

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

René Piik
Segali topoloogilised algebrad
Matemaatika
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: kaasprof. Mart Abel

TARTU 2024

SEGALI TOPOLOOGILISED ALGEBRAD

Bakalaureusetöö

René Piik

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös defineeritakse ja uuritakse Segali topoloogilisi algebraid (STA). Töös defineeritakse algebrate Dorroh' laiendid ja punktiviisilised laiendid ning hiljem topoloogiliste algebrate vastavad laiendid. Edasi defineeritakse Segali topoloogilised algebrad ja vaadeldakse lihtsamaid näiteid neist struktuuridest. Töös tõestatakse, et STA-st saab konstrueerida uue STA, kui vaadelda esialgses kolmikus (A, f, B) esinevate algebrate A ja B asemel nende Dorroh' või punktiviisilisi laiendeid.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Märksõnad: Segali topoloogilised algebrad, topoloogilised vektorruumid, ühikustamine.

SEGAL TOPOLOGICAL ALGEBRAS

Bachelor thesis

René Piik

Abstract

In this Bachelor's thesis we study Segal topological algebras (STAs). We define the Dorroh extension and pointwise extension of algebras and later on define the respective extensions of topological algebras. In addition, Segal topological algebras are defined and simple examples of such algebras are looked at. Finally we prove that from an existing STA (A, f, B) a new STA can be constructed if we base the structure on the Dorroh or pointwise extensions of algebras A and B .

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Key Words: Segal topological algebras, topological vector spaces, unitization.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Topoloogilised vektorruumid ja algebrad	4
1.1 Vektorruum ja algebra	4
1.2 Topoloogia ja topoloogiline ruum	11
1.3 Topoloogiline vektorruum ja topoloogiline algebra	18
2 Segali topoloogilised algebrad	25
2.1 Segali topoloogilise algebra definitsioon	25
2.2 Näiteid Segali topoloogilistest algebratest	26
2.3 Segali topoloogilised algebrad ja algebrate laiendid	28
Kokkuvõte	32
Kasutatud allikad	33

Sissejuhatus

Käesolevas bakalaureusetöös defineeritakse ja uuritakse Segali topoloogilisi algebraid.

Algebrate definitsiooni abstraktse algebra baaskursuses ei esitata, kuid oma olemuselt on tegu vektorruumidega, millel on lisaks antud elementide vaheline teatud omadustega korrutamistehe. Korpuses $\mathbb{C}$ vaadeldakse selle tehtena näiteks tavalist kompleksarvude korrutamist. Topoloogilised algebrad seovad endas hulgal antud algebralise ja topoloogilise struktuuri, nõudes hulgal antud tehete pidevust topoloogia mõistes.

Segali topoloogilised algebrad defineeriti esmakordselt Mart Abeli poolt 2018. aastal [2]. Kuigi Segali algebrate endi mõiste on juba pea 60 aastat vana (vt [7]), siis senimaani on neid vaadeldud enim Banachi algebrate ja hiljem ka Fréchet' algebrate kontekstis. Artiklis [2] näidati, et üldistus topoloogiliste algebrate juhule on sisukas, sest mitmed esialgu Segali Fréchet' algebrate või Segali C^* -algebrate teoorias tuntud tulemused kehtivad ka Segali topoloogiliste algebrate (STA-de) korral. Käesolevas töös näidatakse, et on võimalik kasutada topoloogilise algebra nii punktiviisilist kui ka Dorroh' laiendit selleks, et konstrueerida olemasolevast Segali topoloogilisest algebrast uus STA.

Bakalaureusetöö sisuline osa jaotub kaheks peatükiks.

Esimene peatükk esitab vajalikud põhimõisted ja -lemmad selleks, et käsitleda topoloogilisi vektorruume ja topoloogilisi algebraid. Selle peatüki esimene alapeatükk tutvustab tarvilikke algebralisi, ja teine peatükk topoloogilisi, eelteadmisi. Sealjuures defineeritakse mistahes algebra jaoks kaks erinevat laiendit, millest üks toob algebrale alati ühikelemendi juurde. Kolmas alapeatükk esitab ja kirjeldab viisi, kuidas siduda omavahel hulga algebraline ja topoloogiline struktuur, ning toob näiteid erinevatest topoloogilistest algebratest.

Teine peatükk täidab käesoleva bakalaureusetöö põhieesmärgi. Esmalt defineeritakse selles Segali topoloogilised algebrad ja vaadeldakse põhjalikumalt artiklis [2] toodud näiteid. Seejärel tõestatakse kaks tulemust, mis hõlmavad olemasolevast STA-st uue STA konstrueerimist. Demonstreeritakse muuhulgas, et algebra ühikustamine lisab sellele protsessile kitsenduse. Autorile ja juhendajale teadaolevalt on teise peatüki viimases alapeatükis esitatud tulemused originaalsed.

1 Topoloogilised vektorruumid ja algebrad

1.1 Vektorruum ja algebra

Käesolevas töös tähistab sümbol $\mathbb{K}$ kõigi reaalarvude korpust $\mathbb{R}$ või kõigi kompleksarvude korpust $\mathbb{C}$. Kui pole teisiti täpsustatud, tähistab 0 nullelementi ja 1 ühikelementi korpuses $\mathbb{K}$.

Definitsioon 1.1. [6, lk 47–48] Hulka A nimetatakse *Abeli rühmaks*, kui temal on defineeritud kahekohaline algebraline tehe, mida nimetame liitmiseks, ning mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- 1° $\forall a, b, c \in A : (a + b) + c = a + (b + c);$
- 2° $\exists \Theta \in A \forall a \in A : a + \Theta = \Theta + a = a;$
- 3° $\forall a \in A \exists -a \in A : a + (-a) = (-a) + a = \Theta;$
- 4° $\forall a, b \in A : a + b = b + a.$

Tingimuses 2° sisse toodud elementi Θ nimetatakse Abeli rühma nullelemendiks.

Definitsioon 1.2. [6, lk 55–56] Hulka V nimetatakse *vektorruumiks üle korpuse* $\mathbb{K}$, kui temas on defineeritud liitmine nii, et hulk V on selle suhtes Abeli rühm, ja kui igale paarile $(k, a) \in \mathbb{K} \times V$ on üheselt vastavusse seatud element $ka \in V$ nii, et mistahes elementide $a, b \in V, k, l \in \mathbb{K}$ korral:

- 1° $k(a + b) = ka + kb;$
- 2° $(k + l)a = ka + la;$
- 3° $(kl)a = k(la);$
- 4° $1a = a.$

Vektorruumi V nullelementi tähistame sümboliga Θ_V .

Definitsioon 1.3. [6, lk 6] Olgu I suvaline mittetühi hulk ja $\{A_i, i \in I\}$ mingi hulkade süsteem. Selle hulkade süsteemi *otsekorrutiseks* $\prod_{i \in I} A_i$ nimetatakse hulka kõikvõimalikest jadadest, mille komponentide hulk on üksüheses vastavuses hulgaga I ning mille i -ndal kohal seisab element, mis kuulub hulka A_i . Teisisõnu on

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(\dots, a_i, \dots) \mid a_i \in A_i, i \in I\}$$

antud hulkade süsteemi otsekorrutis.

Lemma 1.4. [6, lk 77, 100] Olgu $V_i, i \in I$, vektorruumid üle korpuse $\mathbb{K}$. Defneerime nende vektorruumide kui hulkade otsekorruutisel $V := \prod_{i \in I} V_i$ liitmise ja korpuse elemendiga korrumise järgmiselt:

$$\begin{aligned}(\dots, x_i, \dots) + (\dots, y_i, \dots) &= (\dots, x_i + y_i, \dots), \\ k(\dots, x_i, \dots) &= (\dots, kx_i, \dots).\end{aligned}$$

Otsekorruutis V on nende tehete suhtes vektorruum üle $\mathbb{K}$.

Homomorfismi definitsiooni esitame siinkohal mistahes sama tüüpi algebraliste struktuuride jaoks, sest käesolevas töös vaatleme homomorfisme nii vektorruumide kui ka algebrate vahel.

Definitsioon 1.5. [6, lk 65–66] Olgu A ja B sama tüüpi algebralised struktuurid. Homomorfismiks nimetatakse kujutust $f : A \rightarrow B$, kui mistahes neil struktuuridel defineeritud n -kohalise tehte w ja mistahes elementide $a_1, \dots, a_n \in A$ korral

$$f(w(a_1, \dots, a_n)) = w(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

ning

$$f(0_w^A) = 0_w^B$$

mistahes nendel struktuuridel defineeritud 0-kohalise tehte w poolt struktuuris A märgitud elemendi 0_w^A ja struktuuris B märgitud elemendi 0_w^B korral.

Vektorruumide vahelisi homomorfisme nimetatakse *lineaarkujutusteks*.

Definitsioon 1.6. [4, lk 34] Homomorfismi $f : A \rightarrow B$ nimetatakse *epimorfismiks*, kui f on sürjektiivne kujutus ehk $f(A) = B$.

Definitsioon 1.7. Olgu A, B ja C vektorruumid üle korpuse $\mathbb{K}$. Bilinearseks kujutuseks nimetatakse kujutust $f : A \times B \rightarrow C$, kui mistahes $x \in A$ ja $y \in B$ korral kujutused

$$f_y : x \mapsto f(x, y) \quad \text{ja} \quad {}_x f : y \mapsto f(x, y)$$

on vektorruumide homomorfismid ehk lineaarkujutused. Teisisõnu on kujutuse f näol tegu bilineaarse kujutusega, kui fikseerides kujutuse f ühe argumendi ja lastes teisel muutuda, saame tulemuseks lineaarkujutuse.

Definitsioon 1.8. Vektorruumi üle korpuse $\mathbb{K}$ nimetatakse *algebraks üle korpuse* $\mathbb{K}$, kui sellel on lisaks antud elementide vaheline assotsiatiivne ja bilineaarne algebraline tehe, mida nimetame elementide korrumiseks.

Sarnaselt vektorruumidele tähistame algebra A nullelementi sümboliga Θ_A .

Kujutuse bilineaarsuses veendumisel on definitsiooni asemel tihti mugavam teetuda järgnevale vahetulemusele.

Lemma 1.9. *Olgu A, B ja C vektorruumid üle korpuse $\mathbb{K}$. Kujutus $f : A \times B \rightarrow C$ on bilineaarne parajasti siis, kui mistahes $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ ja $k, l \in \mathbb{K}$ korral kehtivad järgmised omadused:*

- 1° $f(a_1, b_1 + b_2) = f(a_1, b_1) + f(a_1, b_2)$;
- 2° $f(a_1 + a_2, b_1) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_1)$;
- 3° $f(ka_1, lb_1) = (kl)f(a_1, b_1)$.

Tõestus.

($\Rightarrow$) Olgu kujutus $f : A \times B \rightarrow C$ bilineaarne ning elemendid $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ ja $k, l \in \mathbb{K}$ vabalt fikseeritud. Kontrollime järjest lemmas antud kolme omaduse kehtivust.

