TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Materjale farmaatsiaüliõpilastele

KÕRGEMA MATEMAATIKA

õppimiseks

I. Vainikko

1987

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Teoreetilise mehaanika kateeder

Materjale farmaatsiaüliõpilastele

KÕRGEMA MATEMAATIKA

õppimiseks

Teine trükk

I. Vainikko

TARTU 1987

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus
13.veebruaril 1987.a.

SAATEKS

Käesolevad materjalid on koostatud TRÜ farmaatsiaosakonna I ja II kursuse üliõpilastele. Esimesel semestril õpitavasse kõrgema matemaatika kursusesse kuuluvad konspekti I ja II osa (tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika põhimõisted). Neljandal semestril tutvuvad tulevased proviisorid korrelatsiooniteooriaga, statistiliste hüpoteeside kontrollimisega, dispersioonanalüüsi alustega, aegridade analüüsiga, optimiseerimis- ja juhtimismeetoditega farmaatsias (III-VII osa).

Tänan kolleege dotsente Anne Parringut ja Mati Heinlood materjalide koostamisel osutatud abi ja väärtuslike soovituste eest ning Juta Volmerit tehnilise toimetamise eest.

I. Vainikko.

I. TÕENÄOSUSTEOORIA

1. Juhuslikud sündmused

Tõenäosusteooria uurimisobjektiks on juhuslikud sündmused ja nähtused — juhuslikud katsed. Juhuslik on katse, mis ühtedes ja samades tingimustes võib anda erinevaid tulemusi. Katseks nimetame ka mingi nähtuse jälgimist ehk vaatlust. Iga võimalikku katsetulemust nimetatakse elementaarsündmuseks, kõik võimalikud katsetulemused kokku moodustavad elementaarsündmuste süsteemi.

Iga väidet katsetulemuse kohta nimetatakse sündmuseks. Kui huvituda sündmustest nende toimumise või mittetoimumise seisukohalt, siis jagunevad sündmused kindlateks, juhuslikeks ja võimatuteks. Juhuslik sündmus on üks võimalikest sündmustest, mis etteantud tingimustes toimuda võib. Kindel sündmus on selline, mis antud tingimustes alati toimub. Kui antud tingimustes sündmus toimuda ei saa, siis nimetatakse seda võimatuks sündmuseks.

Sündmus on määratud parajasti siis, kui on fikseeritud katse ja määratletud, millised elementaarsündmused kuuluvad vaadeldavasse sündmusse. Sündmuse konkreetne iseloom pole tõenäosusteooria jaoks oluline.

Näide 1. Olgu katseks ühekordne täringuvise. Võimalikeks katsetulemusteks ehk elementaarsündmusteks võime lugeda vastavalt 1,2,3,4,5 ja 6 silma tuleku. Sündmus, et täringu viskel tuleb 1 silm, on juhuslik sündmus. Sündmus, et täringu viskel saame 1,2,3,4,5 või 6 silma, on kindel sündmus. Sündmus, et täringu viskel saame 7 silma, on võimatu sündmus.

Ühel ja samal elementaarsündmuste süsteemil määratud sündmustest võib loogiliste tehete abil moodustada uusi sündmusi.

Kahe sündmuse A ja B summaks nimetatakse liitsündmust $A \cup B$ (kas A või B), mille toimumine seisneb A või B (või mõlema) toimumiseks.

Näide 2. Mängu alustamise tingimuseks on täringu viskel kas 1 (sündmus A) või 6 silma (sündmus B) saamine. Sündmus „mängu alustamine" (sündmus C) on seega sündmuste A ja B summa C = $A \cup B$.

Kahe sündmuse A ja B korrutiseks nimetame liitsündmust $A \cap B$ (nii A kui ka B), mis seisneb nii sündmuse A kui ka sündmuse B toimumiseks.

Näide 3. Olgu järgnevale kursusele saamine sündmus S, kusjuures on vajalik nii arvestuste (A) kui ka eksamite (E) edukas sooritamine. Sündmust S võib vaadelda sündmuste A ja E korrutisena $S = A \cap E$.

2. Sündmuse tõenäosus

Kaht sündmust nimetatakse teineteist välistavateks, kui ühe sündmuse toimumine antud tingimustes välistab teise sündmuse toimumise. Olgu antud mingi hulk üksteist välistavaid sündmusi. Kui antud katsel üks neist kindlasti toimub, siis öeldakse, et need sündmused moodustavad täieliku sündmuste süsteemi.

Näide 1. Mündi ühekordsel viskel moodustavad vapi ja kirja tulek täieliku sündmuste süsteemi.

Vaatleme täielikku sündmuste süsteemi. Juhuslikku sündmust iseloomustatakse arvuga, mis näitab tema toimumise võimalikkust. Seda arvu nimetame sündmuse tõenäosuseks P.

Sündmuse A matemaatiline tõenäosus P(A) on võrdne murruga, mille lugejaks on sündmuse toimumiseks soodsate juhtude arv k, ja nimetajaks kõigi võimalike juhtude arv n

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Tõenäosuse definitsioonist võime järeldada:

1) kindla sündmuse tõenäosus on 1;
2) võimatu sündmuse tõenäosus on 0;
3) tõenäosus on arv, mis kuulub lõiku $[0,1]$, s.t. mistahes sündmuse A korral

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Näide 2. Täringu viskel 1 silma saamise tõenäosus on $\frac{1}{6}$.

Näide 3. Mündi ühel viskel on vapi esiletuleku tõenäosus võrdne $\frac{1}{2}$.

Viskame münti n korda ja meid huvitab näiteks vapi esiletulek. Kui vapp tuli k korda, siis võime leida vapi esiletuleku suhtelise sageduse. See on $\frac{k}{n}$.

Sündmuse suhteliseks sageduseks n katsest koosnevas katseseerias nimetame jagatist

$$w = \frac{k}{n},$$

kus k on sündmuse toimumiste arv.

Näide 4. Et teada televiisorite tootmisel, kui tõenäone on praagi tekkimine, kontrolliti läbi 100 televiisorit. Saadi 12 defektiga aparaati. Järelikult on praagi esinemise suhteline sagedus $w = \frac{12}{100} = 0{,}12$.

Väikeste katsete arvuga erinevates katseseeriates võib suhteline sagedus olla oluliselt erinev. Katsete arvu suurenemisel on suhtelisel sagedusel tendents stabiliseeruda, s.t. ta läheneb teatud kindlale arvule.

Statistiliseks tõenäosuseks nimetatakse suhtelist sagedust küllalt suure katsete arvu korral.

Näide 5. 1777.a. viskas Buffon [büffoon] münti 4040 korda. Vapp tuli 2048 korral ehk vapi sagedus oli k = 2048, järelikult suhteline sagedus $w = 0{,}507$. Vapi esinemise matemaatiline tõenäosus $P = 0{,}5$. Nagu näha $w \to P$.

3. Tõenäosuste korrutamise teoreem

Kaht sündmust nimetatakse sõltumatuteks, kui ühe sündmuse tõenäosus ei sõltu teise sündmuse toimumisest või mittetoimumisest.

Näide 1. Olgu urnis 10 sinist ja 16 rohelist kuuli. Võtame urnist ühe kuuli, pannes selle kohe tagasi. Siis teisel korral võetud kuuli värvus ei sõltu eelmisel katsel saadud tulemusest ja mõlemal korral on sinise kuuli saamise tõenäosus $p(S) = \frac{10}{26}$.

Kaht sündmust nimetatakse sõltuvateks, kui ühe sündmuse tõenäosus sõltub teise sündmuse toimumisest. Olgu sündmused A ja B sõltuvad, siis sündmuse B tõenäosust, arvutatuna eeldusel, et sündmus A on toimunud, nimetatakse sündmuse B tinglikuks tõenäosuseks ja tähistatakse $P_A(B)$.

Näide 2. Olgu urnis 10 sinist ja 16 rohelist kuuli. Esimesel korral võtame urnist kuuli ja teda tagasi ei pane. Teisel korral sinise kuuli saamise tõenäosus sõltub sellest, mis värvi kuuli esimesel korral võtsime. Kui esimesel katsel saime sinise kuuli, siis sinise kuuli saamise tõenäosus $P_S(S) = \frac{9}{25}$. Kui esimesel katsel saime rohelise, siis $P_R(S) = \frac{10}{25}$.

Kahe sündmuse korrutise tõenäosus sõltub sellest, kas sündmused on sõltumatud või sõltuvad.

Teoreem 1. Sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosus on võrdne nende sündmuste tõenäosuste korrutisega

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Teoreem 2. Teineteisest sõltuvate sündmuste korrutise tõenäosus on võrdne ühe sündmuse tõenäosuse ja teise sündmuse tingliku tõenäosuse korrutisega, kus tinglik tõenäosus on leitud eeldusel, et üks sündmustest on juba toimunud.

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

Näide 3. Loosirattas olevast 100 piletist võidavad 10. Kui tõenäone on kahel järjestikusel võtmisel võitude saamine. Olgu sündmus A_1 võit esimesel võtmisel, A_2 — teisel võtmisel. Sündmust A (kahel järjestikusel võtmisel ainult võitude saamine) võib vaadelda sündmuste A_1 ja A_2 korrutisena,

$$A = A_1 \cap A_2.$$

Et $P(A_1) = \frac{10}{100}$ ja $P_{A_1}(A_2) = \frac{9}{99}$, siis $P(A) = P(A_1 \cap A_2) =$
$= P(A_1)P_{A_1}(A_2) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} = \frac{1}{110}$.

4. Tõenäosuste liitmise teoreem

Sündmuste summa tõenäosuse leidmisel tuleb eristada kaht juhtu: välistavad ja mittevälistavad sündmused.

Teoreem 1. Teineteist välistavate sündmuste summa tõenäosus võrdub liidetavate sündmuste tõenäosuste summaga:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Teoreem 2. Teineteist mittevälistavate sündmuste summa tõenäosus võrdub liidetavate tõenäosuste summaga, millest on lahutatud nende sündmuste koosesinemise ehk korrutise tõenäosus:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Näide 1. Ühe täringuviske korral tähistagu:
D sündmust „tuleb paarisarv silmi";

E sündmust „tuleb vähemalt 3 silma";

F sündmust „tuleb 1 silm".

Siis D ja F on teineteist välistavad sündmused, aga D ja E mitte. Kasutame teoreeme 1 ja 2.

$$P(D \cup F) = P(D) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E) =$$

$$= P(D) + P(E) - P(D) \cdot P_D(E) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Olgu meil n üksteist välistavat sündmust, s.t. täielik sündmuste süsteem $A_1, A_2, \ldots A_n$. Sündmust, mille puhul üks neist kindlasti toimub, võib vaadelda nende sündmuste summana $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Täieliku sündmuste süsteemi moodustavate sündmuste tõenäosuste summa võrdub ühega.

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1$$

Nii ka sündmus A ja tema vastandsündmus $\bar{A}$ moodustavad täieliku sündmuste süsteemi ja

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Näide 2. Statistiliste andmete põhjal võib tütarlapse sündimise tõenäosuse võtta võrdseks 0,482. Leiame poisslapse sündimise tõenäosuse: 1 - 0,482 = 0,518.

5. Pidevad ja diskreetsed juhuslikud suurused

Juhusliku katse tulemuse võime esitada arvu abil. Nii saame juhusliku suuruse, mis võib omandada antud tingimustes ühe oma võimalikest väärtustest. Diskreetse juhusliku suuruse väärtuste hulk on loenduv, pideva juhusliku suuruse väärtusi üle loendada ei saa, nende hulk on mitteloenduvalt lõpmatu.

