Langemisnurga φ juures, mis on väiksem täieliku sisepeegeldumise piirnurgast, $\sin\varphi < n$, on olemas murdunud kiir kindla suunaga $\mathcal{H}$; energia osaliselt tungib teise keskkonda.

2) Piirnurga korral $\sin\varphi = n$, $\mathcal{H} = 90^\circ$, kuid murdunud kiire intensiivsus on null ja energia üldse ei tungi teise keskkonda.

3) Langemisnurga φ edasisel suurendamisel, kuigi murdunud kiir ei oma konstantset suunda, energia siiski tungib teise keskkonda teatud ajaks ja teatud sügavusele. Seejuures faasivahed langeva, peegeldunud ja murdunud kiirte vahel kasvavad pidevalt, vahe $\delta - \delta'$ (faasivahe kiirte vahel, mis on polariseeritud langemistasapinnas ja risti langemistasapinnaga) omab maksimumi ja seejärel langeb uuesti nullile $\varphi = 90^\circ$ juures.

$$\tan\frac{\delta - \delta'}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\cos\varphi \tan^2\varphi}.$$

4) Kui $\varphi = 90^\circ$, kiir libiseb lahutuspinda mööda ja teise keskkonda ei tungi.

Eichenvaldi töö annab ulatusliku ning põhjaliku (kuigi mitte päris täieliku) teoreetilise kirjelduse katseliselt tuntud faktile, et valgus tungib täieliku sisepeegeldumise korral optiliselt hõredamasse keskkonda. Väga tähtis on ka, et Eichenvald selgitab arusaamatuse Voigt'i pikilainetustega kiire suhtes.

Eichenvaldi töö demonstreerib veelkord vene teadlaste laia tegevuspõldu ning nende suurt panust maailmateaduse varasalve.

Järgmises peatükis vaatleme analoogset probleemi elliptiliselt polariseeritud langeva valguse korral.

Meie poolt kasutatud väljavektorite komponentide arvutamise meetod näib olevat kõige lihtsam ja selgem, näiteks lihtsam kui Wiegrefe oma.

Peatükk III

Väli optiliselt hõredamas keskkonnas.

Olgu meil tegemist tasapinnalise, elliptiliselt polariseeritud langeva lainega. Siis elektrivälja tugevuse komponendid langevas kiires avalduvad järgmiselt:

$$\begin{cases} E_x = A_x e^{i(\omega t - \vec{\kappa}\vec{r})} \\ E_y = A_y e^{i(\omega t - \vec{\kappa}\vec{r})} \\ E_z = A_z e^{i(\omega t - \vec{\kappa}\vec{r})} \end{cases} \qquad (7)$$

A_x, A_y, A_z on vastavad amplituudid. Kuna meil on tegemist elliptilise polarisatsiooniga, siis peab olema faasivahe E_y ja E_x ning E_y ja E_z vahel. See tähendab, et A_y peab olema imaginaarne.

$$A_y = |A_y| e^{i\delta}, \qquad (8)$$

kus δ on tuntud faasivahe.

Analoogselt peegeldunud kiire jaoks saame:

$$\begin{cases} E'_x = A'_x\, e^{i(\omega t - \vec{\kappa}'\vec{r})} \\ E'_y = A'_y\, e^{i(\omega t - \vec{\kappa}'\vec{r})} \\ E'_z = A'_z\, e^{i(\omega t - \vec{\kappa}'\vec{r})} \end{cases} \qquad (9)$$

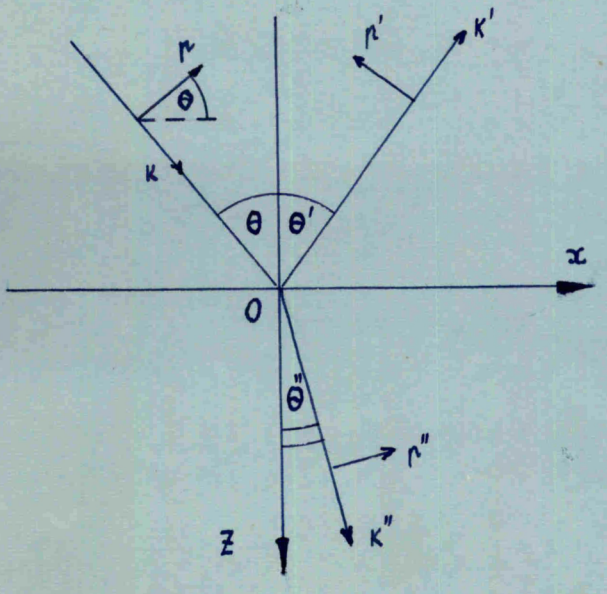
Murdunud kiire jaoks:

$$\begin{cases} E''_x = A''_x\, e^{i(\omega t - \vec{\kappa}''\vec{r})} \\ E''_y = A''_y\, e^{i(\omega t - \vec{\kappa}''\vec{r})} \\ E''_z = A''_z\, e^{i(\omega t - \vec{\kappa}''\vec{r})} \end{cases} \qquad (10)$$

$\vec{r}$ mis valemeis on mingi punkti kohavektor.
$\vec{\kappa}$, $\vec{\kappa}'$ ja $\vec{\kappa}''$ on vastavad lainevektorid.

$$\begin{cases} \vec{\kappa} = \kappa'(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{k}) \\ \vec{\kappa}' = \kappa'(\sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{k}) \\ \vec{\kappa}'' = \kappa''(\sin\theta''\,\vec{i} + \cos\theta''\,\vec{k}) \end{cases} \qquad (11)$$

nagu on kerge näha jooniselt nr.2. $\vec{i}$ ja $\vec{k}$ on vastavalt x - ja z -telje suunalised ühikvektorid,



Joonis nr.2.

$$\begin{cases} \kappa' = \dfrac{2\pi}{\lambda_1} = \dfrac{\omega n_1}{c} \\ \kappa'' = \dfrac{2\pi}{\lambda_2} = \dfrac{\omega n_2}{c} \end{cases} \qquad (12)$$

kus λ_1 ja λ_2 on valguse lainepikkused esimeses ja teises keskkonnas; c -valguse kiirus vaakuumis; ω -ringsagedus.

$\vec{E}$, $\vec{E}'$ ja $\vec{E}''$ lahutame nüüd kaheks komponendiks nii, et üks oleks langemistasapinnas, teine sellega risti (antud juhul y- komponent).

Lepime kokku, et p, n ja κ moodustavad paremakäelise süsteemi.

Indeks ρ tähendab langemistasapinnas olevat komponenti, η langemistasapinnaga risti olevat komponenti, κ - kui on tegemist laine levimise suunaga.

Seosed uute ja vanade komponentide vahel on järgmised:

$$\begin{aligned} A_y &= A_\eta & A_x &= A_\rho \cos\theta & A'_z &= -A'_\rho \sin\theta \\ A'_y &= A'_\eta & A_z &= -A_\rho \sin\theta & A''_x &= A''_\rho \cos\theta'' \\ A''_y &= A''_\eta & A'_x &= -A'_\rho \cos\theta & A''_z &= -A''_\rho \sin\theta'' \end{aligned} \qquad (13)$$

Neist valemeist kasutades ääretingimusi elektri ja magnetvektori jaoks lahutuspinnal, tuletatakse nn. Fresnel'i valemid amplituudide jaoks. Ääretingimusteks on:

$$\begin{cases} \mathrm{Div}\,\vec{D} = 0 \\ \mathrm{Div}\,\vec{B} = 0 \\ \mathrm{Rot}\,\vec{E} = 0 \\ \mathrm{Rot}\,\vec{\mathcal{H}} = 0 \end{cases} , \qquad (14)$$

kuna eeldame, et puuduvad vabad laengud ja pinnalised voolud lahutuspinnal. Fresnel'i valemid saame järgmisel kujul:

$$A'_\rho = A_\rho \frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')} \qquad A''_\rho = A_\rho \frac{2\sin\theta''\cos\theta}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$$

$$A'_\eta = A_\eta \frac{\sin(\theta''-\theta)}{\sin(\theta+\theta'')} \qquad A''_\eta = A_\eta \frac{2\sin\theta''\cos\theta}{\sin(\theta+\theta'')} \qquad (15)$$

Selles peatükis meid peegeldunud kiir ei huvita ja meie jätame ta esialgu vaatlusest välja.

Amplituudid murdunud kiires avaldame ainult esimese keskkonna suuruste kaudu.

Asetades (15)-sse vastavalt (13) ja kasutades seoseid (2) ning (3) saame amplituudide jaoks teises keskkonnas järgmised avaldised:

$$A''_x = \frac{2A_x\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\sqrt{(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}} \cdot e^{-i\varphi}$$

$$A''_y = \frac{2|A_y|\cos\theta}{\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{i(\delta+\varphi)} \qquad (16)$$

$$A''_z = \frac{2A_z\cos\theta}{\sqrt{(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)}} \cdot e^{i(\pi/2 - \psi)}$$

φ ja ψ on täiendavad faasivahed, nad on defineeritud järgmiselt:

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\cos\theta} \qquad (17)$$

$$\tan\psi = \frac{n^2\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \qquad (18)$$

Kerge on näha, et faasivahed φ ja ψ on omavahel seotud:

$$\tan\psi = n^2\cot\varphi .$$

Selleks, et saada elektrivälja tugevuse komponente teises keskkonnas tuleb neid amplituude korrutada veel eksponentsiaaltegurigа $e^{i(\omega t - \vec{\kappa}''\vec{r})}$ ja saadud tulemusest võtta reaalosa.

$$e^{i[\omega t - \kappa''(\sin\theta''x + \cos\theta''z)]} = e^{-\kappa'\sqrt{\sin^2\theta - n^2}\cdot z} \cdot e^{i(\omega t - \kappa'\sin\theta x)}$$

Saame:

$$E''_x = \frac{2A_x\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\sqrt{(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)}} \cdot e^{-\kappa'\sqrt{\sin^2\theta - n^2}\cdot z} \cdot \cos[\omega t - \kappa'\sin\theta x - \psi]$$

$$E''_y = \frac{2|A_y|\cos\theta}{\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{-\kappa'\sqrt{\sin^2\theta - n^2}\cdot z} \cdot \cos[\omega t - \kappa'\sin\theta x + \delta + \varphi] \qquad (19)$$

$$E''_z = -\frac{2A_z\cos\theta}{\sqrt{(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)}} \cdot e^{-\kappa'\sqrt{\sin^2\theta - n^2}\cdot z} \cdot \sin[\omega t - \kappa'\sin\theta x - \psi]$$

Leiame nüüd magnetvälja tugevuse vektori komponendid teises keskkonnas.

$\vec{\mathcal{H}}''$ arvutamiseks kasutame Maxwelli teist võrrandit, mis seob elektrivälja tugevust ja magnetilist induktsiooni.

$$\operatorname{rot}\vec{E}'' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}''}{\partial t}.$$

$\vec{B}'' = \mu_2 \vec{\mathcal{H}}''$, kuna aga enamikul ainetest on magnetilised permeaablused 1 -le väga lähedal, siis loeme $\mu_2 \approx 1$ ning $\vec{B}'' \approx \vec{\mathcal{H}}''$.

Siis saame:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{H}}''}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E}''. \qquad (20)$$

$\vec{E}''$ on meil juba leitud, arvutame rootori temast

$$\operatorname{rot}\vec{E}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x'' & E_y'' & E_z'' \end{vmatrix}.$$

Võrrand (20) laguneb nüüd kolmeks võrrandiks magnetvektori komponentide jaoks. Arvestame veel, et $\frac{\partial E_x''}{\partial y} = \frac{\partial E_z''}{\partial y} = 0$, siis meie süsteem saab järgmise kuju:

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{H}_x''}{\partial t} = \frac{\partial E_y''}{\partial z} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{H}_y''}{\partial t} = \frac{\partial E_z''}{\partial x} - \frac{\partial E_x''}{\partial z} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{H}_z''}{\partial t} = -\frac{\partial E_y''}{\partial x} \end{cases} \qquad (21)$$

Arvutame nüüd $\vec{E}''$ komponentide vajalikud osatuletised koordinaatide järgi ning integreerime saadud võrrandid. Seejuures koordinaatidest sõltuvad integreerimiskonstandid tulevad nulliks võtta, kuna muidu me saaksime, et meie süsteem asub ajaliselt konstantses magnetväljas.

$\vec{\mathcal{H}}''$ komponentide jaoks saame järgmised avaldised:

$$\mathcal{H}''_x = -\frac{2n_1|A_y|\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{-\kappa'\sqrt{\sin^2\theta-n^2}\cdot z} \cdot \sin[\omega t - \kappa' \sin\theta x + \delta + \varphi]$$

$$\mathcal{H}''_y = \frac{2n_1}{\sqrt{(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)}} \cdot e^{-\kappa'\sqrt{\sin^2\theta-n^2}\cdot z} \cdot [A_z \sin\theta\cos\theta + A_x(\sin^2\theta - n^2)] \times \quad (22)$$
$$\times \sin[\omega t - \kappa' \sin\theta x - \gamma]$$

$$\mathcal{H}''_z = \frac{2n_1|A_y|\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{-\kappa'\sqrt{\sin^2\theta-n^2}\cdot z} \cdot \cos[\omega t - \kappa' \sin\theta x + \delta + \varphi] .$$

Kuna A_x ja A_z pole sõltumatud, siis toome sisse sõltumatu amplituudi A_p. Kirjutamise hõlbustamiseks kasutame veel φ ja γ definitsioonvalemeid (17) ning (18), kust saame:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-n^2}} \quad ; \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{\sin^2\theta - n^2}{1-n^2}}$$

ning

$$\sin\gamma = \frac{n^2\cos\theta}{\sqrt{(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)}} \quad ; \quad \cos\gamma = \sqrt{\frac{\sin^2\theta - n^2}{(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)}} .$$

Teeme veel järgmised tähistused:

$$\varkappa = \kappa'\sqrt{\sin^2\theta - n^2} . \quad (23)$$

Ja

$$\tau = \omega t - \kappa' \sin\theta x . \quad (24)$$

Väljavektorite komponendid teises keskkonnas avalduvad siis järgmiselt:

$$\begin{aligned}
E''_x &= 2\cos\theta\cos\varphi A_p \cdot e^{-\varkappa z} \cdot \cos(\tau - \gamma) \\
E''_y &= 2\cos\varphi A_y \cdot e^{-\varkappa z} \cdot \cos(\tau + \delta + \varphi) \\
E''_z &= \frac{2}{n^2} \cdot \sin\theta\sin\gamma A_p \cdot e^{-\varkappa z} \cdot \sin(\tau - \gamma) \\
\mathcal{H}''_x &= -2n_1\cos\theta\sin\varphi A_y \cdot e^{-\varkappa z} \cdot \sin(\tau + \delta + \varphi) \\
\mathcal{H}''_y &= -2n_1\sin\gamma A_p \cdot e^{-\varkappa z} \cdot \sin(\tau - \gamma) \\
\mathcal{H}''_z &= 2n_1\sin\theta\cos\varphi \cdot e^{-\varkappa z} \cdot \cos(\tau + \delta + \varphi) .
\end{aligned} \quad (25)$$

$|A_y|$ asemele on siin lihtsalt kirjutatud A_y .

Neist avaldistest näeme, et väli teises keskkonnas on tõepoolest olemas. Peale väljavektorite sinusoidaalse muutumise optiliselt hõredamas keskkonnas väli kahaneb kaugenemisega lahutuspinnast eksponentsiaalselt. See kahanemine on väga kiire. Eksponentsiaaltegurit võib kirjutada kujus $e^{-\frac{2\pi}{\lambda_1}\sqrt{\sin^2\Theta - n^2}\cdot z}$ ja kuna

$\sqrt{\sin^2\Theta - n^2} < 1$, siis märgatav välja nõrgenemine teises keskkonnas toimub juba lainepikkuse suurusjärgus.

Seega täieliku sisepeegeldumise korral elektromagneetilise välja optiliselt hõredamasse keskkonda tungimise sügavus on väike.

Väljavektorite komponentide vahel on faasivahed. Samas faasis võnguvad E''_x, E''_z ja $\mathcal{H}''_y$ ning $\mathcal{H}''_x, \mathcal{H}''_z$ ja E''_y .

Peatükk IV

Energia voolujooned teises keskkonnas.

Energia liikumise uurimiseks teises keskkonnas kasutame Poynting - Umovi vektori mõistet.

See on vektor, mille suund näitab energia liikumise suunda, ta absoluutväärtus annab ajaühikus läbi energia liikumise suunaga ristioleva pinnaühiku mineva energiahulga.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}'' \times \vec{\mathcal{H}}'') \quad . \tag{26}$$

Ehk

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{c} S_x = E''_y \mathcal{H}''_z - E''_z \mathcal{H}''_y \\ \frac{4\pi}{c} S_y = E''_z \mathcal{H}''_x - E''_x \mathcal{H}''_z \\ \frac{4\pi}{c} S_z = E''_x \mathcal{H}''_y - E''_y \mathcal{H}''_x \end{cases} .$$

Sellest süsteemist leiame Poynting - Umovi vektori komponendid.

$$\begin{cases} S_x = \dfrac{c n_1 \sin\theta\cos^2\theta}{\pi(1-n^2)} \cdot e^{-2\alpha z} \cdot \left[A_y^2 \cos^2(\tau+\delta+\varphi) + \dfrac{n^2 A_p^2}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta} \sin^2(\tau-\gamma)\right] \\ S_y = -\dfrac{c n_1 A_p A_y}{\pi\sqrt{1-n^2}} \sin\theta\cos^2\theta \cos\gamma \cos(\delta+\varphi+\gamma) \cdot e^{-2\alpha z} \\ S_z = \dfrac{c n_1 \cos^2\theta\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{2\pi(1-n^2)} \cdot e^{-2\alpha z} \cdot \left[A_y^2 \sin 2(\tau+\delta+\varphi) - \dfrac{n^2 A_p^2}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta} \sin 2(\tau-\gamma)\right] \end{cases} \quad (27)$$

Märgime ära, et Poynting - Umovi vektori y -komponent ei sõltu ajast nagu see just olema peabki. See tähendab, et energia levimine langemistasapinnaga ristuvas sihis omab statsionaarset iseloomu.

Määrame nüüd differentsiaalvõrrandid energia voolujoonte jaoks teises keskkonnas.

