



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
TEOREETILISE MEHHAANIKA KATEEDER

ARNO KASS

DIPLOMITÖÖ

BETTI VASTASTIKKUSE LAUSE JA SELLE RAKENDUSI ELASTO-
MEHHAANIKA KONKREETSETE PROBLEEMIDE LAHENDAMISEL

JUHENDAJA

prof. G. RÄGO

lubaan kaitumisele.

18.05.1954.

*Genh. Rāgo,
teor. meh. kat.
juhataja*

TARTU 1954.

S i s u k o r d .

Sissejuhatus	2
§1. Ülevaade Enrico Betti elust ja tegevusest	4
§2. Deformatsioonitöö avaldis	6
1. Deformatsioonitöö avaldis peapingete ja peapi- kenemiste kaudu	6
2. Deformatsioonitöö avaldis deformatsioonitenso- ri komponentide kaudu	8
3. Deformatsioonitöö avaldis pingetensori kompo- nentide kaudu	9
§3. Energia pöhvõrrand	10
§4. Betti teoreemi tõestusi	15
Esimene tõestusviis	16
Teine tõestusviis	18
Kolmas tõestusviis	21
§5. Betti vastastikkuse lause rakendusi	24
1. Keha ruumala muutuse arvutamine antud tungide puhul	24
2. Deformatsiooni komponentide keskmiste arvuta- mine antud tungide puhul	25
Näide nr. 1	26
Näide nr. 2	27
Näide nr. 3	28
Kasutatud kirjandus	30

Sissejuhatus.

Ükski looduses esinev meile tuntud materjal pole absoluutselt kõva. Seepärast kõik kehad deformeeruvad neile rakendatud välistungide mõjul. Sõltuvalt materjalist ja rakendatud tungide suurusest need deformatsioonid on kord väikesed, kord suured. Praktilises elus võivad leida kasutamist vaid need materjalid, mille deformatsioonid rakendatavate tungide mõjul on väikesed. Materjale liigitame plastilisteks ja elastseteks. Esimeste (näiteks seatina) puhul nende esialgne kuju ei taastu pärast deformeerivate tungide eemaldamist. Teiste (näiteks terase) puhul nende endine vorm taastub peaaegu täielikult, kui rakendatud tungid jäävad suuruselt alla teatavat kindlat tõket.

Deformatsiooni protsessis rakendatud tungid tervikuna teevad teatava hulga tööd. Kui materjal on elastne, siis see töö talletub potentsiaalse energiana, mis vabaneb seda mööda, kuidas vähenevad deformeerivad tungid. Kui aga materjal on plastiline, siis töö, mis tehtud temale rakendatud välistungide poolt, kulub tema füüsikalise struktuuri muutmiseks või kutsub esile soojenemise.

Käesolevas töös eeldame, et meil on tegemist ideaalselt elastsete materjalidega, mis alluvad Hooke'i seadusele.

Kui kehale on rakendatud teatud tungide süsteem, siis deformatsiooni protsessis keha punktid nihkuvad paigalt, s.t. omavad teatud lükkeid. Rakendame kehale veel teise

süsteemi tunge; need kutsuvad kehas esile teise süsteemi lükkeid. Võib rääkida fiktiivsest tööst, mida esimese süsteemi tungid teevad teise süsteemi lüketel ja ümberpöörduvalt teise süsteemi tungid teevad esimese süsteemi lüketel. Seose nende kahe deformatsioonitöö vahel leidis esimesena Itaalia elastsusteooria koolkonna looja Enrico Betti 1872. aastal. Seda seost tuntakse tugevusõpetuses ja elastsusteoorias Betti lause nimetuse all või ka tööde vastastikkuse lause nime all. Oma üldsuse ja oma paljude rakenduste tõttu ta omab elastsusteoorias ja tugevusõpetuses erakordselt kaaluvat kohta.

Betti lause üks erijuht, mis käib sõrestiku varraste deformatsioonide kohta, oli tuletatud juba 1864. aastal Makswelli poolt ja on täntud nn. lükete vastastikkuse lause nime all. Betti lause omakorda peitub erijuhuna temast veelgi üldisemas lord Rayleighi vastastikkuse lauses, millele ta autor jõudis aastal 1873.

Käesolev töö tahab anda väikese ülevaate Betti lausest ja selle lause mõningatest konkreetsetest rakenduslikest näidetest.

§ 1. ÜLEVAADE ENRICO BETTI ELUST JA TEGEVUSEST:

Enrico Betti sündis 1823.aastal Pistoias, Itaalias. Kõrgema hariduse omendas Pisa ülikoolis. Olles Itaalia matemaatiliste-füüsikute koolkonna isa Mosotti õpilaseks, võttis Betti tema juhtimisel koos oma ülikooli kaaslastega osa lahingust Montanara juures austerlaste vastu 1848. aastal.

Lõpetanud ülikooli, alustas Betti oma õppetegevust kodulinna Pistoia lüütseumi õpetajana. 1865. aastal kut-
sutakse Betti Pisa ülikooli õppejõuks, kus ta töötab kuni oma surmani 1892.a. Ühtaegu ta oli sama ülikooli juures tegutseva Pedagoogilise Instituudi juhatajaks.

Betti kuulub laiahaardega Itaalia matemaatikute hulka. Ta on töötanud kõrgema algebra, elliptiliste funktsioonide, topoloogia ja teiste küsimuste alal. Topoloogia-alased tööd on eriti põhilise tähtsusega, mis nähtub juba sellestki, et kuni tänaseeni kannavad tema nime teatavad arvud, mis iseloomustavad kujundi sidusust.

Matemaatilise füüsika alale siirdus Betti peale tema külastamist Itaalia reisil viibinud Bernhard Riemanni poolt. Tõenäoliselt sellest kõnelusest said alguse ka Betti uurimused Newtoni potentsiaali ja arvatavasti ka uurimused elastsete kehade tasakaalu kohta. Mõlemad teosed leidsid elavat tähelepanu, tõlgiti saksa keelde ja premeeriti. Teises nimetatud töös leidub Betti nime kandev vastastikkuse lause.

Oma töödega elastsusteooria alal Betti sai Itaalia elastsusteooria hiilgava koolkonna isaks, millesse kuulub rida üldtuntud elastsusteoreetikuid nagu Castigliano, Tedone, Somigliana, Lauricella j.t. Rida nende itaallaste poolt püstitatud elastsusteooria probleeme on hiljem leidnud laialdast tähelepanu ja viljelemist meie nõukogude elastsusteoreetikute poolt (G. V. Kolossov, H. I. Mushe-lišvili j.t.).