Kujutuse f bilineaarsuse tõttu on ${}_a f$ ja f_{b_1} lineaarkujutused, seega

$$\begin{aligned} f(a_1, b_1 + b_2) &= {}_{a_1} f(b_1 + b_2) \\ &= {}_{a_1} f(b_1) + {}_{a_1} f(b_2) \\ &= f(a_1, b_1) + f(a_1, b_2), \\ f(a_1 + a_2, b_1) &= f_{b_1}(a_1 + a_2) \\ &= f_{b_1}(a_1) + f_{b_1}(a_2) \\ &= f(a_1, b_1) + f(a_2, b_1). \end{aligned}$$

Ka f_{lb_1} on lineaarkujutus, mistõttu

$$\begin{aligned} f(ka_1, lb_1) &= f_{lb_1}(ka_1) = kf_{lb_1}(a_1) \\ &= kf(a_1, lb_1) = k[{}_{a_1} f(lb_1)] = kl[{}_{a_1} f(b_1)] \\ &= (kl)f(a_1, b_1). \end{aligned}$$

Oleme näidanud, et kõik kolm omadust kehtivad.

($\Leftarrow$) Kehtigu kujutusel f kolm ülaltoodud omadust 1°, 2° ja 3°. Defineerime mistahes $a \in A$ ja $b \in B$ jaoks kujutused

$${}_a f : B \rightarrow C, \quad {}_a f(b) = f(a, b),$$

ja

$$f_b : A \rightarrow C, \quad f_b(a) = f(a, b).$$

Fikseerime vabalt elemendid $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ ja $k \in \mathbb{K}$. Paneme tähele, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} {}_{a_1}f(b_1 + b_2) &= f(a_1, b_1 + b_2) \stackrel{1^\circ}{=} f(a_1, b_1) + f(a_1, b_2) = {}_{a_1}f(b_1) + {}_{a_1}f(b_2), \\ {}_{a_1}f(kb_1) &= f(a_1, kb_1) \stackrel{3^\circ}{=} kf(a_1, b_1) = k[{}_{a_1}f(b_1)] \end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned} f_{b_1}(a_1 + a_2) &= f(a_1 + a_2, b_1) \stackrel{2^\circ}{=} f(a_1, b_1) + f(a_2, b_1) = f_{b_1}(a_1) + f_{b_1}(a_2), \\ f_{b_1}(ka_1) &= f(ka_1, b_1) \stackrel{3^\circ}{=} kf(a_1, b_1) = kf_{b_1}(a_1). \end{aligned}$$

Järelikult on ${}_{a_1}f$ vektorruumide B ja C vaheline lineaarkujutus ja f_{b_1} vektorruumide A ja C vaheline lineaarkujutus.

Vabalt valitud argumentide korral definitsioonis 1.7 näidatud viisil kujutuse f kummagi argumendi fikseerimisel saadud kujutused on homomorfismid. Seega on f bilineaarne kujutus. $\square$

Lemma 1.10. *Olgu $A_i, i \in I$, algebrad üle korpuse $\mathbb{K}$. Defineerime nende algebrate kui hulkade otsekorruitusel $A := \prod_{i \in I} A_i$ liitmise ja korpuse elemendiga korrutamise lemmas 1.4 näidatud viisil ning hulga elementide omavahelise korrutamise järgmiselt:*

$$(\dots, x_i, \dots)(\dots, y_i, \dots) = (\dots, x_i y_i, \dots).$$

Otsekorruitus A on nende tehete suhtes algebra üle $\mathbb{K}$.

Tõestus. Lemma 1.4 järgi on liitmine ja korpuse elemendiga korrutamine kinnised tehted hulgas A .

Fikseerime vabalt $(\dots, x_i, \dots), (\dots, y_i, \dots) \in A$. Kuna iga indeksi $i \in I$ korral on x_i ja y_i algebra A_i elemendid, siis elementide korrutamise kinnisuse tõttu algebras on nende korruitus $x_i y_i$ samuti algebra A_i element. Järgendi $(\dots, x_i y_i, \dots)$ iga komponent on vastava algebra element, seega $(\dots, x_i y_i, \dots) \in A$ ja eelpool toodud korrutamistehe on hulgas A kinnine.

Olgu $(\dots, x_i, \dots), (\dots, y_i, \dots), (\dots, z_i, \dots) \in A$. Toetudes korrutamise assot-

siatiivsusele algebrates A_i näeme, et korrutamine on assotsiatiivne ka ruumis A :

$$\begin{aligned}
[(\dots, x_i, \dots)(\dots, y_i, \dots)](\dots, z_i, \dots) &= (\dots, x_i y_i, \dots)(\dots, z_i, \dots) \\
&= (\dots, [x_i y_i] z_i, \dots) = (\dots, x_i [y_i z_i], \dots) \\
&= (\dots, x_i, \dots)(\dots, y_i z_i, \dots) \\
&= (\dots, x_i, \dots)[(\dots, y_i, \dots)(\dots, z_i, \dots)].
\end{aligned}$$

Märkame, et eelpool toodud korrutamistehe rahuldab kõiki kolme lemmas 1.9 toodud omadust. Toetume järgnevas sellele, et igas algebras A_i on korrutamistehe bilineaarne, mistõttu saame nende puhul rakendada lemmat 1.9. Esiteks näeme, et kehtivad omadused 1° ja 2°.

$$\begin{aligned}
(\dots, x_i, \dots)[(\dots, y_i, \dots) + (\dots, z_i, \dots)] &= (\dots, x_i, \dots)(\dots, y_i + z_i, \dots) \\
&= (\dots, x_i [y_i + z_i], \dots) \\
&= (\dots, x_i y_i + x_i z_i, \dots) \\
&= (\dots, x_i y_i, \dots) + (\dots, x_i z_i, \dots) \\
&= (\dots, x_i, \dots)(\dots, y_i, \dots) \\
&\quad + (\dots, x_i, \dots)(\dots, z_i, \dots), \\
[(\dots, x_i, \dots) + (\dots, y_i, \dots)](\dots, z_i, \dots) &= (\dots, x_i + y_i, \dots)(\dots, z_i, \dots) \\
&= (\dots, [x_i + y_i] z_i, \dots) \\
&= (\dots, x_i z_i + y_i z_i, \dots) \\
&= (\dots, x_i z_i, \dots) + (\dots, y_i z_i, \dots) \\
&= (\dots, x_i, \dots)(\dots, z_i, \dots) \\
&\quad + (\dots, y_i, \dots)(\dots, z_i, \dots).
\end{aligned}$$

On selge, et mistahes $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ korral kehtib ka omadus 3°.

$$\begin{aligned}
[\lambda(\dots, x_i, \dots)][\mu(\dots, y_i, \dots)] &= (\dots, \lambda x_i, \dots)(\dots, \mu y_i, \dots) \\
&= (\dots, [\lambda x_i][\mu y_i], \dots) = (\dots, [\lambda \mu][x_i y_i], \dots) \\
&= [\lambda \mu](\dots, x_i y_i, \dots) \\
&= [\lambda \mu][(\dots, x_i, \dots)(\dots, y_i, \dots)].
\end{aligned}$$

Kuna eelpool toodud korrutamistehe on ruumis A kinnine, assotsiatiivne ja bilineaarne, siis on otsekorrutis A algebra üle $\mathbb{K}$. $\square$

Käesolevas töös ei eelda me algebrates ühikelemendi leidumist, mistõttu tasuks vaadelda vähemalt üht viisi, kuidas ühikelementi algebrasse juurde tuua. Kõige levinum tehnika on selleks kasutada Dorroh' laiendit. Seda, et Dorroh' laiendi abil saadav ehk algebrale ühikelemendi juurdetoomisel tekkiv hulk on samuti algebra, peaksime aga eraldiseisvalt kontrollima.

Definitsioon 1.11. Vaatleme hulka $A \times \mathbb{K}$. Defineerime selles liitmise, skalaariga korrutamise ja elementide omavahelise korrutamise mistahes $a, b \in A$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ korral järgmiselt:

- 1° $(a, \lambda) + (b, \mu) = (a + b, \lambda + \mu);$
- 2° $\mu(a, \lambda) = (\mu a, \mu \lambda);$
- 3° $(a, \lambda) * (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda \mu).$

Sel viisil määratud tehetega korrutisruumi $(A \times \mathbb{K}; +, \cdot, *)$ nimetame *algebra* A *Dorroh' laiendiks* ning tähistame sümboliga A_* .

Lemma 1.12. *Kui A on algebra üle $\mathbb{K}$, siis A_* on samuti algebra üle $\mathbb{K}$.*

Tõestus. Kuna A ja $\mathbb{K}$ on mõlemad korpused üle $\mathbb{K}$, siis lemma 1.4 järgi on otsekorrutis $A \times \mathbb{K}$ vektorruum üle $\mathbb{K}$ eelpool defineeritud liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes.

Olgu $(a, \lambda), (b, \mu), (c, \gamma) \in A \times \mathbb{K}$. Muuhulgas korrutamise assotsiatiivsusele algebras A ja korpuses $\mathbb{K}$ ning skalaariga korrutamise omadustele algebras A toetudes näeme, et tehe $*$ on samuti assotsiatiivne:

$$\begin{aligned}
 (a, \lambda) * [(b, \mu) * (c, \gamma)] &= (a, \lambda) * (bc + \gamma b + \mu c, \mu \gamma) \\
 &= (a[bc + \gamma b + \mu c] + [\mu \gamma]a + \lambda[bc + \gamma b + \mu c], \lambda[\mu \gamma]) \\
 &= ([ab + \mu a + \lambda b]c + \gamma[ab + \mu a + \lambda b] + [\lambda \mu]c, [\lambda \mu]\gamma) \\
 &= (ab + \mu a + \lambda b, \lambda \mu) * (c, \gamma) \\
 &= [(a, \lambda) * (b, \mu)] * (c, \gamma).
 \end{aligned}$$

Kontrollime, kas ülal antud korrutamine on bilineaarne. Selleks näitame, et tehe $*$ rahuldab lemmas 1.9 toodud kolme omadust. Olgu $(a, \lambda), (b, \mu), (c, \gamma) \in A \times \mathbb{K}$ ja

$k, l \in \mathbb{K}$. Esiteks

$$\begin{aligned}
(a, \lambda) * [(b, \mu) + (c, \gamma)] &= (a, \lambda) * (b + c, \mu + \gamma) \\
&= (a(b + c) + (\mu + \gamma)a + \lambda(b + c), \lambda(\mu + \gamma)) \\
&= (ab + \mu a + \lambda b + ac + \gamma a + \lambda c, \lambda\mu + \lambda\gamma) \\
&= (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu) + (ac + \gamma a + \lambda c, \lambda\gamma) \\
&= (a, \lambda) * (b, \mu) + (a, \lambda) * (c, \gamma).
\end{aligned}$$

Teiseks

$$\begin{aligned}
[(a, \lambda) + (b, \mu)] * (c, \gamma) &= (a + b, \lambda + \mu) * (c, \gamma) \\
&= ((a + b)c + \gamma(a + b) + (\lambda + \mu)c, (\lambda + \mu)\gamma) \\
&= (ac + \gamma a + \lambda c + bc + \gamma b + \mu c, \lambda\gamma + \mu\gamma) \\
&= (ac + \gamma a + \lambda c, \lambda\gamma) + (bc + \gamma b + \mu c, \mu\gamma) \\
&= (a, \lambda) * (c, \gamma) + (b, \mu) * (c, \gamma).
\end{aligned}$$

Viimaks

$$\begin{aligned}
[k(a, \lambda)] * [l(b, \mu)] &= (ka, k\lambda) * (lb, l\mu) \\
&= ([ka][lb] + [l\mu][ka] + [k\lambda][lb], [k\lambda][l\mu]) \\
&= ([kl]ab + [kl]\mu a + [kl]\lambda b, [kl]\lambda\mu) \\
&= (kl)(ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu) \\
&= (kl)[(a, \lambda) * (b, \mu)].
\end{aligned}$$

Et hulga $A \times \mathbb{K}$ elementide korrutamine tehte $*$ järgi rahuldab kõiki kolme omadust, on lemma 1.9 põhjal tegu bilineaarse tehtega.

