T. KOIK

VILJANDIMAA POEGLASTE GÜMNAASIUMI DIREKTOR

MATEMAATIKA ÕPPERAAMAT

I

ALGEBRA

KESKKOOLI II KL. KURSUS

V. Õ. L. K. „ÕPISTU“ KIRJASTUS — VILJANDI 1935

T. KOIK
VILJANDIMAA POEGLASTE GÜMNAASIUMI DIREKTOR

MATEMAATIKA ÕPPERAAMAT

KESK- JA KUTSEKOOLIDELE

I
ALGEBRA

KESKKOOLI II KL. KURSUS

V. Õ. L. K. „ÕPISTU" KIRJASTUS — VILJANDI 1935

Keeleline korrektor: H. Ruubel.

J. Nurmberg'i trükk, Viljandis 1935

I
ALGEBRA

Käesolev vihk sisaldab õppematerjali algebrast ainult niipalju, kui on vajaline selle aine kindlaks omandamiseks. Harjutised ja ülesanded on mõeldud **koduste** õppeülesannetena, kuna muude raamatusse asetamine paisutaks seda tarbetult.

Autor.

I. Arvud ja tehted.

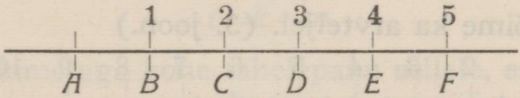
§ 1. LOOMULIK ARVRIDA.

Esemete loendamisel me nimetame järgemööda arve:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...

Me ütleme, et need arvud kuuluvad **loomuliku arvrea** esimeste arvude hulka, ja teame, et selle arvrea pikendamine kuitahes kaugele paremale poole on võimalik.

On kasulik, kui õpime tundma loomuliku arvrea kujutamist joonisel. Seda saab teha järgmiselt: Tõmbame sirge (1. joon.)

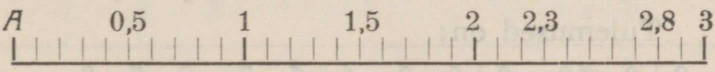


1. joon.

ja võtame sellel sirgel, alates mõnest täpist *A*, üksteise järel lõigud:

$$AB = BC = CD = DE = \ldots$$

Lõikude otsatäpid *B*, *C*, *D*, *E*,... vastavadki siis järjekorras arvele 1, 2, 3, 4,... Võime ka ütelda, et lõikude *AB*, *AC*, *AD*, *AE*,.... pikkused kujutavad loomuliku arvrea arve 1, 2, 3, 4...



2. joon.

Täpp *A* jääb esialgu ilma arvu tähiseta; nimetame teda algtäpiks. Võetud sirgel on võimalik kujutada ka murd- ja segaarve, nagu näidatud 2. joon.

Sirget, millel kujutatakse loomuliku arvrea kui ka loomulikku arvritta mittekuuluvaid arve, nimetatakse arvteljeks.

§ 2. LIITMINE.

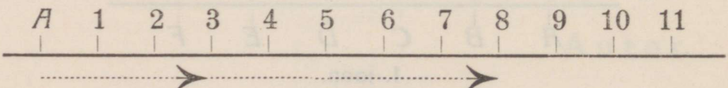
Tähtede tarvitamine arvude tähiseina.

Poiss püüdis enne lõunat 3 kala, pärast lõunat veel 5 kala. Püütud kalade loendamisel veendus poiss, et ta oli püüdnud 8 kala. Me teame, et arv 8 on 3 ja 5 summa; 3 ja 5 nimetatakse liidetavaiks, tehet liitmiseks.

Kirjutatakse seda nii:

3	+	5	=	8
1. liidetav		2. liidetav		summa

Liita võime ka arvteljel. (3. joon.)



3. joon.

Loendame algtäpist kolm ühikut **suurenevate arvude suunas**, sealt veel 5 ühikut samas suunas; jõuame täpini, mis kujutab arvu 8, ja see ongi summa.

Sääraseid ülesandeid võime koostada väga mitmesuguste liidetavatega, näit.: 2 kala ja 8 kala, 3 kala ja 6 kala, 1 kala ja 6 kala, 2 ja 7 jne.

Tulemused on:

$$2+8=10,\quad 3+6=9,\quad 1+6=7,\quad 2+7=9\ldots$$

Et seesuguste ülesannete lahendamise viise näidata korraga, võiksime kirjutada: enne lõunat püütud kalade arv + pärast lõunat püütud kalade arv = päevas püütud kalade koguarv. Kuid matemaatikas tehakse seda veel lühemalt, nimelt kirjutatakse „enne lõunat püütud kalade arvu“ asemele üksainus täht, olgu *a*, ja sõnade „pärast lõunat püütud kalade arvu“ asemele teine täht, olgu *b*; siis:

$$a+b=s,$$

s tähistab nüüd päevas püütud kalade koguarvu.

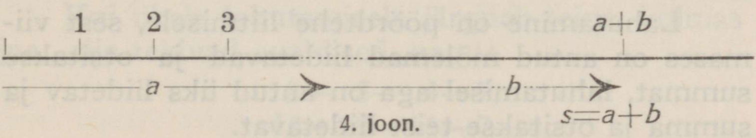
Paneme tähele, et *a* on nüüd üks arvudest 2, 3, 1, 2, ja *b* vastavalt 8, 6, 6, 7 jne. Muidugi võib *a* tähistada muidki arve, samuti ka *b*.

Numbriliste liidetavate korral kirjutatakse summa harilikult pärast liidetavaid, täheliste liidetavate korral kas enne või pärast.

$$8+6=14$$
$$c+d=p$$
$$t=k+m$$

Juhime aga kohe tähelepanu sellele, et ei saa *a* ja *b* summat arvutada, sest tema väärtused võivad olla väga mitmesugused; võime ainult näidata, et *a* ja *b* tuleb liita. Seepärast üteldaksegi, et $a+b$ iseenesest tähistab **summat**,*) ja nimetatakse seda avaldist summaks, kuigi summa pole eriliselt tähistatud.

Arvteljel võib liitmine sündida ka täheliste arvudega, nagu selgitatud 4. joon.



4. joon.

*) Sõna „summa“ on tuletatud ladinakeelsest „summus“, kõige kõrgem. Roomlased kirjutasid nimelt arvude summa ülespoole liidetavaid, mitte nii kui meie, s. o. suuremate arvude liitmisel — liidetavate alla.

Liidetavaid võib olla rohkem kui kaks:

$6+2+9+5=22$; $1+7+8+4+13=33$;
$a+b+c=k$; $d+c+p+i=l$;

kus k ja l on summa tähisteks.

Edaspidi nimetame summasid:

$$a+b+c+d,\quad x+k+l+g,\quad n+b+z,\ldots$$

tähtavaldisteks ja arvude tähiseid $a, b, c, d, x, \ldots$ tähelisteks (üldistatud) arvudeks.

§ 3. LAHUTAMINE.

A. Anumasse, milles oli 12 l vett, jäi peale 5 liitri väljavoolamist 7 l vett. Arvutamist kirjutatakse järgmiselt:

12	—	5	=	7
vähendatav,		vähendaja,		vahe

On selge, et järelejäänud vee hulk, liidetud väljavoolanud vee hulgaga, on esilagne vee hulk.

Tarvitades neile hulkadele antud nimetusi, võime kirjutada:

vahe+vähendaja=vähendatav

ehk

otsitav liidetav+antud liidetav=antud summa.

Definitsioon: **Lahutamine on tehe, mille abil leitakse üks liidetav antud teise liidetava ja summa abil.**

Lahutamine on pöördtehe liitmisele, sest viimases on antud mõlemad liidetavad ja otsitakse summat, lahutamisel aga on antud üks liidetav ja summa ja otsitakse teist liidetavat.

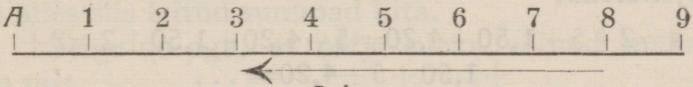
B. Viljapuuaias on x puust y õunapuud, muud on ploomipuud. Ploomipuid olgu z:

$$x-y=z$$

Lahutamise definitsiooni põhjal võime kirjutada:

$$z+y=x.$$

Lahutada saame ka arvteljel. Olgu lahutada arvust 8 arv 5. Võtame selleks (5. joon.) arvteljel alates A-st suurenevate arvude suunas 8 ühikut, s. o. kuni arvtäpini 8. Sealt tuleme tagasi viie ühiku võrra ja saame täppi 3, mis ongi otsitav vahe.



5. joon.

$$8-5=3$$

C. Null. Kui me talitaksime sääraselt arvude 4 ja 4 vahe otsimisel, siis tuleksime algtäppi A, mil pole ühegi arvu tähist . Selge on, et peame täpi A tähistama nulliga, sest $4-4=0$. Nulltäppi jõuame alati, kui vähendatav ja vähendaja on võrdsed arvud. Kirjutame selle nii:

$$a-a=o,$$

kus *a* on mistahes arv.

D. Tähtavaldised. Ka $x-y$, $k-r$, $s-t$ nimetatakse avaldisteks. Üldse on avaldised*) arvude kogud, kus arvud on ühendatud üksteisega tehtemärkidega. Avaldistes võivad mõned arvud olla kirjutatud numbritega. Kui avaldisteks on vahed, siis ei saa me neid vahesid arvutada, kuid me nimetame ka avaldisi $r-s$, $i-m$, $8-f$, . . . ikkagi vahedeks, ilma et nende tähistamiseks tarvitaksime erilisi märke.

Kui ühele lahutamisele järgneb teine, kolmas jne., siis tekivad avaldised, nagu:

$$18-3-4-7,$$
$$43-16-11-7-4,$$
$$c-d-e \text{ jne.}$$

*) Täheliste avaldiste esimene rakendaja oli prantsuse matemaatik Vieta (16. saj.)

§ 4. SUMMA JA VAHE OMADUSI.

A. Ostja, kes neljast kohast kaupu ostes välja andis esimeses 2 kr., teises 5 kr., kolmandas 1,50 kr. ja neljandas 4,20 kr., on kulutanud 12,70 kr. On selge, et sama üldsumma kulutatakse, kui needsamad üksikud kulutused tehakse, kuid mingis teises järjekorras:

$$s=2+5+1{,}50+4{,}20=5+4{,}20+1{,}50+2=2+ \\ +1{,}50+5+4{,}20=\ldots$$

Nagu näeme, **ei muutu summa, kui liidetavate järjekord muudetakse (summa vahetuvusseadus ehk kommutatiivsus).**

Kuna summal on see omadus igasuguste liidetavate puhul, siis avaldame selle nii:

$$s=a+b+c+d=a+b+d+c=c+a+d+b= \text{jne.}$$

B. Kui kaalukausil on a kilogrammi pomme ja kui sinna veel lisandatakse b ja c kilogrammi, siis võib need b ja c kilogrammi lisandada kas korraga või ükshaaval, tulemus on ikka seesama.

See oleks matemaatilises kirjas:

$$a+(b+c)=a+b+c.$$

b ja c on pandud sulgudesse selleks, et näidata, et see **summa** tuleb liita arvuga a,mitte üksikud liidetavad b ja c.

Summa liitmise asemel võib **antud arvuga liita liidetavad üksteise järele** (summa ühenduvusseadus ehk assotsiatiivsus).

D. Kui poest ostetakse 13 kr. eest sitsiriiet ja 1 kr. eest nööpe, peale selle veel villast riiet 32 kr. eest ja siidi 18 kr. eest, siis tuleb kauba eest maksta:

$$13+1+32+18=64 \text{ (kr.)}$$

Seesama rahasumma kuluks aga, kui ostja maksaks enne nööpide ja villase riide eest $1+32=33$ krooni, siis aga sitsi ja siidi eest $13+18=31$ krooni. Me võime üldsumma moodustada kahest erisummast:

$$(1+32)+(13+18)=64 \text{ (kr.)}$$

Oleme pannud siin sulgudesse 1 ja 32, samuti 13 ja 18 summa, et näidata, et need tehted tuleb täita ja alles siis leitud summad liita.

Selge on aga, et ostja oleks võinud maksta ka nii:

$$32+(1+13+18)=64 \text{ (kr.)}$$

või veel teisiti liidetavaid rühmitades; summa seetõttu ei oleks muutunud:

$$13+1+32+18=(13+1)+(32+18)=32+$$
$$+(1+13+18)=(32+13)+(1+18)=\ldots$$

Kuna seadus on õige mistahes arvude kohta, siis

$$a+b+c+d=(a+c)+(b+d)=(a+b+d)+c=$$
$$=a+d)+(b+c)=\ldots$$

Vahel pole neid omadusi, sest vahes $7-2$ ei saa me vahetada teineteisega vähendatavat ja vähendajat, kuna ei ole võimalik kahest lahutada seitset.

E. Kui aednikul on toas a kilogrammi tomateid ja ta neile aiast toob lisaks b kg tomateid, millest aga c kg osutub kõlbmatuks, siis on aednikul toas

$$a+(b-c)$$

kilogrammi kõlvulisi tomateid.

Kuid ühes b kg tomatitega annavad enne toas olnud a kg tomateid üldse $a+b$ kilogrammi. Lahutades sellest kõlbmatute tomatite kaalu c kg, saame kõlvulikkude tomatite kaalu $a+b-c$ kilogrammi, nii et

$$a+(b-c)=a+b-c,$$

ehk sõnades:

Vahe liitmiseks võib antud arvuga liita vähendatava ja siis lahutada vähendaja.

G. Summa lahutamine. Kui kellelgi on a krooni ja ta peab ühele võlatajale maksma b krooni, teisele c krooni, siis võib ta oma võlad õiendada 1) kas nii, et ta maksab korraga $c+b$ krooni, 2) või nii, et ta tasub esmalt esimesele võlatajale b krooni ja siis teisele c krooni.

Esimesel juhtumil jääb võlgnikule järele $a-(b+c)$ krooni, teisel juhtumil $a-b-c$ krooni.

Mõlemad tulemused peavad olema võrdsed:

$$a-(b+c)=a-b-c,$$

s. o. **summa lahutamise asemel võib lahutada liidetavad üksteise järele.**

H. Laanestel on raha x krooni, ta võlgneb Männikule y krooni, kuid peab saama Kiviloolt z krooni.

Arvete õiendamine võib sündida järgmiselt: Kiviloog maksab Männikule Laaneste nõusolekul z krooni. Laaneste võlgneb siis Männikule z krooni võrra vähem, s. o. $y-z$ krooni. Kui ta tasub selle võla oma rahast, mis oli x krooni, jääb talle veel

$$x-(y-z) \text{ krooni.}$$

Tasumine võib aga sündida ka nii, et Laaneste maksab x kroonist Männikule y krooni, siis jääb talle järele $x-y$ krooni.

Kui aga Kiviloog õiendab oma võla, on Laanestel

$$x-y+x \text{ (kr.)}$$

Mõlemate tehingute tulemus on aga seesama, s. o.

$$x-(y-z)=x-y+z,$$

ehk sõnades: **vahe lahutamise asemel võime lahutada vähendatava ja liita vähendaja.**

§ 5. KORRUTAMINE.

A. Kui suurräri veab veoautoga jaamast lattu tsemenditünne, igakord 8 tünni korraga, siis kuuekordse sõiduga on veetud lattu:

$$8+8+8+8+8+8=48 \text{ (tünni)}.$$

Lühemalt arvutatakse veetud tünnide arv korrutamisega, nimelt:

$$6 \cdot 8=48.$$

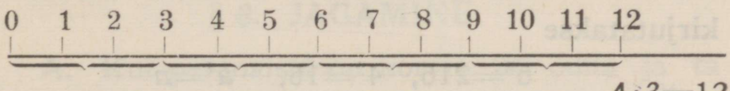
Arvud, mis korrutatakse, on tegurid, kuna tehte saadus on korrutis.

Võttes liidetavaiks tähelised arvud, võime kirjutada:

$$3 \cdot m=m+m+m.$$
$$7 \cdot d=d+d+d+d+d+d+d.$$
$$r \cdot i=\underbrace{i+i+i+\ldots+i}_{r \text{ korda}}.$$

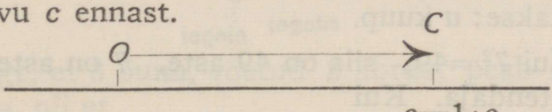
Definitsioon: **Täisarvude korrutamine on tehe, millega üks teguritest võetakse liidetavaks nii mitu korda, kui näitab teine tegur.**

Arvteljel võib korrutise $4 \cdot 3$ saada (6. joon.), kui nulltäpist alates võtame 3 ühikut, sellega liidame 3 ühikut, tulemusega 3 ühikut ja teise tulemusega veel 3 ühikut:



6. joon.