§ 2. DEFORMATSIOONITÖÖ AVALDIS.

1. Deformatsioonitöö avaldis peapingete ja peapikenemiste kaudu.

Deformatsioonitöö all mõistetakse tööd, mis on vajalik selleks, et viia elastne keha deformeerimata olekust deformeeritud seisukorda. Koormise vähendamise puhul võib kulutatud tööd saada tagasi kas jällegi töö kujul või siis ta muundub tekkiva liikumise kineetiliseks energiaks.

Deformatsioonitöö arvutamiseks vaatleme deformeerunud keha mingis osas elementaarseid parallelelepiipedit, mille servade pikkused pingevabas olukorras tähistame dx , dy , dz ; ühest tipust lähtuvad kolm serva on paralleelsed peapingete telgedega. Seega parallelelepiipedi tahkudel mõjuvad ainult normaalselt sihitud, s.o. peapinged. Tähistame peapinged ja relatiivsed peapikenemised vastavalt σ_1 , σ_2 , σ_3 ja ε_1 , ε_2 , ε_3 .

Elementaarkeha võib viia esialgsest deformatsioonivabast olekust lõplikus suuruses deformatsiooni olukorda lõpmata hulgal viisidel. Vaatleme neist seda, mille puhul peapinged kasvavad nullist oma lõpliku väärtuseni nii, et igas vahepeelses deformatsiooni faasis peapinged ja peapikenemised on võrdelised oma lõpuväärtustega. Sel puhul nende avaldisi võib kirjutada kujul

$$\mu\sigma_1, \mu\sigma_2, \mu\sigma_3 \text{ ja } \mu\varepsilon_1, \mu\varepsilon_2, \mu\varepsilon_3,$$

kus μ tähendab nullist üheni kasvavat tegurit. Üleminekul olukorrast, mis määratud väärtusega μ , olukorraks, millele vastab väärtus $\mu + d\mu$, tehakse töö, mis võrdne

$$\begin{aligned}
 & (1 + \mu \varepsilon_2) dy (1 + \mu \varepsilon_3) dz \cdot \mu \sigma_1 \cdot d(\mu \varepsilon_1) dx + \\
 & + (1 + \mu \varepsilon_3) dz (1 + \mu \varepsilon_1) dx \cdot \mu \sigma_2 \cdot d(\mu \varepsilon_2) dy + \\
 & + (1 + \mu \varepsilon_1) dx (1 + \mu \varepsilon_2) dy \cdot \mu \sigma_3 \cdot d(\mu \varepsilon_3) dz.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Jättes saadud avaldises ära kõrgemat järku väikesed suurused (see tähendab, eeldades, et on ükskõik, kas pinged mõjuvad juba deformeerunud või veel deformeerumata tahkudele), saame töö jaoks avaldise kujul:

$$(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \mu d\mu dx dy dz. \tag{2}$$

Seega ruumala ühikus talletatud elementaarne deformatsioonitöö

$$dA = (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \mu d\mu \tag{3}$$

ja järelkult lõplikul deformatsioonil tehtud töö

$$A = (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \int_0^1 \mu d\mu = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \tag{4}$$

Selles valemis töö A esineb avaldatuna normaalpingetes σ ja relatiivsetes pikenemistes ε . On aga võimalik saada A -avaldist ainult ε -des.

Nagu teada, pinged σ avalduvad deformatsioonide ε , elastsusmooduli E ja Poissoni mooduli mooduli pöördväär-
tuse m kaudu kujul

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_1 &= 2 \mu_y \left(\varepsilon_1 + \frac{\theta}{m-2} \right) \\
 \sigma_2 &= 2 \mu_y \left(\varepsilon_2 + \frac{\theta}{m-2} \right) \\
 \sigma_3 &= 2 \mu_y \left(\varepsilon_3 + \frac{\theta}{m-2} \right)
 \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

kus

$$\mu_y = \frac{E m}{2(m+1)} \tag{6}$$

ja

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{7}$$

tähendab relatiivse ruumpaisumise kordajat. Asendades praegu toodud \mathcal{G} avaldised eespool saadud töö valemisse, saame

$$A = \omega \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \right]. \quad (8)$$

Siin esineb deformatsioonitöö avaldatuna ainuüksi ε -des.

2. Deformatsioonitöö avaldis deformatsioonitensori komponentide kaudu.

Pole raske saada sama töö avaldatuna ε -des ja γ -des, teiste sõnadega, saada A avaldist deformatsioonitensori komponentide kaudu vabalt valitud tejestikus $Oxyz$ töötades. Tõepoolest, summad

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \text{ja} \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1$$

on deformatsioonitensori invariantid: esimene summa

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

ja tähendab geomeetriliselt relatiivset ruumdeformatsiooni

θ . Teine summa aga

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2).$$

Et

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \theta^2 - 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1) \quad (9)$$

siis töö avaldis (8) lubab kirjutamist ka kujul

$$A(\varepsilon, \gamma) = \omega \left[\frac{m-1}{m-2} \theta^2 - 2(\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x) + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]. \quad (10)$$

Sümboliga $A(\varepsilon, \gamma)$ tahame märkida, et deformatsioonitöö on avaldatud deformatsioonitensori komponentide kaudu.

Edasi märgime, et deformatsioonitöö tuletis deformatsiooni komponentide kaudu annab vastavad pingetensori komponendid:

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x = 2\mu \left(\varepsilon_x + \frac{\theta}{m-2} \right)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y = 2\mu \left(\varepsilon_y + \frac{\theta}{m-2} \right)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z = 2\mu \left(\varepsilon_z + \frac{\theta}{m-2} \right)$$

(11)

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx} = \mu \gamma_{zx}$$

Ajaliselt esimesena on need valemid annud Green.

3. Deformatsioonitöö avaldis pingetensori komponentide kaudu.

Asume deformatsioonitöö arvutamisele pingetensorikomponentide kaudu. Et A on homogeenne deformatsioonitensori komponentide ruutvorm, siis Euleri teoreemi põhjal võime ta esitada kujul

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_x} \varepsilon_x + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_y} \varepsilon_y + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_z} \varepsilon_z + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{xy}} \gamma_{xy} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{yz}} \gamma_{yz} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{zx}} \gamma_{zx} \right), \quad (12)$$

ehk, seoste () põhjal, kujul

$$A = \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx}) \quad (13)$$

Asendame siin ε ja γ nende tuntud väärtustega:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_x - \frac{s}{m+1} \right) & \gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_y - \frac{s}{m+1} \right) & \gamma_{yz} &= \frac{1}{\mu} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2\omega_y} \left(\sigma_z - \frac{s}{m+1} \right) \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{\omega_y} \tau_{zx},$$

kus

$$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (15)$$

on normaalpingete summa. Saame

$$A(\sigma, \tau) = \frac{1}{4\omega_y} \left[\frac{m}{m+1} s^2 - 2(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \quad (16)$$

Sümboliga $A(\sigma, \tau)$ tahame märkida, et deformatsioonitöö on avaldatud pingetensori komponentide kaudu.