Oleme näidanud, et algebra A Dorroh' laiend A_* on algebra üle $\mathbb{K}$. $\square$

Märkus 1.13. Saadud algebras on elementide korrutamise suhtes ühikelemendiks $1_{A_*} = (\Theta_A, 1)$. Mistahes $(a, \lambda) \in A_*$ korral

$$\begin{aligned}
(\Theta_A, 1) * (a, \lambda) &= (\Theta_A a + \lambda \Theta_A + 1a, 1\lambda) = (\Theta_A + \Theta_A + a, \lambda) = (a, \lambda), \\
(a, \lambda) * (\Theta_A, 1) &= (a\Theta_A + 1a + \lambda \Theta_A, \lambda 1) = (\Theta_A + a + \Theta_A, \lambda) = (a, \lambda).
\end{aligned}$$

Märkus 1.14. Käesolevas töös vaatleme lisaks algebra A Dorroh' laiendile ka algebra A otsekorrutist korpusega $\mathbb{K}$, milles on hulga elementide korrutamine de-

fineeritud punktiviisi. See tähendab, et mistahes elementide $(a, \lambda), (b, \mu) \in A \times \mathbb{K}$ korral defineerime nende korrutiseks

$$(a, \lambda) \circ (b, \mu) := (ab, \lambda\mu).$$

Märkame, et korpus $\mathbb{K}$ on algebra üle iseenda, mistõttu saame lemmale 1.10 toetudes väita, et hulk $A \times \mathbb{K}$ on koos tavalise liitmise, skalaariga korrutamise ja ülal kirjeldatud elementide korrutamisega $\circ$ samuti algebra. Algebraist struktuuri $(A \times \mathbb{K}; +, \cdot, \circ)$ nimetame algebra A *punktiviisiliseks laiendiks* ja tähistame edaspidi sümboliga $A_\circ$.

Küll aga ei leidu punktiviisilises laiendis korrutamise suhtes alati ühikelementi. Kui (b, μ) oleks algebras $A_\circ$ elementide korrutamise suhtes ühikelement, siis peaks kehtima mistahes $(a, \lambda) \in A_\circ$ korral $(b, \mu) \circ (a, \lambda) = (a, \lambda)$ ehk $ba = a$ ja $\mu\lambda = \lambda$. Korpuse $\mathbb{K}$ elemendi μ rolli sobiks 1, kuid elemendil b ei leidu ühest väärtust juhul, kui algebra A on ilma ühikelemendita. Kui A on ühikelemendiga 1_A , siis on $A_\circ$ ühikelemendiks $(1_A, 1)$.

1.2 Topoloogia ja topoloogiline ruum

Selles alapeatükis anname topoloogiliste algebrate jaoks tarvilikud definitsioonid üldisest topoloogiast. Esitleme viise määrata topoloogiat nii läbi ruumi alamhulkade kui ka punktide ümbruste. Viimaks defineerime nii topoloogia mõttes pidevuse kui ka korrutistopoloogia mõisted.

Siin ja edaspidi tähistab sümbol $\subset$ mitteranget sisalduvust.

Definitsioon 1.15. [9, lk 23] Olgu X mingi hulk ja $\tau \subset P(X)$. Öeldakse, et alamhulkade süsteem τ on *topoloogia hulgal* X , kui kehtivad järgmised tingimused:

- 1° süsteemi τ kuuluvate hulkade mistahes ühend kuulub süsteemi τ ;
- 2° süsteemi τ kuuluvate hulkade mistahes lõplik ühisosa kuulub süsteemi τ ;
- 3° tühi hulk $\emptyset$ ja hulk X kuuluvad süsteemi τ .

Ruumi X koos temal antud topoloogiaga τ ehk paari (X, τ) nimetatakse *topoloogiliseks ruumiks*. Topoloogia τ elemente nimetatakse *lahtisteks hulkadeks*.

Definitsioon 1.16. [9, lk 24] Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $E \subset X$. Hulka E nimetatakse *kinniseks* parajasti siis, kui $X \setminus E$ on lahtine topoloogias τ .

Definitsioon 1.17. [9, lk 38] Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Topoloogia τ *baasiks* nimetatakse kogumit $\mathcal{B} \subset \tau$, kus

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \mid \mathcal{L} \subset \mathcal{B} \right\}.$$

Teisisõnu, topoloogia baasiks nimetame lahtiste hulkade kogumit, mille puhul ruumi mistahes lahtine hulk avaldub selle kogumi hulkade mingi ühendina.

Definitsioon 1.18. [9, lk 25] Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $E \subset X$. Hulga E *sulundiks* $\overline{E}$ nimetatakse kõigi teda sisaldavate kinniste hulkade ühisosa:

$$\overline{E} = \bigcap \{K \subset X \mid K \text{ on kinnine, } E \subset K\}.$$

Hulga sulund on alati kinnine ning on vähim võimalik kinnine hulk, mis sisaldab antud hulka. Sellest järeldub muuhulgas, et hulk on kinnine parajasti siis, kui ta võrdub oma sulundiga.

Definitsioon 1.19. [9, lk 27] Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $E \subset X$. Hulga E *sisemuseks* E° nimetatakse kõigi temas sisalduvate lahtiste hulkade ühendit

$$E^\circ = \bigcup \{G \subset X \mid G \in \tau, G \subset E\}.$$

Hulga sisemus on alati lahtine ning on sealjuures suurim võimalik lahtine hulk, mis esialgses hulgas sisaldub. Sellest järeldub ka omadus, et hulk on lahtine parajasti siis, kui ta võrdub oma sisemusega.

Definitsioon 1.20. [9, lk 31] Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $x \in X$. Hulka $U \subset X$ nimetatakse punkti x *ümbruseks*, kui selle puhul leidub lahtine hulk G nii, et $x \in G \subset U$. Punkti x kõiki ümbrusi sisaldavat kogumit $\mathfrak{N}_x$ nimetatakse punkti x *ümbruste süsteemiks*.

Punkti x ümbrusi, mis on ka lahtised hulgad, nimetatakse punkti x *lahtisteks ümbrusteks*.

Definitsioon 1.21. [9, lk 32] Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $x \in X$. Punkti x ümbruste süsteemi alamsüsteemi $\mathfrak{B}_x \subset \mathfrak{N}_x$ nimetatakse punkti x *ümbruste baasiks*, kui iga $U \in \mathfrak{N}_x$ jaoks leidub $V \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $V \subset U$. Suvalist hulka $V \in \mathfrak{B}_x$ nimetatakse punkti x *baasiümbruseks*.

Märkus 1.22. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $x \in X$. Punkti x ümbruste baas pole üldjuhul üheselt määratud. Üheks võimalikuks punkti x ümbruste baasiks on näiteks kogum

$$\mathfrak{B}_x = \{U \in \tau \mid x \in U\}.$$

Järgmised kolm lemmat näitavad, kui tihedalt on seotud punktide ümbruste baasid ja ruumi topoloogia. Selgub, et punkti ümbruste baasil on topoloogiast tulenevalt mitu head omadust ning hulga lahtisus on tugevalt seotud sellega, millises ulatuses ta baasiümbrusi sisaldab.

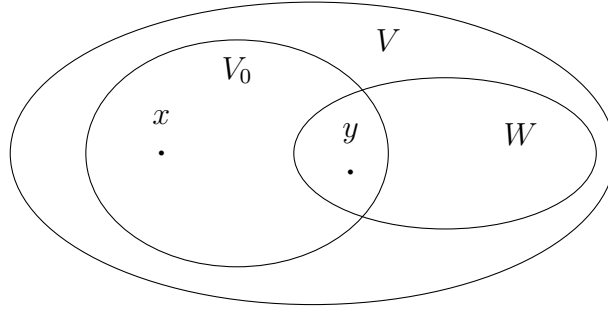
Teisipidi avastame, et kui hulga igale punktile panna vastavusse neid samu ümbruste baasi omadusi rahuldav alamhulkade kogum, siis saame mistahes hulgast moodustada topoloogilise ruumi. Sealjuures on need alamhulkade kogumid parajasti punktide ümbruste baasid.

Lemma 1.23. *Olgu X topoloogiline ruum ja $x \in X$. Punkti x ümbruste baasil $\mathfrak{B}_x$ on järgmised omadused:*

- 1° kui $V \in \mathfrak{B}_x$, siis $x \in V$;
- 2° kui $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}_x$, siis leidub $V_3 \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $V_3 \subset V_1 \cap V_2$;
- 3° kui $V \in \mathfrak{B}_x$, siis leidub $V_0 \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $V_0 \subset V$ ja iga $y \in V_0$ korral leidub $W \in \mathfrak{B}_y$ nii, et $W \subset V$.

Tõestus.

- 1° Punkti x ümbrus sisaldab punkti x .
- 2° Olgu $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}_x$. Punkti ümbruse definitsioonist tulenevalt teame, et leiduvad lahtised hulgad G_1, G_2 nii, et $x \in G_1 \subset V_1$ ja $x \in G_2 \subset V_2$. Nende lahtiste hulkade ühisosa $G_3 := G_1 \cap G_2$ sisaldab elementi x ning on topoloogia definitsioonist tulenevalt lahtine.
Paneme tähele, et $x \in G_3 \subset V_1 \cap V_2$. Seega on $V_1 \cap V_2$ punkti x ümbrus ja punkti ümbruse baasi definitsioonist tulenevalt leidub hulk $V_3 \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.



Joonis 1: Kolmas omadus lemmas 1.23

3° Olgu $V \in \mathfrak{B}_x$. Punkti ümbruse definitsioonist tulenevalt leidub lahtine hulk U nii, et $x \in U \subset V$. Kuna U on lahtine ja sisaldab punkti x , siis on ta ka selle punkti ümbrus ehk $U \in \mathfrak{N}_x$. Rakendades ümbruste baasi definitsiooni punkti ümbrusele U , saame leida $V_0 \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $V_0 \subset U$.