Energia voolujoonteks on kõverad, milledele Poynting-Umovi vektor on igal ajamomendil puutujaks. Voolujoonte määramiseks saame järgmise seose:

$$\frac{dx}{S_x} = \frac{dy}{S_y} = \frac{dz}{S_z} ,$$

kuna Poynting - Umovi vektori ja voolujoone differentsiaali komponendid peavad olema võrdelised.

Siit xz -tasapinnas olevate voolujoonte jaoks saame:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{S_z}{S_x} . \quad (28)$$

Analoogselt xy-tasapinnas olevate voolujoonte jaoks:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_y}{S_x} . \quad (29)$$

Kasutades leitud Poynting - Umovi vektori komponentide avaldisi (27) ja teostades taandamised saame:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A_p A_y \sqrt{1-n^2}\cos\gamma\cos(\delta+\varphi+\gamma)}{A_y^2\cos^2(\tau+\delta+\varphi) + \dfrac{A_p^2 n^2}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}\sin^2(\tau-\gamma)} . \quad (30)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{2\sin\theta} \cdot \frac{A_y^2 \sin 2(\tau+\delta+\varphi) - \frac{n^2 A_p^2}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}\sin 2(\tau-\gamma)}{A_y^2\cos^2(\tau+\delta+\varphi) + \frac{n^2 A_p^2}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}\sin^2(\tau-\gamma)} \quad . \tag{31}$$

Integreerimise hõlbustamiseks teisendame eelkõige nende võrrandite nimetajat, kasutades järgmiseid tähistusi:

$$\begin{cases} a = A_y^2 \\ b = \dfrac{n^2 A_p^2}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta} \end{cases} . \tag{32}$$

$$\begin{cases} C = \frac{1}{2}[a+b] \\ D = \frac{1}{2}[a\cos 2(\delta+\varphi) - b\cos 2\gamma] \\ E = -\frac{1}{2}[a\sin 2(\delta+\varphi) + b\sin 2\gamma] \end{cases} . \tag{33}$$

Saame

$$a\cos^2(\tau+\delta+\varphi) + b\sin^2(\tau-\gamma) = C + D\cos 2\tau + E\sin 2\tau \quad .$$

Tähistame veel

$$M = -\sqrt{1-n^2}\, A_p A_y \cos\gamma \cos(\delta+\varphi+\gamma) \quad . \tag{34}$$

Tuletame nüüd meelde, et $\tau = \omega t - \kappa' \sin\theta\, x$ ja integreerime diferentsiaalvõrrandi (30)

$$y = \int \frac{M\,dx}{C + D\cos 2(\omega t - \kappa'\sin\theta\, x) + E\sin 2(\omega t - \kappa'\sin\theta\, x)} \quad .$$

Kui kasutame veel kunstlikku võtet - jagame lugejat ja nimetajat $\sqrt{D^2+E^2}$ -ga, siis integraal avaldub:

$$y = M' \int \frac{dx}{C' + \sin 2(\omega t - \kappa'\sin\theta\, x + \frac{\alpha}{2})} ,$$

kus $M' = \dfrac{M}{\sqrt{D^2+E^2}}$ ja $C' = \dfrac{C}{\sqrt{D^2+E^2}}$.

$$\tan\alpha = \frac{D}{E} , \tag{35}$$

ning

$$\sin\alpha = \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{\mathcal{D}^2 + E^2}} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{E}{\sqrt{\mathcal{D}^2 + E^2}} \; .$$

Integreerides saame voolujoonte kuju jaoks $x\,y$ -tasandil

$$y = A \arctan\sqrt{\frac{c'-1}{c'+1}} \cdot \tan(\omega t - \kappa' \sin\theta\, x + \tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\pi}{4}) + \text{const} \; , \qquad (36)$$

kus

$$A = -\frac{M'}{\kappa' \sin\theta \sqrt{c'^2 - 1}} \; . \qquad (37)$$

Selleks, et integreerida (31), tuleb seal teisendada lugejat allpool toodud viisil, kasutades samu tähistusi

$$a \sin 2(\tau + \delta + \varphi) - b \sin 2(\tau - \gamma) = -2\sqrt{\mathcal{D}^2 + E^2} \cos 2(\tau + \tfrac{\alpha}{2}) \; .$$

Integreerides leiame

$$z = B \ln[c' + \cos 2(\omega t - \kappa' \sin\theta\, x + \tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\pi}{4})] + \text{const} \; , \qquad (38)$$

kus

$$B = \frac{M\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{2\kappa' \sin^2\theta} \; . \qquad (39)$$

Avaldame veel valemites (36) ja (37) esineva konstandi c' algsuuruste kaudu

$$c' = \frac{2\left(A_y^2 + \frac{n^2 A_p^2}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}\right)}{\sqrt{A_y^4 + \frac{A_p^4 n^4}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta} - \frac{2A_y^2 A_p^2 n^2 \cos 2(\delta + \varphi + \gamma)}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}}} \; . \qquad (40)$$

Samuti

$$\tan\alpha = \frac{b\cos 2\gamma - a\cos 2(\delta + \varphi)}{a\sin 2(\delta + \varphi) + b\sin 2\gamma} \; .$$

Siit arvestades (32) on kerge näha kuidas $\tan\alpha$ sõltub algsuurustest.

Esialgu huvitab meid voolujoonte kuju teises keskkonnas, vaatleme neid mingil konkreetsel ajahetkel. Selleks hetkeks olgu

$$t_1 = -\frac{\alpha - \pi/2}{2\omega} \; ,$$

siis voolujoonte võrrandid on järgmised:

$$\begin{cases} y = -A \arctan\sqrt{\frac{c'-1}{c'+1}} \tan(\kappa' \sin\theta x) + \text{const.} \\ z = B \ln[c' + \cos(2\kappa' \sin\theta x)] + \text{const.} \end{cases} \tag{41}$$

Voolujoonte väljajoonestamise hõlbustamiseks teeme veel lihtsa muutujate vahetuse

$$\begin{cases} \xi = \kappa' \sin\theta x \\ \eta = \frac{y}{A} \\ \zeta = \frac{z}{B} \end{cases} . \tag{42}$$

Siis voolujoonte kuju jaoks lõplikult saame:

$$\begin{cases} \eta = -\arctan\sqrt{\frac{c'-1}{c'+1}} \tan\frac{\xi}{2} + \text{const.} \\ \zeta = \ln[c' + \cos\xi] + \text{const.} \end{cases} \tag{43}$$

Nende voolujoonte kuju on näidatud töö lõpus esitatud joonistel I - IV. Konstant pole oluline, η avaldises annab see veel voolujoontele identsed jätkud osas $|\eta| > \pi/2$.

Joonistelt näeme, et xz -tasandil energia levib lainetena, mis c' suurenemisega kiiresti lamenevad. Kui antud hetkel punktis $x = 0$ energia tungib teise keskkonda, siis samal hetkel kaugusel $x = \frac{\pi}{\kappa' \sin\theta} = \frac{\lambda_1}{2\sin\theta}$ energia väljub teisest keskkonnast. Kuid tegelikku kiire nihet see avaldis õigesti ei väljenda, kuna voolujoonte pilt sõltub veel ajast ja, et energia liigub just neid voolujooni mööda teises keskkonnas, väita ei saa. Oluline on aga see, et nihe tuli võrdeline langeva valguse lainepikkusega.

z -telje suunas energia võnkumine toimub poole väiksema perioodiga kui langeva valguse võnkumised, st. langeva valguse ühe täisvõnke kestel jõuab energia kaks korda minna esimesest keskkonnast teise ja jälle sealt väljuda.

Eriti huvitav on aga nn. y -nihke olemasolu. $\xi\eta$ tasapinnas olevatelt voolujoontelt näeme, et langemistasapind ja peegeldumistasapind on paralleelsed, kuid ei ühti. Kui energia tungib mingil hetkel kusagil x -telje peal teise keskkonda, siis väljub ta sealt mingil teisel ajamomendil, nihkega x -telje suunas, kuid juba mitte x -teljel.

Senini on kõik uurijad (välja arvatud P.G.Kard (3)-s) jätnud selle nihke hoopis tähelepanemata.

Huvitav on veel juht, kui γ avaldises $\sqrt{\frac{c'-1}{c'+1}} = 1$.
See tingimus on täidetud kui $c' = \infty$.

Tõepoolest $\lim_{c' \to \infty} \sqrt{\frac{c'-1}{c'+1}} = 1$. Selleks, et $c' = \infty$, peab avaldises (40) nimetaja olema null. See nimetaja pole vormiliselt muud midagi, kui koosinuslause rakendatud ühele kolmnurgale, mille üks külg, mida väljendab see nimetaja, peab nüüd olema null. Siis peavad kaks teist külge ühte langema ja nurk nende vahel on 0 või 2π.

Seega tingimused, et $c' = \infty$ on:

$$A_y = \pm \frac{n A_p}{\sqrt{\sin^2\theta - n^2 \cos^2\theta}} \quad \text{ja} \quad \delta + \varphi + \gamma = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} . \tag{44}$$

Kasutades tingimust faasinihete jaoks, saame leida ka milline langeva valguse polarisatsioon vastab sellele erijuhule.

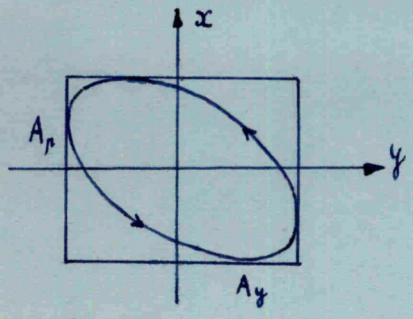
$$\delta = -(\varphi + \gamma) .$$

Siit kasutades (17) ja (18), saame $\tan\delta$ jaoks järgmise avaldise:

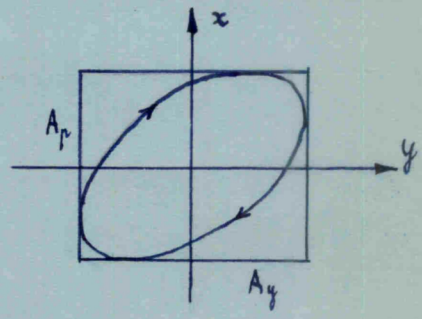
$$\tan\delta = - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta \sqrt{\sin^2\theta - n^2}} . \tag{45}$$

Lahendades selle võrrandi δ suhtes leiame, et δ on kas positiivne ja nüri, või negatiivne ja terav.

Vastavad polarisatsioonisuunad on näidatud joonistel nr.3.



$\delta + \varphi + \gamma = \pi$.



$\delta + \varphi + \gamma = 0$.

Joonised nr.3.

δ -positiivne ja nüri.

δ -negatiivne ja terav.

Vaatame millised on voolujooned selle erijuhu korral.
Saame:

$$\eta = -\xi + \text{const} . \tag{46}$$

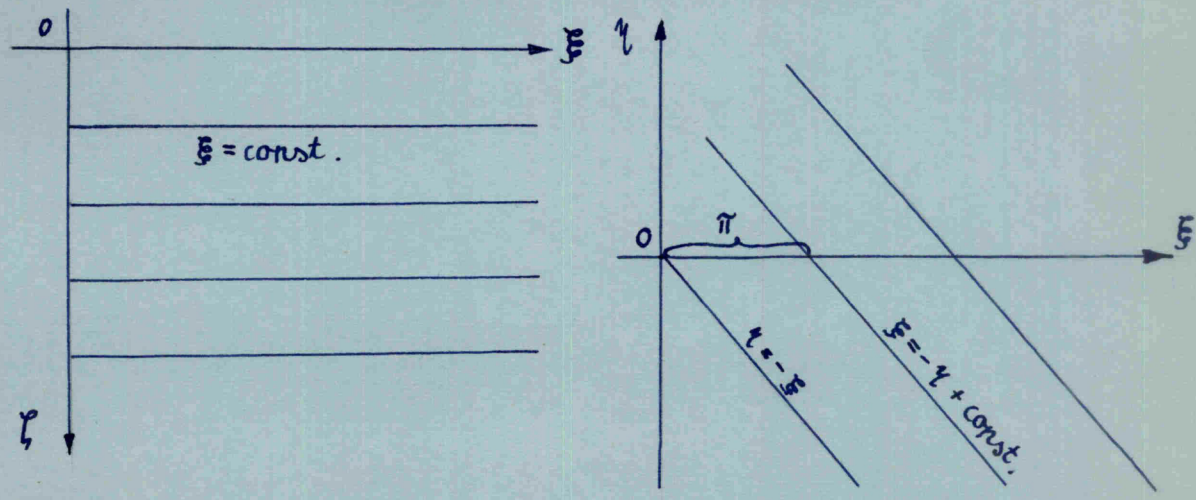
$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -\frac{\sin 2\xi}{2(c' + \cos 2\xi)} = 0 .$$

$$\zeta = \text{const} . \tag{47}$$

$\xi\zeta$ tasapinnas on nüüd voolujoonteks ξ -teljega paralleelsed sirged, $\xi\eta$ tasapinnas sirged tõusuga - 45°.

Siin võib kerkida küsimus sellest, kuidas niisugust juhtu tõlgendada, sest voolujoonte järgi otsustades tuleks oletada, et energia teises keskkonnas voolab paralleelselt lahutuspinnaga ning väljub teisest keskkonnast alles lõpmatuses. Asi seisab aga selles, et selline efekt kuulub lõpmatus langevale lainele, reaalsetes katsetes on meil aga alati tegemist lõplike valguskimpudega ja siis ilmselt voolujoonteks sellised sirged ei ole, vaid tulevad sisse moonutused, mis näitavad meile energia sisenemise ja väljumise kohti.

Meie juhul voolujoonte pilt on järgmine:



Joonised nr.4 ja nr.5.

Voolujoonte ajaline olenevus seisneb selles, et kogu voolujoonte pilt liigub x -telje positiivses suunas edasi konstantse kiirusega u .

$$u = \frac{\omega}{\kappa' \sin\theta} = \frac{c}{n_1 \sin\theta} \quad . \tag{48}$$

Edasi ajalise muutumise uurimiseks on huvitav leida Poynting-Umovi vektori hodograaf, mis on üldiselt mingi ruumiline kõver, kuigi, nagu hiljem näeme, antud juhul on ta tasapinnaline.

Fikseerime mingi punkti teises keskkonnas. Näiteks olgu $x = 0$ ja $z = 1$. Vaatame kuidas muutub ajaga selles punktis energia voolamise suund ja ta hulk. Selleks asetame $x = 0$, $z = 1$

Poynting - Umovi vektori komponentide avaldistesse (27). Saame Poynting - Umovi vektori hodograafi parameetrilised võrrandid (parameetriteks on aeg t) koordinaadistikus S_x, S_y, S_z .

Vaatleme Poynting - Umovi vektori hodograafi projektsioone $S_x S_z$ ja $S_x S_y$ tasanditele.

Voolujoonte differentsiaalvõrrandite integreerimisel me saime juba lihtsustatud avaldised Poynting - Umovi vektori komponentide suhte jaoks. Tehtud taandamised pole olulised, kuna see tähendaks vaid koorinaattelgede venitamist. Seega võime murdudes lugejat ja nimetajat lugeda võrdseteks vastavate Poynting-Umovi vektori komponentidega.

$$\begin{cases} S_y = M' & \text{- konstant ajas} \\ S_x = c' + \sin 2(\omega t + \frac{\alpha}{2}) \end{cases} .$$

Siit näeme, et Poynting - Umovi vektori hodograafi projektsioon $S_y S_z$ -tasandile on sirge.

$$\begin{cases} S_z = K\cos 2(\omega t + \frac{\alpha}{2}) \\ S_x = c' + \sin 2(\omega t + \frac{\alpha}{2}) \end{cases} , \qquad \text{kus} \quad K = -\frac{M\sqrt{\sin^2\Theta - n^2}}{\sin\Theta} .$$

Elimineerides aja leiame:

$$\frac{S_z^2}{K^2} + (S_x - c')^2 = 1 , \tag{49}$$

mis on ellipsi võrrand.

Järelikult aja muutude Poynting - Umovi vektori projektsiooni otspunkt $S_x S_z$ tasandil kirjeldab ellipsi. Järeldame ka, et Poynting - Umovi vektori hodograaf on tasapinnaline ja nimelt ellips, mis asub langemistasapinnaga paralleelses tasapinnas. On selge, et sel korral tema projektsioon langemistasapinnaga ristuvale tasapinnale on sirglõik. $S_x S_z$ tasapinnal saadav ellipsi projektsioon on järelikult identne ellipsi enesega.

Peatükk V

Väli optiliselt tihedamas keskkonnas.

Huvi pakub ka voolujoonte pilt esimeses keskkonnas, seetõttu uurime esialgu välja esimeses keskkonnas.

Fresnel'i valemites valime need, mis avaldavad peegeldunud kiire amplituudid ja täiesti analoogselt III peatükis tehtuga leiame:

$$\begin{cases} A'_x = A_x e^{-2i\psi} \\ A'_y = |A_y| e^{i(\delta+2\varphi)} \\ A'_z = -A_z e^{-2i\psi} \end{cases} \qquad (50)$$

kus φ ja ψ definitsioonid on endised.
Peegeldunud laine väli seega on:

$$\begin{cases} E'_x = A_x \cos[\omega t - \kappa'(\sin\theta x - \cos\theta z) - 2\psi] \\ E'_y = |A_y| \cos[\omega t - \kappa'(\sin\theta x - \cos\theta z) + \delta + 2\varphi] \\ E'_z = -A_z \cos[\omega t - \kappa'(\sin\theta x - \cos\theta z) - 2\psi] \end{cases} \qquad (51)$$

Selleks, et leida summaarset välja esimeses keskkonnas, tuleb peegeldunud väljale liita veel langeva valguse väli.
Viimane on järgmine (reaalosa (7)-st):

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos[\omega t - \kappa'(\sin\theta x + \cos\theta z)] \\ E_y = |A_y| \cos[\omega t - \kappa'(\sin\theta x + \cos\theta z) + \delta] \\ E_z = A_z \cos[\omega t - \kappa'(\sin\theta x + \cos\theta z)] \end{cases} \qquad (52)$$

Tähistame summaarse elektrivälja tugevuse optiliselt tihedamas keskkonnas $\vec{E}_1$. Öeldu põhjal:

$$\vec{E}_1 = \vec{E} + \vec{E}' \qquad (53)$$

Saame:

$$\begin{cases} E_{1x} = 2A_p \cos\theta \cos(\kappa' \cos\theta z - \gamma) \cos(\tau - \gamma) \\ E_{1y} = 2A_y \cos(\kappa' \cos\theta z + \varphi) \cos(\tau + \delta + \varphi) \\ E_{1z} = -2A_p \sin\theta \sin(\kappa' \cos\theta z - \gamma) \sin(\tau - \gamma) \end{cases} \quad (54)$$

Siin lihtsuse mõttes $|A_y|$ asemele on kirjutatud A_y ja endiselt $\tau = \omega t - \kappa' \sin\theta x$.