Pidevateks juhuslikeks suurusteks on näiteks aeg, pikkus; diskreetseteks – täringu silmade arv, laste arv peres. Pideva juhusliku suuruse muutumine võib olla kuitahes väike, diskreetne juhuslik suurus muutub alati hüppeliselt.

6. Diskreetse juhusliku suuruse jaotus. Jaotustabel

Juhusliku suuruse iga võimaliku väärtuse esinemine antud katsel on juhuslik sündmus. Järelikult võib iga väärtuse esinemise võimalikkust iseloomustada vastava väärtuse esinemise tõenäosuse abil.

Seadust, mis määrab seose juhusliku suuruse kõigi võimalike väärtuste ja nende tõenäosuste vahel, nimetatakse juhusliku suuruse jaotusseaduseks e. jaotuseks.

Tähistame juhuslikke suurusi tähestiku suurte tähtedega, võimalikke väärtusi väikeste tähtedega ehk juhuslik suurus X võib omandada väärtusi x_1, x_2,... . Väärtuse x_i tõenäosuse tähis on p_i $(i = 1,2,...)$.

Üheks lihtsamaks jaotusseaduse esitamisviisiks on jaotustabel.

x	x_1	x_2		x_n
p	p_1	p_2		p_n

Jaotustabel võib olla esitatud ka intervallitud tabelina, s.t., et ühes reas on võimalike väärtuste muutumisvahemiku intervallid ja teises reas väärtuste vastavasse intervalli kuulumise tõenäosused.

XX	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_{n-1} - x_n$
p	p_1	p_2	...	p_n

7. Pideva juhusliku suuruse jaotusseadus. Jaotusfunktsioon

Pideva juhusliku suuruse jaotusseadust on võimalik esitada intervallitud jaotustabeli abil, mis annab väärtuse antud pikkusega intervalli sattumise tõenäosuse. Suuruse väärtuste loendamatu hulga tõttu pole võimalik anda jaotustabelit üksikväärtuste kaupa.

Parem on aga pideva juhusliku suuruse jaotusseadust esitada funktsioonina.

Tõenäosust selleks, et juhuslik suurus X omandab antud arvust x väiksema väärtuse, nimetame juhusliku suuruse <u>jaotusfunktsiooniks</u>: $F(x) = P(X < x)$.

Jaotusfunktsioon on reaalarvulise argumendi x funktsioon. F(x) on kasutatav nii pideva kui ka diskreetse juhusliku suuruse korral. Pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on pidev.

Jaotusfunktsiooni omadusi.

1) Jaotusfunktsioon on null, kui $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{ehk} \quad F(-\infty) = 0.$$

2) Jaotusfunktsiooni piirväärtus on üks, kui $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \quad \text{ehk} \quad F(\infty) = 1.$$

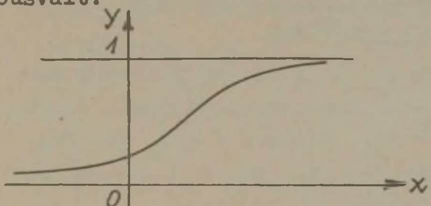
3) Jaotusfunktsioon on mittekahanev, s.t.

$$F(x_2) \geqslant F(x_1), \text{ kui } x_2 > x_1.$$

4) Kui juhusliku suuruse kõik võimalikud väärtused asuvad vahemikus (a,b), siis

$$F(x) = 0, \text{ kui } x \leqslant a;$$
$$0 < F(x) < 1, \text{ kui } a < x < b;$$
$$F(x) = 1, \text{ kui } b \leqslant x.$$

<u>Kokkuvõte</u>. Jaotusfunktsioon F(x) on mittekahanev ja selle väärtused asuvad 0 ning 1 vahel. Jaotusfunktsiooni graafik (joonis 1) asub sirgete $y = 0$ ja $y = 1$ vahel ning kulgeb tõusvalt.



Joonis 1

Jaotusfunktsiooni graafikut nimetatakse <u>kumulaadiks</u>.

8. Tihedusfunktsioon

Juhusliku suuruse jaotuse üheks esitusviisiks oli jaotusfunktsioon. Leides jaotusfunktsioonist tuletise, saame funktsiooni p(x), mida nimetatakse <u>tõenäosustiheduseks</u> antud punktis x.

$$p(x) = F'(x).$$

Järelikult võib juhusliku suuruse jaotust esitada ka <u>tihedus-</u>

funktsiooni p(x) kaudu.

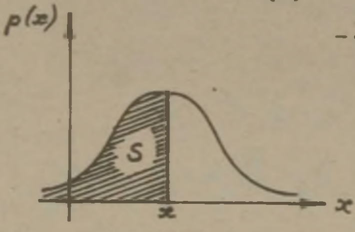
Tihedusfunktsiooni omadusi.

1) Tihedusfunktsioon on mittenegatiivne funktsioon $p(x) \geqslant 0$, sest $F(x)$ on mittekahanev funktsioon, järelikult tema tuletis on mittenegatiivne.

2) Teadaoleva tiheduse p(x) järgi saab leida jaotusfunktsiooni järgmiselt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx,$$

joonisel 2 $S = F(x)$



Joonis 2

3) Integraal lõpmatutes rajades tõenäosustihedusest on võrdne ühega

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1,$$

sest $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$

9. Juhusliku suuruse antud vahemikku sattumise tõenäosus

Vaatleme ülesannet, kui tõenäone on, et juhuslik suurus omandab väärtuse antud väärtuste x_1 ja x_2 vahel, s.t. et tahame leida $P(x_1 < X < x_2)$. Sündmus $X < x_2$ on kahe teineteist välistava sündmuse $X < x_1$ ja $x_1 < X < x_2$ summa

$$X < x_2 = (X < x_1) \cup (x_1 < X < x_2).$$

Tõenäosuste liitmislause põhjal

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 < X < x_2).$$

Siit leiame, et

$$P(x_1 < X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$$

ehk

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

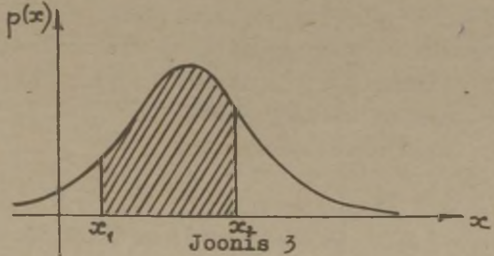
Juhusliku suuruse antud vahemikku sattumise tõenäosus on võrdne jaotusfunksiooni väärtuste vahega vahemiku otspunktides.

Kui juhusliku suuruse jaotus on antud tihedus funktsiooni kaudu, siis

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

Juhusliku suuruse antud vahemikku sattumise tõenäosus võrdub määratud integraaliga tõenäosustihedusest vahemiku otspunktidele vastavates rajades.

Geomeetriliselt vastab suuruse vahemikku sattumise tõenäosusele jaotuskõvera alune pindala vastavas vahemikus (joonis 3)



Joonis 3

10. Arvkarakteristikud

Juhusliku suuruse arvkarakteristikuteks e. parameetriteks, mis kirjeldavad selle suuruse teatud omadusi, on keskväärtus ja dispersioon.

Diskreetse juhusliku suuruse keskväärtuseks nimetatakse suuruse võimalike väärtuste ja nende tõenäosuse korrutiste summat

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Intervallitud tabeli korral tuleb arvutuslikeks väärtusteks võtta intervallide keskkohad.

Pideva suuruse keskväärtus defineeritakse järgmiselt:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx,$$

kus p(x) on tõenäosustihedus.

Kui leida vahe antud väärtuse ja keskväärtuse vahel $x_i - E(x)$, saame tsentreeritud hälbe, mis iseloomustab väär-

2*

tuste hajumist keskväärtuse suhtes. Hajuvuse karakteristikuna kasutatakse kõige sagedamini dispersiooni D(X).

Juhusliku suuruse <u>dispersiooniks</u> nimetatakse suuruse tsentreeritud hälbe ruudu keskväärtust. Dispersiooni arvutamine toimub järgmiste eeskirjade kohaselt:

diskreetse suuruse korral

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 p_i;$$

pideva suuruse korral

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - E(X)\right]^2 p(x)dx.$$

Dispersioon on alati mittenegatiivne. Ruutjuurt dispersioonist nimetatakse <u>standardhälbeks</u> σ e. $\sigma = \sqrt{D(X)}$. Mida suurem on dispersioon või standardhälve, seda rohkem on suuruse väärtused hajutatud keskväärtuse suhtes.

Näide 1. Olgu antud jaotustabel

x	-3	-1	0	1	2	3
p	0,10	0,15	0,20	0,15	0,30	0,10

Leida keskväärtus ja dispersioon.

$$E(X) = (-3)\cdot 0,10 + (-1)\cdot 0,15 + 0\cdot 0,2 + 1\cdot 0,15 + 2\cdot 0,30 + +3\cdot 0,10 = \underline{0,60}$$

$$D(X) = (-3-0,60)^2\cdot 0,10 + (-1-0,60)^2\cdot 0,15 + + (0-0,60)^2\cdot 0,20 + (1-0,60)^2\cdot 0,15 + + (2-0,60)^2\cdot 0,30 + (3-0,60)^2\cdot 0,10 = \underline{2,94}$$

Näide 2. Leida ühtlase jaotuse (vt. punkt 14) keskväärtus ja dispersioon, kui tõenäosustihedus

$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{ kui } x \leq a; \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ kui } a < x < b; \\ 0, \text{ kui } b \leq x. \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

$$D(X) = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \Big[x^2 - (a+b)x +$$

$$+ \frac{(a+b)^2}{4}\Big]dx = \frac{1}{b-a}\Big[-\frac{x^3}{3} - \frac{(a+b)x^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{4}x\Big]_a^b = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Tihti tuuakse sisse normeeritud hälve t, mis on tsentreeritud hälbe ja standardhälbe jagatis

$$t_i = \frac{x_i - E(X)}{\sigma}.$$

Normeeritud hälbe keskväärtus on alati null ja dispersioon ning standardhälve üks.

11. Binoomjaotus

Muutumatutes katsetingimustes sooritatavaid katseid, kus iga järgmise katse tulemus ei sõltu eelmisest, nimetatakse sõltumatuteks katseteks. Kui igal katsel huvitab meid ainult see, kas sündmus A toimus või ei toimunud, räägime korduvate katsete skeemist.

Sündmuse A toimumisele ühel katsel seame vastavusse suuruse X järgmiselt: kui katsel A toimub, siis omistame suurusele X väärtuse 1, ja kui ei toimu, toimub $\bar{A}$, siis -1. Kui sündmuse A tõenäosus ühel katsel on p, siis sündmuse $\bar{A}$ tõenäosus on q = 1-p. Saame x jaotustabeli

x	0	1
P	q	p

Saadud jaotust nimetatakse kahepunktiliseks jaotuseks. Selle jaotuse keskväärtus on

$$E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

ja dispersioon

$$D(X) = 1 \cdot p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Tihti tuleb aga lahendada järgmine ülesanne: kui suur on tõenäosus sündmuse A k-kordseks toimumiseks n sõltumatul katsel, kui A ja $\bar{A}$ tõenäosused on üksikkatsel vastavalt p ja q = 1-p?

Ühel katsel on kaks võimalust, vastavad tõenäosused $P(A) = p$ või $P(\bar{A}) = q$.

