Tartu Ülikool
loodus- ja täppisteaduste valdkond
matemaatika ja statistika instituut
matemaatika eriala

Andre Ostrak

Pidevate lineaarsete operaatorite ruumi Radon–Nikodými omadus

Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Märt Põldvere

Tartu 2018

Pidevate lineaarsete operaatorite ruumi Radon–Nikodými omadus

Magistritöö
Andre Ostrak

Lühikokkuvõte. Magistritöös esitatakse järgneva K. T. Andrewsi teoreemi [J. London Math. Soc., 1983] üksikasjalik tõestus: *kui X ja Y on Banachi ruumid, kusjuures kaasruumil X^* ja ruumil Y on Radon–Nikodými omadus, iga pidev lineaarne operaator $X \to Y$ on kompaktne ning kaasruumi X^* iga normi järgi tõkestatud separaabli alamhulga $*$-nõrga sulundi suhteline $*$-nõrk topoloogia on metriseeruv, siis pidevate lineaarsete operaatorite $X \to Y$ ruumil $\mathcal{L}(X, Y)$ on Radon–Nikodými omadus.*

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: Banachi ruum, pidevate lineaarsete operaatorite ruum, Radon–Nikodými omadus.

Radon–Nikodým property for the space of bounded linear operators

Master's thesis
Andre Ostrak

Abstract. In this Master's thesis, a detailed presentation of the proof of the following theorem by K. T. Andrews [J. London Math. Soc., 1983] is given: *Let X and Y be Banach spaces. Suppose that the dual space X^* and Y have the Radon–Nikodým property, that every bounded linear operator $X \to Y$ is compact, and that the weak*-closure of every bounded norm separable subset of X^* is weak*-metrizable. Then the space $\mathcal{L}(X, Y)$ of bounded linear operators $X \to Y$ has the Radon–Nikodým property.*

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
Keywords: Banach space, space of bounded linear operators, Radon–Nikodým property.

Sisukord

Sissejuhatus

Banachi ruumi *Radon–Nikodými omaduse* defineerimisel on lähtekohaks klassikaline Radon–Nikodými teoreem.

Radon–Nikodými teoreem (vt nt [F, lk 90, teoreem 3.8])**.** *Olgu* (Ω, Σ, μ) *lõpliku mõõduga ruum ning olgu* $\nu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ *märgiga mõõt, kusjuures* $\nu \ll \mu$ *(st* ν *on absoluutselt* μ*-pidev). Siis leidub funktsioon* $g \in L_1(\mu)$ *nii, et* ν *on määramata integraal funktsioonist* g*, st*

$$\nu(E) = \int_E g\, d\mu \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral.}$$

Funktsiooni g eelnevast teoreemist nimetatakse mõõdu ν *Radon–Nikodými tuletiseks* mõõdu μ järgi (või ka mõõdu ν *tiheduseks* mõõdu μ suhtes) ja tähistatakse sümboliga $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Loomulik on küsida, kas Radon–Nikodými teoreem jääb kehtima, kui seal vaadelda märgiga mõõdu ν rollis Banachi ruumi X väärtuselist tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivset hulgafunktsiooni ning nõuda, et funktsioon $g\colon \Omega \to X$ oleks Bochneri mõttes integreeruv. (Bochneri integraal on Lebesgue'i integraali loomulik üldistus Banachi ruumi väärtuselistele funktsioonidele.) Osutub, et Radon–Nikodými teoreemi sellise üldistuse kehtivus sõltub ruumist X. Kui Banachi ruumi X korral selline Radon–Nikodými teoreemi üldistus kehtib, siis öeldakse, et ruumil X on *Radon–Nikodými omadus.* (Banachi ruumi Radon–Nikodými omadus on täie matemaatilise rangusega defineeritud käesoleva magistritöö paragrahvis 2.)

Käesoleva magistritöö eesmärk on kirjutada üksikasjalikult lahti järgmise reaalsete Banachi ruumide X ja Y vahel tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ Radon–Nikodými omadust kirjeldava teoreemi tõestus.

Magistritöös keskne Andrewsi teoreem (K. T. Andrews (1983); vt [A^2, teoreem 5])**.** *Olgu ruumidel* X^* *ja* Y *Radon–Nikodými omadus ning olgu* $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{K}(X, Y)$ *(st iga pidev lineaarne operaator* $X \to Y$ *on kompaktne). Kui*

($\sharp$) *kaasruumi* X^* *iga normi järgi tõkestatud separaabli alamhulga* $*$*-nõrga sulundi suhteline* $*$*-nõrk topoloogia on metriseeruv,*

siis ruumil $\mathcal{L}(X, Y)$ *on Radon–Nikodými omadus.*

Eelnev teoreem parendab J. Diesteli ja T. J. Morrisoni teoreemi [DM, lk 10, järeldus] aastast 1979, kus eelduse ($\sharp$) asemel oli tugevam eeldus, et X on mingi nõrgalt kompaktselt genereeritud Banachi ruumi alamruum (põhjenduse, et sellest eeldusest järeldub eeldus ($\sharp$), võib leida nt artiklist [A^2, lk 117]). Kui $X \neq \{0\}$ ja $Y \neq \{0\}$, siis eeldus ruumide X^* ja Y Radon–Nikodými omaduse kohta on ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ Radon–Nikodými omaduseks tarvilik, sest Radon–Nikodými omadus pärandub Banachi ruumilt kinnistele alamruumidele (vt nt [DU, lk 81, teoreem 2]) ning $\mathcal{L}(X, Y)$ sisaldab nii kaasruumiga X^* isomeetriliselt isomorfse alamruumi kui ka ruumiga Y isomeetriliselt isomorfse alamruumi (vt nt teoreemi 1.12, (i)$\Rightarrow$(ii), tõestust). Samuti pole eelnevas teoreemis üldjuhul võimalik loobuda eeldusest $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{K}(X, Y)$. Tõepoolest, olgu näiteks $X = Y = \ell_2$. Kuna ruumi ℓ_2 ühikoperaator $I \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2) \backslash \mathcal{K}(\ell_2, \ell_2)$, siis $\mathcal{L}(X, Y) \neq \mathcal{K}(X, Y)$. Kuna ruum ℓ_2 on refleksiivne, siis nii kaasruumil X^* kui ka ruumil Y on Radon–Nikodými omadus (sest refleksiivsetel Banachi ruumidel on Radon–Nikodými omadus, vt nt [DU, lk 76, järeldus 13]). Samuti kehtib ($\sharp$), sest kaasruumi tõkestatud alamhulga $*$-nõrk sulund on tõkestatud ning ruumi $X = \ell_2$ separaabluse tõttu on kaasruumi X^* iga tõkestatud alamhulga suhteline $*$-nõrk topoloogia metriseeruv (vt nt [M, lk 230, järeldus 2.6.20] või käesoleva magistritöö lauset 1.8). Samal ajal ei ole ruumil $\mathcal{L}(X, Y)$ Radon–Nikodými omadust, sest kompaktsete operaatorite alamruum $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{K}(\ell_2, \ell_2)$ sisaldab ruumiga c_0 isomorfse alamruumi (vt nt [FHHMZ, lk 681, ülesanne 15.17]) ning ruumil c_0 ei ole Radon–Nikodými omadust (vt nt [DU, lk 60, näide 1, ja lk 61, definitsioon 3]). Kui Y on kaasruum (st $Y = W^*$ mingi Banachi ruumi W korral), siis eelnev teoreem kehtib ka ilma eelduseta ($\sharp$) (vt [A^2, teoreem 6]). Pole aga teada, kas see teoreem jääb ilma eelduseta ($\sharp$) kehtima ka üldjuhul.

Magistritöö koosneb neljast paragrahvist.

Esimeses ja teises paragrahvis esitatakse magistritöös keskse Andrewsi teoreemi tõestamiseks vajalikud üldtuntud eelteadmised vastavalt Banachi ruumide (ning, üldisemalt, lokaalselt kumerate ruumide) ja vektormõõtude teooriast. Seejuures folkloorsema iseloomuga tulemused, millele me kirjandusest viidet ei suutnud leida, (aga mitte ainult sellised tulemused!) on esitatud koos tõestusega. Käsitletavatest teemadest annab hea ülevaate nende paragrahvide alajaotiste pealkirjade loend sisukorras.

Kolmandas paragrahvis keskendutakse operaator-väärtuselistele vektormõõtudele: kõigepealt tõestatakse üks hästi tuntud üldine teoreem operaatorväärtuselise vektormõõdu nõrga tiheduse olemasolust ([Din, lk 263–264, teoreem 4]; vt teoreemi 3.3) ning uuritakse selle tiheduse omadusi (vt lauset 3.4); seejärel tõestatakse Andrewsi teoreem kompaktsete operaatorite väärtuselise tõkestatud funktsiooniga nõrgalt ekvivalentse mõõtuva funktsiooni olemasolust ([A[2], teoreem 1]; vt teoreemi 3.5).

Lõpetuseks, neljandas paragrahvis tõestatakse eelnevale tuginedes magistritöös keskne Andrewsi teoreem ([A[2], teoreem 5]; vt teoreemi eespool või teoreemi 4.1).

Kõik magistritöös vaadeldavad (vektor)ruumid on reaalsed. Töös on kasutatud Banachi ruumide teoorias standardseid tähistusi. Olgu X (reaalne) normeeritud ruum. Lahtist kera ruumis X keskpunktiga $a \in X$ ja raadiusega $r > 0$ tähistatakse sümboliga $B(a, r)$, st

$$B(a, r) := \{x \in X : \|x - a\| < r\}.$$

Ruumi X kinnist ühikkera ja ühiksfääri tähistatakse vastavalt sümbolitega B_X ja S_X, st

$$B_X := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\} \quad \text{ja} \quad S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Alamhulga $A \subset X$ lineaarset, kumerat ja absoluutselt kumerat katet tähistatakse vastavalt sümbolitega $\operatorname{span} A$, $\operatorname{conv} A$ ja $\operatorname{absconv} A$ ning kinnist lineaarset, kinnist kumerat ja kinnist absoluutselt kumerat katet vastavalt $\overline{\operatorname{span}} A$, $\overline{\operatorname{conv}} A$ ja $\overline{\operatorname{absconv}} A$. Kui Y on samuti (reaalne) normeeritud ruum, siis $\mathcal{L}(X, Y)$ tähistab pidevate lineaarsete operaatorite $X \to Y$ ruumi ning $\mathcal{K}(X, Y)$ selle ruumi kompaktsete operaatorite alamruumi. Ruumi X kaasruumi (st pidevate lineaarsete funktsionaalide $X \to \mathbb{R}$ ruumi) tähistatakse sümboliga X^* (niisiis, $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$) ning $j_X : X \to X^{**}$ on ruumi X loomulik sisestus oma teise kaasruumi $X^{**} := (X^*)^*$. Kui E on vektorruum, siis lineaarse funktsionaali $f : E \to \mathbb{R}$ rakendamist elemendile $x \in E$ märgime tavapärasema $f(x)$ asemel $\langle x, f \rangle$ või üksikutes olukordades ka $\langle f, x \rangle$. Kui E on lokaalselt kumer ruum, siis E' tähistab tema topoloogilist kaasruumi, st kõigi pidevate lineaarsete funktsionaalide $E \to \mathbb{R}$ vektorruumi.

1 Tarvilikke eelteadmisi Banachi ruumidest ja, üldisemalt, lokaalselt kumeratest ruumidest

Kõikjal selles paragrahvis on X ja Y Banachi ruumid, välja arvatud juhul, kui tekstis on eksplitsiitselt sedastatud teisiti.

1.1 Mazuri kompaktsusteoreem

Teoreem 1.1 (Mazuri kompaktsusteoreem; S. Mazur (1930); erinevaid tõestusi vt [M, lk 254, teoreem 2.8.15], [D^2, lk 4, ülesanne 1 (kasutada lk 3, teoreemi 5)] ja [DU, lk 51, teoreem 12]). *Banachi ruumi kompaktse alamhulga kinnine kumer kate on kompaktne.*

1.2 Fakte $*$-nõrga topoloogia kohta

Lause 1.2 (vt [M, lk 226, järeldus 2.6.10]). *Iga $*$-nõrgalt koonduv jada kaasruumis X^* on tõkestatud.*

Tõestus. Olgu (x_n^*) $*$-nõrgalt koonduv jada kaasruumis X^*. Siis iga $x \in X$ korral (arv)jada $(\langle x, x_n^* \rangle)$ koondub, seega see (arv)jada on tõkestatud; niisiis operaatorite (täpsemalt, funktsionaalide) $x_n^* \colon X \to \mathbb{R}$ jada (x_n^*) on punktiviisi tõkestatud. Banach–Steinhausi ühtlase koonduvuse printsiibi põhjal on see jada tõkestatud (ruumis X^*). $\square$

Teoreem 1.3 (vt [M, lk 224, lause 2.6.4]). *Olgu X normeeritud ruum (me ei eelda siin ruumi X täielikkust!) ning olgu $f \colon X^* \to \mathbb{R}$ lineaarne funktsionaal. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *f on $*$-nõrgalt pidev;*

(ii) *leidub $x_0 \in X$ nii, et $\langle x^*, f \rangle = \langle x_0, x^* \rangle$ iga $x^* \in X^*$ korral.*

Teoreem 1.4 (vt [M, lk 287, teoreem 3.1.11]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning olgu $S \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *S on kaasoperaator, st leidub $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et $S = T^*$;*

(ii) *S on w^*–w^*-pidev;*

(iii) *iga $x \in X$ korral funktsionaal*

$$S^* j_X x \colon Y^* \ni y^* \longmapsto \langle y^*, S^* j_X x \rangle = \langle x, S y^* \rangle \in \mathbb{R}$$

on w^*-pidev;

(iv) $S^*\big(j_X(X)\big) \subset j_Y(Y)$.

TÕESTUS. (i)⇒(ii). Kehtigu (i) ning koondugu kaasruumi Y^* elementide pere (y^*_α) $*$-nõrgalt nulliks, st $y^*_\alpha \underset{\alpha}{\to} 0$ $*$-nõrgalt kaasruumis Y^*. Siis mistahes $x \in X$ korral

$$\langle x, Sy^*_\alpha\rangle = \langle x, T^* y^*_\alpha\rangle = \langle Tx, y^*_\alpha\rangle \underset{\alpha}{\to} 0,$$

seega $Sy^*_\alpha \underset{\alpha}{\to} 0$ $*$-nõrgalt kaasruumis X^*; niisiis S on w^*–w^*-pidev.

(ii)⇒(iii) on ilmne.

(iii)⇒(iv) järeldub vahetult teoreemist 1.3.

(iv)⇒(i). Kehtigu (iv). Defineerime operaatori

$$T\colon X \ni x \longmapsto j_Y^{-1} S^* j_X x \in Y;$$

siis ilmselt $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Kuna mistahes $x \in X$ ja $y^* \in Y^*$ korral

$$\langle Tx, y^*\rangle = \langle j_Y^{-1} S^* j_X x, y^*\rangle = \langle y^*, S^* j_X x\rangle = \langle Sy^*, j_X x\rangle = \langle x, Sy^*\rangle,$$

siis $S = T^*$. □

Järeldus 1.5. *Olgu $T \in \mathcal{L}(X, Y^{**})$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $\operatorname{ran} T \subset j_Y(Y)$*;*

(ii) *operaator $T^* j_{Y^*} \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ on w^*–w^*-pidev.*

TÕESTUS. (i)⇒(ii). Kehtigu (i) ning koondugu kaasruumi Y^* elementide pere (y^*_α) $*$-nõrgalt nulliks, st $y^*_\alpha \underset{\alpha}{\to} 0$ $*$-nõrgalt kaasruumis Y^*. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et $T^* j_{Y^*} y^*_\alpha \underset{\alpha}{\to} 0$ $*$-nõrgalt kaasruumis X^*. Selleks, fikseerides vabalt elemendi $x \in X$, piisab näidata, et

$$\langle x, T^* j_{Y^*} y^*_\alpha\rangle \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0.$$

Selleks märgime, et eelduse (i) põhjal leidub $y \in Y$ nii, et $Tx = j_Y y$. Nüüd

$$\langle x, T^* j_{Y^*} y^*_\alpha\rangle = \langle Tx, j_{Y^*} y^*_\alpha\rangle = \langle y^*_\alpha, Tx\rangle = \langle y^*_\alpha, j_Y y\rangle = \langle y, y^*_\alpha\rangle \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0.$$

(ii)⇒(i). Kehtigu (ii). Siis teoreemi 1.4 põhjal leidub $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et $T^* j_{Y^*} = S^*$. Implikatsiooni tõestuseks piisab nüüd näidata, et

$$Tx = j_Y Sx \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Fikseerides vabalt $x \in X$ ja $y^* \in Y^*$, piisab selleks näidata, et $\langle y^*, Tx\rangle = \langle y^*, j_Y Sx\rangle$. Veendume selles:

$$\langle y^*, Tx\rangle = \langle Tx, j_{Y^*} y^*\rangle = \langle x, T^* j_{Y^*} y^*\rangle = \langle x, S^* y^*\rangle = \langle Sx, y^*\rangle = \langle y^*, j_Y Sx\rangle.$$

□

Lause 1.6 (vt nt [M, lk 324, teoreem 3.4.16]). *Olgu $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ ning olgu $D \subset Y^*$ tõkestatud alamhulk. Siis kaasoperaatori ahend $T^*|_D\colon D \to X^*$ on w^*–$\|\cdot\|$-pidev.*

Lause 1.7 (Banach–Alaoglu teoreem; S. Banach (1932), L. Alaoglu (1940); vt nt [M, lk 229, teoreem 2.6.18]). *Olgu X normeeritud ruum. Siis kaasruumi X^* kinnine ühikkera B_{X^*} on oma suhtelises $*$-nõrgas topoloogias kompaktne.*

Lause 1.8 (vt nt [M, lk 230, järeldus 2.6.20]). *Olgu X separaabel normeeritud ruum. Siis iga tõkestatud hulga $A \subset X^*$ suhteline $*$-nõrk topoloogia on indutseeritud meetrika poolt.*

Lause 1.9 (vt nt [M, lk 231, teoreem 2.6.23]). *Olgu X normeeritud ruum. Siis kinnise ühikkera B_{X^*} suhteline $*$-nõrk topoloogia on metriseeruv parajasti siis, kui ruum X on separaabel.*

Lemma 1.10 (vt [A^2, teoreemi 1 tõestus]). *Olgu A kaasruumi X^* $*$-nõrgalt kompaktne absoluutselt kumer mittetühi alamhulk, mille suhteline $*$-nõrk topoloogia on metriseeruv. Siis leidub separaabel alamruum $Z \subset X$ nii, et hulga A suhteline $*$-nõrk topoloogia langeb ühte tema suhtelise $\sigma(X^*, Z)$-topoloogiaga.*

Tõestus. Hulga A absoluutse kumeruse ja mittetühjuse tõttu $0 \in A$. Kuna hulga A suhteline $*$-nõrk topoloogia on metriseeruv, siis leidub punktil 0 selles topoloogias loenduv ümbruste baas; niisiis leiduvad elemendid $x_i \in X$, $i = 1, 2, \dots$, nii, et süsteem $\mathcal{B} := \{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, kus iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$U_n := \bigl\{x^* \in A\colon |\langle x_i, x^*\rangle| < \tfrac{1}{n},\ i = 1, \dots, n\bigr\},$$

on punkti 0 ümbruste baas hulga A suhtelises $*$-nõrgas topoloogias. Tähistame $Z := \overline{\operatorname{span}}\{x_i\colon i \in \mathbb{N}\}$; siis Z on ruumi X separaabel alamruum.

Paneme tähele, et A on oma suhtelise $\sigma(X^*, Z)$-topoloogia suhtes Hausdorffi ruum. Tõepoolest, olgu $u^*, v^* \in A$, $u^* \neq v^*$. Siis $\frac{1}{2}(u^* - v^*) \neq 0$. Kuna hulga A absoluutse kumeruse tõttu $\frac{1}{2}(u^* - v^*) \in A$, siis leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{1}{2}(u^* - v^*) \notin U_n$, järelikult leidub $i \in \mathbb{N}$ nii, et $\delta := |\langle x_i, \frac{1}{2}(u^* - v^*)\rangle| \neq 0$. Nüüd hulgad

$$U := \bigl\{x^* \in A\colon |\langle x_i, u^* - x^*\rangle| < \delta\bigr\} \quad \text{ja} \quad V := \bigl\{x^* \in A\colon |\langle x_i, v^* - x^*\rangle| < \delta\bigr\}$$

on vastavalt punktide u^* ja v^* ümbrused hulga A suhtelises $\sigma(X^*, Z)$-topoloogias, kusjuures $U \cap V = \varnothing$.

Ilmselt on samasuskujutus $\bigl(A, w^*\bigr) \to \bigl(A, \sigma(X^*, Z)\bigr)$ pidev bijektsioon. Kuna pidev bijektsioon kompaktsest ruumist Hausdorffi ruumi on homöomorfism (vt nt [F, lk 129, lause 4.28]), siis langevad hulga A suhtelised w^*- ja $\sigma(X^*, Z)$-topoloogia ühte, nagu soovitud. $\square$

1.3 Kompaktsete operaatorite ruumi separaabli alamruumi omadusi

Lemma 1.11. *Olgu $\mathcal{S}$ ruumi $\mathcal{K}(X,Y)$ separaabel alamruum. Siis*

(a) *ruumi Y alamruum $\overline{\operatorname{span}}\{Tx\colon T \in \mathcal{S},\, x \in X\}$ on separaabel;*

(b) *kaasruumi X^* alamhulk*

$$W := \operatorname{absconv}\{T^*y^* : T \in B_{\mathcal{S}},\, y^* \in B_{Y^*}\}$$

on separaabel.

Tõestus. (a). Kuna

$$\operatorname{span}\{Tx\colon T \in \mathcal{S},\, x \in X\} = \operatorname{span}\{Tx\colon T \in \mathcal{S},\, x \in B_X\}$$

ja separaabli hulga kinnine lineaarne kate on separaabel, siis piisab väite tõestuseks näidata, et hulk $B := \{Tx\colon T \in \mathcal{S},\, x \in B_X\} = \bigcup_{T\in\mathcal{S}} T(B_X)$ ruumis Y on separaabel.