Summaarse magnetvälja $\vec{\mathcal{H}}_1$ esimeses keskkonnas leiame kasutades Maxwelli II võrrandit, mis annab

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_{1x}}{\partial t} = \frac{\partial E_{1y}}{\partial z} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_{1y}}{\partial t} = \frac{\partial E_{1z}}{\partial x} - \frac{\partial E_{1x}}{\partial z} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_{1z}}{\partial t} = -\frac{\partial E_{1y}}{\partial x} \end{cases}.$$

Arvutades vajalikud osatuletised $\vec{E}_1$ -st ja integreerides leiame:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{1x} = -2n_1 A_y \cos\theta \sin(\kappa' \cos\theta z + \varphi) \sin(\tau + \delta + \varphi) \\ \mathcal{H}_{1y} = 2n_1 A_p \sin(\kappa' \cos\theta z - \gamma) \sin(\tau - \gamma) \\ \mathcal{H}_{1z} = 2n_1 A_y \sin\theta \cos(\kappa' \cos\theta z + \varphi) \cos(\tau + \delta + \varphi) \end{cases} \quad (55)$$

Me näeme, et faasinihked väljavektorite vahel on analoogsed nendega, mis on teises keskkonnas. See näitab tihedat seost täieliku sisepeegeldumise mehanismide vahel esimeses ja teises keskkonnas. Samas faasis võnguvad $E_{1x}, E_{1z}, \mathcal{H}_{1y}$ ning $E_{1y}, \mathcal{H}_{1x}$ ja $\mathcal{H}_{1z}$.

Edasi asume Poynting - Umovi vektori komponentide arvutamisele optiliselt tihedamas keskkonnas.

Peatükk VI

Energia voolujooned esimeses keskkonnas.

Poynting - Umovi vektori komponendid leiame järgmiste võrrandite abil:

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{c} S_{1x} = E_{1y}\mathcal{H}_{1z} - E_{1z}\mathcal{H}_{1y} \\ \frac{4\pi}{c} S_{1y} = E_{1z}\mathcal{H}_{1x} - E_{1x}\mathcal{H}_{1z} \\ \frac{4\pi}{c} S_{1z} = E_{1x}\mathcal{H}_{1y} - E_{1y}\mathcal{H}_{1x} \end{cases} \quad (56)$$

Arvutades saame:

$$\begin{cases} S_{1x} = \frac{cn_1}{\pi} \sin\theta \left[A_y^2 \cos^2(\kappa' \cos\theta z + \varphi)\cos^2(\tau + \delta + \varphi) + A_p^2 \sin^2(\kappa' \cos\theta z - \gamma)\sin^2(\tau - \gamma)\right] \\ S_{1y} = \frac{cn_1}{\pi} A_p A_y \sin\theta\cos\theta \{\sin(\kappa' \cos\theta z + \varphi)\sin(\kappa' \cos\theta z - \gamma)\sin(\tau + \delta + \varphi)\sin(\tau - \gamma) - \\ \quad - \cos(\kappa' \cos\theta z + \varphi)\cos(\kappa' \cos\theta z - \gamma)\cos(\tau + \delta + \varphi)\cos(\tau - \gamma)\} \\ S_{1z} = \frac{cn_1}{4\pi} \cos\theta \left[A_p^2 \sin 2(\kappa' \cos\theta z - \gamma)\sin 2(\tau - \gamma) + A_y^2 \sin 2(\kappa' \cos\theta z + \varphi) \times \right. \\ \quad \left. \times \sin 2(\tau + \delta + \varphi)\right] \end{cases} \quad (57)$$

Voolujoonte diferentsiaalvõrrandid leiame analoogselt neljandas peatükis tehtuga.

Voolujoonte jaoks xz - tasandil saame:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{S_{1z}}{S_{1x}} = \frac{\cot\theta}{4} \cdot \frac{A_p^2 \sin 2(\kappa' \cos\theta z - \gamma)\sin 2(\tau - \gamma) + A_y^2 \sin 2(\kappa' \cos\theta z + \varphi)\sin 2(\tau + \delta + \varphi)}{A_p^2 \sin^2(\kappa' \cos\theta z - \gamma)\sin^2(\tau - \gamma) + A_y^2 \cos^2(\kappa' \cos\theta z + \varphi)\cos^2(\tau + \delta + \varphi)} . \quad (58)$$

Voolujoonte jaoks xy - tasandil saame veel keerulisema diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_{1y}}{S_{1x}} = \frac{A_p A_y \cos\theta \{\sin(\kappa' \cos\theta z + \varphi)\sin(\kappa' \cos\theta z - \gamma)\sin(\tau + \delta + \varphi)\sin(\tau - \gamma) - A_y^2 \cos^2(\kappa' \cos\theta z + \varphi)\cos^2(\tau + \delta + \varphi) + \right.}{\left. - \cos(\kappa' \cos\theta z + \varphi)\cos(\kappa' \cos\theta z - \gamma)\cos(\tau + \delta + \varphi)\cos(\tau - \gamma)\right.} \quad (59)$$
$$+ A_p^2 \sin^2(\kappa' \cos\theta z - \gamma)\sin^2(\tau - \gamma)$$

Selleks, et (58)-st ja (59)-st koosnevat süsteemi integreerida, tuleks eelkõige leida z x-i funktsioonina ja siis $\frac{dy}{dx}$ avaldises asendada z x-i kaudu ja integreerida siis teine võrrand.

Üldjuhul on selline arvutus väga raskesti läbiviidav võrrandite keerukuse tõttu.

Meie piirdume vaid sellega, et vaatleme voolujooni xz - tasandis selle juhu jaoks kui voolujooned teises keskkonnas on sirged.

Siis $\delta + \varphi + \gamma = 0$ ning $A_y = \frac{n A_p}{\sqrt{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}} = C A_p$.

Võrrand (58) lihtsustub nüüd mõnevõrra:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\cot\theta}{4} \cdot \frac{[\sin 2(k'\cos\theta z - \gamma) + c^2 \sin 2(k'\cos\theta z + \varphi)]\sin 2(\tau - \gamma)}{\sin^2(k'\cos\theta z - \gamma)\sin^2(\tau - \gamma) + c^2\cos^2(k'\cos\theta z + \varphi)\cos^2(\tau - \gamma)} .$$

Teisendades seda võrrandit leiame:

$$\cot^2\theta \sin\gamma \sin\beta\, d\beta + \{[\cos\gamma + A']\cos\beta + B\cos\gamma + D\sin\gamma + A\}\, d\gamma = 0 . \qquad (60)$$

Siin $\gamma = 2(k'\cos\theta z - \varphi - \frac{\alpha}{2})$ ja $\tan\alpha = \frac{c^2 \sin 2\delta}{1 + c^2\cos 2\delta}$

$$\beta = 2(\tau - \gamma) = 2(\omega t - k'\sin\theta x - \gamma) .$$

Võrrandis (60) esinevad konstandid on järgmised:

$$A = \frac{1 + n^2}{1 - n^2} \qquad A' = \frac{n^2(1 + \cos^2\theta) - \sin^2\theta}{(1 - n^2)\sin^2\theta}$$

$$B = \frac{c^4 - 1}{1 + 2c^2\cos 2\delta + c^4} \qquad D = \frac{2c^2 \sin 2\delta}{1 + 2c^2\cos 2\delta + c^4} .$$

Avaldisest (45) leiame:

$$\cos 2\delta = \frac{\cos^2\theta(\sin^2\theta - n^2) - \sin^4\theta}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}$$

$$\sin 2\delta = -\frac{2\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta} .$$

Integreerivaks teguriks võrrandile (60) on:

$$\mu = \frac{1}{\sin^{\nu}\gamma/2 \cdot \cos^{2\rho-\nu}\gamma/2} , \qquad (61)$$

Kus algsuurustest sõltuvad konstandid ρ ja ν on määratud järgmiselt:

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{\cos^2\theta} \\ \nu = \frac{1 + n^2}{1 - n^2} \end{cases} . \qquad (62)$$

Näeme ka, et $A = \nu$. Korrutame võrrandit (60) (61)-ga ja asume saadud täisdiferentsiaali u integreerimisele.

$$u = -\cot^2\theta \frac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin^{\nu}\gamma/2\cos^{2\rho-\nu}\gamma/2} + f(\gamma) . \qquad (63)$$

$f(\gamma)$ määrame võrrandist

$$f'(\gamma) = \frac{B\cos\gamma + D\sin\gamma + s}{\sin^{s}\gamma/2 \cdot \cos^{2p-s}\gamma/2} \quad . \tag{64}$$

Selle võrrandi integreerimiseks tuleb valida konkreetne langemisnurk ja murdumisnäitaja. Olgu näiteks $\theta = 45°$ ja $n = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Sel juhul $B = 0$, $D = -1{,}73$, $s = 2$ ja $p = 2$. Arvutused näitavad ka, et $\gamma + \frac{\alpha}{2} = 0$.

Voolujooni vaatleme mingil konkreetsel ajamomendil $t_2 = \frac{\chi}{\omega}$.

Vastavalt sellisele olukorrale toome sisse uued muutujad ξ ja η järgmiste seoste alusel.

$$\begin{cases} \xi = k'\sqrt{2}\, x \\ \eta = -k'\sqrt{2}\, z \end{cases} \quad . \tag{65}$$

Seejuures η võtame miinusega, kuna esimeses keskkonnas z on negatiivne. Siis η tuleb positiivne, mis on arvutustehniliselt mugavam.

Saame

$$f'(\eta) = \frac{1{,}73\sin\eta + 2}{\sin^2\eta/2 \cdot \cos^2\eta/2} \quad .$$

Integreerides leiame:

$$f(\eta) = 4 \cdot 1{,}73 \int \frac{d\eta}{\sin\eta} + 8 \int \frac{d\eta}{\sin^2\eta} \quad .$$

$$f(\eta) = 4 \cdot 1{,}73 \ln\tan\eta/2 - 8\cot\eta + \text{const} \quad . \tag{66}$$

Voolujoonte võrrand on:

$$\frac{\sin\eta\cos\xi}{\sin^2\eta/2 \cdot \cos^2\eta/2} + 4 \cdot 1{,}73 \ln\tan\eta/2 - 8\cot\eta = \text{const} \quad .$$

Seda lihtsustades leiame:

$$\cos\xi = c'\sin\eta - 1{,}73\sin\eta \ln|\tan\eta/2| + 2\cos\eta \quad , \tag{67}$$

kus C' on meelevaldne konstant.

Nende voolujoonte kuju on näidatud töö lõpul joonisel V.

Nagu näeme ka esimeses keskkonna sel juhul voolujooned on

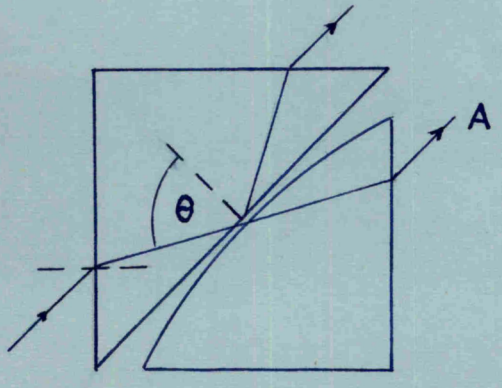
lihtsad ja kaunis lamedad. Lahutuspinnal, kus $c' = -\infty$, on voolujooneks sirge. Selle lähemas naabruses voolujooned "asümptootiliselt" lähenevad sirgetele. Edasi voolujooned on kõverad, kuni lähenedes $\varphi = \pi$ -le, millele vastab $c' = +\infty$, muutuvad jällegi sirgeteks. Vahemikus $\pi < \varphi < 2\pi$ on voolujooned põhiliselt sama iseloomuga, ainult kumerusega allapoole. $\varphi = 2\pi$ kohal on voolujooneks jällegi sirge.

Peatükk VII

Katselised kinnitused energia tungimise kohta teise keskkonda täieliku sisepeegeldumise korral.

See fakt, et täieliku sisepeegeldumise korral energia tungib optiliselt hõredamasse keskkonda, oli tegelikult teada juba ammu.

Esimesena teostas sel alal katseid Newton. Tema katses oli võetud kaks täisnurkset kolmetahulist prismat, mis puutusid kokku oma diagonaaltahkudega. Ühe prisma diagonaaltahk oli sfääriline (vt.joonis nr.6). Kohtades, kus prismad ei puutu teineteise külge, leiab aset täielik sisepeegeldumine. Kokkupuutekohas võib aga valgus vabalt pääseda teise prismasse. Seetõttu vaadates prismade kokkupuutekohale peegeldunud kiire poolt, näeme tumedat laiku heledal foonil.



Joonis nr.6.

Newton märkas, et tumeda laigu suurus sõltub langemisnurgast. Hiljem selgus, et see sõltub energia teise keskkonda tungimise sügavusest.

Hiljem kordas Newtoni katseid täiuslikumal kujul Quincke. Ta jälgis prismade kokkupuutepinda suunas A (joonis nr.6). Siis näeme heledat laiku tumedal foonil. Hele laik tekib valguse pääsemise tõttu teise keskkonda kokkupuutepunkti kaudu ja ta

läheduses asuva piirkonna kaudu, kus vahe prismade diagonaaltahkude vahel on väiksem kui sügavus, milleni tungib valgus teise keskkonda.

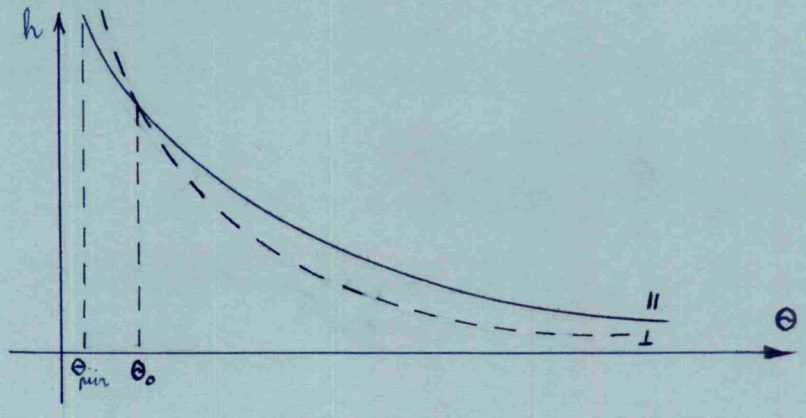
Selleks, et veenduda energia tungimises teise prismasse mitte ainult kokkupuutepunktis, tuleb prismad veidi eemaldada teineteisest, st. likvideerida kokkupuutepunkt, nagu seda Quincke tegigi. Seejuures tume laik, mida Newton märkas kaob, hele aga säilib.

Hele laik omas ellipsi kuju ja sellest võis leida ka kui sügavale valgus teise keskkonda tungib. Mõõtes heleda laigu suure pooltelje (2ρ), saame valguse teise keskkonda tungimise sügavuse jaoks avaldise

$$h = \frac{\rho^2}{2R},$$

kus R on teise prisma sfäärilise tahu kõverusraadius. Quincke avastas ka h sõltuvuse langemisnurgast, samuti leidis ta, et sama langemisnurga korral h oleneb oluliselt langeva valguse polarisatsioonist.

h valguse jaoks, mis on polariseeritud langemistasandis, alul nurkade puhul, mis on veidi suuremad kui täieliku sisepeegeldumise piirnurk, on väiksem kui valguse korral, mis on polariseeritud langemistasandiga risti. Kuid langemisnurga kasvuga see vahe muutub üha väiksemaks, kuni mingisugusest nurgast Θ_0 suuremate väärtuste korral muutub negatiivseks. Vastavad kõverad on näidatud joonisel nr.7.



Joonis nr.7.

Tekib küsimus, millest see efekt on tingitud. Asi seisab selles, et valguse teise keskkonda tungimise sügavus oleneb

energiavoo intensiivsusest teises keskkonnas (sellest on lähemalt juttu VIII peatükis). Nurk Θ_0 peab vastama sellele olukorrale, kui teises keskkonnas langemistasapinnas ja sellega risti polariseeritud valguse energiavoogude intensiivsused on võrdsed samadel sügavustel.

See tähendab, me otsime sellist Θ_0 -i, mille korral

$$\frac{W_{\perp}^{(x)}}{W_{\parallel}^{(x)}} = 1 \,, \tag{68}$$

kus $W_{\perp}^{(x)}$ ja $W_{\parallel}^{(x)}$ on antud valemeis (75).

$$\frac{W_{\perp}^{(x)}}{W_{\parallel}^{(x)}} = \frac{\sin^2\Theta_0 - n^2\cos^2\Theta_0}{n^2} \cdot \left(\frac{A_p^2}{A_y^2}\right) = 1 \,.$$

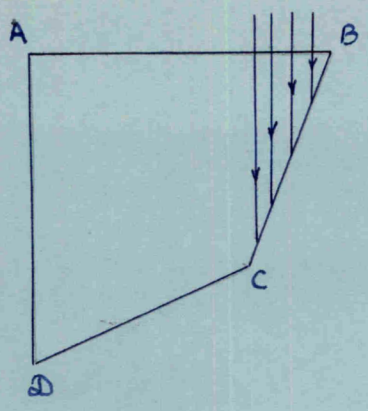
Teeme nüüd $A_p = A_y$, siis $\sin^2\Theta_0 - n^2\cos^2\Theta_0 = n^2$, kus leiame:

$$\Theta_0 = \arccos\sqrt{\frac{1-n^2}{1+n^2}} \,. \tag{69}$$

Kahjuks autoril ei ole olnud võimalust selle valemi õigsust kontrollida Quincke katsete täpsete tulemuste abil, kuid olemasolevate andmete kohaselt ühtib (69)-st arvutatud Θ_0 kaunis hästi Quincke töödes saadud Θ_0 väärtusega.