Kahel katsel on neli võimalust, ja tõenäosuste korrutise teoreemi kohaselt vastavad tõenäosused $P(\bar{A}\bar{A}) = q^2$,

$P(\bar{A}A) = qp$, $P(A\bar{A}) = pq$, $P(AA) = p^2$.

Kolmel katsel on kaheksa võimalust ja tõenäosused:

$P(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) = q^3$, $P(\bar{A}\bar{A}A) = q^2p$, $P(\bar{A}A\bar{A}) = q^2p$, $P(A\bar{A}\bar{A}) = q^2p$,
$P(\bar{A}AA) = p^2q$, $P(A\bar{A}A) = p^2q$, $P(AA\bar{A}) = p^2q$, $P(AAA) = p^3$.

Tähistame tõenäosust selleks, et sündmus A esineks n katsel k korda $P_{n,m}$. Vaatame üht juhtu, kui n katsel A ilmus k korda. Sel juhul saame tõenäosuseks p^kq^{n-k}. Aga mitu võimalust on, et sündmust A toimuks n katsel k korda? Neid võimalusi on täpselt nii palju, kui suur on kombinatsioonide arv n elemendist k kaupa

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot$$

Järelikult

$$P_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^kq^{n-k} \,.$$

Saadud valemit nimetatakse Bernoulli valemiks. On kokku lepitud, et $0! = 1$.

Selgub, et sündmuse sagedus k korduvatel katsetel on juhuslik suurus, mis võib omandada täisarvulisi väärtusi 0-st katsete arvuni n. Sageduse mistahes väärtuse k tõenäosus on leitav Bernoulli valemist.

Juhuslikku suurust x, mille väärtuste k tõenäosused on määratavad Bernoulli valemist, nimetatakse binoomjaotusega juhuslikuks suuruseks ja tähistatakse $X \sim B(n,p)$

Binoomjaotuse tabel on järgmine:

k	0	1	2	...	n
$P_{n,k}$	$P_{n,0}$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$	...	$P_{n,n}$

Näide 1. Koostada sageduse k jaotustabel, kui p = 0,4 ja n = 5.

Antud juhul on Bernoulli valem

$$P_{5,k} = \frac{5!}{k!(5-k)!}\, 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{5-k}, \text{ kus } k = 0,1,2,..5$$

k	0	1	2	3	4	5
$P_{5,k}$	0,078	0,259	0,346	0,230	0,077	0,010

Binoomjaotuse omadusi.

1) Sageduse k kõigi võimalike väärtuste tõenäosuste summa on üks,

$$\sum_{k=0}^{n} P_{n,k} = 1.$$

2) Tõenäosused $P_{n,k}$ k kasvades algul suurenevad, siis vähenevad.

3) Sageduse k keskväärtus on võrdne katsete arvu ja tõenäosuse üksikkatsel p korrutisega $\bar{x}_k = np$.

4) Sageduse k dispersioon on $\sigma^2 = npq$.

5) Suhtelise sageduse $w = \frac{k}{n}$ keskväärtus ei sõltu katsete arvust ja võrdub tõenäosusega üksikkatsel $\bar{x}_w = p$, dispersioon $\sigma_w^2 = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

Sageduse seda väärtust, mille tõenäosus on suurim, nimetatakse tõenäoseimaks sageduseks μ.

Tõenäoseim sagedus on võrdne:

1) Keskväärtusega $\mu = np$, kui see on täisarv;

2) täisarvulise väärtusega vahemikus

$$np - q \leq \mu \leq np + p.$$

Näide 2. Leida tõenäoseim sagedus, kui p = 0,4 ja n = 5. Tõenäoseim sagedus $\mu = np$ e. $\mu = 5 \cdot 0{,}4 = 2$.

Näide 3. Leida tõenäoseim märgi tabamiste arv üheksast lasust, kui üksiklasuga tabamise tõenäosus on p = 0,8.

Katsete arv n = 9, p = 0,8 ja q = 1 - 0,8 = 0,2. Korrutis np = 7,2, s.t. ei ole täisarv ja seepärast leiame

$$np + p = 7{,}2 + 0{,}8 = 8$$

$$np - q = 7{,}2 - 0{,}2 = 7$$

Tõenäoseimad sagedused on 7 ja 8.

12. Normaaljaotus

Normaaljaotuseks nimetatakse jaotust, mille tõenäosustihedus on antud funktsiooniga

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kus parameetrid μ ja σ on vastavalt keskväärtus ja standardhälve.

Suurust X, mille tõenäosustihedus on antud kujuga, nimetatakse <u>normaaljaotusega suuruseks</u> ja märgitakse lühidalt $X \sim N(\mu, \sigma)$. Tähtsaks erijuhuks on <u>standardiseeritud normaaljaotusega</u> suurus $X \sim N(0, 1)$, kus $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$. Vastav tihedusfunktsioon

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

on tabuleeritud. Tihedusfunktsiooni graafikut nimetatakse <u>normaalkõveraks</u> ehk <u>Gaussi kõveraks</u>.

Iga normaaljaotuse jaotusfunktsiooni võib esitada standardiseeritud normaaljaotuse jaotusfunktsiooni kaudu.

$$F_X(x) = F(t),$$

kus

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

kusjuures $t = \frac{x - \mu}{\sigma}$ on normeeritud hälve. Kuna see jaotusfunktsioon ei avaldu elementaarfunktsioonides, siis antakse tema väärtused tabelina. Sageli kasutatakse normaalse jaotusfunktsiooni asemel <u>Laplace'i funktsiooni</u>

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

või selle kahekordset väärtust

$$\overline{\Phi}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(t),$$

mis esitatakse tabelitena.

Jaotusfunktsiooni ja Laplace'i funktsiooni vahel kehtib seos

$$F(t) = 0{,}5 + \Phi(t).$$

Tabeli kasutamisel tuleb teada, et

$$\Phi(-t) = -\Phi(t)$$

ja $\Phi(t) \to 0{,}5$, kui $t \to \infty$. Praktiliselt on juba $\Phi(3) = 0{,}5$, nii et tabelis pole antudki rohkem väärtusi.

Normaaljaotusega suuruse $X \sim N(\mu, \sigma)$ antud vahemikku sattumise tõenäosuse leiame tabeli abil

$$P(x_1 < X < x_2) = F(t_2) - F(t_1),$$

kus $t_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$, $t_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$ on normeeritud hälbed.

Näide. On teada $X \sim N(168; 5{,}9)$. Kui tõenäone on, et juhusliku suuruse väärtused asuvad vahemikus (160, 180)?

Leiame normeeritud hälbed:

$$t_1 = \frac{160 - 168}{5{,}9} = -1{,}5; \quad t_2 = \frac{180 - 168}{5{,}9} = 2{,}0.$$

Tabelist 2 leiame vastavalt $F(-1{,}5) = 0{,}0668$ ja $F(2{,}0) = 0{,}9772$. Järelikult

$$P(160 < X < 180) = 0{,}9772 - 0{,}0668 = 0{,}9104.$$

Saadud tulemus näitab, et umbes 91% suuruse X väärtustest asuvad 160 ja 180 vahel.

Märgime, et nn. Ljapunovi suurte arvude seadusest järeldub, et rakendustes esineb kõige sagedamini just normaaljaotus.

13. Sageduse tõenäosuse leidmine normaaljaotuse abil

Suure katsete arvu n korral on tõenäosuse $P_{n,k}$ arvutamine Bernoulli valemi abil väga tülikas. Selgub, et sagedus kui juhuslik suurus allub normaaljaotusele, kui $n \to \infty$ ja küllalt suure katsete arvu korral (praktikas $n \geq 20$) võib kasutada seost

$$P_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(t),$$

kus $\varphi(t)$ on normaaljaotuse tihedus ja t sageduse k normeeritud hälve.

Sageduse k tõenäosuse leidmine toimub järgmise skeemi järgi:

1) leitakse sagedusele k vastav normeeritud hälve $t = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$;
2) leitakse saadud t väärtusele vastav $\varphi(t)$ väärtus tabelist, kusjuures $\varphi(t) = \varphi(-t)$;
3) leitakse otsitav tõenäosus

$$P_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(t).$$

Näide 1. Ampulli purunemise tõenäosus transportimisel on 0,5%. Kui tõenäone on, et 10 000-st ampullist on purunenud 40?

Lähteandmed $p = 0{,}005$, $n = 10\ 000$, $k = 40$.

Leiame $q = 1 - p = 0{,}995$; $\sqrt{npq} = \sqrt{10\ 000\cdot 0{,}005\cdot 0{,}995} = 7{,}05$

$$t = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 10000\cdot 0{,}005}{7{,}05} = -1{,}42 .$$

Tabelist leiame $\varphi(t)$ väärtuse kohal $t = 1{,}42$;

$$\varphi(1{,}42) = \varphi(-1{,}42) = 0{,}1456 \text{ ja}$$

$$P_{10000,40} = \frac{0{,}1456}{7{,}05} = 0{,}0206.$$

14. Ühtlane jaotus

Kui juhusliku suuruse väärtused asuvad kõik vahemikus (a,b) ning tõenäosustihedus on selles vahemikus konstantne, siis nimetatakse jaotust ühtlaseks.

Tihedusfunktsioon avaldub kujul (joon.4a)

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leqslant a, \\ c, & \text{kui } a < x < b, \\ 0, & \text{kui } x \geqslant b. \end{cases}$$

Leiame c väärtuse, arvestades tihedusfunktsiooni omadust

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

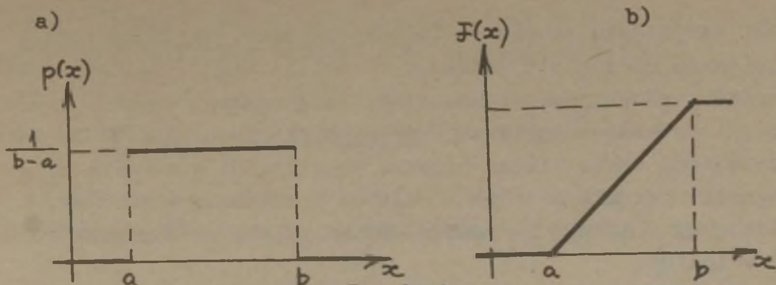
Leiame

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot dx + \int_{a}^{b} c dx + \int_{b}^{\infty} 0\cdot dx = cx\Big|_{a}^{b} = c(b-a)$$

Seega $c(b-a) = 1$ ja $c = \frac{1}{b-a}$. (joon. 4b)

Ühtlase jaotuse jaotusfunktsiooni leiame tihedusfunktsioonist

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b; \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$$



Joonis 4

Ühtlase jaotuse keskväärtuse ja dispersiooni leidsime punktis 10 näide 2.

II. MATEMAATILINE STATISTIKA

1. Matemaatilise statistika ülesanne ja valimimeetod

Matemaatiline statistika käsitleb statistiliste andmete süstematiseeerimise ja töötlemise meetodeid. Statistika uurimisobjektiks on mingi fikseeritud hulk kui tervik, mida nimetatakse statistiliseks üldkogumiks. Üldkogumi elemente nimetatakse tavaliselt objektiks. Objektide arvu üldkogumis nimetatakse kogumi mahuks (N). Statistilist kogumit uuritakse korraga kas mitme või ainult ühe tunnuse seisukohalt. Tunnus on suurus, mis on määratud üldkogumi igal objektil ja mille väärtust on võimalik mõõta. Tunnuse iseloom võib olla mitmesugune. Tunnuseid, mille väärtusteks on arvud, nimetatakse kvantitatiivseteks tunnusteks. Tunnuseid, mis näitavad objekti teatavaid omadusi või kuulumist teatavasse hulka, nimetatakse kvalitatiivseteks tunnusteks. Kvalitatiivse tunnuse väärtused ei ole arvulised , kuid neid võib kokkuleppeliselt tähistada arvudega. Lõppkokkuvõttes võime öelda, et uuritavad tunnused on juhuslikud suurused, mis võivad omandada erinevaid väärtusi.

