

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Rain Verrev
Monoidide algebraline K -teooria
Matemaatika
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Valdis Laan

TARTU 2026

MONOIDIDE ALGEBRALINE K -TEOORIA

Bakalaureusetöö

Rain Verrev

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uuritakse algebralist K -teooriat üldise monoidi S jaoks. Defineeritakse monoidi S puhul Abeli rühm $K_0(S)$ lõplikult moodustatud projektiivsete S -polügoonide abil ning tehakse kindlaks selle struktuur. Näidatakse, et eeltoodud definitsioon määrab funktori $K_0 : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ab}$ monoidide kategooriast Abeli rühmade kategooriasse. Tuuakse välja seos monoidide Morita teooriaga, nimelt Morita ekvivalentsetel monoididel on isomorfsed K_0 -rühmad.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: Algebra, monoid, polügoon, K -teooria.

THE ALGEBRAIC K -THEORY OF MONOIDS

Bachelor's thesis

Rain Verrev

Abstract

In this Bachelor's thesis, we consider the algebraic K -theory of monoids. We define for an arbitrary monoid S the abelian group $K_0(S)$ using finitely generated projective S -acts and determine its structure. We show that this definition gives us a functor $K_0 : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ab}$ from the category of monoids to the category of abelian groups. We provide a connection to the Morita theory of monoids, namely we prove that two Morita equivalent monoids have isomorphic K_0 -groups.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Key Words: Algebra, monoid, act, K -theory.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Põhimõisted	6
1.1 Monoidid ja polügoonid	6
1.2 Projektiivsed polügoonid	11
2 K_0 defineerimine monoidide puhul	16
2.1 S -polügoonide isomorfismiklassid	16
2.2 Vahede rühm	20
2.3 Rühm $K_0(S)$	23
3 Funktor K_0	30
4 K_0 ja Morita ekvivalentsus	37
Kokkuvõte	42

Sissejuhatus

Algebraline K -teooria on matemaatika valdkond, mis arenes välja 1950.-1970. aastatel lõplikult moodustatud projektiivsete moodulite uurimisest üle ühikelemendiga ringi. Nendest uurimustest selgus, et meil on võimalik seostada loomulikul viisil ringiga R Abeli rühm $K_i(R)$ iga $i \in \mathbb{N}_0$ puhul. Selliseid rühmi nimetatakse K -rühmadeks. Abeli rühmi $K_0(R)$ ja $K_1(R)$ on võimalik tõlgendada kui lineaaralgebrast tuntud invariantide üldistusi üldise ringi R juhule. Nimelt rühma $K_0(R)$ saab vaadelda kui vektorruumi mõõtmel üldistust ning rühma $K_1(R)$ kui determinandi üldistust. Selle teema kohta leidub kirjanduses palju sissejuhatavaid tekste (vt [12], [13], [17]).

Monoidide ja poolrühmade K -teooriat uuris esimest korda Song Guangtian, kes konstrueeris nullelemendiga monoidi S puhul rühmad $K_0(S)$ [3] ja $K_1(S)$ [4]. Lisaks on uuritud ortogonaalselt täielike inverssete poolrühmade K -teooriat [16], nullelemendiga osalise taandamisega monoidide K -teooriat [5], [2] ning monoidide K -teooria rakendusi $\mathbb{F}_1$ -geomeetrias [1].

Bakalaureusetöö eesmärk on defineerida üldise monoidi S korral Abeli rühm $K_0(S)$ ja uurida selle omadusi. Käesolevas töös tugineme teostes [14], [17] välja toodud konstruktsioonidele üldise sümmeetrilise monoidilise kategooria puhul. Me eeldame, et lugeja on tuttav rühmateooria ja kategooriateooria põhimõistetega. Polügoonidega seonduvad mõisted on toodud välja tekstis seal, kus neid läheb vaja.

Esimeses peatükis tutvustame monoidide ja polügoonidega seonduvaid põhimõisteid ning tõestame mõned projektiivsete polügoonide kohta vajaminevad tulemused.

Teises peatükis toome sisse polügoonide isomorfismiklassi mõiste ning defineerime monoidi struktuuri lõplikult moodustatud projektiivsete polügoonide

nide isomorfismiklasside hulgal. Järgnevalt tutvustame vahede rühma konstruktsiooni, mille abil defineerime Abeli rühma $K_0(S)$ monoidi S puhul. Põhitulemuseks tõestame, et $K_0(S)$ on vaba Abeli rühm, mille astak on võrdne idempotentide $\mathcal{D}$ -klasside hulga võimsusega, kus $\mathcal{D}$ on Greeni $\mathcal{D}$ -seos. Peatüki lõpetuseks toome mõningaid näiteid rühma $K_0(S)$ struktuurist konkreetsete monoidide korral.

Kolmandas peatükis tutvustame polügooni tensorkorrutise mõistet ja sellega seonduvaid tulemusi, mille abil tõestame, et eeskiri $S \mapsto K_0(S)$ määrab ära funktori $K_0 : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ab}$ monoidide kategooriast $\mathbf{Mon}$ Abeli rühmade kategooriasse $\mathbf{Ab}$.

Neljandas peatükis näitame, et „lõplikult moodustatus“ ja „tsüklilisus“ on kategoorised omadused. Selle tulemusega toome välja monoidide K -teooria seose Morita teooriaga, nimelt Morita ekvivalentsete monoidide S ja T puhul $K_0(S) \cong K_0(T)$.

1 Põhimõisted

Selles peatükis tutvustame käesoleva töö peamiseid uurimisobjekte, nimelt monoide ja polügoone, ning nendega seonduvaid mõisteid ja tulemusi. Väljatoodud definitsioonid on võetud emeriitprofessori Mati Kilbi raamatutest „Algebra I“ [7] ja „Algebra II“ [8].

1.1 Monoidid ja polügoonid

Definitsioon 1.1. Monoidiks nimetatakse hulka S koos sellel defineeritud kahekohalise assotsiatiivse algebralise tehete $S \times S \rightarrow S$, $(s, t) \mapsto st$, milles leidub ühikelement, mida tähistame sümboliga 1_S .

Definitsioon 1.2. Monoidi elementi $e \in S$ nimetatakse **idempotendiks** kui $e^2 = e$. Monoidi S kõigi idempotentide hulka tähistatakse $E(S)$.

Definitsioon 1.3. Olgu meil monoidi element $a \in S$. Tähistame

$$aS = \{as \mid s \in S\} \quad \text{ja} \quad Sa = \{sa \mid s \in S\}.$$

Defineerime monoidil S binaarsed seosed $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$ nõnda: mistahes elementide $a, b \in S$ korral

$$\begin{aligned} a \mathcal{L} b &\iff Sa = Sb, & a \mathcal{R} b &\iff aS = bS, \\ a \mathcal{H} b &\iff a \mathcal{L} b \wedge a \mathcal{R} b, & a \mathcal{D} b &\iff \exists c \in S (a \mathcal{L} c \wedge c \mathcal{R} b). \end{aligned}$$

Need seosed on ekvivalentsiseosed, mida nimetatakse **Greeni seosteks**. Nendele seostele vastavaid elementi $a \in S$ sisaldavaid ekvivalentsiklasse tähistame vastavalt L_a, R_a, H_a, D_a .

Definitsioon 1.4. Hulka A nimetatakse **parempoolseks polügooniks** üle monoidi S ehk **parempoolseks S -polügooniks** (tähistatakse A_S), kui on antud kujutus $A \times S \rightarrow A, (a, s) \mapsto a \cdot s$, nii, et iga $a \in A$ ja $s, t \in S$ korral

$$1. a \cdot (st) = (a \cdot s) \cdot t;$$

$$2. a \cdot 1_S = a.$$

Hulka A nimetatakse **vasakpoolseks S -polügooniks** (tähistatakse ${}_S A$), kui on antud kujutus $S \times A \rightarrow A, (s, a) \mapsto s \cdot a$, nii, et iga $a \in A$ ja $s, t \in S$ korral

$$1. (st) \cdot a = s \cdot (t \cdot a);$$

$$2. 1_S \cdot a = a.$$

Kujutusi $A \times S \rightarrow A$ ja $S \times A \rightarrow A$ nimetatakse **S -toimeteks** hulgal A . Kui ei ole ohtu segaduse tekkeks, siis tähistame toimet ilma punktita, s.t. kirjutame $a \cdot s$ asemel as .

Definitsioon 1.5. Olgu S, T monoidid. Hulka A nimetatakse **(S, T) -bipolügooniks** (tähistatakse ${}_S A_T$), kui ${}_S A$ on vasakpoolne S -polügoon, A_T on parempoolne T -polügoon ja kehtib järgmine tingimus:

$$\forall a \in A \forall s \in S \forall t \in T : (s \cdot a) \cdot t = s \cdot (a \cdot t).$$

Märkus 1.6. Käesolevas töös loeme tühja polügooni $A_S = \emptyset$ polügooniks, mida edaspidiselt tähistame $\mathbf{0}$.

Definitsioon 1.7. Alamhulka B nimetatakse polügooni A_S **alampolügooniks**, kui iga $b \in B$ ja $s \in S$ korral $b \cdot s \in B$.

Näide 1.8. Kui A_S on parempoolne S -polügoon, siis suvalise elemendi $a \in A$ puhul on alamhulk

$$aS := \{a \cdot s \mid s \in S\} \subseteq A$$

polügooni A_S alampolügoon loomuliku S -toimega.

Näide 1.9. Kui vaadata monoidi S kui parempoolset S -polügooni S_S , kus S -toime on defineeritud iga $a \in S_S$ ja $s \in S$ puhul kui $a \cdot s := as$, siis iga $a \in S_S$ puhul on aS parempoolne S -polügoon.

Näide 1.10. Olgu X suvaline mittetühi hulk ja $\mathcal{T}_X := \{f \mid f : X \rightarrow X\}$ kõikide hulga X teisenduste hulk. Siis $\mathcal{T}_X$ on monoid, kus elementide $f, g \in \mathcal{T}_X$ korrutis on defineeritud kui $fg := g \circ f$ ja ühikelemendiks on hulga X samasusteisendus id_X . Defineerime parempoolse $\mathcal{T}_X$ -toime hulgal X kui $x \cdot f := f(x)$. Siis iga $x \in X$ ja $f, g \in \mathcal{T}_X$ puhul kehtivad definitsiooni 1.4 tingimused 1. ja 2.:

$$\begin{aligned} (x \cdot f) \cdot g &= f(x) \cdot g = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x \cdot (fg), \\ x \cdot \text{id}_X &= \text{id}_X(x) = x. \end{aligned}$$

Antud $\mathcal{T}_X$ -toimega on $X_{\mathcal{T}_X}$ parempoolne $\mathcal{T}_X$ -polügoon.