Hulk V on ümbruseks hulga V_0 mistahes punktile, sest iga $y \in V_0$ korral $y \in U \subset V$. Fikseerime vabalt punkti $y \in V_0$ ja vaatleme tema ümbruste süsteemi $\mathfrak{N}_y$. Kuna V on punkti y ümbrus, siis $V \in \mathfrak{N}_y$. Punkti y ümbruste baas $\mathfrak{B}_y$ peab definitsiooni kohaselt sisaldama järelikult hulka $W \in \mathfrak{B}_y$ nii, et $W \subset V$. $\square$

Lemma 1.24. *Topoloogilise ruumi X alamhulk G on lahtine parajasti siis, kui G sisaldab iga temasse kuuluva punkti mingit baasiümbrust.*

Tõestus. Olgu G lahtine, siis $G = G^\circ$. Mistahes $y \in G$ korral võime vaadelda ümbruste baasina tema kõigi lahtiste ümbruste kogumit. Kuna $y \in G^\circ$, aga G° on lahtine ning sisaldub hulgas G , siis G° kuulub sinna ümbruste baasi.

Sisaldagu G iga oma punkti y kohta mingit baasiümbrust $V_y \subset G$. Siis

$$\bigcup_{y \in G} V_y^\circ \subset G.$$

Teisalt, iga $y \in G$ sisaldub G kõigi punktide lahtiste ümbruste ühendis, seega

$$G \subset \bigcup_{y \in G} V_y^\circ.$$

Järelikult

$$G = \bigcup_{y \in G} V_y^\circ.$$

Et lahtiste hulkade ühend on lahtine, siis on ka G lahtine. $\square$

Lemma 1.25. Olgu X hulk. Määrame tema igale elemendile x vastavusse mingi alamhulkade kogumi $\mathfrak{B}_x$, mis rahuldab lemma 1.23 omadusi $1^\circ - 3^\circ$. Defineerides lahtiseks kõik hulgad, mis rahuldavad lemmat 1.24 ehk valides

$$\tau := \{U \subset X \mid \forall x \in U \exists B_x \in \mathfrak{B}_x : B_x \subset U\},$$

saame topoloogia τ hulgal X , kusjuures $\mathfrak{B}_x$ on punkti x ümbruste baas iga $x \in X$ korral.

Tõestus. Olgu iga $x \in X$ korral $\mathfrak{B}_x$ hulk, mis rahuldab lemma 1.23 omadusi $1^\circ - 3^\circ$. Näitame, et ülaldefineeritud süsteem τ rahuldab topoloogia omadusi hulgal X .

1° Näitame, et lahtiste hulkade ühend on lahtine. Selleks vaatleme süsteemi τ mingite elementide $U_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$, ühendit $U := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Fikseerime vabalt punkti $x \in U$. Kuna x kuulub ühendisse, siis leidub hulkadest U_α vähemalt üks $U_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathcal{A}$, mis sisaldab punkti x .

Et $U_{\alpha'}$ on lahtine, siis hulga τ definitsiooni järgi leidub hulk $B_x \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $B_x \subset U_{\alpha'}$. Kuna $U_{\alpha'} \subset U$, siis ka $B_x \subset U$, ehk oleme näidanud, et $U \in \tau$.

2° Vaatleme süsteemi τ lõpliku arvu elementide $U_i, i \in \{1, \dots, n\}$, ühisosa

$$U := \bigcap_{i=1}^n U_i.$$

Kui $n = 1$, siis $U = U_1 \in \tau$, seega eeldame edasises, et $n > 1$.

Fikseerime vabalt elemendi $x \in U$. Kuna x sisaldub igas hulgas U_i , siis leidub iga $i \in \{1, \dots, n\}$ jaoks kogumi $\mathfrak{B}_x$ mingi element B_x^i nii, et $B_x^i \subset U_i$. Hulkade B_x^i ühisosa sisaldub igas hulgas U_i , sest mistahes i korral

$$\bigcap_{i=1}^n B_x^i \subset B_x^i \subset U_i.$$

Järelikult

$$\bigcap_{i=1}^n B_x^i \subset U.$$

Näeme hulkadele B_x^1 ja B_x^2 lemma 1.23 punkti 2° rakendades, et leidub kogumi $\mathfrak{B}_x$ element B'_x nii, et $B'_x \subset B_x^1 \cap B_x^2$. Kui süsteemist τ välja valitud elemente oli kaks, on $B'_x \subset U$ ja oleme näidanud, et $U \in \tau$.

Kui $n > 2$, siis valime välja hulgale U_3 vastava kogumi $\mathfrak{B}_x$ elemendi B_x^3 . Hulkadele B'_x ja B_x^3 ülal kirjeldatud viisil lemmat 1.23 rakendades saame, et

leidub hulk $B_x'' \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $B_x'' \subset U$. Jätkame seda protsessi, kuni oleme ära kasutanud kõik elementidele U_i vastavad hulgad B_x^i ja jõudnud tulemuseni

$$B_x^{(n-1)} \subset \bigcap_{i=1}^n B_x^i \subset U.$$

Järelikult $U \in \tau$.

3° Tühi hulk $\emptyset$ kuulub ilmselt süsteemi τ . Hulk X kuulub süsteemi τ , sest mistahes punkti korral on kõik $\mathfrak{B}_x$ elemendid ruumi X alamhulgad.

Kogum $\mathfrak{B}_x$ on punkti x ümbruste baas iga $x \in X$ korral, sest igale punkti x ümbrusele $U_x \in \mathfrak{N}_x$ vastab lahtine hulk G nii, et $x \in G \subset U_x$ ja igale lahtisele hulgale G vastab τ definitsiooni järgi kogumi $\mathfrak{B}_x$ element $B_x \subset G \subset U_x$. $\square$

Enne topoloogiliste vektorruumide ja topoloogiliste algebrate defineerimist tuleb meil defineerida veel topoloogiliste ruumide vahel antud kujutuse pidevus. Muuhulgas peame eraldi vaatlema juhtu, kus kujutus lähtub korrutisruumist, sest aegajalt nõuatakse kujutustelt hoopis üht pidevusega sarnast, kuid mitte samaväärset omadust. Topoloogiliste ruumide korrutisruumi vaatlemiseks tuleb kasutusele võtta ka korrutistopoloogia mõiste.

Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning $f : X \rightarrow Y$ nendevaheline kujutus.

Definitsioon 1.26. [9, lk 44] Kujutust f nimetatakse *pidevaks punktis* $x_0 \in X$ parajasti siis, kui punkti $f(x_0) \in Y$ iga ümbruse V jaoks leidub punkti x_0 ümbrus U nii, et $f(U) \subset V$. Kujutust f nimetatakse *pidevaks*, kui ta on pidev ruumi X igas punktis.

Teoreem 1.27. [9, lk 44] *Järgnevad väited on samaväärsed:*

- 1° f on pidev;
- 2° kui $G \subset Y$ on lahtine hulk topoloogias τ_Y , siis hulk $f^{-1}(G) \subset X$ on lahtine topoloogias τ_X ;
- 3° kui $F \subset Y$ on kinnine hulk topoloogias τ_Y , siis hulk $f^{-1}(F) \subset X$ on kinnine topoloogias τ_X ;
- 4° kui $E \subset X$, siis $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

Definitsioon 1.28. [9, lk 53] Olgu $(X_i, \tau_i), i \in I$, topoloogilised ruumid. *Korrutistopoloogiaks* hulgal $\prod_{i \in I} X_i$ nimetatakse topoloogiat τ_{prod} , mille baasiks on hulgad

kujul $\prod_{i \in I} U_i$, kusjuures kehtivad tingimused:

- 1° U_i on lahtine ruumis X_i iga $i \in I$ korral;
 2° $U_i \neq X_i$ vaid lõpliku arvu indeksite korral.

Hulka $\prod_{i \in I} X_i$ koos korrutistopoloogiaga τ_{prod} nimetatakse *topoloogiliseks korrutisruumiks*.

Paneme tähele, et kui topoloogilisi ruume (X_i, τ_i) on vaid lõplik arv $n \in \mathbb{N}$ tükki, siis on nende korrutistopoloogia baasiks parajasti kogum

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_n : U_i \in \tau_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Lemma 1.29. [3, lk 78] *Olgu $(X_i, \tau_i), i \in I$, topoloogilised ruumid. Olgu $A_i, i \in I$, hulgad, kus iga $i \in I$ korral $A_i \subset X_i$. Siis kehtib:*

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Käesolevas töös vaadeldakse korrutisruumist lähtuva kujutuse peal kaht erinevat omadust, mille nimetuses kasutatakse sõna „pidev“. Neist aga ainult üks - ühis pidevus - kirjeldab pidevust definitsiooni 1.26 mõttes. Teine - eraldi pidevus - on siinkohal välja toodud, kuna just seda (nõrgemat) omadust peab hakkama rahuldama korrutamistehe topoloogilises algebras.

Sõnastame nüüd ühis- ja eraldi pidevuse korrutisruumist lähtuva kujutuse jaoks. Olgu (X, τ_X) , (Y, τ_Y) ja (Z, τ_Z) topoloogilised ruumid.

Definitsioon 1.30. Kujutust $f : X \times Y \rightarrow Z$ nimetatakse *ühispidevaks* punktis $(x, y) \in X \times Y$, kui punkti $f(x, y) \in Z$ iga ümbruse $U \subset Z$ korral leiduvad punkti x ümbrus V ja punkti y ümbrus W nii, et $f(V \times W) \subset U$.

Definitsioon 1.31. Kujutust $f : X \times Y \rightarrow Z$ nimetatakse *eraldi pidevaks* punktis $(x, y) \in X \times Y$, kui punkti $f(x, y) \in Z$ iga ümbruse $U \subset Z$ korral leiduvad punkti x ümbrus V ja punkti y ümbrus W nii, et $f(\{x\} \times W) \subset U$ ja $f(V \times \{y\}) \subset U$.

Paneme tähele, et ühis pidevusest järeldub eraldi pidevus: kui $f(V \times W) \subset U$, siis ka $f(\{x\} \times W) \subset U$ ja $f(V \times \{y\}) \subset U$, sest $\{x\} \subset V$ ja $\{y\} \subset W$. Teistpidi järelduvus aga üldjuhul ei kehti.

1.3 Topoloogiline vektorruum ja topoloogiline algebra

Käesolevas alapeatükis toome algebratele ja vektorruumidele juurde topoloogilise struktuuri. Selleks tuleb kooskõlla viia algebra või vektorruumi tehete poolt määratud struktuur ja hulga topoloogia. Selgub, et algebralise (või lineaarse) ja topoloogilise struktuuri ühitamiseks piisab nõuda tehete pidevust hulgal antud topoloogia suhtes.

Definitsioon 1.32. Punkti $\lambda \in \mathbb{K}$ ε -ümbruseks nimetame hulka

$$B_\varepsilon(\lambda) := \{\mu \in \mathbb{K} : |\mu - \lambda| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Korpuse $\mathbb{K}$ loomulikuks topoloogiaks $\tau_{\mathbb{K}}$ nimetame süsteemi

$$\tau_{\mathbb{K}} := \{U \subset \mathbb{K} \mid \forall \lambda \in U \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\lambda) \subset U\}.$$

Definitsioon 1.33. (vt ka [1, lk 12]) Vektorruumi V üle korpuse $\mathbb{K}$ nimetatakse *topoloogiliseks vektorruumiks* (tähistame TVR), kui hulgal V on antud topoloogia τ nii, et liitmine ja skalaariga korrutamine on selle topoloogia suhtes ühispidevad kujutused.