Olgu meil tarvis uurida mingit tunnust, mis esineb teatud objektidel. Harilikult ei ole võimalik võtta vaatluse alla kõiki objekte, vaid ainult osa nendest. Vaatluse alla võetud objektid moodustavad valimi mahuga n. Valimi uurimise tulemused aga üldistatakse kõigile samatüübilistele objektidele.

Siin kirjeldatu kannab valimimeetodi nime. Valimimeetodiga uuritakse üldkogumit kaudselt — valimi kaudu. Valimis peab uuritav tunnus jaotuma samuti kui üldkogumis. Valimi ja üldkogumi kooskõla nimetatakse representatiivsuseks. Valimi moodustamisel tuleb silmas pidada, et elemendi sattumine üldkogumist valimisse ei tohi sõltuda uuritavast tunnusest. Üldkogumi elementidel peab olema valimisse sattumiseks võrdne võimalus.

Valimimeetodi puhul tehakse vahet kaht liiki valimite vahel:

1) juhuslik korduv valim, kus element tagastatakse üldkogumisse pärast uurimist ja tal on võimalik sattuda valimisse korduvalt;

2) juhuslik kordumatu valim, kus elemente valimisse ei tagastata.

Kui eespool tutvusime juhuslike suurustega, siis saime nende jaotusseaduse, suuruse väärtuste ja tõenäosuste vahelise seose välja arvutada. Statistikas aga esineb olukord, kus juhusliku suuruse jaotusseadus on tundmatu. Jaotusseaduse ja selle parameetrite (keskväärtus, dispersioon) hindamiseks tuleb teha katseid.

2. Katseandmete esitusviise

Tehes n katset ja uurides üht juhuslikku suurust, saame selle suuruse väärtuste jada $x_1, x_2, \ldots x_n$, mida nimetatakse valimiks. Kui selles jadas esineb mõni väärtus korduvalt, on mõttekas saadud tulemused esitada sagedustabelina,

x	x_1	x_2	...	x_m
k	k_1	k_2	...	k_m

kus ühes reas on korrastatult kõik esinevad väärtused x_i ja teises reas nende väärtuste sagedused k_i ($i = 1,\ldots m$). Arvu, mis näitab, mitu korda mingi väärtus esineb valimis, nimetatakse väärtuse sageduseks. Valimi mahuks on kõikide sageduste summa

$$n = \sum_{i=1}^{m} k_i.$$

Kui mõõdetav tunnus on pidev, s.t. tal on väga palju erinevaid väärtusi, kasutatakse intervallitud tabelit

x	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	...	$x_{m-1} - x_m$
k	k_1	k_2	...	k_m

Väärtuse x_i sageduse k_i ja valimi mahu n jagatist nimetatakse väärtuse x_i <u>suhteliseks sageduseks</u> w_i:

$$w_i = \frac{k_i}{n}.$$

Tabelit

x	x_1	x_2	...	x_m
w	w_1	w_2	...	w_m

nimetatakse suuruse <u>statistiliseks jaotustabeliks</u>. Paneme tähele, et

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1.$$

Näide 1. Üliõpilaste hinded X kõrgema matemaatika eksamil olid järgmised:

5 5 4 5 3 4 5 3 4 5

Vastavad sagedustabel ja statistiline jaotustabel on järgmised:

x	5	4	3
k	5	3	2

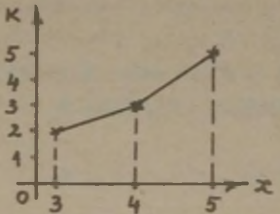
x	5	4	3
w	0,5	0,3	0,2

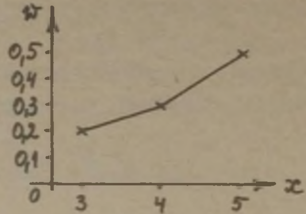
Märgime, et mida suurem on katsete arv n, seda paremas kooskõlas on teoreetiline ja statistiline jaotustabel.

Bernoulli suurte arvude seadus väidab, et kui katsete arv $n \to \infty$, siis suhteline sagedus w_i läheneb väga suure tõenäosusega väärtuse x_i esinemise tõenäosusele p_i. See seadus õigustab tõenäosusteoorias statistilise tõenäosuse kasutamist.

Toodud tabelite näitlikustamiseks kasutatakse ka graafikuid. Selleks kanname abstsissteljele juhusliku suuruse X väärtused x ja ordinaatteljele sageduse k või suhtelise sageduse w väärtused. Kokkukuuluvad suuruse X väärtused x_i ja sageduse väärtused k_i või suhtelise sageduse väärtused w_i kujutavad tasapinna punktidena (x_i, k_i) või (x_i, w_i). Ühendades saadud punktid sirgetega, saame murdjoone, mida nimetatakse <u>polügooniks</u>.

Näide 2. Näites 1 toodud tabelitele vastavad polügoonid on



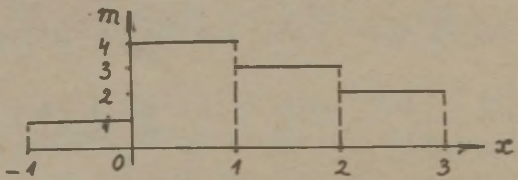


Ka intervallitud tabeli võib geomeetriliselt kujutada. Selleks kanname abstsissteljele intervallide piirid ning ehitame neile ristkülikud, mille kõrguseks on elementide arv vastavas klassis. Saadud graafikut nimetatakse <u>histogrammiks</u>.

Näide 3. On antud intervallitud tabel

x	-1–0	0–1	1–2	2–3
m	1	4	3	2

Leiame histogrammi



3. <u>Aritmeetiline keskmine ja dispersioon</u>

Valimi <u>aritmeetiliseks keskmiseks</u> $\bar{x}$ nimetatakse tunnuse kõigi väärtuste summa ja väärtuste üldarvu jagatist

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Näide 1. Olgu ühel päeval vastanud üliõpilaste eksamihinded järgmised:

5 5 3 2 4 3 4 4 5 3 2 3.

Leida aritmeetiline keskmine.

Leiame, et $n = 12$. Siis

$$\bar{x} = \frac{1}{12}(5 + 5 + 3 + 2 + 4 + 3 + 4 + 4 + 5 + 3 + 2 + 3) = 3{,}58$$

Katsete arvu suurendamisel juhusliku suuruse keskväärtus ja katsel saadud väärtuste aritmeetiline keskmine erinevad teineteisest järjest vähem

$$E(\bar{X}) \approx \bar{x}$$

Juhusliku suuruse dispersioon σ^2 on defineeritud kui aritmeetilise keskmise suhtes leitud väärtuste hälvete ruutude summa. Nii saame vastavad arvutuseeskirjad:

1) valimi korral

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2;$$

2) sagedustabeli korral

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 k_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 k_i - \bar{x}^2;$$

3) statistilise jaotustabeli korral

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 w_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 w_i - \bar{x}^2.$$

Dispersiooni arvutuseeskiri on sümboolselt esitatav kujul

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

— dispersioon võrdub väärtuste ruutude keskväärtuse ja keskväärtuse ruudu vahega.

Näide 3. Leiame näites 2 toodud tabelist dispersiooni. Arvutused on soovitav teostada tabelis

x	k	x^2	xk	x^2k
2	2	4	4	8
3	4	9	12	36
4	3	16	12	48
5	3	25	15	75
$\sum$	12		43	167

$$\bar{x} = \frac{43}{12} = 3{,}58; \quad \sigma^2 = \frac{167}{12} - (3{,}58)^2 \approx 1{,}1; \quad \sigma = \sqrt{1{,}34} = 1{,}16.$$

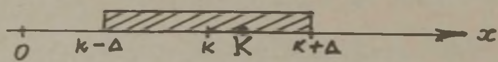
4. Statistilise hinnangu mõiste

Tegelikkuses uuritava tunnuse jaotus valimis ei kopeeri täpselt selle tunnuse jaotust üldkogumis. Nii siis tuleb teha vahet valimist leitud karakteristiku ja üldkarakteristiku vahel. Valimist leitud karakteristikute väärtusi nimetatakse statistilisteks hinnanguteks. Olgu üldkarakteristikuid tähistatud järgmiselt: keskväärtus μ, dispersioon σ^2, tõenäosus p. Valimist leitud karakteristikud on vastavalt aritmeetiline keskväärtus $\bar{x}$, dispersioon s^2, suhteline sagedus w. Siin käsitletud hinnanguid nimetatakse punkthinnanguteks. Punkthinnang on juhuslik suurus, millel on oma mitte teada olev jaotusseadus ja pole selge, kui suur on tema erinevus hinnatavast üldkarakteristikust. Punkthinnangu täpsuse kirjeldamiseks kasutatakse vahemikhinnangut. Valimi põhjal saab määrata väärtuste vahemiku, mis sisaldab üldkarakteristikut K (kas μ, σ^2 või p) teatud tõenäosusega. Tavaliselt võetakse vahemikhinnang sümmeetriliselt punkthinnangu k (kas $\bar{x}$, s^2 või w) suhtes piirides $k - \Delta$ kuni $k + \Delta$ (joonis 5). Vahemikku $(k - \Delta,\ k + \Delta)$ nimetatakse usaldusintervalliks, Δ - piirveaks, $k \pm \Delta$ — usalduspiirideks.

Tõenäosust, millega usaldusintervall katab üldkarakteristikut K, nimetatakse usaldusnivooks α:

$$\alpha = P(k - \Delta < K < k + \Delta) \text{ ehk } \alpha = P(|K-k| < \Delta).$$

Teisiti öeldes — usalduspiirkond on vahemik, milles etteantud tõenäosusega ehk usaldusnivooga sisaldub üldkarakteristik (joonis 5).



Joonis 5.

Usaldusnivoo asemel kasutatakse vahel ka olulisusenivood e. riskiprotsenti γ, mis on defineeritud kui $\gamma = 1 - \alpha$.

Teoreetilised uurimused on näidanud, et üldkeskmise parimaks hinnanguks on valimi keskmine $\bar{x}$, tunnuse tõenäosuse p parimaks hinnanguks on valimist leitud suhteline sagedus w, ülddispersiooni σ^2 parimaks hinnanguks on valimidispersioon s^2 korrutatud teguriga $\frac{n}{n-1}$ s.t. $\sigma^2 \approx \frac{ns^2}{n-1}$.

5. Keskväärtuse usaldusintervall, kui üldkogumi standardhälve on teada

Olgu X mingi juhuslik suurus, mis allub normaaljaotusele ja mille standardhälve σ on teada. Olgu antud selle suuruse mingi valim, s.t. n väärtust $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Kui valim on saadud mõõtmiste tulemusena (näit. analüütiliste kaaludega kaalumisel), siis võetakse üldkogumi standardhälbeks σ aparaadi (kaalude) viga, mis on antud aparaadi (kaalude) passis.

Saab näidata, et üldkogumi keskväärtuse μ usaldusintervall on järgmine:

$$\bar{x} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

millesse keskväärtus μ kuulub tõenäosusega $\alpha = 1 - \gamma$. Suurust $z_{\gamma/2}$ nimetatakse standardiseeritud normaaljaotuse $F(t)$ täiendkvantiiliks, ta leitakse kas spetsiaalsetest tabelitest (tabel 3) või standardiseeritud normaaljaotuse $F(t)$ tabelist (tabel 2).