Olgu $D \subset \mathcal{S}$ ülimalt loenduv kõikjal tihe hulk ruumis $\mathcal{S}$; siis iga $T \in D$ korral on hulk $T(B_X)$ suhteliselt kompaktne (sest kompaktne operaator teisendab kinnise ühikkera suhteliselt kompaktseks hulgaks); seega iga $T \in D$ korral on hulk $T(B_X)$ separaabel; järelikult ka ühend $C := \bigcup_{T\in D} T(B_X)$ on separaabel (sest separaablite hulkade loenduv ühend on separaabel); niisiis ka sulund $\overline{C}$ on separaabel (sest separaabli hulga sulund on separaabel). Hulga B separaabluseks (ja väite tõestuseks) jääb nüüd veenduda, et $B \subset \overline{C}$. Olgu $y \in B$ ja olgu $\varepsilon > 0$. Siis leiduvad $T \in \mathcal{S}$ ja $x \in B_X$ nii, et $y = Tx$. Kui $x = 0$, siis $y = 0 \in C$, seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et $x \neq 0$. Kuna hulk D on kõikjal tihe ruumis $\mathcal{S}$, siis leidub $T_0 \in D$ nii, et $\|T - T_0\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$. Aga nüüd $T_0x \in C$, kusjuures $\|y - T_0x\| \leqslant \|T - T_0\|\,\|x\| < \varepsilon$. Siit järeldub, et $y \in \overline{C}$ ning seega ka $B \subset \overline{C}$, nagu soovitud.

(b). Kuna kompaktse operaatori kaasoperaator on kompaktne, siis $T^* \in \mathcal{K}(Y^*, X^*)$ iga $T \in \mathcal{S}$ korral. Arvestades, et seejuures $\|T^*\| = \|T\|$, on $\mathcal{S}^* := \{T^*\colon T \in \mathcal{S}\}$ ruumi $\mathcal{K}(Y^*, X^*)$ separaabel alamruum. Väite (a) põhjal on hulk

$$V := \overline{\operatorname{span}}\{Sy^* : S \in \mathcal{S}^*, y^* \in Y^*\} = \overline{\operatorname{span}}\{T^*y^* : T \in \mathcal{S}, y^* \in Y^*\}$$

separaabel alamhulk kaasruumis X^*. Kuna $W \subset V$, siis ka W on separaabel alamhulk kaasruumis X^*. □

1.4 Ruumi $\mathcal{K}(X,Y)$ separaablus

Selles punktis on meie eesmärk tõestada järgnev (folklooris hästi tuntud) kompaktsete operaatorite ruumi separaabluse kriteerium.

Teoreem 1.12. *Olgu $X \neq \{0\}$ ja $Y \neq \{0\}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruum $\mathcal{K}(X,Y)$ on separaabel;*

(ii) *kaasruum X^* ja ruum Y on separaablid.*

Märkus 1.13. Kui $X = \{0\}$ või $Y = \{0\}$, siis ruum $\mathcal{K}(X,Y) = \{0\}$ on separaabel; niisiis teoreemi 1.12 implikatsioon (ii)$\Rightarrow$(i) jääb kehtima ka ilma eeldusteta, et $X \neq \{0\}$ ja $Y \neq \{0\}$.

Teoreemi 1.12 tõestuseks vajame me järgmisi topoloogilise sisuga lauseid. Neist esimene üldistab matemaatilise analüüsi kursusest tuttavat Cantori teoreemi lõigus pideva funktsiooni ühtlasest pidevusest.

Lause 1.14. *Olgu (K, d_K) ja (L, d_L) meetrilised ruumid, kusjuures (K, d_K) on kompaktne. Siis iga pidev funktsioon $f\colon K \to L$ on ühtlaselt pidev.*

TÕESTUS. Oletame vastuväiteliselt, et leidub pidev funktsioon $f\colon K \to L$, mis pole ühtlaselt pidev. Siis leiduvad $\varepsilon > 0$ ning jadad (x_n) ja (z_n) ruumis K nii, et $d_K(x_n, z_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0$, kuid

$$d_L\big(f(x_n), f(z_n)\big) \geqslant \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{1.1}$$

Kuna ruum K on kompaktne, siis jadal (x_n) leidub koonduv osajada (x_{k_n}). Olgu $x \in K$ selle osajada piirväärtus, st $x_{k_n} \underset{n}{\longrightarrow} x$; siis ka $z_{k_n} \underset{n}{\longrightarrow} x$. Kuna f on pidev, siis $f(x_{k_n}) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$ ja $f(z_{k_n}) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$ ruumis L, seega

$$d_Y\big(f(x_{k_n}), f(z_{k_n})\big) \leqslant d_Y\big(f(x_{k_n}), f(x)\big) + d_Y\big(f(x), f(z_{k_n})\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

mis on vastuolus tingimusega (1.1). Seega iga pidev funktsioon $K \to L$ on ühtlaselt pidev. □

Olgu K kompaktne metriseeruv topoloogiline ruum ja olgu (L, d_L) meetriline ruum. Järgnevas tähistab $C(K,L)$ kõigi ruumist K ruumi L tegutsevate pidevate funktsioonide meetrilist ruumi, kus kaugus ϱ on defineeritud seosega

$$\varrho(f,g) = \sup_{x\in K} d_L\big(f(x), g(x)\big), \quad f,g \in C(K,L). \tag{1.2}$$

Lause 1.15 (vt nt [K, lk 24]). *Olgu (K, d_K) kompaktne meetriline ruum ning olgu (L, d_L) separaabel meetriline ruum. Siis meetriline ruum $C(K, L)$ on separaabel.*

TÕESTUS. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Ruumi $C(K, L)$ separaabluseks piisab näidata, et tal leidub ülimalt loenduv 5ε-võrk.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral defineerime hulga

$$C_n := \Big\{ f \in C(K, L)\colon\ x, x' \in K,\ d_K(x, x') < \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad d_L\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon \Big\}$$

ning valime hulga K lõpliku $\frac{1}{n}$-võrgu $A_n = \{a_1^n, \ldots, a_{l_n}^n\}$. Olgu B ülimalt loenduv kõikjal tihe hulk ruumis L; siis mistahes $n \in \mathbb{N}$ ja $f \in C_n$ korral leiduvad $b_1, \ldots, b_{l_n} \in B$ nii, et $f(a_i^n) \in B(b_i, \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, l_n$. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$B_n = \{(b_1, \ldots, b_{l_n})\colon b_1, \ldots, b_{l_n} \in B\}$$

(märgime, et hulk B_n on ülimalt loenduv) ning kõikide $n \in \mathbb{N}$ ja $\beta = (b_1, \ldots, b_{l_n}) \in B_n$ korral

$$C_n^\beta = \big\{ g \in C_n\colon g(a_i^n) \in B(b_i, \varepsilon),\ i = 1, \ldots, l_n \big\};$$

kui $C_n^\beta \neq \varnothing$, siis valime $g_n^\beta \in C_n^\beta$. Nüüd hulk

$$\{g_n^\beta \in C(K, L)\colon n \in \mathbb{N},\ \beta \in B_n,\ C_n^\beta \neq \varnothing\}$$

on ülimalt loenduv; seega piisab lause tõestuseks näidata, et see hulk on ruumi $C(K, L)$ 5ε-võrk. Olgu $f \in C(K, L)$. Kuna funktsioon f on ühtlaselt pidev, siis leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $f \in C_n$. Valime $\beta := (b_1, \ldots, b_{l_n}) \in B_n$ nii, et $f(a_i^n) \in B(b_i, \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, l_n$; siis $C_n^\beta \neq \varnothing$ (sest $f \in C_n^\beta$), seega leidub $g := g_n^\beta \in C_n^\beta$. Jääb näidata, et $\varrho(f, g) < 5\varepsilon$. Olgu $x \in K$ suvaline; siis leidub $i \in \{1, \ldots, l_n\}$ nii, et $d_K(x, a_i^n) < \frac{1}{n}$, seega

$$\begin{aligned} d_L\big(f(x), g(x)\big) &\leqslant d_L\big(f(x), f(a_i^n)\big) + d_L\big(f(a_i^n), b_i\big) \\ &\qquad + d_L\big(b_i, g(a_i^n)\big) + d_L\big(g(a_i^n), g(x)\big) \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon, \end{aligned}$$

järelikult $\varrho(f, g) < 5\varepsilon$. □

TEOREEMI 1.12 TÕESTUS. (i)⇒(ii). Mistahes $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$ korral on operaator

$$x^* \otimes y\colon X \ni x \longmapsto \langle x, x^* \rangle y \in Y$$

pidev ja lineaarne, st $x^* \otimes y \in \mathcal{L}(X, Y)$, kusjuures $\|x^* \otimes y\| = \|x^*\|\,\|y\|$; kuna see operaator on lõplikumõõtmeline, siis $x^* \otimes y \in \mathcal{K}(X, Y)$. Fikseerides vabalt

$x_0^* \in S_{X^*}$ ja $y_0 \in S_Y$ (selliste elementide olemasoluks kasutame me eeldust, et $X \neq \{0\}$ ja $Y \neq \{0\}$), paneme tähele, et ruumi $\mathcal{K}(X,Y)$ alamruumid $\{x^* \otimes y_0 \colon x^* \in X^*\}$ ja $\{x_0^* \otimes y \colon y \in Y\}$ on isomeetriliselt isomorfsed vastavalt kaasruumiga X^* ja ruumiga Y; niisiis, kui ruum $\mathcal{K}(X,Y)$ on separaabel, siis ka kaasruum X^* ja ruum Y on separaablid.

(ii)$\Rightarrow$(i). Olgu kaasruum X^* ja ruum Y separaablid. Siis topoloogiline ruum $K := (B_{Y^*}, w^*)$ on Banach–Alaoglu teoreemi (vt lauset 1.7) põhjal kompaktne ja lause 1.9 põhjal metriseeruv; meetriline ruum $L := (X^*, \|\cdot\|)$ on separaabel. Vaatleme kujutust

$$\mathcal{K}(X,Y) \ni T \longmapsto T^*|_{B_{Y^*}} \in C(K,L) \tag{1.3}$$

(see kujutus on korrektselt defineeritud, sest iga $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ korral on kaasoperaatori ahend $T^*|_{B_{Y^*}} \colon B_{Y^*} \to X^*$ lause 1.6 põhjal w^*–$\|\cdot\|$-pidev, st $T^*|_{B_{Y^*}} \in C(K,L)$). Kujutus (1.3) on isomeetria (meenutame, et me vaatleme ruumi $C(K,L)$ varustatuna kaugusega (1.2)), sest mistahes $T, S \in \mathcal{K}(X,Y)$ korral

$$\begin{aligned}\|T - S\| &= \|T^* - S^*\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \|T^*y^* - S^*y^*\| \\ &= \sup_{y^* \in K} d_L\big(T^*|_{B_{Y^*}}(y^*), S^*|_{B_{Y^*}}(y^*)\big) = \varrho(T^*|_{B_{Y^*}}, S^*|_{B_{Y^*}}).\end{aligned}$$

Kuna lause 1.15 põhjal on ruum $C(K,L)$ separaabel, siis järeldub siit, et ka ruum $\mathcal{K}(X,Y)$ on separaabel. □

Märkus 1.16. Teistsuguse (mõnes mõttes lihtsama) tõestuse teoreemile 1.12 võib leida artiklist [AU, lemma 2]. See tõestus toetub järgnevale ruumi $C(K)$ separaabluse kriteeriumile.

Lause 1.17 (vt [DSch, lk 340, ülesanne 16])**.** *Olgu S täielikult regulaarne topoloogiline ruum. Siis (ruumil S määratud pidevate arv-väärtuseliste funktsioonide) ruum $C(S)$ on separaabel parajasti siis, kui ruum S on kompaktne ja metriseeruv.*

1.5 Nõrgalt kompaktselt genereeritud ruumid (WCG-ruumid)

Definitsioon 1.18. Öeldakse, et (Banachi) ruum X on *nõrgalt kompaktselt genereeritud* ehk *WCG-ruum,* kui leidub ruumi X nõrgas topoloogias kompaktne alamhulk K nii, et $\overline{\operatorname{span}} K = X$.

Järgnev lause annab kaks lihtsat näidet nõrgalt kompaktselt genereeritud ruumidest.

Lause 1.19. (a) *Separaablid Banachi ruumid on nõrgalt kompaktselt genereeritud.*

(b) *Refleksiivsed Banachi ruumid on nõrgalt kompaktselt genereeritud.*

Märkus 1.20. Lause 1.19 tõestusest näeme, et separaabel Banachi ruum X on isegi *kompaktselt genereeritud,* st leidub ruumi X (normi topoloogias) kompaktne alamhulk K nii, et $\overline{\operatorname{span}} K = X$.

Lause 1.19 tõestus. (a). Olgu ruum X separaabel ning olgu $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kõikjal tihe hulk ruumis X. Siis $K := \left\{\frac{1}{n\|x_n\|} x_n : n \in \mathbb{N}, x_n \neq 0\right\} \cup \{0\}$ on kompaktne hulk ruumis X, kusjuures $\overline{\operatorname{span}} K = X$; seega ruum X on nõrgalt kompaktselt (ning isegi kompaktselt) genereeritud.

(b). Olgu ruum X refleksiivne. Kuna $X = \operatorname{span} B_X$ siis jääb väite tõestuseks märkida, et refleksiivse Banachi ruumi kinnine ühikkera on nõrgalt kompaktne (vt nt [M, lk 245, teoreem 2.8.2]). □

Lause 1.21 (vt [D[1], lk 148, järeldus 4])**.** *Olgu X nõrgalt kompaktselt genereeritud ning olgu $x^{**} \in X^{**}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *x^{**} on $*$-nõrgalt pidev (st $x^{**} \in j_X(X)$);*

(ii) *x^{**} on jadaliselt $*$-nõrgalt pidev.*

Järeldus 1.22. *Olgu Y on nõrgalt kompaktselt genereeritud, ning olgu $S \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *S on kaasoperaator, st leidub $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et $S = T^*$;*

(ii) *S on jadaliselt w^*–w^*-pidev.*

Tõestus. (i)⇒(ii) järeldub vahetult teoreemi 1.4 implikatsioonist (i)⇒(ii).

(ii)⇒(i). Kehtigu (ii). Olgu $x \in X$. Teoreemi 1.4 põhjal piisab implikatsiooni tõestuseks näidata, et funktsionaal

$$S^* j_X x \colon Y^* \ni y^* \longmapsto \langle y^*, S^* j_X x\rangle = \langle x, S y^*\rangle \in \mathbb{R}$$

on w^*-pidev. Kuna $\Phi_x := S^* j_X x \in Y^{**}$, siis lause 1.21 põhjal piisab selleks näidata, et Φ_x on jadaliselt $*$-nõrgalt pidev. Koondugu kaasruumi Y^* elementide jada (y_n^*) $*$-nõrgalt nulliks, st $y_n^* \underset{n}{\longrightarrow} 0$ $*$-nõrgalt kaasruumis Y^*. Siis operaatori S jadalise w^*–w^*-pidevuse tõttu $S y_n^* \underset{n}{\to} 0$ $*$-nõrgalt kaasruumis X^*, järelikult

$$\langle y_n^*, \Phi_x\rangle = \langle x, S y_n^*\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Seega Φ_x on jadaliselt $*$-nõrgalt pidev, nagu soovitud. □

Lause 1.23 (vt [D[1], lk 137, lemma 4])**.** *Olgu X nõrgalt kompaktselt genereeritud ja olgu $Z \subset X^*$ separaabel alamruum. Siis leidub projektor $P \in \mathcal{L}(X, X)$ nii, et $\|P\| = 1$, $\operatorname{ran} P$ on separaabel ja $P^* z = z$ iga $z \in Z$ korral.*

1.6 Eidelheiti ja Tukey–Klee eraldamisteoreemid ning kinniste kumerate hulkade esitamine lokaalselt kumerates ruumides

Teoreem 1.24 (M. Eidelheit (1936), J. Dieudonné (1941); vt [M, lk 179, teoreem 2.2.26])**.** *Olgu E (reaalne) lokaalselt kumer ruum ning olgu $C_1, C_2 \subset E$ kumerad mittetühjad hulgad, kusjuures hulga C_2 sisemus C_2° on mittetühi. Kui $C_1 \cap C_2^\circ = \varnothing$, siis leiduvad funktsionaal $f \in E'$ ja arv $\alpha \in \mathbb{R}$ nii, et*

(1) $\langle x, f\rangle \geqslant \alpha$ *iga* $x \in C_1$ *korral;*

(2) $\langle x, f\rangle \leqslant \alpha$ *iga* $x \in C_2$ *korral;*

(3) $\langle x, f\rangle < \alpha$ *iga* $x \in C_2^\circ$ *korral.*

Teoreem 1.25 (J. W. Tukey (1942), V. L. Klee (1951); vt [M, lk 180, teoreem 2.2.28])**.** *Olgu E (reaalne) lokaalselt kumer ruum ning olgu $K, C \subset E$ kumerad lõikumatud mittetühjad hulgad, kusjuures K on kompaktne ja C on kinnine. Siis leidub funktsionaal $f \in E'$ nii, et*

$$\min_{x\in K}\langle x, f\rangle > \sup_{x\in C}\langle x, f\rangle.$$

Järeldus 1.26. *Olgu E (reaalne) lokaalselt kumer ruum ning olgu $C \subset E$ kinnine kumer mittetühi alamhulk. Siis leidub alamhulk $\mathcal{F} \subset E'$ nii, et*

$$C = \bigcap_{f\in\mathcal{F}} \big\{x \in E \colon \langle x, f\rangle \leqslant 1\big\}. \tag{1.4}$$

Kui seejuures C on absoluutselt kumer, siis saab alamhulga $\mathcal{F} \subset E'$ leida nii, et

$$C = \bigcap_{f\in\mathcal{F}} \big\{x \in E \colon |\langle x, f\rangle| \leqslant 1\big\}.$$

Tõestus. Iga $z \in E\backslash C$ korral leidub Tukey–Klee eraldamisteoreemi 1.25 põhjal (võttes seal $K = \{z\}$) funktsionaal $f_z \in E'$ nii, et

$$\langle z, f_z\rangle > \sup_{x\in C}\langle x, f_z\rangle =: \alpha;$$

seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\alpha = 1$. Aga nüüd kehtib (1.4), kus $\mathcal{F} = \{f_z \colon\ z \in E\backslash C\}$.

Eeldame nüüd, et C on absoluutselt kumer. Fikseerides vabalt $u \in C$, piisab järelduse tõestuseks näidata, et $|\langle u, f\rangle| \leqslant 1$ iga $f \in \mathcal{F}$ korral. Olgu $f \in \mathcal{F}$ suvaline; siis $\langle u, f\rangle \leqslant 1$. Kuna hulga C absoluutse kumeruse tõttu ka $-u \in C$, siis $-\langle u, f\rangle = \langle -u, f\rangle \leqslant 1$; niisiis $-1 \leqslant \langle u, f\rangle \leqslant 1$, st $|\langle u, f\rangle| \leqslant 1$, nagu soovitud. □

2 Tarvilikke eelteadmisi vektormõõtudest

Kõikjal selles paragrahvis on X ja Y Banachi ruumid, (Ω, Σ, μ) on lõpliku mõõduga ruum ning $\mathfrak{A}$ hulga Ω alamhulkade algebra. Funktsiooni $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *μ-mõõtuvuse* all mõistame me tema $\overline{\Sigma}$-mõõtuvust (st, et $f^{-1}(B) \in \overline{\Sigma}$ iga Boreli hulga $B \subset \mathbb{R}$ korral), kus $(\Omega, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ on ruumi (Ω, Σ, μ) täield.

2.1 Vektormõõdu mõiste ja variatsioon

Definitsioon 2.1. Öeldakse, et hulgafunktsioon $F\colon \mathfrak{A} \to X$ on *vektormõõt,* kui ta on *aditiivne,* st

$$D, E \in \mathfrak{A},\ D \cap E = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad F(D \cup E) = F(D) + F(E).$$

Öeldakse, et vektormõõt $F\colon \mathfrak{A} \to X$ on *loenduvalt aditiivne,* kui

$$E_i \in \mathfrak{A},\ i = 1, 2, \ldots,\ E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathfrak{A}$$
$$\Longrightarrow \quad F\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} F(E_i).$$

Märgime, et vektormõõdu $F\colon \mathfrak{A} \to X$ puhul

$$F(\varnothing) = F(\varnothing \cup \varnothing) = F(\varnothing) + F(\varnothing) = 2F(\varnothing),$$

millest $F(\varnothing) = 0$.

Definitsioon 2.2. Olgu $E \in \mathfrak{A}$. Kogumit $\{E_1, \ldots, E_n\}$, kus $n \in \mathbb{N}$ ja $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{A}$ on paarikaupa lõikumatud hulgad, mille ühend $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$, nimetatakse hulga E *lõplikuks $\mathfrak{A}$-mõõtuvaks tükelduseks* (ehk lihtsalt $\mathfrak{A}$-mõõtuvaks tükelduseks).

Kui algebra $\mathfrak{A}$ roll on kontekstist selge, siis nimetatakse $\mathfrak{A}$-mõõtuvaid tükeldusi ka lihtsalt *mõõtuvateks tükeldusteks.*

Definitsioon 2.3. Vektormõõdu $F\colon \mathfrak{A} \to X$ *variatsiooniks* nimetatakse hulgafunktsiooni $|F|\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$, mis on defineeritud võrdusega

$$|F|(E) = \sup_{\pi} \sum_{D \in \pi} \|F(D)\|, \quad E \in \mathfrak{A},$$

kus supreemum võetakse üle hulga E kõigi lõplike mõõtuvate tükelduste π.

Kui $|F|(\Omega) < \infty$, siis öeldakse, et F on *tõkestatud variatsiooniga* vektormõõt.

Lause 2.4 (vt [DU, lk 3, lause 9] või [Ma, lk 13, lause 1.11])**.** *Olgu* $F\colon \mathfrak{A} \to X$ *tõkestatud variatsiooniga vektormõõt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) F *on loenduvalt aditiivne;*

(ii) $|F|$ *on loenduvalt aditiivne.*

2.2 Vektormõõdu (absoluutne) pidevus mõõdu suhtes

Definitsioon 2.5. Olgu $\nu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ mõõt. Öeldakse, et vektormõõt $F\colon \mathfrak{A} \to X$ on *absoluutselt* ν*-pidev* (ehk lihtsalt ν*-pidev*), kui

$$\lim_{\nu(E)\to 0} F(E) = 0,$$

st iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \mathfrak{A},\ \nu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|F(E)\| < \varepsilon.$$

Järgnev teoreem üldistab ühe märgiga mõõdu μ-pidevusega samaväärse tingimuse (σ-algebral määratud loenduvalt aditiivsete) vektormõõtude juhule.

Lause 2.6 (vt nt [Ma, lk 15, lause 1.12])**.** *Olgu* $F\colon \Sigma \to X$ *tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) F *on* μ*-pidev;*

(ii) $|F|$ *on* μ*-pidev;*

(iii) $E \in \Sigma,\ \mu(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad F(E) = 0;$

(iv) $E \in \Sigma,\ \mu(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad |F|(E) = 0.$

Märkus 2.7. Samaväärsus (i)$\Leftrightarrow$(iii) lauses 2.6 kehtib ka ilma eelduseta variatsiooni $|F|$ tõkestatusest (vt Pettise teoreemi [DU, lk 10, teoreem 1]).