Korrutisel $1 \cdot c$ ei ole otsekohest mõtet, sest summas ju ainult üht liidetavat ei saa olla, kuid, nagu arvteljel (7. joon.) näha, on ka $1 \cdot c$ olemas ja kujutab arvu c ennast.



7. joon.

Korrutamismärk on vajaline numbriliste tegurite korrutamisel, kuna muiel juhtumeil teda sagedasti üldse ei kirjutata.

Esinevad aga ka juhtumid, kus korrutamismärk selguse mõttes või paratamatult on tarviline. Tegureid võib korrutamisel esineda rohkem kui kaks nagu:

$$3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 = 1680, \quad 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 12 = 4320, \quad 3ab = p,$$
$$4cdy = f, \quad abcd = K.$$

B. Kordaja. Numbrilisi tegureid täheliste ees nimetatakse **kordajaiks** ehk koefitsientideks.

Nii on korrutistes

$$m = 17a, \qquad k = 5acd, \qquad q = 8defi$$

17, 5 ja 8 kordajad ehk koefitsiendid. Ka siin on korrutise tähised m, k ja q kirjutatud korrutamisavaldiste ette, kuid korrutisteks nimetatakse ka avaldisi $17a$, $5acd$ jne. ,ilma et korrutised oleksid eritähega tähistatud.

D. Astmed. Ühesuuruste tegurite korral tarvitatakse lihtsustatud kirjutamisviisi. Selle asemel, et kirjutada

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216, \qquad 4 \cdot 4 = 16, \qquad aaaa = n,$$

kirjutatakse

$$6^3 = 216, \quad 4^2 = 16, \quad a^4 = n$$

ja nimetatakse **ühesuuruste tegurite korrutisi astmeiks** ja tehet **astendamiseks.**

Teine aste kannab nimetust ruut, kolmas kuup. Astet 4^2 loetakse: nelja ruut, 5^3 loetakse: viie kuup, u^3 loetakse: u kuup.

Kui $7^2 = 49$, siis on 49 aste, 7 on astendatav ja 2 astendaja. Kui

$$a^3 = k,$$

siis on k aste, a on astendatav ja 3 on astendaja. Võime nimetada ka astmeks ainult

$$a^3.$$

Astmel c^1 ei ole otsekohest sisu, sest arvu c ei saa võtta teguriks üks kord (puudub teine tegur), kuid on lepitud kokku, et sel juhtumil mõistetakse c^1 all arvu c ennast, seega

$$c^1=c.$$

E. Tegurid võivad olla ka murrud, näit:

$$x=\tfrac{2}{5}a.$$

Siis pole võimalik enam rahulduda antud korrutamise definitsiooniga, sest pole võimalik arvu a võtta liidetavaks $\frac{2}{5}$ korda. Eelmist korrutist mõistetakse aga matemaatikas nii, et arvust a võetakse $\frac{2}{5}$.

Samuti korrutist

$$y=c\,f,$$

kus $c=\frac{2}{3}$ ja $f=\frac{4}{5}$, peame mõistma nii, et arvust $\frac{4}{5}$ võetakse $\frac{2}{3}$.

Aritmeetikas selgitatakse, kuidas seda tehakse, nimelt: kaks kolmandikku neljast viiendikust on:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

§ 6. JAGAMINE.

A. Kui perenaisel on korvis 24 õuna ja ta tahab nad kolmekaupa välja võtta, siis peab ta $\frac{24}{3}=8$ korda õunu võtma. Tehet nimetatakse jagamiseks.

jagatav

$$\frac{24}{3}=8$$

jagaja jagatis

On selge, et 3 õuna, võetud 8 korda, peab andma 24 õuna, nii et

$$8\cdot 3=24.$$

Korrutamisel on antud tegurid ja otsitakse korrutist, jagamisel on teada üks tegureist (jagaja) ja korrutis (jagatav), aga otsitakse teist tegurit, seepärast on jagamine korrutamise pöördtehe. Kui tähelistes (üldistatud) arvudes näidata arvu a jagamist arvuga b ja jagatis tähistada tähega c, siis

$$\frac{a}{b}=c,$$

millest järgneb

$$cb=a.$$

B. Jagamisel võib juhtuda, et jagatis ei ole täisarv, näiteks kümne jagamisel kuueteistkümnega. Ei ole ühtegi täisarvu, mis kuueteistkümnega korrutamisel annaks 10. Küll saame 10, kui korrutame kuusteistkümmend $\frac{5}{8}$-ga, nii et

$$10:16=\frac{5}{8};\ \frac{5}{8}\cdot 16=\frac{5\cdot 16}{8}=10.$$

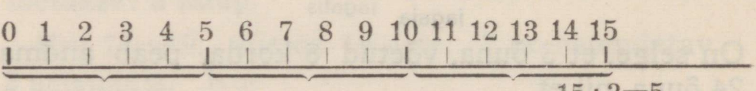
Kuna m jagamisel n-ga peame m ja n all mõistma mitmesuguseid arve, siis pole nüüdki võimalust selle tehte läbiviimiseks ja sellepärast nimetame jagatiseks avaldist

$$\frac{m}{n},$$

millega on ainult näidatud, et m tuleb jagada arvuga n.

Ka jagada on võimalik arvteljel. Kui jagatakse arv 15 kolmega (8. joon.), siis tähendab see, et arvteljel peame arvu 15 juurest kolme ühesuuruse lõiguga tagasi tulema algtäppi.

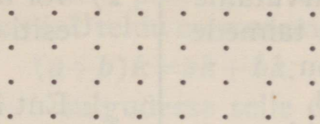
Iga lõigu pikkus peab olema 5 ühikut, ja see arv ongi jagatis.



8. joon.

§ 7. KORRUTISE JA JAGATISE OMADUSI.

A. Maatükile istutatakse nelja ritta marjapõõsaid, 8 põõsast ritta. Järgmises joonises iga täpp kujutab põõsast



Lugedes põõsaid rõhtridade kaupa saame

$$4 \cdot 8 \text{ põõsast.}$$

Lugedes põõsaid aga joonise püstridade kaupa leiame põõsaste üldarvuna

$$8 \cdot 4.$$

Kuna teisel lugemisel ühtegi põõsast ei ole juurde tulnud ega kaotsi läinud, siis

$$4 \cdot 8 = 8 \cdot 4.$$

Korrutises võime seega muuta tegurite järjekorda. Selle omaduse võime tähelistes (üldistatud) arvudes avaldada nii:

$$ab = ba.$$

See on korrutise **vahetuvusseadus ehk kommutatiivsus.**

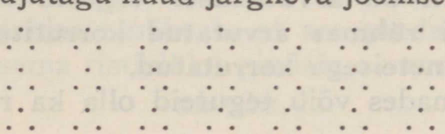
Vahetuvusseadus on maksev ka mitme teguriga korrutise puhul:

$$abcd = acdb = adbc = dcba = \ldots$$

(Võrrelda summa omadusega § 4, A).

Jagatise kohta ei ole vahetuvusseadus rakendatav, sest ei või $\frac{4}{5}$ asemel võtta $\frac{5}{4}$.

B. Kujutagu nüüd järgneva joonise



iga täpp üht istutatud lilletaime. Joonisest näeme, et taimed on istutatud kolmekaupa rühmadesse, igas rõhtreas on 7 rühma, kuna rõhtridu on 4. Taimede üldarvu arvutamiseks võime toimida

1) kas nii, et arvutame esiti rõhtrea taimede arvu, mis on
$$7 \cdot 3.$$
Kuna rõhtridu on 4, siis taimede üldarv on
$$4 \cdot (7 \cdot 3).$$

2) või nii, et arvutame esiti rühmade arvu
$$4 \cdot 7.$$
Ent igas rühmas on 3 taime, üldse seega taimi:
$$(4 \cdot 7)3.$$

Mõlemal viisil leitud taimede arvud peavad olema võrdsed:
$$4 \cdot (7 \cdot 3) = (4 \cdot 7) \cdot 3.$$

Tähelistes arvudes avaldub korrutise väljendatud omadus järgmiselt:
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b)c$$
(korrutise assotsiatiivsus ehk ühenduvusseadus).

Sõnades: kahest tegurist moodustatud korrutise korrutamiseks kolmanda arvuga võime selle arvuga korrutada ühe teguri ja tulemuse teise teguriga. Tegurid võivad olla nii täis- kui ka murdarvud.

Lõpuks jähime tähelepanu sellele, et korrutist $3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8$ ei tarvitse arvutada ainult sel teel, et tegurid üksteise järele korrutame, vaid võime toimida ka järgmiselt:
$$(3 \cdot 5) \cdot (6 \cdot 8) = 15 \cdot 48 = 720.$$

Nimelt on arvutamisel **tegurid rühmitatud, kummaski rühmas arvutatud korrutised ja need lõpuks teineteisega korrutatud.**

Rühmades võib tegureid olla ka rohkem kui kaks:
$$12abcd = (12ac)\ (bd) = (abd)\ (12c) = \ldots$$

D. Perenaine, kes turult müüjalt ostab esiti a paari mune k senti paar ja siis veel b paari sama hinnaga, võib maksta kas korraga $a+b$ paari eest

$$(a+b)k$$

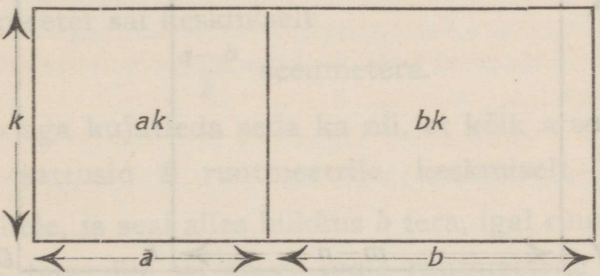
senti või jälle esiti a paari eest ak senti ja siis b paari eest bk senti. Üteldu on matemaatilises kirjas:

$$(a+b)k=ak+bk.$$

Me paneme $a+b$ sulgudesse selle märkimiseks, et need arvud liidetakse enne korrutamist. Sõnastame eelmise tulemuse järgmiselt:

Summa korrutamiseks mingi arvuga korrutatakse liidetavad selle arvuga ja tulemused liidetakse (**korrutise distributiivsus** ehk **jaotuvusseadus**).

Selle seaduse sisu selgitame veel 9. joonisega; olgu sellel joonisel kujutatud ristkülik mõõdetega $a+b$ ja k.



9. joon.

Selle ristküliku pindala on

$$(a+b)k \text{ ruut-mõõtühikut.}$$

Me paneme $a+b$ sulgudesse selle märkimiseks, et need arvud liidetakse enne korrutamist.

Ent jonisest nähtub, et see pindala koosneb kahe väiksema ristküliku pindala summast

$$ak+bk,$$

nii et

$$(a+b)k=ak+bk.$$

E. Kaupmehel oli c paari saapaid. Hindade languse tõttu oli ta sunnitud müüma saapapaari d krooni võrra odavamini omahinnast e.

Saadava üldhinna võime arvutada nii:

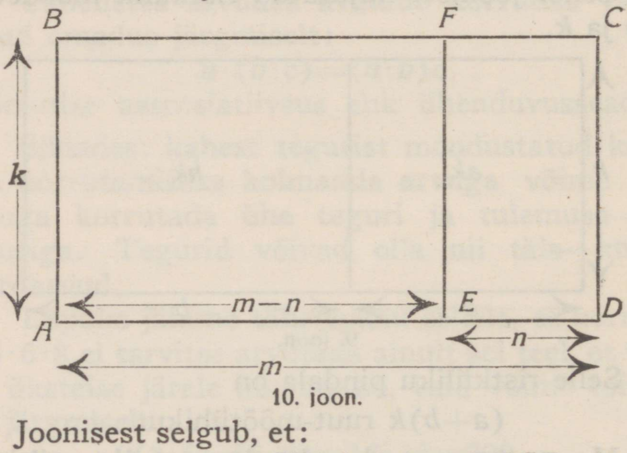
$$c(e-d),$$

kus $e-d$ kujutab saapapaari müügihinda, või jälle esmalt arvutame kõikide saabaste omahinna ce krooni ja sellest lahutame saadud kahju cd krooni, nii siis:

$$c(e-d)=ce-cd.$$

Vahe korrutamiseks mingi arvuga võime korrutada vähendatava ja vähendaja selle arvuga ja esimesest korrutisest lahutada teise.

Tõlgitseme seda seadust geomeetriliselt. Olgu võetud ristkülik $ABFE$, mille mõõted on $m-n$ ja k mõõtühikut (10. joon.).



10. joon.

Joonisest selgub, et:

$ABFE$ pindala$=ABCD$ pindala$-EFCD$ pindala, ent, kui $EFCD$ on ka ristkülik, siis

$ABFE$ pindala$=k(m-n)$ ruutmõõtühikut
$ABCD$ „ $=km$ „
$EFCD$ „ $=kn$ „

seepärast

$$k(m-n)=km-kn.$$

G. Summa ja vahe jagamine. Reisija, kes ühe riigi piirides rongiga sõitis a tundi, teises riigis aga b tundi, on teel olnud $a+b$ tundi. Reisil oldud ööpade arvu leidmiseks peame $a+b$ jagama 24-ga. Kuid võiksime ka arvutada, mitu ööpa oli reisija kummaski riigis, ja saadud arvud liita:

$$\frac{a+b}{24}=\frac{a}{24}+\frac{b}{24}$$

ehk üldiselt

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}.$$

Sõnades: **Summa jagamiseks mõne arvuga võime jagada selle arvuga liidetavad ja tulemused liita.**

H. Vahe jagamisel tuleb talitada analoogiliselt, nagu selgitatud järgmises näites.

Õiest, milles valmimisel hukkus a seemneterast b tükki, sattusid terved terad k ruutmeetrile. Iga ruutmeeter sai keskmiselt

$$\frac{a-b}{k} \text{ seemnetera.}$$

Võib aga kujutleda seda ka nii, et kõik a seemnetera sattusid k ruutmeetrile, keskmiselt $\frac{a}{k}$ tera igaühele, ja seal alles hukkus b tera, igal ruutmeetril $\frac{b}{k}$ tera; üle jäi seega igale ruutmeetrile $\frac{a}{k}-\frac{b}{k}$ tera, nii siis

$$\frac{a-b}{k}=\frac{a}{k}-\frac{b}{k}.$$

Sõnastus: **Vahe jagamise asemel võib jagada** antud arvuga vähendatava ja vähendaja ning esimesest tulemusest lahutada teise.

I. Korrutise jagamine. Tõstes 6 kg 4 meetri kõrgusele teeme tööd $6\cdot4$ kilogrammmeetrit. Kui see töö tehakse ühtlaselt 3 sekundi jooksul, siis igas sekundis tehtud tööhulk on

$$\frac{6\cdot 4}{3}=8 \text{ kilogrammmeetrit.}$$

Kuid 8 kg-m tööd sekundis saame, kui tõstame sekundis 2 kg nelja meetri kõrgusele, s. t.

$$\frac{6\cdot 4}{3}=2\cdot 4.$$

Arv 2 on saadud kuue jagamisest kolmega, nii et korrutise 6·4 jagamise asemel kolmega võime teguri kuus jagada kolmega ja tulemuse korrutada neljaga.

Tähelistes arvudes avaldame selle tõiga järgmiselt:

$$\frac{a\,b}{c}=\frac{a}{c}\cdot b\cdot$$

Kuna tegurite järjestust korrutises *ab* võime muuta, siis ka

$$\frac{a\,b}{c}=\frac{b\,a}{c}=\frac{b}{c}a.$$

Sõnades: **Korrutise jagamiseks jagame ühe teguri vastava arvuga ja korrutame tulemuse teise teguriga.**

§ 8. MONOOMID JA POLÜNOOMID.

A. Monoomid. Kui sulgudeta algebraline avaldis ei sisalda ühtegi liitmis- või lahutamistehet, siis nimetatakse seda avaldist **monoomiks.**

Olgu võetud avaldis

$$\frac{2}{3}ab^2.$$

Selles esinevad tehteist korrutamine, jagamine ja astendamine ning definitsiooni põhjal on see monoom.

Samal põhjusel on monoomid avaldised:

$$4cd,\ \frac{5x^3}{y},\ \frac{1}{ak},\ d.$$

Viimane avaldis koosneb ainsast tähest d, mis ei näita ühtegi tehet, kuid loetakse siiski ka monoomiks; samuti on monoom üksik numbriline arv, näit.: $2\frac{1}{2}$.

B. Polünoomid. Avaldisi, mis koosnevad märkidega pluss või miinus seotud monoomidest, nimetatakse **polünoomideks.**

Avaldis

$$3a-2bc+d^2-5$$

koosneb monoomidest

$$3a,\ 2bc,\ d^2,\ 5,$$

mis ühendatud üksteisega märkidega + või —, ja on seega polünoom.