Edaspidi korraldas ühe katse Voigt, püüdes seega kinnitada oma teooriat, kuid viimane osutus ekslikuks. Nagu juba märgitud, ta arvas, et teises keskkonnas on olemas kaks kiirt, üks levib langemistasapinnaga risti ja kujutab endast ristlainetust, teine kiir aga, mis levib piki lahutuspinda, pidavat kujutama endast pikilainetust. Selle vaate ekslikkust tõestas veenvalt Eichenvald. Ja üldse ei saa ju vaadelda lahutuspinnaga paralleelselt levivat kiirt iseseisva kiirena. Ta on ainult valguse liikumistee teises keskkonnas projektsioon lahutuspinnale.

Voigt kasutas prismat, mille tahud BC ja CD moodustasid omavahel nürinurga (joonis nr.8). Kui nüüd valgus langeb läbi tahu AB ja tahul BC toimub täielik sisepeegeldumine, siis Voigt'i arvates BC -ga paralleelselt leviv pikilainetustega kiir peab punktis C prismast väljuma ja serv C peaks helenduma. Selline efekt tegelikult avastatigi, kuid nagu näitas



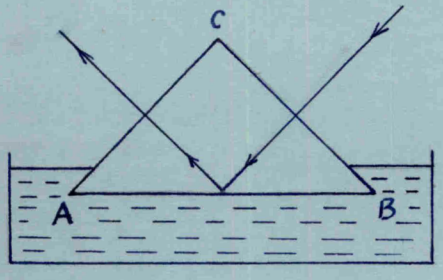
Joonis nr.8.

Ketteler, on see tingitud hoopis difraktsioonist.

Eichenvaldi teooria kontrollimiseks korraldasid katseid Schaefer ja Gross, kes kasutasid selleks parafiinprismasid ning elektromagnetilisi laineid pikkusega 15 cm.

Neil olid mõlema prisma tahud tasapinnalised ning tahkude vahelist kaugust võis muuta mikromeeterkruviga. Peegeldunud ja teise keskkonda tunginud kiirguse intensiivsusi mõõdeti termoelemendiga. Need katsed kinnitasid täiesti Eichenvaldi teooriat. Peegeldunud kiirguses puudus just see osa intensiivsusest, mis täieliku sisepeegeldumise tõttu sai võimaluse tungida teise keskkonda. Teoreetilised ja eksperimentaalsed kõverad ühtisid suurepäraselt.

Tuntud nõukogude füüsik L.J.Mandelstamm korraldas originaalse katse, kus samuti ilmneb energia tungimine optiliselt hõredamasse keskkonda. Mandelstamm kasutas klaasist prismat, mis oma tahuga AB oli paigutatud fluorestseeruvasse vedelikku (joonis nr.9). Lastes läbi tahu BC valguse prismasse nii, et tahul AB toimuks täielik sisepeegeldumine, siis ilmneb, et õhukeses pinnakihis tahu AB all vedelik hakkab fluorestseeruma, kuna osa langeva valguse energiast tungib optiliselt hõredamasse keskkonda.



Joonis nr.9.

See katse pani ka aluse vaadeldava efekti praktilisele kasutamisele, kuna selle katseskeemi abil on võimalik saada valgusallikat, mis asub lahutuspinnast kaugusel, mis on lainepikkuse suurusjärgus.

F.S.Barõšanskaja uuris fluorestsentsi kontsentratsioonilist

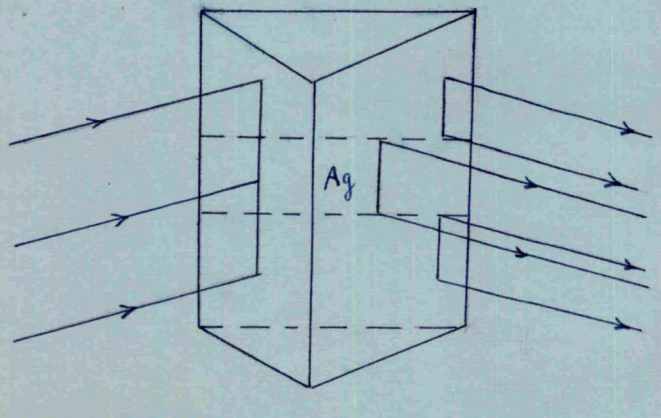
kustutamist vedelikukihis, mille paksus oli võrreldav valguslaine pikkusega, kasutades Mandelstammi katseseadet. Tuli ainult horisontaalse lõikega eemaldada prisma ülemine osa ja nüüd oli lihtne fluorestsentskiirgust süsteemist välja juhtida ning spektrofotomeetri pilule koondada. Tuleb üldse märkida, et täieliku sisepeegeldumisega seotud efektide kasutamine avab laialdased võimalused uute huvitavate katsete korraldamiseks mitmesugustes optika harudes.

Mandelstammi katsele analoogseid uurimusi korraldati ka sel teel, et tahk AB kaeti fotoemulsiooniga. Vaadeldav efekt oli sama.

Tuleb aga tähele panna seda, et kirjeldatud katsetes meie ei saa uurida täielikku sisepeegeldumist n.ö. "puhtal" kujul. Nendes katsetes mitte kogu energia, mis läks teise keskkonda, ei tule sealt tagasi. Osa temast, näiteks Mandelstammi katses, kulutatakse vedeliku molekulide kiirgamisele ergutamiseks. Nagu näitas aga Eichenvald energia olles "sukeldunud" teise keskkonda, väljub täielikult. See tähendab, et sisepeegeldumine on tõepoolest "täielik".

Nende puuduste kõrvaldamise võimalikkusele osutasid Goos ja Hänchen, kes korraldasid ka vastava katse.

Nad kasutasid ära selle, et täieliku sisepeegeldumise korral kiir väljub teisest keskkonnast mitte selles kohas, kus ta lahutuspinnale langes, nagu nägime juba varem. Selle nihke uurimine ongi Goos'i ja Hänchen'i töö eesmärgiks.



Joonis.nr.10.

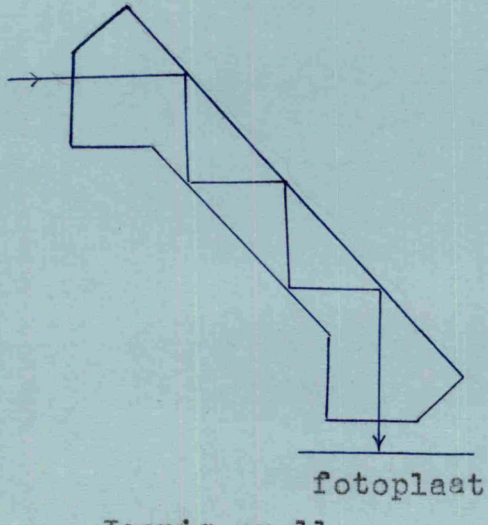
. Olgu meil klaasist prisma, mille ühele tahule on kantud hõbeda kiht. Kui nüüd valguskimp langeb sellele prisma tahule nii, et toimub sisepeegeldumine nii lahutuspinnal"klaas-õhk" kui ka "klaas-hõbe", siis oletades, et lahutuspinnal "klaas-hõbe" toimub otsene peegeldumine - näeme järgmist (vt. joonis nr.10). Ülal- ja all-

pool hõbedakihti tungib valgus õhku tehes seal teatud tee, tungib prismasse jälle tagasi ning väljub nihkega. Hõbedalt peegeldunud valguse kimp aga ei nihku. Tegelikult tungib energia ka hõbedasse, kuid katsetingimused olid nii valitud, et nihe hõbedalt peegeldumisel oli üliväike. Katses on meil aga tegemist nihete "klaas-õhk" ja "klaas-hõbe" vahega. Pilt on järgmine:



Langev valgus Peegeldunud valgus

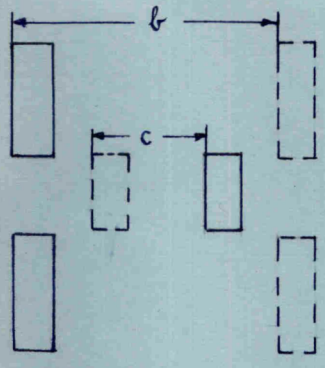
Kuna aga sel viisil saadav nihe on liiga väike, siis kasutati korduvat peegeldumist tasaparalleelses plaadis, mille otstesse olid kleebitud prismad (vt.joonis nr.11). Mõlemal plaadi küljel olid hõbedaribad. Raskusi pakub aga see, et hõbedalt peegelduva kiire intensiivsus kahaneb liiga kiiresti ja korduvate peegelduste tõttu osutub üliväikeseks. Nagu varem nägime, nihke suurus on võrdeline lainepikkusega, mida kasutatigi.



Joonis nr.11

Goos ja Hänchen mõõtsid nihkumist erinevate lainepikkustega valguskiirte vahel, mida nad nimetasid diferentsiaalmeetodiks. Nüüd puudub vajadus hõbeda kasutamiseks.

Olgu näiteks langevas valguses kollane valgus üleval ja all, keskel aga sinine. Siis väljudes prismast valguskimp omab kuju nagu on näidatud joonisel nr.12 vasakul, kusjuures punktiiriga on näidatud sinise valguse piirkond. Kui vahetame värvide asukohad langevas valguses, siis saame pildi, mis on kujutatud joonisel nr.12 paremal. On selge, et mõõdetav nihe on kahekordne sellest nihkest, mis on põhjustatud lainepikkuste erinevusest.



Joonis nr.12.

See tähendab

$$2\Delta\mathfrak{D} = b - c \,,$$

kus b ja c on näidatud joonisel. Goos'i ja Hänchen'i katse esialgsed tulemused ei läinud kokku teooriaga, kuid hiljem nende poolt uuesti hoolikamalt korraldatud katsed olid teooriaga heas kooskõlas. Paralleelselt katsetega täiendati teooriat Artmann'i ja Fragstein'i poolt. Tähtis on nimelt see, et teooria senini oli antud lõpmatu langeva tasapinnalise laine korral, katsetes aga meil on alati tegemist lõplike valguskimpudega.

Selleks, et tuletada nihke valemeid lõplike valguskimpude korral, tuli aga Artmannil arvestada difraktsiooninähtusi, mille tõttu arvutused muutusid matemaatiliselt keerulisteks ja kohmakaiks. Fragstein kasutas eeldust, et amplituud kimbu lõikes ei jää konstantseks. Pealegi nende poolt saadud valemid nihke jaoks kehtivad ainult siis, kui langemisnurk erineb vähe täieliku sisepeegeldumise piirnurgast.

Väga lihtsa meetodi nende nihete arvutamiseks andis P.G. Kard (TRÜ), mida järgnevalt vaatlemegi.

Peatükk VIII

P. G. Kard'i teooria.

Nii Artmann, kui ka Fragstein saavad nihete jaoks samad valemid

$$\mathfrak{D}_{\perp} = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{n}{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \,. \qquad (70)$$

$$\mathfrak{D}_{\parallel} = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{1}{n\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \,. \qquad (71)$$

Need valemid kehtivad vaid langemisnurkade korral, mis on lähedased täieliku sisepeegeldumise piirnurgale.

$\mathfrak{D}$ -tähendab nihet suunas, mis on risti valguskiirele. Indeksid $\perp$ ja $\parallel$ tähendavad langeva valguse lineaarset polarisatsiooni vastavalt risti langemistasapinnaga ja paralleelselt temaga.

Neist valemeist näeme ka, et nihked olenevad langeva valguse polarisatsioonist.

Teised autorid jätavad vaatlusest välja selle olulise fakti, et kiirte nihked täieliku sisepeegeldumise korral olenevad ka energiavoo intensiivsusest teises keskkonnas. See tõsiasi on kogu P.G.Kard'i teooria aluseks ja lihtsustab tunduvalt ülesande lahendamist ning saadud tulemus on ka palju üldisem kui Artmannil ja Fragsteinil.

Nagu nägime, väli kahaneb teises keskkonnas eksponentsiaalselt kaugenemisega lahutuspinnast vastavalt tegurile $e^{-\varkappa z}$, kus

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda_1}\sqrt{\sin^2\theta - n^2}\,.$$

Suurust $1/\varkappa$ loetigi valguse teise keskkonda tungimise sügavuseks. See ei saa aga juba seepärast õige olla, et $\varkappa$ ei olene langeva valguse polarisatsioonist, kuid nagu teada selline olenevus on just olemas.

A.A.Korobko-Stefanov /2/ -s arvab, et see vastuolu tuleb sellest, et teooria on antud lõpmatu tasapinnalise laine jaoks, katsed aga teostatakse piiratud valguskimpudega. P.G.Kard oma tööga tõestab selle väite ekslikkust.

Võtame nüüd Poynting-Umovi vektori x komponendist keskväärtuse aja järgi

$$\overline{S_\perp^{(x)}} = \frac{c n_1 \sin\theta\cos^2\theta}{2\pi(1-n^2)} \cdot A_y^2 \cdot e^{-2\varkappa z}\,, \qquad (72)$$

kui valgus on polariseeritud risti langemistasapinnaga ja

$$\overline{S_\parallel^{(x)}} = \frac{c n_1 n^2 \sin\theta\cos^2\theta}{2\pi(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)} \cdot A_p^2 \cdot e^{-2\varkappa z}\,, \qquad (73)$$

kui valgus on polariseeritud langemistasapinnas.

Kui nüüd võtta teises keskkonnas pinnatükk risti $\varkappa$ teljega, siis energia hulk, mis läheb keskmiselt ajaühikus läbi selle pinnatüki avaldub:

$$W^{(x)} = \int_0^\infty \overline{S^{(x)}}\, dz \,, \tag{74}$$

kuna

$$\int_0^\infty e^{-2\varkappa z}\, dz = \frac{1}{2\varkappa} \,,$$

siis saame:

$$\begin{cases} W_{\parallel}^{(x)} = \dfrac{c n_1 \lambda_1 \sin\theta \cos^2\theta\, n^2 A_r^2}{8\pi^2 (1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \\ W_{\perp}^{(x)} = \dfrac{c n_1 \lambda_1 \sin\theta \cos^2\theta\, A_y^2}{8\pi^2 (1-n^2)\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \end{cases} \tag{75}$$

Edasi tuleks leida langeva valguskimbu selline laius $\mathfrak{D}$, mis tooks kaasa sama energiahulga.

Langevas valguses Poynting-Umovi vektori absoluutväärtuse keskväärtus avaldub vastavalt

$$\frac{c n_1}{8\pi} \cdot A_y^2 \qquad \text{või} \qquad \frac{c n_1}{8\pi} \cdot A_r^2 \,.$$

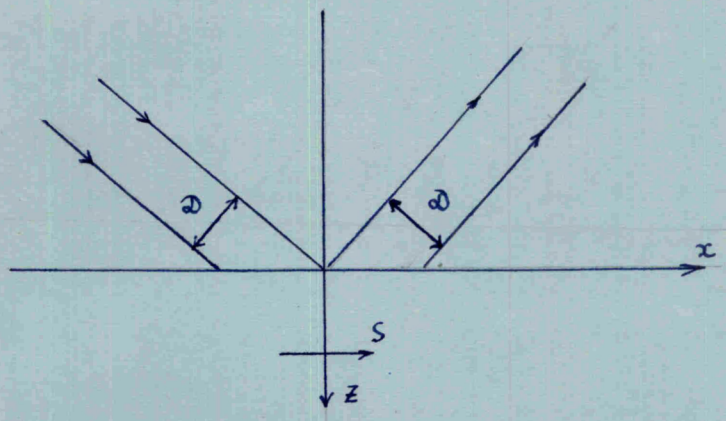
Otsitud nihete avaldiste saamiseks tuleb valemid (75) vastavalt jagada nende avaldistega. Siis saame:

$$\mathfrak{D}_{\perp}^{(x)} = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{\sin\theta \cos^2\theta}{(1-n^2)\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \,. \tag{76}$$

$$\mathfrak{D}_{\parallel}^{(x)} = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{n^2 \sin\theta \cos^2\theta}{(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \,. \tag{77}$$

Edasi ütleb P.G.Kard: "Kuna energia hulk, mis on sellise laiusega valguskimbus, voolab läbi teise keskkonna lõike, siis olles peegeldunud, see kimp peab asuma täielikult teisel pool

lõiget". Nagu näha jooniselt nihke suurus iga valguskiire jaoks just võrdubki selle laiusega. P.G.Kard töob järgneva joonise:



Joonis nr.13.

Viimati esitatud mõttekäik kannatab teatud formaalsuse all ja on seetõttu leidnud vastuväiteid, kuid see on väheoluline ning kergesti kõrvaldatav puudus.

Nagu, näha, kiirte nihkumine toimub juba lõpmatu langeva tasapinnalise laine korral. See on muidugi loomulik. Kuid selleks, et mõõta kiirte nihet, tuleb kasutada piiratud valguskimpu.

P.G.Kard toob selle väite seletamiseks ühe huvitava analoogia: tegemist on umbes taolise juhuga nagu energia liikumiskiiruse mõõtmise korral absoluutselt monokromaatilises laines, mis pole võimalik, kuigi energia seal kahtlemata liigub.

Kui langev valguskimp on küllalt lai, siis P.G.Kardi arvates võib ääre- ja difraktsiooninähtused jätta vaatlusest välja ja valemeid (76) ning (77) rakendada otseselt katsetulemustele. See väide näib olevat täiesti põhjendatud, kuna nihete suurused on tegelikult kaunis väikesed, nii et ka küllalt kitsa valguskimbu korral suurem osa kiirtest teevad läbi "segamata" nihke.

Kui asendada valemeis (76) (77) $\sin\Theta \approx n$, siis saame Artmann'i valemid (70) ja (71). Näeme, et P.G.Kardi poolt saadud avaldised nihete jaoks on palju üldisemad kui Artmann'i omad, kuna nad kehtivad ka siis, kui $\sin\Theta$ oluliselt erineb n -st.

Sama meetodiga tuletame nüüd nihke avaldise elliptilise polarisatsiooni jaoks.