Analoogselt võrranditega (11) saame siit, et töö avaldise tuletised pingetensori komponentide järgi on vastavad deformatsioonitensori komponendid:

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x = \frac{1}{2\omega_y} \left(\sigma_x - \frac{s}{m+1} \right)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y = \frac{1}{2\omega_y} \left(\sigma_y - \frac{s}{m+1} \right)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z = \frac{1}{2\omega_y} \left(\sigma_z - \frac{s}{m+1} \right)$$

(17)

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy} = \frac{1}{\omega_y} \tau_{xy}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz} = \frac{1}{\omega_y} \tau_{yz}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx} = \frac{1}{\omega_y} \tau_{zx}$$

Et deformatsioonienergia on alati positiivne, siis valemist (8) järeldeb, et põiklõike kokkusurutavuse kor-
daja m peab olema suurem kahest; seepärast

$$2 \leq m \leq \infty$$

Tegur ω_y on oma loomult positiivne.

§ 3. ENERGIA PÕHIVÖRRAND.

Asume valemi tuletamisele, mis on aluseks kõigi elastusteooria ülesannete lahendamisele energeetilisel meetodil. See valem määrab deformatsioonitöö variatsiooni ehk deformatsiooni energia variatsiooni. Tema põhjaneva tähtsuse tõttu seda valemit nimetatakse energia põhivörrandiks.

Selle võrrandi saame võrrutades teineteisega kaks deformatsioonitööd: töö, mis vastab deformeeritava keha teatavale fikseeritud olukorrale ja töö, mis vastab selle keha vähe muudetud olukorrale. Võrrandi tuletamise mõttekäik ei sõltu sellest, kas vaatleme liikuvat või tasakaalus olevat keha.

Tähistame punkti tegeliku lükke komponendid u , v , w ja vastavad pinged σ_x , σ_y , σ_z ; τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} . Elastses kehas mõjuvad pinged on tasakaalus keha sees rakendatud masstungiga (X, Y, Z) ja pinnal mõjuva pindtungiga (p_x, p_y, p_z) . Deformatsioonitöö ruumelemendi puhul tähistame $A(\varepsilon, \gamma)$, kogu keha puhul aga $A(\varepsilon, \gamma)$. Siis

$$A(\varepsilon, \gamma) = \iiint A(\varepsilon, \gamma) dV, \quad (18)$$

kus kolmekordne integraal on laiendatud kogu keha ruumalale.

Olgu lükke muudu komponendid δu , δv , δw ; neile vastavavad deformatsioonitensori komponendid arvutatakse

lause põhjal, et $\delta \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \delta$, ja avalduvad siis kujul

$$\begin{aligned}
 \delta \varepsilon_x &= \frac{\partial \delta u}{\partial x} & \delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \\
 \delta \varepsilon_y &= \frac{\partial \delta v}{\partial y} & \delta \gamma_{yz} &= \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \\
 \delta \varepsilon_z &= \frac{\partial \delta w}{\partial z} & \delta \gamma_{zx} &= \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Muutunud seisundile vastava deformatsioonitöö avaldub ülal saadud valemi järgi kujul

$$A(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma) = \iiint A(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma) dV. \tag{20}$$

Asetades deformatsioonitöö avaldisse muutujate ε ja γ asemele nende uued väärtused $\varepsilon + \delta\varepsilon$ ja $\gamma + \delta\gamma$ ning arendades tulemuse Taylori ritta, saame:

$$\begin{aligned}
 A(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma) &= A(\varepsilon, \gamma) + \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_x} \delta\varepsilon_x + \dots + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{zx}} \delta\gamma_{zx} \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_x^2} \delta\varepsilon_x^2 + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \delta\varepsilon_x \delta\varepsilon_y + \dots + \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_{zx}^2} \delta\gamma_{zx}^2 \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{21}$$

Esimene liige on deformatsioonitöö, mis vastab lähteseisundile. Teine liige aga avaldub kujul

$$\begin{aligned}
 U &= \left[\frac{m-1}{m-2} (\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y + \delta\varepsilon_z)^2 - 2(\delta\varepsilon_x \delta\varepsilon_y + \delta\varepsilon_y \delta\varepsilon_z + \delta\varepsilon_z \delta\varepsilon_x) + \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2} (\delta\gamma_{xy}^2 + \delta\gamma_{yz}^2 + \delta\gamma_{zx}^2) \right].
 \end{aligned}$$

Nagu näha on see liige töö, väärtus, arvutatud argumentide $\delta\varepsilon$ ja $\delta\gamma$ väärtuste jaoks, seega $A(\delta\varepsilon, \delta\gamma)$. Seetähendab, et ta on võrdne ruumühiku kohta tuleva tööga, mille saaksime, kui keha saaks ainult lükked ($\delta u, \delta v, \delta w$). Eespool näidatu põhjal see avaldis on positiivne. Kasutades võrrandeid (11) eelmisest paragrahvist, saame keskmise liikme avaldada kujul:

$$\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx}$$

ehk ka kujul

$$\begin{aligned} & \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \\ & + \tau_{yx} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \\ & + \tau_{zx} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial \delta w}{\partial z} \end{aligned}$$

Sama avaldist saab kirjutada veidi lühemalt vektorana-
lüüsi sümboolikas: kui märgime pingvektorid

$$t^{(x)}, t^{(y)}, t^{(z)} \quad [t^{(x)} = (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}), \text{ jne}]$$

siis kõnesolev avaldis kirjutub kujul

$$(t^{(x)}, \text{grad } \delta u) + (t^{(y)}, \text{grad } \delta v) + (t^{(z)}, \text{grad } \delta w),$$

kus

$$(t^{(x)}, \text{grad } \delta u) = \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \delta u}{\partial z}$$

ja analoogiliselt teised.