Monoome, millest liitmiste ja lahutamistega on moodustatud polünoomid, hüütakse polünoomi liikmeiks. Liikme eraldamatuks osaks loetakse ka märki selle liikme ees. Eelmises näites on polünoomi liikmeiks:

$3a$, $-2bc$ (loe: miinus kaks bc),
$+d^2$ (loe: pluss d ruut), -5 (loe: miinus viis).

Kahe monoomi liitmisest või lahutamisest tekkinud polünoomi hüütakse **binoomiks.**

Järgmised polünoomid on kõik binoomid:

$$u+v,\ c-4d,\ r^2+\tfrac{1}{3},\ x^2-y^2.$$

Trinoom on polünoom, mis moodustatud kolmest liikmest; polünoom

$$oc^2-3x+4$$

on trinoom.

§ 9. TEHETE JÄRGUD JA JÄRJESTUS.

A. Liitmine ja lahutamine on alama järgu tehted, korrutamine ja jagamine keskmise järgu, kuna astendamine on kõrgema järgu tehe. Kõrgemasse järku kuulub veel muid tehteid.

Matemaatikas on kokku lepitud tehete järjestuse kohta järgmiselt: kui avaldis ei sisalda sulgusid, siis tuleb esmalt teostada üksteisele järgnevaist teheteist kõrgema järgu (astend.), siis keskmise järgu ja lõpuks alama järgu tehted.

Olgu antud polünoom

$$2am+3m^2-\frac{a^3}{m}-5bm.$$

Kui selles polünoomis tähtede väärtused on:

$$a=4,\ b=3,\ m=6,$$

siis peame polünoomi numbrilise väärtuse määramiseks antud tähtede väärtusel asendama tähed vastavate numbriliste andmetega:

$$2\cdot4\cdot6+3\cdot6^2-\frac{4^3}{6}-5\cdot3\cdot6.$$

Esmalt, käies antud juhise järgi, peame astendama; leiame:

$$2\cdot4\cdot6+3\cdot36-\frac{64}{6}-5\cdot3\cdot6,$$

siis korrutame ja jagame:

$$48+108-10\tfrac{2}{3}-90.$$

Lõpuks liidame ja lahutame:

$$156-10\tfrac{2}{3}-90=145\tfrac{1}{3}-90=55\tfrac{1}{3}$$

ja siis saamegi otsitava väärtuse $55\frac{1}{3}$.

B. Tekib küsimus: kui kõrgema ja keskmise järgu tehted on teostatud, missuguses järjekorras tuleb toimetada liitmist ja lahutamist?

Vastus on: igas polünoomis võib liitmis- ja lahutamistehete järjestust vabalt muuta. Näide: Rattur, kes kodust 18 km kaugusele sõitis, sealt kadunud rattapumpa otsides 3 km tagasi tuli, siis esialgses suunas 12 km sõitis ja sealt jällegi 4 km tagasi pidi sõitma, sest et ta õigel ajal ära ei olnud pöördunud, on kodust eemaldunud

$$18-3+12-4$$

kilomeetrit, seega 23 km.

Sama tulemuse saame aga polünoomist

$$18+12-3-4,$$

milles enne on liitmine, siis lahutamised, või polünoomist

$$18-3-4+12.$$

Üldine seadus on seega:

$$a-b+c-d+e=a+c-d-b+e=$$
$$=a-d-b+c+e=\ldots$$

Märkus: Säärase ümberpaigutuse tagajärjel ei tohi tekkida võimatusi. Kui näiteks polünoomi

$$20+8-22$$

kirjutada ümber nii:

$$20-22+8,$$

siis tekib võimatus, sest kahekümnest ei saa lahutada 22. Edaspidi selgub, kuidas neist olukordadest üle saadakse.

D. Kui tekib vajadus erinevate järkude tehteid toimetada teises järjekorras, siis võtame selle tähistuseks tarvitusele sulud *).

Näide: On teada, et raskuste tõstmisel tehtud tööhulka mõõdetakse tõstetavate kilogrammide arvu ja tõstekõrguse meetrite arvu korrutisega. Kui 25 kg tõstetakse 3 m kõrgusele, siis on tehtud töö $25 \cdot 3=75$ kilogrammmeetrit.

Tõstetagu korraga h meetri kõrgusele kaks keha, millede raskused on m kilogrammi ja n kilogrammi, kokku seega

$m+n$ kilogrammi.

Töö T arvutamiseks peame summa $m+n$ korrutama h-ga:

$$T=(m+n)\ h.$$

---

*) Sulgusid tarvitatakse matemaatikas 16. sajandist alates Esimene nende tarvitaja oli itaalia matemaatik Tartaglia.

Sulud näitavad, et peame arvutamist alustama liitmisest ja siis summa korrutama. Ülal (§ 7, p. D) selgitasime, kuidas avaldise saame sulgudest vabastada.

§ 10. AVALDISTE KOONDAMINE.

A. Kui 3 tosinat ja 4 tosinat nööpe on 7 tosinat nööpe, siis samuti

$$3c+4c=7c.$$

Kui nööbikaardilt, millel 12 tosinat nööpe, ära lõigata 2 tosinat, pärast 7 tosinat, siis jääb kaardile

$$12-2-7=3 \text{ (tos.)}.$$

Samuti

$$14d-6d-3d=5d.$$

Edasi leiame polünoomi

$$15x-3x+4x-7x$$

lihtsustatud kuju

$$9x.$$

Oleme neljaliikmelisest polünoomist teinud monoomi.

Polünoomi lihtsustamist, millega vähendame polünoomi liikmete arvu, nimetatakse polünoomi koondamiseks.

Nagu ei ole võimalik koondada avaldist

3 hobust + 9 veist + 5 lammast,

samuti ei saa koondada polünomi

$$8k-3m+4n.$$

Koondamine on võimalik ainult **sarnaste liikmetega** polünoomis. **Me nimetame sarnaseiks liikmeid, mis üldse ei erine või millel erinevad ainult märgid, kordajad või mõlemad korraga.**

Polünoomis

$$7ab^2+3ab^2-4ab^3-2ab^2$$

on liikmed

$$7ab^2, +3ab^2, -2ab^2$$

sarnased, kuna kolmas liige $-4ab^3$ ei sarnane nendega, sest eelmistes on tähe b ruut, viimases aga kuup.

Koondamiseks järjestame (mõttes) polünoomi liikmed nii, et sarnased liikmed järgneksid üksteisele.

Näide:

$$7ab^2+3ab^2-4ab^3-2ab^2=8ab^2-4ab^3.$$

Polünoomis

$$5m^2-2mn-3m^2+\frac{m}{3n}$$

on esimene ja kolmas liige sarnased, sest nad erinevad ainult märkide ja kordajate poolest, kuid teine ja neljas liige ei ole sarnased: teises liikmes on n teguriks, neljandas jagajaks:

$$5m^2-2mn-3m^2+\frac{m}{3n}=2m^2-2mn+\frac{m}{3n}.$$

Olgu koondada polünoom

$$2x-3z-5z,$$

milles on sarnased liikmed $-3z$ ja $-5z$. $3z$ ja $5z$ lahutamise asemel võime lahutada $8z$, nii et

$$2x-3z-5z=2x-8z.$$

B. Vaatleme nüüd, kuidas toimida, kui sarnaste liikmete märgid on erinevad ja miinusega liikmel on suurem kordaja, nagu järgmises näites:

$$3p-7q+2q.$$

Seitsme q lahutamise asemel võime lahutada esmalt $5q$, siis veel $2q$, seega

$$3p-7q+2q=3p-5q-2q+2q=3p-5q,$$

sest vahepealses kujus viimased kaks liiget hävisid.

Juhis: Polünoomi koondamiseks, kui tema kaks sarnast liiget on ühesuguste märkidega, liidame nende kordajad ja paneme summa ette endise märgi; kui aga ta liikmed on erinevate märkidega, lahutame suuremast kordajast väiksema ja paneme vahe ette suurema kordaja märgi. Kordaja järele kirjutame endise tähelise avaldise.

Kui sarnaseid liikmeid on rohkem kui kaks, siis on otstarbekas koondada esiti kõik sarnased liikmed märgiga $+$, pärast kõik sarnased liikmed märgiga $-$ ja lõpuks mõlemad tulemused.

Näiteks:

$$5a^2b^2-3a^2b^2+2a^2b^2-a^2b^2+4a^2b^2=$$
$$=11a^2b^2-4a^2b^2=7a^2b^2.$$

§ 11. MONOOMIDE JA POLÜNOOMIDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

A. Monoomide liitmine ja lahutamine.

Olgu antud monoomid

$$2e,\ \tfrac{1}{2}ef,\ 3e,\ 2\tfrac{3}{4}ef.$$

Nende liitmiseks seotakse monoomid märkidega $+$ ja, kui võimalik, koondatakse saadud polünoom. Tähistanud summa tähega s, leiame:

$$s=2e+\tfrac{1}{2}ef+3e+2\tfrac{3}{4}ef=5e+3\tfrac{1}{4}ef.$$

Olgu lahutada monoomist $6c^2$ monoomid $2d$ ja $4c^2$. Tähistanud vahe tähega v, kirjutame:

$$v=6c^2-2d-4c^2.$$

Koondamise järele saame:

$$v=2c^2-2d.$$

B. Polünoomide liitmine.

Polünoomide

$$4m-2k+n,\quad 3k-2m+2n$$

liitmiseks paigutame teise polünoomi sulgudesse, paneme selle suluavaldise ette liitmismärgi ning kirjutame ta esimese polünoomi järele:

$$4m-2k+n+(3k-2m+2n).$$

Sulgudes polünoomi võime võtta summana, kus esimene liidetav on $3k-2m$ ja teine liidetav on $2n$. Talitades vastavalt § 4, B summa liitmiseks antud juhisele leiame, kui s tähistab summat:

$$s=4m-2k+n+(3k-2m)+2n.$$

Nüüd on liita veel vahe $3k-2m$, kuid § 4, E järgi

$$s=4m-2k+n+(3k-2m)+2n=$$
$$=4m-2k+n+3k-2m+2n=2m+k+3n.$$

Polünoomide lahutamiseks seome vähendatava ja sulgudesse pandud vähendaja märgiga miinus. Olgu näiteks lahutada polünoomist

$m-n+p$ polünoom $m+2n-3p$.

Tähistatud vahe tähega u, võime kirjutada:

$$u=m-n+p-(m+2n-3p).$$

Sulgude kaotamiseks (üteldakse: avamiseks) arutame järgmiselt: sulgudes on viimaseks tehteks lahutamine: vähendatavaks on $m+2n$ ja vähendajaks $3p$. § 4, H antud juhise kohaselt peame vahe lahutamiseks lahutama vähendatava ja liitma vähendaja:

$$u=m-n+p-(m+2n)+3p.$$

Et lahutada aga summa $m+2n$, peame lahutama eraldi mõlemad liidetavad m ja $2n$, (§ 4, G):

$$u=m-n+p-m-2n+3p$$

ehk peale koondamist

$$u=4p-3n.$$

Me selgitasime seega, et

$$4m-2k+n+(3k-2m+2n)=$$
$$=4m-2k+n+3k-2m+2n$$

ja

$$m-n+p-(m+2n-3p)=m-n+p-m-2n+3p.$$

Võrdleme

1) eelviimase võrduse *) vasakut poolt paremaga ja

2) viimase võrduse vasakut poolt paremaga.

Me tuletame sulgude avamise juhise:

Avanud sulud, mille ees märk +, kirjutame sulgudes olnud liikmed eelmiste juurde endiste märkidega; kui aga sulgude ees oli märk miinus, siis sulgude avamisel peame sulgudes olnud liikmed kirjutama eelmiste liikmete juurde vastupidiste märkidega.

§ 12. HARJUTISI JA ÜLESANDEID.

§ 1 — § 4.

1. Vihu lehel kujutada arvtelg, millele mahuks arvrida nullist kaheteistkümneni. Valida vastav ühik ja kujutada arvud.

Märkida arvjoonele arvud: $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{4}$; $8\frac{3}{4}$; $3\frac{1}{2}$.

2. Võtta arvtelje ühikuks 2 cm ja kujutada 0,4; 1,1; 1,6; 3,5; 4,3.

3. Arvtelje ühik on 5 cm; kujuta 1,26; 0,41; 0,84; 1,30; 1,88.

Kas on sel joonisel kujutatavad arvud 1,456; 0,3754; 0,038; 0,0021?

Missugused raskused tekivad selle juures? Kas tähendaab see, et neil arvudel ei olegi kohta arvteljel? Mis peaksime tegema, et seesugused arvud oleksid täpsalt kujutatavad arvteljel?

4. Mida kujutavad mõõtlindid ja mõõdupuud?

---

*) Kaks avaldist, mis ühendatud võrdusmärgiga (=), moodustavad võrduse. Võrdusmärgist vasakule jääv avaldis on võrduse vasak pool, paremale poole jääv avaldis on võrduse parem pool, näit.: $2a+1=3b+c$ on võrdus; vasak pool on $2a+1$, võrduse parem pool on $3b+c$.

5. Kas kilomeetritulbad maantee ääres võivad kujutada arve? Missugune erinevus on maanteel arvteljest?

6. Henn on vennast 6 aasta võrra vanem. Avaldada Hennu vanadus, kui venna vanadus on a aastat.

7. Üks kohvikeetmise eeskiri ütleb: üks supilusikatäis kohvi igale isikule ja üks kannule. Avaldada selle eeskirja kohaselt vajaline kohvi hulk H, teades, et isikute arv on i.

8. Aino on praegu n-aastane. Kui vana on ta 7 aasta pärast?

9. Eha on oma emast 27 a. võrra noorem. a) Avaldada Eha vanadus v, teades, et ema vanadus on V aastat. b) Kui vana on Eha 5 aasta pärast?

10. Taluomanikul Avalool oli raha hoiul R krooni; sellest võttis ta välja 43 krooni. Kui palju raha r jäi panka hoiule?

11. Aasta lõpul arvati hoiuühingus Meeriste hoiusummale 15 kr. 14 senti intresse juurde, selle tagajärjel muutus hoiusumma h krooniks. Kui suur oli ta enne intresside liitmist?

12. Kübaraäris oli üldse n kübarat, neist valmis tegemata m. a) Kui palju oli valmis kübaraid? b) Neist müüdi p kübarat, valmistati juurde q ja müüdi veel 3 kübarat. Kui palju on nüüd valmis kübaraid?

13. E meetri pikkusest riidetükist lõikas kaupmees ära 3 m 10 cm. Kui pikk tükk riiet jäi kauplusse?

14. Ennulo aastateenistus oli A krooni, sellest ta tarvitas ülalpidamiseks u krooni ja v krooni muudeks kuludeks. Avaldada Ennulo poolt aastas kokkuhoitud rahasumma s.

15. Kaks autot sõidavad samal ajal välja ühest kohast, esimene kiirusega a km tunnis, teine b km tunnis.

Kui kaugel nad on teineteisest ühe tunni pärast, kui a) nad sõidavad ühes suunas? b) vastassuunas?

16. Nimede eestistamisel võttis Rullinkoff uue nime, mis on m tähe võrra lühem endisest. Kui pikk on ta eestistatud nimi? Missugused väärtused võivad olla tähisel m?

17. Raamatu 230-st leheküljest luges Linda Anniku läbi ühel päeval x lehekülge, teisel y, kolmandal z lehekülge. Mitu lehekülge jäi tal veel lugeda?

18. K-kilomeetrisest teest käis Lembit Arulaid esimesel tunnil 4,5 km, teisel — c km ja kolmandal tunnil d kilomeetrit. Kui kaugel oli ta siis oma eesmärgist?

19. Karjapoisil Enn Arustel hakkas 14-pealisest veisekarjast kiini jooksma m elajat. Kui palju loomi jäi rahulikult sööma? Missugused numbrilised väärtused on m jaoks võimalikud?

20. Marjaaias korjati d liitrit karusmarju ja e liitrit sõstraid; ühele ostjale müüdi k, teisele n liitrit marju. Kui palju jäi neid omanikule?

21. Õie on praegu c aastat vana. Mitme aasta pärast on ta x-aastane? Mitme aasta eest oli ta 8-aastane?

22. Keskkooli kolmes esimeses klssis on vastavalt p, q ja r õpilast. Neist puudus ühel päeval a, 5 ja b õpilast. Avaldada sel päeval koolis olnud kolme klassi õpilaste koguarv. Mida võib ütelda a ja b numbriliste väärtuste kohta? Mida q kohta?