Selle jaotise viimane lause annab hästituntud lihtsa tingimuse vektormõõdu loenduvaks aditiivsuseks.

Lause 2.8 (vt nt [Ma, lk 15, lause 1.13])**.** *Olgu* $\nu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty)$ *(lõplik) mõõt. Siis iga* ν*-pidev vektormõõt* $F\colon \mathfrak{A} \to X$ *on loenduvalt aditiivne.*

2.3 Banachi ruumi väärtuselise funktsiooni mõõtuvus

Definitsioon 2.9. Öeldakse, et funktsioon $\phi\colon \Omega \to X$ on *Σ-mõõtuv lihtfunktsioon,* kui ta esitub kujul

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i, \quad \text{kus } n \in \mathbb{N},\ E_1, \dots, E_n \in \Sigma \text{ ja } x_1, \dots x_n \in X. \tag{2.1}$$

Kui seejuures hulgad $E_1, \dots, E_n$ on paarikaupa lõikumatud, siis öeldakse, et esitus (2.1) on funktsiooni ϕ *kanooniline esitus.*

Kui σ-algebra Σ roll on kontekstist selge siis nimetatakse Σ-mõõtuvaid lihtfunktsioone ka lihtsalt *mõõtuvateks lihtfunktsioonideks* või ka lihtsalt *lihtfunktsioonideks.*

Märkus 2.10. On ilmne, et lihtfunktsiooni kanooniline esitus pole kunagi üheselt määratud.

Definitsioon 2.11. Öeldakse, et funktsioon $f\colon \Omega \to X$ on

- *tugevalt μ-mõõtuv* (ehk lihtsalt *μ-mõõtuv*), kui leidub (Σ-mõõtuvate) lihtfunktsioonide $\Omega \to X$ jada (ϕ_n) nii, et $\phi_n \underset{n}{\to} f$ μ-peaaegu kõikjal;
- *nõrgalt μ-mõõtuv,* kui iga $x^* \in X^*$ korral funktsioon

  $$x^* f = \langle f(\cdot), x^* \rangle\colon \Omega \to \mathbb{R}$$

  on μ-mõõtuv;
- *Boreli mõttes μ-mõõtuv,* kui ta on Boreli mõttes $\overline{\Sigma}$-mõõtuv (st $f^{-1}(B) \in \overline{\Sigma}$ iga Boreli hulga $B \subset X$ korral), kus $(\Omega, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ on ruumi (Ω, Σ, μ) täield.

Kui mõõdu μ roll on kontekstist selge, siis nimetatakse μ-mõõtuvaid ja nõrgalt μ-mõõtuvaid funktsioone ka lihtsalt vastavalt *mõõtuvateks* ja *nõrgalt mõõtuvateks* funktsioonideks.

Definitsioon 2.12. Öeldakse, et funktsioon $f\colon \Omega \to X$ on *μ-oluliselt separaabel-väärtuseline* (ehk lihtsalt *oluliselt separaabel-väärtuseline*), kui leidub hulk $E \in \Sigma$ nii, et $\mu(\Omega \backslash E) = 0$ ja hulk $f(E)$ ruumis X on separaabel.

Teoreem 2.13 (Pettise mõõtuvusteoreem; vt nt [R, lk 26, lause 2.15])**.** *Olgu $f\colon \Omega \to X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *f on μ-mõõtuv;*

(ii) *f on nõrgalt μ-mõõtuv ja μ-oluliselt separaabel-väärtuseline;*

(iii) *f on Boreli mõttes μ-mõõtuv ja μ-oluliselt separaabel-väärtuseline.*

Definitsioon 2.14. Öeldakse, et hulk $B \subset B_{X^*}$ on *normeeriv* ruumi X jaoks, kui

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B} |\langle x, x^* \rangle| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Järgnev tulemus on tähelepanek Pettise mõõtuvusteoreemi 2.13 tõestusest.

Järeldus 2.15 (vt [DU, lk 42–43, järeldus 4]). *μ-oluliselt separaabel-väärtuseline funktsioon $f \colon \Omega \to X$ on μ-mõõtuv parajasti siis, kui leidub ruumi X jaoks normeeriv alamhulk $B \subset B_{X^*}$ nii, et funktsioon $x^* f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ on μ-mõõtuv iga $x^* \in B$ korral.*

Definitsioon 2.16. Olgu $f \colon \Omega \to X$. Funktsioon $\|f\| \colon \Omega \to \mathbb{R}$ on defineeritud võrdusega

$$\|f\|(\omega) = \|f(\omega)\|, \quad \omega \in \Omega.$$

Lause 2.17 (vt nt [Ma, lk 27, lause 2.1]). *Olgu $f \colon \Omega \to X$ μ-mõõtuv funktsioon. Siis ka funktsioon $\|f\| \colon \Omega \to \mathbb{R}$ on μ-mõõtuv.*

Järgnev lemma leiab rakendamist lause 2.35 ja lemma 3.7 tõestuses.

Lemma 2.18. *Olgu $h \colon \Omega \to X$ μ-mõõtuv tõkestatud funktsioon. Siis leidub Σ-mõõtuvate lihtfunktsioonide $\Omega \to X$ jada (h_n) nii, et*

(1) *$h_n \underset{n}{\longrightarrow} h$ μ-peaaegu kõikjal;*

(2) *jada (h_n) on ühtlaselt tõkestatud, st $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\omega \in \Omega} \|h_n(\omega)\| < \infty$.*

Tõestus. Funktsiooni h tõkestatuse tõttu $L := \sup_{\omega \in \Omega} \|h(\omega)\| < \infty$. Kuna funktsioon h on μ-mõõtuv, siis leidub Σ-mõõtuvate lihtfunktsioonide $\Omega \to X$ jada (ϕ_n) nii, et $\phi_n \underset{n}{\longrightarrow} h$ μ-peaaegu kõikjal, st leidub $A \in \Sigma$ nii, et $\mu(A) = 0$ ja $\phi_n(\omega) \underset{n}{\longrightarrow} h(\omega)$ iga $\omega \in \Omega \backslash A$ korral. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$E_n := \{\omega \in \Omega \colon \|\phi_n(\omega) - h(\omega)\| \leqslant 1\};$$

siis mistahes $n \in \mathbb{N}$ ja $\omega \in E_n$ korral $\|\phi_n(\omega)\| \leqslant \|h(\omega)\| + 1 \leqslant L + 1$, järelikult

$$\|\chi_{E_n}(\omega)\phi_n(\omega)\| \leqslant L + 1 \quad \text{kõikide } n \in \mathbb{N} \text{ ja } \omega \in \Omega \text{ korral.}$$

Iga $\omega \in \Omega \backslash A$ korral $\chi_{E_n}(\omega)\phi_n(\omega) \underset{n}{\longrightarrow} h(\omega)$ (sest kuna $\phi_n(\omega) \underset{n}{\longrightarrow} h(\omega)$, siis "piisavalt suurte" indeksite n korral $\omega \in E_n$, st $\chi_{E_n}(\omega) = 1$). Iga $n \in \mathbb{N}$ korral funktsiooni $\|\phi_n - h\|$ μ-mõõtuvuse tõttu $E_n \in \overline{\Sigma}$ (meenutame, et $(\Omega, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ tähistab ruumi (Ω, Σ, μ) täieldit), seega me võime esitada $E_n = D_n \cup N_n$, kus $D_n \in \Sigma$ ja hulk N_n on μ-hüljatav. Ühendi $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ hüljatavuse tõttu leidub hulk $C \in \Sigma$ nii, et $\mu(C) = 0$ ja $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subset C$. Paneme tähele, et mistahes $n \in \mathbb{N}$ ja $\omega \in \Omega \backslash C$ korral $\chi_{D_n}(\omega) = \chi_{E_n}(\omega)$.

Nüüd iga $n \in \mathbb{N}$ korral on $h_n := \chi_{D_n}\phi_n$ Σ-mõõtuv lihtfunktsioon, kusjuures kehtivad (1) ning (2), sest $\mu(A \cup C) = 0$ ja

$$h_n(\omega) = \chi_{E_n}(\omega)\phi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(\omega) \quad \text{iga } \omega \in \Omega\backslash(A \cup C) \text{ korral}$$

ning

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\omega\in\Omega} \|h_n(\omega)\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\omega\in\Omega} \|\chi_{E_n}(\omega)\phi_n(\omega)\| \leqslant L + 1.$$

□

2.4 Bochneri integraal

Selles jaotises anname ülevaate ühest Lebesgue'i integraali üldistusest Banachi ruumi väärtuseliste funktsioonide jaoks – (*Lebesgue–*)*Bochneri integraalist,* mida tuntakse ka *Dunfordi ja Schwartzi integraali* või *Dunfordi esimese integraali* nime all.

Definitsioon 2.19. Olgu $f \colon \Omega \to X$ Σ-mõõtuv lihtfunktsioon kanoonilise esitusega

$$f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i. \tag{2.2}$$

Bochneri integraal funktsioonist f üle hulga $E \in \Sigma$ (mõõdu μ järgi) defineeritakse võrdusega

$$\int_E f(\omega)\, d\mu(\omega) := \int_E f\, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap E) x_i. \tag{2.3}$$

Märkus 2.20. Lihtfunktsiooni kanooniline esitus pole kunagi üheselt määratud. Pole siiski raske näidata, et definitsioon 2.19 on korrektne, st võrdusega (2.3) defineeritud integraal $\int_E f\, d\mu$ ei sõltu funktsiooni f kanoonilisest esitusest (2.2).

Paneme tähele, et $\int_E f\, d\mu = \int_\Omega f\chi_E\, d\mu$.

Definitsioon 2.21. Öeldakse, et μ-mõõtuv funktsioon $f \colon \Omega \to X$ on *Bochneri mõttes μ-integreeruv,* kui leidub (Σ-mõõtuvate) lihtfunktsioonide jada (f_n) nii, et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\|\, d\mu = 0.$$

Sellisel juhul defineeritakse *Bochneri integraal* funktsioonist f üle hulga $E \in \Sigma$ (mõõdu μ järgi) võrdusega

$$\int_E f(\omega)\, d\mu(\omega) := \int_E f\, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu. \tag{2.4}$$

Kui mõõdu μ roll on kontekstist selge, siis öeldakse Bochneri mõttes μ-integreeruva funktsiooni kohta ka lihtsalt *Bochneri mõttes integreeruv* funktsioon.

Märkus 2.22. On kergesti kontrollitav, et definitsioon 2.21 on korrektne, st piirväärtus (2.4) eksisteerib ja ei sõltu jada (f_n) valikust (vt nt [Ma, lk 31–32]).

Järgnev lause annab ühe kergesti kontrollitava tarviliku ja piisava tingimuse mõõtuva funktsiooni f integreeruvuseks (Bochneri mõttes).

Lause 2.23 (vt [DU, lk 45, teoreem 2] või [Ma, lk 32, teoreem 2.4]). *μ-mõõtuv funktsioon $f\colon \Omega \to X$ on Bochneri mõttes μ-integreeruv parajasti siis, kui $\int_\Omega \|f\|\, d\mu < \infty$.*

Lause 2.24 (vt [DU, lk 46, teoreem 4, (ii)] või [Ma, lk 33, lause 2.5]). *Olgu funktsioon $f\colon \Omega \to X$ Bochneri mõttes μ-integreeruv. Siis*

$$\left\| \int_E f\, d\mu \right\| \leqslant \int_E \|f\|\, d\mu \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral.}$$

Järgnev lause ütleb, et pideva lineaarse operaatoriga võib minna Bochneri integraali märgi alla.

Lause 2.25 (vt [DU, lk 47, teoreem 6] või [Ma, lk 33, teoreem 2.6]). *Olgu $f\colon \Omega \to X$ Bochneri mõttes μ-integreeruv funktsioon, olgu Y Banachi ruum ning olgu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Siis funktsioon $Tf\colon \Omega \to Y$ on Bochneri mõttes μ-integreeruv, kusjuures*

$$\int_E Tf\, d\mu = T\left(\int_E f\, d\mu\right) \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral.}$$

Definitsioon 2.26. Olgu funktsioon $f\colon\ \Omega \to X$ Bochneri mõttes μ-integreeruv. Vektormõõtu

$$F := \int_{(\cdot)} f\, d\mu\colon \Sigma \ni E \longmapsto \int_E f\, d\mu \in X \tag{2.5}$$

nimetatakse *määramata integraaliks* funktsioonist f.

Järgnev teoreem ütleb muuhulgas, et *määramata integraal Bochneri mõttes μ-integreeruvast funktsioonist on μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt.*

Teoreem 2.27 (vt [DU, lk 46, teoreem 4] või [Ma, lk 34–35, teoreem 2.7])**.** *Olgu funktsioon $f\colon \Omega \to X$ Bochneri mõttes μ-integreeruv. Siis*

(a) $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f\,d\mu = 0$;

(b) *kui hulgad $E_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, on paarikaupa lõikumatud ning $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, siis*

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu,$$

kusjuures rida $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu$ koondub absoluutselt;

(c) *määramata integraal* (2.5) *on tõkestatud variatsiooniga vektormõõt, kusjuures*

$$|F|(E) = \int_E \|f\|\,d\mu \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral.}$$

Selle jaotise viimane lause annab kasuliku piisava tingimuse kahe Bochneri mõttes integreeruva funktsiooni võrdsuseks peaaegu kõikjal.

Lause 2.28 (vt [DU, lk 47, järeldus 5] või [Ma, lk 37, lause 2.8])**.** *Olgu $f, g\colon \Omega \to X$ Bochneri mõttes μ-integreeruvad funktsioonid, kusjuures*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral.}$$

Siis $f = g$ μ-peaaegu kõikjal.

2.5 Banachi ruumi Radon–Nikodými omadus

Definitsioon 2.29. Öeldakse, et Banachi ruumil X on *Radon–Nikodými omadus ruumi (Ω, Σ, μ) suhtes,* kui iga μ-pideva tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivse vektormõõdu $G\colon \Sigma \to X$ korral leidub Bochneri mõttes μ-integreeruv funktsioon $g\colon \Omega \to X$ nii, et G on määramata integraal funktsioonist g, st

$$G(E) = \int_E g\,d\mu \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral.} \tag{2.6}$$

Öeldakse, et Banachi ruumil X on *Radon–Nikodými omadus,* kui ruumil X on Radon–Nikodými omadus iga lõpliku mõõduga ruumi suhtes.

Teoreem 2.30 (vt [DU, lk 72, teoreem 7]). *Olgu $G\colon \Sigma \to X$ määramata integraal Bochneri mõttes μ-integreeruvast funktsioonist $g\colon \Omega \to X$, st kehtib* (2.6)*. Siis $|G|$ on lõplik mõõt, kusjuures iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $E \in \Sigma$ nii, et $\mu(\Omega\backslash E) < \varepsilon$ ja hulk*

$$\left\{\frac{G(D)}{\mu(D)}\colon \Sigma \ni D \subset E,\ \mu(D) \neq 0\right\}$$

on suhteliselt kompaktne.

Järeldus 2.31. *Olgu ruumil X Radon–Nikodými omadus ning olgu $G\colon \Sigma \to X$ μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt. Siis leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $E_0, E_1, E_2, \ldots \in \Sigma$ nii, et $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = \Omega$, $\mu(E_0) = 0$ ja iga $i \in \mathbb{N}$ korral hulk*

$$\left\{\frac{G(D)}{\mu(D)}\colon \Sigma \ni D \subset E_i,\ \mu(D) \neq 0\right\}$$

on suhteliselt kompaktne.

Lause 2.32. *Olgu $G\colon \Sigma \to X$ määramata integraal Bochneri mõttes μ-integreeruvast funktsioonist $g\colon \Omega \to X$, st kehtib* (2.6)*. Siis leidub hulk $E \in \Sigma$ nii, et $\mu(\Omega\backslash E) = 0$ ja*

$$g(E) \subset \overline{\operatorname{conv}}\left\{\frac{G(D)}{\mu(D)}\colon D \in \Sigma,\ \mu(D) \neq 0\right\} =: K.$$

TÕESTUS. Kõigepealt märgime, et kuna g on μ-mõõtuv, siis Pettise mõõtuvusteoreemi 2.13 põhjal mistahes Boreli alamhulga $W \subset X$ korral $g^{-1}(W) \in \overline{\Sigma}$, kus $(\Omega, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ on ruumi (Ω, Σ, μ) täield.

Lause tõestuseks piisab näidata, et hulk $g^{-1}(X\backslash K)$ on μ-hüljatav. Tõepoolest, sellisel juhul leidub hulk $C \in \Sigma$ nii, et $\mu(C) = 0$ ja $g^{-1}(X\backslash K) \subset C$; seega me võime võtta $E := \Omega\backslash C$, sest siis $\mu(\Omega\backslash E) = \mu(C) = 0$ ja $E = \Omega\backslash C \subset \Omega\backslash g^{-1}(X\backslash K) = g^{-1}(K)$, st $g(E) \subset K$.

Hulga $g^{-1}(X\backslash K)$ μ-hüljatavuseks piisab näidata, et *iga hulka K mittelõikava lahtise kera U korral ruumis X on originaal $g^{-1}(U)$ μ-hüljatav.* Tõepoolest, kuna g on oluliselt separaabel-väärtuseline, siis leidub hulk $B \in \Sigma$ nii, et $g(B)$ on separaabel ja $\mu(\Omega\backslash B) = 0$. Nüüd ka hulk $g(B)\backslash K$ on separaabel, seega temas leidub ülimalt loenduv kõikjal tihe alamhulk S. Defineerime iga $x \in S$ korral

$$r_x := \sup\{r > 0\colon\ B(x, r) \subset X\backslash K\} \quad \text{ja} \quad U_x := B(x, r_x),$$

siis $g(B)\backslash K \subset \bigcup_{x\in S} U_x \subset X\backslash K$, seega

$$g^{-1}(X\backslash K) \cap B \subset g^{-1}\big(g(B)\backslash K\big) \subset g^{-1}\Bigg(\bigcup_{x\in S} U_x\Bigg) = \bigcup_{x\in S} g^{-1}(U_x)$$

ning järelikult

$$g^{-1}(X\backslash K) \subset (\Omega\backslash B) \cup \big(g^{-1}(X\backslash K) \cap B\big) \subset (\Omega\backslash B) \cup \bigcup_{x\in S} g^{-1}(U_x).$$

Kui nüüd iga $x \in S$ korral oleks originaal $g^{-1}(U_x)$ μ-hüljatav, siis eelneva sisalduvusteahela parem pool oleks loenduv ühend μ-hüljatavatest hulkadest, seega see parem pool oleks μ-hüljatav hulk, järelikult ka vasak pool $g^{-1}(X\backslash K)$ oleks μ–hüljatav.

Olgu U lahtine kera ruumis X, mille korral $U \cap K = \varnothing$. Oletame vastuväiteliselt, et originaal $g^{-1}(U)$ pole μ–hüljatav; siis, arvestades, et $g^{-1}(U) \in \overline{\Sigma}$, leidub $D \in \Sigma$ nii, et $D \subset g^{-1}(U)$ ja $\mu(D) > 0$. Eidelheiti eraldamisteoreemi 1.24 põhjal leiduvad $x^* \in X^*$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ nii, et

$$\langle u, x^*\rangle < \alpha \leqslant \langle x, x^*\rangle \quad \text{kõikide } u \in U \text{ ja } x \in K \text{ korral.}$$

Nüüd, ühelt poolt,

$$\langle G(D), x^*\rangle = \left\langle \int_D g(\omega)\, d\mu(\omega), x^*\right\rangle = \int_D \langle g(\omega), x^*\rangle\, d\mu(\omega) < \alpha\mu(D).$$

teiselt poolt, arvestades, et $\dfrac{G(D)}{\mu(D)} \in K$,

$$\langle G(D), x^*\rangle = \mu(D)\left\langle \frac{G(D)}{\mu(D)}, x^*\right\rangle \geqslant \alpha\,\mu(D).$$

Oleme jõudnud vastuoluni. □

Järgnev teoreem ütleb muuhulgas, et Banachi ruumi Radon–Nikodými omadus on separaablilt määratud.

Teoreem 2.33 (vt [DU, lk 81, teoreem 2])**.** *Kui Banachi ruumil on Radon–Nikodými omadus, siis ka igal tema kinnisel alamruumil on see omadus. Teiselt poolt, kui Banachi ruumi igal separaablil kinnisel alamruumil on Radon–Nikodými omadus, siis ka sellel Banachi ruumil endal on see omadus.*

Teoreem 2.34 (vt [DU, lk 198, järeldus 8, (a)$\Leftrightarrow$(c)])**.** *Kaasruumil X^* on Radon–Nikodými omadus parajasti siis, kui ruumi X iga separaabli alamruumi $Z \subset X$ kaasruum Z^* on separaabel.*

Magistritöös keskse Andrewsi teoreemi (vt sissejuhatust või teoreemi 4.1) tõestus toetub järgmisele lausele.

Lause 2.35. *Kui*

($\natural$) *mistahes mõõtuva ruumi* (Υ, Ξ) *ja mistahes tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivse vektormõõdu* $G\colon \Xi \to X$ *korral, mille variatsioon* $|G|\colon \Xi \to [0, \infty)$ *on täielik mõõt, leidub tõkestatud* $|G|$*-mõõtuv funktsioon* $g\colon \Upsilon \to X$ *nii, et*

$$G(E) = \int_E g\, d|G| \quad \text{iga } E \in \Xi \text{ korral,} \tag{2.7}$$

siis ruumil X *on Radon–Nikodými omadus.*

Lause 2.35 tõestus kasutab järgnevat lauset.

Lause 2.36 (vt nt [F, lk 91, lause 3.9, (a)]). *Olgu* $\nu\colon \Sigma \to [0, \infty)$ *(lõplik) mõõt, kusjuures* $\nu \ll \mu$ *(st* ν *on absoluutselt* μ*-pidev). Siis iga* $g \in L_1(\nu)$ *korral* $g \dfrac{d\nu}{d\mu} \in L_1(\mu)$*, kusjuures*

$$\int_\Omega g\, d\nu = \int_\Omega g \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

Lause 2.35 tõestus. Kehtigu ($\natural$). Olgu $F\colon \Sigma \to X$ μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt. Ruumi X Radon–Nikodými omaduseks piisab leida μ-integreeruv funktsioon $f\colon \Omega \to X$ nii, et

$$F(D) = \int_D f\, d\mu \quad \text{iga } D \in \Sigma \text{ korral.} \tag{2.8}$$

Kuna lausete 2.4 ja 2.6 põhjal on $|F|\colon \Sigma \to [0, \infty)$ μ-pidev mõõt, siis klassikalise Radon–Nikodými teoreemi põhjal leidub μ-integreeruv funktsioon $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nii, et

$$|F|(D) = \int_D \phi\, d\mu \quad \text{iga } D \in \Sigma \text{ korral.}$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et ϕ on Σ-mõõtuv ning et $\phi(\omega) \geqslant 0$ iga $\omega \in \Omega$ korral.