Anname täpsemad kirjeldused vektorruumi tehete pidevusele. Esiteks, liitmine on ühispidev parajasti siis, kui iga $x, y \in V$ korral leiduvad summa $x + y$ mistahes ümbruse U jaoks punktide x ja y ümbrused U_x ja U_y nii, et

$$U_x + U_y \subset U.$$

Teiseks, korpuse elemendiga korrutamine on ühispidev siis ja ainult siis, kui iga $\lambda \in \mathbb{K}, x \in V$ korral leiduvad korrutise λx mistahes ümbruse U jaoks elemendi λ ümbrus U_λ ja punkti x ümbrus U_x nii, et

$$U_\lambda U_x := \{\mu y : \mu \in U_\lambda, y \in U_x\} \subset U.$$

Märkus 1.34. Käesolevas töös mõistame algebra kahe alamhulga korrutise all neis sisalduvate elementide korrutiste hulka. Teisisõnu, kui meil on antud algebra A kaks alamhulka U ja V , siis nende kahe hulga korrutis avaldub kujul

$$UV := \{uv : u \in U, v \in V\}.$$

Sarnaselt, kui vaatleme konkreetse elemendi $u \in U$ ja mingi hulga V korrutist, siis

see avaldub kujul

$$uV := \{uv : v \in V\}.$$

Täpsustame seda asjaolu, kuna algebrad on ka ringid ja algebraistide tavalisid järgides peaks ringi alamhulkade korrutis koosnema mitte elementide korrutistest, vaid elementide korrutiste lineaarkombinatsioonidest. Topoloogiaga tegelejate jaoks, ja käesolevas töös, tähendab kirja pilt UV aga just ülal kirjeldatud hulka.

Definitsioon 1.35. (vt ka [1, lk 14]) Algebrat A üle korpuse $\mathbb{K}$ nimetatakse *topoloogiliseks algebraks* (tähistame TA), kui hulgal A on antud topoloogia τ nii, et liitmine ja skalaariga korrutamine on ühispidevad kujutused ning algebra elementide korrutamine on eraldi pidev kujutus.

Algebra elementide korrutamisel, erinevalt teistest tehetest, nõutakse reeglina vaid eraldi pidevust. Teisisõnu loetakse korrutamine pidevaks parajasti siis, kui iga $x, y \in A$ korral leiduvad korrutise xy mistahes ümbruse U jaoks punktide x ja y ümbrused U_x ja U_y nii, et

$$xU_y \subset U \quad \text{ja} \quad U_x y \subset U.$$

Topoloogilise algebra saame näiteks moodustada mistahes algebrast A , kui vaatleme seda koos triviaalse topoloogiaga. Samuti on TA näiteks korpus $\mathbb{K}$ koos loomuliku topoloogiaga $\tau_{\mathbb{K}}$.

Näide 1.36. Olgu A algebra ning $\tau = \{\emptyset, A\}$. Paneme tähele, et ruumi A mistahes punktil on ainult üks ümbrus ja selleks on hulk A ise.

Olgu $a, b \in A$, siis nende elementide endi, nende summa ja nende korrutise ainsaks ümbruseks on A . Tehete kinnisuse tõttu on $A + A \subset A$ ja $AA \subset A$ ehk liitmine ja korrutamine on algebras A ühispidevad tehted.

Olgu $\lambda \in \mathbb{K}$, siis elemendi λa ainus ümbrus on hulk A . Olgu $B_\varepsilon(\lambda)$ elemendi λ mistahes ε -ümbrus korpuses $\mathbb{K}$. Et skalaariga korrutamine on algebras A kinnine tehe, siis mistahes $\mu \in B_\varepsilon(\lambda)$ korral $\mu A \subset A$ ehk skalaariga korrutamine on ühispidev tehe. $\square$

Järgnev lemma aitab lihtsustada eelseisva näite tõestamist, sest korrutamine on algebras teatavasti bilineaarne tehe, ning selgub, et algebras $\mathbb{C}$ lausa ühispidev.

Lemma 1.37. [8, lk 118] Olgu A, B ja C topoloogilised vektorruumid üle $\mathbb{K}$. Bilineaarne kujutus $f : A \times B \rightarrow C$ on ühispidev parajasti siis, kui ta on ühispidev punktis (Θ_A, Θ_B) .

See lemma kehtib ka juhul, kui kujutust f rakendatakse TA-de peal, sest lisanduv korrutamistehe ei mõjuta kujutuse f pidevust kui topoloogilist omadust.

Näide 1.38. Vaatleme algebrat $\mathbb{C}$ üle korpuse $\mathbb{R}$. Olgu algebral $\mathbb{C}$ antud loomulik topoloogia $\tau_{\mathbb{C}}$. Näitame, et $(\mathbb{C}, \tau_{\mathbb{C}})$ tehted on igas punktis pidevad, ning demonstreerime seeläbi, et tegu on topoloogilise algebraga.

- 1° Fikseerime vabalt $z, w \in \mathbb{C}$. Olgu $V \subset \mathbb{C}$ punkti $z + w$ mistahes ümbrus. Siis sisaldab ta mingit ε -ümbrust $B_{\varepsilon}(z + w)$. Vaatleme $\frac{\varepsilon}{2}$ -ümbrusi $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ ja $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$. Fikseerime vabalt elemendid $u_1 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ ja $u_2 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$. Soovime näidata, et $u_1 + u_2 \in B_{\varepsilon}(z + w)$. Selleks peaks elementide $u_1 + u_2$ ja $z + w$ vahe moodul olema väiksem kui ε . Tõepoolest,

$$\begin{aligned} |(u_1 + u_2) - (z + w)| &= |(u_1 - z) + (u_2 - w)| \\ &\leq |u_1 - z| + |u_2 - w| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Järelikult $U_z + U_w \subset V$ ja liitmine on topoloogia $\tau_{\mathbb{C}}$ mõistes ühispidev.

- 2° Fikseerime vabalt elemendid $z \in \mathbb{C}$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Olgu $V \subset \mathbb{C}$ punkti λz mistahes ümbrus, siis sisaldab ta mingit lahtist ε -ümbrust $B_{\varepsilon}(\lambda z)$. Defineerime $\delta \in \mathbb{R}$ järgmiselt:

$$\delta := \frac{\varepsilon}{3 \max\{\sqrt{\varepsilon}, |\lambda|, |z|\}}.$$

Paneme tähele, et kuigi $|\lambda|$ ja $|z|$ võivad võrduda nulliga, siis murru nimetajasse jääb tingimuse $\varepsilon > 0$ tõttu alati positiivne reaalarv. Seega ei pea me eraldi vaatlema alamjuhte, kus λ , z või mõlemad neist võrduvad nulliga.

Vaatleme elementide λ ja z δ -ümbruseid $B_{\delta}(\lambda)$ ja $B_{\delta}(z)$. Fikseerime vabalt elemendid $\mu \in B_{\delta}(\lambda)$ ja $v \in B_{\delta}(z)$ ning vaatleme nende korrutist μv . Näeme, et element μv kuulub korrutise λz ε -ümbrusesse:

$$\begin{aligned} |\mu v - \lambda z| &= |\mu v - \lambda z + \mu z - \mu z| = |\mu z - \lambda z + \mu v - \mu z| \\ &\leq |\mu z - \lambda z| + |\mu v - \mu z| = |\mu - \lambda||z| + |\mu||v - z| \\ &< \delta|z| + |\mu|\delta = \delta|z| + |\mu - \lambda + \lambda|\delta \\ &\leq \delta|z| + |\mu - \lambda|\delta + |\lambda|\delta < \delta|z| + \delta^2 + |\lambda|\delta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\sqrt{\varepsilon}^2}{9} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Järelikult $B_\delta(\lambda)B_\delta(z) \subset B_\varepsilon(\lambda z) \subset V$ ehk skalaariga korrutamine on algebras $\mathbb{C}$ pidev tehe.

3° Kuna kompleksarvude korrutamine on algebras $\mathbb{C}$ bilineaarne tehe, siis piisab kontrollida, kas see tehe on ühispidev nullpunktis. Olgu $O \subset \mathbb{C}$ nulliümbrus, siis selles sisaldub ε -ümbrus $B_\varepsilon(0)$. Peame leidma nulliümbruse O' , mille korrutis iseendaga sisaldub ümbruses O . Kui valime $O' := B_{\sqrt{\varepsilon}}(0)$ ja fikseerime vabalt $u \in O'O'$, siis leiduvad $u_1, u_2 \in O'$ nii, et $u = u_1 u_2$ ja

$$|u| = |u_1 u_2| \leq |u_1| |u_2| < \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Seega $u \in B_\varepsilon(0)$ ja $O'O' \subset O$ ehk korrutamine on algebras $\mathbb{C}$ ühispidev.

Kuna algebra $\mathbb{C}$ kõik tehted on igas punktis topoloogia $\tau_{\mathbb{C}}$ suhtes ühispidevad, siis on $(\mathbb{C}, \tau_{\mathbb{C}})$ topoloogiline algebra. $\square$

Peatüki lõpetuseks näitame, et nii topoloogilise algebra A Dorroh' laiend A_* kui ka punktiivisiline laiend $A_\circ$ on topoloogilised algebrad.

Lemma 1.39. *Olgu (A, τ_A) topoloogiline algebra, A_* algebra A Dorroh' laiend ning τ_{A_*} korrutistopoloogia. Siis on (A_*, τ_{A_*}) topoloogiline algebra.*

Tõestus. Lemma 1.12 järgi on A_* algebra üle $\mathbb{K}$.

Peame seega näitama vaid, et Dorroh' laiendis defineeritud tehted on korrutistopoloogia τ_{A_*} suhtes pidevad.