23. Liida arvteljel: $2+7$; $3+2$; $6+4$; $4+7$; $2\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}$; $3{,}2+4{,}5$; $6{,}7+2{,}9$; $0{,}6+5{,}8$.

24. Talus saadi müügiks suviõunu k kg, sügisõunu l kg, taliõunu m kg. Arvutada müügile minevate õunte hulk.

25. Majaomanik maksis aastas maksusid riigile c krooni, linnale d krooni ja tegi remonti 85 kr. 30 sendi eest. Arvutada omaniku aastased kulud.

26. Ruumimeetri küttepuitude eest maksis metsakaupleja metsas f krooni, veo eest e kr., edasimüügikasu arvestas ta k kr. ruumimeetrilt. Missuguse hinna peab tarvitaja nende puitude ruumimeetrist maksma?

27. Jõulukuusest maksti turul p senti, koju toimetamise eest 20 senti, ehteid riputati külge 3 kr. eest ja küünlaid pandi q sendi eest. Mis maksis jõulupuu korraldamine?

28. Alljärgnevate summade arvutamiseks tarvita otstarbekalt vahetuvusseadust. Ühenduvusseaduse tarvitamisel pane rühmad sulgudesse.

1) $16+12+34+48+18$ — 4) $9\frac{1}{3}+8+5\frac{2}{3}$
2) $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+3\frac{1}{2}$ — 5) $14\frac{1}{4}+5\frac{1}{2}+7\frac{3}{4}$
3) $4{,}6+7{,}2+6{,}8+9$ — 6) $11\frac{2}{5}+2+\frac{1}{5}+3\frac{2}{5}+16.$

29. Avalda summa vahetuvusseadus ja ühenduvusseadus avaldiste $x+y+u$ ja $y+u+v$ suhtes ja kontrolli see tähtede numbriliste väärtustega mõnest alljärgnevast reast.

	x	y	u	v
1)	18	12	8	7
2)	12	14	15	6
3)	10,5	7,8	4.2	5,3
4)	0.9	1,8	3,1	1,1

30. Õpilane Lehte Alustre pidi tasuma igas kuus temale kodunt antavast k kroonist korteri eest p krooni ja valgustuse eest q krooni. Kuidas saame arvutada, kui palju raha jäi Lehtele iga kuu järele? Kontrollida tulemus allantud arvudega:

	k	p	q
1)	9	5	1,5
2)	8	4,5	1,2
3)	7	4,2	0,8

31. Talu s-kilogrammisest nisusaagist jäeti oma tarvituseks t kilo, määrati müügiks m kg, kuna jääk jäi seemneks. Avaldada see jääk kahel viisil ja kontrollida tulemus järgmiste numbriliste väärtustega:

Järelkatse Nr.	s	t	m
1)	1600	200	1150
2)	2300	300	1600
3)	2850	250	2200

32. Trükimasina alt tulnud raamatu t trükipoognale tuli ühel nädalal lisaks l poognat ja järgmisel veel m poognat, millega lõppes raamatu trükkimine. Avaldada raamatu trükipoognate arv kahel viisil, tarvitades ühel korral ka sulgusid. Kontrollida tulemus järgmiste andmetega:

	t	l	m
1)	18	3	2
2)	12	4	$2\frac{1}{2}$
3)	8	2	$1\frac{1}{4}$

33. Majapidamises tarvitati petrooleumi jaanuarist 1. maini g kilogrammi, maist 1. oktoobrini h kg ja 1. oktoobrist aasta lõpuni f kg. Avaldada mitmesugusel viisil aastas tarvitatud petrooleumi hulk.

34. Majas võeti veevärgist vett laupäeval s m^3, pühapäeval t m^3 ja esmaspäeval u m^3. Anda avaldis kolme päevaga tarvitatud veehulga kohta, kasutades selleks sulgusid. Ava siis avaldises sulud ja näita, et saadud võrdus on õige järgnevatel numbrilistel väärtustel:

	s	t	u
1)	1,2	0,3	0,7
2)	1,5	0,2	0,3
3)	2,1	0,4	0,7
4)	3,4	1,2	1,8

35. Ene hoiukarbis oli kontrollimisel b senti; ajajooksul lasti sinna sisse veel c senti. Karbi avamisel selgus, et korjandusest d senti oli vahepeal käibelt kõrvaldatud. Avaldada kogutud käibeloleva raha väärtus sulgudeta ja sulgudega avaldistena. Kas peavad tulemused olema võrdsed? Kontrolli see andmetega:

	b	c	d
1)	42	145	12
2)	68	87	8
3)	64	196	17

36. h-pealisele kodulindude hulgale tuli lisaks l poega, suve jooksul hukkus p poega. Kui palju linde jäi sügiseks? Avaldada tulemus kahel viisil.

37. Õpilase tegevus kestab ööba kohta 13 tundi. Sellest on koolitöödega seotud a tundi, millest b tundi kulutatakse kodus. Mitu tundi ööba kohta tegeleb õpilane kodus, olgu koolitööga või muuga? Avaldada tulemus kahel viisil (sulgudega ja ilma) ja kontrollida see andmeil:

	a	b
1)	8	2
2)	7	3
3)	8	3

38. Põllumees töötas maikuus m päeva, sellest kulus põllundusele n päeva. Mitu päeva maikuust ei ole seotud töödega põllunduse alal? Avaldada tulemus kahel viisil ja kontrollida see alljärgnevate numbriliste andmetega:

	m	n
1)	28	25
2)	27	26
3)	28	24

§ 5 — § 9.

39. Nimeta järgmistes korrutistes kordajad ja tegurid. Missugused tegurid on astmed? Arvuta korrutised antud tähtede väärtuste puhul.

1) $2cd$, kui $c=5$, $d=4$ | $c=8$, $d=7$ | $c=7$, $d=1$ | $c=\frac{1}{2}$, $d=3$ | $c=\frac{1}{3}$, $d=\frac{3}{2}$ |

Korralda arvutamine skeemi järgi:

c	d	$2cd$

2) $3a^2b$, kui $a=1$, $b=2$ | $a=2$, $b=2$ | $a=3$, $b=5$ | $a=4$, $b=2$.

3) $4xy^2$, kui $x=1$, $y=1$ | $x=3$, $y=2$ | $x=4$, $y=1$ | $x=5$, $y=2$.

4) $6c^3d$, kui $c=1$, $d=1$ | $c=2$, $d=2$ | $c=1$, $d=3$ | $c=5$, $d=2$.

5) $2k^2d^3c$, kui $k=1$, $d=1$, $c=1$ | $k=2$, $d=1$, $c=3$ | $k=1$, $d=2$, $c=2$.

40. Tikke müüakse toosidesse pakitult; 10 toosi moodustavad tikupaki, 25 pakki — tikuveerandi, 4 veerandit — kasti, 5 kasti — „originaali“. Avaldada 8 „originaali“ tikutooside arv, arvutades seda korrutise omadusi mitmel viisil kasutades. Missugune sõnaline väljendus on käesolevas ülesandes korrutiste rühmitistel: $4 \cdot 5$, $25 \cdot 10$, $4 \cdot 8 \cdot 5$?

41. Olgu eelmise ülesande tikutoosi hind 3 senti. Arvuta kõikide ülesandes näidatud tikkude hind. Kas tuleb selleks iga näidatud arv, s. o. 8, 5, 4, . . , korrutada 3-ga? Mida järeldame sellest korrutise suurendamise kohta?

42. Viljandi linnas võetakse valgustamiseks mineva elektrivoolu eest maksu iga kilovatt-tunni eest 23 senti. Septembrikuus on Arulaiu perekonnas tarvitatud valgustamiseks voolu 13 kv.-t., oktoobris 17 kv.-t. Arvuta voolumaks septembri- ja oktoobrikuu eest kahel viisil. Kumma viisi järele on maks suurem?

43. Linn võtab veevärgi vee eest tarvitajalt 29 senti kuupmeetrist. Ühele uuele veetarvitajale lubas linnavalitsus esimesel kuul 15 m^3 vett tasuta, sest linnavalitsuse poolt pandud veetorud ei andnud kohe küllalt puhtamaigulist vett. Mõõtja näitas ülesseadmisel 134 m^3, kuu aja pärast 158 m^3 Arvuta kahel viisil tarvitaja veemaks selle kuu eest. Kumma viisi järgi on tarvitajal kasulikum oma maksu tasuda?

44. Toa põranda pikkus ja laius on vastavalt p ja q meetrit ; selle toa ukse laius t meetrit. Arvuta kahel viisil sellele toale pandava põrandaliistu koguhind, teades selle meetrihinna 8,5 senti. Missugused on saadud avaldised?

45. Arvuta järgmised korrutised:

1) $3(2a—3b)$	4) $8(6+4\frac{1}{2}ab)$	7) $(4y+6z)2$
2) $4a(c—6ad)$	5) $5a(\frac{1}{2}a—\frac{2}{5}ab)$	8) $(3k—9l)\frac{1}{3}$
3) $(3r+l{,}5st)\ 2s^2$	6) $4(l—x)$	9) $(\frac{1}{7}s+2p)3\frac{1}{3}$.

46. Missugune arv on 1) 4 korda suurem kui $3c$? 2) 3 korda suurem kui $5b$? 3) $2a$ korda suurem kui $4m$?

47. Selgita, missugused avaldised on monoomid ja polünoomid, ning määra polünoomi liikmete arv.

1) $a—l$ 4) $4+5a+a^2$ 7) $\frac{3}{4}yz^2$
2) $9a^2b$ 5) $3a^2—b$ 8) $\frac{1}{2}a+2b—\frac{1}{4}$
3) $14abc^3$ 6) $14a+2b—l—c$ 9) $5b^3z+2\frac{b}{z}$

§ 10 — § 11.

48. Koonda järgmised polünoomid, kui see on võimalik.

1) $8c—3c$ 4) $s+5t—2t$ 7) $4a^2—b—3a^2$
2) $14k+4k$ 5) $6u—3u—u$ 8) $13x—y^2—9x$
3) $7m—2k—3k$ 6) $8h—5h—3h$ 9) $3n—1\frac{1}{3}n—n.$
10) $3y^2+2y+7—y^2+5y+1$
11) $11a—6b—3a—3b+2—a$
12) $2m—\frac{1}{2}n+3m—\frac{1}{4}n+2$
13) $\frac{1}{3}v—\frac{2}{5}+1\frac{1}{4}v+\frac{1}{2}$
14) $5cd+3d—2cd—d—cd—8d+4cd$
15) $ef—2f+4e—\frac{1}{2}—2kf—ke$
16) $8\frac{1}{2}p—3\frac{1}{4}q—3\frac{3}{4}p+5q—1\frac{1}{2}p—2\frac{3}{4}$
17) $2x—5bx+5b—3bx—2b—x+b.$
18) $3az^2—4bz+6az^2—2bz—7az^2—bz+3bz$
19) $12c^2d+18de^2—9c^2d—14de^2—6c^2d+5c^2d+dc^2$
20) $8uv^3+4u^3v—7uv^3+3u^3v+2uv^3—8u^3v$
21) $pq—2pr—3pr+4pq—7pq+6pr+3pq.$

49. Kas on õiged järgmised otsused?

1) Monoomis $3x^2$ on 2 astendaja.
2) x^2y ja $2xy$ on sarnased liikmed.
3) Monoomis $4ab^2$ on a astendaja 0.
4) Avaldise m^3n kordaja on null.
5) Kui lahutada binoomist $2x+2$ binoom $2x—2$, siis on tulemus 0.
6) $3ab^3$ ja $2ab^3$ vahe on ab^3.

50. Liita

1) a^2, $3a^2$ ja $4c$.
2) $2b^3$, $4a$, $3b^3$, a.

3) $7x^2y^2,\ 5x^2,\ 3x^2y^2,\ b^2,\ x^2y^2$.
4) $uv^3,\ \frac{1}{3}uv,\ 4,\ \frac{3}{5}uv^3, 2uv$.
5) $\frac{1}{8}d,\ \frac{1}{3}d^2,\ 3\frac{1}{2}d,\ d^2,\ \frac{1}{3}d$.
6) $a+b,\ a-b$.
7) $a^3+b^3,\ a^3-b^3$.
8) $x+y-1,\ 3x-4y-6,\ 2x+10$.
9) $3c+d-e,\ c-d,\ 2a-3$.
10) $x^2+x+1,\ 3z^2-4z,\ x+1,\ x^2-2x$.
11) $z^3-z^2,\ 3z^2-4z, z^3+2$.
12) $23p-14q+pq,\ 17q-14p+3pq$.

51. Lahutada püstjoone ees seisvast avaldisest joone taha kirjutatud avaldis (või avaldised):

1) $6c$	$4c;\ c$
2) $7a^2$	$2\frac{1}{2}a^2;\ 5b$
3) $8mm$	$4mn;\ 2\frac{1}{3}mn;\ mn$
4) $3b-4c$	$2b+c$
5) $17a$	$12a-4b$
6) $42m$	$27m+15n$ ja $6m-5$
7) $9rs-14r+8s$	$7rs-s-15r$
8) $5m^2-6m+3$	$4m^2-6m-3$
9) $4\frac{2}{3}g+5\frac{1}{2}h-1$	$3\frac{1}{4}g-1\frac{1}{4}h-\frac{2}{5}$
10) $2{,}6u-1{,}1v-3{,}8$	$1{,}9u-1{,}4v+1{,}9$

52. Avada järgmistes avaldistes sulud ja koondada:

1) $x-(y-4x)$
2) $(y+4x)+(2x-y)$
3) $(c-4)+(5-2a)$
4) $(3b-4+3a)-(b-3+5a)$
5) $(52y-17x)-(29x-49y)$
6) $38p+(6q-42p)$
7) $14u-(7v+10u)$
8) $43x-(8y+35x)$
9) $a-(b+c-a)+(a+2b-c)-(2c-a+b)$
10) $(\frac{1}{2}m-\frac{1}{3}n)-(\frac{2}{9}n-\frac{1}{6}m)+(\frac{7}{12}m-\frac{13}{18}n+\frac{5}{18}n)$
11) $3\frac{1}{5}x-(2\frac{1}{10}x+y)+(\frac{2}{5}x-3\frac{2}{5})$
12) $16{,}4+8{,}5c-(5{,}1+3{,}2c)-11{,}0-(7{,}2c-3)$

53. Missugune on $7a—4$ ja $6a+3$ vahe? Anda tulemus järgmiste väärtuste puhul: $a=1, 2, 5, 10, 12$.

§ 13. AVALDISTE NUMBRILISTEST VÄÄRTUSTEST.

A. Eelpool oleme vaadelnud algebraliste avaldiste lihtsamaid teisendusi. Need teisendused on õiged tähtede igasuguste numbriliste väärtuste puhul. Erandit sellest seadusest õpime tundma edaspidi. Nüüd vaatleme lihtsamate avaldiste numbrilisi väärtusi lähemalt ja valime selleks avaldise

$$2x+y—1.$$

Me teame, et siin x ja y tähistavad mingeid arve, mis sama ülesande piirides võivad olla mitmesugused. Olgu siin näiteks

$$x=0, \quad y=2,$$

siis saame avaldise numbrilise väärtuse, kui asendame tähed nende arvudega ja teeme näidatud tehted:

$$2x+y—1=2\cdot 0+2—1=1.$$

Avaldise väärtus on seega 1.

Võttes aga

$$x=1, \quad y=3,$$

saame avaldise väärtuseks

$$2\cdot 1+3—1=4.$$

Edasi: kui

$$x=2, \quad y=4,$$

siis avaldise väärtus on

$$2\cdot 2+4—1=7 \text{ jne.}$$

Parema ülevaate saamiseks korraldame andmed ja tulemused tabelisse:

x	y	$2x+y-1$
0	2	1
1	3	4
2	4	7

On selge, et avaldise väärtus **o l e n e b** x-ist ja y-ist, nimelt: kui muudame x-i ja y väärtusi, muutub ka avaldise väärtus. Tähistame avaldise väärtuse z-iga. Tabel kujuneb järgmiseks:

$$z=2x+y-1.$$

x	y	z	
0	2	1	
1	3	4	
2	4	7	
3	2	7	arvutada!
3	3	8	
4	4	11	

B. Koostame veel tabeli avaldise

$$x^2-2x+3$$

numbrilise väärtuse muutumisest.

Tähistanud avaldise väärtuse x-i muutudes tähega u, saame:

$$u=x^2-2x+3.$$

Arvutamise hõlbustamiseks täiendame tabelit veel avaldise kahe liikme, nimelt x^2 ja $2x$ väärtustega:

x	x^2	$2x$	$u=x^2-2x+3.$
2	4	4	3
3	9	6	6
4	16	8	11
5	25	10	18
6	36	12	27
7	49	14	38

Tabeli viimast sammast esimesega võrreldes leiame: u väärtus kasvab, kui x-i suurendame kahest seitsmeni.