Definitsioon 1.11. Kujutust $f : A_S \rightarrow B_S$ nimetatakse **parempoolsete polügoonide homomorfismiks**, kui ta säilitab monoidi S toimet, s.t.

$$f(a \cdot s) = f(a) \cdot s$$

iga $a \in A$ ja $s \in S$ korral. Analoogselt on defineeritud ka vasakpoolsete polügoonide homomorfism. **Isomorfism** on bijektiivne homomorfism. **Automorfism** on isomorfism $f : A_S \rightarrow A_S$ polügoonist iseendasse.

Definitsioon 1.12. Olgu I indeksite hulk. Parempoolsete S -polügoonide $A_i, i \in I$, **lõikumatuks ühendiks** nimetatakse polügooni $\bigsqcup_{i \in I} A_i$, mille hulgaks on hulkade A_i lõikumatu ühend

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} \{(i, a) \mid a \in A_i\}$$

ning mille parempoolne S -toime elemendil (i, a) on defineeritud nõnda:

$$(i, a) \cdot s := (i, as), \quad \forall s \in S.$$

Kahe polügooni A_S ja B_S lõikumatu ühendit tähistame $A_S \sqcup B_S$ ning polügooni A_S n -kordset lõikumatu ühendit iseendaga tähistame $\sqcup^n A_S$. Kui iga $i \in I$ korral $f_i : A_i \rightarrow A_S$ on polügoonide homomorfismid, siis on olemas kujutus

$$\bigsqcup_{i \in I} f_i : \bigsqcup_{i \in I} A_i \rightarrow A_S, \quad \left(\bigsqcup_{i \in I} f_i \right) (j, a) := f_j(a).$$

Lihtne on näha, et selline kujutus on samuti S -polügoonide homomorfism.

Definitsioon 1.13. Öeldakse, et parempoolne S -polügoon A_S on

- **tsükliline**, kui $A_S = aS$ mingi $a \in A$ korral;
- **lõplikult moodustatud**, kui $A_S = \mathbf{0}$ või kui leiduvad elemendid $a_1, \dots, a_n \in A$ nii, et $A_S = a_1S \cup \dots \cup a_nS$;
- **lahutumatu**, kui polügooni A_S ei saa esitada kahe mittetühja alampolügooni lõikumatu ühendina;
- **vaba**, kui polügoonil A_S leidub **baas** ehk hulk $X \subseteq A$ nii, et igit elementi $a \in A$ saab esitada üheselt kujul $a = x \cdot s$, kus $s \in S$ ja $x \in X$;

- **projektiivne**, kui iga sürjektiivse homomorfismi $\pi : B_S \rightarrow C_S$ ja iga homomorfismi $f : A_S \rightarrow C_S$ korral leidub homomorfism $g : A_S \rightarrow B_S$ nii, et $\pi g = f$, s.t. järgmine diagramm on kommutatiivne:

$$\begin{array}{ccc} & A_S & \\ \swarrow \exists g & \downarrow f & \\ B_S & \xrightarrow{\pi} & C_S \end{array}$$

Märkus 1.14. Märgime, et iga tsükliline polügoon on nii lõplikult moodustatud kui ka lahtumatu ning tühi polügoon $\mathbf{0}$ on projektiivne.

Toome veel sisse järgmised tähistused tähtsate polügoonide kategooriate jaoks. Me eeldame, et lugeja on tuttav kategooriateooria põhimõistetega: kategooria, objekt, morfism, kokorrutis, (täielik) alamkategooria, funktor ja kategooriate ekvivalentsus. Kategooriateooriaga seonduvaid mõisteid võib leida raamatust [8]. Käesolevas töös kasutame tähist $C \in \mathcal{C}$, et märkida, et C on kategooria $\mathcal{C}$ objekt.

Definitsioon 1.15. Olgu S monoid. Käesolevas töös kasutame järgmisi tähistusi:

- Act_S — kõigi parempoolsete polügoonide kategooria üle monoidi S ;
- Fgp_S — Act_S täielik alamkategooria, mille objektideks on lõplikult moodustatud projektiivsed polügoonid;
- Cp_S — Fgp_S täielik alamkategooria, mille objektideks on tsüklilised projektiivsed polügoonid.

Analoogselt tähistame vastavaid vasakpoolsete polügoonide ja bipolügoonide kategooriaid. Väljatoodud kategooriates leiduvad kõik kokorrutised, milleks on polügoonide lõikumatu ühend.

1.2 Projektiivsed polügoonid

Käesolevas töös käsitleme peamiselt lõplikult moodustatud projektiivseid polügoone. Üheks põhjuseks on see, et nad käituvad hästi lõikumate ühendite suhtes. Selle tõttu tulevad järgmised tulemused kasuks nende struktuuri kirjeldamisel.

Lause 1.16 ([9, teoreem I.5.10]). *Mistahes polügooni on võimalik üheselt esitada lahutumatute alampolügoonide lõikumatu ühendina.*

Teoreem 1.17 ([10, lause 3.3]). *Mittetühi polügoon P_S on projektiivne parajasti siis, kui leidub mittetühi hulk I ja leiduvad idempotendid $e_i \in E(S)$, $i \in I$, nii et $P_S \cong \bigsqcup_{i \in I} e_i S$.*

Järeldus 1.18. *Kui P_S, Q_S on projektiivsed polügoonid, siis on ka $P_S \sqcup Q_S$ projektiivne polügoon.*

Järeldus 1.19. *Mittetühi polügoon P_S on lõplikult moodustatud ja projektiivne parajasti siis, kui leidub $n \in \mathbb{N}$ ja idempotendid $e_1, \dots, e_n \in E(S)$ nii, et $P_S \cong \bigsqcup_{i=1}^n e_i S$.*

Tõestus. TARVILIKKUS. Kuna P_S on projektiivne, siis teoreemi 1.17 põhjal $P_S \cong \bigsqcup_{i \in I} e_i S$, kus I on mittetühi hulk ja $e_i, i \in I$ on idempotendid. Üldisust kitsendamata eeldame, et $P_S = \bigsqcup_{i \in I} e_i S$. Et P_S on lõplikult moodustatud, siis leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $a_1, \dots, a_n \in P$ nii, et $P_S = \bigcup_{j=1}^n a_j S$. Siis iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral leidub indeks $i_j \in I$ nii, et $a_j \in e_{i_j} S$ ja seega $a_j S \subseteq e_{i_j} S$. Nüüd

$$P \subseteq \bigsqcup_{j=1}^n e_{i_j} S \subseteq \bigsqcup_{i \in I} e_i S = P \implies P = \bigsqcup_{j=1}^n e_{i_j} S.$$

PHISAVUS. See järeldub teoreemist 1.17. □

Järeldus 1.20. *Mittetühi polügoon P_S on tsükliline ja projektiivne parajasti siis, kui $P_S \cong eS$ mingi idempotendi $e \in E(S)$ puhul.*

Järgnevas lemmas näitame, et järelduses 1.19 saadud esitus on ühene kuni järjekorra ja komponentide isomorfismi täpsuseni.

Lemma 1.21. *Kui $A_S = \bigsqcup_{i=1}^n e_i S$ ja $B_S = \bigsqcup_{j=1}^m f_j S$ on lõplikult moodustatud projektiivsed polügoonid ja $A_S \cong B_S$, siis $m = n$ ja leidub substitutsioon $\sigma \in S_n$ nii, et $e_i S \cong f_{\sigma(i)} S$ iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral.*

Tõestus. Olgu $\phi : A_S \rightarrow B_S$ isomorfism ja oletame vastuväiteliselt, et $m \neq n$. Eeldame üldisust kitsendamata, et $n > m$. Siis ϕ peab kujutama elemendi $e_1 \in e_1 S \subseteq A_S$ ühte polügooni B_S komponenti $f_j S$. Kuna ϕ on polügoonide homomorfism, siis iga $s \in S$ korral

$$\phi(e_1 s) = \phi(e_1 \cdot s) = \phi(e_1) \cdot s \in f_j S$$

ehk ϕ kujutab alampolügooni $e_1 S$ alampolügooni $f_j S$.

Nüüd näitame, et ϕ ei saa kujutada ühtegi teise alampolügooni elementi komponenti $f_j S$. Selleks oletame vastuväiteliselt, et leidub teine polügooni A_S element $a = e_i s \in e_i S$, kus $i \neq 1$, nii, et $\phi(a) \in f_j S$. Siis $\phi(e_i) \in f_j S$, kuna

$$\phi(a) = \phi(e_i s) = \phi(e_i \cdot s) = \phi(e_i) \cdot s \in f_j S,$$

ning väitest $\phi(e_i) \notin f_j S$ järelduks, et $\phi(a) \notin f_j S$. Sellest saame, et leiduvad sellised $s_1, s_i \in S$, et $\phi(e_1) = f_j s_1$, $\phi(e_i) = f_j s_i$, millest järeldub

$$\begin{aligned} e_1 &= \phi^{-1}(\phi(e_1)) = \phi^{-1}(f_j s_1) = \phi^{-1}(f_j \cdot s_1) = \phi^{-1}(f_j) \cdot s_1, \\ e_i &= \phi^{-1}(\phi(e_i)) = \phi^{-1}(f_j s_i) = \phi^{-1}(f_j \cdot s_i) = \phi^{-1}(f_j) \cdot s_i \end{aligned}$$

ehk e_1, e_i kuuluvad samasse A_S alampolügooni, mis on vastuolu.

