Eesti Põllumajanduse Akadeemia

H. Merilo

Elementaarne lähendusarvutus

Tartu 1968

inédita

Eesti Põllumajanduse Akadeemia

H. Mecilo

Elementaarne lähendusarvutus

Tartu 1968

Эстонская сельскохозяйственная академия
г. Тарту, ул. Риия, I2
Мерило Х. Я.
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ
На эстонском языке

Vastutav toimetaja: J. Gabovitš
Korrektor: J. Hendrikson

Paljundamiseks antud 16. XII 1968. Paber 60x84/16 cm.
Trükipoognaid 1,25. Tingtrükipoognaid 1,14. Arvestus-
poognaid 1,4. Tiraaž 1500. MB 11202. Tell. nr. 228.
EPA rotaprint, Tartu, Riia 12
Hind 5 kop.

1. Vea mõiste

Irratsionaalarv on defineeritud mitteperioodilise lõpmata kümnendmurruna. Et aga lõpmatut kümnendmurdu pole võimalik välja kirjutada, siis kasutatakse praktiliselt irratsionaalarvu asemel mingit lõplikku kümnendmurdu.

D e f i n i t s i o o n. Reaalarvu ratsionaalseks lähendiks nimetame selle reaalarvu asemele võetud ratsionaalarvu.

Et meie edaspidi puutume kokku ainult ratsionaalarvuliste lähenditega, siis kasutame lühiduse mõttes terminit "lähend". Võttes aga ühe arvu asemele teise, teeme sellega vea.

D e f i n i t s i o o n. Reaalarvu absoluutseks veaks nimetame selle reaalarvu ja tema lähendi vahet.

Tähistades reaalarvu tähega α, tema lähendi a-ga, siis absoluutne viga

$$\Delta\alpha = \alpha - a.$$

Kui ratsionaalarvu lähendiks võtta sama ratsionaalarv, siis selle ratsionaalarvu absoluutne viga on null. Üldiselt ratsionaalarvu absoluutne viga (kui kahe ratsionaalarvu vahe) on jälle mingi ratsionaalarv.

N ä i d e 1.

$$\text{Kui } \alpha = \frac{1}{3}, \ a = 0{,}33, \text{ siis } \Delta\alpha = \frac{1}{3} - 0{,}33 = 0{,}00(3).$$

Irratsionaalarvu absoluutne viga seevastu on aga alati mingi irratsionaalarv (kui irratsionaalarvu ja ratsionaalarvu vahe). Seetõttu on absoluutsel veal teoreetiline tähtsus ja edaspidi praktilise arvutamise juures me peame tema asemel sisse tooma uue vealiigi.

D e f i n i t s i o o n. Maksimaalseks veaks Δa nimetatakse ratsionaalarvu, mis on suurem või võrdne absoluutse vea absoluutväärtusega.

$$\Delta a \geq |\Delta \alpha| .$$

Praktiliselt reaalarv määrataksegi tema lähendi ja maksimaalse veaga.

Meie ülesanne seisneb selles, et leida hästi väike maksimaalne viga, vastavalt praktika vajadusele ja võimalustele. Et selle ülesande lahendamine nõuab aga võrdlemisi palju arvutuslikku tööd, on otstarbekas kasutada arvutusmasinaid. Käesoleva teooria rakendamisel tuleb kasutada aritmomeetreid "Feliks" või BK-1. Peale selle on veel soovitav tarvitada selleks ka nende ridade kirjutaja poolt koostatud "Funktsioonide tabeleid".

Kui ratsionaalarvu lähendiks on sama ratsionaalarv, siis tema absoluutne viga on võrdne nulliga. Seega maksimaalne viga peab olema suurem või võrdne nulliga. Vastavalt meie põhimõttele, valime ta võrdseks nulliga. Ka teiste ratsionaalarvude maksimaalsed vead võime võtta võrdseks nende absoluutsete vigade absoluutväärtustega.

Irratsionaalarvu maksimaalne viga on aga alati suurem tema absoluutse vea absoluutväärtusest, s.o.

$$|\Delta \alpha| < \Delta a .$$

Üldiselt võime reaalarvu kohta kirjutada:

$$|\alpha - a| = |\Delta \alpha| \leq \Delta a ,$$

$$|\alpha - a| \leq \Delta a ,$$

$$-\Delta a \leq \alpha - a \leq \Delta a ,$$

$$a - \Delta a \leq \alpha \leq a + \Delta a .$$

Tähendab, reaalarv asetseb ratsionaalarvude $a - \Delta a$ (nn. alumine tõke) ja $a + \Delta a$ (nn. ülemine tõke) vahel.

Seda asjaolu tähistame

$$\alpha = a \pm \Delta a.$$

2. Ümardamine

Et reaalarv on defineeritud kümnendmurru abil, siis leppigem kokku, et kasutame kümnendmurde vaid lähendusarvutuses. Nii ongi lähendi ja maksimaalse vea konkreetse kujuna mõeldud lõplikku kümnendmurdu. Need saame ümardamise teel, asendades reaalarvu lõpliku kümnendmurruga. Ümardame järgmiste reeglite järgi.