Vektoriaalset kirjutusviisi kasutades saame, et

$$\begin{aligned} & A(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma) = A(\varepsilon, \gamma) + \\ & + \iiint [(t^{(x)}, \text{grad } \delta u) + (t^{(y)}, \text{grad } \delta v) + (t^{(z)}, \text{grad } \delta w)] dV + \iint A(\delta\varepsilon, \delta\gamma) dV. \end{aligned}$$

Kasutades Gaussi teoreemi, kujundame ümber keskmise
integraali: et

$$\text{div}(\delta u t^{(x)}) = \delta u \text{div } t^{(x)} + (t^{(x)}, \text{grad } \delta u),$$

ehk

$$(t^{(x)}, \text{grad } \delta u) = -\delta u \text{div } t^{(x)} + \text{div}(\delta u t^{(x)}),$$

siis

$$\iiint (t^{(x)}, \text{grad } \delta u) dV = \iint \delta u t^{(x)}_\nu dS - \iiint \delta u \text{div } t^{(x)} dV.$$

Tasakaalu tingimustest pinnal, saame:

$$t_v^{(x)} = p_x, \quad t_v^{(y)} = p_y, \quad t_v^{(z)} = p_z; \quad (22)$$

keha sees aga, Navier' valemite põhjal, on

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} t^{(x)} &= -X + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \operatorname{div} t^{(y)} &= -Y + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \operatorname{div} t^{(z)} &= -Z + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

kus ρ tähendab keha ainetihedust.

Analoogselt eelmisega teisi integraale ümber kujundades saame, et

$$\begin{aligned} & \iiint [(t^{(x)}, \operatorname{grad} \delta u) + (t^{(y)}, \operatorname{grad} \delta v) + (t^{(z)}, \operatorname{grad} \delta w)] dV = \\ &= \iiint [(X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) \delta u + (Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}) \delta v + (Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) \delta w] dV = \\ &= \iint (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned} A(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma) &= A(\varepsilon, \gamma) + \iiint [(X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) \delta u + \dots] dV + \\ &+ \iint (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS + A(\delta\varepsilon, \delta\gamma). \end{aligned} \quad (24)$$

Kui lugeda variatsioonid δu , δv , δw esimest järku lõpmata väikesteks, siis viimane liige osutub kõrgemat järku väikeseks. Jättes ta ära, näeme, et deformatsioonitöö juurdekasv on

$$\delta A = A(\varepsilon + \delta\varepsilon, \gamma + \delta\gamma) - A(\varepsilon, \gamma)$$

avaldub kujul

$$\begin{aligned} \delta A &= \iiint [(X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) \delta u + (Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}) \delta v + (Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) \delta w] dV + \\ &+ \iint (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS. \end{aligned} \quad (25)$$

Sellest valemist võib saada mitmesuguseid teoreeme, tehes ühe või teise eelduse variatsioonide δu , δv , δw suhtes.

§ 4. BETTI TEOREEMI TÕESTUSI:

Esimene tõestusviis.

Eespool tuletatud energia võrrand võimaldab kergesti tuletada Betti nime kandvat vastastikkuse teoreemi, seadmata erilisi kitsendavaid tingimusi.

Kujutleme elastset keha, millele rakendatud mass- ja pindtungid on igal hetkel tasakaalus. Oletame, et need tungid kasvavad aeglaselt nullist oma lõplike väärtusteni; need järk-järgult suurenevad tungid kutsuvad esile aeglase, järk-järgulise deformatsioonide suurenemise. Seejuures tungi poolt tehtud töö on võrdne tungi lõppväärtuse ja lükke poole korrutisega, nagu see otseselt järeldub Hooke'i seadusest. See võimaldab tööd määrata tungide keskmistest väärtustest kogu deformatsioonivahemikus, sest need keskmised on võrdsed poole lõplike tungi väärtustega.

Tähistame masstungi, mis mõjub ruumühikule, tema komponentide abil (X, Y, Z) ja pindtungi, mis mõjub pinnaühikule, tema komponentide abil (p_x, p_y, p_z) . Olgu u, v, w nende tungide poolt esilekutsutud lükke komponendid. Siis töö, mis tehtud välistungide poolt keha deformeerimisel ja talletatud elastses kehas deformatsiooni energia näol, avaldub ülal öeldu põhjal järgmiselt:

$$A_{II} = \frac{1}{2} \iiint (Xu + Yv + Zw) dV + \frac{1}{2} \iint (p_x u + p_y v + p_z w) dS. \quad (26)$$

Jätkame keha deformeerimist ja olgu teine lükke (u', v', w') esile kutsutud masstungi (X', Y', Z') ja pindtungi (p'_x, p'_y, p'_z) poolt. Esimese süsteemi tungid (X, Y, Z) ja (p_x, p_y, p_z) , mis on

jõudnud selle teise deformatsiooni alguseks kasvada juba oma täisväärtuseni ja jäävad sellel püsima, teevad teisel deformatsioonil töö:

$$A_{12} = \iiint (\mathcal{X}u' + \mathcal{Y}v' + \mathcal{Z}w') dV + \iint (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS. \quad (27)$$

Rööbiti sellega teise süsteemi tungid, aeglaselt kasvades nullist oma lõppväärtuseni, teevad valemi (26) järgi töö:

$$A_{22} = \frac{1}{2} \iiint (\mathcal{X}'u' + \mathcal{Y}'v' + \mathcal{Z}'w') dV + \frac{1}{2} \iint (p'_x u' + p'_y v' + p'_z w') dS. \quad (28)$$

Seega mõlema tungide süsteemi kogutöö on:

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{22}, \quad (29)$$

ehk

$$A = A_{11} + A_{22} + \iiint (\mathcal{X}u' + \mathcal{Y}v' + \mathcal{Z}w') dV + \iint (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS. \quad (29')$$

Endastmõistetavalt töö A arvuline väärtus ei sõltu sellest järjekorrast, millises esimene ja teine tungide süsteem hakkasid mõjuma. Seega vahetades kriipsudega suurused kriipsudeta suurusetega, võime kogutöö avaldise kirjutada teisel kujul nii:

$$A = A_{22} + A_{21} + A_{11}, \quad (30)$$

ehk

$$A = A_{22} + A_{11} + \iiint (\mathcal{X}u' + \mathcal{Y}v' + \mathcal{Z}w') dV + \iint (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS \quad (30')$$

Avaldistes () ja () on A , A_{11} ja A_{22} samad. Seega peavad olema samad ka A_{12} ja A_{21} ehk, teisiti

$$\begin{aligned} & \iiint (\mathcal{X}'u' + \mathcal{Y}'v' + \mathcal{Z}'w') dV + \iint (p'_x u' + p'_y v' + p'_z w') dS = \\ & = \iiint (\mathcal{X}u' + \mathcal{Y}v' + \mathcal{Z}w') dV + \iint (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS. \end{aligned} \quad (31)$$

Selles võrduses peitub kuuluis Betti lause, mida saame sõnastada nii: kui elastsele kehale mõjub kaks süsteemi tuge, mis kutsuvad esile kaks süsteemi lükkeid, siis töö, mis on tehtud esimese tungide süsteemi poolt teisel lükete süsteemil, on võrdne tööga, mis on tehtud teise tungide süsteemi poolt lükete esimesel süsteemil.