Niisuguste avaldiste arvutamisel selgub, et avaldiste väärtused muutuvad, olenedes neis avaldistes esinevate tähtede väärtustest.

§ 14. ÜLESANDEIST ÜLDKUJUL.

Iga ülesanne vajab lahendamiseks kindla hulga tehteid antud arvudega. Olgu selgituseks lahendada järgmine ülesanne: Määrata sõiduki ratta tiirude arv 3-kilomeetrisel teel, teades, et sõiduki ratta läbimõõt $d=65$ cm . Arvutame ratta ümbermõõdu tuntud geomeetrilisest valemist:

$$\text{ümbermõõt}=2\pi r=2\cdot 3{,}14\cdot \tfrac{65}{2}=3{,}14\cdot 65 \text{ cm},$$

ja otsime nõutava tiirude arvu, mille tähistame tähega t. Selleks jagame 3 km ($=300\,000$ cm) leitud ümbermõõduga, ilma et me enne korrutusi toimetaksime:

$$t=\frac{300000}{3{,}14.65}.$$

Selle suuruse võime kergesti arvutada. Ratta läbimõõt ja tee pikkus võivad olla teissugused kui eelmises ülesandes, aga igasuguste arvude puhul tuleb tiirude arvu leidmiseks teha samad tehted; seepärast võime anda järgmise eeskirja tiirude arvu arvutamiseks:

$$\text{tiirude arv}=\frac{\text{tee pikkus}}{\pi\cdot\text{läbimõõt}}.$$

Et see eeskiri oleks lühem, tähistame tiirude arvu t-ga ,tee pikkuse tähega s, ja läbimõõdu tähega d. Seepärast võime eeskirja kirjutada järgmiselt:

$$t=\frac{s}{\pi d}.$$

Kui evime selle eeskirja, siis ei tarvitse me samalaadsete ülesannete lahendamiseks eelmist mõttekäiku korrata, vaid võime valemis tähed asendada arvudega ja näidatud tehted läbi viia.

Olgu näiteks tee pikkus 4 km, ratta läbimõõt 26 cm, siis tiirude arv

$$t=\frac{400\,000}{3{,}14\cdot 26}=\frac{40\,000\,000}{314\cdot 26}$$

ehk ligikaudselt 4900 tiiru (arvutada!).

Nii võime toimida alati, kuni andmed jäävad samalaadseks.

Ülesannete üldkujuliseks lahendamiseks on kasulik, kui tähtedes lahendise (valemi) koostamine teeb raskusi, võtta esmalt numbrilised*) arvud ja nendega püüda ülesanne lahendada. Siis selgub tee täheliste arvudega talitamiseks.

§ 15. HARJUTISI JA ÜLESANDEID.

§ 13. — § 14.

1. Koosta allantud avaldise numbrilise väärtuse muutumise tabel. Anna tähtedele ainult need väärtused, mis võimaldavad tehte läbiviimise.

1) $u+3$	5) $4x-3$	9) x^2+1
2) $x-1$	6) $10-x$	10) x^2+3
3) $2x-1$	7) $25-2x$	11) x^2-5
4) $3x-4$	8) $40-3x$	12) x^2-6.

2. Järgnevate avaldiste muutuvaist väärtusist koosta tabel ja anna selle vaatlemisel ka muutuvuse seadus.

1) x^2+2x	5) $3x^2+x$	9) x^2+x-4
2) x^2-x	6) $4x^2-2x$	10) x^2-2x+1
3) x^2-2x	7) $3x^2+2x$	11) x^2-3x+3
4) x^2-3x	8) $2x^2-3x$	12) x^2-2x-1.

*) Meie arvude tähised, nn. numbrid, on pärit Indiast, kust nad araablaste kaudu 12. sajandil toodi Euroopasse, kuid numbrite kujud on palju muudatusi läbi teinud. Enne 12. sajandit olid Euroopas tarvitusel üldiselt „rooma numbrid", mida kasutati arvutamisel veel isegi 16. sajandil.

3. Avaldiste muutuvaist suurusist koostada tabel ja avaldada sõnaliselt muutumise seadus.

a) $a+b$	g) $m-n$	k) $2x-z-1$
b) $3a+c$	h) $3m-2n$	l) $x-2z+3$
d) $2a+3d$	i) $2m+n-3$	m) $3x-z+6$
e) $3a+4d$	j) $m-2n+5$	n) $4x-3z-2$.

4. Ostetakse postkontorist a postkaarti à 0,5 senti, b rahasaatekaarti à 1 sent, marke: m tükki à 5 senti, n tükki à 10 senti, p tükki à 15 senti. Kui palju tuleb maksta kroonides?

Võtta $a=50$, $b=8$, $m=25$, $n=40$, $p=15$.

5. Kits oli murule teiba külge seotud köiega, mille pikkus oli a meetrit. Kui pika tee oli kits ära käinud, kui ta pinguli nööriga 3 korda ümber vaia oli tiirelnud? Kui suur rohupind p oli kitsel kasutada?

6. Maja pööningule saamiseks tuli esiteks minna välistreppi mööda majja, sealt teisele korrale, viimaks pööningule. Trepid olid vastavalt järgmiste astmete arvuga: 5,20 ja 12; aga astmete kõrgused olid a cm, b cm ja c cm. Avaldada pööningu põranda kõrgus maast.

7. Isa teenis a kr. päevas, ema b kr. päevas. Anda isa ja ema koguteenistus kuus, milles on 25 tööpäeva.

8. Õpilane luges raamatut 3 tundi k lehek. tunnis, edasi aga n tundi à 4 lehekülge. Avaldada loetud lehekülgede üldarv l ja keskmiselt tunnis loetud lehekülgede arv i.

9. Valatud rauas on ümmarguselt 4% sütt. Mitu kg sütt on a-kilogrammises rauakambas?

$a=720$ kg, 850 kg.

10. Anna valem kasu arvutamiseks k-krooniselt kapitalilt, mis kannab p% aastas.

1) Arvuta selle valemi põhjal aastane kasu 80, 125, 220, 406, 655, 1203 kroonilt 6%-ga aastas.

2) Arvuta kasu eeltoodud kapitalidelt, võttes protsendimääraks 3, $3\frac{1}{2}$, 4, 5 ja $6\frac{1}{4}$.

11. Tööline sai esimesel kahel päeval s krooni päevas, järgmistel aga 80% endisest päevapalgast. Leida tööpalk n päeva eest.

12. Raamaturiiulil asetseb k raamatut à d cm paks. Arvutada riiuliosa pikkus, mis raamatuist tühi on, teades, et riiuli pikkus on q cm.

13. Perekonnas on 5 liiget, kaks neist on teenistuses: esimene saab kuus m krooni, teine n krooni. Kogu teenistustulust jääb kuus üle s krooni. Kui palju kulutatakse keskmiselt selles perekonnas isiku kohta?

14. Ühe roosipõõsa küljest saadi r õit, mille tükk müüdi n sendi eest, teise küljest p õit à 8 senti. Mitu senti oli keskmiselt roosiõie hind?

15. Pottahju laius, sügavus ja kõrgus on vastavalt a, b ja c potti. Arvutada ahju jaoks vajalikkude pottide hind, teades, et ahju lae mõõdeteks tuleb võtta ka a ja b potti (lae jaoks raiutakse ääred maha) ja poti hind on d senti. Valemis võtta:

1) $a=5$, $b=6$, $c=9$, $d=9$.
2) $a=5$, $b=4$, $c=8$, $d=10$.

Märkus: Ahju sisse potte ei panda.

16. Kehtiva pensioniseaduse järgi saab riigiametnik aastas pensioni a-aastase teenistuse järele p% viimase aasta palgast. Peale ametniku surma on ta lesel õigus saada $\frac{1}{2}$ mehe pensionist, lesel $\frac{1}{6}$ isa pensionist. Arvuta lesele ja kahele lapsele makstava pensioni kogusuurus s krooni kuus, teades, et ametniku palk oli m krooni kuus.

1) $a=25$, $p=55$, $m=155$.
2) $a=28$, $p=64$, $m=90$.

17. Elektrijaam võtab tarvitajalt kilovatt-tunni eest (kv.-t.) 25 senti, kui tarvitatakse k kilovatt-tunnini kuus, ja 16 senti iga kv.-t. eest, mis ületab k kv.-t. kuus. Anda valem voolumaksu jaoks n kv.-t. eest, kui n on suurem kui k.

1) $k=10$, $n=15$.
2) $k=12$, $n=21$.
3) $k=15$, $n=30$.

18. Risttahuka-kujulisel nõul on põhjaks ruut küljega b sentimeetrit. Sama nõu kõrgus on h sentimeetrit. 1) Mitu kilogrammi V vett mahutab säärane anum? 2) Mitu kilogrammi piiritust (erikaaluga 0,9) mahutab nõu? 3) Avaldada nõu pindala.

19. Muru alla määratud ristkülikukujulise maapinna mõõted on p ja q meetrit. Muruseemet vajatakse 10 ruutmeetrile m kilogrammi. Arvutada nimetatud maatükile külvatava muruseemne üldhind, teades, et kilogramm seemet maksab k krooni.

1) $p= 8$, $q=11$, $m=0{,}15$.
2) $p=18$, $q=25$, $m=0{,}12$.

20. Anum on silindrikujuline; põhja läbimõõt seestpoolt on s cm. Arvutada sellesse nõusse kõrguseni h valatava vedeliku kaal k grammides, teades, et vedeliku erikaal on d.

Rakendada valemit juhtumeil:

1) $s=8$, $h=12$, $d=1$ (mis aine see on?)
2) $s=6$, $h=9{,}5$, $d=13{,}6$ (elavhõbe)
3) $s=7{,}5$, $h=8$, $d=1{,}8$ (väävelhape)
4) $s=12$, $h=18$, $d=0{,}8$ (veeta piiritus).

21. Rong sõitis 3 tundi kiirusega p km tunnis, järgmised kaks tundi kiirusega c km tunnis. Leida keskmine tunnikiirus.

22. Ärimees vajab sõiduks raudteel 12 tundi ja maksab sõidu eest a krooni; omnibuses teeks ta sellesama reisu 4 tunniga b krooni eest. Olgu b suurem kui a.

1) Avaldada omnibusesõidu puhul kaotus rahas.
2) Oletades, et ärimehe aeg maksab b kr. tunnis, arvutada kasu, mis tekib sõidu puhul omnibusega.

II. Võrrandid ja võrratused.

Relatiivsed arvud.

§ 16. VÕRRAND.

A. Me teame, et avaldised võivad olla numbrilised ja tähelised. Kui kaks numbrilist avaldist peale tehete läbiviimist annavad võrdsed tulemused, siis võib antud avaldised ühendada võrdusmärgiga.

Näiteks võtame avaldised

$$20+3(5-1) \text{ ja } 5 \cdot 2+30-8.$$

Mõlemad avaldised annavad tulemuse 32, seega

$$20+3(5-1)=5 \cdot 2+30-8.$$

See on numbriline võrdus.

B. Võrdused võivad olla aga ka tähelised. Eelpool on selgitatud, et tähelisi avaldisi võime mitmeti teisendada ja lihtsustada.

Avaldis

$$2a-(a-4)=2a-a+4=a+4.$$

Sellepärast võime ühendada esialgse avaldise ja lihtsustadud tulemuse võrdusmärgiga:

$$2a-(a-4)=a+4.$$

See on täheline võrdus. Tal on järgmine omadus: kui seesuguses tähelises võrduses anname tähtedele mingid numbrilised väärtused, siis muutub täheline võrdus alati numbriliseks.

Andnud võetud võrduses a-le väärtuse 7, leiame:

$$2 \cdot 7-(7-4)=7+4,$$

mis on tõesti numbriline võrdus.

Võtnud $a=8\frac{1}{2}$, saame numbrilise võrduse

$$2 \cdot 8\frac{1}{2}-\left(8\frac{1}{2}-4\right)=8\frac{1}{2}+4.$$

Nii võime a-le anda mistahes väärtuse, ikka saame numbrilise võrduse, muidugi tingimusel, et selle a väärtuse puhul näidatud tehted on võimalikud. **Kui tähelise võrduse mõlemad pooled saavad numbriliselt võrdseks tähtede igasuguste numbriliste väärtuste puhul, siis nimetatakse võrdust samasuseks.**

Samasused on näiteks võrdused:

$$(c-3)4=5c-12-c,$$
$$(b+2d)3-4d=3b+2d.$$

D. Võib aga kirjutada ka tähelise võrduse, mis pole samasus, näiteks:

$$4x-5=x+7.$$

Võtnud siin $x=3$, saame vasaku poole väärtuseks

$$4\cdot 3-5 \text{ ehk } 7,$$

kuna parem pool muutub kümneks, seega ei ole võimalik saada numbrilist võrdust. Küll aga teeb $x=4$ tähelisest võrdusest numbrilise võrduse:

$$4\cdot 4-5=4+7.$$

Tähelist võrdust, mis muutub numbriliseks võrduseks ainult mõningate tähtede väärtuste puhul, nimetatakse võrrandiks. Võrrandiga iseenesest avaldatakse ainult nõue, et ta tehtaks numbriliseks võrduseks.

Võrrandi tähe (tähtede) numbrilist väärtust, mis võrrandi teeb numbriliseks võrduseks, nimetatakse võrrandi lahendiks. Eelmises näites on võrrandi lahend

$$x=4.$$

Võrrandil

$$2z-3=7$$

on lahend $z=5$. (Tee järelkatse!) Üteldakse, et **võrrandi lahend rahuldab võrrandi.** Lahendada võrrand, tähendab leida lahend.

Võrrandi tähte, mille numbriline väärtus tuleb leida, nimetatakse tundmatuks.

Tundmatute tähistamiseks tarvitatakse harilikult tähestiku viimaseid tähti: x, y, z jne.

Võrrandite lahendeid võib mõnikord aimata, teinekord katsetamisega leida. Võrrand

$$4+x=6$$

nõuab, et arv 4 tundmatu arvuga liidetult annaks 6; aimame, et lahendiks on

$$x=2.$$

Võrrandis

$$3x-1=2x+4$$

katsetame x väärtustega:

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Leiame, et lahend on

$$x=5.$$

Need võrrandite lahendamise võtted on aga väga aegaviitvad, sageli ei leia me sel teel üldse lahendit, seepärast on välja töötatud paremad võtted, mille tarvitamine viib kiiresti sihile.

Me kõneleme selles raamatus ainult sääraseist võrrandeist, milles peale lihtsustamisi tundmatu esineb ainult esimesel astmel, mitte aga ruudus või kuubis jne. Niisuguseid võrrandeid nimetatakse **esimese astme võrrandeiks** ehk **lineaarseiks võrrandeiks.**

§ 17. VÕRRANDITE OMADUSI. *)

Võrrandite lahendamine põhjeneb mõningail võrrandite omadusil, millest nüüd lähemalt kõneleme. Olgu antud võrrand

$$2-(3x-1)=x-1.$$

---

*) Võrrandite algmeid kohtame juba vanimas matemaatilises dokumendis — Rhind'i papüüruses, mis on kirjutatud Egiptuses u. 2000 a. e. Kr. See dokument on ülesannetega papüüruseriba, mille mõõted 20 m · 30 cm. Ta avastati 19. sajandil ja teda säilitatakse Briti muuseumis.

Ükskõik, missugune on selle võrrandi lahend, ikka peame vaatama niihästi vasakule kui ka paremale poolele kui mingile numbrilisele suurusele, sest me otsime *x* väärtust, mis mõlemad võrrandi pooled teeks numbriliselt võrdseks.

Võime võrrelda võrrandit kaaluga ja kumbagi kaalukaussi ühes pommidega või ainega võrrandi pooltega. Nagu kaal peab õigel kaalutamisel olema tasakaalus, samuti peab õige lahend muutma võrrandi pooled numbriliselt võrdseks.

Kui kaal on tasakaalus, siis võime kumbagi kaussi võrdse raskuse juurde panna või sealt ära võtta, ilma et tasakaal kaoks. Järelikult võime ka tasakaalu rikkumata suurendada või vähendada mõlema kausi koormat ühepalju kordi.

Analogiliselt võime toimida võrranditega.

Me võime võrrandi pooli
sama arvu võrra suurendada,
„ „ „ vähendada,
„ arvuga korrutada,
„ „ jagada.

Võrrandi lahendit see ei muuda. Erandeist kõneleme edaspidi.

Võrrandi poolte korrutamisest ja jagamisest kõneldes tarvitatakse sageli ka sõnastust: „võrrandit võib korrutada ja jagada“ ja mõistetakse selle all, et võrrandi kõiki liikmeid tohib ühe ning sama arvuga korrutada või jagada.