Olgu (Ω, Ξ, ν) ruumi $(\Omega, \Sigma, |F|)$ täield; siis, tähistades hulga Ω $|F|$-hüljatavate alamhulkade (ehk, samaväärselt, ν-hüljatavate alamhulkade) kogumi sümboliga $\mathcal{N}$,

$$\Xi = \{D \cup N\colon D \in \Sigma,\ N \in \mathcal{N}\}.$$

Defineerime hulgafunktsiooni

$$G\colon \Xi \ni D \cup N \longmapsto F(D) \in \mathcal{S}, \quad D \in \Sigma,\ N \in \mathcal{N}.$$

Märgime, et see hulgafunktsioon on korrektselt defineeritud. Tõepoolest, olgu $D_1, D_2 \in \Sigma$ ja $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ sellised, et $D_1 \cup N_1 = D_2 \cup N_2$. Hulgafunktsiooni G definitsiooni korrektsuseks piisab veenduda, et $F(D_1) = F(D_2)$. Olgu $C_1, C_2 \in \Sigma$ sellised, et $|F|(C_i) = 0$ ja $N_i \subset C_i$, $i = 1, 2$. Siis $D_1 \subset D_2 \cup C_2$, järelikult $D_1 \backslash D_2 \subset C_2$, seega $\|F(D_1 \backslash D_2)\| \leqslant |F|(D_1 \backslash D_2) \leqslant |F|(C_2) = 0$, niisiis $F(D_1 \backslash D_2) = 0$. Analoogiliselt saame, et $F(D_2 \backslash D_1) = 0$, seega

$$\begin{aligned} F(D_1) &= F(D_1 \cap D_2) + F(D_1 \backslash D_2) = F(D_1 \cap D_2) \\ &= F(D_2 \cap D_1) + F(D_2 \backslash D_1) = F(D_2), \end{aligned}$$

nagu soovitud. Paneme tähele, et G on loenduvalt aditiivne vektormõõt, kusjuures $|G| = \nu$. Tõepoolest, hulgafunktsiooni G loenduv aditiivsus on ilmne. Olgu nüüd $E \in \Xi$ suvaline. Kui $\{E_1, \ldots, E_n\}$, kus $n \in \mathbb{N}$, on hulga E Ξ-mõõtuv tükeldus, siis iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $E_i = D_i \cup N_i$, kus $D_i \in \Sigma$ ja $N_i \in \mathcal{N}$; seejuures

$$\sum_{i=1}^{n} \|G(E_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \|F(D_i)\| \leqslant |F|\left(\bigcup_{i=1}^{n} D_i\right) = \nu(E);$$

järelikult $|G|(E) \leqslant \nu(E)$. Teiselt poolt, olgu $D \in \Sigma$ ja $N \in \mathcal{N}$ sellised, et $E = D \cup N$, ning olgu π hulga D Σ-mõõtuv tükeldus. Siis

$$\sum_{C \in \pi} \|F(C)\| = \sum_{C \in \pi} \|G(C)\| = \sum_{C \in \pi} \|G(C)\| + \|G(E \backslash D)\| \leqslant |G|(E),$$

järelikult $\nu(E) = |F|(D) \leqslant |G|(E)$. Niisiis $|G|(E) = \nu(E)$ ning seega $|G| = \nu$.

Eelduse ($\natural$) põhjal leidub $|G|$-integreeruv tõkestatud funktsioon $g\colon \Omega \to X$, mis rahuldab tingimust (2.7). Lause tõestuseks jääb nüüd näidata, et, funktsioon

$$f := g\phi\colon \Omega \ni \omega \longmapsto \phi(\omega)\, g(\omega) \in X$$

on μ-mõõtuv ja rahuldab tingimust (2.8).

Kuna funktsioon $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ on Σ-mõõtuv, siis leiduvad Σ-mõõtuvad lihtfunktsioonid $\phi_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $\phi_n \underset{n}{\longrightarrow} \phi$ punktiviisi ruumis Ω. Kuna funktsioon $g\colon \Omega \to X$ on ν-mõõtuv, siis arvestades, et ν on variatsiooni $|F|$ täield, on g ka $|F|$-mõõtuv; kuna g on tõkestatud, siis lemma 2.18 põhjal leiduvad Σ-mõõtuvad lihtfunktsioonid $g_n\colon \Omega \to X$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $g_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ $|F|$-peaaegu kõikjal ruumis Ω, kusjuures jada (g_n) on ühtlaselt tõkestatud, st $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\omega \in \Omega} \|g_n(\omega)\| < \infty$. Nüüd $f_n := g_n\phi_n\colon \Omega \ni \omega \mapsto$

$\phi_n(\omega)g_n(\omega) \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, on Σ-mõõtuvad lihtfunktsioonid, seega funktsiooni f μ-mõõtuvuseks piisab näidata, et $f_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ μ-peaaegu kõikjal ruumis Ω.

Olgu $C \in \Sigma$ selline, et $|F|(C) = 0$ ja $g_n(\omega) \underset{n}{\longrightarrow} g(\omega)$ iga $\omega \in \Omega \backslash C$ korral. Kuna $\int_C \phi \, d\mu = |F|(C) = 0$, siis $\phi(\omega) = 0$ μ-peaaegu kõikide $\omega \in C$ korral (siin me arvestame, et ϕ on mittenegatiivne funktsioon), st leidub $C_0 \in \Sigma$, $C_0 \subset C$, nii, et $\mu(C_0) = 0$ ja $\phi(\omega) = 0$ iga $\omega \in C \backslash C_0$ korral. Nüüd iga $\omega \in \Omega \backslash C_0$ korral $f_n(\omega) \underset{n}{\longrightarrow} f(\omega)$, sest kui $\omega \in \Omega \backslash C$, siis $g_n(\omega) \underset{n}{\longrightarrow} g(\omega)$ ja $\phi_n(\omega) \underset{n}{\longrightarrow} \phi(\omega)$, järelikult

$$f_n(\omega) = \phi_n(\omega)g_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(\omega)g(\omega) = f(\omega);$$

kui aga $\omega \in C \backslash C_0$, siis $\phi_n(\omega) \underset{n}{\longrightarrow} \phi(\omega) = 0$, järelikult, arvestades, et jada (g_n) on ühtlaselt tõkestatud,

$$f_n(\omega) = \phi_n(\omega)g_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \phi(\omega)g(\omega) = f(\omega).$$

Seega $f_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ μ-peaaegu kõikjal (sest $\mu(C_0) = 0$).

Jääb veel näidata, et funktsioon f rahuldab tingimust (2.8). Selleks märgime esmalt, et funktsioon f on μ-integreeruv, sest

$$\int_\Omega \|f\| \, d\mu = \int_\Omega \|g\| \, |\phi| \, d\mu \leqslant \|g\|_\infty \int_\Omega |\phi| \, d\mu = \|g\|_\infty \|\phi\|_1 < \infty.$$

Fikseerides vabalt $D \in \Sigma$ ja $x^* \in X^*$, piisab tingimuse (2.8) rahuldatuseks nüüd näidata, et

$$\langle F(D), x^* \rangle = \left\langle \int_D f \, d\mu, x^* \right\rangle.$$

Selleks märgime, et kuna $F(D) = G(D) = \int_D g \, d\nu$ ning $\phi = \dfrac{d|F|}{d\mu}$, siis lause 2.36 põhjal

$$\begin{aligned}
\langle F(D), x^* \rangle = \left\langle \int_D g \, d\nu, x^* \right\rangle &= \int_D \langle g(\omega), x^* \rangle \, d\nu(\omega) = \int_D \langle g(\omega), x^* \rangle \, d|F|(\omega) \\
&= \int_D \langle g(\omega), x^* \rangle \, \phi(\omega) \, d\mu(\omega) = \int_D \langle \phi(\omega) g(\omega), x^* \rangle \, d\mu(\omega) \\
&= \int_D \langle f(\omega), x^* \rangle \, d\mu(\omega) = \left\langle \int_D f \, d\mu, x^* \right\rangle,
\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

2.6 Lebesgue–Bochneri ruumid $L_p(\mu, X)$, kus $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Käesolev jaotis on kogu ulatuses tsiteeritud magistritööst [Ma, lk 38–39, jaotis 2.4].

Kõigi Bochneri mõttes μ-integreeruvate funktsioonide $f\colon \Omega \to X$ ruumi tähistatakse sümboliga $L_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ või lihtsalt $L_1(\mu, X)$. Siis $L_1(\mu, X)$ on vektorruum loomulike tehete suhtes. Kui ruumis $L_1(\mu, X)$ lugeda kaks funktsiooni võrdseks, kui nad on võrdsed μ-peaaegu kõikjal, siis $L_1(\mu, X)$ on Banachi ruum järgmise normi suhtes:

$$\|f\|_1 := \int_\Omega \|f\| \, d\mu, \quad f \in L_1(\mu, X).$$

Üldisemalt, kui $1 \leqslant p < \infty$, siis sümboliga $L_p(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ või lihtsalt $L_p(\mu, X)$ tähistatakse selliste μ-mõõtuvate funktsioonide $f\colon \Omega \to X$ klassi, mille korral

$$\int_\Omega \|f\|^p \, d\mu < \infty.$$

Niisiis, $L_p(\mu, X) = \big\{f\colon \Omega \to X,\ \|f\| \in L_p(\mu)\big\}$. Paneme tähele, et $L_p(\mu, X)$ on vektorruum loomulike tehete suhtes. Kui ruumis $L_p(\mu, X)$ lugeda kaks funktsiooni võrdseks, kui nad on võrdsed μ-peaaegu kõikjal, siis $L_p(\mu, X)$ on Banachi ruum järgmise normi suhtes:

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega \|f\|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L_p(\mu, X).$$

Me ütleme et μ-mõõtuv funktsioon $f\colon \Omega \to X$ on *μ-oluliselt tõkestatud* (ehk lihtsalt *oluliselt tõkestatud,* kui mõõdu μ roll on kontekstist selge), kui

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} \|f\| < \infty,$$

kus

$$\begin{aligned}
\operatorname{ess\,sup} \|f\| &= \inf\Big\{a \in \mathbb{R}\colon \text{hulk } \{\omega \in \Omega\colon \|f(\omega)\| > a\} \text{ on } \mu\text{-hüljatav}\Big\} \\
&= \min\Big\{a \in \mathbb{R}\colon \text{hulk } \{\omega \in \Omega\colon \|f(\omega)\| > a\} \text{ on } \mu\text{-hüljatav}\Big\} \\
&= \min\Big\{a \in \mathbb{R}\colon \|f\| \leqslant a \ \mu\text{-peaaegu kõikjal}\Big\}.
\end{aligned}$$

Kõigi *μ-oluliselt tõkestatud* μ-mõõtuvate funktsioonide klassi tähistatakse sümboliga $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ (ehk, lühidalt, $L_\infty(\mu, X)$). Juhime tähelepanu, et klass $L_\infty(\mu, X)$ koosneb funktsioonidest, mis on väljaspool mingit nullmõõduga hulka tõkestatud. Märgime, et $L_\infty(\mu, X)$ on vektorruum loomulike tehete suhtes; kui ruumis $L_\infty(\mu, X)$ lugeda kaks funktsiooni võrdseks, kui nad on võrdsed μ-peaaegu kõikjal, siis $L_\infty(\mu, X)$ on Banachi ruum normi $\|\cdot\|_\infty$ suhtes.

Banachi ruume $L_p(\mu, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, nimetatakse *Lebesgue–Bochneri ruumideks.* Lebesgue–Bochneri ruumid on ruumide $L_p(\mu)$ loomulik üldistus. Märgime, et kui $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, siis

$$L_\infty(\mu, X) \subset L_q(\mu, X) \subset L_p(\mu, X) \subset L_1(\mu, X).$$

2.7 Bochneri mõttes integreeruvate funktsioonide ruumi kaasruum

Lemma 2.37. *Olgu $p, q \in [1, \infty]$ kaaseksponendid, st $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (seejuures juhtudel $p = 1$ ja $p = \infty$ loeme vastavalt $q = \infty$ ja $q = 1$), ning olgu $g \in L_q(\mu, \mathcal{L}(X, Y))$ ja $f \in L_p(\mu, X)$. Siis funktsioon*

$$gf : \Omega \ni \omega \longmapsto g(\omega) f(\omega) \in Y$$

on Bochneri mõttes integreeruv.

Tõestus. Näitame esmalt, et funktsioon gf on mõõtuv. Funktsioonide g ja f mõõtuvuse tõttu leiduvad lihtfunktsioonide $\Omega \to \mathcal{L}(X, Y)$ jada (g_n) ja lihtfunktsioonide $\Omega \to X$ jada (f_n) nii, et $g_n \underset{n}{\to} g$ peaaegu kõikjal ja $f_n \underset{n}{\to} f$ peaaegu kõikjal, seega peaaegu kõikide $\omega \in \Omega$ korral

$$\begin{aligned} &\|g_n(\omega) f_n(\omega) - g(\omega) f(\omega)\| \\ &\qquad \leqslant \|g_n(\omega) - g(\omega)\| \|f_n(\omega)\| + \|g(\omega)\| \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \end{aligned}$$

st $g_n f_n \underset{n}{\to} gf$ peaaegu kõikjal. Kuna $g_n f_n : \Omega \to Y$ on lihtfunktsioonid, siis funktsioon gf on mõõtuv. Funktsiooni gf Bochneri mõttes integreeruvuseks piisab märkida, et Hölderi võrratuse põhjal

$$\int_\Omega \|gf\| \, d\mu \leqslant \int_\Omega \|g\| \, \|f\| \, d\mu \leqslant \|g\|_q \|f\|_p < \infty.$$

$\square$

Lause 2.38 (vt [DU, lk 98]). *Operaator $T : L_1(\mu, X^*) \to L_\infty(\mu, X)^*$, kus*

$$\langle f, Tg \rangle = \int_\Omega gf \, d\mu := \int_\Omega \langle f(\omega), g(\omega) \rangle \, d\mu(\omega), \quad g \in L_1(\mu, X^*), \ f \in L_\infty(\mu, X),$$

on lineaarne isomeetria.

Tõestus. Märgime esmalt, et mistahes $g \in L_1(\mu, X^*)$ ja $f \in L_\infty(\mu, X)$ korral on funktsioon $gf\colon \Omega \to \mathbb{R}$ lemma 2.37 põhjal Bochneri mõttes integreeruv (mis antud juhul tähendab tavalist Lebesgue'i mõttes integreeruvust); samuti on lihtne näha, et $Tg\colon L_\infty(\mu, X) \to \mathbb{R}$ on lineaarne funktsionaal. See lineaarne funktsionaal on pidev, sest mistahes $f \in L_\infty(\mu, X)$ korral

$$|\langle f, Tg\rangle| = \left|\int_\Omega gf\, d\mu\right| \leqslant \int_\Omega \|g\|\,\|f\|\, d\mu \leqslant \|f\|_\infty \int_\Omega \|g\|\, d\mu = \|g\|_1 \|f\|_\infty;$$

niisiis $Tg \in L_\infty(\mu, X)^*$, kusjuures $\|Tg\| \leqslant \|g\|_1$. Ilmselt on operaator T lineaarne, seega jääb lause tõestuseks näidata, et iga $g \in L_1(\mu, X^*)$ korral $\|Tg\| \geqslant \|g\|_1$. Fikseerides vabalt $g \in L_1(\mu, X^*)$ ja $\varepsilon > 0$, piisab selleks näidata, et $\|Tg\| \geqslant \|g\|_1 - \varepsilon$.

Olgu (g_n) selline lihtfunktsioonide $\Omega \to X^*$ jada, et $\|g_n - g\|_1 \underset{n}{\to} 0$; siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leiduvad $m_n \in \mathbb{N}$, $x^*_{n,1}, \dots, x^*_{n,m_n} \in X^*$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $A_{n,1}, \dots, A_{n,m_n} \in \Sigma$ nii, et

$$g_n = \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_{n,i}}\, x^*_{n,i}.$$

Mistahes $n \in \mathbb{N}$ ja $i \in \{1, \dots, m_n\}$ korral leidub $x_{n,i} \in B_X$ nii, et

$$\langle x_{n,i}, x^*_{n,i}\rangle > \|x^*_{n,i}\| - \frac{\varepsilon}{\mu(\Omega)}.$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral defineerime funktsiooni

$$f_n := \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_{n,i}}\, x_{n,i}\colon \Omega \to X;$$

siis ilmselt $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$, kusjuures

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_n f_n\, d\mu &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_{n,i}} \langle x_{n,i}, x^*_{n,i}\rangle\, d\mu \geqslant \int_\Omega \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_{n,i}} \left(\|x^*_{n,i}\| - \frac{\varepsilon}{\mu(\Omega)}\right) d\mu \\ &\geqslant \int_\Omega \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_{n,i}}\, \|x^*_{n,i}\|\, d\mu - \varepsilon = \int_\Omega \|g_n\|\, d\mu - \varepsilon = \|g_n\|_1 - \varepsilon,\end{aligned}$$

seega $|\langle f_n, Tg_n\rangle| \geqslant \|g_n\|_1 - \varepsilon$. Seega

$$\|Tg_n\| \geqslant \|g_n\|_1 - \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral},$$

järelikult

$$\|Tg\| = \lim_{n\to\infty} \|Tg_n\| \geqslant \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_1 - \varepsilon = \|g\|_1 - \varepsilon.$$

□

Teoreem 2.39 (vt [DU, lk 98, teoreem 1]). *Olgu* $p \in [1, \infty)$ *ja* $q \in (1, \infty]$ *kaaseksponendid, st* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(seejuures juhul* $p = 1$ *loeme* $q = \infty$*). Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *kaasruumil* X^* *on Radon–Nikodými omadus ruumi* (Ω, Σ, μ) *suhtes;*

(ii) *operaator* $T\colon L_q(\mu, X^*) \to L_p(\mu, X)^*$*, kus*

$$\langle f, Tg \rangle = \int_\Omega \langle f(\omega), g(\omega) \rangle \, d\mu(\omega), \quad g \in L_q(\mu, X^*), \ f \in L_p(\mu, X)^*,$$

on isomeetriline isomorfism.

2.8 Liftingu mõiste. Liftingute olemasoluteoreem

Tähistame sümboliga $M(\Sigma)$ kõigi Σ-mõõtuvate funktsioonide $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ hulka.

Definitsioon 2.40 (vt [T, lk 4, jaotis (1-1-11)]). Funktsiooni $\varrho\colon L_\infty(\mu) \to M(\Sigma)$ nimetatakse *liftinguks,* kui mistahes $f, g \in L_\infty(\mu)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral

(1) $\varrho(f) = f$ μ-peaaegu kõikjal;

(2) $\varrho(\alpha f + \beta g) = \alpha\varrho(f) + \beta\varrho(g)$;

(3) $\varrho(fg) = \varrho(f)\varrho(g)$;

(4) $\varrho(1) = 1$;

(5) $f \geqslant 0 \implies \varrho(f) \geqslant 0$.

Märkus 2.41. Definitsiooni 2.40 tingimuses (5) tähendab tingimus "$f \geqslant 0$", et $f \geqslant 0$ ruumis $L_\infty(\mu)$, st $f \geqslant 0$ μ-peaaegu kõikjal; tingimus "$\varrho(f) \geqslant 0$" tähendab, et $\big(\varrho(f)\big)(\omega) \geqslant 0$ iga $\omega \in \Omega$ korral.

Sisuliselt valitakse liftinguga (faktor)ruumi $L_\infty(\mu)$ igast peaaegu kõikjal võrdsete funktsioonide ekvivalentsiklassist välja üks kindel funktsioon (ehk selle ekvivalentsklassi üks esindaja).

Toome välja veel kaks meie jaoks edasises olulist liftingute omadust: mistahes $f, g \in L_\infty(\mu)$ korral

(6) $f \geqslant g \implies \varrho(f) \geqslant \varrho(g)$;

(7) $|\varrho(f)| \leqslant \varrho(|f|)$.

Tõestame väited (6) ja (7). Olgu $f, g \in L_\infty(\mu)$.

Olgu $f \geqslant g$ ruumis $L_\infty(\mu)$; siis $f - g \geqslant 0$ ruumis $L_\infty(\mu)$, seega omaduste (2) ja (5) põhjal $\varrho(f) - \varrho(g) = \varrho(f - g) \geqslant 0$, millest $\varrho(f) \geqslant \varrho(g)$. Väide (6) on tõestatud.

Kuna

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f| \quad \text{ruumis } L_\infty(\mu),$$

siis omaduste (2) ja (6) põhjal

$$-\varrho(|f|) = \varrho(-|f|) \leqslant \varrho(f) \leqslant \varrho(|f|),$$

seega $|\varrho(f)| \leqslant \varrho(|f|)$. Väide (7) on tõestatud.

Teoreem 2.42 (vt [T, lk 4, jaotis (1-1-11)])**.** *Kui mõõduga ruum* (Ω, Σ, μ) *on täielik, siis leidub lifting* $L_\infty(\mu) \to M(\Sigma)$.

2.9 Tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivse vektormõõdu nõrga tiheduse olemasolu ja omadused

Definitsioon 2.43. Öeldakse, et alamruum $Z \subset Y^*$ on *normeeriv alamruum* ruumi Y jaoks, kui tema kinnine ühikkera B_Z on normeeriv hulk ruumi Y jaoks (vt definitsiooni 2.14), st

$$\|y\| = \sup_{z \in B_Z} |\langle y, z \rangle| \quad \text{iga } y \in Y \text{ korral.}$$

Teoreem 2.44. *Olgu* $G\colon \Sigma \to Y$ *tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt, kusjuures leidub* $\kappa \geqslant 0$ *nii, et*

$$|G|(E) \leqslant \kappa\mu(E) \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral,}$$

ning olgu $\varrho\colon L_\infty(\mu) \to M(\Sigma)$ *lifting.*

(a) *Olgu* $Z \subset Y^*$ *normeeriv alamruum ruumi* Y *jaoks. Siis leidub parajasti üks tõkestatud funktsioon* $h\colon \Omega \to Z^*$ *nii, et*

(1) $\langle G(E), z \rangle = \int_E \langle z, h(\omega) \rangle \, d\mu(\omega)$ *kõikide* $E \in \Sigma$ *ja* $z \in Z$ *korral;*

(2) $\varrho(\langle z, h(\cdot) \rangle) = \langle z, h(\cdot) \rangle$ *iga* $z \in Z$ *korral;*

seejuures $\|h(\omega)\| \leqslant \kappa$ *iga* $\omega \in \Omega$ *korral.*

(b) *Olgu ruum* Y *kaasruum, st* $Y = W^*$ *mingi Banachi ruumi* W *korral. Siis leidub parajasti üks tõkestatud funktsioon* $f\colon \Omega \to Y$ *nii, et*

(1*) $\langle w, G(E)\rangle = \int_E \langle w, f(\omega)\rangle\, d\mu(\omega)$ *kõikide* $E \in \Sigma$ *ja* $w \in W$ *korral;*

(2*) $\varrho(\langle w, f(\cdot)\rangle) = \langle w, f(\cdot)\rangle$ *iga* $w \in W$ *korral;*

seejuures $\|f(\omega)\| \leqslant \kappa$ *iga* $\omega \in \Omega$ *korral.*

Järeldades teoreemis 2.44 (ning ka teoreemides 2.46 ja 3.3) väitest (a) väidet (b), on mugav toetuda järgnevale lemmale.