Seetõttu on $e_1 S \cong f_j S$, millest saame järeldada, et kui kitsendada isomorfismi ϕ polügoonile

$$A_S \setminus e_1 S := \bigsqcup_{i=2}^n e_i S = e_2 S \sqcup \cdots \sqcup e_n S,$$

siis me saame isomorfismi

$$\bigsqcup_{i=2}^n e_i S \cong \bigsqcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m f_i S$$

ehk

$$e_2 S \sqcup \cdots \sqcup e_n S \cong f_1 S \sqcup \cdots \sqcup f_{j-1} S \sqcup f_{j+1} S \cdots \sqcup f_m S.$$

Rakendades seda argumenti induktiivselt jõuame isomorfismini

$$\bigsqcup_{i=n-m}^n e_i S \cong \mathbf{0},$$

mis on vastuolu. Selle tõttu peab $n = m$ ning igale alampolügoonile $e_i S \subseteq A_S$ saab seada vastavusse mingi temaga isomorfse alampolügooni $f_j S \subseteq B_S$. $\square$

Järeldus 1.22. *Olgu*

$$A_S = \bigsqcup_{i=1}^n \sqcup^{k_i} e_i S, \quad B_S = \bigsqcup_{j=1}^m \sqcup^{l_j} f_j S, \quad k_i, l_j \in \mathbb{N}, \quad e_i, f_j \in E(S)$$

lõplikult moodustatud projektiivsed polügoonid, kus polügoonid $e_1 S, \dots, e_n S$ on paarikaupa mitteisomorfsed ja samuti ka polügoonid $f_1 S, \dots, f_m S$. Kui $A_S \cong B_S$, siis $m = n$ ning leidub substitutsioon $\sigma \in S_n$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $k_i = l_{\sigma(i)}$ ja $e_i S \cong f_{\sigma(i)} S$.

Tõestus. Selle järelduse tõestus on analoogne lemma 1.21 tõestusega. $\square$

Järgnev lemma annab meile piisava ja tarviliku tingimuse tsükliliste projektiivsete polügoonide isomorfsuseks.

Lemma 1.23. *Olgu eS ja $e'S$, kus $e, e' \in E(S)$, tsüklilised projektiivsed polügoonid. Siis eS ja $e'S$ on isomorfsed parajasti siis, kui leiduvad $x, y \in S$ nii, et $e = xy$ ja $e' = yx$.*

Tõestus. TARVILIKUS: Eeldusest, et leiduvad $x, y \in S$ nii, et $e = xy$ ja $e' = yx$, saame järeldada, et

$$eS = xyS = \{xys \mid s \in S\}, \quad e'S = yxS = \{yx s \mid s \in S\}.$$

Seega kujutus

$$f : eS \rightarrow e'S, \quad es \mapsto e'ys$$

on korrektselt defineeritud, kuna iga $s, t \in S$ puhul kehtib

$$\begin{aligned} es = et &\implies xys = xyt \\ &\implies yxys = yxyt \\ &\implies e'ys = e'yt \\ &\implies f(es) = f(et). \end{aligned}$$

Funktsioon f on parempoolsete S -polügoonide homomorfism, kuna iga elemendi $a = es \in eS$ ja $s, s' \in S$ korral kehtib

$$f(a \cdot s') = f((es)s') = f(e(ss')) = e'y(ss') = (e'ys)s' = f(es) \cdot s' = f(a) \cdot s'.$$

Analoogselt saame vaadata homomorfismi

$$g : e'S \rightarrow eS, \quad e's \mapsto exs.$$

Eeldusest, et e' on idempotent, näeme, et iga $s \in S$ korral

$$f(g(e's)) = f(eks) = f(e(xs)) = e'y(xs) = e'(yx)s = e'e's = e's.$$

Analoogselt $g(f(es)) = es$, seega homomorfismile f leidub pöördfunktsioon g . Järeldame, et f on isomorfism ja $eS \cong e'S$.

PIISAVUS: Eelduse tõttu, et eS ja $e'S$ on isomorfsed, peab leiduma isomorfism $f : eS \rightarrow e'S$. Olgu $e \in eS$ ja $e' \in e'S$ puhul vastavalt

$$x = f^{-1}(e') \in eS, \quad y = f(e) \in e'S.$$

Kuna e ja e' idempotendid, siis sellest järeldub, et $x = ex$ ja $y = e'y$. Seega

$$\begin{aligned} e &= f^{-1}(f(e)) = f^{-1}(y) = f^{-1}(e'y) = f^{-1}(e')y = xy, \\ e' &= f(f^{-1}(e')) = f(x) = f(ex) = f(e)x = yx \end{aligned}$$

nagu vaja. □

Märkus 1.24. Viimane väide lemma 1.23 sõnastuses on samaväärne sellega, et $e \mathcal{D} e'$, kus $\mathcal{D}$ on Greeni $\mathcal{D}$ -seos (vt. [6, lause 2.3.5]).

2 K_0 defineerimine monoidide puhul

Selles peatükis uurime S -polügoonide isomorfismiklasse ning defineerime nendel monoidi struktuuri. Järgnevalt tutvustame vahede rühma konstruktsiooni, mille abil defineerime rühma $K_0(S)$ monoidi S puhul. Käesolevas töös välja toodud konstruktsioon põhineb teostel [14] ja [17] ning on üldistus Song Guangtiani artiklis [3] olevast konstruktsioonist.

2.1 S -polügoonide isomorfismiklassid

Olgu S monoid, $A, B, C \in \text{Act}_S$ ja $\mathbf{0}$ tühi polügoon. Kahe S -polügooni lõikumatu ühendit saab loomulikul viisil vaadelda S -polügoonina. Meil on teada, et polügoonide lõikumatu ühendi puhul kehtivad järgmised omadused:

$$(A \sqcup B) \sqcup C \cong A \sqcup (B \sqcup C), \quad (2.1)$$

$$A \sqcup \mathbf{0} \cong A \cong \mathbf{0} \sqcup A, \quad (2.2)$$

$$A \sqcup B \cong B \sqcup A. \quad (2.3)$$

Antud isomorfismid sarnanevad seostele, mis defineerivad kommutatiivse monoidi. Et saada ülaltoodud isomorfismidest võrdused, tuleb meil vaadata polügoonide ekvivalentsiklasse isomorfismi suhtes.

Olgu $c(A)$ polügooni A ekvivalentsiklass ekvivalentsiseose $\cong$ suhtes. Ekvivalentsiklassi definitsioonist järeldub, et

$$c(A) = c(B) \text{ parajasti siis, kui } A \cong B.$$

Samuti saab veenduda, et kui $A \cong A'$ ja $B \cong B'$, siis $A \sqcup B \cong A' \sqcup B'$.

Nende teadmistega saame defineerida tehte $\boxplus$ ekvivalentsiklasside vahel võrdusega

$$c(A) \boxplus c(B) := c(A \sqcup B), \quad (2.4)$$

mis on korrektselt defineeritud. Seda tehet nimetame ekvivalentsiklasside liitmiseks. Kui on vaja tähistada ekvivalentsiklasside $c(A_1), \dots, c(A_n)$ summat, siis kasutame tähist

$$\bigsqcup_{i=1}^n c(A_i) := c(A_1) \boxplus \dots \boxplus c(A_n).$$

Erijuhul, kui kõik liidetavad summas on võrdsed mingi elemendiga $c(A)$, kasutame tähist $nc(A)$. Juhul, kui $n = 0$, tekib meil tühi summa, mille väärtuseks loeme $c(\mathbf{0})$.

Veel peab monoidi konstrueerimisel veenduma, et kõik isomorfismiklassid moodustavad hulga. Üldiselt see väide ei kehti näiteks kõikide parempoolsete S -polügoonide klassi $\text{Ob}(\text{Act}_S)$ puhul. Kuid on olemas polügoonide klasse, mille isomorfismiklassid moodustavad hulga.

Lemma 2.1. *Kõikide lõplikult moodustatud projektiivsete polügoonide isomorfismiklasside kogum $\mathcal{I}(\text{Fgp}_S)$ moodustab hulga, mis on kommutatiivne monoid tehtega $\boxplus$.*

Tõestus. Näitame, et $\mathcal{I}(\text{Fgp}_S)$ moodustab hulga. Olgu $E(S)$ monoidi S kõigi idempotentide hulk. Siis igale lõplikult moodustatud projektiivsele polügoonile P_S vastab kujutus $\kappa_P : E(S) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($\kappa_P(e)$ ütleb mitu polügooniga eS isomorfset lahutumatut komponenti polügoonis P_S on). Kui $P \not\cong Q$, siis lemma 1.21 tõttu $\kappa_P \neq \kappa_Q$. Seega isomorfismiklasside klassi saab sisestada kujutuste hulka $(\mathbb{N} \cup \{0\})^{E(S)}$ kujutuse $c(P) \mapsto \kappa_P$ abil. Järelikult isomorfismiklassid moodustavad hulga.

Kui P_S, Q_S on lõplikult moodustatud projektiivsed polügoonid, siis $P_S \sqcup Q_S$ on ka lõplikult moodustatud projektiivne polügoon järelduse 1.18 tõttu. Seega hulk $\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$ on võrdusega (2.4) defineeritud tehte $\boxplus$ suhtes kinnine. Tänu omadustele (2.1) ja (2.3) on see tehe ka assotsiatiivne ja kommutatiivne. Märkuse 1.14 tõttu $\mathbf{0} \in \mathbf{Fgp}_S$, mistõttu $c(\mathbf{0}) \in \mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$ ja omaduse (2.2) tõttu kehtib

$$c(\mathbf{0}) \boxplus c(A) = c(A) = c(A) \boxplus c(\mathbf{0}).$$

Saame, et $\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$ on monoid $\boxplus$ tehte suhtes, mille ühikelemendiks on $c(\mathbf{0})$.

□

Kommutatiivsel monoidil $(\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S), \boxplus)$ on veel lisaks häid omadusi, mis tulevad meile hiljem kasuks.

Lause 2.2. *Monoid $\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$ on vaba kommutatiivne monoid baasiga $B = \{c(eS) \mid e \in E(S)\}$, s.t. et iga element $c(P) \in \mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$, $c(P) \neq c(\mathbf{0})$, esitub üheselt kujul*

$$c(P) = \bigoplus_{i=1}^n k_i c(e_i S),$$

kus $n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ ja $c(e_1 S), \dots, c(e_n S) \in B$ on paarikaupa erinevad baasi elemendid.