§ 18. VÕRRANDITE LAHENDAMINE.

Kasutame nüüd eelmises §-s selgitatud omadusi järgmiste võrrandite lahendamisel.

1) Võrrand. . .	$4x-6=x+9$	Lihtsustatult:
Liidame mõlema poolega 6.	$4x-6+6=x+9+6$	$4x=x+15$ (1)
Lahutame (1) pooltest x.	$4x-x=x+15-x$	$3x=15$ (2)
Jagame (2) pooled kolmega.	$\frac{3x}{3}=\frac{15}{3}$	$x=5.$

Järelkatse antud võrrandiga:

$$4\cdot5-6=5+9;\ 14=14.$$

2) Võrrand. . .	$\frac{8}{3}z+4=2z+12$	Lihtsustatult:
Lahutame pooltest 4.	$\frac{8}{3}z+4-4=$ $=2z+12-4$	$\frac{8}{3}z=2z+8$ (3)
Lahutame (3) pooltest $2z$.	$\frac{8}{3}z-2z=2z+8-2z$	$\frac{2}{3}z=8$ (4)
Korrutame (4) pooled 3-ga.	$3\cdot\frac{2}{3}z=8\cdot3$	$2z=24$ (5)
Jagame (5) pooled 2-ga.	$\frac{2z}{2}=\frac{24}{2}$	$z=12.$

Järelkatse antud võrrandiga:

$$\frac{8}{3}\cdot12+4=2\cdot12+12,$$
$$36=36.$$

Neist näiteist selgub, et meie esialgne siht võrrandi lahendamisel seisab selles, et me püüame ühele võrrandi poolele — harilikult vasakule — koguda ainult tundmatutega liikmed, teisele poolele — harilikult paremale — ainult numbrilised liikmed.

Mittetarvilikust liikmest vabanemiseks ühel poolel tuleb kumbki pool liita selle liikmega või mõlemast lahutada see liige [vaata (1), (2), (3), (4)!].

Liitmiste ja lahutamiste tagajärjel kaovad liikmed võrrandi ühelt poolelt, aga nad ilmuvad võrrandi teisel poolel, kuid vastupidiste märkidega.

Me võime seepärast seda tegevust nimetada liikmete üleviimiseks.

Kui võrrandis esineb veel ainult üks tundmatuga liige, siis võime korrutamise ja jagamisega selle liikme kordaja teha üheks.

Lõplikult võrrandi lahendamine toimub järgmise juhise kohaselt: **Viime võrrandi tundmatud liikmed ühele poole, tuntud liikmed teisele poole ja koondame saadud avaldised** *). **Siis jagame mõlemad pooled tundmatu liikme kordajaga.** Leitud lahendiga teeme järelkatse.

Kui võrrandis on sulud, siis tuleb kõigepealt sulud avada.

§ 19. VÕRRANDITE RAKENDAMINE.

Kõigis ülesandeis nõutakse teatud arvu või arvude leidmist. Kui oskaksime selle arvu tähe kujul siduda numbriliste andmetega ja leida kaks võrdset avaldist, siis moodustaksid need võrdusmärgiga ühendamise järele võrrandi, mille lahendamine annaks otsitava arvu.

Näide: Süstasportlane sõitis süstaga pärivett kiirusega kalda suhtes 4 $\frac{\text{km}}{\text{tunnis}}$ ja tagasitulekul 3 $\frac{\text{km}}{\text{tunnis}}$. Ta tarvitas pärivett sõiduks 2 tunni võrra vähem aega kui tagasitulekuks. Kui kaua aega kestis sõit. Kui kaugele jõudis sõitja?

Lahendamine: Kuna esitatud on kaks küsimust, siis peame esiteks vastuse leidma ühele küsimusele. Olgu see sõiduaja kohta.

*) Araabia matemaatik Muhammed ibn Musa Alchwarizmi (9. saj. p. Kr.) nimetab märgiga miinus varustatud võrrandi liikme üleviimist teisele poole sõnaga „aldžebr", millest on tuletatud „algebra".

Olgu sõiduaeg x tundi; pärivett pidi siis sõit kestma $\frac{1}{2}x-1$ ja vastuvett $\frac{1}{2}x+1$ tundi. (Arvuta, kas sõit vastuvett kestis 2 tundi kauem kui sõit pärivett!)

Pärivett sõidetakse $\frac{1}{2}x-1$ tunniga $4(\frac{1}{2}x-1)$ km, vastuvett $\frac{1}{2}x+1$ tunniga $3(\frac{1}{2}x+1)$ kilomeetrit. Mõlemad teed on aga võrdsed, seega

$$4(\tfrac{1}{2}x-1)=3(\tfrac{1}{2}x+1).$$

Võrrand on koostatud. Lahendame ta.
Avame sulud:

$$2x-4=\tfrac{3}{2}x+3.$$

Eraldame tuntud liikmed tundmatuist:

$$2x-\tfrac{3}{2}x=4+3$$

ehk

$$\tfrac{1}{2}x=7,$$

kust

$$x=14 \text{ (tundi)}.$$

Sõidu üldine kestvus oli 14 tundi, sinnasõit vältas $\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{2}\cdot 14-1=6$ tundi ja süstasõit ulatus 24 km kauguseni.

Siin tähistame lahendamisel otsekohe otsitava arvu tähega x. Kui oleksime tähistanud ainult sinnasõidu aja tähega x, siis tagasisõit oleks kestnud $x+2$ tundi. Tee pikkus pärivett sõidul pidi olema $4x$ kilomeetrit, vastuvett sõidul $(x+2)3$ kilomeetrit. Et teed sinna ja tagasi olid võrdsed, siis

$$4x=(x+2)3.$$

Lahendades leiame:

$$4x=3x+6,$$
$$x=6 \text{ (tundi)}.$$

Seega vältas sõit pärivett 6 tundi, tagasisõit 8 tundi, kokku 14 tundi ja kaugus lähtekohast pidi olema

$$6\cdot 4=24 \text{ kilomeetrit}.$$

§ 20. JUHATUSI VÕRRANDITE KOOSTAMISEKS.

1. Ülesanne tähelepanelikult läbi lugeda, et tekiks selge kujutlus andmete ja otsitava arvu olu kohta.

2. Tähistada otsitav arv või temaga seotud arv mõne tähega ning lisada juurde sõnades mõõtühik.

3. Katsuda siduda otsitav arv teiste arvudega, mis ülesandes antud, kasutades selleks ülesande tingimusi.

4. Saadud lihtsate avaldistega läbi viia järelkatse; kui järelkatse tee avaldistega on raskesti avastatav, siis võtta selle avastuseks esiteks juhuliselt mõni numbriline arv. Seesugune järelkatse peab andma kakas võrdset avaldist, mis moodustavadki võrrandi.

5. Võrrandisse mitte kirjutada ühikuid, kuid pidada silmas, et ühe ning sama suuruse väärtused oleksid avaldatud ühesuguseis ühikuis.

6. Lahendada võrrand ja, kui lahend on nimeline arv, siis kirjutada ühiku nimetus lahendi juurde.

7. Saadud lahendiga teha järelkatse.

M ä r k u s: Järelkatseks tarvitada ülesannet, mitte võrrandit, sest võrrand võib olla mitteõieti koostatud ja selle ebaõige võrrandi lahend õieti määratud. Niisugusel korral rahuldab lahend küll võrrandi, mitte aga ülesande tingimusi.

Selgitame üteldut järgmise näitega .

Vello Arakul oli hoiukarbis kahte seltsi münte: viiesendiseid oli nelja võrra vähem kui kahesendiseid. Arvutada, mitu kumbagi seltsi münti oli karbis, teades, et raha see sisaldas üldse 1 kr. 6 senti.

Lahendamine. Kui me mingil viisil oleksime näit. leidnud, et karbis on 15 kahesendist, siis järelkatse teeksime järgmiselt:

15 kahesendist on . . $15 \cdot 2$ senti $= 30$ senti,
viiesendiseid oleks siis $15—4$ tükki ehk 11 tk.
Viiesendised moodustaksid rahasumma

$$11 \cdot 5 = 55 \text{ senti.}$$

Kokku peaksid 30 senti ja 55 senti ülesande tingimuste kohaselt andma summa 106 senti. See ei ole võimalik; me pole nähtavasti arvutanud kahesendiste arvu õieti.

Võrrandi koostamine toimub aga just eelkirjeldatud skeemi kohaselt.

Olgu kahesendiseid	x tükki,
viiesendiseid on siis	$x—4$ tükki,
kahesendiseid on	$2x$ senti,
viiesendiseid aga	$5(x—4)$ senti.

Et üldse raha pidi olema 106 senti, siis

$$2x + 5(x-4) = 106.$$

Avame sulud:

$$2x + 5x - 20 = 106.$$

Eraldanud tundmatud vasakule poole, saame

$$2x + 5x = 106 + 20$$

ehk

$$7x = 126,$$
$$x = 18.$$

Kahesendiseid oli 18, viiesendiseid 14.

§ 21. MÄRKUSI VÕRRANDITE LAHENDAMISE KOHTA.

Eelpool (§ 17) selgitasime, et võrrandit võib korrutada ja jagada igasuguste arvudega. Seda vabadust kitsendame nüüd järgmiselt: arv ,millega korrutatakse või jagatakse, ei tohi olla null.

Nulliga võrrandi liikmeid korrutades muudame nad kõik nullideks. Selle järele rahuldavad mistahes tundmatu väärtused selle võrrandi.

Näide: Võrrandi

$$10-x=3x+6 \tag{1}$$

lahend on

$$x=1 \text{ (teha järelkatse!).}$$

Korrutanud aga pooled nulliga, saaksime

$$10\cdot 0-x\cdot 0=3x\cdot 0+6\cdot 0. \tag{2}$$

Pannud viimasesse võrrandisse

$$x=2,$$

mis ei rahulda võrrandit (1) (veenduda järelkatsel!), leiaksime:

$$10\cdot 0-2\cdot 0=3\cdot 2\cdot 0+6\cdot 0$$

ehk

$$0=0.$$

Tähendab, x-i väärtus 2 rahuldab võrrandi (2).

Nii oleks lugu ka iga teise x-i väärtusega ja see tähendab, et võrrandi (2) lahendiks on iga arv, kuna aga võrrandil (1) on ainult üks lahend:

$$x=1.$$

Järeldame, et nulliga ei tohi võrrandeid korrutada.

Vaatleme nüüd, mis sünniks, kui võrrandi liikmeid jagaksime nulliga. Olgu näiteks antud jällegi võrrand (1). Kui selle võrrandi esimese liikme jagaksime nulliga, siis otsiksime jagamistehte definitsiooni järgi arvu, mis nulliga korrutamisel annaks tulemuses 10; see ei ole aga kuidagi võimalik, sest iga arv annab nulliga korrutamisel tulemuseks nulli. Nii ei ole nulliga jagamisel mõtet ja seepärast ei tohi võrrandeid nulliga jagada.

Kui võrrandid ilmuvad niisugusel kujul, nagu

$$\frac{3x}{5}=\frac{x-2}{2}+3,$$

siis ei tule me säärases võrrandis liikmete eraldamisega toime. Niisugusel juhtumil võime toimida § 7 p. H antud juhise kohaselt: vahe $x—2$ jagamiseks kahega võime jagada x-i kahega, siis 2 kahega ja esimesest tulemusest lahutada teise. Võrrand teiseneb järgmiseks:

$$\frac{3x}{5}=\frac{x}{2}—1+3.$$

Nüüd lahendame ta tuntud juhise kohaselt:

$$\frac{3x}{5}—\frac{x}{2}=2; \quad \frac{1}{10}x=2; \quad x=20.$$

§ 22. ÜLESANDEID.

1. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $3x=3$	5) $2s=0$	9) $\frac{x}{3}=4$	13) $\frac{y}{2}=\frac{1}{3}$
2) $2r=6$	6) $7z=28$	10) $\frac{1}{2}y=1$	14) $\frac{2}{3}v=\frac{4}{3}$
3) $5x=10$	7) $3u=5$	11) $1\frac{2}{3}z=2$	15) $1\frac{1}{2}u=\frac{2}{3}$
4) $4y=12$	8) $12v=8$	12) $5\frac{2}{5}z=3$	16) $3\frac{1}{2}u=\frac{5}{2}$

17) $4=\frac{x}{3}$	21) $y—6=0$	25) $n—6=0$
18) $\frac{1}{2}=2y$	22) $2x—8=0$	26) $z—3\frac{1}{2}=6\frac{1}{3}$
19) $15=\frac{1}{2}z$	23) $4=x—1$	27) $\frac{2}{3}y—2=8$
20) $\frac{4}{3}=\frac{2}{5}v$	24) $27=y—18$	28) $\frac{5}{8}c—4=16$

29) $\frac{3}{2}b—5=2\frac{1}{2}$
30) $3x—6+x=10$
31) $6x—8+2x=5x+7$
32) $4x+12—6x—8+5x=14$
33) $7u—6+3u=5u+10—u$
34) $8x+6—3x—10=16—7x$
35) $10y—5+7y—15—12y=0$
36) $0=2x+7—5x—4+x+3$

37) $2(x-1)=6$
38) $(x+2)3=2x+6$
39) $x-4=3(x-3)-7$
40) $2x-1=(x-2)4-1$

41) $(3z-2)4=6z-6$
42) $5(k+2)=13+3k$
43) $4(3v-1)=3(2v+2)+8$
44) $2(5u-3)=3(2u+5)-5.$

2. Kui arv suurendada viiekordseks, siis on tulemuseks arv, mis on endisest arvust suurem 30 võrra. Missugune on see arv?

3. Ülo on viie aasta võrra vanem Eerikust, kuna nende eluaastate arvude summa on 21. Kui vana on kumbki?

4. Kooli ja sealt koju minekuks vajas õpilane kokku 33 min., koju minekuks 5 min. võrra enam kui kooli minekuks. Määrata sinna- ja tagasimineku aeg.

5. Talunik maksis hea piimalehma eest 2 korda enam kui noore härja eest, kokku 72 kr. Arvutada loomade hind.

6. Kahes kangas oli ühesugust riiet, esimeses kolm korda enam kui teises. Esimene kangas maksis 47 kr. võrra enam kui teine. Määra kangaste hind.

7. Akende värvimise eest tasuti kahele maalrile kokku 73 kr. 50 senti. Üks värvis 8, teine 13 akent. Leida kummagi maalri töötasu.

8. Laiarööpmelise raudtee kaubavagun mahutab kaalult 2 korda enam kaupa kui kitsarööpmelise raudtee vagun, nii et laiarööpmelise raudtee vagunis oli kaupa 6400 kg enam kui kitsarööpmelise raudtee omas. Kui palju mahutab kumbki?

9. Teatrietenduse üldtulust, mis oli 118 kr., andis I koht 2 osa ja II koht 3 osa. Määrata tulu I ja II koha pileteist.

10. Talu sulase, naisteenija ja karjase aastatulud suhtusid vastavalt nagu 3:2:1. Kui suur oli igaühe tulu, kui koguteenistus oli 1200 kr.?

11. Peremees tõi veskilt koju rukkijahu 4 korda enam kui nisujahu, peale selle veel nisukliisid 6 kg; nende ainete üldkaal oli 426 kg. Arvuta rukki- ja nisujahu kaal.

12. Majas tarvitati vett laupäeval 3 korda enam kui reedel, kuna pühapäeval võeti veel 15 hl, kokku tarvitati kolmel päewal 90 hl. Arvutada reedel ja laupäeval tarvitatud vee hulk.

13. Pottahi tarvitas aastas 3 m^3 võrra enam puid, kui oli kahekordne raudahju norm. Kokku kulus puid 18 m^3 aastas. Määrata kummagi ahju kohta tarvitatud puude hulk.

14. Kolmnurga sisenurkade summa on 180^0. Leida iga nurga suurus, teades, et kaks nurka on võrdsed ja kolmas on kahe eelmise summa.

15. Voolutarvitajal oli novembri- ja detsembrikuu elektriarvete järgi maksta kr. 4,83, detsembrikuu eest kr. 2,07 võrra enam kui novembrikuu eest. Kui suure summa eest oli tarvitatud voolu kummaski kuus?

16. Klaasivabriku tööline valmistas tunnis 12 suurt pudelit, õpilane aga sama ajaga selliseid 4 tükki. Esiteks töötasid mõne tunni mõlemad koos, siis töötas õpilane 5 tundi üksinda. Kokku valmistasid nad 84 pudelit. Kui kaua tötasid mõlemad koos?

17. Kolm poissi pidi kandma jõest vett kokku 17 pange. Keskmine poiss tõi 2 pange enam kui

noorem, vanim aga 3 korda enam kui noorim vend. Mitu pange tõi iga poiss?