1° (Liitmine.) Fikseerime vabalt elemendid $(a, \lambda), (b, \mu) \in A_*$. Olgu $V \subset A_*$ nende elementide summa $(a+b, \lambda+\mu)$ mingi ümbrus. Siis leiduvad elementide $a+b$ ja $\lambda+\mu$ ümbrused $U_1 \in A$ ja $U_2 \in \mathbb{K}$ nii, et $U_1 \times U_2 \subset V$. Kuna algebras A on liitmine pidev, siis leiduvad elemendi a ümbrus U_a ja elemendi b ümbrus U_b nii, et $U_a + U_b \subset U_1$. Tulenevalt liitmise pidevusest algebras $\mathbb{K}$ leiduvad elemendi λ ümbrus U_λ ja elemendi μ ümbrus U_μ nii, et $U_\lambda + U_\mu \subset U_2$. Valime punktide (a, λ) ja (b, μ) ümbrusteks vastavalt $U_a \times U_\lambda$ ja $U_b \times U_\mu$. Fikseerime neis vabalt elemendid $(c, \gamma) \in U_a \times U_\lambda$ ja $(d, \delta) \in U_b \times U_\mu$. Kuna

$$c + d \in U_a + U_b \subset U_1 \quad \text{ja} \quad \gamma + \delta \in U_\lambda + U_\mu \subset U_2,$$

siis

$$(c, \gamma) + (d, \delta) = (c + d, \gamma + \delta) \in U_1 \times U_2 \subset V.$$

Järelikult on liitmine ühispidev algebras A_*

2° (Skalaariga korrutamine.) Fikseerime vabalt elemendid $\mu \in \mathbb{K}$ ja $(a, \lambda) \in A_*$. Olgu $V \subset A_*$ nende elementide korrutise $\mu(a, \lambda) = (\mu a, \mu \lambda)$ mingi ümbrus. Siis leiduvad korrutistopoloogia definitsioonist tulenevalt elementide μa ja $\mu \lambda$ ümbrused $U_{\mu a}$ ja $B_\varepsilon(\mu \lambda)$ nii, et

$$U_{\mu a} \times B_\varepsilon(\mu \lambda) \subset V.$$

Kuna skalaariga korrutamine on pidev TA-s A , siis leiduvad elemendi μ ümbrus $B_{\delta_1}(\mu)$ ja a ümbrus U_a nii, et

$$B_{\delta_1}(\mu)U_a \subset U_{\mu a}.$$

Elementide korrutamise pidevusest algebras $\mathbb{K}$ järeldub, et leiduvad elemendi μ ümbrus $B_{\delta_2}(\mu)$ ja λ ümbrus $B_{\delta_3}(\lambda)$ nii, et

$$B_{\delta_2}(\mu)B_{\delta_3}(\lambda) \subset B_\varepsilon(\mu \lambda).$$

Olgu $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Valime elemendi μ ümbruseks $B_\delta(\mu)$ ja elemendi (a, λ) ümbruseks $U_{(a, \lambda)} := U_a \times B_\delta(\lambda)$. Fikseerime neis ümbrustes vabalt elemendid $\gamma \in B_\delta(\mu)$ ja $(u, \kappa) \in U_{(a, \lambda)}$. Vaatleme nende korrutist $\gamma(u, \kappa)$ ning näitame, et see kuulub hulka V .

Märkame, et $B_\delta(\mu) \subset B_{\delta_1}(\mu)$, mistõttu $\gamma \in B_{\delta_1}(\mu)$. Hulga $U_{(a, \lambda)}$ definitsiooni järgi omakorda $u \in U_a$. Seega

$$\gamma u \in B_{\delta_1}(\mu)U_a \subset U_{\mu a}.$$

Sarnaselt, kuna $B_\delta(\mu) \subset B_{\delta_2}(\mu)$, siis $\gamma \in B_{\delta_2}(\mu)$, ning et $B_\delta(\lambda) \subset B_{\delta_3}(\lambda)$, siis $\kappa \in B_{\delta_3}(\lambda)$. Järelikult

$$\gamma \kappa \in B_{\delta_2}(\mu)B_{\delta_3}(\lambda) \subset B_\varepsilon(\mu \lambda).$$

Viimaks näeme, et

$$\gamma(u, \kappa) = (\gamma u, \gamma \kappa) \in U_{\mu a} \times B_\varepsilon(\mu \lambda) \subset V.$$

Seetõttu on skalaariga korrutamine algebras A_* ühispidev tehe.

3° (Algebra elementide korrutamine.) Olgu $(a, \lambda), (b, \mu) \in A_*$ ja $V \subset A_*$ nende elementide korrutise $(a, \lambda) * (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda \mu)$ mingi ümbrus. Tões-

tuse esimeses pooles, nagu ikka, jaotame ümbruse V osadeks, mida hakkame hiljem veidi teistsugusel moel kokku kombineerima.

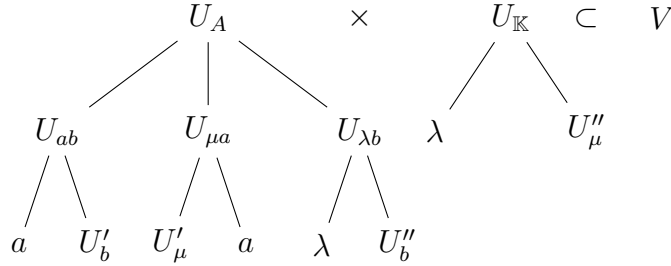
Korrutistopoloogia definitsioonist tulenevalt leiduvad summal $ab + \mu a + \lambda b$ ja korrutisel $\lambda\mu$ ümbrused U_A ja $U_{\mathbb{K}}$ nii, et $U_A \times U_{\mathbb{K}} \subset V$. Liitmise ühispidavuse tõttu algebras A leiduvad punktide $ab, \mu a$ ja λb ümbrused $U_{ab}, U_{\mu a}$ ja $U_{\lambda b}$ nii, et $U_{ab} + U_{\mu a} + U_{\lambda b} \subset U_A$.

Näitame siinkohal eraldi pidevust (a, λ) suhtes ehk demonstreerime, et leidub elemendi (b, μ) ümbrus $U_{(b, \mu)}$ nii, et $(a, \lambda) * U_{(b, \mu)} \subset V$.

Korrutamise ja skalaariga korrutamise eraldi pidevuse tõttu algebras A leiduvad elementide b ja μ ümbrused U'_b, U''_b ja U'_μ nii, et

$$aU'_b \subset U_{ab}, \quad U'_\mu a \subset U_{\mu a} \quad \text{ja} \quad \lambda U''_b \subset U_{\lambda b}.$$

Korrutamise eraldi pidevusest algebras $\mathbb{K}$ järeldame omakorda, et leidub elemendi μ ümbrus U''_μ nii, et $\lambda U''_\mu \subset U_{\mathbb{K}}$.



Joonis 2: V jaotus alamhulkadeks lemma 1.39 punktis 3°

Olgu nüüd

$$U_b := U'_b \cap U''_b, \quad U_\mu := U'_\mu \cap U''_\mu \quad \text{ja} \quad U_{(b, \mu)} := U_b \times U_\mu.$$

Paneme tähele, et U_b ja U_μ on vastavalt elementide b ja μ ümbrused, sest punkti ümbruste ühisosa on samuti punkti ümbrus. Seetõttu sisaldab nende otsekorrutis $U_{(b, \mu)}$ elementi (b, μ) ja korrutistopoloogia definitsioonist tulenevalt on selle elemendi ümbrus.

Fikseerime vabalt $(c, \gamma) \in U_{(b, \mu)}$. Märkame, et

$$\begin{aligned} c \in U_b \subset U'_b &\Rightarrow ac \in U_{ab}, & \gamma \in U_\mu \subset U'_\mu &\Rightarrow \gamma a \in U_{\mu a}, \\ c \in U_b \subset U''_b &\Rightarrow \lambda c \in U_{\lambda b}, & \gamma \in U_\mu \subset U''_\mu &\Rightarrow \lambda \gamma \in U_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Järelikult

$$(a, \lambda) * (c, \gamma) = (ac + \gamma a + \lambda c, \lambda \gamma) \in (U_{ab} + U_{\mu a} + U_{\lambda b}) \times U_{\mathbb{K}} \subset U_A \times U_{\mathbb{K}} \subset V$$

ehk oleme leidnud elemendile (b, μ) sobiva ümbruse. Analoogiliselt opereerides saame näidata, et leidub ka elemendi (a, λ) ümbrus $U_{(a, \lambda)}$ nii, et kehtib eraldi pidevuse teine tingimus $U_{(a, \lambda)} * (b, \mu) \subset V$.

Seetõttu on algebra elementide korrutamine algebras A_* eraldi pidev tehe.

Kuna algebras A_* on liitmine ja skalaariga korrutamine ühispidavad kujutused ning korrutamine eraldi pidev kujutus topoloogia τ_{A_*} suhtes, siis on (A_*, τ_{A_*}) topoloogiline algebra. $\square$

Lemma 1.40. *Olgu (A, τ_A) topoloogiline algebra, $A_\circ$ algebra A punktiviisiline laiend ning $\tau_{A_\circ}$ korrutistopoloogia. Siis on $(A_\circ, \tau_{A_\circ})$ topoloogiline algebra.*

Tõestus. Lemma 1.10 järgi on $A_\circ$ algebra üle $\mathbb{K}$. Lemmas 1.39 näitasime, et liitmine ja skalaariga korrutamine, mis on algebrates A_* ja $A_\circ$ defineeritud samaviisi, on pidevad tehted. Näitame, et korrutamine algebras $A_\circ$ on eraldi pidev.

Olgu $(a, \lambda), (b, \mu) \in A_\circ$ ja $V \subset A_\circ$ nende elementide punktiviisilise korrutise $(a, \lambda) \circ (b, \mu) = (ab, \lambda \mu)$ mingi ümbrus. Korrutistopoloogia definitsioonist tulenevalt leiduvad elementidel ab ja $\lambda \mu$ ümbrused U_{ab} ja $U_{\lambda \mu}$ nii, et $U_{ab} \times U_{\lambda \mu} \subset V$.

Näitame siinkohal eraldi pidevust elemendi (a, λ) suhtes. Korrutamise eraldi pidevuse tõttu algebrates A ja $\mathbb{K}$ leiduvad elemendi b ümbrus U_b ja μ ümbrus U_μ nii, et

$$aU_b \subset U_{ab} \quad \text{ja} \quad \lambda U_\mu \subset U_{\lambda \mu}.$$

Paneme tähele, et nende ümbruste otsekorrutis $U_{(b, \mu)} := U_b \times U_\mu$ on elemendi (b, μ) ümbrus. Fikseerime vabalt elemendi $(c, \gamma) \in U_{(b, \mu)}$. Märkame, et

$$c \in U_b \Rightarrow ac \in U_{ab} \quad \text{ja} \quad \gamma \in U_\mu \Rightarrow \lambda \gamma \in U_{\lambda \mu}.$$

Järelikult

$$(a, \lambda) \circ (c, \gamma) = (ac, \lambda \gamma) \in U_{ab} \times U_{\lambda \mu} \subset V.$$

Analoogiliselt kehtib ka eraldi pidevus elemendi (b, μ) suhtes. Seega on punktiviisiline korrutamine $\circ$ eraldi pidev kujutus ning $(A_\circ, \tau_{A_\circ})$ topoloogiline algebra. $\square$

Lemmas 1.39 ja 1.40 uuritud topoloogilisi algebraid (A_*, τ_{A_*}) ja $(A_\circ, \tau_{A_\circ})$ nimetame vastavalt TA (A, τ_A) Dorroh' laiendiks ja punktiviisiliseks laiendiks.

2 Segali topoloogilised algebrad

2.1 Segali topoloogilise algebra definitsioon

Definitsioon 2.1. Olgu A algebra üle korpuse $\mathbb{K}$. Algebra A mittetühja alamhulka A' nimetatakse algebra A *alamalgebraks*, kui

- 1° $\forall a, b \in A : a, b \in A' \Rightarrow a + b \in A'$;
- 2° $\forall a \in A \ \forall \lambda \in \mathbb{K} : a \in A' \Rightarrow \lambda a \in A'$;
- 3° $\forall a, b \in A : a, b \in A' \Rightarrow ab \in A'$.

Definitsioon 2.2. [1, lk 18] Algebra A alamalgebrat I nimetatakse algebra A

- 1° *vasakpoolseks ideaaliks* parajasti siis, kui mistahes $a \in A, i \in I$ korral $ai \in I$;
- 2° *parempoolseks ideaaliks* parajasti siis, kui mistahes $a \in A, i \in I$ korral $ia \in I$;
- 3° *kahepoolseks ideaaliks* parajasti siis, kui I on nii vasak- kui ka parempoolne ideaal algebras A .