Teine tõestusviis.

Betti teoreemi matemaatilis-formaalne tõestus põhineb samasusel

$$\begin{aligned} & (t^{(x)}, \text{grad } u') + (t^{(y)}, \text{grad } v') + (t^{(z)}, \text{grad } w') = \\ & = (t^{(x)'}, \text{grad } u) + (t^{(y)'}, \text{grad } v) + (t^{(z)'}, \text{grad } w) \end{aligned} \quad (32)$$

Oletame, et selles võrduses

(u, v, w) , (u', v', w') ja $(t^{(x)}, t^{(y)}, t^{(z)})$, $(t^{(x)'}, t^{(y)'}, t^{(z)'})$ tähistavad kahte süsteemi nihkeid ja kahte süsteemi pingevektoreid. Sümbol $(t^{(x)}, \text{grad } u')$ tähistab vektõri $t^{(x)}$ ja u' gradiendi skalaarset korrutist

$$\sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u'}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u'}{\partial z}$$

Analoogiliselt sümbol $(t^{(x)'}, \text{grad } u)$ ja teised.

Samasuse (32) tõestamiseks asendame pingevektori komponendid deformatsiooni komponentidega, kasutades Lane võrrandeid:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \mu \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mu \gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (33')$$

kus

$$\lambda = \frac{2\mu}{m-2} \quad \text{ja} \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Asendades pingvektori komponendid nende avaldistega (33), avaldub samasuse (32) vasak pool kujul

$$\begin{aligned} & \sigma_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u'}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u'}{\partial z} + \tau_{yx} \frac{\partial v'}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v'}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v'}{\partial z} + \\ & + \tau_{zx} \frac{\partial w'}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial w'}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w'}{\partial z} = \\ & = 2 \frac{\mu \vartheta}{m-2} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \\ & + \mu \gamma_{xy} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \mu \gamma_{yz} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) + \mu \gamma_{zx} \left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right) = \\ & = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\vartheta \vartheta'}{m-2} \right) + \\ & + \mu \left(\gamma_{xy} \gamma'_{xy} + \gamma_{yz} \gamma'_{yz} + \gamma_{zx} \gamma'_{zx} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Tehes analoogilised teisendused samasuse (32) parema poolega, saame, et see võrdub sama avaldisega, millega samasuse vasak poolgi.

Teisendame samasuse (32) vasakut poolt. Kuna

$$\operatorname{div} (u' t^{(x)}) = u' \operatorname{div} t^{(x)} + (t^{(x)}, \operatorname{grad} u')$$

ehk

$$(t^{(x)}, \operatorname{grad} u') = -u' \operatorname{div} t^{(x)} + \operatorname{div} (u' t^{(x)})$$

ja analoogiliselt $(t^{(y)}, \operatorname{grad} v')$ ja $(t^{(z)}, \operatorname{grad} w')$, siis saame

$$\begin{aligned} & (t^{(x)}, \operatorname{grad} u') + (t^{(y)}, \operatorname{grad} v') + (t^{(z)}, \operatorname{grad} w') = \\ & = \operatorname{div} (u' t^{(x)} + v' t^{(y)} + w' t^{(z)}) - (u' \operatorname{div} t^{(x)} + v' \operatorname{div} t^{(y)} + w' \operatorname{div} t^{(z)}). \end{aligned} \quad (35)$$

Navier valemite põhjal on

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} t^{(x)} &= -X \\ \operatorname{div} t^{(y)} &= -Y \\ \operatorname{div} t^{(z)} &= -Z. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Seepärast

$$\begin{aligned} &(t^{(x)}, \operatorname{grad} u') + (t^{(y)}, \operatorname{grad} v') + (t^{(z)}, \operatorname{grad} w') = \\ &= \operatorname{div} (u't^{(x)} + v't^{(y)} + w't^{(z)}) + Xu' + Yv' + Zw'. \end{aligned} \quad (37)$$

Integreerime samasuse (37) üle keha ruumala

$$\begin{aligned} &\iiint [(t^{(x)}, \operatorname{grad} u') + (t^{(y)}, \operatorname{grad} v') + (t^{(z)}, \operatorname{grad} w')] dV = \\ &= \iiint [\operatorname{div} (u't^{(x)} + v't^{(y)} + w't^{(z)}) + Xu' + Yv' + Zw'] dV. \end{aligned}$$

Gaussi teoreemi põhjal

$$\iiint [\operatorname{div} (u't^{(x)} + v't^{(y)} + w't^{(z)})] dV = \iint (u't_v^{(x)} + v't_v^{(y)} + w't_v^{(z)}) dS \quad (38)$$

ja arvestades tingimusi pinnal

$$t_v^{(x)} = p_x, \quad t_v^{(y)} = p_y, \quad t_v^{(z)} = p_z, \quad (39)$$

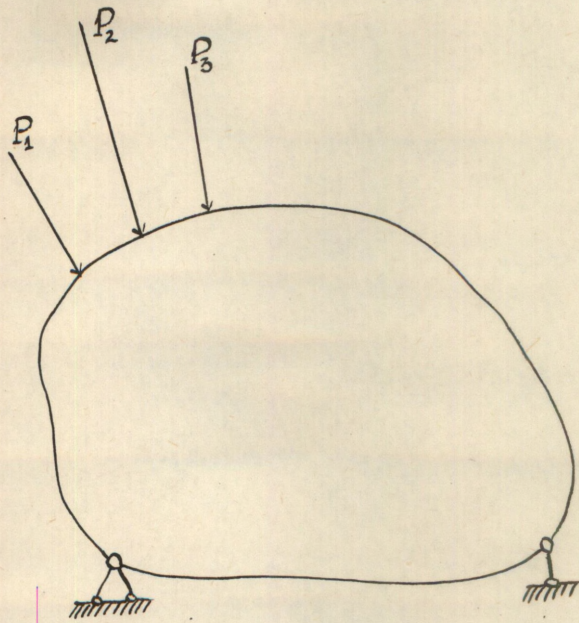
saame:

$$\begin{aligned} &\iiint [(t^{(x)}, \operatorname{grad} u') + (t^{(y)}, \operatorname{grad} v') + (t^{(z)}, \operatorname{grad} w')] dV = \\ &= \iiint (Xu' + Yv' + Zw') dV + \iint (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS. \end{aligned} \quad (40)$$