Näide 1. Analüütiliste kaaludega kaalumisel saadi järgmised tulemused (grammides)

0,70; 0,67; 0,70; 0,75; 0,74; 0,65; 0,76;
0,75; 0,78; 0,72.

Kaalude passis oli antud kaalude täpsuseks ± 0,05 grammi. Leida keskväärtuse usaldusintervall usaldusnivooga 0,60.

Ülesandes on seega antud järgmised suurused $\sigma = 0{,}05$, $n = 10$, $\alpha = 0{,}60$, $\gamma = 0{,}40$.

Esmalt arvutame

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(0{,}70 + 0{,}67 + 0{,}70 + 0{,}75 + 0{,}74 + 0{,}65 + 0{,}76 + 0{,}75 + 0{,}78 + 0{,}72) = 0{,}721$$

Leiame $z_{0,2}$. Selleks tuleb lahendada võrrand $0{,}8 = F(t)$. Tabelist 2 leiame $t = 0{,}84$ või tabelist 3 saame $z_{0,2} = 0{,}84$. Seega usaldusintervall on

$$0{,}721 - 0{,}84\frac{0{,}05}{\sqrt{10}} < \mu < 0{,}721 + 0{,}84\frac{0{,}05}{\sqrt{10}},$$

$$0{,}708 < \mu < 0{,}734 .$$

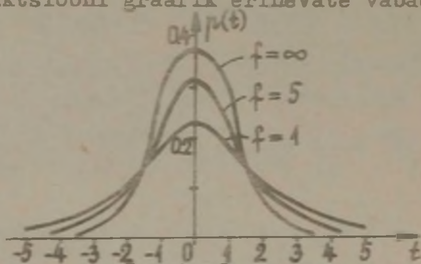
Tõenäosusega 0,60 kuulub ravimi keskmine kaal usaldusintervalli (0,708; 0,754).

6. Keskväärtuse usaldusintervall valimi andmetel

Matemaatilises statistikas kasutatakse ka niinimetatud t- ehk Studenti jaotust. Studenti jaotuse tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon sõltuvad vabadusastmete arvust f = n-1, kus n on valimi maht. Studenti jaotuse tihedusfunktsioon on esitatav kujul

$$p(t) = B_n\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

kus B_n sõltub valimi mahust n. Joonisel 6 on toodud t-jaotuse tihedusfunktsiooni graafik erinevate vabadusastmete f korral.



Joonis 6

Nagu näha, graafik on sümmeetriline ordinaattelje suhtes. Väikese vabadusastmete arvu puhul erineb t-jaotuse tihedusfunktsiooni graafik tunduvalt normaaljaotuse tihedusfunktsiooni graafikust. Suurte f väärtuste korral on see erinevus väiksem ja kui $f \to \infty$, siis t-jaotus läheb üle normaaljaotuseks.

Saab näidata, et üldkogumi keskväärtuse μ usaldusintervall valimi andmetel on järgmine

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\gamma/2} < \mu < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\gamma/2}, \qquad (2)$$

millesse keskväärtus μ kuulub tõenäosusega $\alpha = 1-\gamma$. Suurust $t_{\gamma/2}$ nimetatakse t-jaotuse täiendkvantiiliks, mis leitakse spetsiaalsest tabelist nr. 4.

Näide. Malmi sulatamisel on kahjulikuks lisandiks väävel. Kuue katsepartii analüüs näitas, et keskmiselt sisaldub sulami tonnis $\bar{x}$ = 4,00 kg väävlit. Arvutati ka valimi standardhälve, milleks osutus s = 0,30 kg. Võttes riskiprotsendiks 5%, leida, missugustes piirides võiks muutuda keskmine väävli hulk tonni maki kohta.

Siin antud juhul f = 5, võttes $\gamma = 0{,}05$, leiame t-jaotuse kvantiilide tabelist, et $t_{\gamma/2} = 2{,}57$. Asetades need arvud valemisse (2), näeme, et

$$3{,}68 < \mu < 4{,}32.$$

III. KORRELATSIOONITEOORIA

1. Funktsionaalne ja statistiline sõltuvus

Kaks suurust $\mathcal{X}$ ja $\mathcal{Y}$ on funktsionaalses sõltuvuses, kui ühe suuruse igale lubatavale väärtusele x vastab teise suuruse kindel väärtus y. Öeldakse, et y on argumendi x funktsioon, mida tähistatakse järgmiselt $y = f(x)$.

Leidub aga palju suurusi, mis on üksteisest sõltuvad, kuid ei ole täidetud funktsionaalse sõltuvuse definitsioonis rõhutatud tingimus, et ühe suuruse igale väärtusele vastab teise suuruse kindel väärtus. Nii on lugu juhuslike suurustega. Teame, et juhuslikku suurust iseloomustab tema jaotusseadus. Kui ühe suuruse igale väärtusele vastab teise suuruse väärtuste jaotus, mis muutub koos esimese suuruse muutumisega, siis nimetatakse kahe suuruse vahelist sõltuvust statistiliseks e. stohhastiliseks sõltuvuseks. Statistilise sõltuvuse üheks eriliigiks on korrelatsioon.

Statistilise sõltuvuse mõiste on laiem funktsionaalse sõltuvuse mõistest. Funktsionaalne sõltuvus on statistilise sõltuvuse üks piirjuhte, kui $\mathcal{X}$ ja $\mathcal{Y}$ on üksüheses vastavuses. Teiseks piirjuhuks on suuruste täielik sõltumatus.

Korrelatsiooniteooria tegelebki kahe juhusliku suuruse vahelise seose uurimisega. Korrelatsiooniteoorias on kaks põhiülesannet:

1) suurustevahelise seose tugevuse hindamine, s.t. selgitamine, kuivõrd ühe vaadeldava suuruse muutumine oleneb teise suuruse muutumisest;

2) juhuslike suuruste vahelise juhuslikkust sisaldava seose esitamine funktsionaalse seose abil.

7-

2. Lähteandmete esitusviise

Teeme n katset. Igal katsel uurime kaht tunnust: x ja y. Katsetel saadud tunnuste väärtused x ja y esitame tabelina, saame lihtsa korrelatsioonitabeli

x	x_1	x_2	x_3 ... x_n
y	y_1	y_2	y_3 ... y_n

Siin võib esineda kordseid väärtuspaare, seetõttu on otstarbekas katseandmed korrastada mõlema tunnuse järgi. Saame korrelatsioonitabeli (tabel(*)), kus f_{ij} on väärtustepaari ($x_i y_j$) esinemisesagedus. Kehtivad järgmised seosed. Esinemisesageduste summa võrdub katsete arvuga $\sum\limits_{i,j=1} f_{ij} = n$.

$x \backslash y$	y_1	y_2	...	y_l	$\sum$
x_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1l}	$f_{1\cdot}$
x_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2l}	$f_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...
x_k	f_{k1}	f_{k2}	...	f_{kl}	$f_{k\cdot}$
$\sum$	$f_{\cdot 1}$	$f_{\cdot 2}$	...	$f_{\cdot l}$	n

(*)

Ühe tunnuse kindlale väärtusele vastab teise tunnuse väärtuste jaotus. Võib leida tunnuse mingi väärtuse esinemisesageduse, mis võrdub vastavas reas või veerus olevate sageduste summaga. Näiteks väärtuse x_i esinemisesagedus $f_{i\cdot} = \sum\limits_{j=1}^{l} f_{ij}$, väärtuse y_j esinemisesagedus $f_{\cdot j} = \sum\limits_{i=1}^{k} f_{ij}$

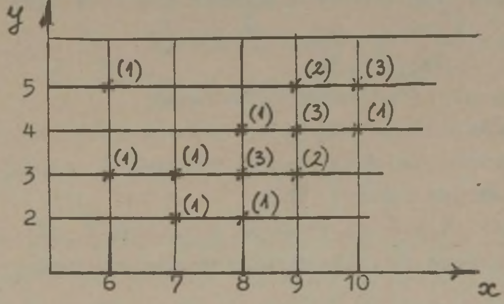
Näide 1. Grupis on 20 üliõpilast. Esitame kontrolltööl saadud punktide arvu x ja eksamihinded y lihtsa korrelatsioonitabelina

x	6	7	8	9	10	9	8	10	9	8	10	9	10	6	8	9	9	8	9	7
y	5	3	3	4	5	5	3	5	4	4	4	5	5	3	3	4	3	2	3	2

Sellele vastab korrelatsioonitabel

$x \backslash y$	2	3	4	5	Σ
6	0	1	0	1	2
7	1	1	0	0	2
8	1	3	1	0	5
9	0	2	3	2	7
10	0	0	1	3	4
Σ	2	7	5	6	20

Esitatud tabeli andmed võib kanda ka joonisele, saame <u>korrelatsioonivälja</u>, kus (x_i ; y_i) on punkt ristkoordinaadistikus, sulgudes on kirjutatud sagedus.



3. Korrelatsioonikordaja

Kahe juhusliku suuruse vahelise seose tugevuse uurimiseks tuuakse sisse korrelatsioonikordaja mõiste.

Tuletame meelde, et juhusliku suuruse dispersiooniks nimetatakse tsentreeritud hälbe ruudu keskväärtust

$$\mathcal{D}(X) = E[X - E(X)]^2.$$

Et vaatluse all on kaks suurust X ja Y, siis

$$\mathcal{D}(Y) = E\{[Y - E(Y)]^2\}.$$

8

Sõltumatute juhuslike suuruste $\mathcal{X}$ ja $\mathcal{Y}$ summa dispersioon on võrdne liidetavate dispersioonide summaga

$$\mathcal{D}(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \mathcal{D}(\mathcal{X}) + \mathcal{D}(\mathcal{Y}),$$

aga <u>sõltuvate juhuslike suuruste</u> korral

$$\mathcal{D}(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \mathcal{D}(\mathcal{X}) + \mathcal{D}(\mathcal{Y}) + 2C_{xy}$$

kus $C_{xy} = E\{[\mathcal{X} - E(\mathcal{X})][\mathcal{Y} - E(\mathcal{Y})]\}$ on <u>korrelatsioonimoment</u>. Kui $C_{xy} \neq 0$, siis juhuslikud suurused on statistilises sõltuvuses. Kui aga $C_{xy} = 0$, siis ei saa veel kindlalt väita, et $\mathcal{X}$ ja $\mathcal{Y}$ on teineteisest sõltumatud. Seda arvestades tuuaksegi sisse statistilise seose tugevuse hindaja korrelatsioonimomendi kaudu.

<u>Korrelatsioonikordajaks</u> nimetatakse korrelatsioonimomendi ja juhuslike suuruste standardhälvete korrutise jagatist

$$r = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad \text{kus} \quad \sigma_x = \sqrt{\mathcal{D}(\mathcal{X})} \quad \text{ja} \quad \sigma_y = \sqrt{\mathcal{D}(\mathcal{Y})}.$$

Korrelatsioonikordaja omadused:

1) sõltumatute suuruste korrelatsioonikordaja on null;

2) korrelatsioonikordaja väärtused ei ole väiksemad kui −1 ja suuremad kui 1, s.t. $-1 \leq r \leq 1$;

3) kui $r = \pm 1$, siis on suurused $\mathcal{X}$ ja $\mathcal{Y}$ funktsionaalses sõltuvuses ja nimelt lineaarses sõltuvuses.