Reegel 1. Kui esimesel ärajäetaval kohal on 0, 1, 2, 3 või 4, siis jäetakse soovitud kohad lihtsalt ära (ümardamine allapoole).

Reegel 2. Kui esimesel ärajäetaval kohal on 5, 6, 7, 8 või 9, siis liidetakse viimasel allesjääval kohal olevale arvule üks juurde (ümardamine ülespoole).

Reegel 3. Viga tuleb ümardada alati ülespoole.

N ä i d e 2.

$$\pi = 3{,}14159265\ldots .$$

Ümardame π 5-, 4-, 3-, ja 2-kohaliseks.

$$\pi = 3{,}1416 - 0{,}00001$$
$$\pi = 3{,}142 - 0{,}0005$$
$$\pi = 3{,}14 + 0{,}002$$
$$\pi = 3{,}1 + 0{,}05$$

Absoluutne viga oleks viimasel juhul $\Delta\pi = \pi - 3{,}1$. See on aga irratsionaalne arv $0{,}04159265\ldots$, kus järgmistel kohtadel on samad numbrid, mis π puhulgi.

D e f i n i t s i o o n. Ümardamisveaks nimetatakse ümardamisel tekkivat absoluutset viga.

Lõppvastuses ümardame maksimaalse vea ühekohaliseks vastavalt reeglile 3. Lähendites ei ole mõtet säilitada rohkem kohti kui vea 1. kohani. Ülejäänud tuleb ümardada reeglite 1 ja 2 järgi. Näidetes on märgitud maksimaalsed vead. Kui on teada märk lähendi ja maksimaalse vea vahel, siis on tihti kasulik see säilitada. Et vältida eksitusi, märgime vead sel juhul väikeses kirjas. Kirjutades $3{,}1 + {}_{0,05}$, tekib iseenesestmõistetavalt soov liita need. Liites saame aga π ülemise tõkke; alumiseks tõkkeks oleks käesoleval juhul lähend (niisiis $3{,}1 < \pi < 3{,}15$).

D e f i n i t s i o o n. <u>Standardseks veaks</u> nimetame suurimat maksimaalset viga, mis tekib ümardamisel vastavalt ümardamisreeglitele 1 ja 2.

Standardne viga on 5 esimese ärajäetud koha ühikut. Harilikult jäetakse standardne viga kirjutamata.

N ä i d e 3.

$\pi = 3{,}14$ (mida tuleb mõista nii: $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}005$), $\sqrt{2} = 1{,}414$, $\frac{1}{8} = 0{,}13$ jne. Funktsioonide tabelites on peale selle antud veel funktsioonide väärtuste lähendid standardse veaga, viimane on aga kogu tabeli jaoks ühesugune ja seetõttu jäetud kirja panemata. Nende väärtuste hulgas on ka täpseid väärtusi (absoluutse veaga 0). Hea on, kui need on kuidagi ära näidatud. (Näiteks sisaldavad vähem kohti, lõppu on asetatud punkt vms.). Samuti võib tekkida segadusi ja arusaamatusi, kui lähend on nullidega lõppev täisarv.

N ä i d e 4.

$$x = 16\,000 .$$

See ei ütle meile, milline on isegi standardne viga, kas see on 0,5; 5; 50 või 500. Siin võiks soovitada järgmist tähistust *). Kui standardne viga on 0,5, siis x = 16 000; x = = 16 00o = 16 000 ± 5, x = 16 0oo = 16 000 ± 50, x = 16 ooo = = 16 000 ± 500, x = 16 000. = 16 000 + 0.

Kui meil on teada märk lähendi ja maksimaalse vea vahel, siis me võime saada lihtsa arvutuse teel parema lähendi, millel maksimaalne viga on väiksem.

---

*) Vt. H. Ellart, V. Luigelaht, T. Reiman, E. Reiman, H. Silling, Elementaarmatemaatika ülesannete kogu, Tallinn 1964, lk. 15.

N ä i d e 5.

$\pi = 3{,}14 + 0{,}002 = 3{,}14 + 0{,}001 \pm 0{,}001 = 3{,}141 \pm 0{,}001$. Seos $\pi = 3{,}14 + 0{,}002$ ütleb, et $3{,}14 < \pi < 3{,}142$. Sama järeldub ka seosest $\pi = 3{,}141 \pm 0{,}001$. Arvutuse käigus eraldasime veast osa, mille liitsime lähendile.

D e f i n i t s i o o n. <u>Parandiks</u> nimetatakse arvu, mis tuleb liita lähendile, et saada paremat lähendit.

3. Aritmeetiliste tehete vead

Vaatleme kõigepealt liitmisel tekkivat viga.

$$(\alpha + \beta) - (a + b) = \Delta(\alpha + \beta),$$

$$|(\alpha+\beta) - (a + b)| = |\Delta(\alpha+\beta)| = |(\alpha - a) + (\beta - b)| \leq$$
$\leq |\alpha - a| + |\beta - b| = |\Delta\alpha| + |\Delta\beta| \leq \Delta a + \Delta b$. Siit $|\Delta(\alpha+\beta)| < \Delta a + \Delta b$, mis ütleb, et summa maksimaalseks veaks sobib liidetavate maksimaalsete vigade summa.

N ä i d e 6.