18. 6 krooni 20 senti jaotatakse viie lapse vahel nii, et noorim saab teatud summa, talle vanaduselt järgmine saab eelmise kahekordse summa jne. kuni vanimani. Kui palju saab igaüks lastest?

19. 17 isikut pani kokku 54,50 krooni. Jõukamad maksid igaüks 4,50 kr., kehvemad 2,50 kr. Kui palju oli esimesi ja teisi?

20. Õpilase ülalpeoks kulub $22\frac{1}{2}$ krooni kuus. Söök on 3 korda kallim korterist, kuna muud kulud on 2 kr. 75 sendi võrra väiksemad korterikuludest. Leida söögi-, korteri- ja muud kulud üksikult.

21. Kaks lennukit algab samal ajal samast kohast ja samas suunas lendu. Esimene teeb tunnis 185 km, teine 160 km. Kui kaua aja pärast on lennukite vahemaa 15 km?

22. Teekäija asus $4\frac{1}{2}$-tunnise käigu järele pooleks tunniks puhkama. Peale seda õnnestus tal sihtkohani sõita autos kiirusega 40 km. tunnis. Üldse oli rändur teel $5\frac{3}{4}$ tundi. Mitu kilomeetrit sõitis ta autos?

23. Ühe ruudu ümbermõõt on 9 cm pikem kui teise ruudu kolmekordne ümbermõõt. Nende ümbermõõtude vahe on 41 cm. Arvutada kummagi ruudu külje pikkus.

24. Venna $\frac{4}{3}$ pikkust on võrdne tema vanema õe 12 cm võrra vähendatud pikkusega. Kui pikk on vend, kui õe pikkus on 164 cm?

25. Õe pikkus on 158 cm, venna $\frac{8}{9}$ pikkust aga on võrdne õe 14 sentimeetri võrra vähendatud pikkusega. Kui pikk on vend?

26. Missugusel arvul on omadus, et ta kümnekordne, vähendatud 6 võrra, on niisama suur kui ta viiekordne, vähendatud ühega?

27. Kui arvu kolmekordne liita 16-ga, siis saadakse sama arvu neljakordne, mis on vähendatud 3 võrra. Missugune arv see on?

28. Vees on keemiliselt ühinenud vesinik ja hapnik suhtes 1:8. Kui palju vesinikku ja hapnikku võib sada lahutamisel 15 kg veest?

29. Metsast raiuti kahesuguse jämedusega kuuski, kokku 37 puud. Jämedamad andsid igaüks 12 kuupjalga, peenemad à 9 kuupjalga puud, üldse saadi 414 kuupjalga. Kui palju oli kumbagi seltsi puid?

30. Ühel ärimehel õnnestus 1200 kr. teenida ja siis veel oma varandus kahekordistada. Kui palju raha oli tal alguses, kui tal nüüd 6000 kr. võrra enam varandust on kui alguses?

31. Vambolal ja Lembitul oli kokku 74 senti raha. Kui Vambola oli oma rahast kulutanud 10 senti, Lembit aga juurde saanud 26 senti, siis oli Lembitul raha kaks korda enam kui Vambolal. Arvutada, kui palju oli kummalgi poisil esialgu raha.

32. Osteti madalaid ja supitaldrikuid kokku 60 tk., esimesed à 43 senti, viimased à 51 senti. Kokku makseti neist 27 kr. 24 senti. Leida supi- ja madalate taldrikute arv.

33. Kahe jahukoti kaal oli kokku 63 kg. Kui esimesest võeti 2 kg ja teise juurde lisati veel 5 kg jahu, siis kalus esimene kott teisest just 3 korda enam. Arvutada kummagi jahukoti esialgne kaal.

34. Ühes vaadis oli masinaõli 92 l võrra enam kui teises. Mõlemast võeti iga päev 3 l õli. 9 päeva pärast oli esimeses 5 korda enam õli järel kui teises. Määrata õli esialgne hulk kummaski vaadis.

35. Algkooli kolmes klassis on kokku 101 õpilast. I klassi õpilaste arv on 2 korda suurem teise klassi õpilaste arvust, kuna III klassis on 9 õpilast vähem kui I klassis. Leida iga klassi õpilaste arv.

36. Puuviljakaupmees müüs $\frac{3}{5}$ oma apelsinidest ja ostis juurde 33 tükki; seejärele oli tal neid 9 tükki enam kui esialgu. Kui palju oli tal neid siis?

37. Tennisväljaku pikkus peab olema kuus jalga suurem ta kahekordsest laiusest. Arvutada väljaku mõõted, teades, et ta ümbermõõt on 288 jalga.

38. Õppur läks koolist koju maale jalgsi; tagasi sõitis ta jalgrattaga. Üldse tarvitas ta teel viibimiseks 3 tundi. Leida õpilase kodu kaugus koolist, teades, et minek sündis kiirusega 4 km tunnis, tulek aga kiirusega 20 km tunnis.

39. Maiusainetetööstuses segatakse täidetud šokolaadikompvekke, mille kilo hind on 1 kr. 80 senti, täitmata kompvekkidega, hinnaga 1 kr. 30 senti kilo. Kui palju tuleb võtta üht ja teist, et segu omahind kujuneks 1,40 krooni kilo. Segamiskulusid ei tule arvestada.

40. Ramatu müügihind on 125% kirjastaja omahinnast. Kui palju maksab kirjastajale raamat, mille müügihind on 2 kr. 40 senti?

41. Müürisepp võib müürida maja seina 6 päevaga, abiline aga sama seina 9 päevaga. Kui palju päevi võtaks seina ehitamine, kui mõlemad töötaksid selle seina ladumisel üheskoos, ilma et nad teineteist töö juures segaksid?

42. Kaks õde peseb lõunaseid nõusid: üks ühel, teine järgmisel päeval. Vanem õde saab tööga valmis poole tunniga, noorem kolmveerandi tunniga. Missuguse ajaga teeksid nad töö ära üheskoos?

43. Poiss teab, et ta võib jõge mööda pärivett sõita kiirusega 3 $\frac{km}{t}$, vastuvoolu kiirusega 2 $\frac{km}{t}$. Kui kaugele võib ta sõita, kui tal selleks aega on üldse 3 tundi, millest puhkuseks tahab tarvitada $\frac{1}{2}$ tundi?

44. Kahe perekonna jaoks ostetakse korraga kurke: ühele 300, teisele 180 kurki. Esimene perekond tarvitab nädalas 10 kurki, teine aga 6 kurki. Mitme nädala pärast on mõlemal perekonnal ühesuurune arv kurke?

45. Keegi sõitis jalgrattal välja kiirusega 12 $\frac{km}{t}$. Teel kaotas ta ketikruvi ja pidi sellepärast koju tagasi tulema, ajades ratast käe kõrval. Sel viisil jõudis ta edasi 4 $\frac{km}{t}$. Kui kaugelt pöördus rattur tagasi, kui ta üldse 3 tundi teel oli?

46. Peol oli 72 isikut. Poisse oli kaks korda enam kui tütarlapsi ja täiskasvanuid kaks korda enam kui lapsi. Kui palju oli peol poisse, tütarlapsi ja täiskasvanuid?

47. Jaan Kallak'ule kingiti 3 krooni raha. Seejärele ta evis parajasti poole oma venna Kahru rahast. Mõlemal kokku oli siis 27 krooni. Kui palju oli Jaanil raha algul?

48. Kodanik tasus ühel aastal tulumaksu 45 krooni. Järgmisel aastal oli tal maksa 30 krooni. Teades, et maksualusest tulust võetakse 5% maksu, arvutada, kui suur oli maksualuse tulu vähenemine.

§ 23. POSITIIVSED JA NEGATIIVSED ARVUD.

Mitme suuruse juures võime tähele panna, et peame neid suurusi mõõtes ühe ning sellesama arvuga koos tarvitama lisanõu, kui tahame, et arve õieti mõistetaks.

Näiteid. Ütlustes „4 krooni varandust“ ja „4 krooni võlga“ on arv seesama, aga sõnad „varandust“ ja „võlga“ annavad kummalegi arvule „4“ koguni vastupidise sisu.

Teame, et uus ööp algab keskööst ja et seda loetakse 0 tunnist 24 tunnini. Kõneldes kella 10-st, ei tea me, kas on kõne kella 10-st „enne kesköödʻ või kella 10-st „pärast kesköödʻ, kui me ei lisa juurde kuupäeva või sõnu „täna“, „eile“ jne. Arv on seesama mõlemal juhtumil, aga lisasõnad annavad arvudele „suuna“, mis meie kujutelu järgi on vastupidised: üks näitab ajamomendile enne keskööd, teine ajamomendile pärast keskööd.

Sama lugu kordub temperatuuri ja kauguste mõõtmisel. Viimasel juhtumil tarvitame sageli sõnu: „paremal“, „vasakul“, või sõnu: „ülalpool“, „allpool“.

Nimetame edaspidi suurusi, mille mõõtarvudega on võimalik ühendada vastassuunalisust, suunatud suurusteks. Suunatud suurused on: varandus, aeg, temperatuur, kaugus, liikumise kiirus, kasv jne. On loomulik, et matemaatika püüab seda suunda kuidagi tähistada. Ta teeb seda erisuguste märkidega, nimelt plussiga ja miinusega arvude ees, ilma et esialgu neid märke mõistaksime tehtemärkidena.

Võime tähistada näit. „sooja“ kraadid märgiga $+$, nii et $+7^0$ tähendab „7^0 sooja“, kuna „külma“ kraadid tuleks siis märkida miinusega: -8^0 on „8^0 külma“.

Samuti: kui $+6$ tundi märgib 6 tundi pärast keskööd, siis -2 tundi peab olema 2 tundi enne keskööd.

Arvteljel, millel arvud $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, ... on nulltäpist paremal pool, peavad arvud -1, -2, -3, -4, -5, ... asetsema nulltäpist vasakul, aga nii, et näit. $+3$ (pluss kolme) ja -3 (miinus kolme) kujutaksid täpid, millest esimene asetseks nulltäpist 3 ühikut paremal pool, teine 3 ühikut vasakul (11. joon.).

$-5\ \ -4\ \ -3\ \ -2\ \ -1\ \ \ 0\ \ +1\ \ +2\ \ +3\ \ +4\ \ +5\ \ +6\ \ +7$

11. joon.

Enne aga me kujutasime arvteljel (vt. § 1) arve hoopis ilma märkideta. Missuguseid arve võiksime samastada endiste arvudega?

Vastus on: **neid** arve, millele nüüd eraldamiseks (nende vastassuunalisuse näitamiseks) ette on kirjutatud märk $+$. Seega siis

$+1=1$, $+5=5$, $+3=3$, $10=+10$, $14=+14$.

Nimetame arve, mida kirjutatakse ilma märgita või märgiga $+$ arvu ees, **positiivseiks.**

Arve, mille tähistamiseks tarvitatakse märki —, nimetatakse **negatiivseiks.**

Positiivsete ja negatiivsete arvude valdkond kannab ühist nimetust: **relatiivsed arvud.**

Kui relatiivsel arvul jätta märk ära, siis saadud „märgita" arvu hüütakse relatiivse arvu **absoluutseks suuruseks.**

Arvude $+5$, -1, -3, $+9$ absoluutsed suurused on vastavalt 5, 1, 3, 9.

§ 24. TEHTEID RELATIIVSETE ARVUDEGA.

Liitmine ja lahutamine.

A. Küsimusele, kas relatiivsete arvudega on võimalikud ka endised tehted, annab vastuse näide.

Omandiga 62 krooni võib liituda võlg 50 kr., tulemuseks on omand 12 kr. suuruses.

Kui omandi tähistame positiivse arvuga, siis tuleb võlg tähistada negatiivse arvuga:

Omand 62 kr. $=$ 62 kr., võlg 12 kr. $= -12$ kr. Kuid arvude 62 ja 50 abil on arvu 12 võimalik kujundada nii:

$$62-50,$$

seepärast

$$62+(-50)=62-50$$

ehk üldiselt

$$a+(-b)=a-b, \tag{1}$$

kui a absoluutne suurus on suurem b absol. suurusest.

Veel lihtsam on:

$$a+(+b)=a+b, \tag{2}$$

sest positiivsete arvude märgid võib lihtsalt ära jätta.

B. Lahutamine. Kui algseisust paremale astutud sammude arvud loeme positiivseiks, siis algseisust vasakule astutud sammude arvud peame lugema negatiivseiks.

Kirjutame üles sõnades ja metemaatilises kirjas: Võimleja astus algseisust paremale 5 sammu, sealt tagasi 2 sammu:

$5-2=3$ sammu (paremal pool algseisust).

Üldiselt

$$x-(+y)=x-y, \tag{3}$$

kus jällegi x absol. suurus on suurem y absol. suurusest.

Olgu ühel õpilasel omandiks 3 kr., teisel võlga 4 krooni. Rikkam on neist esimene, sest teine peaks esimese õpilase majandusliku tasemeni tõusmiseks maksma esiteks võla ja siis omandama veel 3 kr. Et arvutada õpilaste varandusliku seisu vahet, peame 3-st lahutama -4; tulemus peab selgituse kohaselt olema 7:

$$3-(-4)=7. \tag{IV}$$

Paneme tähele, et tulemus 7 saadakse arvudest 3 ja 4 ka järgmiselt:

$$3+4=7.$$

Täheliste arvudega kirjutaksime võrduse (IV) nii:

$$x-(-y)=x+y. \qquad (4)$$

Kirjutame nüüd veel kord välja kõik tuletatud võrdused (2), (1), (3) ja (4):

$$a+(+b)=a+b \qquad (2)$$
$$a+(-b)=a-b \qquad (1)$$
$$x-(+y)=x-y \qquad (3)$$
$$x-(-y)=x+y \qquad (4)$$

Ilmneb, et **arvude märkidega võime ümber käia kui tehete märkidega sulgude avamisel** (vt. juhis § 11.).

Näide:

$$c-(+d)-(-e)+(-f)=c-d+e-f.$$

D. Kerkib küsimus, mida tuleb mõista järgmise tulemuse all, kui talitada selle avaldisega nii, kui nõuab võrdus (3):

$$+6-(+8)=6-8.$$

Vastuse sellele leiame, kui toimime § 3 juhise järgi arvude lahutamise kohta arvteljel. Selle juhise järgi tuleb täpist, mis kujutab arvu 6, minna vasakule poole 8 ühiku võrra. Me läheme esiteks nulltäpini, sealt siis veel edasi vasakule 2 ühiku võrra. Jõuame punkti, mis tähistab arvu —2, seega

$$6-8=-2.$$

Selgub, et negatiivsete arvude tekkimine on ühenduses lahutamistehtega; nad tekivad siis, kui vähendatav on vähendajast väiksem.

Me võiksime eelmises näites kaheksa lahutamist mõista nii, et kaheksa lahutamise asemel lahutame esmalt kuus ja siis 2, s. t.

$$6-8=6-6-2=-2,$$

ja tulemust —2 lugeda: „lahutada 2", kuigi siin puudub arv, millest teda lahutada. Seega ka siin arvu märki võime võtta tehtemärgina. Edaspidises kursuses teeme seda alati. Seepärast siis

$3-8=-5, \quad 1-4=-3, \quad 15-21=-6$ jne.

E. Negatiivsete arvude suurusest.

Kui arvteljel positiivsed arvud kasvavad vasakult paremale, siis on igaüks neist alati väiksem paremal pool seisvatest arvudest.

Üldistades seda nulli ja negatiivsete arvude kohta kinnitame, et

1) negatiivsed arvud on väiksemad nullist ja positiivsetest arvudest ja et

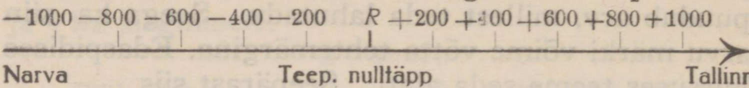
2) kahest negatiivsest arvust on see väiksem, mille absoluutne suurus on suurem.

Seega arvudest —5 ja —9 on väiksem viimane, ja arvudest —0,14 ja —0,15 on suurem esimene.

§ 25. RELATIIVSETE ARVUDE KORRUTAMINE, JAGAMINE JA ASTENDAMINE.

A. Korrutamine. Jalgrattur sõitku Rakverest Tallinna-Narva teed mööda kiirusega 200 meetrit minutis. Kaugused Rakverest Tallinna suunas avaldame positiivsete, Narva poole negatiivsete arvudega. Kuna ka ratturi liikumine võib sündida vastupidistes suunades, siis ka kiiruse kohta lepime kokku, et Tallinna poole suunatud kiiruse avaldame positiivse arvuga, vastassuunalise negatiivsega. Lõpuks oletame, et rattur täpsalt keskööl möödub kilomeetripostist, millest alatakse tee pikkuse lugemist Tallinna või Narva poole. Minutite arvud enne keskööd olgu negatiivsed, peale kesköödd positiivsed.