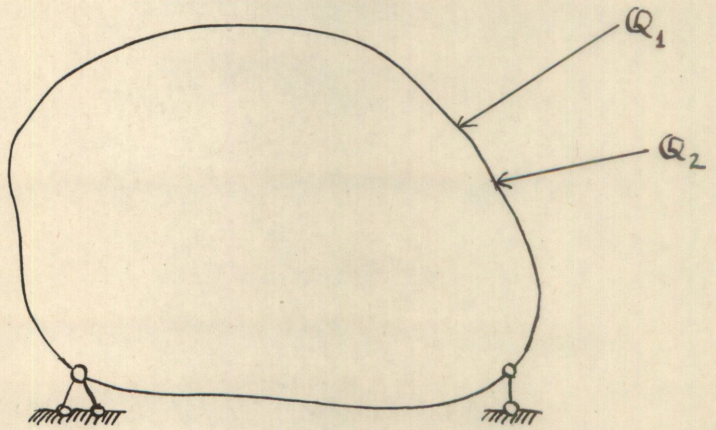
Vahetades kriipsuga suurused kriipsuta suurustega ja ümberpöörduvalt, saame:

$$\begin{aligned} &\iiint [(t^{(x)'}, \operatorname{grad} u) + (t^{(y)'}, \operatorname{grad} v) + (t^{(z)'}, \operatorname{grad} w)] dV = \\ &= \iiint (Xu' + Yv' + Zw') dV + \iint (p'_x u + p'_y v + p'_z w) dS. \end{aligned} \quad (41)$$

Võrduse (32) põhjal on avaldiste (40) ja (41) paremad pooled võrdsed, seega peavad võrdsed olema ka vasakud pooled, seepärast



Olukord (1)



Olukord (2)

joon. 1.

$$\begin{aligned} & \iiint (Xu' + Yv' + Zw') dV + \iint (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS = \\ & = \iiint (Xu + Yv + Zw) dV + \iint (p'_x u + p'_y v + p'_z w) dS. \end{aligned} \quad (42)$$

Selles aga seisnebki Betti teoreem.

Kolmas tõestusviis.

Vaatleme mingit süsteemi kahes olukorras (joon. 1.):
olukorras (1), kui süsteemile mõjub tungide süsteem P ja
olukorras (2), kui süsteemile mõjub mingi teine tungide süs-
teem Q .

Tähistame olukorras (1) mõjuvate välistungide töö olu-
korra (2) nihetil A_{12} ja olukorras (1) sisetungide töö olu-
korra (2) nihetil A_{12}^* . Esimene indeks näitab missugused
tungid teevad töö ja teine indeks näitab, missugustel nihetil
see töö tehakse.

Võimalike nihutuste printsiibi põhjal tungide tasakaalu
puhul

$$A_{12} + A_{12}^* = 0 \quad (43)$$

ehk

$$A_{12} = - A_{12}^* \quad (43')$$

Seega sisetungide võimalik töö võimalikel nihutustel
on võrdne välistungide võimalike tööga.

Arvutame mõlema tungide süsteemi töö kahel eeldusel.
Koormame süsteemi esiteks tungidega P ja peale selle, kui
nad oma mõju on avaldanud, koormame süsteemi täiendavalt veel
tungidega Q . Koormame süsteemi teiseks alul tungidega Q

ja pärast seda, kui need oma mõju on avaldanud, veel täiendavalt tungidega \mathcal{P} .

Esimesel eeldusel summaarne töö väljendub valemiga:

$$A_{\text{I}} = A_{11} + A_{22} + A_{12}, \quad (44)$$

kus A_{11} on olukorras (1) mõjuvate tungide töö olukorra (1) nihetel, A_{22} on olukorras (2) mõjuvate tungide töö olukorra (2) nihetel, A_{12} on olukorras (1) mõjuvate tungide töö olukorra (2) nihetel. A_{11} ja A_{22} arvutamisel esineb tungi ja nihke korrutises kordaja $\frac{1}{2}$; A_{12} arvutamisel seda kordajat ei tule, sest tungide suurus eeldatakse vaadeldavas protsessis konstantsena.

Teisel eeldusel summaarne töö väljendub valemiga:

$$A_{\text{II}} = A_{22} + A_{11} + A_{21}, \quad (45)$$

kus A_{21} on olukorras (2) mõjuvate tungide töö olukorra (1) nihetel.

Niihul kui teisel käsitletud juhul välistungide summaarne töö valemi (43') järgi on võrdne sisetungide tööga vastupidise märgiga. Viimane töö ei sõltu antud välistungidega süsteemi koormamise järjekorrast, küll aga süsteemi lähte- ja lõpuseisundist. Kuna mõlema eelduse juures lähte- ja lõpuseisundid on samad, siis on ka välistungide summaarne töö sama, seega

$$A_{11} + A_{22} + A_{12} = A_{22} + A_{11} + A_{21},$$

järelikult

$$A_{12} = A_{21}. \quad (46)$$

Selles aga seisnebki Betti teoreem.

Võimalike nihutuste printsiibi terminoloogias võiksime Betti teoreemi sõnastada nii: olukorra (1) tungide töö olukorra (2) võimalikel nihetel on võrdne olukorra (2) tungide tööga olukorra (1) võimalikel nihetel.

Märgime, et tööd, millest on jutt Betti lauses, on fiktiivsed tööd, sest tööd arvutatakse ühe tungide süsteemi poolt tehtuna, kuid mitte nende tungide poolt esile kutsutud rakenduspunktide nihutustel, vaid teise tungide süsteemi poolt esile kutsutud rakenduspunktide nihutustel.

§5. BETTI VASTASTIKKUSE LAUSE RAKENDUSI.

1. Keha ruumala muutuse arvutamine antud tungide puhul.

Ülesanne seisneb järgmises:

Olgu antud masstungid komponentidega x , y , z ja pindtungid komponentidega p_x , p_y , p_z . Leida keha ruumala muutus, mille tingivad need tungid.