Tõestus. Näitame, et igat elementi monoidis $\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$ on võimalik esitada nõutud kujul. Olgu $c(P) \in \mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$, $c(P) \neq c(\mathbf{0})$. Siis järelduse 1.19 ja võrduse 2.4 tõttu esitub element $c(P)$ nõnda:

$$c(P) = c\left(\bigsqcup_{i=1}^N e_i S\right) = \bigoplus_{i=1}^N c(e_i S).$$

Võrdsed liidetavad kokku rühmitades saamegi tahetud esituse.

Nüüd näitame, et antud esitus on üheselt määratud. Eeldame, et eeltoodud elementi $c(P)$ saab esitada veel kujul

$$c(P) = \bigsqcup_{j=1}^m l_j c(f_j S),$$

kus $l_j \in \mathbb{N}$, $c(f_j S) \in B$ on paarikaupa erinevad baasi elemendid ja $j \in \{1, \dots, m\}$. Siis kehtib võrdus

$$\bigsqcup_{i=1}^n k_i c(e_i S) = \bigsqcup_{j=1}^m l_j c(f_j S)$$

ning rakendades võrdust (2.4) saame

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i=1}^n c(\sqcup^{k_i} e_i S) &= \bigsqcup_{j=1}^m c(\sqcup^{l_j} f_j S) \implies c\left(\bigsqcup_{i=1}^n \sqcup^{k_i} e_i S\right) = c\left(\bigsqcup_{j=1}^m \sqcup^{l_j} f_j S\right) \\ &\implies \bigsqcup_{i=1}^n \sqcup^{k_i} e_i S \cong \bigsqcup_{j=1}^m \sqcup^{l_j} f_j S. \end{aligned}$$

Järeldusest 1.22 saame, et $m = n$, iga $c(e_i S)$ on võrdne täpselt ühe baasi elemendiga $c(f_j S)$ ning võrdsete baasi elementide kordajad on võrdsed, mida oligi vaja näidata. $\square$

Lause 2.3. *Monoid $\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$ on taandamisega monoid, s.t. kehtib implikatsioon*

$$c(P) \boxplus c(R) = c(Q) \boxplus c(R) \implies c(P) = c(Q)$$

iga $P, Q, R \in \mathbf{Fgp}_S$ puhul.

Tõestus. Järgnev tõestus on võetud raamatust [12, lause I.3.19]. Lauset 2.2 saab sõnastada järgneval viisil: iga elemendi $c(P) \in \mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$ puhul leidub

üheselt määratud funktsioon $f_P : B \rightarrow \mathbb{N}_0$, mis on ainult lõpliku arvul baasi elementidel nullist erinev, nii et

$$c(P) = \bigsqcup_{b \in B} f_P(b)b.$$

Seega kui $c(P) \boxplus c(R) = c(Q) \boxplus c(R)$, siis $c(P \sqcup R) = c(Q \sqcup R)$ ning iga baasi elemendi $b \in B$ puhul kehtib

$$f_P(b) + f_R(b) = f_{P \sqcup R}(b) = f_{Q \sqcup R}(b) = f_Q(b) + f_R(b).$$

Kuna naturaalarvude liitmine on taandamise omadusega, siis $f_P(b) = f_Q(b)$ iga $b \in B$ korral ning järelikult $c(P) = c(Q)$. $\square$

2.2 Vahede rühm

Siin me anname konstruktsiooni, kuidas meil on võimalik moodustada kommutatiivsest monoidist Abeli rühma. Seda konstruktsiooni rakendame rühma $K_0(S)$ defineerimisel monoidi S puhul. Järgmine definitsioon on võetud Charles A. Weibeli õpikust „*The K-Book*“ [17].

Definitsioon 2.4. Kommutatiivse monoidi M **vahede rühm** ehk **Grothendiecki rühm** on Abeli rühm $\hat{M}$ koos monoidide homomorfismiga

$$[_] : M \rightarrow \hat{M}, \quad m \mapsto [m],$$

mis rahuldab järgmist universaalomadust: iga Abeli rühma A ja monoidide homomorfismi $\alpha : M \rightarrow A$ korral leidub üheselt määratud Abeli rühmade

homomorfism $\hat{\alpha} : \hat{M} \rightarrow A$ nii, et diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{[\]} & \hat{M} \\ & \searrow \alpha & \downarrow \hat{\alpha} \\ & & A \end{array}$$

on kommutatiivne ehk iga $m \in M$ puhul $\hat{\alpha}([m]) = \alpha(m)$.

Tuleb välja, et iga kommutatiivse monoidi M puhul leidub vahede rühm $\hat{M}$. Vahede rühma esituseks läheb meil vaja vaba Abeli rühma mõistet. Vabade Abeli rühmade kohta saab lugeda lähemalt raamatust [8] või loengukonspektist [15]. Me eeldame, et rühmateooria põhimõisted on lugejale tuttavad.

Definitsioon 2.5. Olgu X Abeli rühma $(A, +)$ alamhulk ja $k_1, \dots, k_n$ täisarvud. Avaldist

$$k_1 a_1 + \dots + k_n a_n, \quad a_1, \dots, a_n \in X$$

nimetatakse elementide $a_1, \dots, a_n$ **lineaarkombinatsiooniks**. Abeli rühma alamhulka X nimetatakse **moodustajate süsteemiks** kui iga element Abeli rühmast A esitub lineaarkombinatsioonina elementidest hulgast X . Abeli rühma alamhulka X nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks** kui suvaliste elementide $a_1, \dots, a_n \in X$ puhul kehtib implikatsioon

$$k_1 a_1 + \dots + k_n a_n = 0 \implies k_1 = \dots = k_n = 0.$$

Definitsioon 2.6. Abeli rühma A **baasiks** nimetatakse tema lineaarselt sõltumatut moodustajate süsteemi X . Abeli rühma nimetatakse **vabaks**, kui temas leidub baas. Kui meil on antud hulk X , siis leidub vaba Abeli rühm, mille baasi võimusus on $|X|$. Seda rühma tähistame sümboliga $F(X)$ ning see rühm on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud. Iga selline rühm on

isomorfne rühmaga $\bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}$, kus liitmine on defineeritud komponenthaaval (vt [7, Teoreem III.1.3]). Kui X on lõplik, siis $F(X) \cong \mathbb{Z}^{|X|}$. Vaba Abeli rühma baasi võimsust nimetatakse **astakuks**.

Märkus 2.7. Olgu meil vaba Abeli rühm $F(X)$ baasiga X ning injektiivne hulkade kujutus $\iota : X \rightarrow F(X)$. Siis vaba Abeli rühm rahuldab järgmist universaalomadust: iga Abeli rühma A ja iga hulkade kujutuse $\alpha : X \rightarrow A$ jaoks leidub üheselt määratud rühmade homomorfism $\beta : F(X) \rightarrow A$ nii, et $\beta \circ \iota = \alpha$, s.t. diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & F(X) \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta \\ & & A \end{array}$$

on kommutatiivne. Antud universaalomaduse tõttu on homomorfism vabast Abeli rühmast $F(X)$ üheselt määratud baasi X kujutise poolt.

Konstruksioon 2.8. Olgu M kommutatiivne monoid tehtega $+$. Moodustame vaba Abeli rühma $F(M)$, mille baasiks on formaalsed sümbolid $\overline{m}$, kus $m \in M$. Siis defineerime Abeli rühma $\hat{M}$ kui faktorrühma

$$\hat{M} := F(M)/R(M),$$

kus $R(M)$ on Abeli rühma $F(M)$ alamrühm, mis on moodustatud elementide poolt kujul $\overline{m} + \overline{n} - \overline{m} - \overline{n}$, kus $m, n \in M$. Vastava monoidide homomorfismi $[_] : M \rightarrow \hat{M}$ saame kujutades elemendi $m \in M$ faktorrühma kõrvalklassiks $\overline{m} + R(M) \in \hat{M}$, mida me tähistame edaspidi $[m]$.

Saadud Abeli rühm $\hat{M}$ rahuldab definitsiooni 2.4 ning antud konstruktsiooniga on võimalik ka tõestada järgnev lause, mida me käesolevas töös ei tee.

Lause 2.9. Olgu M kommutatiivne monoid. Siis

- a) rühma $\hat{M}$ iga element on kujul $[m] - [n]$ mingite $m, n \in M$ puhul,
- b) kui $m, n \in M$, siis $[m] = [n]$ parajasti siis, kui leidub $p \in M$ nii, et $m + p = n + p$,
- c) kujutus $M \rightarrow \hat{M}$, $m \mapsto [m]$ on injektiivne parajasti siis, kui M on taandamisega monoid.

Tõestus. Vt [17], lause II.1.1 ja järeldus II.1.3. □

Näide 2.10. Siin on toodud välja paar piltlikku näidet kommutatiivse monoidi M vahede rühmast $\hat{M}$.

- Kui $M = (\mathbb{N}_0, +)$, siis $\hat{M} \cong (\mathbb{Z}, +)$.
- Kui $M = (\mathbb{N}, \cdot)$, siis $\hat{M} \cong (\mathbb{Q}^+, \cdot)$.

2.3 Rühm $K_0(S)$

Nüüd oleme valmis defineerima üldise monoidi S puhul nullinda K -rühma.

Definitsioon 2.11. Monoidi S nullindaks K -rühmaks nimetatakse Abeli rühma

$$K_0(S) = \widehat{\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)}$$

ehk lõplikult moodustatud projektiivsete polügoonide ekvivalentsiklasside monoidi $\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$ vahede rühma. Selle Abeli rühma tehet tähistame sümboliga $+$.

Selle Abeli rühma ühikelement on $[c(\mathbf{0})]$ ja üks võimalik moodustajate süsteem koosneb elementidest kujul $[c(P_S)]$, kus $c(P_S) \in \mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$, mis rahuldavad seost

$$[c(P_S)] + [c(Q_S)] = [c(P_S) \boxplus c(Q_S)] = [c(P_S \sqcup Q_S)]. \quad (2.5)$$

Lause 2.9 (a) põhjal saame esitada Abeli rühma $K_0(S)$ kui

$$K_0(S) = \{[c(P_S)] - [c(Q_S)] \mid P_S, Q_S \in \mathbf{Fgp}_S\},$$

kus elementide $[c(P)] - [c(Q)]$ ja $[c(U)] - [c(V)]$ liitmine toimub nõnda:

$$\begin{aligned} ([c(P)] - [c(Q)]) + ([c(U)] - [c(V)]) &= ([c(P)] + [c(U)]) - ([c(Q)] + [c(V)]) \\ &= [c(P \sqcup U)] - [c(Q \sqcup V)]. \end{aligned}$$

Selgub, et rühma $K_0(S)$ element ei sõltu isomorfismiklassi $c(P_S)$ esindajast.