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1{,}414 + 1{,}732 = 3{,}146 \pm (0{,}0005 + 0{,}0005) = 3{,}146 \pm \pm 0{,}001 = 3{,}15$

Vahe maksimaalse vea arvutame järgnevalt:

$$\Delta(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) - (a - b),$$

$$|\Delta(\alpha-\beta)| = |(\alpha-\beta) - (a - b)| = |(\alpha - a) - (\beta - b)| \leq$$

$$\leq |\alpha - a| + |\beta - b| = |\Delta\alpha| + |\Delta\beta| \leq \Delta a + \Delta b.$$

Seega osutub, et vahe maksimaalne viga on samuti võrdne summaga, nimelt vähendatava ja lahutatava maksimaalsete vigade (positiivsete ratsionaalarvude) summaga.

N ä i d e 7.

$\sqrt{5} - \log 2 = 2{,}2361 \pm 0{,}00005 - (0{,}3010 \pm 0{,}00005) = (2{,}2361 - 0{,}3010) \pm 0{,}0001 = 1{,}9351 \pm 0{,}0001 = 1{,}935 \pm 0{,}0001 \pm \pm 0{,}0001 = 1{,}935 \pm 0{,}0002 = 1{,}935 \pm 0{,}0005 = 1{,}935.$

Korrutise maksimaalse vea tuletame järgmiselt:

$$\Delta(\alpha\beta) = \alpha\beta - ab,$$

$$|\Delta(\alpha\beta)| = |\alpha\beta - ab| = |(a + \Delta\alpha)(b + \Delta\beta) - ab| =$$

$$= |ab + a\cdot\Delta\beta + b\cdot\Delta\alpha + \Delta\alpha\cdot\Delta\beta - ab| = |a\cdot\Delta\beta + b\cdot\Delta\alpha + \Delta\alpha\cdot\Delta\beta| \leq$$

$$\leq |a\cdot\Delta\beta| + |b\cdot\Delta\alpha| + |\Delta\alpha\cdot\Delta\beta| = |a||\Delta\beta| + |b||\Delta\alpha| + |\Delta\alpha|\cdot|\Delta\beta| \leq$$

$$\leq |a|\cdot\Delta b + |b|\cdot\Delta a + \Delta a\cdot\Delta b.$$

Siit

$$\Delta(ab) = |a|\cdot\Delta b + |b|\cdot\Delta a + \Delta a\cdot\Delta b.$$

Seda seost on väga ebamugav sõnastada. Saadud valem lihtsustub mõnevõrra, kui piirduda juhuga, kus α ja β on positiivsed ning a ja b on ka positiivsed. Siis

$$\Delta(ab) = a\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a + \Delta a\cdot\Delta b = a\cdot\Delta b + (b + \Delta b)\cdot\Delta a.$$

Positiivsete tegurite korrutise maksimaalne viga on võrdne ühe teguri ja teise teguri maksimaalse vea ning teise teguri ülemise tõkke ja esimese teguri maksimaalse vea korrutiste summaga.

N ä i d e 8.

$$\sqrt{2}\cdot e = (1{,}414 \pm 0{,}0005)(2{,}718 + 0{,}0003) =$$
$$= (1{,}414 \pm 0{,}0005)(2{,}7182 \pm 0{,}0002) = 3{,}8435348 \pm 0{,}0002828 \pm$$
$$\pm 0{,}00135910 \pm 0{,}00000010 = 3{,}8435348 \pm 0{,}00164200 = 3{,}844 -$$
$$- 0{,}0004652 \pm 0{,}00164200 = 3{,}844 \pm 0{,}00210720 = 3{,}844 \pm 0{,}003.$$

Erijuhul, kui korrutises üks tegur on veaga $\Delta a = 0$, saame valemi lihtsamal kujul:

$$\Delta(ab) = a\cdot\Delta b.$$

N ä i d e 9.

$$12\pi = 12(3{,}14 + 0{,}002) = 12(3{,}14 + 0{,}001 \pm 0{,}001) = 12(3{,}141 \pm 0{,}001) = 37{,}692 \pm 0{,}012 = 37{,}69 + 0{,}002 \pm 0{,}012 = 37{,}69 \pm 0{,}014 = 37{,}69 \pm 0{,}02.$$

Võib ka veel edasi arvutada ja anda lähend standardse veaga:

$$12\pi = 37{,}69 \pm 0{,}02 = 37{,}7 - 0{,}01 \pm 0{,}02 = 37{,}7 \pm 0{,}03 = 37{,}7.$$

Murru maksimaalse vea leidmisel leppigem juba algul kokku, et $a > 0$, $b > 0$ ja $b > \Delta b$.

$$\Delta\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{a}{b}.$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta} - \frac{a}{b}\right| = \left|\Delta\frac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\frac{a + \Delta\alpha}{b + \Delta\beta} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{ab + b\cdot\Delta\alpha - ab - a\cdot\Delta\beta}{b(b + \Delta\beta)}\right| =$$

$$= \frac{|b\cdot\Delta\alpha - a\cdot\Delta\beta|}{|b(b + \Delta\beta)|} \leq \frac{|b\cdot\Delta\alpha| + |a\cdot\Delta\beta|}{|b|\cdot|b + \Delta\beta|} \leq \frac{b|\Delta\alpha| + a|\Delta\beta|}{b||b| - |\Delta\beta||} <$$

$$< \frac{b\cdot\Delta a + a\cdot\Delta b}{b\,|b - |\Delta\beta||} < \frac{a\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a}{b\,|b - \Delta b|} = \frac{a\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a}{b(b - \Delta b)}.$$

Seega

$$\Delta\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a}{b(b - \Delta b)}.$$

N ä i d e 10.