Arvestades, et

$$\overline{S_x} = \frac{c n_1 \sin\theta \cos^2\theta}{2\pi(1-n^2)} \cdot e^{-2\varkappa z} \left[A_y^2 + \frac{n^2 A_p^2}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta} \right]$$

ja

$$\overline{W_x} = \frac{\lambda_1 n_1 c \sin\theta \cos^2\theta}{8\pi^2(1-n^2)\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \cdot \left[A_y^2 + \frac{n^2 A_p^2}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta} \right],$$

leiame nihke avaldise jagades $\overline{W}_x$ -i $\frac{c n_1}{8\pi}(A_y^2 + A_p^2)$ -ga

$$D_x = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{(1-n^2)\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \cdot \frac{A_y^2 + \frac{n^2 A_p^2}{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}}{A_y^2 + A_p^2} \quad . \tag{78}$$

Kui $\sin\theta \approx n$, siis see valem saab järgmise kuju:

$$D_x = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{n}{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \cdot \frac{A_y^2 + \frac{A_p^2}{n^2}}{A_y^2 + A_p^2} \quad . \tag{79}$$

Nagu näha peatükk IV tulemustest, peab aset leidma ka nn. y -nihe ristuvas suunas langemistasapinnaga.

Selle nihke teised autorid "unustavad" ära. Näiteks arvab M.Born oma "Optikas", et Poynting-Umovi vektori y -komponent "loomulikult kaob". See on muidugi viga.

Kui loobuda kirjutamise lihtsustamiseks tarvitatud φ ja ψ definitsioonidest valemeis (27), siis saame:

$$S_y = \frac{c n_1 A_p A_y \sin\theta \cos^2\theta \sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\pi(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)} (\sin^2\theta \sin\delta - \cos\theta\cos\delta\sqrt{\sin^2\theta - n^2})\, e^{-2\varkappa z} \quad . \tag{80}$$

P.G.Kard leiab eeltoodud meetodil y -nihke jaoks järgneva avaldise:

$$D_y = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{2\sin\theta\cos\theta}{(1-n^2)(\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta)} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha^2} (\sin^2\theta\sin\delta - \cos\theta\cos\delta\sqrt{\sin^2\theta - n^2}) \quad , \tag{81}$$

kus

$$\alpha = \frac{A_p}{A_y} \quad . \tag{82}$$

Fikseerides θ on D_y maksimum $\alpha = 1$ juures, ning

$$\tan\delta = -\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta - n^2}},$$

see tähendab just sellise δ korral nagu oli siis, kui voolujooned IV peatükis muutusid sirgeteks. Kuid siiski täiesti tolle juhuga meil tegemist ei ole, kuna amplituudide jaoks tingimused on siin teistsugused.

Siis

$$D_{y,max} = \frac{\lambda_1}{\pi}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{(1-n^2)\sqrt{\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta}}. \qquad (83)$$

Suurimat väärtust omab see kui $\sin\theta \approx n$, siis

$$D_{y,max} = \frac{\lambda_1}{\pi}\cdot\frac{1}{n\sqrt{1-n^2}}. \qquad (84)$$

Kuna aga y-nihe on tunduvalt väiksem kui x-nihe, siis on teda eksperimentaalselt avastada tõenäoliselt palju raskem.

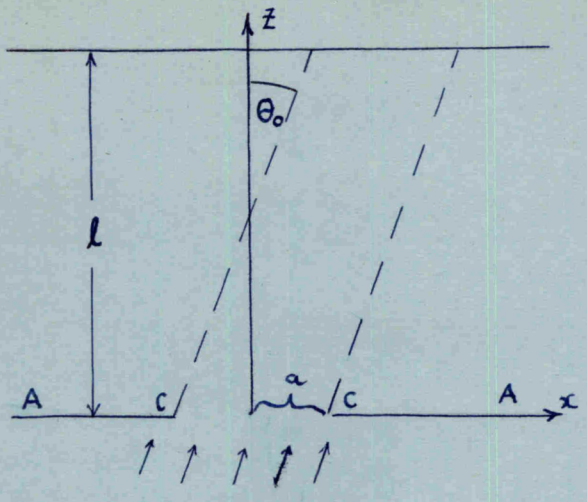
Peatükk IX

L. M. Brehovskih'i teooria.

Tähtis on ka L.M.Brehovskih'i teooria, mis on üks uusimaid. Tema teooria on teatud mõttes sarnane Artmann'i omaga, kuid palju lihtsam. Brehovskih uurib piiratud lainekimpu, esitades selle tasapinnaliste lainete superpositsioonina. Huvitavaid tulemusi sai Brehovskih ultraheli- ja impulssite peegeldumise jaoks, kuid siin ei ole võimalik sellel peatuda.

Vaatleme nüüd lähemalt Brehovskih'i nihete teooriat. Langegu peegeldavale pinnale valguskimp nurga θ_0 all. Lõlik valguskimp saadakse sel teel, et ekraan AA, milles on ava CC, laiusega $2a$, lõikab langevast lõpmatust lainest välja ühe osa, mille geomeetrilised mõõtmed on joonisel nr.14. näidatud punktiiriga. Tegelikult difraktsiooni tõttu kimp veidi hajub. Probleemi vaadeldakse tasapinnalisena, st. ava vaadeldakse lõp-

matuna ja laine langemistasapinda ristuvana peegeldava pinnaga.



Joon.nr.14.

Koordinaattelgede asend on näidatud joonisel nr.14.

Ekraanile langeva laine väli olgu:

$$\Psi = e^{i(\alpha x + \gamma z) - i\omega t}, \qquad (85)$$

kus $\alpha = \kappa' \sin\theta_0$

ja $\gamma = \kappa' \cos\theta_0$.

Kui ekraan on läbipaistmatu, siis Ψ peab rahuldama järgmist ääretingimust:

a) teisel pool ekraani on väli null,

b) avause kohal on väli selline nagu ekraani ei oleks.

Siis $z=0$ juures, ja jättes ära teguri $e^{-i\omega t}$, saame Ψ jaoks tingimused:

$$\begin{cases} \Psi(x) = e^{i\alpha x} & -a \le x \le a \\ \Psi(x) = 0 & |x| > a \end{cases} \qquad (86)$$

Sobiv on probleemi veidi üldistada, oletades, et ekraan võib olla muutliku läbipaistvusega, siis

$$\Psi(x) = F(x)\, e^{i\alpha x} \qquad -\infty < x < +\infty ,$$

kus $F(x)$ kujutab amplituudi jaotust ekraani tasapinnas.

Nüüd esitame välja ekraani tasapinnas Fourier integraali abil:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\rho)\, e^{i\rho x}\, d\rho , \qquad (87)$$

kus

$$\phi(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\, e^{-i\rho x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{i(\alpha-\rho)x}\, dx . \qquad (88)$$

Meie probleemi algseade kohaselt

$$\begin{cases} F(x) = 1 & -a \le x \le a \\ F(x) = 0 & |x| > a \end{cases} .$$

Ja

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{i(\alpha-\rho)x}\,dx = \frac{\sin(\alpha-\rho)a}{\pi(\alpha-\rho)} \quad . \tag{89}$$

$\Phi(\rho)$ omab märgatavaid väärtusi vaid siis, kui vahe $\alpha - \rho$ on väike, st. $a(\alpha-\rho) \leq 1$.

Konstrueerides funktsiooni

$$\Psi(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\rho)\, e^{i(\rho x + \mu z)}\,d\rho \quad , \tag{90}$$

kus

$$\mu = \sqrt{\kappa'^2 - \rho^2} \quad ,$$

näeme, et $\Psi(x,z)$ esitab langeva kimbu välja ekraani ja peegeldava pinna vahel, kuna ta rahuldab lainetusvõrrandit

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \kappa'^2\Psi = 0$$

ja kohal $z = 0$ läheb üle $\Psi(x)$ -ks, st. rahuldab ääretingimust.

Eksponent (90)-s kujutab tasapinnalist lainet, mis levib suunas

$$\theta = \arcsin\frac{\rho}{\kappa'} \quad . \tag{91}$$

Langeva kimbu esitus tasapinnaliste lainete superpositsioonina ongi (90).

Kui $\rho > \kappa'$, siis θ tuleb kompleksne ja superpositsioonis esinevad ka heterogeensed lained, kuid nende amplituudid kahanevad kiiresti kaugenemisega avast, nagu näha $e^{i\rho x - \sqrt{\rho^2-\kappa'^2}\,z}$ - st.

Suurimat tähtsust omavad lained, millede levimise suund vähe erineb θ_0 -st.

Tingimus $(\alpha-\rho)a \leq 1$, kuna $\rho = \kappa' \sin\theta$, saab nüüd kuju

$$a\kappa'(\sin\theta_0 - \sin\theta) \leq 1$$

ja kuna $\theta \approx \theta_0$

$$\theta_0 - \theta \leq \frac{1}{a\kappa'\cos\theta_0} \quad .$$

Kimbu ristlõige $a\cos\theta_0$ peab olema palju suurem lainepikkusest, st. $ak\cos\theta_0 \gg 1$, järelikult $\theta_0 - \theta \ll 1$.

Tähistame nurga θ all langeva laine peegelduskoefitsiendi $v(\theta)$, mis on üldiselt kompleksne. Tema mooduli ruut annab energia peegeldumise koefitsiendi; argument-faasimuutuse peegeldumisel.

Seega

$$v(\theta) = \rho(\rho)\, e^{i\chi(\rho)} . \tag{92}$$

Lahutustasapinnal $z = \ell$ leiame:

$$\Psi_{lang.}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\rho)\, e^{i(\rho x + \mu \ell)}\, d\rho .$$

Brehovskih väidab, et peegeldunud laine välja saame sellest korrutades $v(\theta)$ -ga. Päris nii aga asi ei ole, kuna meil tuleb arvestada, et nüü laine levib z -telje negatiivses suunas ja eksponentsiaalteguris $+\mu\ell$ tuleb asendada $-\mu\ell$ -ga. Kuid see viga on väheoluline ja mõttekäiku ei muuda.

$$\Psi_{peeg.}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\rho)\rho(\rho)\, e^{i\chi(\rho) + i(\rho x - \mu\ell)}\, d\rho .$$

Ehk

$$\begin{cases} \Psi_{lang.}(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{i(\alpha-\rho)\xi + i(\rho x + \mu\ell)}\, d\rho\, d\xi \\ \Psi_{peeg.}(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\rho(\rho)\, e^{i\chi(\rho)} \cdot e^{i(\alpha-\rho)\xi + i(\rho x - \mu\ell)}\, d\rho\, d\xi . \end{cases} \tag{93}$$

Oletame, et $\rho(\alpha) = \text{const.}$ ja toome sisse suuruse

$$\Omega = \rho - \alpha . \tag{94}$$

Kuna tähtsad on vaid need funktsioonide väärtused, kus Ω on väike, siis $\chi(\rho)$ arendame ritta Ω järgi:

$$\chi(\rho) = \chi(\alpha) + \chi'(\alpha)\Omega + \tfrac{1}{2}\chi''(\alpha)\Omega^2 + \ldots , \tag{95}$$

kus piirdume vaid kahe liikmega.

Siis:

$$\begin{cases} \Psi_{langq.}(x) = \dfrac{e^{i\alpha x}}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\xi)\, e^{i\Omega(x-\xi) + i\sqrt{k'^2-(\Omega+\alpha)^2}\,\ell}\, d\xi\, d\Omega \\ \Psi_{peeg}(x) = \dfrac{v(\Theta_0)}{2\pi} e^{i\alpha x} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\xi)\, e^{i\Omega(x+\chi'(\alpha)-\xi) - i\sqrt{k'^2-(\Omega+\alpha)^2}\,\ell}\, d\xi\, d\Omega \end{cases} \tag{96}$$

Võrreldes neid avaldisi omavahel leiame:

$$\Psi_{peeg}(x) = v(\Theta_0)\, \Psi_{langq}[x + \chi'(\alpha)] .$$

Siit järgneb, et peegeldumisel kimp nihkub lahutuspinda mööda suuruse

$$\Delta = -\chi'(\alpha) \tag{97}$$

võrra.

Sellise Δ avaldise leidis esmakordselt Artmann, kuid palju keerulisemal teel.

Brehovskih märgib ka, et $\Delta - \ell$ pole midagi ühist Eichenvaldi poolt voolujoonte nihetest leitud kiire nihke suurusega, kuna Δ on leitud lõpliku kimbu jaoks. See Eichenvaldi avaldis õiget nihet muidugi ei kujuta, kuid see ei tähenda veel, et lõpmatu langeva laine korral ei saa leida õiget nihke avaldist, nagu nägime P.G.Kardi teoorias.

Rakendades seda teooriat täielikule sisepeegeldumisele leiab Brehovskih

kus $v_\perp = e^{i\chi_\perp}$ ja $v_\parallel = e^{i\chi_\parallel}$,

$$\chi_\perp = -2\arctan\frac{\sqrt{\sin^2\Theta - n^2}}{\cos\Theta}$$

$$\chi_\parallel = -2\arctan\frac{\sqrt{\sin^2\Theta - n^2}}{n^2\cos\Theta} .$$

Edasi toob ta valemi

$$\chi_\perp = -2\arctan\sqrt{\frac{\rho^2 - n^2}{1-\rho^2}},$$

mis on aga ilmne eksitus, kuna ρ^2 asemel peab olema $\frac{\rho^2}{k'^2}$. Nihke avaldise saamiseks tuleb seda differentsida ρ järgi ja teha $\Theta = \Theta_0$.

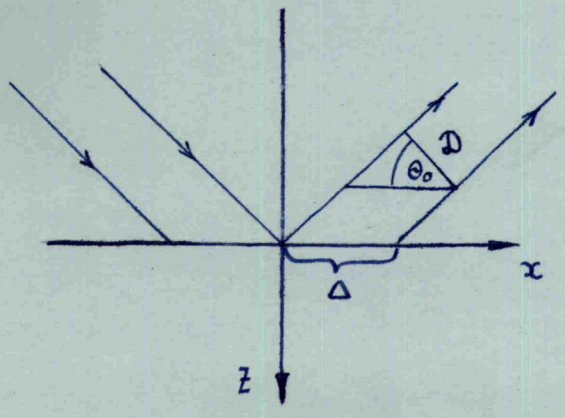
Brehovskih leiab langemistasapinnaga risti- ja langemistasa-

pinnas lineaarselt polariseeritud valguse jaoks vastavalt järgmised nihked:

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} = \dfrac{\lambda_1}{\pi} \cdot \dfrac{\tan\theta_0}{\sqrt{\sin^2\theta_0 - n^2}} \\ \Delta_{\parallel} = \dfrac{\lambda_1}{\pi n^2} \cdot \dfrac{\tan\theta_0}{\sqrt{\sin^2\theta_0 - n^2}} \end{cases} \qquad (98)$$

Need valemid on identsed Artmanni ja P.G.Kard'i avaldistega lineaarpolariseeritud valguse nihete jaoks kui $\sin\theta_0 \approx n$.

See, et avaldistes (98) lugejas on $\tan\theta_0$ tuleb sellest, et Brehovskih vaatleb nihet veidi teisiti kui oli meil varem, see on näidatud joonisel nr.15. Kui oleks vaadeldud nihet $\mathfrak{D}$, siis tangensi asemel tuleks siinus, seejuures $\sin\theta_0 \approx n$.



Joonis nr.15.

Peatükk X

L.M.Brehovskih'i teooria rakendamisvõimalustest elliptilise polarisatsiooni korral.

Käesolevas töös püüame rakendada Brehovskih'i meetodit elliptiliselt polariseeritud langeva valguse korral. Siis analoogselt eelmise peatükiga saame:

$$\Psi_{lang;\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{i(\alpha-\rho)\xi + i(\rho x + \sqrt{k'^2-\rho^2}\,\ell)}\, d\rho\, d\xi$$

$$\Psi_{lang;\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{i(\alpha-\rho)\xi + i(\rho x + \sqrt{k'^2-\rho^2}\,\ell) + i\delta}\, d\rho\, d\xi ,$$

Kus juures

$$E_p = A_p e^{i\omega t}\Psi_p \quad \text{ja} \quad E_y = |A_y| e^{i\omega t}\Psi_y .$$

Samuti:

$$\Psi_{peegi;p} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\xi)\rho_1(p)\, e^{i\chi_1(p)} \cdot e^{i(\alpha-p)\xi + i(px - \sqrt{\kappa'^2-p^2}\,\ell)}\, dp\, d\xi$$

$$\Psi_{peegi;y} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\xi)\rho_2(p)\, e^{i(\chi_2(p)+\delta)} \cdot e^{i(\alpha-p)\xi + i(px - \sqrt{\kappa'^2-p^2}\,\ell)}\, dp\, d\xi ,$$

kus χ_1 ja χ_2 on vastavalt langemistasapinnas ja sellega ristuva komponendi faasinihked ühekordsel sisepeegeldumisel.

Võtame $\mathfrak{R} = p - \alpha$, siis $\mathfrak{R}$ väiksuse tõttu arendame χ_1 ja χ_2 ritta $\mathfrak{R}$ järgi.

$$\begin{cases} \chi_1(p) = \chi_1(\alpha) + \chi_1'(\alpha)\mathfrak{R} + \dots \\ \chi_2(p) = \chi_2(\alpha) + \chi_2'(\alpha)\mathfrak{R} + \dots \end{cases} \tag{99}$$

Võttes ridades vaid kaks liiget leiame:

$$\begin{cases} \Psi_{langi;p} = \dfrac{e^{i\alpha x}}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\xi)\, e^{i\mathfrak{R}(x-\xi) + i\sqrt{\kappa'^2-(\mathfrak{R}+\alpha)^2}\,\ell}\, d\xi\, d\mathfrak{R} \\ \Psi_{langi;y} = \dfrac{e^{i\alpha x}}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\xi)\, e^{i\mathfrak{R}(x-\xi) + i\sqrt{\kappa'^2-(\mathfrak{R}+\alpha)^2}\,\ell + i\delta}\, d\xi\, d\mathfrak{R} \end{cases} \tag{100}$$

$$\begin{cases} \Psi_{peegi;p} = \dfrac{v_1(\theta_0)}{2\pi} e^{i\alpha x}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\xi)\, e^{i\mathfrak{R}(x+\chi_1'-\xi) - i\sqrt{\kappa'^2-(\mathfrak{R}+\alpha)^2}\,\ell}\, d\xi\, d\mathfrak{R} \\ \Psi_{peegi;y} = \dfrac{v_2(\theta_0)}{2\pi} e^{i\alpha x}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\xi)\, e^{i\mathfrak{R}(x+\chi_2'-\xi) - i\sqrt{\kappa'^2-(\mathfrak{R}+\alpha)^2}\,\ell + i\delta}\, d\xi\, d\mathfrak{R} \end{cases} \tag{101}$$

Võrreldes valemeid (100) ja (101) omavahel näeme:

$$\Psi_{peegi;p}(x) = v_1(\theta)\,\Psi_{langi;p}[x + \chi_1'(\alpha)]$$

$$\Psi_{peegi;y}(x) = v_2(\theta)\,\Psi_{langi;y}[x + \chi_2'(\alpha)] .$$

Neist valemeist näeme, et langeva valguse langemistasapinnas olev komponent saab sisepeegeldumisel nihke

$$\Delta_p = -\chi_1'(\alpha) \tag{102}$$

ja langemistasapinnaga ristuv komponent saab nihke

$$\Delta_y = -\chi_2'(\alpha) . \tag{103}$$

Tulemus on huvitav. Meie saame olukorra, kus p ja y komponent nihkuvad sisepeegeldumisel erinevalt, mille tõttu meie nihkunud kimbu asemel katses näeksime kaht nihkunud kimpu, millede vahel oleks tume ala. Sellist efekti Goos ja Hänchen olevatki märganud oma viimases töös, mis olevat ilmnenud loomuliku valge valguse kasutamisel, kuid neid katsetulemusi ei saa veel küllalt veenvaiks lugeda. Igatahes sel teel Brehovskih'i meetodi abil mingit üldist kimbu nihet elliptilise polarisatsiooni korral leida ei õnnestu. Vastupidi on aga olukord P.G. Kard'i teoorias, kus sellist nihkunud kiire lagunemist ei ole ja on olemas summaarne nihe, valem (78).