Lause 2.12. Iga $A, B \in \mathbf{Fgp}_S$ puhul kehtib, et $[c(A)] = [c(B)]$ parajasti siis, kui $A \cong B$.

Tõestus. PIISAVUS. Kui $A \cong B$, siis $c(A) = c(B)$ ning vahede rühma definitsioonist saame, et $[c(A)] = [c(B)]$.

TARVILIKKUS. Eeldame, et $[c(A)] = [c(B)]$. Siis lause 2.9 (b) tõttu leidub $P \in \mathbf{Fgp}_S$, et $c(A) \boxplus c(P) = c(B) \boxplus c(P)$. Kuna monoid $\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$ on taandamisega (lause 2.3), siis $c(A) = c(B)$ ehk $A \cong B$. $\square$

Tulenevalt eelnevast lausest kasutame lühemat tähist $[P_S]$, et tähistada isomorfismiklassile $c(P_S)$ vastavat elementi rühmas $K_0(S)$. Sellise tähistuse kor-

ral kehtib iga $P_S, Q_S \in \mathbf{Fgp}_S$ puhul, et

$$[P_S] = [Q_S] \iff P_S \cong Q_S \quad \text{ja} \quad [P_S] + [Q_S] = [P_S \sqcup Q_S]. \quad (2.6)$$

Eeltoodud tulemuste abil saame näidata, et rühma $K_0(S)$ struktuur sõltub monoidi idempotentidest kuni Greeni $\mathcal{D}$ -seose täpsuseni.

Teoreem 2.13. *Rühm $K_0(S)$ on vaba Abeli rühm, mille baas X koosneb elementidest kujul $[eS]$, kus $e \in E(S)$, kusjuures selle rühma astak on $|E(S)/\mathcal{D}|$, kus $E(S)/\mathcal{D}$ on idempotentide $\mathcal{D}$ -klassidest koosnev hulk*

$$E(S)/\mathcal{D} = \{D_e \mid e \in E(S)\}.$$

Tõestus. Teoreemi tõestamiseks peame näitama, et hulk

$$X = \{[eS] \in K_0(S) \mid e \in E(S)\}$$

on baas ehk lineaarselt sõltumatu moodustajate süsteem.

Esmalt näitame, et X on moodustajate süsteem. Selleks piisab näidata, et iga element kujul $[P_S]$, kus $P_S \in \mathbf{Fgp}_S$, $P_S \neq \mathbf{0}$, on esitatav kui hulga X elementide lineaarkombinatsioon, kuna lause 2.9 (a) tõttu esitub iga rühma $K_0(S)$ element kujul $[P_S] - [Q_S]$, kus $P_S, Q_S \in \mathbf{Fgp}_S$.

Järeldusest 1.19 saame, et suvalise mittetühja polügooni $P_S \in \mathbf{Fgp}_S$ puhul kehtib isomorfism

$$P_S \cong \bigsqcup_{i=1}^n e_i S,$$

kus $e_1, \dots, e_n \in E(S)$ ja $n \in \mathbb{N}$. Rakendades seost (2.5) saame, et rühmas

$K_0(S)$ kehtib võrdus

$$[P_S] = \left[\bigsqcup_{i=1}^n e_i S \right] = \sum_{i=1}^n [e_i S]$$

ehk $[P_S]$ esitub hulga X elementide lineaarkombinatsioonina.

Nüüd näitame, et hulk X on lineaarselt sõltumatu. Oletame vastuväiteliselt, et meil on nulliga võrduv mittetriviaalne lineaarkombinatsioon

$$k_1[e_1 S] + \cdots + k_n[e_n S] = \sum_{i=1}^n k_i[e_i S] = [\mathbf{0}], \quad (*)$$

kus $k_1, \dots, k_n$ on täisarvud ja $[e_1 S], \dots, [e_n S]$ on paarikaupa erinevad elemendid hulgast X . Üldisust kitsendamata võime sellest lineaarkombinatsioonist välja jätta kõik liidetavad, kus $k_i = 0$. Kui oletame, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $k_i > 0$, siis saame, et

$$[\mathbf{0}] = \sum_{i=1}^n k_i[e_i S] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} [e_i S] = \sum_{i=1}^n [\sqcup^{k_i} e_i S] = \left[\bigsqcup_{i=1}^n \sqcup^{k_i} e_i S \right].$$

Seose (2.6) tõttu saame isomorfismi

$$\bigsqcup_{i=1}^n \sqcup^{k_i} e_i S \cong \mathbf{0},$$

mis on vastuolu, kuna $\bigsqcup_{i=1}^n \sqcup^{k_i} e_i S$ ei ole tühi. Juhul, kui iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $k_i < 0$, saame taandada eelnevalt vaadatud juhule viies liidetavad võrduse (*) teisele poole ja analoogselt järeldada vastuolu.

Nüüd vaatame juhtu, kus osa kordajaid on positiivsed ja osa on negatiivsed. Üldisust kitsendamata eeldame, et leidub naturaalarv l nii, et $1 \leq l < n$, $k_i > 0$ kui $i \leq l$ ja $k_i < 0$ kui $i > l$. Siis eeltoodud lineaarkombinatsiooni

saame esitada kujul

$$\sum_{i=1}^n k_i[e_i S] = \sum_{i=1}^l k_i[e_i S] + \sum_{j=l+1}^n k_j[e_j S] = \sum_{i=1}^l k_i[e_i S] - \sum_{j=l+1}^n (-k_j)[e_j S],$$

millest järeldub võrdus

$$\sum_{i=1}^l k_i[e_i S] = \sum_{j=l+1}^n (-k_j)[e_j S].$$

Kuna $-k_j > 0$ iga $j > l$ puhul, siis saame

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l k_i[e_i S] = \sum_{j=l+1}^n (-k_j)[e_j S] &\implies \sum_{i=1}^l [\sqcup^{k_i} e_i S] = \sum_{j=l+1}^n [\sqcup^{-k_j} e_j S] \\ &\implies \left[\bigsqcup_{i=1}^l \sqcup^{k_i} e_i S \right] = \left[\bigsqcup_{j=l+1}^n \sqcup^{-k_j} e_j S \right] \\ &\implies \bigsqcup_{i=1}^l \sqcup^{k_i} e_i S \cong \bigsqcup_{j=l+1}^n \sqcup^{-k_j} e_j S \quad (2.6) \end{aligned}$$

Lemma 1.21 tõttu leidub isomorfism $e_i S \cong e_j S$ mingi $i \leq l$ ja $j > l$ puhul. Sellest aga järeldub lause 2.12 tõttu, et $[e_i S] = [e_j S]$, mis on vastuolus eeldusega, et $[e_1 S], \dots, [e_n S]$ on paarikaupa erinevad elemendid. Sellega saamegi, et kordajate $k_1, \dots, k_n$ väärtused peavad olema 0, mida oligi vaja näidata.

Et näidata, et rühma $K_0(S)$ astak on võrdne hulga $E(S)/\mathcal{D}$ võimsusega, defineerime kujutuse

$$q : X \rightarrow E(S)/\mathcal{D}, \quad q([eS]) := D_e,$$

kus D_e on idempotendi e ekvivalentsiklass monoidis S Greeni $\mathcal{D}$ -seose järgi. Kujutus on korrektselt defineeritud ja injektiivne, kuna mistahes idempoten-

tide e, e' puhul kehtivad järgnevad samaväärsused:

$$\begin{aligned}
[eS] = [e'S] &\iff eS \cong e'S && \text{(lause 2.12)} \\
&\iff e\mathcal{D}e' && \text{(lause 1.23 ja märkus 1.24)} \\
&\iff D_e = D_{e'} && \text{(ekvivalentsiklassi def.)} \\
&\iff q([eS]) = q([e'S]) . && (q \text{ def.})
\end{aligned}$$

Kujutus q on sürjektiivne, kuna ekvivalentsiklassi D_e puhul kujutub element $[eS] \in X$ antud klassiks, kus e on klassi D_e esindaja. Selle tõttu on kujutus q bijektsioon ning hulgad X ja $E(S)/\mathcal{D}$ on sama võimsusega. $\square$

Peatüki lõpetuseks toome paar näidet, kuidas teoreemi 2.13 abil saab määrata rühma $K_0(S)$ monoidi S puhul.

Näide 2.14. Kui monoidi S puhul $E(S) = \{1_S\}$, siis $E(S)/\mathcal{D} = \{D_{1_S}\}$ ning $K_0(S) \cong \mathbb{Z}$. Antud isomorfism väljendab fakti, et kui monoidi S ainuke idempotent on ühikelement, siis iga projektiivne polügoon on vaba. Erijuht sellest on kui S on rühm.

Näide 2.15. Olgu S kommutatiivne monoid ja idempotendid $e, e' \in E(S)$. Märkuse 1.24 tõttu kehtib $e\mathcal{D}e'$ parajasti siis, kui leiduvad $x, y \in S$ nii, et $e = xy$ ja $e' = yx$. Kuna S on kommutatiivne, siis $e = xy = yx = e'$, mistõttu $e\mathcal{D}e'$ parajasti siis, kui $e = e'$. Sellest saame järeldada, et $|E(S)/\mathcal{D}| = |E(S)|$. Teoreemist 2.13 järeldub, et $K_0(S)$ on vaba Abeli rühm astakuga $|E(S)|$. Konkreetne näide oleks kommutatiivne monoid $(\mathbb{N}_0, \cdot)$, mille puhul $E((\mathbb{N}_0, \cdot)) = \{0, 1\}$. Eelnevast saame, et $K_0((\mathbb{N}_0, \cdot)) \cong \mathbb{Z}^2$.