4. <u>Korrelatsioonikordaja arvutamine</u>

Arvutamisel lähtume definitsioonist

$$r = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{1}$$

1) <u>Lihtsa korrelatsioonitabeli</u> korral, kui n katsel saadud tulemused on esitatud väärtuspaaridena (x_i, y_i), saame

$$C_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}, \tag{2}$$

kusjuures

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2; \qquad (3)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2. \qquad (4)$$

2) Korrelatsioonitabeli korral, kus n katsel saadud väärtused on korrastatud

$$C_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{k,l} f_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{k,l} f_{ij}\, x_i y_j - \bar{x}\bar{y},$$

kus $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_{i\cdot}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} y_j f_{\cdot j};$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 f_{i\cdot} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_{i} - \bar{x}^2; \qquad (6)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l}(y_j - \bar{y})^2 f_{\cdot j} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} y_j^2 f_{\cdot j} - \bar{y}^2. \qquad (7)$$

Märkus. Intervallide kaupa antud väärtuste korral tuleb suuruste arvutuslikes väärtusteks võtta intervallide keskkohad.

Näide 2. Leida punktis nr. 2 toodud näite 1 jaoks korrelatsioonikordaja ja hinnata kontrolltööde ja eksamil saadud hinnete vahelist seost.

Arvutusi on soovitav teostada tabelina.

x_i	$f_{i\cdot}$	$x_i f_{i\cdot}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_{i\cdot}(x_i - \bar{x})^2$	y_j	$f_{\cdot j}$	$y_j f_{\cdot j}$	$y_j - \bar{y}$	$(y_j - \bar{y})^2$	$(y_j - \bar{y})^2 f_{\cdot j}$
6	2	12	-2,45	6,0025	12,0050	2	2	4	-1,75	3,0625	6,1250
7	2	14	-1,45	2,1025	4,2050	3	7	21	-0,75	0,5625	3,9375
8	5	40	-0,45	0,2025	1,0125	4	5	20	0,25	0,0625	0,3125
9	7	63	0,55	0,3025	2,1175	5	6	30	1,25	1,5625	9,3750
10	4	40	1,55	2,4025	9,6100	Σ	20	75			19,7500
Σ	20	169			28,9500						

$$\bar{x} = \frac{169}{20} = 8{,}45; \qquad \sigma_x^2 = \frac{28{,}9500}{20} = 1{,}448, \qquad \sigma_x = 1{,}203.$$

8*

$$\bar{y} = \frac{75}{20} = 3{,}75, \quad \sigma_y^2 = \frac{19{,}7500}{20} = 0{,}988, \quad \sigma_y = 0{,}994.$$

Korrelatsioonimomendi leiame tabelist lk. 29.

$$C_{xy} = (6 \cdot 3 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 \cdot 1 + 8 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 3 \cdot 3 + 8 \cdot 4 \cdot 1 + 9 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 4 \cdot 3 + 9 \cdot 5 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \cdot 1 + 10 \cdot 5 \cdot 3)\frac{1}{20} - 8{,}45 \cdot 3{,}75 = \underline{0{,}56}.$$

$$r = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0{,}56}{1{,}196} = \underline{0{,}468}.$$

5. Lineaarne regressioon

Olgu meil lihtne korrelatsioonitabel, kuhu on kantud n katsel saadud tulemused (x_1, y_1) - (x_n, y_n). Et saada paremat ülevaadet, joonestame korrelatsiooniväl ja, saame teatud punktide (x_i, y_i) hulga xy-tasandil. Meid aga huvitab, kas poleks võimalik antud tabeli asemel saada ühte valemit. Sisuliselt see tähendab, et tahame kahe juhusliku suuruse x ja y vahelist sõltuvust lähendada funktsionoolse sõltuvusega y=f(x).Graafiliselt tähendaks see,et läbi katseliselt saadud punktide tuleks panna mingi kõver nn. regressioonikõver. Regressioon on matemaatilises statistikas juhuslike suuruste vahelise sõltuvuse esitamine funktsioonina.

Kõige lihtsam on regressioonikõveraks valida sirge, niisugusel juhul saame lineaarse regressiooni.

Olgu regressioonisirge esitatav võrrandina

$$y = ax + b. \tag{8}$$

Parameetrid a ja b määrame katsel saadud tulemustest vähimruutude meetodil. Vähimruutude meetodi idee seisneb selles, et parimaks sirgeks, mis esitab katseliselt saadud sõltuvust, peetakse seda, mille puhul katsel saadud väärtuste ja valemi (8) järgi arvutatud väärtuste vahede ruutude summa on vähim, s.t. suurus

$$u = [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + \ldots + [y_n - (ax_n + b)]^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2 \qquad (9)$$

oleks minimaalne.

Tuleb leida kahe muutuja a ja b funktsiooni, $u = u(a, b)$ miinimum. Miinimumiks tarvilik tingimus on antud juhul, et esimest järku osatuletised mõlema argumendi a ja b järgi võrduksid nulliga:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial b} = 0.$$

Leiame need osatuletised avaldisest (9)

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (ax_i + b)](-x_i);$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (ax_i + b)](-1).$$

Võrrutades saadud osatuletised nulliga, saame kahest võrrandist koosneva süsteemi parameetrite a ja b määramiseks.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (10)$$

Arvestades seoseid $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = n\bar{y}$,

saame selle süsteemi lahendi esitada kujul

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2},$$

$$b = \frac{\bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}. \qquad (11)$$

Kui kordajad a ja b on leitud, on teada ka regressioonisirge võrrand. Süsteemi (10) teise võrrandi võib esitada kujul

$$\bar{y} = a\bar{x} + b, \qquad (12)$$

millest nähtub, et regressioonisirge läbib alati $(\bar{x}, \bar{y})$, mida nimetatakse <u>korrelatsioonikeskpunktiks</u>.

Suurust a nimetatakse regressioonikordajaks ja tähistatakse $a = \varrho_{yx}$, kus esimene indeks y on <u>resultatiivne tunnus</u> ja teine x - <u>faktortunnus</u>. Seostest (10) järeldub, et

$$\varrho_{yx} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x^2}$$

ja

$$b = \bar{y} - \varrho_{yx}\bar{x}. \tag{13}$$

Nii võib korrelatsioonisirge (1) esitada ka valemiga

$$y = \varrho_{yx} x - \varrho_{yx}\bar{x} + \bar{y}. \tag{14}$$

Me oleksime võinud leida ka $x = \varphi(y)$, siis faktortunnuseks on y, resultatiivseks tunnuseks x. Analoogiliselt ülal esitatule saab x regressiooni uurimisel y suhtes regressioonisirge esitada kujul

$$x = \varrho_{xy} y - \varrho_{xy}\bar{y} + \bar{x}, \tag{15}$$

kus ϱ_{xy} on regressioonikordaja, kusjuures kehtib seos

$$\varrho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_y^2}. \tag{16}$$

Regressioonikordajate (13) ja (16) korrutisest ruutjuur annab korrelatsioonikordaja

$$r = \pm\sqrt{\varrho_{yx}\varrho_{xy}}. \tag{17}$$

Järelikult on korrelatsioonikordaja võrdne regressioonikordajate geomeetrilise keskmisega; märk ruutjuure ees ühtib regressioonikordaja märgiga.

Näide 3. Leida näite 1 ülesande jaoks regressioonisirge, valides faktortunnuseks x.

Leiame esialgu regressioonikordaja ϱ_{yx}, arvestades näites 2 saadud tulemusi: $\bar{x} = 8{,}45$; $\bar{y} = 3{,}75$; $\sigma_x^2 = 1{,}448$, $\sigma_y^2 = 0{,}988$, $C_{xy} = 0{,}562$.

$$\varrho_{yx} = \frac{0{,}562}{1{,}448} \approx 0{,}39.$$

Et regressioonisirge läbib alati korrelatsioonitsentrit, antud näites punkti (8,45; 3,75), siis võime välja kirjutada regressioonisirge võrrandi

$$y = 0,39\,(x - 8,45) + 3,75$$

ehk

$$0,39\,x - y - 0,37 = 0.$$

6. Mitmene korrelatsioon

Olgu antud kolm juhuslikku suurust x, y, z. Meid huvitab, kas nende suuruste vahel valitseb mingi seos ning kui tugev see on. Omades katsetel saadud tulemusi, leiame kõik kahe muutuja vahelised korrelatsioonikordajad:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{(n-1)\,\sigma_x \sigma_y},$$

$$r_{xz} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i z_i - n\bar{x}\bar{z}}{(n-1)\,\sigma_x \sigma_z}, \qquad (18)$$

$$r_{yz} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i z_i - n\bar{y}\bar{z}}{(n-1)\,\sigma_y \sigma_z}.$$

Nüüd arvutame osakorrelatsiooni kordajad

$$r_{xy(z)} = \frac{r_{xy} - r_{xz} r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}},$$

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy} r_{zy}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{zy}^2)}}, \qquad (19)$$

$$r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy} r_{xz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{xz}^2)}}.$$

Need valemid võimaldavad määrata kahe muutuja vahelise korrelatiivse seose tugevuse, elimineerides kolmanda mõju. Nii näiteks $r_{yz(x)}$ annab meile suuruste y ja z vahelise korrelatiivse seose tugevuse, kusjuures x mõju ei arvestata.

Kui valida x ja y faktortunnusteks, saame suurustevahelise korrelatsiooni tugevuse hindamiseks niinimetatud <u>vaba korrelatsioonikordaja</u>:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 + r_{yz}^2 - 2 r_{xy} r_{xz} r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}}, \qquad (20)$$

mis on alati positiivne ja võib omandada väärtusi 0 ja 1 vahel.

Kui $R = 0$, siis on z konstantne suurus x ja y erinevate väärtuste jaoks.

Kui $R = 1$, siis on nende suuruste väärtuste x, y, z vahel linaarne seos:

$$z = ax + by + c,$$

kus a, b ja c on mingid konstandid.

Näide. Leiame tammetõru pikkuse x, läbimõõdu y ja kaalu z vahelise korrelatsiooni, kui on antud katseandmed, (tabelis x, y, z veerg)

	x	y	z	x^2	y^2	z^2	xy	xz	yz
	31	17	51	961	289	2601	527	1581	867
	28	15	41	784	225	1681	420	1148	615
	29	15	43	841	225	1849	435	1247	645
	32	15	48	1024	225	2304	480	1536	720
	26	14	29	676	196	841	364	754	406
	28	16	43	784	256	1849	448	1204	688
	27	16	31	729	256	961	432	837	496
	31	13	32	961	169	1024	403	992	416
	34	14	39	1156	196	1521	476	1326	546
	23	12	19	529	144	361	276	437	228
Σ	289	147	376	8445	2181	14992	4261	11062	5627

Arvutustulemused kanname tabelisse, leiame summad. Valemite (3) ja (4) järgi leiame dispersioonid:

$$\sigma_x^2 = 9{,}29, \quad \sigma_y^2 = 2{,}01, \quad \sigma_z^2 = 85{,}44.$$

Korrelatsioonikordajad arvutame valemite (18) järgi:

$$r_{xy} = 0{,}33; \quad r_{xz} = 0{,}77; \quad r_{yz} = 0{,}84.$$

Nüüd leiame vaba korrelatsioonikordaja (20) R = 0,96. Saadud tulemus näitab, et tammetõru kaal sõltub oluliselt tõru pikkusest ja läbimõõdust.