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 1} = \frac{2{,}646 \pm 0{,}0005}{0{,}8415 \pm 0{,}00005} =$$

$$= \frac{2{,}646}{0{,}8415} \pm \frac{2{,}646\cdot 0{,}00005 + 0{,}8415\cdot 0{,}0005}{0{,}8415(0{,}8415 - 0{,}00005)} = 3{,}1444 \pm$$

$$\pm 0{,}000015 \pm \frac{0{,}00055305}{0{,}708080175} = 3{,}1444 \pm 0{,}000015 \pm 0{,}00078106 =$$

$$= 3{,}1444 \pm 0{,}00079606 = 3{,}1444 \pm 0{,}0008.$$

Erijuhul pöördväärtuse maksimaalne viga

$$\Delta\frac{1}{a} = \frac{1\cdot\Delta a + a\cdot\Delta 1}{a(a - \Delta a)} = \frac{\Delta a}{(a - \Delta a)^2}.$$

Arvu α pöördväärtuse $\frac{1}{\alpha}$ maksimaalne viga on võrdne selle arvu maksimaalse vea ja tema alumise tõkke ruudu suhtega.

N ä i d e 11.

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{2,71828 \pm 0,000002} = \frac{1}{2,71828} \pm \frac{0,000002}{2,718278^2} =$$

$$= 0,367880 \pm 0,0000004 \pm 0,00000027068 \doteq 0,367880 \pm$$

$$\pm 0,00000067068 = 0,367880 \pm 0,0000007 = 0,36788 .$$

4. Astme ja logaritmi viga

Astme α^n (n = 2, 3, 4, ...) maksimaalse vea arvutamisel võime samuti piirduda juhuga, kus $\alpha > 0$, $a > 0$.

$$\Delta(\alpha^n) = \alpha^n - a^n$$

$$|\Delta(\alpha^n)| = |\alpha^n - a^n| = |(a + \Delta\alpha)^n - a^n| = \left|\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} (\Delta\alpha)^m -\right.$$

$$\left.- a^n\right| = \left|\sum_{m=1}^{n} C_n^m a^{n-m} (\Delta\alpha)^m\right| \leq \sum_{m=1}^{n} \left|C_n^m a^{n-m} (\Delta\alpha)^m\right| =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} |C_n^m| |a^{n-m}| |(\Delta\alpha)^m| = \sum_{m=1}^{n} C_n^m a^{n-m} |\Delta\alpha|^m \leq \sum_{m=1}^{n} C_n^m a^{n-m} (\Delta a)^m,$$

kust

$$\Delta(a^n) = \sum_{m=1}^{n} C_n^m a^{n-m} (\Delta a)^m.$$

Ruudu maksimaalse vea leiame saadud valemist, võttes n = 2:

$$\Delta(a^2) = \sum_{m=1}^{2} C_2^m a^{2-m} (\Delta a)^m = C_2^1 a^1 \cdot \Delta a + C_2^2 a^0 (\Delta a)^2 =$$

$$= 2a \cdot \Delta a + (\Delta a)^2.$$

$$\Delta(a^2) = 2a \cdot \Delta a + (\Delta a)^2 .$$

N ä i d e 12.

$$\tan^2 \frac{1}{2} = (0,5463 \pm 0,00005)^2 = 0,29844369 \pm 0,00005463 \pm$$

$$\pm 0,0000000025 = 0,2984 \pm 0,00004369 \pm 0,0000546325 = 0,2984 \pm$$

$$\pm 0,0000983225 = 0,2984 \pm 0,0001 = 0,298 \pm 0,0005 = 0,298.$$

Kuubi maksimaalse vea saame, võttes $n = 3$:

$$\Delta(a^3) = \sum_{m=1}^{3} C_3^m a^{3-m} (\Delta a)^m = C_3^1 a^2 \cdot \Delta a + C_3^2 a (\Delta a)^2 +$$

$$+ C_3^3 a^0 (\Delta a)^3 = 3a^2 \cdot \Delta a + 3a(\Delta a)^2 + (\Delta a)^3.$$

$$\Delta(a^3) = 3a^2 \cdot \Delta a + 3a(\Delta a)^2 + (\Delta a)^3 .$$

N ä i d e 13.

$$(11,39 \pm 0,003)^3 = 1477,648619 \pm (3 \cdot 129,7321 \cdot 0,003 +$$
$$+ 3 \cdot 11,39 \cdot 0,000009 + 0,000000027) = 1478 \pm 0,351381 \pm$$
$$\pm 1,1675889 \pm 0,00030753 \pm 0,000000027 = 1478 \pm 2 = 1480 \pm 4 = 1480.$$

Juure maksimaalse vea arvutame vaid ruut- ja kuupjuure jaoks ($\alpha > 0$, $a > \Delta a$).