Vaatleme, millised on Δ_y ja Δ_p eelnevates peatükkides saadud tulemuste põhjal.

Valemitest (50) saame peegelduskoefitsientide jaoks

$$\begin{cases} r_1(\theta) = e^{-i(\pi+2\gamma)} \\ r_2(\theta) = e^{2i\varphi} \end{cases} . \qquad (104)$$

Järelikult $\frac{\chi_1}{2} = -\gamma - \frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\chi_2}{2} = \varphi$.

Valemitest (17) ja (18) saame:

$$\frac{\chi_1}{2} = \operatorname{arc\,tan} \frac{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{n^2 \cos\theta}$$

$$\frac{\chi_2}{2} = \operatorname{arc\,tan} \frac{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\cos\theta} .$$

Nihete jaoks saame siit identsed avaldised Brehovskih'i omadega:

$$\begin{cases} \Delta_p = \frac{\lambda_1}{\pi n^2} \cdot \frac{\tan\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \\ \Delta_y = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{\tan\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \end{cases} . \qquad (105)$$

Lihtsuse mõttes on siin θ_0 asemel kirjutatud θ .
Niisiis ka elliptilise polarisatsiooni korral p ja y komponendi nihked on samasugused kui vastava lineaarse polarisatsiooni korral. Elliptilise polarisatsiooni juures Brehovskih'i meetodi järgi tuleb aga välja nii, et korraga toimuvad mõlemad nihked teineteisest sõltumatult, kusjuures nagu eelpool seleta-

tud nihkunud valgusekimbu asemel saaksime kaks erineva nihke suurusega kimpu. Nimelt sama θ korral on $\Delta_p > \Delta_y$, kuna $n^2 < 1$.

Brehovskih'i meetodil saadud Δ_p ja Δ_y avaldistest võib formaalsel teel saada ka üldise nihke elliptilise polarisatsiooni korral, nagu saab seda P.G.Kard.

Loeme nihete vastavateks "kaaludeks" $\frac{A_p^2}{A_p^2 + A_y^2}$ ja $\frac{A_y^2}{A_p^2 + A_y^2}$, siis kui oletame, et summaarne nihe on

$$\mathcal{D}_x = \frac{A_p^2 \Delta_p + A_y^2 \Delta_y}{A_p^2 + A_y^2} = \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{n}{\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \cdot \frac{A_y^2 + \frac{A_p^2}{n^2}}{A_y^2 + A_p^2}, \tag{106}$$

saame kooskõla meie valemiga $\mathcal{D}_x$ jaoks kui $\sin\theta \approx n$ (valem (79)).

Siinjuures loomulikult Δ_p ja Δ_y avaldistes tuleb $\tan\theta$ asemel võtta $\sin\theta \approx n$.

Selliseks arvutuseks puudub aga Brehovskih'i teoorias igasugune füüsikaline alus, kuna sealt järgneb, et Δ_p ja Δ_y eksisteerivad sõltumatult.

Teeme nüüd veel ühe katse Brehovskih'i meetodi rakendamiseks elliptilise polarisatsiooni juhule.

Nimelt defineerime

$$E = A_y \cos(\tau + \delta) + i A_p \cos\tau, \tag{107}$$

kus $\tau = \omega t - \kappa'(\sin\theta x + \cos\theta z)$.

Püüame nüüd uurida sellise kompleksvektori nihet.

E -le saab anda järgmise kuju:

$$E = A e^{i\alpha_1} e^{i\tau} + B e^{i\alpha_2} \cdot e^{-i\tau}, \tag{108}$$

see juures

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}\sqrt{A_p^2 + A_y^2 + 2A_pA_y\sin\delta} \\ B = \frac{1}{2}\sqrt{A_p^2 + A_y^2 - 2A_pA_y\cos\delta} \end{cases} \tag{109}$$

ning

$$\begin{cases} \tan\alpha_1 = \frac{A_p + A_y\sin\delta}{A_y\cos\delta} \\ \tan\alpha_2 = \frac{A_p - A_y\sin\delta}{A_y\cos\delta} \end{cases}. \tag{110}$$

Analoogselt talitame peegeldunud välja E' jaoks.

$$E' = A_y \cos(\tau' + \delta + 2\varphi) + i A_\rho [\tau' - \pi - 2\gamma) , \tag{111}$$

kus $\tau' = \omega t - \kappa'(\sin\Theta x - \cos\Theta z)$.

Edasi:

$$E' = A' e^{i\beta_1} e^{i\tau'} + B' e^{i\beta_2} e^{-i\tau'} , \tag{112}$$

kus

$$\begin{cases} A' = \frac{1}{2}\sqrt{A_\rho^2 + A_y^2 - 2A_\rho A_y \sin(\delta + 2\varphi + 2\gamma)} \\ B' = \frac{1}{2}\sqrt{A_\rho^2 + A_y^2 + 2A_\rho A_y \sin(\delta + 2\varphi + 2\gamma)} \end{cases} \tag{113}$$

ning

$$\begin{cases} \tan\beta_1 = \dfrac{A_y \sin(\delta + 2\varphi) - A_\rho \cos 2\gamma}{A_y \cos(\delta + 2\varphi) - A_\rho \sin 2\gamma} \\ \tan\beta_2 = -\dfrac{A_y \sin(\delta + 2\varphi) + A_\rho \cos 2\gamma}{A_y \cos(\delta + 2\varphi) + A_\rho \sin 2\gamma} . \end{cases} \tag{114}$$

Rakendades nüüd Brehovskih'i teooriat E ja E' -le ja jättes ära $e^{i\omega t}$, saame

$$E = \frac{A}{2\pi} \cdot e^{-i\alpha x} \cdot e^{i\alpha_1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a} e^{-i\Omega(x+\xi)} \cdot e^{-i\sqrt{\kappa'^2 - (\Omega+\alpha)^2}\,\ell} \, d\rho\, d\xi +$$

$$+ \frac{B}{2\pi} e^{i\alpha x} e^{i\alpha_2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a} e^{i\Omega(x-\xi)} \cdot e^{i\sqrt{\kappa'^2 - (\Omega+\alpha)^2}\,\ell} \, d\rho\, d\xi$$

$$E' = \frac{A'(\theta_0)}{2\pi} e^{-i\alpha x} e^{i\beta_1(\theta_0)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a} e^{-i\Omega(x+\xi+\beta_1'(\rho))} \cdot e^{i\sqrt{\kappa'^2 - (\Omega+\alpha)^2}\,\ell} \, d\rho\, d\xi +$$

$$+ \frac{B'(\theta_0)}{2\pi} e^{i\alpha x} e^{i\beta_2(\theta_0)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a} e^{i\Omega(x-\xi+\beta_2'(\rho))} \cdot e^{-i\sqrt{\kappa'^2 - (\Omega+\alpha)^2}\,\ell} \, d\rho\, d\xi .$$

Nüüd võiks oletada, et $\beta_1'(\rho)$ annabki õige nihke avaldise ja $\beta_2'(\rho)$ samaaegselt annab samasuguse nihke avaldise, ainult vastasmärgiga. Nii tegelikult asi ongi, kui $A_\rho = A_y$, siis saame õige avaldise $\mathcal{D}_x$ jaoks. Kuid kui $A_\rho \neq A_y$ me õiget $\mathcal{D}_x$ -i ei saa.

Seega ka käesolev töö ei vii sihile. Muidugi tuleks sellist

mõttekäiku veel lähemalt põhjendada, kuid sellel meie enam ei peatu.

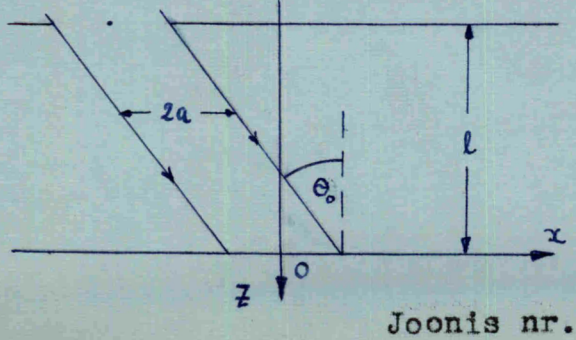
Üldse tuleb Brehovskih'i teooria puuduseks lugeda seda, et ta ei vaatle sugugi teist keskkonda, ega käsitle probleemi füüsikalist külge küllalt põhjalikult. Täieliku sisepeegeldumise mehanism esimeses ja teises keskkonnas on tihedalt seotud ja neid ei tohi vaadelda teineteisest lahtikistult. Samuti ei ütle Brehovskih'i teooria midagi χ -nihke kohta.

Tekib loomulikult küsimus, milline on siis Kardi ja Brehovskih'i teooriate vahekord, kumb on õige? Ühist on neil teooriatel niipalju, et lineaarne polarisatsiooni jaoks nad mõlemad annavad õige tulemuse, elliptilise polarisatsiooni korral on aga tulemused tunduvalt erinevad, hoolimata sellest, et formaalselt võiks tulemused kooskõlla viia. Vastuse sellele kumb teooria on õige, peab andma uuesti ja hoolikamalt korraldatud Goos-Hähcheni katse.

Peatükk XI

Difraktsiooni arvestamine P.G.Kard'i teoorias.

Rakendame P.G.Kard'i teooriat nihke avaldise leidmiseks eeldusel, et meil on tegemist lõpliku langeva valguskimbuga. Sõltuvalt sellest tuleb arvestada ka difraktsiooni. See probleem omab suurt tähtsust P.G.Kardi teooria õigsuse kontrollimisel. Tuleks oodata, et difraktsioon ei avalda olulist mõju nihke suurusele, mis on arvutatud lõpmatu langeva laine teooriast. Lõpmatu langeva laine teooriast arvutatud nihke suurusele peaks juurde tulema väike difraktsioonist tingitud parandusliige. Nagu hiljem näeme see väide just peabki paika.



Joonis nr.16

Langegu xy -tasapinnale läbi pilu (laiusega $2a$) tasapinnaline laine, nii et laine amplituud avas on 1 ja pilu ise asub kaugusel l xy-tasa-

pinnast z -telje negatiivses suunas paralleelselt xy -tasapinnaga. Esialgu tasapinnalise laine langemisnurk olgu θ_0, pilu keskjoon omagu koordinaati $x = -l\tan\theta_0$, nii et difraktsioonist moonutamata kimbu keskkoht tuleb alguspunkti (vt. joonis nr.16).

Jättes ära teguri $e^{-i\omega t}$, on avas valgusergutus

$$e^{ik'x\sin\theta_0} = e^{ik'\xi\sin\theta_0}\cdot e^{-\frac{ik'l\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}},$$

kus

$$\xi = x + l\tan\theta_0 .$$

Selline ergutus on vahemikus $-a \le \xi \le a$, mujal aga null. Esitame $e^{ik'\xi\sin\theta_0}$ Fourier integraali kujul:

$$e^{ik'\xi\sin\theta_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p)\, e^{ip\xi}\, dp , \tag{115}$$

kus

$$\phi(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{i(k'\sin\theta_0 - p)\xi}\, d\xi . \tag{116}$$

Ehk arvutades integraali:

$$\phi(p) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin[a(k'\sin\theta_0 - p)]}{k'\sin\theta_0 - p} . \tag{117}$$

Nii oleme saanud ekraani ja xy -tasapinna vahelises ruumis tasapinnalised lained, milledel on amplituudid $\phi(p)$ ja lained ise pilu tasapinnal on

$$e^{ip\xi}\cdot e^{-\frac{ik'l\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}} .$$

Kui asendada siin uuesti $\xi = x + l\tan\theta_0$, siis saame

$$e^{ipx}\cdot e^{ipl\tan\theta_0 - \frac{ik'l\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}} .$$

Neid laineid pikendame nüüd xy -tasapinna poole. Kohal $z = -l$ peab olema e^{ipx}, kuid üldises avaldises e^{ipx} asemel peab olema $e^{i(px + \sqrt{k'^2 - p^2}\,z) + il\sqrt{k'^2 - p^2}}$, sest see avaldis kohal $z = -l$ muutub e^{ipx} -ks ning kujutab endast tasa-

pinnalist lainet. Selle partsiaallaine langemisnurk on Θ , kusjuures $p = K' \sin\Theta$.

Partsiaallainete üldkuju on:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin[a(K'\sin\Theta_0 - p)]}{K'\sin\Theta_0 - p} \cdot e^{i(px + \sqrt{K'^2 - p^2}\, z)} \times$$

$$\times e^{ipl\tan\Theta_0 + il\sqrt{K'^2 - p^2} - \frac{iK'l\sin^2\Theta_0}{\cos\Theta_0}} .$$

Nende superponeerimiseks tuleb seda avaldist korrutada dp-ga ja integreerida p järgi. Asendades siin $p = K'\sin\Theta$ ja korrutades K' -ga leiame:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin[aK'(\sin\Theta - \sin\Theta_0)]}{\sin\Theta - \sin\Theta_0} \cdot e^{iK'(x\sin\Theta + z\cos\Theta)} \cdot e^{iK'l\left[\frac{\cos(\Theta - \Theta_0) - \sin^2\Theta_0}{\cos\Theta_0}\right]} \qquad (118)$$

(118) tuleb superponeerimiseks korrutada $\frac{dp}{K'} = \cos\Theta\, d\Theta$ -ga ja integreerida Θ järgi.

Uurime lihtsuse mõttes ainult langemistasapinnaga risti polariseeritud valgust.

Partsiaallained $\Delta E_y''$ ja $\Delta \mathcal{H}_z''$ teises keskkonnas võime valemeid (24) kasutades üles kirjutada järgmiselt:

$$\Delta E_y'' = \frac{2\cos\Theta}{\pi\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{-i\varphi} \cdot e^{-\varkappa z} \cdot e^{iK'l\left[\frac{\cos(\Theta - \Theta_0) - \sin^2\Theta_0}{\cos\Theta_0}\right]} \cdot \frac{\sin[aK'(\sin\Theta - \sin\Theta_0)]}{\sin\Theta - \sin\Theta_0} \qquad (119)$$

$$\Delta \mathcal{H}_z'' = \frac{2n_1\cos\Theta\sin\Theta}{\pi\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{-i\varphi} \cdot e^{-\varkappa z} \cdot e^{iK'l\left[\frac{\cos(\Theta - \Theta_0) - \sin^2\Theta_0}{\cos\Theta_0}\right]} \frac{\sin[aK'(\sin\Theta - \sin\Theta_0)]}{\sin\Theta - \sin\Theta_0} \qquad (120)$$

Siin on tehtud $x = 0$, kuna x meil nihke arvutamisel oluline ei ole. Tuletame veel meelde, et

$$\varphi = \arccos\left[\frac{\cos\Theta}{\sqrt{1-n^2}}\right] \quad \text{ja} \quad \varkappa = K'\sqrt{\sin^2\Theta - n^2} .$$

Edasi

$$\begin{cases} E_y'' = \frac{2}{\pi\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{-\frac{iK'l\sin^2\Theta_0}{\cos\Theta_0}} \cdot \int \cos^2\Theta\, e^{-i\varphi} \cdot e^{-\varkappa z} \cdot e^{iK'l\frac{\cos(\Theta - \Theta_0)}{\cos\Theta_0}} \cdot \frac{\sin[aK'(\sin\Theta - \sin\Theta_0)]}{\sin\Theta - \sin\Theta_0} d\Theta \\ \mathcal{H}_z'' = \frac{2n_1}{\pi\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{-iK'l\frac{\sin^2\Theta_0}{\cos\Theta_0}} \int \cos^2\Theta\sin\Theta\, e^{-i\varphi} \cdot e^{-\varkappa z} \cdot e^{iK'l\frac{\cos(\Theta - \Theta_0)}{\cos\Theta_0}} \cdot \frac{\sin[aK'(\sin\Theta - \sin\Theta_0)]}{\sin\Theta - \sin\Theta_0} \end{cases} \qquad (121)$$

Arvestame nüüd, et partsiaallained erinevad oma suundade poolest vähe, st. $\Theta \approx \Theta_0$. Võtame nüüd uueks muutujaks

$$\eta = \sin\Theta - \sin\Theta_0 . \tag{122}$$

St. $d\eta = \cos\Theta \, d\Theta$. Integreerimise teostamiseks tulevad integraalialused funktsioonid (121)-s ritta arendada η järgi, ning arvestades η väiksust võtame read ainult ruutliikmeteni (kaasaarvatud).