Näide 2.16. Olgu $X = \{1, 2, 3\}$ kolmeelemendiline hulk ja $\mathcal{T}_X$ monoid näitest 1.10. Võtame kasutusse tähise (a, b, c) , kus $a, b, c \in X$, et tähistada

funktsiooni $f \in \mathcal{T}_X$, mis kujutab hulga X elemente järgmiselt:

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c.$$

Et rakendada teoreemi 2.13, peame leidma kõik idempotentide $\mathcal{D}$ -klassid $E(S)/\mathcal{D}$. Üks viis neid leida on koostada **munaresti diagramm** (vt [6, lk 48-49]). Kasutades definitsioonis 1.3 olevat notatsiooni, munaresti diagrammis asetsevad elemendid $f, g \in \mathcal{T}_X$ on samas reas kui $f \mathcal{R} g$, samas veerus kui $f \mathcal{L} g$ ning samas kastis kui $f \mathcal{H} g$. Alltoodud joonisel 1 on idempotendid rasvases kirjas.

[illegible]

Joonis 1: Monoidi $\mathcal{T}_X$ munaresti diagramm

Jooniselt 1 on näha kolme suuremat kasti, mis osutuvad olema Greeni $\mathcal{D}$ -seose ekvivalentsiklassid. Valides igast $\mathcal{D}$ -klassist ühe idempotendi, näiteks $(1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3)$, saame hulga $E(S)/\mathcal{D}$:

$$E(S)/\mathcal{D} = \{D_{(1,1,1)}, D_{(1,2,2)}, D_{(1,2,3)}\}.$$

Teoreemist 2.13 järeldame, et $K_0(\mathcal{T}_X)$ on vaba Abeli rühm astakuga $|E(S)/\mathcal{D}| = 3$ ehk $K_0(\mathcal{T}_X) \cong \mathbb{Z}^3$.

3 Funktor K_0

Siin peatükis näitame, et eelnev konstruktsioon, mis annab Abeli rühma $K_0(S)$ iga monoidi S puhul, määrab ära funktori $K_0 : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ab}$ monoidide kategooriast $\mathbf{Mon}$ Abeli rühmade kategooriasse $\mathbf{Ab}$. Me näitame, kuidas see funktor käitub morfismidel. Selleks on meil vaja polügoonide tensorkorrutise mõistet. Käesolevas tekstis kasutatud tensorkorrutise definitsioon ja konstruktsioon on võetud raamatust [9].

Definitsioon 3.1. Olgu $A_S \in \mathbf{Act}_S$, ${}_S B \in {}_S \mathbf{Act}$ ja olgu antud hulk Y . Kujutust $\alpha : A_S \times {}_S B \rightarrow Y$ nimetatakse **S -tasakaalustatuks**, kui kehtib võrdus $\alpha(as, b) = \alpha(a, sb)$ iga $a \in A_S$, $b \in {}_S B$ ja $s \in S$ puhul.

Definitsioon 3.2. Olgu $A_S \in \mathbf{Act}_S$ ja ${}_S B \in {}_S \mathbf{Act}$. Hulka T koos S -tasakaalustatud kujutusega $\tau : A_S \times {}_S B \rightarrow T$ kutsutakse polügoonide A_S ja ${}_S B$ **tensorkorrutiseks** kui iga hulga Y ja S -tasakaalustatud kujutuse $\alpha : A_S \times {}_S B \rightarrow Y$ puhul leidub üheselt määratud hulkade vaheline kujutus $\bar{\alpha} : T \rightarrow Y$ nii, et $\alpha = \bar{\alpha} \circ \tau$ ehk diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_S \times {}_S B & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ & \searrow \tau & \uparrow \bar{\alpha} \\ & & T \end{array}$$

on kommutatiivne.

Selgub [9, Lause II.5.3], et tensorkorrutis on üheselt määratud hulkade isomorfismi täpsuseni. Järgnevalt toome välja ühe viisi, kuidas on võimalik konstrueerida tensorkorrutist.

Konstruktsioon 3.3. Olgu $A_S \in \mathbf{Act}_S$, ${}_S B \in {}_S \mathbf{Act}$ ja olgu ϑ vähim selline ekvivalentsiseos hulgal $A_S \times {}_S B$, et iga $a \in A_S$, $b \in {}_S B$ ja $s \in S$ puhul

$(as, b)\vartheta(a, sb)$. Siis faktorhulka $A \otimes_S B = (A_S \times_S B)/\vartheta$ nimetatakse polügoonide A_S ja $_S B$ **tensorkorrutiseks**. Selle hulga elemendid on ekvivalentsiklassid $[(a, b)]_\vartheta$, mille tähiseks on $a \otimes b$. Konstruktsioonist on näha, et $as \otimes b = a \otimes sb$.

Märkus 3.4. Selgub, et kui polügoonil $_S B$ on (S, T) -bipolügooni struktuur $_S B_T$ monoidide S, T puhul, siis tensorkorrutisele $A \otimes_S B$ saab loomulikult viisil määrata parempoolse T -polügooni toime:

$$(a \otimes b)t := a \otimes bt, \quad a \otimes b \in A \otimes_S B, \quad t \in T.$$

Seetõttu $(A \otimes_S B)_T$ on parempoolne T -polügoon. Sarnaselt, kui A_S on (T, S) -bipolügoon $_T A_S$, siis $_T(A \otimes_S B) \in {}_T \mathbf{Act}$ ning kui monoidide S, T, U korral $_S A_T$ on (S, T) -bipolügoon ja $_T B_U$ on (T, U) -bipolügoon, siis $_S(A \otimes_T B)_U$ on (S, U) -bipolügoon.

Et konstrueerida funktor $K_0 : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ab}$, on meil vaja paari abitulemust.

Lause 3.5. *Olgu $f : S \rightarrow T$ monoidide homomorfism. Vaatame monoidi T kui (S, T) -bipolügooni $_S T_T$, kus monoidi S vasakpoolne toime hulgal T on defineeritud nõnda:*

$$s \cdot t := f(s)t, \quad s \in S, \quad t \in T.$$

Siis iga $e \in E(S)$ korral on parempoolne T -polügoon $(eS \otimes_S T)_T$ projektiivne.

Tõestus. Tähistame $u := f(e) \in T$. Lihtne on näha, et u on idempotent. Meil piisab näidata, et $(eS \otimes_S T)_T \cong uT$ parempoolsete T -polügoonidena, kuna uT on projektiivne. Selleks defineerime kujutuse $\varphi : (eS \otimes_S T)_T \rightarrow uT$ järgmiselt:

$$\varphi(es \otimes t) := f(es)t = uf(s)t.$$

Korrektuse näitamiseks vaatleme kujutust

$$\hat{\varphi} : eS \times T \rightarrow uT, \quad (es, t) \mapsto f(es)t.$$

See kujutus on S -tasakaalustatud, sest mistahes $s, s' \in S$ ja $t \in T$ korral

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}((es)s', t) &= f(ess')t && (\hat{\varphi} \text{ def.}) \\ &= f(es)f(s')t && (f \text{ on hom.}) \\ &= f(es)(s' \cdot t) && (_ST \text{ toime def.}) \\ &= \hat{\varphi}(es, s' \cdot t). && (\hat{\varphi} \text{ def.}) \end{aligned}$$

Sellest järeldub, et φ on korrektselt defineeritud.

Injektiivsuse näitamiseks oletame, et $\varphi(es \otimes t) = \varphi(es' \otimes t')$, kus $s, s' \in S$ ja $t, t' \in T$. Siis sellest järeldub, et $f(es)t = f(es')t'$. Kasutades tensorkorrutise omadusi saame, et

$$\begin{aligned} es \otimes t &= e^2s \otimes t = e(es) \otimes t && (e = e^2) \\ &= e \otimes es \cdot t && (\otimes \text{ def.}) \\ &= e \otimes f(es)t && (_ST \text{ toime def.}) \\ &= e \otimes f(es')t' && (f(es)t = f(es')t') \\ &= e \otimes es' \cdot t' && (_ST \text{ toime def.}) \\ &= e(es') \otimes t' && (\otimes \text{ def.}) \\ &= e^2s' \otimes t' = es' \otimes t', && (e = e^2) \end{aligned}$$

mistõttu φ on injektiivne. Sürjektiivsus järeldub sellest, et igale elemendile $ut \in uT$ leidub originaal polügoonis $(eS \otimes_S T)_T$, nimelt $e \otimes t$, sest $\varphi(e \otimes t) = f(e)t = ut$. Lisaks näeme, et φ on parempoolsete T -polügoonide

homomorfism, kuna suvaliste elementide $t_1, t_2 \in T$ puhul kehtib

$$\varphi(es \otimes t_1 t_2) = f(es) t_1 t_2 = \varphi(es \otimes t_1) t_2.$$

Kuna φ on bijektiivne T -polügoonide homomorfism, siis $(eS \otimes_S T)_T \cong uT$. Järelduse 1.20 tõttu on $(eS \otimes_S T)_T$ projektiivne, sest $u \in E(T)$. $\square$

Lause 3.6. *Olgu $f : S \rightarrow T$ monoidide homomorfism. Kui P_S on lõplikult moodustatud projektiivne S -polügoon, siis $(P \otimes_S T)_T$ on lõplikult moodustatud projektiivne T -polügoon.*

Selle lause tõestuse jaoks läheb meil vaja järgmist lauset.

Lause 3.7 (Järeldus II.5.15, [9]). *Kui $A_S \in \text{Act}_S, {}_S M_T \in {}_S \text{Act}_T$ ning $A_S = \bigsqcup_{i \in I} A_i$, siis*

$$\left(\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right) \otimes_S M \right)_T \cong \left(\bigsqcup_{i \in I} (A_i \otimes_S M) \right)_T.$$

Lause 3.6 tõestus. Kui $P_S = \mathbf{0}$, siis peab $(P \otimes_S T)_T$ olema ka tühi, kuna tensorkorrutis on faktorhulk hulgast $P \times T$, mis on eelduse tõttu tühi. Kuna tühi polügoon on projektiivne, siis on ka $(P \otimes_S T)_T$ projektiivne.