Definitsioon 2.3. [9, lk 109] Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $D \subset X$. Hulka D nimetatakse *tihedaks ruumis* X , kui $\overline{D} = X$.

Definitsioon 2.4. [2, lk 59] Topoloogilist algebrat (A, τ_A) nimetatakse *vasakpoolseks (või parem- või kahepoolseks) Segali topoloogiliseks algebraks* TA-s (B, τ_B) , kui leidub algebra homomorfism $f : A \rightarrow B$ nii, et:

- 1° $f(A)$ on tihe algebras B ehk $\overline{f(A)} = B$;
- 2° f on pidev ehk kõik kujutuse f järgi võetud originaalid topoloogia τ_B lah-
tistest hulkadest sisalduvad topoloogias τ_A :

$$\{f^{-1}(U) : U \in \tau_B\} \subset \tau_A;$$

- 3° $f(A)$ on vasakpoolne (või parem- või kahepoolne) ideaal algebras B .

Eelpool kirjeldatud situatsioonis ütleme, et (A, τ_A) on vasakpoolne (või parem- või kahepoolne) Segali topoloogiline algebra TA-s (B, τ_B) kujutuse f kaudu. Ruumi kokkuhoiu mõttes kasutame edaspidi lühendit STA ning ütleme ka, et kolmik (A, f, B) moodustab STA.

Definitsioon 2.5. Olgu X mingi hulk. Kujutust $id_X : X \rightarrow X$ nimetatakse *samasusteisenduseks*, kui mistahes $x \in X$ korral $id_X(x) = x$.

2.2 Näiteid Segali topoloogilistest algebratest

Vaatleme lähemalt mõnda lihtsamalt näidet STA-dest, mis pärinevad artiklist [2]. Järgnevates näidetes võib asendada ideaali ja STA vasakpoolsuse ka parem- või kahepoolsusega, näidete tõepära see ei muuda.

Esiteks paneme tähele, et mistahes topoloogilise algebra tihe ideaal koos samasusteisendusega moodustab selles algebras samasusteisenduse kaudu STA.

Näide 2.6. Olgu (A, τ_A) topoloogiline algebra, I tihe vasakpoolne ideaal algebras A ja τ_I alamruumi topoloogia $\tau_I = \{O \cap I : O \in \tau_A\}$. Siis (I, τ_I) on vasakpoolne STA topoloogilises algebras (A, τ_A) samasusteisenduse $id_I : I \rightarrow I \subset A$ kaudu.

Kontrollime TSA definitsiooni kolme tingimust.

- 1° Et $id_I(I) = I$ ja I on tihe algebras A , siis on esimene tingimus rahuldatud.
- 2° Samasusteisenduse järgi võetud originaalid topoloogias τ_A lahtistest hulkadest on parajasti lahtised hulgad topoloogias τ_I . Et samasusteisendus on algebra homomorfism, siis on tingimus rahuldatud.
- 3° Näeme, et $id_I(I) = I$ on vasakpoolne ideaal algebras A . □

Eeltoodud näidet võime veidi modifitseerida, vaadeldes lähtruumina mitte topoloogilise algebra tihedat ideaali, vaid selle ideaali punktiviisilist laiendit. Samasusteisenduse asemel vaatleme projektsiooni ja saame taas konstrueerida STA.

Näide 2.7. Olgu (B, τ_B) topoloogiline algebra ja I tihe vasakpoolne ideaal algebras B . Vaatleme algebra I punktiviisilist laiendit $I_\circ$. Olgu

$$p : I_\circ \rightarrow B, \quad (a, \lambda) \mapsto a,$$

projektsioon iga $(a, \lambda) \in I_\circ$ korral. Varustame algebra $I_\circ$ topoloogiaga

$$\tau_{I_\circ} = \{(O \cap I) \times \mathbb{K} = p^{-1}(O) : O \in \tau_B\}.$$

Siis $(I_\circ, \tau_{I_\circ})$ on vasakpoolne STA topoloogilises algebras (B, τ_B) kujutuse p kaudu.

Märkame esmalt, et lemma 1.40 järgi on $I_\circ$ topoloogiline algebra. Kontrollime STA tingimusi.

- 1° Paneme tähele, et $p(I_\circ) = I$ ja I on tihe algebras B .
- 2° Topoloogia $\tau_{I_\circ}$ elementideks on parajasti τ_B lahtiste hulkade originaalid, mis-

tõttu p on pidev. Kujutus p on algebra homomorfism, sest

$$\begin{aligned} p((a, \lambda) + (b, \mu)) &= p(a + b, \lambda + \mu) = a + b = p(a, \lambda) + p(b, \lambda), \\ p(\mu(a, \lambda)) &= p(\mu a, \mu \lambda) = \mu a = \mu p(a, \lambda), \\ p((a, \lambda) \circ (b, \mu)) &= p(ab, \lambda \mu) = ab = p(a, \lambda)p(b, \mu). \end{aligned}$$

3° Viimaks näeme, et $p(I_\circ) = I$ ja I on vasakpoolne ideaal algebras B . $\square$

Eelmises kahes näites vaatlesime Segali topoloogilisi algebraid, milles lähteruim saadakse sihtruimist tiheda ideaali võtmisel ja pidevaks homomorfismiks valitakse kõige lihtsam võimalik kujutus, mis elemendid paigale jätab. Opereerisime neis näidetes ühes ja samas ruumis.

Selgub, et kui soovime minna sammu kaugemale ja tuvastada STA struktuuri kahe erineva ruumi peal, piisab eeldada nende vahelise epimorfismi olemasolu.

Näide 2.8. Olgu A algebra, (B, τ_B) topoloogiline algebra ja $\pi : A \rightarrow B$ epimorfism. Varustame A topoloogiaga $\tau_A = \{\pi^{-1}(O) : O \in \tau_B\}$. Olgu I tihe vasakpoolne ideaal algebras A . Varustame I alamruumitopoloogiaga $\tau_I = \{O \cap I : O \in \tau_A\}$. Siis (I, τ_I) on STA topoloogilises algebras (B, τ_B) kujutuse $\pi|_I$ kaudu.

Kontrollime STA tingimusi.

- 1° Olgu $O \in \tau_B$. Siis leidub topoloogias τ_A mingi lahtine hulk $\pi^{-1}(O)$ ja topoloogias τ_I omakorda mingi lahtine hulk $\pi^{-1}(O) \cap I = \pi|_I^{-1}(O)$. Et topoloogia τ_B iga lahtise hulga originaal kujutuse $\pi|_I$ kaudu on topoloogias τ_I lahtine, siis on $\pi|_I$ pidev.
- 2° Näitame, et $\pi|_I(I)$ on tihe algebras B ehk $\overline{\pi|_I(I)} = B$.
 - a) Kuna kujutuse π siithulk on B , siis $\overline{\pi|_I(I)} \subset B$.
 - b) Kuna π on epimorfism, I on tihe algebras A ja teoreemi 1.27 järgi saame kujutuse $\pi|_I$ pidevust kirjeldada ka sulundi abil, siis

$$B = \pi(A) = \pi(\bar{I}) = \pi|_I(\bar{I}) \subset \overline{\pi|_I(I)}.$$

Et hulk B sisaldub hulgas $\overline{\pi|_I(I)}$ ja hulk $\overline{\pi|_I(I)}$ sisaldub hulgas B , siis on need teineteisega võrdsed. Järelikult on hulk $\pi|_I(I)$ tihe algebras B .

- 3° Näitame, et $\pi|_I(I)$ on vasakpoolne ideaal algebras B .
 - a) Olgu $j_1, j_2 \in \pi|_I(I)$. Siis leiduvad π surjektiivsuse tõttu elemendid $i_1, i_2 \in I$ nii, et $\pi(i_1) = j_1$ ja $\pi(i_2) = j_2$. Kuna I on vasakpoolne

ideaal algebras A , siis nende summa $i_1 + i_2 \in I$. Et kujutus π on homomorfism, siis

$$j_1 + j_2 = \pi(i_1) + \pi(i_2) = \pi(i_1 + i_2) \in \pi(I) = \pi|_I(I).$$

- b) Olgu $j \in \pi|_I(I)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Siis leidub π surjektiivsuse tõttu element $i \in I$ nii, et $\pi(i) = j$. Kuna I on vasakpoolne ideaal algebras A , siis $\lambda i \in I$. Kujutuse π homomorfismiks olekust tulenevalt

$$\lambda j = \lambda \pi(i) = \pi(\lambda i) \in \pi(I) = \pi|_I(I).$$

- c) Olgu $j \in \pi|_I(I)$ ja $b \in B$. Siis leiduvad π surjektiivsuse tõttu elemendid $i \in I$ ja $a \in A$ nii, et $\pi(i) = j$ ja $\pi(a) = b$. Et I on vasakpoolne ideaal algebras A , siis $ai \in I$. Kuna π on homomorfism, siis

$$bj = \pi(a)\pi(i) = \pi(ai) \in \pi(I) = \pi|_I(I).$$

Oleme näidanud, et kolmik $(I, \pi|_I, B)$ moodustab STA. □

2.3 Segali topoloogilised algebrad ja algebrate laiendid

Käesolevas alapeatükis tõestame bakalaureusetöö mõlemad põhitulemused. Esiteks näitame, et algebrate punktiivisilisi laiendeid kasutades saame olemasolevast STA-st konstrueerida ilma ühegi lisatingimusega uue STA. Samas selgub, et Dorroh' laiendeid kasutades sama tulemus üldjuhul ei kehti. Sõnastame lisatingimuse, mis on sel puhul tarvilik ja piisav uue STA konstrueerimiseks, ja veendume tulemuse tõepäras.

Teoreemid 2.9 ja 2.10 on sõnastatud vaid vasakpoolsete STA-de jaoks, kuid toodud tõestused on analoogilised ka juhtudel, kui eeldame esialgse STA parem- või kahepoolset.

Teoreem 2.9. *Olgu (A, τ_A) vasakpoolne STA topoloogilises algebras (B, τ_B) homomorfismi $f : A \rightarrow B$ kaudu ning $(A_\circ, \tau_{A_\circ})$ ja $(B_\circ, \tau_{B_\circ})$ nende TA-de punktiivisilised laiendid. Siis kujutus*

$$f' : A_\circ \rightarrow B_\circ, \quad (a, \lambda) \mapsto (f(a), \lambda),$$

on algebra homomorfism ning $(A_\circ, \tau_{A_\circ})$ on vasakpoolne STA topoloogilises algebras $(B_\circ, \tau_{B_\circ})$ kujutuse f' kaudu.