Kirjutamise hõlbustamiseks kasutame veel järgnevaid tähistusi:

$$u = \sin\Theta_0 \qquad v = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$$

$$v = \cos\Theta_0 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\Theta - n^2}} . \tag{123}$$

Reaksarendused saame siis järgneval kujul:

$$\cos\Theta = v\left(1 - \frac{u}{v^2}\eta - \frac{1}{2v^4}\cdot\eta^2\right) \quad ; \quad \sin\Theta = \eta + u .$$

$$e^{-\varkappa z} = e^{-\varkappa_0 z}\left[1 - u\gamma\kappa' z\cdot\eta + \frac{\kappa' z\gamma^3}{2}\left(n^2 + \frac{1}{\gamma}\cdot u^2\kappa' z\right)\cdot\eta^2\right] .$$

$$e^{i\kappa' l\frac{\cos(\Theta-\Theta_0)}{\cos\Theta_0}} = e^{i\kappa' l\cdot\frac{1}{\cos\Theta_0}}\left[1 - \frac{i\kappa' l}{2v^3}\eta^2\right], \quad \frac{\sin[a\kappa'(\sin\Theta - \sin\Theta_0)]}{\sin\Theta - \sin\Theta_0} = \frac{\sin a\kappa'\eta}{\eta} .$$

$$e^{-i\varphi} = e^{-i\varphi_0}\left[1 - \frac{iu\gamma}{v}\eta - \left(\frac{u^2\gamma^2}{2v^2} + \frac{i(u^4 - n^2)}{2v^3}\gamma^3\right)\cdot\eta^2\right] .$$

Asetame nüüd need read (121)-sse ja korrutame läbi. Siis leiame:

$$E''_y = \frac{2\nu v}{\pi} e^{i(\kappa' l v - \varphi_0 - \omega t)} \cdot e^{-\varkappa_0 z} \cdot \int (1 + A\eta + B\eta^2)\frac{\sin a\kappa'\eta}{\eta}\, d\eta .$$

Siin A ja B on teatud kordajad, mis sõltuvad u -st, v -st, γ -st, n -st jne. Nad on kompleksarvud. Nagu hiljem selgub läheb meil neist vaja ainult reaalosi, seepärast me siin tervikuna neid üles ei kirjuta.

Integreerimise η järgi viime läbi arvestades, et

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\kappa'\eta}{\eta}d\eta=\pi\ ;\ \int_{-\infty}^{\infty}\sin a\kappa'\eta\,d\eta=0\ ;\ \int_{-\frac{\pi}{a\kappa'}}^{\frac{\pi}{a\kappa'}}\eta\sin a\kappa'\eta\,d\eta=\frac{2\pi}{a^2\kappa'^2}\ .$$

Siinjuures kolmandas integraalis me oleme arvestanud ainult seda vahemikku kus partsiaallained omavad märgatavat intensiivsust.

Peale integreerimist saame:

$$E_y''=2\nu v\,e^{i(\kappa' lv-\varphi_0-\omega t)}\cdot e^{-\varkappa_0 z}\cdot\left[1+\frac{2B}{a^2\kappa'^2}\right]. \tag{124}$$

Täiesti analoogselt leiame ka

$$\mathcal{H}_z''=2n_1\nu v u\,e^{i(\kappa' lv-\varphi_0-\omega t)}\cdot e^{-\varkappa_0 z}\cdot\left[1+\frac{2}{a^2\kappa'^2}\left(B+\frac{A}{u}\right)\right]. \tag{125}$$

Edasi tuleb meil arvestada Poynting-Umovi vektori x -komponent

$$S_x''=\frac{c}{4\pi}\cdot E_y''\cdot\mathcal{H}_z''\ . \tag{126}$$

Kuid enne tuleb veel (124)-st ja (125)-st võtta reaalosad ja alles siis korrutamine läbi viia. Reaalosa võtmisel me jätame ära liikmed $\sim\frac{1}{a^4\kappa'^4}=\frac{\lambda_1^4}{16\pi^4a^4}$, kuna me eeldame, et pilu laius on palju suurem langeva valguse lainepikkusest, st.

$$\lambda_1<<a \tag{127}$$

Kui meie tähistame $A=A_1+iA_2$, $B=B_1+iB_2$, siis (126) abil leiame võttes veel ajalise keskväärtuse:

$$\overline{S_x''}=\frac{n_1 c\nu^2 u v^2}{2\pi}\cdot e^{-2\varkappa_0 z}\left[1+\frac{2}{a^2\kappa'^2}\left(2B_1+\frac{A_1}{u}\right)\right], \tag{128}$$

kus

$$A_1=-\left(\frac{u}{v^2}+u\varkappa\kappa' z\right) \tag{129}$$

$$B_1=-\frac{1+u^2v^2\varkappa^2}{2v^4}+\kappa'\varkappa z\left(\frac{n^2\varkappa^2}{2}+\frac{u^2}{v^2}\right)+\frac{u^2\varkappa^2\kappa'^2z^2}{2}\ . \tag{130}$$

TRÜ Raamatukogu

Edasi nihke arvutamiseks tuleb leida x -telje suunalise energiavoo keskväärtus teises keskkonnas, mille saame integreerides $\overline{S''_x}$ -st z järgi 0 -st lõpmatuseni.

Arvestades, et

$$\int_0^\infty e^{-2\varkappa_0 z}\,dz=\frac{1}{2\varkappa_0}=\frac{1}{2\kappa'}\gamma;\quad \int_0^\infty z e^{-2\varkappa_0 z}\,dz=\frac{1}{4\varkappa_0^2}=\frac{1}{4\kappa'^2}\gamma^2;\quad \int_0^\infty z^2 e^{-2\varkappa_0 z}\,dz=\frac{1}{4\varkappa_0^3}=\frac{1}{4\kappa'^3}\gamma^3$$

saame:

$$\overline{W''_x}=\frac{cn_1v^2v^2u\gamma}{4\pi\kappa'}\left\{1-\frac{2}{a^2\kappa'^2}\left(\frac{1}{v^2}+\frac{1+u^2v^2\gamma^2}{v^4}\right)+\frac{\gamma^2}{a^2\kappa'^2}\left(n^2\gamma^2+\frac{2u^2}{v^2}-1\right)+\frac{u^2\gamma^4}{a^2\kappa'^2}\right\}. \qquad (131)$$

Nihke avaldise saamiseks tuleb seda jagada Poynting-Umovi vektori absoluutväärtuse ajalise keskväärtusega langevas laines; st. $\frac{cn_1}{8\pi}$ -ga, kuna $A_y=1$.

Leiame:

$$\mathfrak{D}_\perp^{(x)}=\frac{2cv^2v^2u\gamma}{\kappa'}\left\{1+\frac{1}{a^2\kappa'^2}\cdot\frac{\gamma^4}{v^4}\left(-\frac{2}{\gamma^4}-\frac{2v^2}{\gamma^4}+n^2v^4-\frac{v^4}{\gamma^2}+u^2v^4\right)\right\}, \qquad (132)$$

ehk loobudes tehtud tähistustest (123) ning arvestades, et $\kappa'=\frac{2\pi}{\lambda_\perp}$, saame:

$$\mathfrak{D}_\perp^{(x)}=\frac{\lambda_1}{\pi}\cdot\frac{\cos^2\theta_0\sin\theta_0}{(1-n^2)\sqrt{\sin^2\theta_0-\kappa^2}}\left\{1+\frac{\lambda_1^2}{4\pi^2a^2}\cdot\frac{2n^4\sin^2\theta_0+2n^2(1+2\sin^2\theta_0-\sin^4\theta_0)-2\sin^4\theta_0(2-\sin\theta_0)-4n^4}{\cos^4\theta_0(\sin^2\theta_0-n^2)^2}\right\}. \qquad (133)$$

Siit näeme, et oleme saanud juba tuntud avaldise $\mathfrak{D}_\perp^{(x)}$ jaoks, juurde on tulnud ainult difraktsioonist tingitud väike lisaliige, kuna (127) alusel $\frac{\lambda_1^2}{a^2}$ on väga väike.

Seega difraktsiooni arvestamine P.G.Kard'i teooriasse ei too midagi olulist uut juurde, andes vaid väikese paranduse, mis on tingitud langeva valguskimbu lõplikkusest.

Saadud tulemus õigustab veelkord kõiki eelpooltoodud väiteid P.G.Kard'i teooria kasuks. Autori arvates tuleb kõige õigemaks käesoleval ajal tuntud kiirte nihete teooriatest täielikul sisepeegeldumisel lugeda P.G.Kard'i teooriat. Samuti näitab teostatud arvutus, et langeva kimbu lõplikkuse eeldamine arvutustes pole sugusi nii oluline nagu seda tihti arvatakse.

Lõpuks arvestades, et tavaliselt $\sin^2\theta_0 - n^2$ on väike, siis võime (133)-s parandusliikme esitada ligikaudselt lihtsamal kujul:

$$D_\perp^{(x)} = \frac{\lambda_1}{\pi}\cdot\frac{\cos^2\theta_0\sin\theta_0}{(1-n^2)\sqrt{\sin^2\theta_0-n^2}}\left(1+\frac{\lambda_1^2 n^2}{2a^2\pi^2(\sin^2\theta_0-n^2)^2}\right). \qquad (134)$$

Peatükk XII

y -nihke eksperimentaalse avastamise võimalikkusest.

Minu töö juhendaja P.G.Kard soovitas mulle y -nihke eksperimentaalseks avastamiseks huvitavat katset, mille teoreetilist külge vaatleme siin lähemalt.

Nagu teada, nurk δ on faasinihe elektrivektori langemistasapinnaga risti ja langemistasapinnas olevate komponentide vahel. Nagu jooniselt nr.2 kergesti näha.

$$A_p = A_x\cos\theta - A_z\sin\theta .$$

Langeva kiire elektrivektori komponentide jaoks saame siis (52)-st:

$$\begin{cases} E_p = A_p\cos[\omega t - \kappa'(\sin\theta x + \cos\theta z)] \\ E_y = |A_y|\cos[\omega t - \kappa'(\sin\theta x + \cos\theta z) + \delta] . \end{cases} \qquad (135)$$

Analoogselt peegeldunud kiire elektrivektori komponentide jaoks saame (50)-st:

$$\begin{cases} E_p' = A_p\cos[\omega t - \kappa'(\sin\theta x - \cos\theta z) - \pi - 2\gamma] \\ E_y' = |A_y|\cos[\omega t - \kappa'(\sin\theta x - \cos\theta z) + \delta + 2\varphi] . \end{cases} \qquad (136)$$

Nüüd vaatame, kuipalju muutub δ ühekordse peegeldumisega. Saame

$$\delta + 2\varphi + 2\gamma + \pi = \delta + \chi ,$$

kus χ on nimetatud faasinihke muutus ühekordse peegeldumisega.

$$\frac{\chi}{2} = \varphi + \psi + \frac{\pi}{2} \tag{137}$$

Oluline on see, et D_y avaldises esineb tegur $\cos(\delta+\varphi+\psi)$, millega y -nihe on võrdeline.

Viimast saab aga ülalkirjutatud võrduste abil esitada kujus

$$\cos(\delta+\varphi+\psi) = \sin(\delta+\frac{\chi}{2}).$$

Niisiis ühekordse peegeldumisega muutub selle siinuse argument $\frac{\chi}{2}$ võrra.

$\tan\frac{\chi}{2}$ võime aga leida $\tan\varphi$ ja $\tan\psi$ definitsioonide abil. Kuna

$$\tan(\varphi+\psi) = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta - n^2}},$$

siis

$$\tan\frac{\chi}{2} = -\frac{\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\sin^2\theta}. \tag{138}$$

Siit näeme, et δ perioodilise muutumise tõttu võib D_y olla kas positiivne või negatiivne, olenevalt δ ja $\frac{\chi}{2}$ omavahelisest vahekorrast, kuna

$$D_y \sim \sin(\delta+\frac{\chi}{2}).$$

Kui $|\frac{\chi}{2}| > \delta$, siis D_y tuleb negatiivne. Märk miinus valemis (138) tähendab seda, et tegelikult peegeldumisel tekkivate faasinihete tõttu langemistasapinnaga ristiolev komponent hakkab faasinihkes maha jääma võrreldes langemistasapinnas oleva komponendiga.

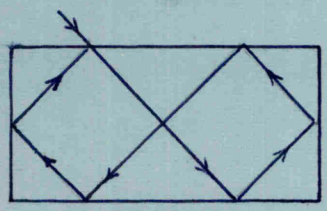
y -nihke väiksuse tõttu tuleb ta avastamiseks paratamatult kasutada korduvaid sisepeegeldusi. Siin tekib aga oluline raskus sellest, et D_y vahetab oma märki mitmekordsete peegeldumiste vältel ja nihked kompenseerivad üksteist ning me ei saa soovitud mitmekordsete peegeldustega suurendatud y -nihet.

Katse tuleks korraldada nii, et sel hetkel, kui D_y vahe-

tab märgi, tuleb vahetada ka peegeldumise suund, siis nihked liituvad.

Osutub, et sellist olukorda võib saavutada spetsiaalselt konstrueeritud prisma abil, mis on antud katse põhiliseks ~~xxxxxxxxx~~. tuumaks.

Olgu näiteks selline olukord, et pärast kolme ühesuunalist peegeldumist D_y vahetab märgi. Võtame siis neljatahulise püstprisma, mille põhjaks on ristkülik ja viimase mõõted peavad suhtuma nagu 1 : 2. Siis juhtides kiire prismasse 45° -se langemisnurga all, ta alumisest osast laiema tahu kaudu $1/4$ servapikkuse kaugusel prisma külgservast, kiir peegeldub prismas järjest 6 korda, seejuures alul kolm korda vasakule, siis kolm korda paremale (vaadates kiire suunas), nagu näidatud joonisel nr.17.



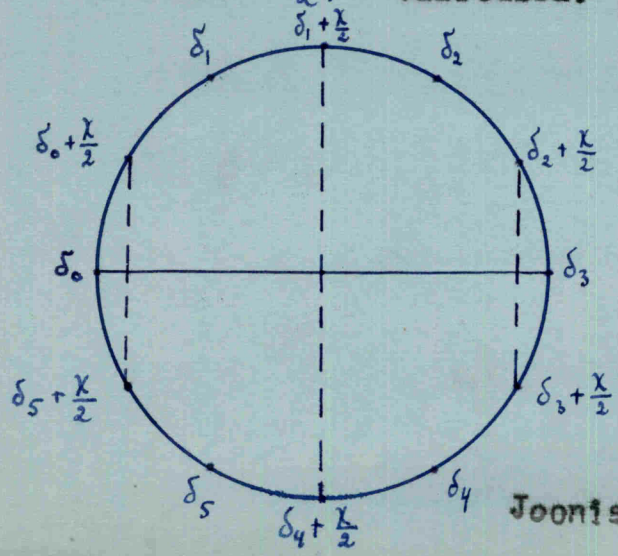
Joonis nr.17.

Kiir tuleb juhtida prismasse ka väga väikese nurga all vertikaaltasandis, nii et ta korduvate peegeldumiste tagajärjel tõuseks prismas üha kõrgemale ja lõpuks peale küllaldast arvu peegeldumisi juhime ta prisma ülalosast välja ekraanile.

Kiire prismasse- ja välja juhtimiseks võib kasutada suurele prismale kleebitud väikeseid võrdhaarseid prismasid.

On selge, et kui prisma on sellise kujuga, siis χ peab olema 60° ja $\frac{\chi}{2} = 30^{\circ}$.

Kuidas muutuvad faasinihked nende kuue peegeldumise vältel on näidatud joonisel nr.18. Punktiirjoontega on näidatud $\sin(\delta + \frac{\chi}{2})$ väärtused.



Joonis nr.18.

Alates punktist δ_3 vahetavad D_y märgi, kuid kuna sel hetkel muutub ka peegeldumise suund, siis nihked liituvad. On selge, et siin kirjeldatud olukorda ei või saavutada igasuguse murdumisnäitaja korral.

Vajaliku murdumisnäitaja leiame $\tan\frac{\chi}{2}$ avaldisest, mis nüüd muutub võrrandiks murdumisnäitaja jaoks.

Asetades (138)-sse $\Theta = 45^\circ$ ja $\frac{\chi}{2} = 30^\circ$, leiame $n = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Teostades selle katse, näeme ekraanil kiire jälge. Kui nüüd muudame valguse polarisatsiooni suuna vastupidiseks, siis muutub ka γ -nihe vastupidiseks ja kiire jälg ekraanil peaks nihkuma, millega γ -nihe oleks eksperimentaalselt kindlaks tehtud.

Kirjeldatud katset võiks teostada ka teistes tingimustes. Näiteks, kui D_γ vahetab märgi viie peegeldumise järele. Siis tuleb kasutada neljatahulist prismat, mille põhja mõõted suhtuvad nagu 2 : 3. $\delta = 180^\circ$ -le vastaks siis $\frac{\chi}{2} = 18^\circ$ ja $n = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Selle huvitava katse teostamine on käesoleva töö autoril kavas lähemal ajal, sobivate prismade saamisel.

γ -nihke eksperimentaalseks avastamiseks on mõeldavad ka teist liiki katsed, kuid neil me siin lähemalt ei peatu.

Lõpuks avaldan tänu minu töö juhendajale van.õp. P.G.Kardile suure abi eest töö teostamisel.