Eeldame nüüd, et $P_S \neq \mathbf{0}$. Kuna P_S on projektiivne, siis järelduse 1.19 tõttu $P_S \cong \bigsqcup_{i=1}^n e_i S$, kus $e_i \in E(S)$. Lause 3.7 tõttu kehtib parempoolsete T -polügoonide isomorfism

$$(P \otimes_S T)_T \cong \left(\left(\bigsqcup_{i=1}^n e_i S \right) \otimes_S T \right)_T \cong \left(\bigsqcup_{i=1}^n (e_i S \otimes_S T) \right)_T.$$

Kuna lõikumatu ühendi iga komponent $e_i S \otimes T$ on projektiivne lause 3.5 tõttu, siis on ka $P \otimes_S T$ projektiivne järelduse 1.18 tõttu. $\square$

Märkus 3.8. Ülaltoodud lausetest saame iga monoidide homomorfismi $f : S \rightarrow T$ korral kujutuse

$$_ \otimes_S T : \mathbf{Fgp}_S \rightarrow \mathbf{Fgp}_T, \quad A_S \mapsto (A \otimes_S T)_T,$$

mis viib polügooni S_S polügooniks

$$(S \otimes_S T)_T = (1_S S \otimes_S T)_T \cong f(1_S)T_T = 1_T T_T = T_T. \quad (3.1)$$

Järelduse II.5.15 [9] tõttu on antud kujutus funktor $\mathbf{Fgp}_S \rightarrow \mathbf{Fgp}_T$, mis kujutab S -polügoonide homomorfismi $\varphi : A_S \rightarrow B_S$ T -polügoonide homomorfismiks

$$\varphi \otimes \text{id}_T : (A \otimes_S T)_T \rightarrow (B \otimes_S T)_T, \quad (\varphi \otimes \text{id}_T)(a \otimes t) = \varphi(a) \otimes t.$$

Eeltoodud lausete abil saame defineerida funktori $K_0 : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Teoreem 3.9. K_0 on kovariantne funktor monoidide kategooriast $\mathbf{Mon}$ Abeli rühmade kategooriasse $\mathbf{Ab}$, kus monoidide morfismide kujutised on defineeritud nõnda:

$$S, T \in \mathbf{Mon}, \quad f : S \rightarrow T,$$

$$K_0(f) : K_0(S) \rightarrow K_0(T), \quad K_0(f)([eS]) = [(eS \otimes_S T)_T].$$

Tõestus. Algselt näitame, et kujutus $K_0(f)$ on rühmade homomorfism. Kui rühma $K_0(S)$ baasi elementide $[eS]$, $[e'S]$ puhul kehtib $[eS] = [e'S]$, siis $eS \cong e'S$. Kuna iga funktor säilitab isomorfisme, siis märkuse 3.8 tõttu iso-

morfismi $\phi : eS \rightarrow e'S$ korral

$$\phi \otimes \text{id}_T : (eS \otimes_S T)_T \rightarrow (e'S \otimes_S T)_T, \quad es \otimes t \mapsto \phi(es) \otimes t,$$

on parempoolsete T -polügonide isomorfism. Sellest järeldub, et $[(eS \otimes_S T)_T] = [(e'S \otimes_S T)_T]$. Kuna $[eS] \mapsto [(eS \otimes_S T)_T]$ on korrektselt defineeritud hulka-
de kujutus, siis märkuse 2.7 tõttu saab selle ühesel viisil laiendada Abeli
rühmade homomorfismiks $K_0(f) : K_0(S) \rightarrow K_0(T)$.

Veel tuleb näidata, et kujutus $K_0 : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ab}$ säilitab ühikmorfisme ja
morfismide kompositsiooni. Isomorfismi $(P \otimes_S S)_S \cong P_S$ tõttu (vt [9] lause
II.5.13) kehtib võrdus

$$K_0(\text{id}_S)([P_S]) = [(P \otimes_S S)_S] = [P_S] = \text{id}_{K_0(S)}([P_S])$$

iga polügooni $P_S \in \mathbf{Fgp}_S$ korral, mistõttu $K_0(\text{id}_S) = \text{id}_{K_0(S)}$.

Olgu $f : S \rightarrow T$ ja $g : T \rightarrow U$ monoidide homomorfismid. Me saame vaadelda
monoide T, U bipolügoonidena ${}_S T, {}_T U$, kusjuures monoid U on ka (S, U) -
bipolügoon, kus vasakpoolne toime on defineeritud kui

$$s \cdot u := g(f(s))u.$$

On näha, et $(T \otimes_T U)_U$ ja U_U on isomorfsed kui parempoolsed U -polügoonid
isomorfismi (3.1) tõttu. Lisaks ${}_S(T \otimes_T U) \cong {}_S U$ kui vasakpoolsed S -polügoonid,
kuna parempoolsete U -polügoonide isomorfism

$$\varphi : (T \otimes_T U)_U \rightarrow U_U, \quad t \otimes u \mapsto g(t)u$$

säilitab monoidi S vasakpoolset toimet:

$$\begin{aligned}
\varphi(s(t \otimes u)) &= \varphi(f(s)t \otimes u) && (_S(T \otimes_T U) \text{ toime def.}) \\
&= \varphi(1_T f(s)t \otimes u) && (f(s)t = 1_T f(s)t) \\
&= \varphi(1_T \otimes f(s)t \cdot u) && (\otimes \text{ def}) \\
&= \varphi(1_T \otimes g(f(s)t)u) && (_S U \text{ toime def.}) \\
&= g(1_T)g(f(s)t)u && (\varphi \text{ def.}) \\
&= g(f(s)t)u && (g(1_T) = 1_U) \\
&= g(f(s))g(t)u && (g \text{ on hom.}) \\
&= s \cdot g(t)u && (_S U \text{ toime def.}) \\
&= s\varphi(t \otimes u). && (\varphi \text{ def.})
\end{aligned}$$

Seega iga polügooni $P_S \in \mathbf{Fgp}_S$ puhul kehtib võrdus

$$\begin{aligned}
(K_0(g) \circ K_0(f))([P_S]) &= K_0(g)([P \otimes_S T]) && (K_0(f) \text{ def.}) \\
&= [(P \otimes_S T) \otimes_T U] && (K_0(g) \text{ def.}) \\
&= [P \otimes_S (T \otimes_T U)] && ([9, \text{näide V.1.3 (3)}]) \\
&= [P \otimes_S U] && (_S(T \otimes_T U) \cong _S U) \\
&= K_0(g \circ f)([P_S]), && (K_0(g \circ f) \text{ def.})
\end{aligned}$$

millega saame, et $K_0(g) \circ K_0(f) = K_0(g \circ f)$. □

4 K_0 ja Morita ekvivalentsus

Siin peatükis toome välja seose funktori K_0 ja Morita ekvivalentsuse vahel. On teada, et ühikelemendiga ringide algebralise K -teooria puhul kehtib see, et Morita ekvivalentsete ringide nullindad K -rühmad on isomorfsed. Selles peatükis tõestame, et analoogne väide kehtib ka monoidide korral. Järgmise abitulemuse tõestuse idee on pärit Benjamin Steinbergilt.

Lause 4.1. *Polügooni $A_S \in \mathbf{Act}_S$ korral on järgmised väited samaväärsed.*

1. A_S on lõplikult moodustatud.
2. Mistahes polügoonide A_i , $i \in I$, ja homomorfismide $f_i : A_i \rightarrow A$ korral on

$$f : \bigsqcup_{i \in I} A_i \rightarrow A, \quad f = \bigsqcup_{i \in I} f_i$$

epimorfism kategoorias $\mathbf{Act}_S$ parajasti siis, kui leidub lõplik alamhulk $F \subseteq I$ nii, et

$$f_F : \bigsqcup_{i \in F} A_i \rightarrow A, \quad f_F = \bigsqcup_{i \in F} f_i$$

on epimorfism kategoorias $\mathbf{Act}_S$.

Tõestus. On teada, et kategoorias $\mathbf{Act}_S$ on epimorfismid parajasti sürjektiivsed homomorfismid. On lihtne näha, et tühi polügoon $\mathbf{0}$ rahuldab nii tingimust 1 kui ka 2. Seetõttu eeldame edasises, et $A_S \neq \mathbf{0}$.

$1 \implies 2$. Eeldame, et A_S on lõplikult moodustatud ehk leidub lõplik mittetühi alamhulk $U \subseteq A$ nii, et $\langle U \rangle := \bigcup_{u \in U} uS = A_S$. Oletame, et $f := \bigsqcup_{i \in I} f_i : \bigsqcup_{i \in I} A_i \rightarrow A$ on sürjektiivne. Siis iga $u \in U$ puhul leidub $x \in \bigsqcup_{i \in I} A_i$ nii, et $f(x) = u$. Olgu $x \in A_j$. Siis iga $s \in S$ korral

$$us = f(x)s = f(xs) = f_j(xs)$$

ehk elemendil us leidub originaal polügoonis A_j . Kuna iga elementi polügoonis A_S on võimalik esitada kujul us mingite $u \in U$ ja $s \in S$ puhul, siis hulga U lõplikuse tõttu leidub lõplik alamhulk $F \subseteq I$ nii, et iga polügooni A_S elemendil leidub originaal polügoonis $\bigsqcup_{i \in F} A_i$. Sellest järeldeb, et homomorfismi f ahend f_F on surjektiivne ehk epimorfism.

Vastupidi, on selge, et kui f_F on surjektiivne, siis f on surjektiivne.

2 $\implies$ 1. Võtame $I := A$. Iga $a \in A$ korral olgu $A_a := S_S$ ja $f_a : A_a \rightarrow A$, $s \mapsto as$. Siis $f := \bigsqcup_{a \in A} f_a : \bigsqcup_{i \in I} A_i \rightarrow A$ on surjektiivne. Eelduse põhjal leidub selline lõplik $F \subseteq A$, et $f_F := \bigsqcup_{i \in F} f_i : \bigsqcup_{i \in F} A_i \rightarrow A$ on surjektiivne. Nüüd

$$\begin{aligned} A = \text{Im}(f_F) &= f_F \left(\bigsqcup_{i \in F} A_i \right) = f_F \left(\bigsqcup_{i \in F} S \right) \\ &= \left(\bigsqcup_{i \in F} f_i \right) \left(\bigsqcup_{i \in F} S \right) = \bigcup_{i \in F} iS. \end{aligned}$$

Kuna F on lõplik, siis $\bigcup_{i \in F} iS = A$ on lõplikult moodustatud. $\square$

Sarnasel viisil saab ka tõestada analoogse samaväärsuse tsükliliste polügoonide puhul.