Tõestus. Kujutus f' on algebra homomorfism, sest mistahes $a_1, a_2 \in A$ ja $\lambda, \kappa \in \mathbb{K}$ korral

$$\begin{aligned}
f'((a_1, \lambda) + (a_2, \kappa)) &= f'(a_1 + a_2, \lambda + \kappa) = (f(a_1 + a_2), \lambda + \kappa) \\
&= (f(a_1) + f(a_2), \lambda + \kappa) = (f(a_1), \lambda) + (f(a_2), \kappa) \\
&= f'(a_1, \lambda) + f'(a_2, \kappa), \\
f'(\kappa(a, \lambda)) &= f'(\kappa a, \kappa \lambda) = (f(\kappa a), \kappa \lambda) \\
&= (\kappa f(a), \kappa \lambda) = \kappa(f(a), \lambda) \\
&= \kappa f'(a, \lambda), \\
f'((a_1, \lambda) \circ (a_2, \kappa)) &= f'(a_1 a_2, \lambda \kappa) = (f(a_1 a_2), \lambda \kappa) \\
&= (f(a_1) f(a_2), \lambda \kappa) = (f(a_1), \lambda) \circ (f(a_2), \kappa) \\
&= f'(a_1, \lambda) \circ f'(a_2, \kappa).
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et kujutuse f' definitsioonist tulenevalt $f'(A \times \mathbb{K}) = f(A) \times \mathbb{K}$. Kontrollime STA kolme tingimuse kehtivust.

1° Kujutise $f'(A_\circ)$ tihedus ruumis $B_\circ$ tuleneb otse lemmast 1.29 ja kujutise $f(A)$ tihedusest algebras B :

$$\overline{f'(A \times \mathbb{K})} = \overline{f(A) \times \mathbb{K}} = \overline{f(A)} \times \overline{\mathbb{K}} = B \times \mathbb{K}.$$

2° Fikseerime vabalt punkti $(a, \lambda) \in A_\circ$. Vaatleme kujutise $f'(a, \lambda) = (f(a), \lambda)$ mingit ümbrust V .

Punkti ümbruse definitsiooni järgi leidub punktil $(f(a), \lambda)$ lahtine ümbrus $G \in \tau_{B_\circ}$ nii, et $G \subset V$. Korrutistopoloogia definitsioonist tulenevalt leiduvad lahtised hulgad $G_1 \in \tau_B$ ja $G_2 \in \tau_{\mathbb{K}}$ nii, et $G = G_1 \times G_2$. Siinjuures märkame, et G_1 on punkti $f(a)$ lahtine ümbrus.

Kujutuse f pidevuse tõttu leidub punktil a ümbrus U_1 nii, et $f(U_1) \subset G_1$. Paneme tähele, et hulk $U := U_1 \times G_2 \subset A_\circ$ on punkti (a, λ) ümbrus. Hulgale U kujutust f' rakendades näeme, et

$$f'(U) = f'(U_1 \times G_2) = f(U_1) \times G_2 \subset G_1 \times G_2 = G \subset V.$$

Järelikult on kujutus f' igas punktis pidev ehk pidev kogu ruumis.

3° Näitame esmalt, et $f'(A_\circ)$ on algebra $B_\circ$ alamalgebra. Selleks piisab näidata, et hulk $f(A) \times \mathbb{K}$ on algebra $B_\circ$ tehete suhtes kinnine. Fikseerime vabalt

elemendid $(a_1, \lambda), (a_2, \kappa) \in A_\circ$ ja $\mu \in \mathbb{K}$. Siis

$$\begin{aligned}(f(a_1), \lambda) + (f(a_2), \kappa) &= (f(a_1) + f(a_2), \lambda + \kappa), \\ \mu(f(a_1), \lambda) &= (\mu f(a_1), \mu \lambda), \\ (f(a_1), \lambda) \circ (f(a_2), \kappa) &= (f(a_1)f(a_2), \lambda \kappa).\end{aligned}$$

Kuna $f(A)$ on ruumi B alamalgebra, siis $f(a_1) + f(a_2), \mu f(a_1)$ ja $f(a_1)f(a_2)$ on kõik $f(A)$ elemendid. Korpus $\mathbb{K}$ on oma tehete suhtes kinnine, mistõttu $\lambda + \kappa, \mu \lambda$ ja $\lambda \kappa$ on korpuse $\mathbb{K}$ elemendid. Järelikult on $f'(A_\circ)$ algebra $B_\circ$ alamalgebra.

Olgu $(a, \lambda) \in A_\circ, (b, \mu) \in B_\circ$, siis

$$(b, \mu) \circ f'(a, \lambda) = (b, \mu) \circ (f(a), \lambda) = (bf(a), \mu \lambda).$$

Kuna $f(A)$ on vasakpoolne ideaal ruumis B , siis $bf(a) \in f(A)$, ning kuna korpus on korrutamise suhtes kinnine, siis $\mu \lambda \in \mathbb{K}$. Järelikult on $f'(A_\circ)$ vasakpoolne ideaal algebras $B_\circ$.

Kuna demonstreerisime, et f' on homomorfism ja rahuldab kõiki kolme STA definitsioonis toodud tingimust, siis on $(A_\circ, \tau_{A_\circ})$ vasakpoolne STA topoloogilises algebras $(B_\circ, \tau_{B_\circ})$ homomorfismi f' kaudu. $\square$

Üldjuhul, paraku, ei kehti sama tulemus, kui vaatleme punktiviisiliste laiendite $A_\circ$ ja $B_\circ$ asemel Dorroh' laiendeid A_* ja B_* .

Teoreem 2.10. *Olgu (A, τ_A) vasakpoolne STA topoloogilises algebras (B, τ_B) kujutuse $f : A \rightarrow B$ kaudu ning (A_*, τ_{A_*}) ja (B_*, τ_{B_*}) nende TA-de Dorroh' laiendid. Topoloogiline algebra (A_*, τ_{A_*}) on vasakpoolne STA topoloogilises algebras (B_*, τ_{B_*}) kujutuse*

$$f' : A_* \rightarrow B_*, \quad (a, \lambda) \mapsto (f(a), \lambda),$$

kaudu parajasti siis, kui f on epimorfism.

Tõestus. Teoreemi 2.9 tõestusest teame, et f' on ruumide A_* ja B_* tehete suhtes lineaarkujutus. Näeme, et f' on mistahes elementide $(a_1, \lambda), (a_2, \kappa) \in A_*$ korral ka

algebra elementide korrutamiseks kooskõlas:

$$\begin{aligned}
f'((a_1, \lambda) * (a_2, \kappa)) &= f'(a_1 a_2 + \kappa a_1 + \lambda a_2, \lambda \kappa) \\
&= (f(a_1 a_2 + \kappa a_1 + \lambda a_2), \lambda \kappa) \\
&= (f(a_1 a_2) + f(\kappa a_1) + f(\lambda a_2), \lambda \kappa) \\
&= (f(a_1)f(a_2) + \kappa f(a_1) + \lambda f(a_2), \lambda \kappa) \\
&= (f(a_1), \lambda) * (f(a_2), \kappa) \\
&= f'(a_1, \lambda) * f'(a_2, \kappa).
\end{aligned}$$

Seega on f' algebra homomorfism.

Kui $f(A) = B$, siis

$$f'(A \times \mathbb{K}) = f(A) \times \mathbb{K} = B \times \mathbb{K}$$

ehk kujutus f' on sürjektiivne homomorfism elik epimorfism.

Paneme tähele, et teoreemi 2.9 tõestuses ei sõltu punktides 1° ja 2° toodud arutluskäigud algebras antud korrutamistest, mistõttu on nende punktide tõestused siinkohal analoogsed.

Kuna $f'(A_*) = B_*$, siis $f'(A_*)$ on algebra B_* vasakpoolne ideaal.

Oleme demonstreerinud, et f' on homomorfism ja rahuldab kõiki kolme STA definitsioonis toodud tingimust. Järelikult on (A_*, τ_{A_*}) vasakpoolne STA topoloogilises algebras (B_*, τ_{B_*}) homomorfismi f' kaudu.

Moodustagu kolmik (A_*, f', B_*) Segali topoloogilise algebra ja olgu $b_0 \in B$. Kuna $f'(A_*)$ on vasakpoolne ideaal algebras B_* , siis iga $a \in A$ korral

$$(b_0, 0) * (f(a), 1) = (b_0 f(a) + b_0, 0) \in f'(A_*) = f(A) \times \mathbb{K}.$$

Järelikult $b_0 f(a) + b_0 \in f(A)$ iga $a \in A$ korral. Et $f(A)$ on vasakpoolne ideaal algebras B , siis $b_0 f(a) \in f(A)$ ning ka $-b_0 f(a) \in f(A)$. Algebra vasakpoolne ideaal on liitmise suhtes kinnine, mistõttu

$$b_0 = b_0 f(a) + b_0 - b_0 f(a) \in f(A).$$

Oleme näidanud, et hulga B mistahes element sisaldub hulgas $f(A)$ ehk $f(A) = B$. Järelikult on f epimorfism. $\square$

Kokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uuriti Segali topoloogilisi algebrad. Töös defineeriti algebrate Dorroh' laiendid ja punktiviisilised laiendid ning hiljem ka topoloogiliste algebrate vastavad laiendid. Edasi defineeriti Segali topoloogilised algebrad ja vaadeldi lihtsamaid näiteid neist struktuuridest. Töös tõestati, et olemasolevast STA-st saab konstrueerida uue STA, kui vaadelda esialgses STA-d moodustavas kolmikus (A, f, B) esinevate algebrate A ja B asemel nende Dorroh' või punktiviisilisi laiendeid. Selgus, et Dorroh' laiendeid vaadeldes rakendub kujutusele f ka üks kitsendus.

Segali topoloogiliste algebrate näol on tegu üldistusega struktuuridest, mida on juba omajagu uuritud. Seetõttu on käesoleva töö loogiliseks jätkuks leida tulemusi, mis on sõnastatud Segali Fréchet' algebrate või Segali C^* -algebrate kohta, kuid mille analoogilised väited kehtiksid ka STA-de kontekstis. Näiteks tasuks lähemalt uurida artiklis [5] sõnastatud tulemusi ja Jukka Kauppi teisi Segali C^* -algebrad käsitlevaid artikleid. Alternatiivselt võiks lähemalt uurida ka mõnda konkreetset Segali topoloogilist algebrat.

Kasutatud allikad

- [1] Mart Abel. *Structure of Gelfand-Mazur algebras*. **31**. Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis. Tartu University Press, Tartu, 2003.
- [2] Mart Abel. „Generalization of Segal algebras for arbitrary topological algebras“. *Period. Math. Hungar.* **77.1** (2018), lk. 58–68.
- [3] Ryszard Engelking. *General Topology*. Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann Verlag, 1989.
- [4] Albert Geoffrey Howson. *A Handbook of Terms used in Algebra and Analysis*. Cambridge University Press, 1972.
- [5] Jukka Kauppi ja Martin Mathieu. „ C^* -Segal algebras with order unit“. *J. Math. Anal. Appl.* **398.2** (2013), lk. 785–797.
- [6] Mati Kilp. *Algebra I*. 2. tr. Tartu: Eesti Matemaatika Selts, 2005.
- [7] H. Reiter. „Subalgebras of $L^1(G)$ “. *Indag. Math.* **27** (1965), lk. 691–696.
- [8] H. H. Schaefer ja M. P. Wolff. *Topological Vector Spaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1999.
- [9] Stephen Willard. *General topology*. Mineola, N.Y. : Dover Publications, 2004.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, René Piik,

- 1° annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Segali topoloogilised algebrad“, mille juhendaja on Mart Abel, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
- 2° Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
- 3° Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
- 4° Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

René Piik

14.05.2024