Lemma 2.45. (a) *Olgu* $Z \subset Y^*$ *normeeriv alamruum ruumi* Y *jaoks ning olgu* $j_Y\colon Y \to Y^{**}$ *ja* $j\colon Z \to Y^*$ *loomulikud sisestused. Siis* $\Phi := j^* j_Y\colon Y \to Z^*$ *on lineaarne isomeetria; seejuures*

$$\langle z, \Phi y\rangle = \langle y, z\rangle \quad \textit{kõikide } y \in Y \textit{ ja } z \in Z \textit{ korral.} \tag{2.9}$$

(b) *Olgu ruum* Y *kaasruum, st* $Y = W^*$ *mingi Banachi ruumi* W *korral, ning olgu* $Z := j_W(W) \subset W^{**} = Y^*$. *Siis*

(ba) $\Phi := j^* j_Y\colon Y \to Z^*$ *on isomeetriline isomorfism;*

(bb) *kui funktsioonid* $h\colon \Omega \to Z^*$ *ja* $f\colon \Omega \to Y$ *on sellised, et* $h = \Phi f$, *siis funktsioon* h *rahuldab teoreemi 2.44 tingimusi* (1) *ja* (2) *parajasti siis, kui funktsioon* f *rahuldab selle teoreemi tingimusi* (1*) *ja* (2*).

TÕESTUS. (a). Kuna $Z \subset Y^*$ on normeeriv alamruum ruumi Y jaoks, siis väite tõestuseks piisab tõestada võrdused (2.9): mistahes $y \in Y$ ja $z \in Z$ korral

$$\langle z, \Phi y\rangle = \langle z, j^* j_Y y\rangle = \langle jz, j_Y y\rangle = \langle y, jz\rangle = \langle y, z\rangle.$$

(ba). Kuna (a) põhjal on Φ lineaarne isomeetria, siis jääb väite tõestuseks näidata, et Φ on sürjektsioon. Selleks märgime, et antud juhul loomulik sisestus $j\colon Z \to Y^*$ on loomulik sisestus $j\colon j_W(W) \to W^{**}$; seega $Z^* = j_W(W)^* = j^*(W^{***}) = j^*(Y^{**})$. Kuna

$$Y^{**} = W^{***} = j_{W^*}(W^*) \oplus j_W(W)^\perp = j_Y(Y) \oplus j_W(W)^\perp,$$

kusjuures mistahes $w^\perp \in j_W(W)^\perp$ ja $w \in W$ korral

$$\langle j_W w, j^* w^\perp\rangle = \langle j j_W w, w^\perp\rangle = \langle j_W w, w^\perp\rangle = 0,$$

st $j^* w^\perp = 0$ ning seega $j^*\big(j_W(W)^\perp\big) = \{0\}$, siis

$$Z^* = j^*(Y^{**}) = j^*\big(j_Y(Y)\big) + j^*\big(j_W(W)^\perp\big) = j^* j_Y(Y) + \{0\} = \Phi(Y);$$

niisiis Φ on sürjektsioon, nagu soovitud.

(bb). Olgu funktsioonid $h\colon \Omega \to Z^*$ ja $f\colon \Omega \to Y$ sellised, et $h = \Phi f$. Väite tõestuseks piisab märkida, et mistahes $E \in \Sigma$ ja $w \in W$ korral ühelt poolt

$$\langle G(E), j_W(w)\rangle = \langle w, G(E)\rangle,$$

teiselt poolt aga, arvestades, et võrduse (2.9) põhjal iga $\omega \in \Omega$ korral

$$\langle j_W(w), h(\omega)\rangle = \langle j_W(w), \Phi f(\omega)\rangle = \langle f(\omega), j_W(w)\rangle = \langle w, f(\omega)\rangle,$$

kehtib

$$\int_E \langle j_W(w), h(\omega)\rangle \, d\mu(\omega) = \int_E \langle w, f(\omega)\rangle \, d\mu(\omega).$$

□

Teoreemi 2.44 tõestus. (a). Iga $z \in Z$ korral on

$$zG\colon \Sigma \ni E \longmapsto \langle G(E), z\rangle \in \mathbb{R}$$

μ-pidev märgiga mõõt, seega klassikalise Radon–Nikodými teoreemi põhjal leidub $g_z \in L_1(\mu)$ nii, et

$$\langle G(E), z\rangle = zG(E) = \int_E g_z \, d\mu \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral.}$$

Kuna iga $E \in \Sigma$ korral

$$\int_E |g_z(\omega)| \, d\mu(\omega) = |zG|(E) \leqslant \|z\| \, |G|(E) \leqslant \|z\| \kappa\mu(E) = \int_E \kappa \|z\| \, d\mu,$$

siis $|g_z(\omega)| \leqslant \kappa\|z\|$ μ-peaaegu kõikide $\omega \in \Omega$ korral; niisiis $g_z \in L_\infty(\mu)$, kusjuures

$$\big(\varrho(|g_z|)\big)(\omega) \leqslant \kappa\|z\| \quad \text{iga } \omega \in \Omega \text{ korral.} \tag{2.10}$$

Defineerime iga $\omega \in \Omega$ korral funktsionaali $h(\omega)\colon Z \to \mathbb{R}$ võrdusega

$$\langle z, h(\omega)\rangle := \big(\varrho(g_z)\big)(\omega), \quad z \in Z.$$

Siis iga $\omega \in \Omega$ korral $h(\omega) \in Z^*$. Tõepoolest, olgu $\omega \in \Omega$. Kui $z_1, z_2 \in Z$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, siis $g_{\alpha z_1 + z_2} = \alpha g_{z_1} + g_{z_2}$, sest iga $E \in \Sigma$ korral

$$\begin{aligned}\int_E g_{\alpha z_1 + z_2} \, d\mu &= \langle G(E), \alpha z_1 + z_2\rangle = \alpha\langle G(E), z_1\rangle + \langle G(E), z_2\rangle \\ &= \alpha \int_E g_{z_1} \, d\mu + \int_E g_{z_2} \, d\mu = \int_E (\alpha g_{z_1} + g_{z_2}) \, d\mu;\end{aligned}$$

seega

$$\begin{aligned}\langle \alpha z_1 + z_2, h(\omega)\rangle &= \big(\varrho(g_{\alpha z_1+z_2})\big)(\omega) = \big(\varrho(\alpha g_{z_1} + g_{z_2})\big)(\omega)\\ &= \big(\alpha\varrho(g_{z_1}) + \varrho(g_{z_2})\big)(\omega) = \alpha\big(\varrho(g_{z_1})\big)(\omega) + \big(\varrho(g_{z_2})\big)(\omega)\\ &= \alpha\langle z_1, h(\omega)\rangle + \langle z_2, h(\omega)\rangle;\end{aligned}$$

niisiis $h(\omega)$ on lineaarne. Funktsionaal $h(\omega)$ on ka pidev, kusjuures $\|h(\omega)\| \leqslant \kappa$, sest mistahes $z \in Z$ korral võrratuse (2.10) tõttu

$$|\langle z, h(\omega)\rangle| = \big|\big(\varrho(g_z)\big)(\omega)\big| = |\varrho(g_z)|(\omega) \leqslant \big(\varrho(|g_z|)\big)(\omega) \leqslant \kappa\|z\|.$$

Funktsioon $h\colon \Omega \ni \omega \mapsto h(\omega) \in Z^*$ rahuldab tingimusi (1) ja (2), sest kõikide $E \in \Sigma$ ja $z \in Z$ korral

$$\langle G(E), z\rangle = \int_E g_z(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_E \big(\rho(g_z)\big)(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_E \langle z, h(\omega)\rangle\, d\mu(\omega)$$

ja

$$\varrho(\langle z, h(\cdot)\rangle) = \varrho\big(\varrho(g_z)\big) \overset{(*)}{=} \varrho(g_z) = \langle z, h(\cdot)\rangle$$

(siin võrdus $(*)$ kehtib, sest $\varrho(g_z) = g_z$ peaaegu kõikjal).

Oletame nüüd, et tõkestatud funktsioon $g\colon \Omega \to Z^*$ rahuldab tingimusi (1) ja (2), kus h asemel on g. Siis iga $z \in Z$ korral

$$\int_E \langle z, g(\omega)\rangle\, d\mu(\omega) = \langle G(E), z\rangle = \int_E \langle z, h(\omega)\rangle\, d\mu(\omega) \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral,}$$

seega

$$\langle z, g(\omega)\rangle = \langle z, h(\omega)\rangle \quad \mu\text{-peaaegu kõikide } \omega \in \Omega \text{ korral,}$$

järelikult

$$\langle z, g(\cdot)\rangle = \varrho\big(\langle z, g(\cdot)\rangle\big) = \varrho\big(\langle z, h(\cdot)\rangle\big) = \langle z, h(\cdot)\rangle,$$

st

$$\langle z, g(\omega)\rangle = \langle z, h(\omega)\rangle \quad \text{iga } \omega \in \Omega \text{ korral.}$$

Kuna viimane tingimus kehtib iga $z \in Z$ korral, siis $g(\omega) = h(\omega)$ iga $\omega \in \Omega$ korral, st $g = h$.

(b). Defineerime $Z := j_W(W) \subset W^{**} = Y^*$; siis teoreemi (a)-osa põhjal leidub tõkestatud funktsioon $h\colon \Omega \to Z^*$, mis rahuldab tingimusi (1) ja (2), kusjuures $\|h(\omega)\| \leqslant \kappa$ iga $\omega \in \Omega$ korral. Defineerime funktsiooni $f := \Phi^{-1}h\colon \Omega \to Y$, kus $\Phi := j^* j_Y\colon Y \to Z^*$ (meenutame, et lemma 2.45 põhjal on Φ isomeetriline isomorfism); siis $h = \Phi f$, järelikult lemma 2.45 põhjal rahuldab f tingimusi (1^*) ja (2^*). Kuna Φ on isomeetriline isomorfism, siis iga $\omega \in \Omega$ korral

$$\|f(\omega)\| = \|\Phi f(\omega)\| = \|h(\omega)\| \leqslant \kappa.$$

Oletame nüüd, et funktsioon $g\colon \Omega \to Y$ rahuldab tingimusi (1*) ja (2*), kus f asemel on g. Defineerime funktsiooni $\widehat{g} := \Phi g\colon \Omega \to Z^*$; siis lemma 2.45 põhjal rahuldab $\widehat{g}$ tingimusi (1) ja (2), kus h asemel on $\widehat{g}$; järelikult teoreemi (a)-osa põhjal $\widehat{g} = h$. Niisiis, $\Phi g = \widehat{g} = h = \Phi f$, millest, arvestades, et Φ on isomorfism, järeldub, et $g = f$. □

Järgnev teoreem kirjeldab eelneva teoreemi funktsioonide h ja f omadusi.

Teoreem 2.46. *Olgu $G\colon \Sigma \to Y$ tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt ning olgu $\varrho\colon L_\infty(\mu) \to M(\Sigma)$ lifting. Tähistame iga $E \in \Sigma$ korral*

$$H_E := \left\{ \frac{G(D)}{\mu(D)} : \Sigma \ni D \subset E,\ \mu(D) > 0 \right\} \subset Y.$$

(a) *Olgu $Z \subset Y^*$ normeeriv alamruum ruumi Y jaoks ning olgu $j\colon Z \to Y^*$ loomulik sisestus. Rahuldagu tõkestatud funktsioon $h\colon \Omega \to Z^*$ teoreemi 2.44 tingimusi* (1) *ja* (2)*.*

(aa) *Olgu $E \in \Sigma$. Kui hulk $C := \overline{\mathrm{conv}}^{\sigma(Y,Z)} H_E$ ruumis Y on $\sigma(Y,Z)$-kompaktne, siis*

$$h(\omega) \in j^* j_Y(C) =: \widehat{C} \quad \mu\text{-peaaegu kõikide } \omega \in E \text{ korral;} \tag{2.11}$$

seejuures, kui $E = \Omega$, siis

$$h(\omega) \in \widehat{C} \quad \text{iga } \omega \in \Omega \text{ korral.}$$

(ab) *Kui ruumil Y on Radon–Nikodými omadus, siis funktsioon h on μ-mõõtuv. Seejuures leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $E_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \ldots$, nii, et hulgad $H_{E_i} \subset Y$, $i = 1, 2, \ldots$, on suhteliselt kompaktsed ja*

$$h(\omega) \in j^* j_Y(B) =: \widehat{B} \quad \mu\text{-peaaegu kõikide } \omega \in \Omega \text{ korral,} \tag{2.12}$$

kus $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\mathrm{conv}}^{\|\cdot\|} H_{E_i} \subset Y$.

(b) *Olgu ruum Y kaasruum, st $Y = W^*$ mingi Banachi ruumi W korral. Rahuldagu funktsioon $f\colon \Omega \to Y$ teoreemi 2.44 tingimusi* (1*) *ja* (2*)*.*

(ba) *Olgu $E \in \Sigma$. Kui hulk H_E ruumis Y on (normi topoloogias) tõkestatud, siis*

$$f(\omega) \in \overline{\mathrm{conv}}^{w^*} H_E =: A \quad \mu\text{-peaaegu kõikide } \omega \in E \text{ korral} \tag{2.13}$$

(siin mõeldakse ruumi $Y = W^*$ $*$-nõrga topoloogia w^* all topoloogiat $\sigma(Y,W)$); seejuures, kui $E = \Omega$, siis

$$f(\omega) \in A \quad \text{iga } \omega \in \Omega \text{ korral.}$$

(bb) *Kui ruumil Y on Radon–Nikodými omadus, siis funktsioon f on μ-mõõtuv. Seejuures leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $E_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \ldots$, nii, et hulgad $H_{E_i} \subset Y$, $i = 1, 2, \ldots$, on suhteliselt kompaktsed ja*

$$f(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|} H_{E_i} \quad \mu\text{-peaaegu kõikide } \omega \in \Omega \text{ korral.} \tag{2.14}$$

TÕESTUS. (aa). Eeldame, et hulk C ruumis Y on $\sigma(Y, Z)$-kompaktne. Kuna mistahes $y \in Y$ ja $z \in Z$ korral

$$\langle z, j^* j_Y y \rangle = \langle jz, j_Y y \rangle = \langle y, jz \rangle = \langle y, z \rangle,$$

siis hulk $\widehat{C}$ kaasruumis Z^* on $\sigma(Z^*, Z)$-kompaktne (ehk, teisisõnu, $*$-nõrgalt kompaktne). Järelduse 1.26 põhjal leidub alamhulk $\mathcal{F} \subset Z$ nii, et

$$\widehat{C} = \bigcap_{z \in \mathcal{F}} \{z^* \in Z^* \colon \langle z, z^* \rangle \leqslant 1\};$$

niisiis iga $\omega \in \Omega$ korral

$$h(\omega) \in \widehat{C} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle z, h(\omega) \rangle \leqslant 1 \quad \text{iga } z \in \mathcal{F} \text{ korral.}$$

Tähistame $N := \big\{\omega \in E \colon \big(\varrho(\chi_E)\big)(\omega) \neq 1\big\}$; siis $\mu(N) = 0$ (sest $\varrho(\chi_E) = \chi_E$ μ-peaaegu kõikjal). Fikseerides vabalt $z \in \mathcal{F}$, piisab väite (2.11) tõestuseks seega näidata, et

$$\langle z, h(\omega) \rangle \leqslant 1 \quad \text{iga } \omega \in E \backslash N \text{ korral.} \tag{2.15}$$

Selleks piisab näidata, et

$$\chi_E(\omega) \langle z, h(\omega) \rangle \leqslant 1 \quad \mu\text{-peaaegu kõikide } \omega \in \Omega \text{ korral.} \tag{2.16}$$

Tõepoolest, kui (2.16) kehtib, siis

$$\Big(\varrho\big(\chi_E \langle z, h(\cdot) \rangle\big)\Big)(\omega) \leqslant 1 \quad \text{iga } \omega \in \Omega \text{ korral;}$$

seega iga $\omega \in E \backslash N$ korral

$$\begin{aligned} \langle z, h(\omega) \rangle &= \chi_E(\omega) \langle z, h(\omega) \rangle = \big(\varrho(\chi_E)\big)(\omega) \, \big(\varrho(\langle z, h(\cdot) \rangle)\big)(\omega) \\ &= \Big(\varrho\big(\chi_E \langle z, h(\cdot) \rangle\big)\Big)(\omega) \leqslant 1; \end{aligned}$$

niisiis (2.15) kehtib.

Tingimus (2.16) on samaväärne tingimusega

$$\int_{E\cap F}\langle z,h(\omega)\rangle\,d\mu(\omega)\leqslant\int_{E\cap F}d\mu(\omega)=\mu(E\cap F)\quad\text{iga } F\in\Sigma \text{ korral,}$$

milleks piisab näidata, et

$$\int_{D}\langle z,h(\omega)\rangle\,d\mu(\omega)\leqslant\mu(D)\quad\text{iga } D\in\Sigma,\ D\subset E,\ \mu(D)>0,\ \text{korral.}$$

Kui $\Sigma\ni D\subset E$, $\mu(D)>0$, siis

$$\int_{D}\langle z,h(\omega)\rangle\,d\mu(\omega)=\langle G(D),z\rangle=\left\langle\frac{G(D)}{\mu(D)},z\right\rangle\mu(D)\leqslant\mu(D),$$

sest kuna $\dfrac{G(D)}{\mu(D)}\in H_E\subset C$, siis $j^*j_Y\dfrac{G(D)}{\mu(D)}\in\widehat{C}$ ning järelikult

$$\left\langle\frac{G(D)}{\mu(D)},z\right\rangle=\left\langle z,j^*j_Y\frac{G(D)}{\mu(D)}\right\rangle\leqslant 1.$$

Eeldame nüüd, et $E=\Omega$. Nagu eelnevas tõestuseski, saame, et kõikide $\omega\in E\backslash N=\Omega\backslash N$ ja $z\in\mathcal{F}$ korral $\langle z,h(\omega)\rangle\leqslant 1$; niisiis iga $\omega\in\Omega\backslash N$ korral $h(\omega)\in\widehat{C}$. Väite tõestuseks piisab seega näidata, et $N=\varnothing$. See võrdus kehtib, sest antud juhul $E=\Omega$, seega $\chi_E=\chi_\Omega=1$ ning järelikult $\varrho(\chi_E)=\varrho(1)=1$.

(ab). Olgu ruumil Y Radon–Nikodými omadus. Kuna iga $z\in Z$ korral on funktsioon $\Omega\ni\omega\mapsto\langle z,h(\omega)\rangle\in\mathbb{R}$ mõõtuv, siis järelduse 2.15 põhjal jääb funktsiooni h mõõtuvuseks näidata, et h on oluliselt separaabel-väärtuseline.

Järelduse 2.31 põhjal leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $E_i\in\Sigma$, $i=0,1,2,\dots$, nii, et $\bigcup_{i=0}^{\infty}E_i=\Omega$, $\mu(E_0)=0$ ja iga $i\in\mathbb{N}$ korral hulk

$$H_{E_i}:=\left\{\frac{G(D)}{\mu(D)}:\Sigma\ni D\subset E_i,\ \mu(D)\neq 0\right\}\subset Y$$

on normi topoloogias suhteliselt kompaktne ruumis Y. Nüüd iga $i\in\mathbb{N}$ korral on hulk $C_i:=\overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|}H_{E_i}\subset Y$ Mazuri teoreemi 1.1 põhjal normi topoloogias kompaktne, seega $C_i=\overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|}H_{E_i}=\overline{\operatorname{conv}}^{\sigma(Y,Z)}H_{E_i}$ on ka $\sigma(Y,Z)$-kompaktne; järelikult väite (a) põhjal

$$h(\omega)\in j^*j_Y(C_i)=:\widehat{C}_i\quad\mu\text{-peaaegu kõikide } \omega\in E_i \text{ korral.}$$

Iga $i\in\mathbb{N}$ korral on hulk $C_i\subset Y$ normi topoloogias separaabel (sest ta on normi topoloogias kompaktne); järelikult ka hulk $\widehat{C}_i\subset Z^*$ on normi topoloogias separaabel (sest $j^* j_Y$ on pidev operaator); seega ka hulk $\bigcup_{i=1}^{\infty} \widehat{C}_i =: \widetilde{C}$ on separaabel. Kuna μ-peaaegu kõikide $\omega \in \Omega$ korral $h(\omega) \in \widetilde{C}$, siis h on oluliselt separaabel-väärtuseline ning järelikult mõõtuv. Väite (ab) tõestuseks jääb vaid märkida, et

$$\widetilde{C} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \widehat{C}_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} j^* j_Y(C_i) = j^* j_Y\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = j^* j_Y(B) = \widehat{B}.$$

(b). Defineerime $Z := j_W(W) \subset W^{**} = Y^*$ ja $h := j^* j_Y f \colon \Omega \to Z^*$ (meenutame, et lemma 2.45 põhjal on $j^* j_Y$ isomeetriline isomorfism); siis (2.9) põhjal iga $z \in Z$ korral

$$\langle z, h(\omega) \rangle = \langle f(\omega), z \rangle \quad \text{iga } \omega \in \Omega \text{ korral.}$$

Lemma 2.45, (bb), põhjal rahuldab h teoreemi 2.44 tingimusi (1) ja (2).

(ba). Eeldame, et hulk H_E ruumis Y on (normi topoloogias) tõkestatud. Siis tema $*$-nõrgalt kinnine kumer kate $A := \overline{\text{conv}}^{w^*} H_E$ on $*$-nõrgalt kompaktne ehk, teisisõnu, $\sigma(Y, W)$-kompaktne ruumis Y, niisiis, hulk A on $\sigma(Y, Z)$-kompaktne ruumis Y. Väide järeldub nüüd väitest (aa), sest mistahes $\omega \in \Omega$ ja $y \in Y$ korral

$$h(\omega) = j^* j_Y y \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(\omega) = y.$$

(bb). Eeldame nüüd, et ruumil Y on Radon–Nikodými omadus. Kuna funktsioon $\langle w, f(\cdot) \rangle \colon \Omega \to \mathbb{R}$ on mõõtuv iga $w \in W$ korral, siis järelduse 2.15 põhjal jääb funktsiooni f mõõtuvuseks näidata, et f on oluliselt separaabel-väärtuseline. Selleks märgime, et kuna väite (ab) põhjal funktsioon h on mõõtuv, siis ta on oluliselt separaabel-väärtuseline, st leiduvad hulk $N \in \Sigma$ ja ruumi Z^* separaabel alamruum V nii, et $\mu(N) = 0$ ja $h(\Omega \setminus N) \subset V$. Kuna $\Phi := j^* j_Y \colon Y \to Z^*$ on isomeetriline isomorfism, siis $\Phi^{-1}(V)$ on ruumi Y separaabel alamruum; seejuures $f(\Omega \setminus N) = \Phi^{-1} h(\Omega \setminus N) \subset \Phi^{-1}(V)$. Niisiis on f oluliselt separaabel-väärtuseline ning seega mõõtuv.