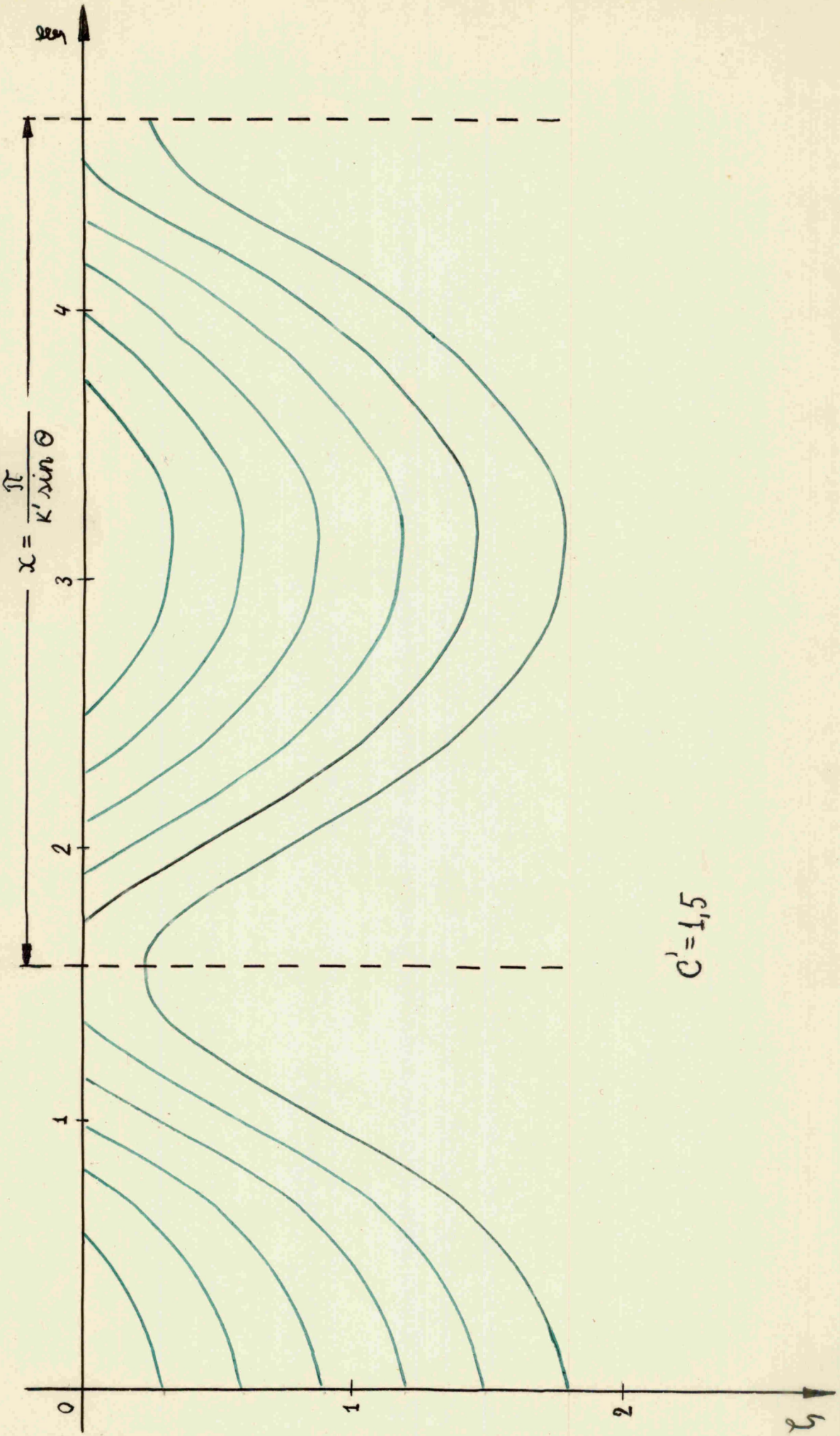
Tartus,
1954.a.märts.

N. Kristall

Kasutatud kirjandus.

1. А.А.Эйхенвальд. ЖРФХО, Физ.отдел, I3I, I909.
2. А.А.Коробко-Стефанов. УФН, 42, 433, I950.
3. П.Г.Кард. "К вопросу о смещении лучей при полном отражении". Рукопись, Тарту I953.
4. Л.М.Бреховских. УФН, 50, 539, I953.
5. A.Wiegrefe. Ann. d. Phys., 45, 465, 1914.
6. N.Kristoffel. "Energia voolujooned täieliku sisepeegeldumise korral", kursusetöö, Tartu, 1953.
7. И.М.Рыжик и И.С.Градштейн. "Таблицы интегралов...." М.-Л. 1951.

-----ooOoo-----



Joonis I

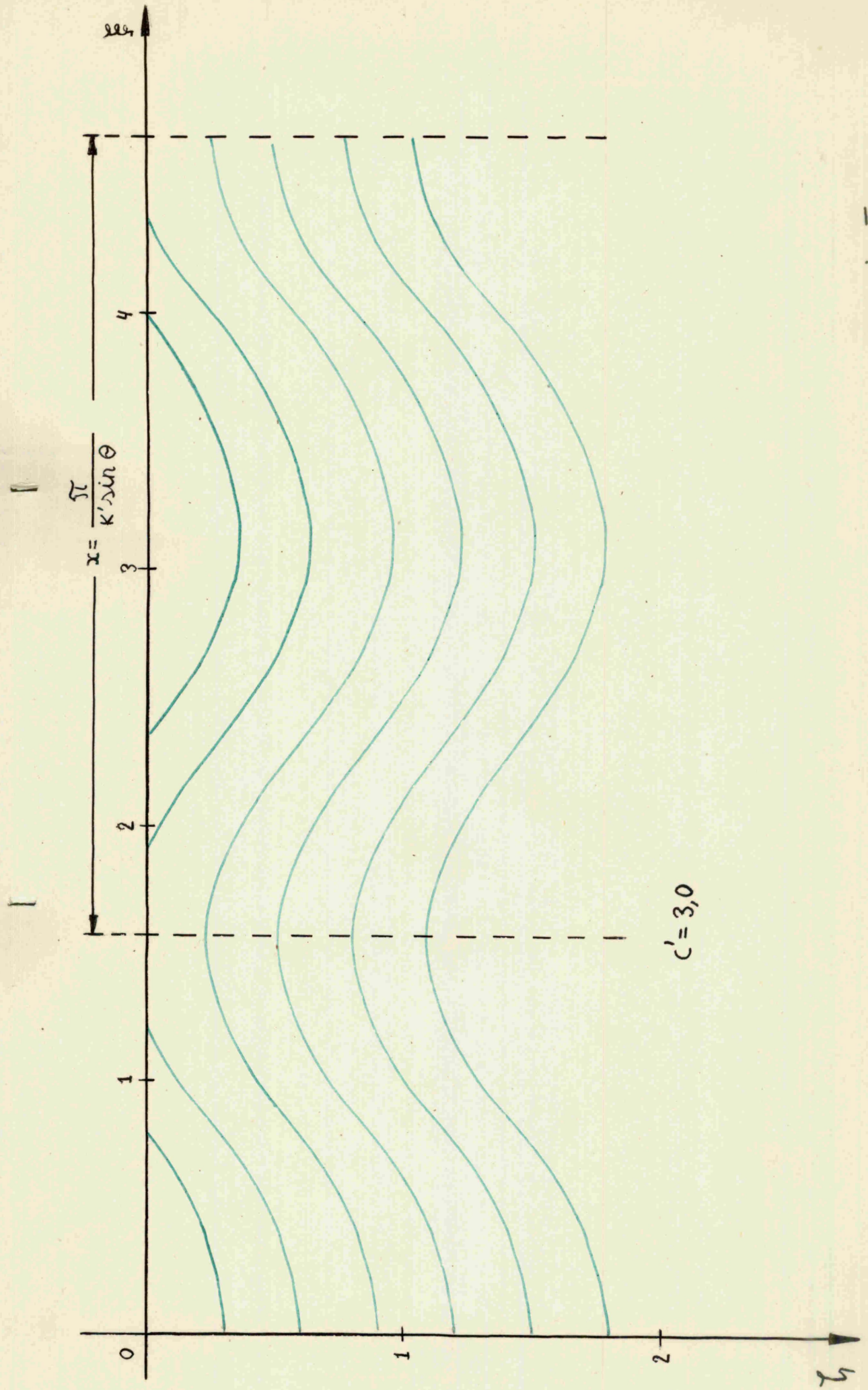
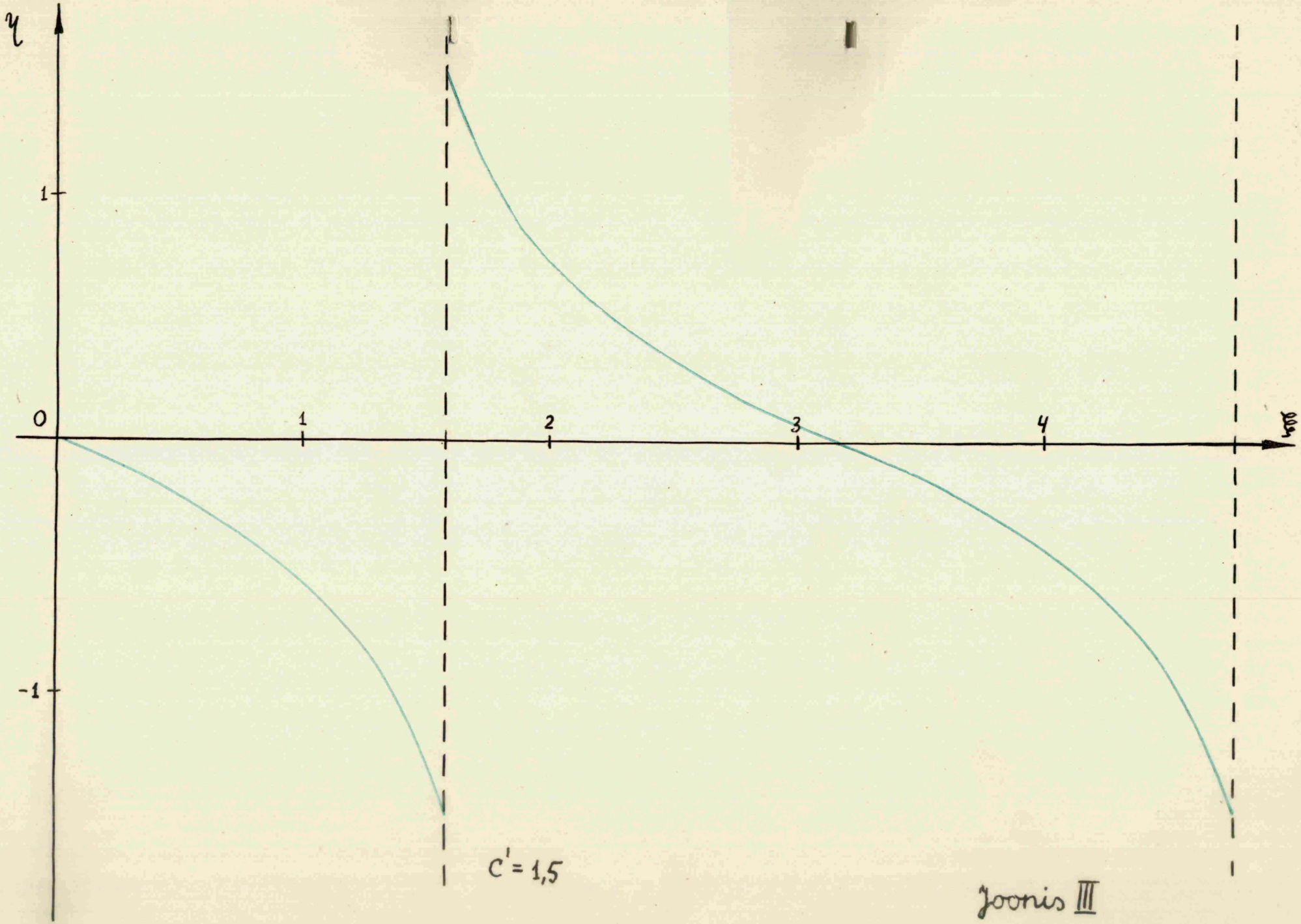
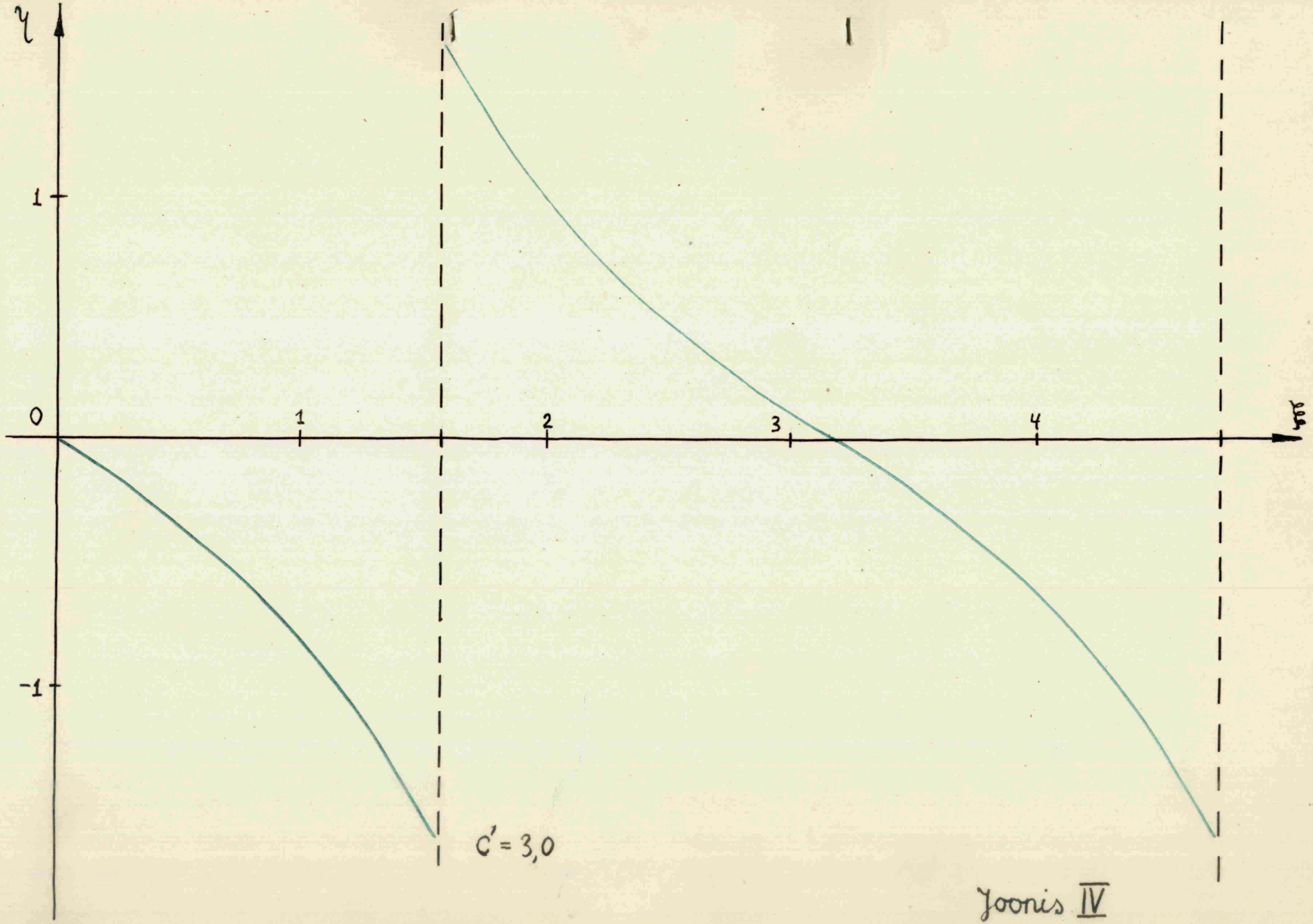


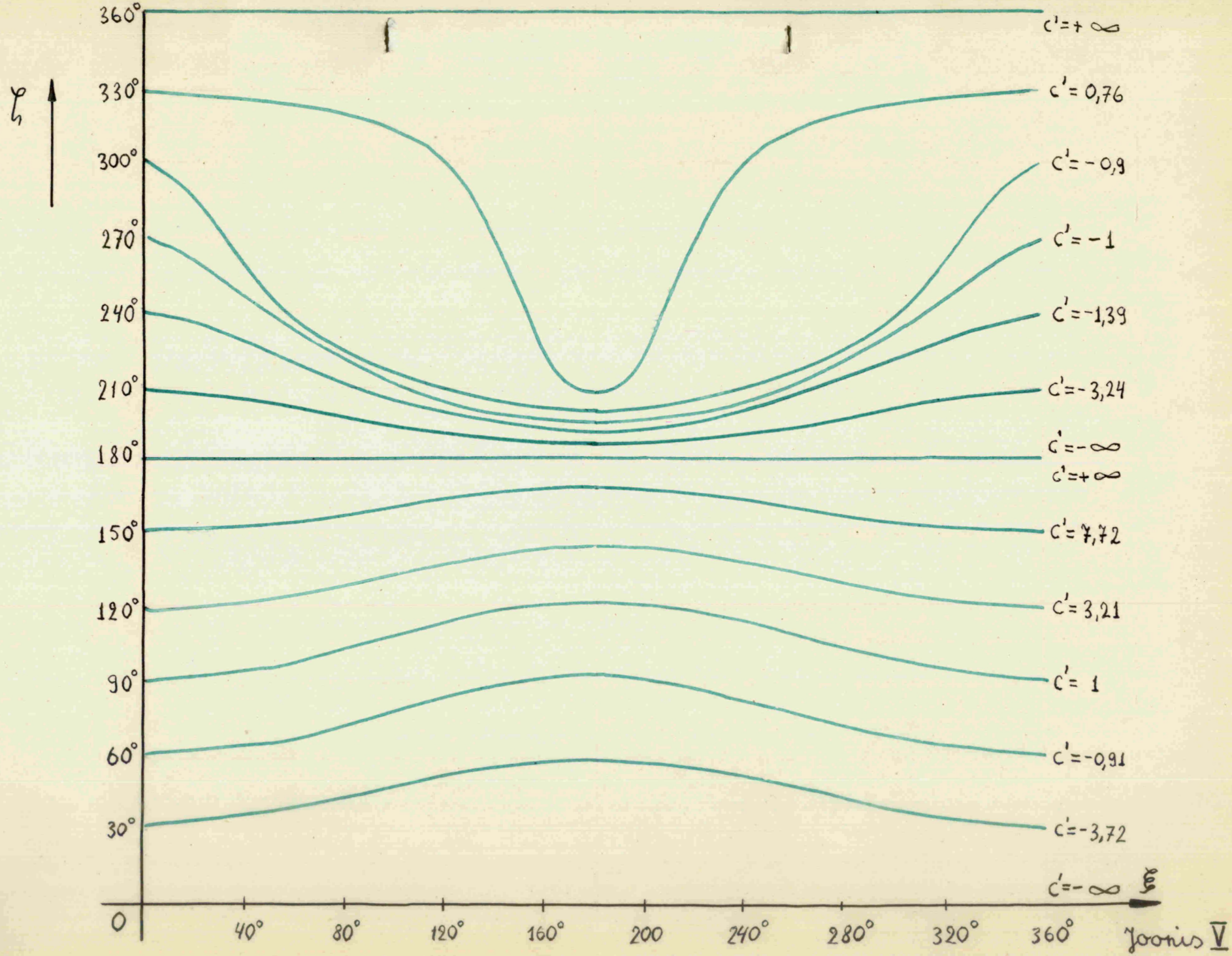
Рис. II



Joonis III



Joonis IV



360°
330°
300°
270°
240°
210°
180°
150°
120°
90°
60°
30°
0
40°
80°
120°
160°
200
240°
280°
320°
360°
ζ
ξ
c' = +∞
c' = 0,76
c' = -0,9
c' = -1
c' = -1,39
c' = -3,24
c' = -∞
c' = +∞
c' = 7,72
c' = 3,21
c' = 1
c' = -0,91
c' = -3,72
c' = -∞
Joonis V