Ruumala muutuse leidmiseks võtame Betti valemis teise lükete süsteemi nii, et selle puhul keha jääb endaga geomeetriselt sarnaseks. Edasi rakendame keha pinnale ainult normaalpinged, võttes need suuruselt võrdseina pingeühikuga, teiste sõnadega, võtame

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x = \sigma'_y = \sigma'_z = 1, \quad \tau'_{xy} = \tau'_{yz} = \tau'_{zx} = 0 \\ u' = \frac{m-2}{E_m} \cdot x, \quad v' = \frac{m-2}{E_m} \cdot y, \quad w' = \frac{m-2}{E_m} \cdot z \\ x' = y' = z' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Sel puhul

$$p'_x = \cos(\nu, x), \quad p'_y = \cos(\nu, y), \quad p'_z = \cos(\nu, z).$$

Asetades need väärtused Betti valemisse, saame:

$$\begin{aligned} & \iiint (x'u + y'v + z'w) dV + \iint (p'_x u + p'_y v + p'_z w) dS = \\ & = \iint [u \cos(\nu, x) + v \cos(\nu, y) + w \cos(\nu, z)] dS. \end{aligned} \quad (48)$$

Avaldis, mis seisab sulgudes paremal pool integraali märgi all, kujutab keha pinnapunkti lüket pinnanormmali sihis. Selle avaldise korrutis pindelemendiga annab ruumelemendi. Seega kõnesolev integraal kujutab keharuumala muutust.

Nii siis

$$\Delta V = \iiint (X'u + Y'v + Z'w) dV + \iint (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS. \quad (49)$$

Asetades siia u' , v' , w' asemele nende väärtused valemist (47) ja tähistades murru

$$\frac{m-2}{E m} \quad \text{lühidalt} \quad \frac{1}{3K}$$

kus K on ruumikokkusurutavuse moodul, saame:

$$\Delta V = \frac{1}{3K} \left[\iiint (X \cdot x + Y \cdot y + Z \cdot z) dV + \iint (p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z) dS \right], \quad (50)$$

millega ülesanne on lahendatud.

2. Deformatsiooni komponentide keskmiste arvutamine antud tungide puhul.

Ülesannet saab formuleerida järgmiselt:

Leida antud pind- ja masstungide puhul deformatsiooni komponentide keskmised väärtused.

Ülesande lahendamiseks kasutame Betti teoreemi formulatsiooni kujul

$$\begin{aligned} & \iiint \left[(t^{(x)'}, \text{grad } u) + (t^{(y)'}, \text{grad } v) + (t^{(z)'}, \text{grad } w) \right] dV = \\ & = \iiint (\sigma'_x \varepsilon_x + \sigma'_y \varepsilon_y + \sigma'_z \varepsilon_z + \tau'_{xy} \gamma_{xy} + \tau'_{yz} \gamma_{yz} + \tau'_{xz} \gamma_{xz}) dV = \quad (51) \\ & = \iiint (X'u + Y'v + Z'w) dV + \iint (p_x' \cdot u + p_y' \cdot v + p_z' \cdot w) dS. \end{aligned}$$

Valime teiseks lükete süsteemiks selle, mis vastab ühtlasele venitusele abstsissstelje sihis; sel puhul

$$u' = \frac{x}{E} \quad v' = -\frac{y}{E m} \quad w' = -\frac{z}{E m}$$

Lüke u' toimub x -telje positiivses sihis kuna lüked

v' ja w' vastavalt y ja z -telje negatiivses suunas.

Tehtud eeldusel kõik pingekomponendid muutuvad nulliks, välja arvatud komponent abstsissitelje sihis:

$$\sigma_x = 1.$$

Võrduse (51) põhjal saame, et

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial x} dV = \iiint (x u' + y v' + z w') dV + \iint (p_x u' + p_y v' + p_z w') dS. \quad (52)$$

Asendades siin u' , v' , w' nende väärtustega, saame

$$V \bar{e}_{xx} = \frac{1}{E_m} \iiint (m x \cdot x - y \cdot y - z \cdot z) dV + \frac{1}{E_m} \iint (p_x x m - p_y y - p_z z) dS.$$

Analogia põhjal kirjutame edasi, et

$$V \bar{e}_{yy} = \frac{1}{E_m} \iiint (m y \cdot y - x \cdot x - z \cdot z) dV + \frac{1}{E_m} \iint (p_y y m - p_x x - p_z z) dS \quad (53)$$

$$V \bar{e}_{zz} = \frac{1}{E_m} \iiint (m z \cdot z - x \cdot x - y \cdot y) dV + \frac{1}{E_m} \iint (p_z z m - p_x x - p_y y) dS,$$

kus V tähendab keha ruumala ja \bar{e}_{xx} , \bar{e}_{yy} , \bar{e}_{zz} deformatsiooni komponentide e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} keskmisi väärtusi.

Saadud kolmele valemile seltsivad kolm järgmist

$$\begin{aligned} V \bar{\gamma}_{xy} &= \iiint \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV = \frac{1}{2G_m} \iiint (x y + y x) dV + \frac{1}{2G_m} \iint (p_x y + p_y x) dS \\ V \bar{\gamma}_{yz} &= \iiint \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) dV = \frac{1}{2G_m} \iiint (y z + z y) dV + \frac{1}{2G_m} \iint (p_y z + p_z y) dS \\ V \bar{\gamma}_{zx} &= \iiint \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV = \frac{1}{2G_m} \iiint (z x + x z) dV + \frac{1}{2G_m} \iint (p_z x + p_x z) dS \end{aligned} \quad (54)$$

Kasutame neid valemid järgmiste konkreetsete näidete puhul.

Näide nr.1.

Olgu antud silinder meelevaldse ristilõikega; olgu selle ristilõike suurus Ω . Toetugu silinder oma põhjaga horisontaalsele tasandile. Silindri kaal olgu Q . Määrame

silindri pikkuse l ja ruumala V vähenemise, mida tingib silindri omakaal.

Võtame silindri põhja tasandi xy -tasandiks. Valemis (53) $Z = -\gamma$ (ruumühiku kaal), $X = Y = 0$.

Pindintegraalid valemis (50) ja (53) on nullid, kuna kaanel ja külgpinnal

$$p_x = p_y = p_z = 0.$$

Et põhjal $p_z = 0$ ja ka $p_x = p_y = 0$, siis saame:

$$\begin{aligned} \Delta l &= l \bar{e}_{zz} = -\frac{l\gamma}{EV} \iiint z dV = -\frac{l\gamma}{EV} \iint dx dy \int_0^l z dz = \\ &= -\frac{l\gamma\Omega}{EV} \int_0^l z dz = -\frac{l\gamma\Omega}{EV} \cdot \frac{l^2}{2} = -\frac{l^2 Q}{2EL\Omega} = -\frac{lQ}{2E\Omega} \end{aligned}$$

sest $Q = l\Omega\gamma$ ja $V = l\Omega$.