$$|\Delta\sqrt{\alpha}| = |\sqrt{\alpha} - \sqrt{a}| = \left| \frac{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{a})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{a})}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{a}} \right| = \frac{|\alpha - a|}{|\sqrt{\alpha} + \sqrt{a}|} =$$

$$= \frac{|\Delta\alpha|}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{a}} \leqslant \frac{\Delta a}{\sqrt{a - \Delta a} + \sqrt{a}} \leqslant \frac{\Delta a}{2\sqrt{a - \Delta a}},$$

sest

$$\sqrt{a + \Delta\alpha} + \sqrt{a} \geqslant \sqrt{a - \Delta a} + \sqrt{a} .$$

Seega ruutjuure maksimaalne viga

$$\Delta\sqrt{a} = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a - \Delta a}} .$$

Ruutjuure maksimaalne viga on võrdne juuritava maksimaalse vea ja juuritava alumise tõkke kahekordse ruutjuure suhtega.

N ä i d e 14.

$$\sqrt{\ln 2} = \sqrt{0,6931 \pm 0,00005} = \sqrt{0,6931} \pm \frac{0,00005}{2\sqrt{0,69305}} =$$

$$= 0,83253 \pm 0,000005 \pm \frac{0,000025}{\sqrt{0,69305}} = 0,83253 \pm 0,000005 \pm$$

$\pm \frac{0,000025}{0,8324} = 0,83253 \pm 0,000005 \pm 0,00003004 = 0,83253 \pm$

$\pm 0,00003504 = 0,83253 \pm 0,00004 .$

Kuupjuure maksimaalne viga

$$|\Delta\sqrt[3]{\alpha}| = |\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{a}| = \left|\frac{\alpha - a}{\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha a} + \sqrt[3]{a^2}}\right| =$$

$$\approx \frac{|\Delta\alpha|}{\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha a} + \sqrt[3]{a^2}} \leq \frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{(a - \Delta a)^2}},$$

$$\Delta\sqrt[3]{a} = \frac{\Delta a}{3 \cdot \sqrt[3]{(a - \Delta a)^2}} .$$

Kuupjuure maksimaalne viga on võrdne juuritava maksimaalse vea ja juuritava alumise tõkke ruudu kolmekordse kuupjuure suhtega.

Logaritmide vigadest arvutame esiteks naturaallogaritmi maksimaalse vea. Naturallogaritmideks nimetatakse logaritme alusel e. Naturaallogaritmi arvust α tähistatakse $\ln\alpha$. Irratsionaalarv e standardse veaga on 2,718281828. Naturaallogaritmi kohta kehtib seos $\ln(1+x) \leq x$. Naturaallogaritmi absoluutne viga

$$\Delta\ln\alpha = \ln\alpha - \ln a = \ln(a + \Delta\alpha) - \ln a = \ln\frac{a + \Delta\alpha}{a} =$$
$$= \ln(1 + \frac{\Delta\alpha}{a}).$$

Nüüd, maksimaalse vea arvutamisel, peame silmas pidama, kas $\Delta\alpha$ on positiivne või negatiivne. Kui $\Delta\alpha > 0$, siis

$$|\Delta\ln\alpha| = |\ln(1 + \frac{\Delta\alpha}{a})| = \ln(1 + \frac{\Delta\alpha}{a}) \leq \frac{\Delta\alpha}{a} \leq \frac{\Delta a}{a} \leq \frac{\Delta a}{a - \Delta a}.$$

On aga $\Delta\alpha < 0$, siis

$$|\Delta\ln\alpha| = \left|\ln\frac{a + \Delta\alpha}{a}\right| = \ln\frac{a}{a + \Delta\alpha} \leq \ln\frac{a}{a - \Delta a} =$$

$$= \ln\frac{a - \Delta a + \Delta a}{a - \Delta a} = \ln(1 + \frac{\Delta a}{a - \Delta a}) \leq \frac{\Delta a}{a - \Delta a}.$$

Seega, logaritmi maksimaalseks veaks võib võtta

$$\Delta \ln a = \frac{\Delta a}{a - \Delta a}.$$

Kümnendlogaritmi maksimaalse vea arvutame järgmiselt:

$$|\Delta \log \alpha| = |\log \alpha - \log a| = |\log e \cdot \ln \alpha - \log e \cdot \ln a| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot |\Delta \ln \alpha| \leq \frac{\Delta a}{2(a - \Delta a)}.$$

Seega $\Delta \log a = \dfrac{\Delta a}{2(a - \Delta a)}$.