Lause 4.2. *Polügooni A_S korral on järgmised väited samaväärsed.*

1. A_S on tsükliline.
2. Mistahes polügoonide A_i , $i \in I$, ja homomorfismide $f_i : A_i \rightarrow A$ korral on

$$f : \bigsqcup_{i \in I} A_i \rightarrow A, \quad f = \bigsqcup_{i \in I} f_i$$

epimorfism kategoorias $\mathbf{Act}_S$ parajasti siis, kui leidub $j \in I$ nii, et f_j on epimorfism kategoorias $\mathbf{Act}_S$.

Märkus 4.3. Kategooriateooriast on teada, et ekvivalentsifunktor säilitab epimorfisme ja kokorrutisi. Kuna kategoorias $\mathbf{Act}_S$ on kokorrutiseks lõikumatu ühend, siis lause 4.1 tõttu on „lõplikult moodustatus“ ja „tsüklilisus“ kategoorised omadused. See tähendab, et ekvivalentsifunktor säilitab lõplikult moodustatud polügoone ja tsüklilisi polügoone.

Definitsioon 4.4. [10, lk 359] Monoidid S ja T on **Morita ekvivalentsed**, kui kategooriad $\mathbf{Act}_S$ ja $\mathbf{Act}_T$ on ekvivalentsed.

Teoreem 4.5. *Monoidide S ja T jaoks on järgmised väited samaväärsed.*

1. *Kategooriad $\mathbf{Act}_S$ ja $\mathbf{Act}_T$ on ekvivalentsed (s.t. S ja T on Morita ekvivalentsed).*
2. *Kategooriad $\mathbf{Fgp}_S$ ja $\mathbf{Fgp}_T$ on ekvivalentsed.*
3. *Kategooriad $\mathbf{Cp}_S$ ja $\mathbf{Cp}_T$ on ekvivalentsed.*

Tõestus. (1. $\iff$ 3.) See järeldub artikli [11] teoreemidest 1.1 ja 3.4. Tasub mainida, et antud artiklis on tõestatud väite 1. samaväärsus sellega, et kategooriad $C(S)$ ja $C(T)$ on ekvivalentsed, kus $C(S)$ on monoidi S Cauchy täiend. Vastavalt teoreemi 3.4 tõestuse viimasele lausele on kategooriad $\mathbf{Cp}_S$ ja $C(S)$ ka ekvivalentsed.

(2. $\implies$ 3.) Eeldame, et $F : \mathbf{Fgp}_S \rightarrow \mathbf{Fgp}_T$ on ekvivalentsifunktor. Kui eS on tsükliline projektiivne polügoon, siis lause 4.2 tõttu $F(eS)$ on samuti tsükliline. Seega funktoori F saab ahendada ekvivalentsifunktoriks kategooriate $\mathbf{Cp}_S$ ja $\mathbf{Cp}_T$ vahel.

(3. $\implies$ 2.) Kuna 1. $\iff$ 3., siis piisab näidata, et 1. $\implies$ 2. Eeldame, et $F : \mathbf{Act}_S \rightarrow \mathbf{Act}_T$ on ekvivalentsifunktor. Kui P_S on lõplikult moodustatud

projektiivne polügoon, siis lause 4.1 tõttu $F(P_S)$ on samuti lõplikult moodustatud ja projektiivne. Seega F ahendub kategooriate $\mathbf{Fgp}_S$ ja $\mathbf{Fgp}_T$ vaheliseks ekvivalentsifunktoriks. $\square$

Teoreem 4.6. *Kui monoidid S ja T on Morita ekvivalentsed, siis*

$$K_0(S) \cong K_0(T).$$

Tõestus. Kui monoidid S ja T on Morita ekvivalentsed, siis tänu teoreemile 4.5 leiduvad ekvivalentsi funktorid $F : \mathbf{Fgp}_S \rightarrow \mathbf{Fgp}_T$ ja $G : \mathbf{Fgp}_T \rightarrow \mathbf{Fgp}_S$ nii, et $F \circ G \cong \text{id}$ ja $G \circ F \cong \text{id}$. Defineerime kujutused

$$\psi : \mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S) \rightarrow \mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_T) \quad \text{ja} \quad \varphi : \mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_T) \rightarrow \mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S)$$

võrdustega

$$\psi(c(P)) := c(F(P)), \quad \varphi(c(U)) := c(G(U)).$$

Kuna funktorid säilitavad isomorfisme, siis

$$c(P) = c(Q) \implies P \cong Q \implies F(P) \cong F(Q) \implies c(F(P)) = c(F(Q)),$$

seega ψ on korrektselt defineeritud. Nüüd ψ on monoidide homomorfism, sest

$$\begin{aligned} \psi(c(P) \boxplus c(Q)) &= \psi(c(P \sqcup Q)) & (2.4) \\ &= c(F(P \sqcup Q)) & (\psi \text{ def.}) \\ &= c(F(P) \sqcup F(Q)) & (F \text{ säilitab } \sqcup) \\ &= c(F(P)) \boxplus c(F(Q)) & (2.4) \\ &= \psi(c(P)) \boxplus \psi(c(Q)) & (\psi \text{ def.}) \end{aligned}$$

ja ψ viib nullelemendi nullelemendiks, kuna ekvivalentsifunktor F säilitab algobjekte. Analoogiliselt saab näidata, et φ on korrektselt defineeritud monoidide homomorfism. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(c(P))) &= \varphi(c(F(P))) && (\psi \text{ def.}) \\ &= c(G(F(P))) && (\varphi \text{ def.}) \\ &= c(P), && ((G \circ F)(P) \cong P)\end{aligned}$$

seega $\varphi \circ \psi = \text{id}$ ja analoogiliselt $\psi \circ \varphi = \text{id}$.

Me oleme näidanud, et monoidid $(\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_S), \boxplus)$ ja $(\mathcal{I}(\mathbf{Fgp}_T), \boxplus)$ on isomorfsed. Vahede rühma universaalomadusest jäeldub, et ka rühmad $K_0(S)$ ja $K_0(T)$ on isomorfsed. $\square$

Märkus 4.7. Teoreemis 4.6 teistpidine implikatsioon üldiselt ei kehti. Olgu G ja H mitteisomorfsed rühmad. Kuna ainuke idempotent rühmas on ühikelement, siis teoreemi 2.13 tõttu

$$K_0(G) \cong \mathbb{Z} \cong K_0(H).$$

Kuid järeluse 6.2 (4) tõttu artiklist [10] langevad Morita ekvivalents ja isomorfism kokku rühmade puhul, seega G ja H ei ole Morita ekvivalentsed.

Kokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uuriti algebralist K -teooriat monoidide kontekstis. Defineeriti üldise monoidi S puhul Abeli rühm $K_0(S)$ ning tõestati, et $K_0(S)$ on vaba Abeli rühm, mille astak on võrdne idempotentide $\mathcal{D}$ -klassidest koosneva hulga võimsusega. Toodi ka välja näiteid rühma $K_0(S)$ struktuurist konkreetsete monoidide S korral. Seejärel näidati, et eeltoodud definitsioon annab funktori $K_0 : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ab}$ kasutades polügoonide tensorikorrutise mõistet. Lõpus tõestati et Morita ekvivalentsetel monoididel on isomorfsed K_0 -rühmad.

Autori arvates on võimalik bakalaureusetöös uuritud teemat edasi arendada. Järgnevatks sammuks oleks defineerida monoidi S puhul Abeli rühm $K_1(S)$ ning teha kindlaks selle struktuur. Selleks oleks otstarbekas Song Guangtiani artikkel [4]. Lähtudes ringide K -teooria kirjandusest, oleks kasulik leida sobilik definitsioon suhteliste K -rühmade jaoks kasutades monoidide kongruentse, mille abil oleks võimalik tuua välja seoseid rühmade $K_1(S)$ ja $K_0(S)$ vahel. Autori meelest oleks ka huvitav uurida, kuidas saaks antud teooriat arendada poolrühmade puhul ning kas leidub seos monoidi S K -teooria ja monoidiringi $\mathbb{Z}[S]$ K -teooria vahel. Autorile on teada, et rühmade puhul on seda uuritud (vt [17, alampeatükk IV.4]).

Kasutatud allikad

- [1] C. Chu, J. Morava, On the Algebraic K -theory of Monoids, [arXiv:1009.3235v1](#), 2010.
- [2] I. Coley, C. Weibel, Localization, monoid sets and K -theory, *Journal of Algebra* **614** (2023), 754–779.
- [3] S. Guangtian, Algebraic K -theory methods for semigroups. I. The Grothendieck groups of semigroups (hiina keeles), *Acta Mathematica Sinica* **33** (1990), 309–322.
- [4] S. Guangtian, The Whitehead groups of semigroups, *Acta Mathematica Sinica (New Series)* **13** (1997), 97–104.
- [5] C. Haesemeyer, C.A. Weibel, The K' -theory of monoid sets, *Proceedings of the American Mathematical Society* **149** (2021), 2813–2824.
- [6] J. M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford University Press, 1995.
- [7] M. Kilp, *Algebra I*, Eesti Matemaatika Selts, 2005.
- [8] M. Kilp, *Algebra II*, Eesti Matemaatika Selts, 1998.
- [9] M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories: With Applications to Wreath Products and Graphs*, Walter de Gruyter, 2000.
- [10] U. Knauer, Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids, *Semigroup Forum* **3** (1972), 359–370.
- [11] M. V. Lawson, Morita equivalence of semigroups with local units, *Journal of Pure and Applied Algebra* **215** (2011), 455–470.

- [12] B. A. Magurn, *An Algebraic Introduction to K-theory*, Cambridge University Press, 2002.
- [13] J. Milnor, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Princeton University Press, 1972.
- [14] J. R. Silvester, *Introduction to Algebraic K-theory*, Chapman and Hall, 1981.
- [15] V. Laan, Rühmateooria, loengukonspekt, 2026.
- [16] A. R. Wallis, *Semigroup and Category-Theoretic Approaches to Partial Symmetry*, Doktoritöö, 2013.
- [17] C. Weibel, *The K-book: An Introduction to Algebraic K-theory*, American Mathematical Society, 2013.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Rain Verrev,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Monoidide algebraline K -teooria“, mille juhendaja on Valdis Laan, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Rain Verrev

27.05.2026