IV. STATISTILISTE HÜPOTEESIDE KONTROLLIMINE

1. Statistilised hüpoteesid

Statistiliseks hüpoteesiks nimetame väidet üldkogumi tõenäosusjaotuse (või selle mingi parameetri) kohta.

Statistiliste hüpoteeside kontrollimise ülesanne esitatakse teineteist välistavate hüpoteeside paarina, milledest ühte nimetatakse **sisukaks hüpoteesiks** (H_1), selle väite alternatiivi — **nullhüpoteesiks** (H_0). Viimane on esimese vastand, s.t. kui ei kehti H_1, siis peab kehtima H_0 ja vastupidi.

Näiteks. Kirjandusest on teada, et teatavas droogis mõjuaine protsent pole suurem viiest. Rahvameditsiinis soovitatakse droogi valmistamiseks vajalikke ravimtaimi koguda suvisele pööripäevale eelneval täiskuu õhtul. Kui sel soovitusel on mingit reaalset alust, peaks see väljenduma suuremas mõjuaine protsendis. Olgu μ mõjuaine keskmine protsent täiskuu öös korjatud droogis. Siis probleemi võime esitada väitena mõjuaine keskmise taseme μ kohta. Hüpotees H_0 kehtib kui $\mu \leq 5$, hüpotees H_1 kui $\mu > 5$.

Probleemi lahendamisel tuleb langetada otsus hüpoteeside kohta. Katsetulemuste põhjal üks neist vastu võtta. Et otsus langetatakse valimi põhjal, siis võib ta osutuda ekslikuks.

2. Võimalikud vead

Hüpoteeside kontrollimisel võivad esineda neli järgmist juhtu.

A. Olgu nullhüpotees õige.

1) Teeme katse, s.t. statislise analüüsi, mis kinnitab H_0 õigsust, valime H_0.

2) Statistiline analüüs ei kinnita H_0 õigsust, valime

H_1, s.t. teeme <u>esimest liiki vea</u>.

B. Olgu nullhüpotees vale.

3) Statistiline analüüs kinnitab, et H_0 pole õige, valime H_1.

4) Statistiline analüüs ei kinnita, et H_0 on vale. Valime H_0 ja teeme sellega <u>teist liiki vea</u>.

Vigadel on erinevad tagajärjed, mida saab selgitada järgmisel näitel.

Olgu tarvis kindlaks teha, kas mingi uus ravim sobib kasutamiseks või on see liiga mürgine. Olgu nullhüpoteesiks „Ravim on liiga mürgine" = H_0. Esimest liiki vea teeme, kui tunnistame ravimi kasutamiskõlblikuks. See on ohtlik. Teist liiki vea puhul tunnistame ravimi mürgiseks, kuigi see nii pole. Selline viga pole ravimi kasutajale ohtlik, põhjustab aga täiendavate uurinute tegemist või tootmistehnika täiustamist, viies seega mittevajalikele kulutustele.

Nagu nägime, erinevate hüpoteesidega liituvad erinevad vead: võtame vastu H_1, võimalik esimest liiki viga; võtame vastu H_0, võimalik teist liiki viga. Kuna esimest liiki tagajärjed on raskemad, antakse ette tõke selle vea tegemise tõenäosusele, mida nimetatakse olulisuse nivooks γ . Siis on teist liiki vea tegemise tõenäosus tõkestatud suurusega $1 - \gamma = \alpha$.

Otsus hüpoteesi kehtivuse kohta langetatakse vastavalt usaldusnivoole α, nii et kui $P \leq \alpha$, siis ei loeta hüpoteesi kehtivaks. Seoses sellega valitakse tavaliselt sisukas hüpoteesiks H_1 väide, mida tahetakse tõestada, nullhüpoteesiks aga väide, mis vastab kehtivale olukorrale või traditsioonilistele tõekspidamistele.

3. <u>Statistiliste hüpoteeside kontrollimine. keskväärtuse võrdlemine</u>

Statistiliste hüpoteeside kontrollimine toimub tavaliselt vahemikhinnangute kaudu. Olgu näiteks nullhüpoteesiks see, et mingi hinnatav parameeter a omab etteantud väärtuse a_0, seega $H_0: a = a_0$. Alternatiivseks hüpoteesiks on $H_1: a \neq a_0$

Nagu teame eelnevast, saab kôiki statistilisi otsustusi teha vaid teatud tôenäosusega, tuues sisse olulisusenivoo ehk riskiprotsendi γ. Kôige sagedamini kasutatakse $\gamma = 0{,}05$ (risk on 5%-line), $\gamma = 0{,}01$ (1%) vôi $\gamma = 0{,}001$ (0,1%). Nüüd leiame parameetri a usaldusintervalli $(a_{1-\gamma/2}, a_{\gamma/2})$.

Kui antud väärtus a_0 langeb sellesse vahemikku, loeme nullhüpoteesi ôigeks, vastasel juhul on ôige alternatiivne hüpotees. Kvantiile $a_{1-\gamma/2}$ ja $a_{\gamma/2}$ nimetatakse hüpoteesi H_0 kriitilisteks väärtusteks.

Näide. Antud keemiline protsess toimub optimaalselt,kui kasutatava lahuse pH on 8,30. Tehti 5 pH môôtmist ja saadi

8,29; 8,30; 8,31; 8,30; 8,32.

Kas vôib nende andmete pôhjal lahuse pH lugeda vôrdseks 8.30-ga?

Nullhüpoteesiks vôtame väite pH = 8.30, arvutades $\bar{x} = 8{,}31$ ja $S = 0{,}013$. Kasutame valimimeetodis toodud valemit (2), vôttes $\mu = 8{,}30$ ja riskiprotsendiks 5. Siis tabelist 4 leiame $t_{\gamma/2} = 2{,}78$. Asetades need arvud valemisse (2), saame $8{,}29 < \mu < 8{,}33$, Et arv $\bar{x} = 8{,}31$ kuulub sellesse vahemikku, siis vôime lugeda nullhüpoteesi ôigeks.

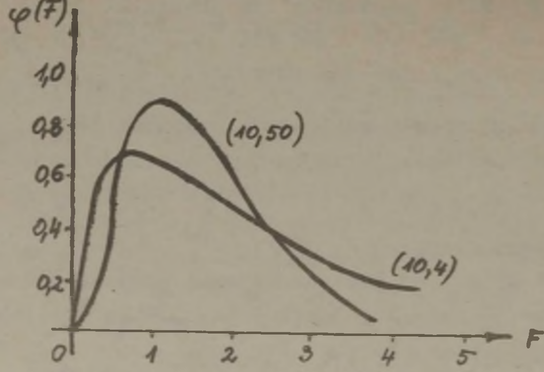
4. F-jaotus

Selles punktis tutvume veel ühe jaotusega, mida läheb meil edaspidi tarvis.

Olgu meil kaks valimit dispersioonidega S_1^2 ja S_2^2 ja vabadusastmete arvudega $f_1 = n_1 - 1$, $f_2 = n_2 - 1$. Olgu esimene valim vôetud mingist üldkogumist dispersiooniga σ_1^2, teine mingist teisest üldkogumist dispersiooniga σ_2^2. Moodustame suhte

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} : \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} = F(f_1, f_2). \tag{4}$$

Nii defineeritud suurus allub F-jaotusseadusele (ka Fisher--Snedecori jaotus). F-jaotus on ebasümmeetriline ja tema tõenäosusetiheduse graafiline kuju sõltub olulisel määral vabadusastmete arvust (joon. 7)



Joon. 7

Tabelis 5 on antud F-jaotuse täiendkvantiilid mitmesuguguste olulisusenivoode γ jaoks, sõltuvalt vabadusastmete arvudest $F_\gamma(f_1, f_2)$. Selgub, et F-jaotuse kasutamisel on tarvis leida ka täiendkvantiilid $F_{1-\gamma}$, kuid tabelis neid pole. Nende arvutamiseks on seos

$$F_{1-\gamma}(f_1, f_2) = \frac{1}{F_\gamma(f_2, f_1)} . \tag{5}$$

Näide. Arvutame täiendkvantiili $F_{0,95}(4,3)$. Valemi (5) põhjal ja täiendkvantiilide tabelist 5 saame

$$F_{0,95}(4,3) = \frac{1}{F_{0,05}(3,4)} = \frac{1}{6,6} = 0,15.$$

5. Dispersioonide võrdlemine

Olgu tarvis uurida mingit tunnust. Teeme antud üldkogumist kaks valimit. Meid huvitab kas mõlemast valimist leitud tulemused on võrdse täpsusega. Olgu esimene valim mahuga n_1 ja leitud dispersioon s_1^2. Teise valimi korral on need arvud n_2 ja s_2^2. Et mõlemad valimid on tehtud samast üldkogumist dispersiooniga σ^2, siis võrdse täpsuse korral peaksid olema mõlema valimi üldidispersioonid σ_1^2 ja σ_2^2 võrdsed e.

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Võtame nullhüpoteesiks väite, et mõlemad valimid on sama täpsusega H_0: $\sigma_1 = \sigma_2$. Alternatiivseks hüpoteesiks on H_1: $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Tabeli kasutamise lihtsustamiseks eeldame, et oleme valinud esimeseks valimiks selle, millel valimi dispersioon on suurem, s.t. $s_1^2 > s_2^2$ ja suhe

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > 1.$$

On võimalik tõestada, et kui $\sigma_1 = \sigma_2$, siis iga olulisuse nivoo puhul, mis täidab tingimust $\gamma < 0,5$, kehtib

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{\gamma/2}(f_1, f_2) \quad \text{tõenäosusega } \gamma \qquad (6)$$

Järelikult, kui võrratus (6) on rahuldatud, siis kehtib nullhüpotees, vastasel korral nullhüpotees osutub ekslikuks ning mõlema katseseeria täpsus tuleb lugeda erinevaks.

Näide. Kaks laboranti teostasid teatud keemilise aine analüüsi. Esimene laborant tegi 20 analüüsi ja sai arvutamisel valimi dispersiooniks $s_1^2 = 0,0295$. Teine tegi 13 analüüsi ja sai $s_2^2 = 0,0139$. Kas võime väita, et mõlema laborandi töö oli sama kvaliteediga?

Kui võtame olulisusenivooks 10%, siis tabelist 5 saame $F_{0,05}(19,12) = 2,54$. Et antud juhul $s_1^2/s_2^2 = 2,12$, siis võrratus (6) on rahuldatud ja järelikult pole meil alust lugeda laborantide töö täpsust erinevaks.

V. DISPERSIOONANALÜÜSI ALUSED; ÜHEFAKTORILINE DISPERSIOONANALÜÜS

Dispersioonanalüüsiga puutume kokku juhul, kui oleme teinud katseid või vaatlusi ja on tarvis saadud andmeid matemaatiliselt ümber töötada. Nii on dispersioonanalüüs matemaatilises statistikas kasutatav meetod, mis uuritava tunnuse dispersiooni osadeks jaotamise teel võimaldab analüüsida antud tunnuste e. faktorite mõju uuritava tunnuse keskväärtusele. Me tutvume siin ühefaktorilise dispersioonanalüüsiga.

Olgu meil mõõtmisel saadud andmestik jaotatud k osavalimiks (k veergu):

$$\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1k}; \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2k}; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \ldots, & x_{nk}. \end{array} \qquad (1)$$

Osavalimiteks jaotamine toimub mingi kindla faktori põhjal, iga osavalimi oleme saanud selle faktori mingil kindlal väärtusel e. faktori tasemel. Kui uuritav tunnus sõltub faktorist, siis erinevatesse osavalimitesse kuuluvad tunnuse väärtused on kujunenud erinevates tingimustes ja on põhjust oletada, et erinevad osavalimid pärinevad erinevatest üldkogumitest, mille keskväärtused $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ on erinevad. Võib aga juhtuda, et tegelikult on tunnuse keskväärtused kõikides tingimustes ühesugused ja oletus erinevate osavalimite kohta lihtsalt meie poolt välja mõeldud fiktsioon, sest uuritav tunnus ei sõltu faktorist.