N ä i d e 15.

$$\ln \pi = \ln(3{,}14 \pm 0{,}002) = \ln 3{,}14 \pm \frac{0{,}002}{3{,}138} = 1{,}1442 \pm$$

$$\pm 0{,}00005 \pm 0{,}000638 = 1{,}1442 \pm 0{,}000688 = 1{,}1442 \pm 0{,}0007.$$

N ä i d e 16.

$$\log \pi = \log(3{,}14 \pm 0{,}002) = \log 3{,}14 \pm \frac{0{,}002}{2 \cdot 3{,}138} = 0{,}4969 \pm$$

$$\pm 0{,}00005 \pm 0{,}00032 = 0{,}4969 \pm 0{,}00037 = 0{,}4969 \pm 0{,}0004.$$

Astme a^{α} maksimaalse vea arvutamisel piirdume juhuga, kus aluseks on e.

$$|\Delta(e^{\alpha})| = |e^{\alpha} - e^{a}| = |e^{a+\Delta\alpha} - e^{a}| = |e^{a+\Delta\alpha} \cdot (1 - e^{-\Delta\alpha})| =$$

$$= |e^{a+\Delta\alpha}||1 - e^{-\Delta\alpha}| \leq e^{a+\Delta a} \cdot |\Delta\alpha| \leq e^{a+\Delta a} \cdot \Delta a,$$

kusjuures on kasutatud võrratust

$$1 - e^{-x} \leq x.$$

Tähendab,

$$\Delta(e^{a}) = e^{a+\Delta a} \cdot \Delta a.$$

N ä i d e 17.

$$e^{\sqrt{2}} = e^{1,414 \pm 0,0005} = e^{1,414} \pm e^{1,4145} \cdot 0,0005 = e \cdot e^{0,414} \pm$$

$$\pm e \cdot e^{0,415} \cdot 0,0005 = (2,71828 \pm 0,000005)(1,5129 \pm 0,00005) \pm$$

$$\pm 2,7183 \cdot 1,5145 \cdot 0,0005 = 4,112485812 \pm 0,0001359140 \pm$$

$$\pm 0,0000075645 \pm 0,00000000025 \pm 0,002058432675 = 4,112 \pm$$

$$\pm 0,000485812 \pm 0,002201911425 = 4,112 \pm 0,002687723425 =$$

$$= 4,112 \pm 0,003 = 4,11 \pm 0,005 = 4,11.$$

Kui on üldine aste α^{β}, siis teisendame enne

$$\alpha^{\beta} = e^{\beta \ln \alpha}$$

ning arvutame vea järk-järgult.

5. Trigonomeetriliste funktsioonide vead.

Järgnevas eeldame, et nurk on mõõdetud radiaanmõõdus (kraadimõõdu kasutamisel arvutused muutuvad tunduvalt keerulisemaks). Radiaanmõõdu korral kehtib seos $|\sin x| \leq |x|$.

Trigonomeetriliste funktsioonide maksimaalsete vigade arvutamisel on küllaldane, kui vaatleme nurki vaid teravnurga ulatuses $0 < a - \Delta a < \alpha < a + \Delta a < \frac{\pi}{2}$; taandamisvalemite abil on see alati saavutatav.

Siinuse maksimaalse vea arvutame järgmiselt:

$$|\Delta \sin \alpha| = |\sin \alpha - \sin a| = \left|2 \sin \frac{\alpha - a}{2} \cos \frac{\alpha + a}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\sin \frac{x}{2}\right| \left|\cos \frac{a + \Delta\alpha + a}{2}\right| \leq 2 \cdot \frac{|\Delta\alpha|}{2} \cos\left(a + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) \leq$$

$$\leq |\Delta\alpha| \cos(a - \Delta a) \leq \Delta a \cdot \cos(a - \Delta a),$$

$$\Delta \sin a = \Delta a \cdot \cos(a - \Delta a).$$

Siinuse maksimaalne viga on võrdne nurga maksimaalse vea ja nurga alumise tõkke koosinuse korrutisega.

N ä i d e 18.

$\sin\frac{1}{3} = \sin(0{,}333 \pm 0{,}0004) = 0{,}3269 \pm 0{,}00005 \pm 0{,}0004 \cdot$
$\cdot \cos 0{,}332 = 0{,}3269 \pm 0{,}00005 \pm 0{,}0004 \cdot 0{,}9454 = 0{,}3269 \pm$
$\pm\, 0{,}00005 \pm 0{,}00037816 = 0{,}3269 \pm 0{,}00042816 = 0{,}3269 \pm 0{,}0005.$

Et $\cos(a - \Delta a) \leq 1$, kasutatakse ka veel lihtsamat valemit $\Delta \sin a = \Delta a$.

Koosinuse maksimaalse vea arvutame analoogiliselt:

$$|\Delta \cos\alpha| = |\cos\alpha - \cos a| = \left|-2\sin\frac{\alpha - a}{2}\sin\frac{\alpha + a}{2}\right| =$$
$$= |-2|\left|\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\right|\left|\sin\frac{a + \Delta\alpha + a}{2}\right| \leq 2\cdot\frac{|\Delta\alpha|}{2}\cdot\sin\left(a + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) \leq$$
$$\leq \Delta a \cdot \sin(a + \Delta a),$$

$$\Delta \cos a = \Delta a \cdot \sin(a + \Delta a).$$

Koosinuse maksimaalne viga on võrdne nurga maksimaalse vea ja nurga ülemise tõkke siinuse korrutisega.