Teoreemi tõestuseks jääb veel märkida, et kui $E_1, E_2, \ldots \in \Sigma$ on hulgad väitest (ab), siis hulgad $H_{E_1}, H_{E_2}, \ldots \subset Y$ on suhteliselt kompaktsed, kusjuures kehtib (2.12), kus $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\text{conv}}^{\|\cdot\|} H_{E_i} \subset Y$; seega kehtib ka (2.14). $\square$

3 Fakte operaator-väärtuseliste vektormõõtude ja vektorfunktsioonide kohta

Kõikjal selles peatükis on (Ω, Σ, μ) lõpliku mõõduga ruum ning X ja Y on Banachi ruumid.

3.1 Üks lihtne lemma

Lemma 3.1. *Olgu $G\colon \Sigma \to \mathcal{L}(X,Y)$ μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt ning olgu $x \in X$ ja $y^* \in Y^*$. Siis*

(a) $G^*\colon \Sigma \ni E \mapsto G(E)^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ *on μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt, kusjuures $|G^*| = |G|$;*

(b) $G_x\colon \Sigma \ni E \mapsto G(E)x \in Y$ *on μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt, kusjuures*

$$|G_x|(E) \leqslant \|x\|\,|G|(E) \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral;} \tag{3.1}$$

(c) $G_{y^*}\colon \Sigma \ni E \mapsto G(E)^* y^* \in X^*$ *on μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt, kusjuures*

$$|G_{y^*}|(E) \leqslant \|y^*\|\,|G|(E) \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral;}$$

(d) $G_{x,y^*}\colon \Sigma \ni E \mapsto \langle G(E)x, y^*\rangle \in \mathbb{R}$ *on μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne (arvväärtuseline) vektormõõt, kusjuures*

$$|G_{x,y^*}|(E) \leqslant \|y^*\|\,\|x\|\,|G|(E) \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral.}$$

TÕESTUS. (a). Hulgafunktsioon G^* on vektormõõt, sest mistahes lõikumatute hulkade $D, E \in \Sigma$ korral

$$\begin{aligned} G^*(D \cup E) &= G(D \cup E)^* = \big(G(D) + G(E)\big)^* = G(D)^* + G(E)^* \\ &= G^*(D) + G^*(E). \end{aligned}$$

Mistahes hulga $E \in \Sigma$ ja selle hulga Σ-mõõtuva tükelduse π korral

$$\sum_{D\in\pi} \|G^*(D)\| = \sum_{D\in\pi} \|G(D)^*\| = \sum_{D\in\pi} \|G(D)\|,$$

järelikult $|G^*|(E) = |G|(E)$ ning seega $|G^*| = |G|$. Siit järeldub, et $|G^*|$ on tõkestatud variatsiooniga. Lausest 2.4 järeldub nüüd, et G^* on loenduvalt aditiivne, ja lausest 2.6, et G^* on μ-pidev.

(b). Ilmselt on hulgafunktsioon G_x aditiivne ning seega vektormõõt. Mistahes hulga $E \in \Sigma$ ja selle hulga mõõtuva tükelduse π korral

$$\sum_{D \in \pi} \|G_x(D)\| = \sum_{D \in \pi} \|G(D)x\| \leqslant \sum_{D \in \pi} \|G(D)\| \, \|x\| \leqslant \|x\| \, |G|(E),$$

seega $|G_x|(E) \leqslant \|x\| \, |G|(E)$; niisiis (3.1) kehtib. Siit järeldub, et G_x on tõkestatud variatsiooniga, ning samuti, et G_x on μ-pidev. Lause 2.8 põhjal on G_x loenduvalt aditiivne.

(c) järeldub vahetult väidetest (a) ja (b), sest $G_{y^*} = (G^*)_{y^*}$.

(d) järeldub vahetult väidetest (c) ja (b), sest $G_{x,y^*} = (G_{y^*})_x$. □

3.2 Operaator-väärtuselise funktsiooni mõõtuvus

Teoreem 3.2 (vt [Din, lk 102, lause 18]). *Funktsioon $f \colon \Omega \to \mathcal{L}(X, Y)$ on mõõtuv parajasti siis, kui funktsioon $f(\cdot)x \colon \Omega \to Y$ on mõõtuv iga $x \in X$ korral ja f on oluliselt separaabel-väärtuseline.*

TÕESTUS. Märgime kõigepealt, et kui $x \in X$ ja $y^* \in Y^*$, siis funktsionaal

$$x \otimes y^* \colon \mathcal{L}(X, Y) \ni T \longmapsto \langle T, x \otimes y^* \rangle := \langle Tx, y^* \rangle \in \mathbb{R}$$

on pidev ja lineaarne, st $x \otimes y^* \in \mathcal{L}(X, Y)^*$, kusjuures $\|x \otimes y^*\| = \|x\| \, \|y^*\|$; seejuures hulk

$$B_X \otimes B_{Y^*} := \{x \otimes y^* \in \mathcal{L}(X, Y)^* \colon x \in B_X, y^* \in B_{Y^*}\} \subset B_{\mathcal{L}(X,Y)^*}$$

on normeeriv hulk ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ jaoks, sest iga $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ korral

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \sup_{x \in B_X} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |\langle Tx, y^* \rangle| = \sup_{\substack{x \in B_X \\ y^* \in B_{Y^*}}} |(x \otimes y^*)(T)| = \sup_{f \in B_X \otimes B_{Y^*}} |\langle T, f \rangle|.$$

Tarvilikkus. Olgu funktsioon f mõõtuv ning olgu $x \in X$. Pettise mõõtuvusteoreemi põhjal piisab funktsiooni $f(\cdot)x \colon \Omega \to Y$ mõõtuvuseks näidata, et ta on nõrgalt mõõtuv ja oluliselt separaabel väärtuseline.

Funktsiooni $f(\cdot)x$ nõrk mõõtuvus tähendab, et iga $y^* \in Y^*$ korral on funktsioon $\langle f(\cdot)x, y^* \rangle \colon \Omega \to \mathbb{R}$ mõõtuv. Mistahes $y^* \in Y^*$ korral $\langle f(\cdot)x, y^* \rangle = \langle f(\cdot), x \otimes y^* \rangle$; kuna mõõtuva funktsiooni f nõrga mõõtuvuse tõttu on funktsioon $\langle f(\cdot), x \otimes y^* \rangle$ mõõtuv, siis funktsioon $\langle f(\cdot)x, y^* \rangle$ on mõõtuv; niisiis $f(\cdot)x$ on nõrgalt mõõtuv.

Kuna funktsioon f on mõõtuv, siis ta on oluliselt separaabel-väärtuseline, st leidub $E \in \Sigma$ nii, et $\mu(\Omega \backslash E) = 0$ ja hulk $f(E)$ ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$ on separaabel. Olgu D hulga $f(E)$ ülimalt loenduv kõikjal tihe alamhulk. Funktsiooni

$f(\cdot)x$ oluliseks separaabel-väärtuselisuseks piisab nüüd tähele panna, et hulk $Dx := \{Tx \in Y : T \in D\}$ on kõikjal tihe hulgas $f(E)x := \{Tx : T \in f(E)\}$ (sest, arvestades et hulga D ülimalt loenduvuse tõttu on hulk Dx ülimalt loenduv, järeldub siit, et hulk $f(E)x$ on separaabel).

Piisavus. Eeldame nüüd, et funktsioon $f(\cdot)x : \Omega \to Y$ on mõõtuv iga $x \in X$ korral ja et f on oluliselt separaabel-väärtuseline. Kuna $B_X \otimes B_{Y^*} \subset B_{\mathcal{L}(X,Y)^*}$ on normeeriv hulk ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ jaoks, siis Pettise mõõtuvusteoreemi järelduse 2.15 põhjal piisab funktsiooni f mõõtuvuseks näidata, et mistahes $x \in B_X$ ja $y^* \in B_{Y^*}$ korral on funktsioon $\langle f(\cdot), x \otimes y^* \rangle : \Omega \to \mathbb{R}$ mõõtuv. Mistahes $x \in B_X$ ja $y^* \in B_{Y^*}$ korral $\langle f(\cdot), x \otimes y^* \rangle = \langle f(\cdot)x, y^* \rangle$; kuna mõõtuva funktsiooni $f(\cdot)x$ nõrga mõõtuvuse tõttu on funktsioon $\langle f(\cdot)x, y^* \rangle$ mõõtuv, siis funktsioon $\langle f(\cdot), x \otimes y^* \rangle$ on mõõtuv; niisiis f on mõõtuv. $\square$

3.3 Operaator-väärtuselise vektormõõdu nõrga tiheduse olemasolu

Teoreem 3.3 (vt [Din, lk 263–264, teoreem 4]). *Olgu $G : \Sigma \to \mathcal{L}(X,Y)$ tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt ning olgu $\varrho : L_\infty(|G|) \to M(\Sigma)$ lifting.*

(a) *Olgu $Z \subset Y^*$ normeeriv alamruum ruumi Y jaoks. Siis leidub parajasti üks tõkestatud funktsioon $h : \Omega \to \mathcal{L}(X, Z^*)$ nii, et*

(1) *$\langle G(E)x, z \rangle = \int_E \langle z, h(\omega)x \rangle \, d|G|(\omega)$ kõikide $E \in \Sigma$, $x \in X$ ja $z \in Z$ korral;*

(2) *$\varrho\big(\langle z, h(\cdot)x \rangle\big) = \langle z, h(\cdot)x \rangle$ kõikide $x \in X$ ja $z \in Z$ korral;*

seejuures $\|h(\omega)\| \leqslant 1$ iga $\omega \in \Omega$ korral;

(b) *Olgu Y kaasruum, st $Y = W^*$ mingi Banachi ruumi W korral. Siis leidub parajasti üks tõkestatud funktsioon $f : \Omega \to \mathcal{L}(X,Y)$ nii, et*

(1*) *$\langle w, G(E)x \rangle = \int_E \langle w, f(\omega)x \rangle \, d|G|(\omega)$ kõikide $E \in \Sigma$, $x \in X$ ja $w \in W$ korral;*

(2*) *$\varrho\big(\langle w, f(\cdot)x \rangle\big) = \langle w, f(\cdot)x \rangle$ kõikide $x \in X$ ja $w \in W$ korral;*

seejuures $\|f(\omega)\| \leqslant 1$ iga $\omega \in \Omega$ korral.

Tõestus. Tähistame $\nu := |G|$.

(a). Iga $x \in X$ korral on $G_x : \Sigma \ni E \mapsto G(E)x \in Y$ tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt, kusjuures kehtib (3.1), seega teoreemi 2.44 põhjal leidub parajasti üks funktsioon $h_x : \Omega \to Z^*$ nii, et

$(\widehat{1})$ $\langle G(E)x, z\rangle = \int_E \langle z, h_x(\omega)\rangle\, d\nu(\omega)$ kõikide $E \in \Sigma$ ja $z \in Z$ korral;

$(\widehat{2})$ $\varrho\big(\langle z, h_x(\cdot)\rangle\big) = \langle z, h_x(\cdot)\rangle$ iga $z \in Z$ korral;

seejuures $\|h_x(\omega)\| \leqslant \|x\|$ iga $\omega \in \Omega$ korral.

Defineerime iga $\omega \in \Omega$ korral operaatori

$$h(\omega)\colon X \ni x \longmapsto h_x(\omega) \in Z^*.$$

Veendumaks, et operaator $h(\omega)$ on iga $\omega \in \Omega$ korral lineaarne, piisab, fikseerides vabalt $x_1, x_2 \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, näidata, et

$$h_{\alpha x_1 + x_2}(\omega) = \alpha h_{x_1}(\omega) + h_{x_2}(\omega) \quad \text{iga } \omega \in \Omega \text{ korral.} \tag{3.2}$$

Selleks märgime, et kõikide $z \in Z$ ja $E \in \Sigma$ korral

$$\begin{aligned}
\int_E \langle z, h_{\alpha x_1 + x_2}(\omega)\rangle\, d\nu(\omega) &= \langle G(E)(\alpha x_1 + x_2), z\rangle \\
&= \alpha \langle G(E)x_1, z\rangle + \langle G(E)x_2, z\rangle \\
&= \alpha \int_E \langle z, h_{x_1}(\omega)\rangle\, d\nu(\omega) + \int_E \langle z, h_{x_2}(\omega)\rangle\, d\nu(\omega) \\
&= \int_E \big(\alpha\langle z, h_{x_1}(\omega)\rangle + \langle z, h_{x_2}(\omega)\rangle\big)\, d\nu(\omega),
\end{aligned}$$

seega iga $z \in Z$ korral

$$\langle z, h_{\alpha x_1 + x_2}(\omega)\rangle = \alpha\langle z, h_{x_1}(\omega)\rangle + \langle z, h_{x_2}(\omega)\rangle \quad \nu\text{-peaaegu kõikide } \omega \in \Omega \text{ korral,}$$

järelikult $(\widehat{2})$ põhjal iga $z \in Z$ korral

$$\begin{aligned}
\langle z, h_{\alpha x_1 + x_2}(\cdot)\rangle &= \varrho\big(\langle z, h_{\alpha x_1 + x_2}(\cdot)\rangle\big) = \varrho\big(\alpha\langle z, h_{x_1}(\cdot)\rangle + \langle z, h_{x_2}(\cdot)\rangle\big) \\
&= \alpha\varrho\big(\langle z, h_{x_1}(\cdot)\rangle\big) + \varrho\big(\langle z, h_{x_2}(\cdot)\rangle\big) = \alpha\langle z, h_{x_1}(\cdot)\rangle + \langle z, h_{x_2}(\cdot)\rangle \\
&= \langle z, \alpha h_{x_1}(\cdot) + h_{x_2}(\cdot)\rangle.
\end{aligned}$$

Kuna viimane võrdusteahel kehtib iga $z \in Z$ korral, siis (3.2) kehtib, järelikult iga $\omega \in \Omega$ korral on operaator $h(\omega)$ lineaarne . Iga $\omega \in \Omega$ korral on operaator $h(\omega)$ ka tõkestatud, sest

$$\|h(\omega)x\| = \|h_x(\omega)\| \leqslant \|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Niisiis iga $\omega \in \Omega$ korral $h(\omega) \in \mathcal{L}(X, Z^*)$, kusjuures $\|h(\omega)\| \leqslant 1$.

Funktsioon $h\colon \Omega \ni \omega \mapsto h(\omega) \in \mathcal{L}(X, Z^*)$ rahuldab tingimusi (1) ja (2), sest kõikide $E \in \Sigma$, $x \in X$ ja $z \in Z$ korral tingimuse $(\widehat{1})$ põhjal

$$\langle G(E)x, z\rangle = \int_E \langle z, h_x(\omega)\rangle\, d\nu(\omega) = \int_E \langle z, h(\omega)x\rangle\, d\nu(\omega)$$

ja tingimuse $(\widehat{2})$ põhjal

$$\varrho\big(\langle z, h(\cdot)x\rangle\big) = \varrho\big(\langle z, h_x(\cdot)\rangle\big) = \langle z, h_x(\cdot)\rangle = \langle z, h(\cdot)x\rangle.$$

Oletame nüüd, et funktsioon $g\colon \Omega \to \mathcal{L}(X, Z^*)$ rahuldab tingimusi (1) ja (2), kus h asemel on g. Siis iga $x \in X$ korral rahuldab funktsioon $g(\cdot)x\colon \Omega \to Z^*$ tingimusi $(\widehat{1})$ ja $(\widehat{2})$, kus h_x asemel on $g(\cdot)x$, järelikult $g(\cdot)x = h_x = h(\cdot)x$ ning seega $g = h$.

(b). Defineerime $Z := j_W(W) \subset W^{**} = Y^*$. Märgime, et

(A) *funktsioon* $h\colon \Omega \to \mathcal{L}(X, Z^*)$ *rahuldab tingimusi* (1) *ja* (2) *parajasti siis, kui iga* $x \in X$ *korral rahuldab funktsioon* $h(\cdot)x\colon \Omega \to Z^*$ *teoreemi 2.44 tingimusi* (1) *ja* (2), *kus vektormõõdu* $G\colon \Sigma \to Y$ *rollis on* $G(\cdot)x$, *funktsiooni* h *rollis on* $h(\cdot)x$ *ja mõõdu* μ *rollis on* $|G|$;

(B) *funktsioon* $f\colon \Omega \to \mathcal{L}(X, Y)$ *rahuldab tingimusi* (1^*) *ja* (2^*) *parajasti siis, kui iga* $x \in X$ *korral rahuldab funktsioon* $f(\cdot)x\colon \Omega \to Y$ *teoreemi 2.44 tingimusi* (1^*) *ja* (2^*), *kus vektormõõdu* $G\colon \Sigma \to Y$ *rollis on* $G(\cdot)x$, *funktsiooni* f *rollis on* $f(\cdot)x$ *ja mõõdu* μ *rollis on* $|G|$.

Olgu $\Phi := j^* j_Y\colon Y \to Z^*$ (meenutame, et lemma 2.45 põhjal on Φ isomeetriline isomorfism); siis väidete (A) ja (B) ning lemma 2.45 põhjal

(C) *funktsioon* $h\colon \Omega \to \mathcal{L}(X, Z^*)$ *rahuldab tingimusi* (1) *ja* (2) *parajasti siis, kui funktsioon* $f := \Phi^{-1}h\colon \Omega \to \mathcal{L}(X, Y)$ *rahuldab tingimusi* (1^*) *ja* (2^*).

Teoreemi (a)-osa põhjal leidub funktsioon $h\colon \Omega \to \mathcal{L}(X, Z^*)$, mis rahuldab tingimusi (1) ja (2), kusjuures $\|h(\omega)\| \leqslant 1$ iga $\omega \in \Omega$ korral. Defineerime funktsiooni $f := \Phi^{-1}h\colon \Omega \to \mathcal{L}(X, Y)$; siis väite (C) põhjal rahuldab f tingimusi (1^*) ja (2^*). Kuna Φ on isomeetriline isomorfism, siis iga $\omega \in \Omega$ korral

$$\|f(\omega)\| = \|\Phi f(\omega)\| = \|h(\omega)\| \leqslant 1.$$

Oletame nüüd, et funktsioon $g\colon \omega \to \mathcal{L}(X, Y)$ rahuldab tingimusi (1^*) ja (2^*), kus f asemel on g. Defineerime funktsiooni $\widehat{g} := \Phi g\colon \Omega \to \mathcal{L}(X, Z^*)$; siis $g = \Phi^{-1}\widehat{g}$, seega väite (C) põhjal rahuldab funktsioon $\widehat{g}$ tingimusi (1) ja (2), Funktsiooni h ühesuse tõttu väites (a) kehtib võrdus $\widehat{g} = h$, st $\Phi g = \Phi f$. Kuna Φ on ismorfism, siis järeldub siit, et $g = f$, nagu soovitud. $\square$

Järgnev lause toob välja mõned teoreemi 3.3 funktsiooni h meie jaoks edasises olulised omadused.

Lause 3.4 (vrd [DinU, lemma 3]). *Olgu $G\colon \Sigma \to \mathcal{L}(X,Y)$ tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt ning olgu $\varrho\colon L_\infty(|G|) \to M(\Sigma)$ lifting. Olgu $Z \subset Y^*$ normeeriv alamruum ruumi Y jaoks ning olgu $j\colon Z \to Y^*$ loomulik sisestus. Rahuldagu tõkestatud funktsioon $h\colon \Omega \to \mathcal{L}(X,Z^*)$ teoreemi 3.3 tingimusi* (1) *ja* (2).

(a) *Olgu ruumil Y Radon–Nikodými omadus. Siis iga $x \in X$ korral funktsioon*

$$h(\cdot)x\colon \Omega \ni \omega \longmapsto h(\omega)x \in Z^*$$

on $|G|$-mõõtuv; seejuures

$$h(\omega)x \in j^* j_Y(Y) \quad |G|\text{-peaaegu kõikide } \omega \in \Omega \text{ korral.} \tag{3.3}$$

Kui $X_0 \subset X$ on separaabel alamruum, siis $|G|$-peaaegu kõikide $\omega \in \Omega$ korral

$$h(\omega)x \in j^* j_Y(Y) \quad \text{iga } x \in X_0 \text{ korral.}$$

(b) *Olgu $Z = Y^*$ (niisiis, $h\colon \Omega \to \mathcal{L}(X,Y^{**})$) ning olgu $y^* \in Y^*$. Vaatleme funktsiooni $y^*h\colon \Omega \to X^*$, kus kõikide $\omega \in \Omega$ ja $x \in X$ korral*

$$\langle x, y^*h(\omega)\rangle := \langle y^*, h(\omega)x\rangle = \langle h(\omega)x, j_{Y^*}y^*\rangle = \langle x, h(\omega)^* j_{Y^*}y^*\rangle.$$

Siis iga $\omega \in \Omega$ korral

$$y^*h(\omega) \in \overline{\operatorname{conv}}^{w^*}\left\{\frac{G(D)^*y^*}{|G|(D)}\colon D \in \Sigma,\ |G|(D) > 0\right\}.$$

Kui ruumil X^* on Radon–Nikodými omadus, siis funktsioon $y^*h\colon \Omega \to X^*$ on $|G|$-mõõtuv.

Tõestus. (a). Olgu $x \in X$. Siis funktsiooni $h(\cdot)x$ mõõtuvus ja väide (3.3) järelduvad vahetult teoreemist 2.46, (ab), kui seal võtta vektormõõdu G, mõõdu μ ja funktsiooni h rolli vastavalt vektormõõt $G(\cdot)x$, täisvariatsioon $|G|$ ja funktsioon $h(\cdot)x$.