Valem (50) annab ruumala muudu ΔV

$$\Delta V = -\frac{V}{3K} \iiint z dV = -\frac{1}{3K} \gamma\Omega \int_0^l z dV = \frac{1}{6K} \gamma\Omega l^2 = -\frac{Ql}{6K}.$$

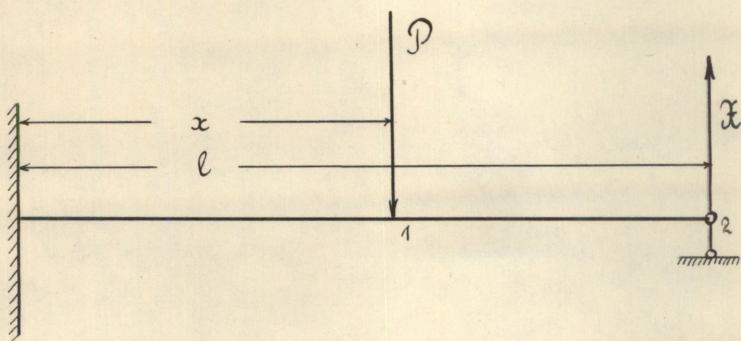
Näide nr.2.

Olgu antud silinder meelevaldse ristilõikega. Olgu selle ristilõike suurus Ω . Toetugu silinder ühe oma moodustajaga horisontaalsele tasandile. Määrame moodustaja muudu Δl ja ruumala muudu ΔV , mida tingib silindri omakaal Q .

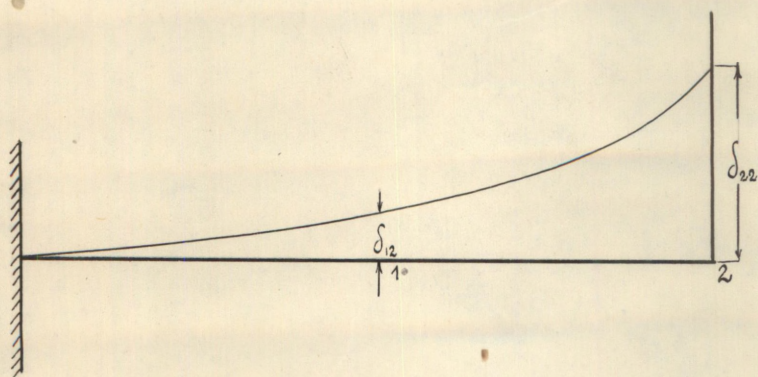
Valime rõhttasandi xy -tasandiks; suuname z -telje vertikaalselt üles, x -telje aga piki moodustajat. Siis

$$X = Y = 0, \quad Z = -\gamma, \quad dV = l dy dz$$

ja kõikjal on



Seisund (1)



Seisund (2)

joon. 2.

$$p_x = p_y = p_z = 0.$$

Neil andmeil,

$$\Delta l = l \bar{\epsilon}_{xx} = \frac{l}{mEV} \iint r z l dy dz = \frac{l^2 r}{mEV} \iint z dy dz.$$

Siin esinev kahekordne integraal lubab kirjutada kujul

$$\iint z dy dz = h \Omega$$

kus h on ristilõike raskuskeskme kõrgus ja Ω ristilõike pindala. Seepärast

$$\Delta l = \frac{l^2 r \Omega h}{m E V} = \frac{Q h}{E \Omega m}$$

Analoogselt eelmisega saame, et

$$\Delta V = -\frac{1}{3K} \iint r l dy dz = -\frac{r l \Omega h}{3K} = -\frac{Q h}{3K}$$

Miinus märk viimases valemis näitab ruumala vähenemist. Seega silindri esimeses asendis nii silindri ruumala kui ka pikkus vähenevad; silindri teises asendis ruumala küll väheneb, pikkus aga suureneb.

Näide nr.3.

Tala pikkusega l on ühe otsaga seina sisse müüritud; teine ots asub liikuvale toel (joon.2). Talale on rakendatud koormis P . Määrata liikuva toe reaktsioon sõltuvalt koormise P kaugusest x sisse müüritud otsast.

Vaatleme tala kahte seisundit, (1). ja (2). Seisundiks (1) võtame tegeliku tala seisundi, s.o. seisundi, kui koormis on paigutatud kaugusel x sisse müüritud otsast. Seisundiks (2) võtame tala selle seisundi, kui liikuv tugi on kõrvaldatud ja tuge asendava reaktsiooni X suunas on raken-

datud ühiktung.

Seisundi (1) tungide töö seisundi (2) nihete puhul on:

$$A_{12} = \mathcal{X} \delta_{22} - P \delta_{12} .$$

Seisundi (2) tungide töö seisundi (1) nihete puhul on: aga võrdne nulliga, kuna seisundi (2) ühiktungile vastab seisundi (1) nihe, mis on võrdne nulliga. Seepärast

$$A_{21} = 0$$

Järelikult tööde vastastikkuse lause põhjal

$$\mathcal{X} \delta_{22} - P \delta_{12} = 0$$

ja järelikult

$$\mathcal{X} = P \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} \quad (*)$$

Seisundile (2) vastava elastse joone võrrand on meil teadmata. Kasutades tuntud valemit läbipainde jaoks ükskõik missuguses lõikes (t.s. lõikes abstsissiga x), nimelt

$$\delta_{12} = \frac{x^2}{6EJ} (3l - x)$$

saame juhul kui $x = l$, et $\delta_{22} = \frac{l^3}{3EJ}$

ja seepärast

$$\mathcal{X} = P \frac{x^2(3l - x)}{2l^3} .$$

Võrrandist (*) näeme, et reaktsioon \mathcal{X} muutub võrdeliselt läbipaindega δ_{12} ; järelikult seisundi (2)-le vastav elastne joon annab reaktsiooni muutumise seaduse sõltuvalt koormise asukohast talal ehk, teisiti seisundile (2) vastav elastne joon kujutab endast teatud maastaabis toereaktsiooni \mathcal{X} mõjujoont.

Kasutatud kirjandus.

1. Преффиц Э., Математическая теория упругости. М.-Л., 1932.
2. Буцено К.Б. и Граммель Р., Техническая динамика. М.-Л., 1950.
3. Дыховичный А.И., Строительная механика. М., 1953.
4. Проскураков Л., Строительная механика. М.-Л., 1928.
5. Саусвелл Р.В., Введение в теорию упругости. М., 1948.

Taie, 10. mail 1954. a.

Alars.

Chirkantõdago,
juhendaja
10. mail 1954.