N ä i d e 19.

$$\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{3{,}14 \pm 0{,}002}{5} = \cos(0{,}628 \pm 0{,}0004) = \cos 0{,}628 \pm$$
$$\pm\, 0{,}0004 \sin 0{,}629 = 0{,}8092 \pm 0{,}00005 \pm 0{,}0004 \cdot 0{,}5883 =$$
$$= 0{,}8092 \pm 0{,}00005 \pm 0{,}00023532 = 0{,}8092 \pm 0{,}00028532 =$$
$$= 0{,}8092 \pm 0{,}0003 = 0{,}809 \pm 0{,}0002 \pm 0{,}0003 = 0{,}809 \pm$$
$$\pm\, 0{,}0005 = 0{,}809.$$

Ka koosinuse jaoks kasutatakse lihtsamat valemit

$$\Delta \cos a = \Delta a.$$

Tangensi maksimaalse vea leiame järgmiselt:

$$|\Delta \tan\alpha| = |\tan\alpha - \tan a| = \left|\frac{\sin(\alpha - a)}{\cos\alpha\cdot\cos a}\right| = \frac{|\sin\Delta\alpha|}{|\cos(a + \Delta\alpha)\cos a|} \leq$$

$$\leq \frac{|\Delta\alpha|}{\cos(a+\Delta\alpha)\cdot\cos a} \leq \frac{|\Delta\alpha|}{\cos(a+\Delta a)\cos(a+\Delta a)} \leq \frac{\Delta a}{\cos^2(a+\Delta a)},$$

$$\Delta \tan a = \frac{\Delta a}{\cos^2(a+\Delta a)}.$$

Tangensi maksimaalne viga on võrdne nurga maksimaalse vea ja nurga ülemise tõkke koosinuse ruudu suhtega.

N ä i d e 20.

$$\tan(1{,}234 \pm 0{,}0005) = \tan 1{,}234 \pm \frac{0{,}0005}{\cos^2 1{,}235} = 2{,}856 \pm 0{,}0005 \pm$$

$$\pm \frac{0{,}0005}{0{,}3295^2} = 2{,}856 \pm 0{,}0005 \pm \frac{0{,}0005}{0{,}10857025} = 2{,}856 \pm$$

$$\pm\, 0{,}0005 \pm 0{,}00460532 = 2{,}856 \pm 0{,}00510532 = 2{,}856 \pm 0{,}006.$$

Analoogiline on kootangensi maksimaalne viga:

$$|\Delta \cot\alpha| = |\cot\alpha - \cot a| = \left|\frac{\sin(\alpha - a)}{\sin\alpha\cdot\sin a}\right| =$$

$$= \frac{|\sin\Delta\alpha|}{|\sin(a+\Delta\alpha)||\sin a|} \leq \frac{|\Delta\alpha|}{\sin(a-\Delta a)\cdot\sin(a-\Delta a)} \leq \frac{\Delta a}{\sin^2(a-\Delta a)},$$

$$\Delta \cot a = \frac{\Delta a}{\sin^2(a-\Delta a)}.$$

Kootangensi maksimaalne viga on võrdne nurga maksimaalse vea ja nurga alumise tõkke siinuse ruudu suhtega.

6. Arkusfunktsioonide vead.

Arkussiinuse maksimaalse vea arvutamisel kasutame valemeid

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$$

ja $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}\cdot|x|$.

Kui $\alpha > 0$, $a > 0$, siis

$$|\Delta \arcsin \alpha| = |\arcsin \alpha - \arcsin a| = |\arcsin(\alpha\sqrt{1 - a^2} -$$

$$- a\sqrt{1 - \alpha^2})| \leq \frac{\pi}{2} |\alpha\sqrt{1 - a^2} - a\sqrt{1 - \alpha^2}| \leq$$

$$\leq 2\left|\frac{\alpha^2 - a^2}{\alpha\sqrt{1 - a^2} + a\sqrt{1 - \alpha^2}}\right| \leq 2\left|\frac{(a + \Delta\alpha)^2 - a^2}{(a + \Delta\alpha)\sqrt{1 - a^2} + a\sqrt{1 - (a + \Delta\alpha)^2}}\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\frac{2a\cdot\Delta\alpha + (\Delta\alpha)^2}{(a + \Delta\alpha + a)\sqrt{1 - (a + \Delta a)^2}}\right| \leq 2\left|\frac{\Delta\alpha}{\sqrt{1 - (a + \Delta a)^2}}\right| =$$

$$= \frac{2\cdot|\Delta\alpha|}{\sqrt{1 - (a + \Delta a)^2}} \leq \frac{2\cdot\Delta a}{\sqrt{1 - (a + \Delta a)^2}} .$$

Seega

$$\Delta \arcsin a = \frac{2\cdot\Delta a}{\sqrt{1 - (a + \Delta a)^2}} .$$

Arkuskoosinuse maksimaalse vea arvutamisel arvestame, et

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} .$$

$$|\Delta \arccos \alpha| = |\Delta(\frac{\pi}{2} - \arcsin \alpha)| = |\Delta\frac{\pi}{2} - \Delta \arcsin \alpha| \leq$$

$$\leq |\Delta\frac{\pi}{2}| + |\Delta \arcsin \alpha| \leq \Delta \arcsin a = \frac{2\cdot\Delta a}{\sqrt{1 - (a + \Delta a)^2}} ,$$

nest $\frac{\pi}{2}$ vea saame võtta praktiliselt väiksema kui arkussiinuse ümardamisvea.