Olgu nüüd X_0 ruumi X separaabel alamruum ning olgu B ülimalt loenduv kõikjal tihe hulk alamruumis X_0. Siis iga $b \in B$ korral leidub väite (3.3) põhjal $|G|$-hüljatav hulk $M_b \in \Sigma$ nii, et $h(\omega)b \in j^*j_Y(Y)$ iga $\omega \in \Omega\backslash M_b$ korral. Kuna hulk B on ülimalt loenduv, siis hulk $M = \bigcup_{b\in B} M_b$ on samuti hüljatav. Olgu nüüd $x \in X_0$ ja $\omega \in \Omega\backslash M$ suvalised. Siis leidub hulga B elementide jada (b_n), mis koondub elemendiks x (ruumi X normi topoloogias). Nüüd

$$h(\omega)x = \lim_{n\to\infty} h(\omega)b_n \in j^*j_Y(Y),$$

sest operaator $h(\omega)$ on pidev ning $j^* j_Y(Y)$ on kaasruumi Z^* kinnine alamruum. Niisiis $h(\omega)x \in j^* j_Y(Y)$ iga $\omega \in \Omega \backslash M$ ja iga $x \in X_0$ korral.

(b). Väide järeldub vahetult teoreemist 2.46, (b), kui seal võtta ruumide Y ja W rolli vastavalt kaasruum X^* ja ruum X ning vektormõõdu G, mõõdu μ ja funktsiooni f rolli vastavalt vektormõõt $G(\cdot)^* y^* \colon \Sigma \to X^*$, variatsioon $|G|$ ja funktsioon $y^* h \colon \Omega \to X^*$. Märgime, et selles kontekstis rahuldab funktsioon $y^* h$ teoreemi 2.44 funktsiooni $f \colon \Omega \to Y$ eeldusi (1*) ja (2*), sest mistahes $E \in \Sigma$ ja $x \in X$ korral

$$\langle x, G(E)^* y^* \rangle = \langle G(E)x, y^* \rangle = \int_E \langle y^*, h(\omega)x \rangle \, d|G|(\omega) = \int_E \langle x, y^* h(\omega) \rangle \, d|G|(\omega)$$

ja

$$\varrho\big(\langle x, y^* h(\cdot) \rangle\big) = \varrho\big(\langle y^*, h(\cdot)x \rangle\big) = \langle y^*, h(\cdot)x \rangle = \langle x, y^* h(\cdot) \rangle.$$

□

3.4 Kompaktsete operaatorite väärtuselise tõkestatud funktsiooniga nõrgalt ekvivalentse mõõtuva funktsiooni olemasolu

Selle jaotise eesmärk on üksikasjalikult lahti kirjutada järgneva teoreemi tõestus. Magistritöös keskse Andrewsi teoreemi 4.1 tõestus toetub oluliselt sellele teoreemile.

Teoreem 3.5 (vt [A^2, teoreem 1]). *Olgu kaasruumil X^* Radon–Nikodými omadus ja olgu Y nõrgalt kompaktselt genereeritud. Olgu $f \colon \Omega \to \mathcal{K}(X, Y)$ selline tõkestatud funktsioon, et iga $y^* \in Y^*$ korral funktsioon $y^* f \colon \Omega \to X^*$ on μ-mõõtuv. Siis leidub tõkestatud μ-mõõtuv funktsioon $g \colon \Omega \to \mathcal{K}(X, Y)$ nii, et iga $y^* \in Y^*$ korral $y^* f = y^* g$ μ-peaaegu kõikjal.*

Teoreemi 3.5 tõestuseks on otstarbekas eelnevalt tõestada järgmised kolm lemmat.

Lemma 3.6. *Olgu $f \in \mathcal{K}(X, Y)$ ja olgu $E \in \Sigma$.*

(a) *Operaator*

$$T \colon L_\infty(\mu, X) \ni g \longmapsto \int_E f g(\omega) \, d\mu(\omega) = f \int_E g \, d\mu \in Y$$

on kompaktne, st $T \in \mathcal{K}\big(L_\infty(\mu, X), Y\big)$.

(b) *Operaator*

$$T\colon L_1(\mu,X) \ni \phi \longmapsto \int_E f\phi(\omega)\,d\mu(\omega) = f\int_E \phi\,d\mu \in Y$$

on kompaktne, st $T \in \mathcal{K}\big(L_1(\mu,X),Y\big)$.

TÕESTUS. (a). Ilmselt on operaator T lineaarne, seega jääb väite tõestuseks näidata, et hulk $T(B_{L_\infty(\mu,X)})$ ruumis Y on suhteliselt kompaktne. Selleks märgime, et mistahes $g \in B_{L_\infty(\mu,X)}$ korral

$$\left\|\int_E g\,d\mu\right\| \leqslant \int_E \|g\|\,d\mu \leqslant \mu(E),$$

st $\int_E g\,d\mu \in \mu(E)B_X$, järelikult $Tg \in f\big(\mu(E)B_X\big) =: C$; niisiis $T(B_{L_\infty(\mu,X)}) \subset C$. Jääb vaid märkida, et hulk C on suhteliselt kompaktne (sest kompaktne operaator f teisendab tõkestatud hulgad ruumis X suhteliselt kompaktseteks hulkadeks ruumis Y), järelikult ka tema alamhulk $T(B_{L_\infty(\mu,X)})$ on suhteliselt kompaktne.

□

Lemma 3.7. *Olgu* $h\colon \Omega \to \mathcal{K}(X,Y)$ *tõkestatud* μ*-mõõtuv funktsioon. Siis*

(a) *iga* $\phi \in L_1(\mu,X)$ *korral funktsioon*

$$h\phi\colon \Omega \ni \omega \longmapsto h(\omega)\phi(\omega) \in Y$$

on Bochneri mõttes integreeruv, st $h\phi \in L_1(\mu,Y)$*; seejuures, kui* $\phi \in L_\infty(\mu,X)$*, siis* $h\phi \in L_\infty(\mu,Y)$*;*

(b) *operaator*

$$T\colon L_\infty(\mu,X) \ni g \longmapsto \int_\Omega hg\,d\mu \in Y$$

on kompaktne, st $T \in \mathcal{K}\big(L_\infty(\mu,X),Y\big)$*;*

(c) *kui* h *on ühtlaselt lähendatav lihtfunktsioonidega, siis operaator*

$$T\colon L_1(\mu,X) \ni \phi \longmapsto \int_\Omega h\phi\,d\mu \in Y$$

on kompaktne, st $T \in \mathcal{K}\big(L_1(\mu,X),Y\big)$.

TÕESTUS. Lemma 2.18 põhjal leidub lihtfunktsioonide $\Omega \to \mathcal{K}(X,Y)$ jada (h_n) nii, et $h_n \underset{n}{\to} h$ peaaegu kõikjal, kusjuures jada (h_n) on ühtlaselt tõkestatud, st leidub $L \geqslant 0$ nii, et

$$\|h_n\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} \|h_n(\omega)\| \leqslant L \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Tõkestatud koonduvuse teoreemi põhjal

$$\int_\Omega \|h_n - h\| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{3.4}$$

sest

(1) $\|h_n(\omega) - h(\omega)\| \underset{n}{\to} 0$ peaaegu kõikide $\omega \in \Omega$ korral;

(2) $\|h_n(\omega) - h(\omega)\| \leqslant \|h_n(\omega)\| + \|h(\omega)\| \leqslant L + \|h\|_\infty$ kõikide $n \in \mathbb{N}$ ja $\omega \in \Omega$ korral.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral on h_n lihtfunktsioon, seega leiduvad $m_n \in \mathbb{N}$, operaatorid $f_{n,1}, \dots, f_{n,m_n} \in \mathcal{K}(X,Y)$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $A_{n,1}, \dots, A_{n,m_n} \in \Sigma$ nii, et

$$h_n = \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_{n,i}} f_{n,i}.$$

(a). Kui $\phi \in L_1(\mu, X)$, siis funktsiooni $h\phi$ Bochneri mõttes integreeruvus järeldub lemmast 2.37; seejuures, kui $\phi \in L_\infty(\mu, X)$, siis ilmselt ka $h\phi \in L_\infty(\mu, Y)$ (kusjuures $\|h\phi\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty \, \|\phi\|_\infty$).

(b). Ilmselt on operaator T lineaarne; see operaator on ka tõkestatud, kusjuures $\|T\| \leqslant \mu(\Omega)\|h\|_\infty$, sest iga $g \in L_\infty(\mu, X)$ korral

$$\|Tg\| \leqslant \int_\Omega \|h(\omega)g(\omega)\| \, d\mu(\omega) \leqslant \int_\Omega \|h\|_\infty \, \|g\|_\infty \, d\mu = \mu(\Omega)\|h\|_\infty \, \|g\|_\infty.$$

Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral operaatori

$$T_n \colon L_\infty(\mu, X) \ni g \longmapsto \int_\Omega h_n g \, d\mu \in Y;$$

siis iga $g \in L_\infty(\mu, X)$ korral

$$\begin{aligned} T_n g &= \int_\Omega h_n g \, d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_{n,i}} f_{n,i} g \, d\mu = \sum_{i=1}^{m_n} \int_\Omega \chi_{A_{n,i}} f_{n,i} g \, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{m_n} \int_{A_{n,i}} f_{n,i} g \, d\mu = \sum_{i=1}^{m_n} T_{n,i} g, \end{aligned}$$

kus $T_{n,i}\colon L_\infty(\mu,X)\ni g\mapsto \int_{A_{n,i}} f_{n,i}g\,d\mu\in Y$; niisiis $T_n=\sum_{i=1}^{m_n}T_{n,i}$. Kuna lemma 3.6, (a), põhjal on operaatorid $T_{n,i}$ kompaktsed, siis ka T_n on kompaktne, st $T_n\in\mathcal{K}\big(L_\infty(\mu,X),Y\big)$.

Kuna kompaktsete operaatorite alamruum on kõigi vastavate pidevate lineaarsete operaatorite ruumis kinnine, siis piisab väite tõestuseks näidata, et $\|T_n-T\|\underset{n}{\to}0$ ruumis $\mathcal{L}\big(L_\infty(\mu,X),Y\big)$. Selleks märgime, et mistahes $g\in B_{L_\infty(\mu,X)}$ korral

$$\begin{aligned}
\|(T_n-T)g\| &= \left\|\int_\Omega \big(h_n(\omega)-h(\omega)\big)g(\omega)\,d\mu(\omega)\right\|\\
&\leqslant \int_\Omega \big\|\big(h_n(\omega)-h(\omega)\big)g(\omega)\big\|\,d\mu(\omega)\\
&\leqslant \int_\Omega \|h_n(\omega)-h(\omega)\|\,\|g(\omega)\|\,d\mu(\omega)\\
&\leqslant \int_\Omega \|h_n(\omega)-h(\omega)\|\,\|g\|_\infty\,d\mu(\omega)\\
&= \int_\Omega \|h_n-h\|\,d\mu
\end{aligned}$$

ning seega (3.4) põhjal

$$\|T_n-T\|=\sup_{g\in B_{L_\infty(\mu,X)}}\|(T_n-T)g\|\leqslant\int_\Omega\|h_n-h\|\,d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

(c). Eeldame nüüd täiendavalt, et $h_n\underset{n}{\to}h$ ühtlaselt, st $\|h_n-h\|_\infty\underset{n}{\to}0$.

Ilmselt on operaator T lineaarne; see operaator on ka tõkestatud, kusjuures $\|T\|\leqslant\|h\|_\infty$, sest iga $\phi\in L_1(\mu,X)$ korral

$$\|T\phi\|\leqslant\int_\Omega\|h(\omega)\phi(\omega)\|\,d\mu(\omega)\leqslant\|h\|_\infty\int_\Omega\|\phi(\omega)\|\,d\mu=\|h\|_\infty\,\|\phi\|_1.$$

Defineerime iga $n\in\mathbb{N}$ korral operaatori

$$T_n\colon L_1(\mu,X)\ni\phi\longmapsto\int_\Omega h_n\phi\,d\mu\in Y;$$

siis iga $\phi\in L_1(\mu,X)$ korral

$$\begin{aligned}
T_n\phi &= \int_\Omega h_n\phi\,d\mu=\int_\Omega\sum_{i=1}^{m_n}\chi_{A_{n,i}}f_{n,i}\phi\,d\mu=\sum_{i=1}^{m_n}\int_\Omega\chi_{A_{n,i}}f_{n,i}\phi\,d\mu\\
&=\sum_{i=1}^{m_n}\int_{A_{n,i}}f_{n,i}\phi\,d\mu=\sum_{i=1}^{m_n}T_{n,i}\phi,
\end{aligned}$$

kus $T_{n,i}\colon L_1(\mu,X) \ni \phi \mapsto \int_{A_{n,i}} f_{n,i}\phi\, d\mu \in Y$; niisiis $T_n = \sum_{i=1}^{m_n} T_{n,i}$. Kuna lemma 3.6, (b), põhjal on operaatorid $T_{n,i}$ kompaktsed, siis ka T_n on kompaktne, st $T_n \in \mathcal{K}\big(L_1(\mu,X),Y\big)$.

Kuna kompaktsete operaatorite alamruum on kõigi vastavate pidevate lineaarsete operaatorite ruumis kinnine, siis piisab väite tõestuseks näidata, et $T_n \underset{n}{\to} T$ ruumis $\mathcal{L}\big(L_1(\mu,X),Y\big)$. Selleks märgime, et mistahes $\phi \in B_{L_1(\mu,X)}$ korral

$$\begin{aligned}
\|(T_n - T)\phi\| &= \left\| \int_\Omega \big(h_n(\omega) - h(\omega)\big)\phi(\omega)\, d\mu(\omega) \right\| \\
&\leqslant \int_\Omega \big\| \big(h_n(\omega) - h(\omega)\big)\phi(\omega) \big\|\, d\mu(\omega) \\
&\leqslant \int_\Omega \|h_n(\omega) - h(\omega)\|\, \|\phi(\omega)\|\, d\mu(\omega) \leqslant \int_\Omega \|h_n - h\|_\infty\, \|\phi(\omega)\|\, d\mu(\omega) \\
&= \|h_n - h\|_\infty \int_\Omega \|\phi(\omega)\|\, d\mu(\omega) = \|h_n - h\|_\infty\, \|\phi\|_1 \leqslant \|h_n - h\|_\infty
\end{aligned}$$

ning seega

$$\|T_n - T\| = \sup_{\phi \in B_{L_1(\mu,X)}} \|(T_n - T)\phi\| \leqslant \|h_n - h\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\square$

Lemma 3.8 (vt [A², teoreemi 1 tõestus]). *Olgu kaasruumil X^* Radon–Nikodými omadus ja olgu ruum Y nõrgalt kompaktselt genereeritud. Olgu $f\colon \Omega \to \mathcal{K}(X,Y)$ selline tõkestatud funktsioon, et iga $y^* \in Y^*$ korral funktsioon $y^*f\colon \Omega \to X^*$ on μ-mõõtuv. Siis*

(a) *operaator*
$$R\colon Y^* \ni y^* \longmapsto y^*f = f(\cdot)^*y^* \in L_1(\mu, X^*)$$
on kompaktne, st $R \in \mathcal{K}\big(Y^*, L_1(\mu,X^*)\big)$;

(b) *iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $E \in \Sigma$ nii, et $\mu(\Omega \backslash E) < \varepsilon$ ja operaator*
$$U\colon Y^* \ni y^* \longmapsto \chi_E y^* f = \chi_E(\cdot) f(\cdot)^* y^* \in L_\infty(\mu, X^*) \tag{3.5}$$
on kompaktne, st $U \in \mathcal{K}\big(Y^*, L_\infty(\mu,X^*)\big)$;

(c) *operaator $S\colon Y^* \to L_1(\mu,X)^*$, kus*
$$\langle \phi, Sy^* \rangle = \int_\Omega \langle \phi(\omega), y^* f(\omega) \rangle\, d\mu(\omega), \quad y^* \in Y^*,\ \phi \in L_1(\mu,X),$$
on kaasoperaator, st leidub $T \in \mathcal{L}\big(L_1(\mu,X),Y\big)$ nii, et $S = T^*$.

TÕESTUS. (a). Ilmselt on operaator R lineaarne. Oletame vastuväiteliselt, et see operaator ei ole kompaktne, st hulk $R(B_{Y^*}) = \{Ry^*\colon y^* \in B_{Y^*}\} = \{y^*f\colon y^* \in B_{Y^*}\}$ ei ole suhteliselt kompaktne ruumis $L_1(\mu, X^*)$. Siis leiduvad ühikkera B_{Y^*} elementide jada (y_n^*) ja $\delta > 0$ nii, et

$$\|y_n^* f - y_m^* f\|_{L_1(\mu,X^*)} \geqslant \delta \quad \text{mistahes } n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m, \text{ korral.}$$

Lause 1.23 põhjal leidub projektor $P \in \mathcal{L}(Y, Y)$ nii, et $\operatorname{ran} P$ on separaabel ja $P^* y_n^* = y_n^*$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral on funktsioon $y_n^* f$ mõõtuv, seega $y_n^* f$ on oluliselt separaabel-väärtuseline, st leidub $E_n \in \Sigma$ nii, et $\mu(\Omega \backslash E_n) = 0$ ja $y_n^* f(E_n)$ sisaldub ruumi X^* mingis separaablis alamruumis W_n. Tähistame $W := \overline{\operatorname{span}}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n\big)$; see alamruum on separaabel, kusjuures $y_n^* f(E_n) \subset W$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Olgu D ülimalt loenduv kõikjal tihe hulk ruumis W; siis iga $d \in D$ korral saab leida ühikkera B_X elementide jada $(x_{d,n})$ nii, et

$$\lim_{n\to\infty} |\langle x_{d,n}, d\rangle| = \|d\|.$$

Olgu Z kõikide selliste elementide $x_{d,n}$ kinnine lineaarne kate ruumis X, st

$$Z := \overline{\operatorname{span}}\{x_{d,n}\colon n \in \mathbb{N}, d \in D\}.$$

Ilmselt $Z \subset X$ on separaabel ja ruumi W jaoks normeeriv alamruum. Teoreemi 2.34 põhjal on kaasruum Z^* samuti separaabel. Olgu $j\colon Z \to X$ loomulik sisestus; siis

$$j^* x^* = x^*|_Z \quad \text{iga } x^* \in X^* \text{ korral}$$

ning kõikide $w_1, w_2 \in W$ korral

$$\|w_1 - w_2\|_{X^*} = \|w_1|_Z - w_2|_Z\|_{Z^*} = \|j^* w_1 - j^* w_2\|_{Z^*},$$

sest Z on ruumi W jaoks normeeriv alamruum. Järelikult mistahes $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, korral

$$\|j^* y_n^* f - j^* y_m^* f\|_{L_1(\mu,Z^*)} = \|y_n^* f - y_m^* f\|_{L_1(\mu,X^*)} \geqslant \delta. \tag{3.6}$$

Defineerime funktsiooni

$$h := Pf(\cdot)j\,\colon\, \Omega \to \mathcal{K}(Z, Y).$$

Näitame, et funktsioon h on mõõtuv. Teoreemi 3.2 põhjal piisab selleks näidata, et h on oluliselt separaabel-väärtuseline ja funktsioon $h(\cdot)z\colon \Omega \to Y$ on mõõtuv iga $z \in Z$ korral. Kuna iga $\omega \in \Omega$ korral $\operatorname{ran} h(\omega) \subset \operatorname{ran} P$, kusjuures $\operatorname{ran} P$ on separaabel, siis, arvestades, et ka Z^* on separaabel, järeldub teoreemist 1.12, et h on oluliselt separaabel-väärtuseline. Veendume, et funktsioon $h(\cdot)z$ on mõõtuv iga $z \in Z$ korral. Fikseerime $z \in Z$. Näeme, et $h(\cdot)z$ on oluliselt separaabel-väärtuseline, sest $\operatorname{ran} P$ on separaabel. Pettise mõõtuvusteoreemi 2.13 põhjal piisab seega näidata, et iga $y^* \in Y^*$ korral on funktsioon $y^* h(\cdot)z$ mõõtuv. Olgu $y^* \in Y^*$. Iga $\omega \in \Omega$ korral

$$\begin{aligned} y^* h(\omega)z &= \langle h(\omega)z, y^* \rangle = \langle Pf(\omega)jz, y^* \rangle = \langle f(\omega)jz, P^* y^* \rangle \\ &= \langle jz, (P^* y^*) f(\omega) \rangle = \langle (P^* y^*) f(\omega), j_X(jz) \rangle. \end{aligned}$$

Kuna eelduse põhjal on funktsioon $(P^* y^*) f$ mõõtuv ning seega ka nõrgalt mõõtuv, siis järeldub siit, et funktsioon $y^* h(\cdot)z$ on mõõtuv. Seega on h mõõtuv.

Kuna funktsioon h on tõkestatud, siis lemma 3.7, (b), põhjal operaator

$$T\colon L_\infty(\mu, Z) \ni g \longmapsto \int_\Omega hg \, d\mu \in Y$$

on kompaktne, st $T \in \mathcal{K}(L_\infty(\mu, Z), Y)$. Schauderi teoreemi kohaselt on kaasoperaator $T^*\colon Y^* \to L_\infty(\mu, Z)^*$ samuti kompaktne. Kuna mistahes $y^* \in Y^*$ ja $g \in L_\infty(\mu, Z)$ korral

$$\begin{aligned} \langle g, T^* y^* \rangle &= \langle Tg, y^* \rangle = \left\langle \int_\Omega hg \, d\mu, y^* \right\rangle = \int_\Omega \langle h(\omega) g(\omega), y^* \rangle \, d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \langle g(\omega), y^* h(\omega) \rangle \, d\mu(\omega), \end{aligned}$$

siis lause 2.38 põhjal iga $y^* \in Y^*$ korral $\|T^* y^*\|_{L_\infty(\mu,Z)^*} = \|y^* h\|_{L_1(\mu, Z^*)}$, seega operaator $Y^* \ni y^* \mapsto y^* h \in L_1(\mu, Z^*)$ on kompaktne. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$y_n^* h = h(\cdot)^* y_n^* = j^* f(\cdot)^* P^* y_n^* = j^* f(\cdot)^* y_n^* = j^* y_n^* f, \tag{3.7}$$

järelikult leiduvad $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, nii, et

$$\|j^* y_n^* f - j^* y_m^* f\|_{L_1(\mu, Z^*)} < \delta,$$

mis on vastuolus tingimusega (3.6).

(b). Olgu $\varepsilon > 0$. Väite (a) põhjal on operaator $R\colon Y^* \ni y^* \mapsto y^* f \in L_1(\mu, X^*)$ kompaktne, seega $R(B_{Y^*}) = \{y^* f \colon y^* \in B_{Y^*}\}$ on suhteliselt kompaktne hulk ruumis $L_1(\mu, X^*)$; niisiis leidub jada (y_n^*) ühikkeras B_{Y^*} nii, et hulk $\{y_n^* f \colon n \in \mathbb{N}\}$ on kõikjal tihe hulgas $R(B_{Y^*})$. Defineerime, lähtudes jadast (y_n^*), projektori $P \in \mathcal{L}(Y, Y)$, alamruumi $Z \subset X$ ja funktsiooni $h\colon \Omega \to \mathcal{K}(Z, Y)$ nagu väite (a) tõestuses; siis h on mõõtuv, seega leidub selline lihtfunktsioonide $\Omega \to \mathcal{K}(Z, Y)$ jada (h_n), et $h_n \underset{n}{\to} h$ peaaegu kõikjal.