Kokku võetud on need tingimused allpool:



Kiirused $\begin{cases} \rightarrow \ldots \text{posit.} \\ \leftarrow \ldots \text{negat.} \end{cases}$ Ajad $\begin{cases} \text{enne kesköõd} \ldots \text{negat.} \\ \text{peale kesköõd} \ldots \text{posit.} \end{cases}$

12. joon.

Ratturi kauguse nulltäpist mingil ajamomendil leiame, kui korrutame kiiruse minutite arvuga, mis puuduvad kesköõst või möödunud kesköõst, nii et:

$$\text{kaugus nulltäpist} = \text{kiirus} \cdot \text{aeg}$$

ehk valemis:

$$K = ka.$$

Olgu	Kaugus Rakverest	
I) $k = +200 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ $a = +3$ min.	$K = (+3) \cdot (+200)$ m	$K = +600$ m Põhjus:

Sõitja on Rakverest Tallinna pool, seega kaugus on posit.

II) $k = +200 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ $a = -4$ min.	$K = (-4) \cdot (+200)$ m	$K = -800$ m Põhjus:

Sõitja on Rakverest Narva pool, kaugus on negat.

III) $k = -200 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ $a = +5$ min.	$K = (+5) \cdot (-200)$ m	$K = -1000$ m Põhjus:

Sõitja on Rakverest Narva pool, kaugus Rakverest väljendub negat. arvuga.

IV) $k = -200 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ $a = -2$ min.	$K = (-2) \cdot (-200)$ m	$K = +400$ m Põhjus:

Sõitja on Rakverest Tallinna pool, kaugus väljendub posit. arvuga.

Eelpool selgitatud seigad võtame kokku järgmiselt:

$$(+a) \cdot (+b) = +ab$$
$$(+a) \cdot (-b) = -ab$$
$$(-a) \cdot (+b) = -ab$$
$$(-a) \cdot (-b) = +ab.$$

Sõnades: **Kahe teguri korrutamisel ühesuguste märkidega tegurid annavad positiivse, isesuguste märkidega aga negatiivse korrutise.**

Märkus. Siin peame täheliste tegurite vahele panema korrutamismärgi (mispärast?).

B. Jagamine. Relatiivsete arvude jagamisel võib ette tulla neli juhtumit:

$$\frac{+a}{+b}, \quad \frac{+a}{-b}, \quad \frac{-a}{+b}, \quad \frac{-a}{-b}.$$

Olgu $\frac{a}{b}=k$, siis esimesel ja neljandal juhtumil tulemus võib olla ainult $+k$, sest ainult positiivne jagatis, mis korrutatakse jagajaga, võib anda esimesel juhtumil positiivse, neljandal juhtumil negatiivse jagatava.

Teine ja kolmas jagatis võivad nimetatud põhjusel olla ainult negatiivsed.

$$\frac{+a}{+b}=+k, \quad \frac{+a}{-b}=-k, \quad \frac{-a}{+b}=-k, \quad \frac{-a}{-a}=+k.$$

Ühesuguste märkidega arvud annavad jagamisel positiivse, isesuguste märkidega arvud aga negatiivse jagatise.

Võrrelnud esimest ja neljandat juhtumit, tuletame:

$$\frac{+a}{+b}=\frac{-a}{-b},$$

samuti teisest ja kolmandast:

$$\frac{+a}{-b}=\frac{-a}{+b},$$

mis näitavad, et murru lugeja ja nimetaja märgi võime korraga muuta vastupidiseks.

Relatiivsete arvude summa, vahe, korrutise ja jagatise kohta on maksvad kõik seadused, mis

vastavais paragrahvides on positiivsete arvude kohta kindlaks määratud. *)

D. Astendamine. Astme definitsiooni ja § 25 p. A põhjal võime kirjutada:

$$(+a)^3=(+a)\cdot(+a)\cdot(+a)=+a^3.$$

$$(+a)^n=\underbrace{(+a)\cdot(+a)\cdot(+a)\ldots(+a)}_{n \text{ korda}}=+a^n.$$

n on siin mingi positiivne täisarv.

Negatiivse arvu $-a$ astendamisel eristame kaht juhtumit:

1) astendaja on 2,
2) astendaja on 3.

1) $(-a)^2=(-a)\cdot(-a)=+a^2$.
2) $(-a)^3=(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)=-a^3$.

Sõnades: negatiivse arvu ruut on positiivne, kuup aga negatiivne arv.

§ 26. VÕRRATUSTEST.

A. Kahest arvust, mis ei ole võrdsed, võib moodustada **võrratuse.**

Näiteks arvud 8 ja 6 moodustavad võrratused

$$8>6 \text{ või } 6<8,$$

(loe: kaheksa on suurem kui kuus või: kuus on väiksem kui kaheksa). Võrratusmärk $>$ või $<$ eraldab teineteisest võrratuste pooled: vasaku ja parema.

Täheline võrratus

$$m<p$$

esitab tingimuse, et tähe m numbrilised väärtused peavad olema väiksemad tähe p numbrilistest väärtustest.

*) Negatiivsed arvud leiutati hindude poolt u. 12 saj. p. Kr. Hindud olid esimesed, kes arvestasid numbriliste arvude kirjutamisel numbri k o h t a. Arvude kirjutamise viise, kus numbri k o h a l on määrav tähendus, on leitud ka sinhaleeside juurest.

Võrratuses võivad esineda ka avaldised, näit.:

$$a-l>b+4.$$

B. Võrratuste omadusi. Olgu antud võrratus

$$a>b. \qquad (1)$$

Kui *a* väärtused liidame, korrutame või jagame positiivse arvuga või neist lahutame mõne positiivse arvu, siis on tulemused ikka suuremad kui siis, kui teeme sellesama tehte parema poolega *b*; järelikult, kui on õige võrratus (*l*), siis peavad olema õiged ka järgmised võrratused:

$$a\pm m>b\pm m,$$
$$am>bm,$$
$$\frac{a}{m}>\frac{b}{m},$$

kuni arv *m* on positiivne. On *m* negatiivne, näit. —12, ka siis jääb võrratus maksvaks, kui mõlema võrratuse poolega liidame —12 või neist lahutame —12, sest

$$a+(-12)=a-12,$$
$$a-(-12)=a+12,$$

nii et „—12"-ga liitmise asemel võime kõnelda kaheteistkümne lahutamisest. „—12"-ne lahutamise asemel võime kõnelda kaheteistkümne liitmisest.

Kui aga võrratuse

$$2<5$$

pooli korrutame mõne negatiivse arvuga, näiteks —4-ga, siis vasakust poolest saame —8, paremast —20. Võrratuse peame kirjutama ümber nii:

$$-8>-20,$$

s. t. muutma võrratusmärgi vastupidiseks. Sedasama tuleb teha negatiivse arvuga jagamise korral, sest jagada arvuga $-\frac{1}{3}$ tähendab korrutada arvuga —3.

Võrratuse negatiivse arvuga korrutamisel või jagamisel tuleb võrratusmärk muuta vastupidiseks. Nulliga ei tohi võrratust korrutada ega jagada.

D. Järeldus. Asjaolu, et võrratuste pooli võib liita ühe ning sellesama arvuga ja neist lahutada sama arvu, võimaldab võrratuse liikmete ülekandmist ühelt poolelt teisele.

		Lihtsustatult
1) Võrratus	$k+3>4$	
Lahutame võrratuse pooltest 3.	$k+3-3>4-3$	$k>1$
2) Võrratus	$-z<5-2z$	
Liidame võrratuse pooltega 2z.	$-z+2z<5-2z+2z$	$z<5$

Liikmete üleviimisel muutuvad nende märgid vastupidiseiks.

Korrutamine või jagamine võimaldab võrratuse tähelise liikme kordaja üheks muutmist. Võrratust

$$4k>5$$

neljaga jagades (4 on posit. arv) saame:

$$k>\tfrac{5}{4}.$$

Kui võrratust

$$-3m<2$$

jagada —3-ga, siis

$$m>-\tfrac{2}{3}.$$

E. Võrratuste lahendamine. Lahendada võrratus, see tähendab leida tingimus, millele peavad vastama võrratuses esineva tähe numbrilised väärtused.

Olgu antud võrratus

$$2n-3<3n+2.$$

Viinud selles võrratuses tähelised liikmed vasakule, numbrilised paremale poole, leiame:

$$2n-3n<3+2$$

ehk

$$-n < 5.$$

Korrutanud võrratuse — 1-ga, saame

$$n > -5.$$

Antud võrratuses peavad tähe *n* numbrilised väärtused olema suuremad kui —5, siis on võrratus rahuldatud.

Olgu nimelt

$$n = -2.$$

Pannud algvõrratusse selle väärtuse, leiame:

$$2 \cdot (-2) - 3 < 3 \cdot (-2) + 2$$

ehk

$$-4 - 3 < -6 + 2,$$

lõplikult

$$-7 < -4,$$

mis on õige.

Võtnud aga

$$n = -10$$

ja asetanud ta võrratusse, leiame võimatuse.

§ 27. NÄITEID JA ÜLESANDEID.

1. Kirjuta järgmistest arvpaaridest, resp. avaldistest võrratused.

1) $2 \mid 5$	6) $-2 \mid -5$	11) $-1{,}4 \mid -2{,}3$
2) $3\frac{1}{2} \mid 1{,}25$	7) $-13 \mid 14$	12) $-3\frac{2}{3} \mid -3\frac{4}{7} + 5$
3) $0{,}07 \mid 0{,}13$	8) $-4 \mid 0{,}1$	13) $-8{,}9 \mid -8{,}4$
4) $4 \mid -2$	9) $-6 \mid -2 - \frac{1}{3}$	14) $-\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$
5) $3 \mid 0$	10) $\frac{4}{5} \mid -1$	15) $-\frac{5}{8} \mid -\frac{2}{3}$.

2. Lahenda järgmised võrratused.

1) $3x < 2x + 2$	5) $4 - 3a > 1 - a$
2) $4k - 1 > 7k + 2$	6) $8 + 4b < 3b - 3$
3) $9 + m < 2m - 4$	7) $12 - 5c > 3 - 2c$
4) $0 > 2n - 6$	8) $1 - 2s < s + 5$.

3. Kirjuta vastassuunalised mõõtarvud järgmistele arvudele: 1) 4 astet allapoole, 2) 5^0 külma, 3) 2 km vastuvoolu, 4) 7 m ülespoole, 5) 6 m ida poole, 6) 12 kraadi N, 7) 4 km Rakverest Tallinna poole, 8) kell 3 homm., 9) vesi alanes 11 cm, 10) löödi 4 väravat, 11) saadi 2 kaotust.

Näide: Arvu „3 m lõuna poole“ vastassuunaline arv on „3 m põhja poole.“

4. Avalda eelmises ülesandes sõnastatud arvud ja vastused matemaatilises kujus.

5. Kirjuta järgmiste relatiivsete arvude absoluutväärtused: 1) $+16$; 2) -8; 3) -11; 4) $+100$; 5) $+5\frac{1}{2}$; 6) $-8\frac{1}{2}$; 7) $-0{,}3$; 8) $+0{,}1$; 9) $+8{,}75$; 10) $-\frac{1}{5}$; 11) $-\frac{2}{3}$; 12) $+\frac{45}{11}$.

6. Loteriil õppur Sepa võidud ja kaotused andsid järgmised tulemused: võit 25 senti, kaotus 15 senti, kaotus 20 senti, võit 10 senti, kaotus 40 senti, võit 20 senti, võit 15 senti. Avalda võitude ja kaotuste käik matemaatilises kujus ja arvuta lõpptulemus.

7. Manööverdav vedur sõitis jaamast põhja poole 200 m, sealt lõunasse 150 m, siis lõunasse 140 m, siis põhja 60 m. Missuguses kohas jaama suhtes oli vedur lõpuks?

8. Jões seisis vesi kesksuvel 14 cm normaalseisust madalamal. Vihmasadude tagajärjel tõusis vesi kuni 3 cm üle normaalseisu. Avaldada vee tõusu suurus.

9. Toimetada järgmised liitmised ja lahutamised.

1) $+3+(+6)$	6) $+4\frac{1}{2}+(-3\frac{1}{4})$
2) $+4+(+11)$	7) $-2\frac{2}{3}+(+5)$
3) $+10+(-3)$	8) $+9+(-11)$
4) $+17+(-12)$	9) $+4+(-9)$
5) $-3+(+9)$	10) $+5+(-6)$

11) $-3+(+3)$	17) $+17-(+29)$
12) $-6{,}3+(+7{,}4)$	18) $-8-(+2)$
13) $-1{,}1+(+3{,}5)$	19) $-3-(-2)$
14) $+12-(+8)$	20) $-4{,}5-(-3{,}1)$
15) $+14-(+9)$	21) $-0{,}6-(-1{,}8)$.
16) $+2-(-5)$	

10. Teha allpool näidatud järjestuses tehted.

1) $+5+[+3+(+4)]$
2) $+4+[(-3)+(-2)]$
3) $[-5+(+3)]-(+4)$
4) $[-0{,}9-(-0{,}9)]+(-2)$
5) $[+3+(+2)]-[-5-(+2)]$
6) $[+3-(-2)]-[-5-(+2)]$
7) $[-7-(+10\frac{1}{2})]+[-2+(-3)]$
8) $[+2{,}7-(-3{,}9)]+[+1{,}2+(-4{,}3)]$.

11. Kontrollida võrdused:

$$+a-(-b)-(+c)+(-d)=+a-(+c)+$$
$$+(-d)-(-b)=-(+c)+(-d)+(+a)-(-b),$$

võttes

1) $a=4,\ b=2,\ c=1,\ d=6$.
2) $a=1,\ b=3,\ c=1,\ d=4$.

12. Kontrollida alljärgnevad võrdused:

$$+x+(-y)+(+u)+(+v)=+v+[+u+(+x)+$$
$$(-y)]=[+x+(+v)]+[-y+(+u)],$$

võttes

1) $x=1,\ y=3,\ u=5,\ v=7$
2) $x=2,\ y=1,\ u=4,\ v=3$
3) $x=3,\ y=7,\ u=3,\ v=10$.

13. Keiser Augustus valitses 30. a. enne Kr. kuni 14. a. p. Kr. Mitu aastat kestis ta valitsusaeg? Teades, et Augustus suri 75-aastasena, avaldada ta sünniaasta.

14. Arvuta:

1) $(-3)\cdot(-5)$
2) $(+1)\cdot(-4)$
3) $2\cdot(-3)$
4) $(+\frac{1}{2})\cdot(+4)$
5) $-4\cdot(+8)$
6) $(+\frac{3}{8})\cdot(-20)$
7) $(-\frac{4}{7})\cdot(-\frac{14}{3})$
8) $(+12):(-4)$
9) $(-15):(+2)$
10) $(-45):(-15)$
11) $(-14):(-4)$
12) $(+2\frac{1}{2}):(-3)$
13) $\frac{-18}{4}$
14) $\frac{-32}{-20}$
15) $\frac{-16}{+10}$
16) $4{,}8:(-1{,}6)$
17) $\frac{-7{,}2}{-1{,}8}$
18) $(-\frac{5}{6}):(-\frac{10}{3})$
19) $(-1):\frac{4}{9}$
20) $1\frac{2}{3}:(-1)$.

15. Lihtsustada:

1) $(+3)\cdot(-a)\cdot(-b)$
2) $(-2)\cdot(-4)\cdot(-5)$
3) $\frac{1}{2}\cdot c\cdot(-d)$
4) $(-x)\cdot(-y)\cdot(-z)$
5) $(-8)^2$, -6^2
6) $(-2)^3$, $(-5)^3$
7) $(-1\frac{1}{2})^2$
8) $-(2\frac{1}{2})^3$
9) $-(\frac{1}{3})^2$
10) $(-\frac{2}{3})^2$
11) $(-\frac{4}{5})^3$
12) $-(\frac{3}{8})^2$.

SISUKORD:

TRÜKIVIGU.

			Trükitud:	Peab olema:
5. lk.	4. rida alt	. . .	arvu tähiseta	arvutähiseta
8. „	16. „ „	. . .	vee hulk	veehulk
10. „	5. „ „	. . .	sitsiriiet	sitsriiet
11. „	4. „ ülevalt	. .	erisummast	eri summast
11. „	6. „ alt	. . .	kõlvulikkude	kõlvuliste
14. „	2. „ ülevalt	. .	muiel	muil
37. „	11. „ ülevalt	. .	järele	järgi

Hind 1 kr.