Seega

$$\Delta \arccos a = \frac{2\cdot\Delta a}{\sqrt{1 - (a + \Delta a)^2}} .$$

N ä i d e 21.

$$\arccos \frac{2}{3} = \arccos (0,667 \pm 0,0004) = \arccos 0,667 \pm$$

$$\pm \frac{2\cdot 0,0004}{\sqrt{1 - 0,6674^2}} = 0,8406 \pm 0,00005 \pm \frac{0,0008}{\sqrt{1 - 0,446}} =$$

$$= 0,8406 \pm 0,00005 \pm \frac{0,0008}{\sqrt{0,554}} =$$

$$= 0{,}8406 \pm 0{,}00005 \pm \frac{0{,}0008}{0{,}7442} = 0{,}8406 \pm 0{,}00005 \pm 0{,}001075 =$$

$$= 0{,}841 \pm 0{,}0004 \pm 0{,}001125 = 0{,}841 \pm 0{,}001525 = 0{,}841 \pm 0{,}002 =$$

$$= 0{,}84 \pm 0{,}001 \pm 0{,}002 = 0{,}84 \pm 0{,}003 = 0{,}84 \pm 0{,}005 = 0{,}84.$$

Arkustangensi maksimaalse vea tuletamisel arvestame, et kehtivad seosed:

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy},$$

$$\arctan x \leqslant x; \ (x \geqslant 0).$$

Kui $\alpha > 0$, $a \geqslant 0$, siis

$$|\Delta \arctan \alpha| = |\arctan \alpha - \arctan a| = \left|\arctan \frac{\alpha - a}{1 + a\alpha}\right| =$$

$$= \arctan \left| \frac{\Delta\alpha}{1 + a(a + \Delta\alpha)} \right| = \arctan \frac{|\Delta\alpha|}{1 + a(a + \Delta\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant \arctan \frac{\Delta a}{1 + a(a - \Delta a)} \leqslant \frac{\Delta a}{1 + a(a - \Delta a)},$$

$$\Delta \arctan a = \frac{\Delta a}{1 + a(a - \Delta a)}.$$

Arkuskootangensi maksimaalse vea arvutamisel arvestame, et $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$.

$$|\Delta \operatorname{arccot} \alpha| = \left|\Delta\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \alpha\right)\right| = \left|\Delta \frac{\pi}{2} - \Delta \arctan \alpha\right| \leqslant \left|\Delta \frac{\pi}{2}\right| +$$

$$+ |\Delta \arctan \alpha| \leqslant \Delta \arctan a = \frac{\Delta a}{1 + a(a - \Delta a)}.$$

Seega

$$\Delta \operatorname{arccot} a = \frac{\Delta a}{1 + a(a - \Delta a)}.$$

N ä i d e 22.

$$\operatorname{arccot} e = \operatorname{arccot} (2{,}72 \pm 0{,}002) = \operatorname{arccot} 2{,}72 \pm$$

$$\pm \frac{0{,}002}{1 + 2{,}72 \cdot 2{,}718} = 0{,}3523 \pm 0{,}00005 \pm \frac{0{,}002}{1 + 7{,}39296} =$$

$$= 0{,}3523 \pm 0{,}00005 \pm \frac{0{,}002}{8{,}39296} = 0{,}3523 \pm 0{,}00005 \pm$$

$$\pm 0{,}000239 = 0{,}3523 \pm 0{,}000289 = 0{,}3523 \pm 0{,}0003.$$

7. Relatiivne viga.

Arvutuste efektiivsust näitab relatiivne viga.

D e f i n i t s i o o n. Relatiivseks veaks nimetatakse maksimaalse vea ja lähendi suhet.

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a}.$$

Relatiivset viga väljendatakse sageli protsentides. Valemeid relatiivse vea jaoks meie ei tuleta, vaid arvutame ta definitsiooni järgi maksimaalse vea kaudu.

N ä i d e 23.

$$\delta 3{,}14 = \frac{\Delta 3{,}14}{3{,}14} = \frac{0{,}002}{3{,}14} = 0{,}0007 = 0{,}07\ \%.$$

D e f i n i t s i o o n. Täpsuseks nimetame relatiivse vea pöödväärtust

$$t = \frac{a}{\Delta a}.$$

Et irratsionaalarvu maksimaalne viga $\Delta a > 0$, siis on täpsus neil juhtudel olemas. Vaid ratsinaalarvu korral võib Δa olla 0 ja seega ratsionaalarvude aritmeetikas võime arvutada absoluutse "matemaatilise täpsusega". Teistel juhtudel aga võime jaotada arvutuse tulemused täpsusklassidesse järgneva tabeli kujul.

Täpsus	täpsusklass
$1 \leq t < 10$	1
$10 \leq t < 100$	2
$100 \leq t < 1000$	3
....	.....
$10^n \leq t < 10^{n+1}$	n

Täpsusklass võib olla ka negatiivne (halva arvutuse tagajärjel). Kui näiteks $0,1 \leq t < 1$, siis täpsusklass on -1. Et saada võimalikult suurt täpsusklassi, tuleb kasutada juba arvutuse alguses kõike, mida võimaldavad tabelid ja aritmomeetrid. Muuseas, see ei tõsta oluliselt arvutustööde mahtu.

Hind 5 kop.