Jegorovi teoreemi kohaselt leidub hulk $E \in \Sigma$ nii, et $\mu(\Omega \backslash E) < \varepsilon$ ja $h_n \underset{n}{\rightarrow} h$ ühtlaselt hulgas E.

Väite tõestuseks jääb näidata, et operaator (3.5) on kompaktne. Kuna see operaator on ilmselt lineaarne, siis piisab selle kompaktsuseks näidata, et $U(B_{Y^*}) = \{\chi_E y^* f \colon y^* \in B_{Y^*}\}$ on suhteliselt kompaktne hulk ruumis $L_\infty(\mu, X^*)$. Selleks piisab näidata, et

(1) $\{\chi_E y_n^* f \colon n \in \mathbb{N}\}$ on suhteliselt kompaktne hulk ruumis $L_\infty(\mu, X^*)$;

(2) $\{\chi_E y_n^* f \colon n \in \mathbb{N}\}$ on kõikjal tihe hulgas $U(B_{Y^*}) = \{\chi_E y^* f \colon y^* \in B_{Y^*}\}$ ruumis $L_\infty(\mu, X^*)$.

(1). Lemma 3.7, (c), põhjal on operaator

$$T \colon L_1(\mu, Z) \ni \phi \longmapsto \int_\Omega \chi_E h \phi \, d\mu \in Y$$

kompaktne, st $T \in \mathcal{K}\big(L_1(\mu, Z), Y\big)$, seega Schauderi teoreemi kohaselt $T^* \in \mathcal{K}\big(Y^*, L_1(\mu, Z)^*\big)$. Kuna kõikide $y^* \in Y^*$ ja $\phi \in L_1(\mu, Z)$ korral

$$\begin{aligned}\langle \phi, T^* y^* \rangle = \langle T\phi, y^* \rangle = \left\langle \int_\Omega \chi_E h \phi \, d\mu, y^* \right\rangle &= \int_\Omega \langle \chi_E(\omega) h(\omega) \phi(\omega), y^* \rangle \, d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \langle \phi(\omega), \chi_E(\omega) y^* h(\omega) \rangle \, d\mu(\omega),\end{aligned}$$

siis, samastades loomulikul viisil (st teoreemi 2.39 abil – siin me kasutame eeldust, et kaasruumil Z^* on Radon–Nikodými omadus) kaasruumi $L_1(\mu, Z)^*$ ruumiga $L_\infty(\mu, Z^*)$, järeldub siit, et operaator $V \colon Y^* \ni y^* \mapsto \chi_E y^* h \in L_\infty(\mu, Z^*)$ on samuti kompaktne; järelikult hulk $V(B_{Y^*}) = \{\chi_E y^* h \colon y^* \in B_{Y^*}\}$ ruumis $L_\infty(\mu, Z^*)$ on suhteliselt kompaktne. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $y_n^* h = j^* y_n^* f$ (vt võrdust (3.7)), siis on $\{\chi_E j^* y_n^* f \colon n \in \mathbb{N}\}$ suhteliselt kompaktne hulk ruumis $L_\infty(\mu, Z^*)$. Mistahes $n, m \in \mathbb{N}$ korral

$$\|\chi_E y_n^* f - \chi_E y_m^* f\|_{L_\infty(\mu, X^*)} = \|\chi_E j^* y_n^* f - \chi_E j^* y_m^* f\|_{L_\infty(\mu, Z^*)},$$

seega on hulk $\{\chi_E y_n^* f \colon n \in \mathbb{N}\}$ suhteliselt kompaktne ruumis $L_\infty(\mu, X^*)$.

(2). Olgu $y^* \in B_{Y^*}$. Et alamhulk $\{y_n^* f \colon n \in \mathbb{N}\}$ on tihe hulgas $\{y^* f \colon y^* \in B_{Y^*}\}$ ruumis $L_1(\mu, X^*)$, siis leidub selle alamhulga elementide jada $(y_{k_n}^* f)$ nii, et

$$\|y_{k_n}^* f - y^* f\|_{L_1(\mu, X^*)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad \text{st} \quad \int_\Omega \|y_{k_n}^* f - y^* f\| \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0;$$

seega $\|y^*_{k_n}f - y^*f\| \underset{n}{\to} 0$ mõõdu järgi, järelikult leidub jada $(y^*_{k_n}f)$ osajada $(y^*_{k_{l_n}}f)$ nii, et $\|y^*_{k_{l_n}}f - y^*f\| \underset{n}{\to} 0$ peaaegu kõikjal, st

$$y^*_{k_{l_n}}f \xrightarrow[n\to\infty]{} y^*f \quad \text{peaaegu kõikjal.} \tag{3.8}$$

Teiselt poolt, kuna väite (1) põhjal on hulk $\{\chi_E y^*_n f : n \in \mathbb{N}\}$ suhteliselt kompaktne ruumis $L_\infty(\mu, X^*)$, siis leidub jadal $(\chi_E y^*_{k_{l_n}}f)$ osajada $(\chi_E y^*_{k_{l_{m_n}}}f)$, mis koondub ruumis $L_\infty(\mu, X^*)$ mingiks funktsiooniks $F \in L_\infty(\mu, X^*)$. Kuna koonduvusest ruumis $L_\infty(\mu, X^*)$ järeldub koonduvus peaaegu kõikjal, siis $\chi_E y^*_{k_{l_{m_n}}}f \underset{n}{\to} F$ peaaegu kõikjal. Koonduvusest (3.8) järeldub nüüd, et $F = \chi_E y^*f$ peaaegu kõikjal; niisiis $\chi_E y^*_{k_{l_{m_n}}}f \underset{n}{\to} \chi_E y^*f$ ruumis $L_\infty(\mu, X^*)$.

(c). Vahetult on kontrollitav, et operaator S on pidev ja lineaarne, st $S \in \mathcal{L}\big(Y^*, L_1(\mu, X)^*\big)$. Seega piisab järelduse 1.22 põhjal väite tõestuseks näidata, et operaator S on jadaliselt w^*–w^*-pidev. Koondugu jada (y^*_n) $*$-nõrgalt nulliks kaasruumis Y^*. Peame näitama, et $Sy^*_n \underset{n}{\to} 0$ $*$-nõrgalt kaasruumis $L_1(\mu, X)^*$, st

$$\int_\Omega \langle \phi(\omega), y^*_n f(\omega)\rangle \, d\mu(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{iga } \phi \in L_1(\mu, X) \text{ korral.} \tag{3.9}$$

Olgu $\phi \in L_1(\mu, X)$. Et (y^*_n) on tõkestatud jada (lause 1.2 põhjal) ning f on tõkestatud funktsioon, siis leidub $M > 0$ nii, et $\|y^*_n f(\omega)\| \leqslant M$ kõikide $n \in \mathbb{N}$ ja $\omega \in \Omega$ korral. Nüüd iga $\omega \in \Omega$ korral

(1) $\langle \phi(\omega), y^*_n f(\omega)\rangle = \langle f(\omega)\phi(\omega), y^*_n\rangle \underset{n}{\to} 0$ (sest $y^*_n \underset{n}{\to} 0$ $*$-nõrgalt kaasruumis Y^*);

(2) $|\langle \phi(\omega), y^*_n f(\omega)\rangle| \leqslant M\|\phi(\omega)\|$, kusjuures $M\,\|\phi(\cdot)\| \in L_1(\mu, \mathbb{R})$,

seega domineeritud koonduvuse teoreemi põhjal (3.9) kehtib. □

Teoreemi 3.5 tõestus kasutab ka järgmist teoreemi, mis üldistab kompaktsete operaatorite $L_1(\mu) \to X$ hästituntud kirjeldust (vt [DU, lk 68, teoreem 2]).

Teoreem 3.9 (vt [A[1], teoreem 2]; vrd [DU, lk 68, teoreem 2]). *Olgu kaasruumil X^* Radon–Nikodými omadus. Siis operaator*

$$\mathcal{K}\big(L_1(\mu, X), Y\big) \ni T \longmapsto g \in L_\infty\big(\mu, \mathcal{K}(X, Y)\big),$$

kus

$$Tf = \int_\Omega gf \, d\mu \quad \text{iga } f \in L_1(\mu, X) \text{ korral,}$$

on lineaarne isomeetria. Seejuures selle operaatori kujutisruumi moodustavad niisugused funktsioonid $g \in L_\infty\big(\mu, \mathcal{K}(X,Y)\big)$, *mille korral leidub hulk* $C \in \Sigma$ *nii, et* $\mu(\Omega \backslash C) = 0$ *ja hulk* $\{g(\omega)x \colon \omega \in C,\ x \in B_X\}$ *ruumis* Y *on suhteliselt kompaktne.*

Nüüd oleme valmis tõestama käesoleva jaotise põhiteoreemi.

TEOREEMI 3.5 TÕESTUS. Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et *mistahes* $C \in \Sigma$ *ja* $\varepsilon > 0$ *korral leiduvad hulga* C *alamhulk* $E \in \Sigma$, *mis rahuldab tingimust* $\mu(C \backslash E) < \varepsilon$, *ja tõkestatud mõõtuv funktsioon* $g_E \colon \Omega \to \mathcal{K}(X,Y)$ *nii, et*

(1) $\|g_E\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$*;*

(2) *iga* $y^* \in Y^*$ *korral* $y^* f = y^* g_E$ *peaaegu kõikjal hulgas* E.

Tõepoolest, selle väite kehtides leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $E_n \in \Sigma$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, nii, et $\mu(E_0) = 0$ ja $\Omega = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$, ning tõkestatud mõõtuvad funktsioonid $g_{E_n} \colon \Omega \to \mathcal{K}(X,Y)$, $n = 1, 2, \ldots$, nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral kehtivad tingimused (1) ja (2), kus $E = E_n$. Aga nüüd $g := \sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n} g_{E_n}$ on soovitud omadustega funktsioon.

Olgu $C \in \Sigma$ ja $\varepsilon > 0$. Samastades loomulikul viisil (st teoreemi 2.39 abil – siin me kasutame eeldust, et kaasruumil X^* on Radon–Nikodými omadus) kaasruumi $L_1(\mu, X)^*$ ruumiga $L_\infty(\mu, X^*)$, järeldub lemmast 3.8, (b), et leidub hulga C alamhulk $E \in \Sigma$ nii, et $\mu(C \backslash E) < \varepsilon$ ja operaator $S \colon Y^* \to L_1(\mu, X)^*$, kus

$$\langle \phi, S y^* \rangle = \int_\Omega \langle \phi(\omega), \chi_E(\omega) y^* f(\omega) \rangle \, d\mu(\omega), \quad y^* \in Y^*,\ \phi \in L_1(\mu, X),$$

on kompaktne, st $S \in \mathcal{K}\big(Y^*, L_1(\mu, X)^*\big)$. Lemma 3.8, (c), põhjal on S kaasoperaator, st leidub $T \in \mathcal{L}\big(L_1(\mu, X), Y\big)$ nii, et $S = T^*$. Kuna S on kompaktne, siis ka T on kompaktne, st $T \in \mathcal{K}\big(L_1(\mu, X), Y\big)$. Kuna kaasruumil X^* on Radon–Nikodými omadus, siis teoreemi 3.9 põhjal leidub funktsioon $g \in L_\infty\big(\mu, \mathcal{K}(X,Y)\big)$ nii, et

$$T\phi = \int_\Omega g(\omega)\phi(\omega) \, d\mu(\omega) \quad \text{iga } \phi \in L_1(\mu, X) \text{ korral;}$$

seejuures

$$\|g\|_\infty = \|T\| = \|T^*\| = \|S\| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Nüüd mistahes $y^* \in Y^*$, $D \in \Sigma$, $D \subset E$, ja $x \in X$ korral, võttes $\phi := \chi_D x \in L_1(\mu, X)$, ühelt poolt,

$$\begin{aligned}\langle T\phi, y^*\rangle &= \left\langle \int_\Omega g(\omega)\chi_D(\omega)\, x\, d\mu(\omega), y^* \right\rangle = \left\langle \int_D g(\omega) x\, d\mu(\omega), y^* \right\rangle \\ &= \int_D \langle g(\omega)x, y^*\rangle\, d\mu(\omega) = \int_D \langle x, y^* g(\omega)\rangle\, d\mu(\omega) = \left\langle x, \int_D y^* g\, d\mu \right\rangle,\end{aligned}$$

teiselt poolt aga

$$\begin{aligned}\langle T\phi, y^*\rangle = \langle \phi, T^* y^*\rangle &= \int_\Omega \langle \chi_D(\omega)\, x, \chi_E(\omega) y^* f(\omega)\rangle\, d\mu(\omega) \\ &= \int_D \langle x, y^* f(\omega)\rangle\, d\mu(\omega) = \left\langle x, \int_D y^* f\, d\mu \right\rangle.\end{aligned}$$

Niisiis mistahes $y^* \in Y^*$ korral

$$\left\langle x, \int_D y^* g\, d\mu \right\rangle = \left\langle x, \int_D y^* f\, d\mu \right\rangle \quad \text{kõikide } D \in \Sigma,\ D \subset E, \text{ ja } x \in X \text{ korral,}$$

seega

$$\int_D y^* g\, d\mu = \int_D y^* f\, d\mu \quad \text{iga } D \in \Sigma,\ D \subset E, \text{ korral,}$$

järelikult lause 2.28 põhjal $y^* g = y^* f$ peaaegu kõikjal hulgas E. $\square$

4 Magistritöös keskse Andrewsi teoreemi tõestus

Kõikjal selles paragrahvis on X ja Y Banachi ruumid.

Selles paragrahvis tõestame magistritöös keskse Andrewsi teoreemi ([A^2, teoreem 5]; vt sissejuhatust). Parema jälgitavuse huvides sõnastame ta siinkohal uuesti.

Teoreem 4.1 (vt [A^2, teoreem 5]). *Olgu ruumidel X^* ja Y Radon–Nikodými omadus ning olgu $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y)$. Kui*

($\sharp$) *kaasruumi X^* iga normi järgi tõkestatud separaabli alamhulga $*$-nõrga sulundi suhteline $*$-nõrk topoloogia on metriseeruv,*

siis ruumil $\mathcal{L}(X,Y)$ on Radon–Nikodými omadus.

TÕESTUS. Kehtigu ($\sharp$) ning olgu $\mathcal{S}$ ruumi $\mathcal{K}(X,Y)$ separaabel kinnine alamruum. Teoreemi 2.33 põhjal piisab näidata, et ruumil $\mathcal{S}$ on Radon–Nikodými omadus. Kuna lemma 1.11, (a), põhjal on $\overline{\operatorname{span}}\{Tx\colon T \in \mathcal{S},\, x \in X\}$ ruumi Y kinnine separaabel alamruum, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et Y on separaabel.

Olgu (Ω, Σ) mõõtuv ruum ning olgu $G\colon \Sigma \to \mathcal{S}$ tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt, mille variatsioon $\nu := |G|$ on täielik mõõt. Lausete 2.35 ja 2.32 põhjal piisab teoreemi tõestuseks leida tõkestatud ν-mõõtuv funktsioon $g\colon \Omega \to \mathcal{K}(X,Y)$ nii, et

$$G(E) = \int_E g\, d\nu \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral.} \tag{4.1}$$

Teoreemi 2.42 põhjal leidub lifting $\varrho\colon L_\infty(\nu) \to M(\Sigma)$. Teoreemi 3.3, (a), põhjal leidub üheselt määratud tõkestatud funktsioon $h\colon \Omega \to \mathcal{L}(X, Y^{**})$ nii, et

(1) $\langle G(E)x, y^*\rangle = \int_E \langle y^*, h(\omega)x\rangle\, d\nu(\omega)$ kõikide $E \in \Sigma$, $x \in X$ ja $y^* \in Y^*$ korral;

(2) $\varrho(\langle y^*, h(\cdot)x\rangle) = \langle y^*, h(\cdot)x\rangle$ kõikide $x \in X$ ja $y^* \in Y^*$ korral.

Kaasruumi X^* alamhulk $\operatorname{absconv}\{T^*y^*\colon T \in B_{\mathcal{S}},\, y^* \in B_{Y^*}\}$ on tõkestatud ja lemma 1.11, (b), põhjal normi topoloogias separaabel, seega eelduse ($\sharp$) põhjal tema $*$-nõrga sulundi $A := \overline{\operatorname{absconv}}^{w^*}\{T^*y^*\colon T \in B_{\mathcal{S}},\, y^* \in B_{Y^*}\}$ suhteline $*$-nõrk topoloogia on metriseeruv. Lemma 1.10 põhjal leidub separaabel alamruum $Z \subset X$ nii, et hulga A suhteline $*$-nõrk topoloogia langeb ühte tema suhtelise $\sigma(X^*, Z)$-topoloogiaga.

Lause 3.4 põhjal

(a) leidub $N \in \Sigma$ nii, et $\nu(\Omega \backslash N) = 0$ ja iga $\omega \in \Omega \backslash N$ korral

$$h(\omega)z \in j_Y(Y) \qquad \text{iga } z \in Z \text{ korral;}$$

(b) funktsioon $y^* h\colon \Omega \to X^*$ on mõõtuv iga $y^* \in B_{Y^*}$ korral, kusjuures mistahes $\omega \in \Omega$ ja $y^* \in B_{Y^*}$ korral

$$y^* h(\omega) \in \overline{\mathrm{conv}}^{w^*} \left\{ \frac{G(D)^* y^*}{|G|(D)} : D \in \Sigma,\ |G|(D) > 0 \right\} \subset A.$$

Näitame, et

$$\operatorname{ran} h(\omega) \subset j_Y(Y) \quad \text{iga } \omega \in \Omega \backslash N \text{ korral.} \tag{4.2}$$

Selleks, fikseerides vabalt $\omega \in \Omega \backslash N$ ja vaadeldes kaasoperaatorit $h(\omega)^* \in \mathcal{L}(Y^{***}, X^*)$, piisab järelduse 1.5 põhjal näidata, et operaator $h(\omega)^* j_{Y^*} \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ on w^*–w^*-pidev. Olgu jada (y_n^*) ühikkeras B_{Y^*} selline, et $y_n^* \underset{n}{\to} 0$ $*$-nõrgalt kaasruumis Y^*. Kuna ruum Y on separaabel ning seega nõrgalt kompaktselt genereeritud, siis operaatori $h(\omega)^* j_{Y^*}$ w^*–w^*-pidevuseks piisab teoreemi 1.4, (i)$\Leftrightarrow$(ii), ja järelduse 1.22 põhjal näidata, et

$$h(\omega)^* j_{Y^*} y_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad *\text{-nõrgalt ruumis } X^*. \tag{4.3}$$

Kuna $h(\omega)^* j_{Y^*}(B_{Y^*}) \subset A$ ning hulga A suhteline $*$-nõrk topoloogia langeb ühte tema suhtelise $\sigma(X^*, Z)$-topoloogiaga, siis piisab koonduvuseks (4.3) näidata, et

$$\langle z, h(\omega)^* j_{Y^*} y_n^* \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{iga } z \in Z \text{ korral.}$$

Olgu $z \in Z$. Kuna $h(\omega)z \in j_Y(Y)$, siis leidub $y \in Y$ nii, et $h(\omega)z = j_Y y$. Nüüd

$$\langle z, h(\omega)^* j_{Y^*} y_n^* \rangle = \langle h(\omega)z, j_{Y^*} y_n^* \rangle = \langle y_n^*, h(\omega)z \rangle = \langle y_n^*, j_Y y \rangle = \langle y, y_n^* \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

nagu soovitud.

Tingimusest (4.2) järeldub, et me võime funktsiooni h tõlgendada funktsioonina $h\colon \Omega \to \mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y)$. Teoreemi 3.5 kohaselt leidub nüüd tõkestatud ν-mõõtuv funktsioon $g\colon \Omega \to \mathcal{K}(X,Y)$ nii, et iga $y^* \in Y^*$ korral ν-peaaegu kõikide $\omega \in \Omega$ korral

$$\langle h(\omega)x, y^* \rangle = \langle g(\omega)x, y^* \rangle \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Nüüd mistahes $E \in \Sigma$ ning $x \in X$ ja $y^* \in Y^*$ korral

$$\begin{aligned} \langle G(E)x, y^* \rangle &= \int_E \langle h(\omega)x, y^* \rangle \, d\nu(\omega) = \int_E \langle g(\omega)x, y^* \rangle \, d\nu(\omega) \\ &= \left\langle \left(\int_E g(\omega)\, d\nu(\omega) \right) x, y^* \right\rangle; \end{aligned}$$

seega tingimus (4.1) kehtib, nagu soovitud. $\square$

Kasutatud kirjandus

[A¹] K. T. Andrews. *Representation of compact and weakly compact operators on the space of Bochner integrable functions.* Pacific J. Math. **92** (1981), no. 2, 257–267.

[A²] K. T. Andrews. *The Radon–Nikodým property for spaces of operators.* J. London Math. Soc. (2) **28** (1983), no. 1, 113–122.

[AU] K. T. Andrews, J. J. Uhl, Jr. *Weak compactness in $L_\infty(\mu, X)$.* Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), no. 6, 907–915.

[D¹] J. Diestel. *Geometry of Banach Spaces—Selected Topics.* Lecture Notes in Mathematics, 485. Springer, Berlin–New York, 1975.

[D²] J. Diestel. *Sequences and Series in Banach Spaces.* Graduate Texts in Mathematics, 92. Springer, New York, 1984.

[DM] J. Diestel, T. J. Morrison. *The Radon–Nikodým property for the space of operators. I.* Math. Nachr. **92** (1979), 7–12.

[DU] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr. *Vector Measures.* Mathematical Surveys, No. 15. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

[Din] N. Dinculeanu. *Vector Measures.* International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 95. Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto, Ont.; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

[DinU] N. Dinculeanu, J. J. Uhl, Jr. *A unifying Radon–Nikodym theorem for vector measures.* J. Multivariate Anal. **3** (1973), 184–203.

[DSch] N. Dunford, J. T. Schwartz. *Linear operators. Part I. General theory.* With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle. Reprint of the 1958 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

[FHHMZ] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler. *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis.* CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2011.

[F] G. B. Folland. *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications.* Second Edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[K] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer, New York, 1995.

[Ma] J. Martsinkevitš. *Radon–Nikodými omadus.* magistritöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2014.

[M] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 183. Springer, New York, 1998.

[R] R. A. Ryan. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces.* Springer, London, 2002.

[T] M. Talagrand. *Pettis Integral and Measure Theory.* Mem. Amer. Math. Soc. **51** (1984), no. 307.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Andre Ostrak,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Pidevate lineaarsete operaatorite ruumi Radon–Nikodými omadus”, mille juhendajad on vanemteadur Rainis Haller ja dotsent Märt Põldvere

1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **15.05.2018**