Seega võime antud olukorras püstitada statistilised hüpoteesid. Kui uuritav tunnus ei sõltu faktorist, siis kõik osavalimid kuuluvad ühte ja samasse üldkogumisse ja kehtib nullhüpotees:

$$\mathcal{H}_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k.$$

Vastasel korral kehtib sisukas hüpotees

$$\mathcal{H}_1: \quad \text{leiduvad } \mu_i, \mu_j, \text{ et } \mu_i \neq \mu_j,$$

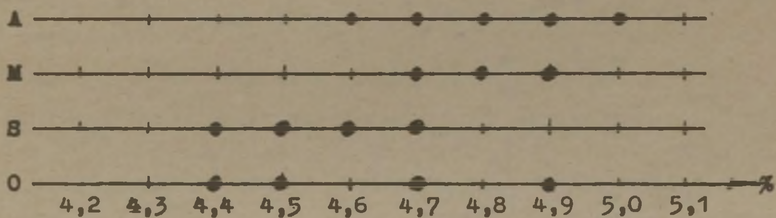
mis näitab osavalimite kuuluvust erinevatesse üldkogumitesse.

Näide 1. Soovitakse kontrollida, kas kalmusejuurtest valmistatud droogis eeterlike õlide sisaldusprotsent (uuritav tunnus) sõltub juurte kogumisajast (faktor). Et peale kogumisaja võib uuritav tunnus sõltuda väga mitmest juhuslikust asjaolust, peaks tegema tingimata mitu mõõtmist, kuna eesmärgiks on välja selgitada keskmisi tendentse. Nii kogutakse iga kuu teisel nädalal viiest erinevast kasvukohast juured, valmistatakse droog ja määratakse kindlaks eeterlike õlide sisaldusprotsent. Saadakse järgmine tabel:

n \ k	1 aprill	2 mai	3 september	4 oktoober
1	4,6	4,7	4,5	4,4
2	4,8	4,8	4,4	4,9
3	5,0	4,9	4,7	4,5
4	4,7	4,9	4,6	4,7
5	4,9	4,8	4,6	4,6

(2)

Andmeid võib illustreerida ka joonisel



Esitatud hüpoteeside kontrollimiseks teeme kaks eeldust:

1) uuritav tunnus on normaaljaotusega;

2) tunnuse hajuvus on kõikides uuritavates üldkogumites ühesugune, s.t. et dispersioon on kõikides üks ja seesama.

Püstitatud hüpoteeside kontrollimiseks kasutatakse küllaltki ootamatut võtet — arvutatakse kahel viisil hinnang mõõtmistulemuste ühisele dispersioonile, otsus aga langetatakse nende hinnangute võrdlemise põhjal.

Tähistame j-nda veeru keskväärtuse tabelis (1) $\bar{x}_{.j}$, kõikide mõõtmistulemuste keskväärtuse $\bar{x}_{..}$ (Indeks, üle mille summeeritakse, tähistatakse punktiga). Kui eeldada, et üldkogumite keskväärtused ei erine, siis saab näidata, et suurused

$$MS_0^2 = n\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})^2/k-1; \tag{3}$$

$$MS_1^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2/(n-1)k. \tag{4}$$

hindavad üht ja sama suurust σ^2 tunnuste ühist dispersiooni. Saab näidata, et suhe

$$\mathcal{F}^* = \frac{MS_0^2}{MS_1^2} \tag{5}$$

allub F-jaotusele parameetritega $f_1 = k - 1$ ja $f_2 = (n-1)k$. Kui keskväärtused on erinevad, siis on murru (5) lugejas olev suurus MS_0^2 suurem kui nimetaja MS_1^2. Seega $\mathcal{F}^*$ suured väärtused esinevad sisuka hüpoteesi $\mathcal{H}_1$ korral.

Praktiliseks ülesande lahendamiseks peavad meil olema F-jaotuse täiendkvantiilide tabelid. Andes ette tõenäosuse eksida e. olulisusenivoo γ, saame järgmise otsustuse langetamise reegli:

Kui $\mathcal{F}^* \geq \mathcal{F}_\gamma(f_1, f_2)$, siis kehtib $\mathcal{H}_1$;

kui $\mathcal{F}^* < \mathcal{F}_\gamma(f_1, f_2)$, siis kehtib $\mathcal{H}_0$,

kus $\mathcal{F}^*$ on arvutatud katsetulemustest valemite (3), (4) ja (5) järgi, $\mathcal{F}_\gamma(f_1, f_2)$ leitud tabelist 5.

Reeglina koondatakse vajalikud arvutustulemused nn. dispersioonanalüüsi tabelisse:

Hajuvuse allikas	Hajuvuse suurus	Vabadusaste	Keskmine hajuvus	Suhe
Faktori mõju	$S_0^2 = n\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$	$k-1$	$MS_0^2 = \frac{S_0^2}{k-1}$	$\mathcal{F}^* = \frac{MS_0^2}{MS_1^2}$
Juhuslik viga	$S_1^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{\cdot j})^2$	$(n-1)k$	$MS_1^2 = \frac{S_1^2}{(n-1)k}$	
Üldhajuvus	$S^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$	$nk-1$		

Viimane rida on saadud kahe eelmise rea summeerimisel ja võimaldab arvutusi kontrollida. Kontroll on hädavajalik käsitsi tehtud arvutamisel. Nagu näha, tunnuse hajuvuse väärtuse suhtes võib jagada kaheks osaks:

1) osavalimite keskväärtuste hajuvus keskväärtuse suhtes;

2) osavalimite elementide hajuvus osavalimite keskväär-

tuse suhtes.

Näide 2. Rakendame dispersioonanalüüsi näites 1 toodud andmestikule, võttes riskiprotsendiks 1% e. $\gamma = 0{,}01$.

Valime nullhüpoteesiks väite, et kalmuse juurtest valmistatud droogis eeterlike õlide sisalduvusprotsent ei sõltu kogumisajast.

Nagu tabelist (2) näha, on k = 4 ja n = 5, järelikult vastavad vabadusastmed $f_1 = 3$ ja $f_2 = 16$. Tabelist 5 leime $F_{0,01}(3,16) = 5{,}3$.

Nüüd arvutame tabeli (2) veergude keskväärtused:

$\bar{x}_{.1} = 4{,}80$; $\bar{x}_{.2} = 4{,}82$; $\bar{x}_{.3} = 4{,}56$; $\bar{x}_{.4} = 4{,}62$ ja kõikide andmete keskväärtuse $\bar{x}_{..} = 4{,}70$. Valemite (3), (4), (5) järgi saadud arvud kanname dispersioonanalüüsi tabelisse:

Hajuvuse allikas	Hajuvuse suurus	Vabadus-aste	Keskmine hajuvus	Suhe
Faktori mõju	0,252	3	0,084	4,2
Juhuslik viga	0,328	16	0,020	
Üldhajuvus	0,580	19		

Nagu näha, on katseandmetest leitud F* = 4,2 suurem kui tabelist leitud F = 5,3. Järelikult antud reegli põhjal ei kehti H_1, vaid tuleb valida H_0, mis väidab, et droogis sisalduvate eeterlike õlide protsent ei sõltu kogumisajast.

VI. AEGREAD

Mitmesuguste nähtuste muutumist ajas võib kirjeldada aegridadega.

<u>Aegrida</u> on mingi näitaja arvuliste väärtuste jada ning iseloomustab näitaja taset vastaval ajamomendil. Näiteks, teeme katse ja registreerime mingi tunnuse väärtuse kindla-

tel ajamomentidel, milles iga järgmine erineb eelmisest kindla ajasammu Δt ehk intervalli võrra. Aegrida on olemuselt pidev, kuivõrd protsess on tegelikkuses pidev, kuid tinglikult diskreetne, kuivõrd näitaja tasemete t registreerimine ei toimu pidevalt. Kui tavalises valimis mõõdame erinevaid objekte ja saame väärtused, siis antud juhul mõõdame ühte ja sama objekti erinevatel ajahetkedel. Kui tavalises valimis on vaatlustulemused sõltumatud, siis aegrea korral võivad tulemusest üksteisest sõltuda.

Aegridu võib jaotada järgmiselt:

1) <u>momentrida</u>, mis sisaldab väärtusi kindlatel ajahetkedel;
2) <u>intervallitud rida</u>, mis sisaldab väärtusi kindlates ajavahemikes;
3) <u>tuletisrida</u>, mis sisaldab väärtuste keskmisi; näiteks, ravimi tarbimist elanikkonna ühe liikme kohta.

Statistika seisukohalt on üks oluline eripärasus, mis iseloomustab apteegimajanduses esinevaid aegridu. See on nende väike maht (10-20 väärtust).

Aegridade analüüsimisel on üldkasutatav selline lähenemisviis, et aegrida eeldatakse koosnevat üksikute komponentide summast

$$y_t = f(t) + h(t) + s(t) + \eta_t,$$

kus y_t on aegrea tase momendil t, $f(t)$ - trend, h(t) - harmooniline komponent, s(t) - sesoonne komponent, η_t - jääkliige. Paneme tähele, et aegridade puhul eeldatakse, et

$$\sum_{t=-T}^{T} t = 0 \quad \text{ehk} \quad t = -T, -T+1, -T+2, \ldots T-1, T.$$

Selline aegrea esitamine on muidugi tinglik, kuid annab palju väärtuslikku informatsiooni nähtuse dünaamika seaduspärasuste kohta. Paljudel juhtudel pole selline esitusviis isegi vajalik. Meie eeldame, et aegrea võib esitada nn. trendi kaudu

$$y_t = f(t),$$

kus <u>trend</u> on mingi matemaatiline funktsioon, mis iseloomustab nähtuse arengutendentsi uuritaval ajavahemikul ja ainult sellel ajavahemikul, mille kohta on teada aegrea tasemed. Sellist aegrida nimetatakse <u>determineeritud aegreaks</u>.

Aegrea analüüsimise eesmärk on valida trend, mis on kooskôlas katsel saadus tulemustega, ja prognoosida siis aegrea käitumist.

Olgu katsel saadud tasemed esitatud kujul

y_t	y_{-T}	y_{-T+1}	y_{-T+2}	...	y_T
t	$-T$	$-T+1$	$-T+2$	...	T

Sellise aegrea vôib asendada ühe funktsiooniga, kasutades katseandmete tasandamiseks vähimruutude meetodit. Näiteks, eeldusel, et väärtused sôltuvad ajast lineaarselt, anname ette

$$y_t = a_0 + a_1 t,$$

kus parameetrid a_0 ja a_1 leiame nagu tavalised regressioonikordajad (vt. peatükk III p. 5). Parameetrite a_0 ja a_1 leidmiseks saame süsteemi

$$n a_0 = \sum_{t=-T}^{T} y_t,$$

$$a_1 \sum_{t=-T}^{T} t^2 = \sum_{t=-T}^{T} t y_t,$$

kus $n = 2T + 1$. Siis $a_0 = \bar{y}_t$ ja $a_1 = \dfrac{\sum_{t=-T}^{T} t y_t}{\sum_{t=-T}^{T} t^2}$. (*)

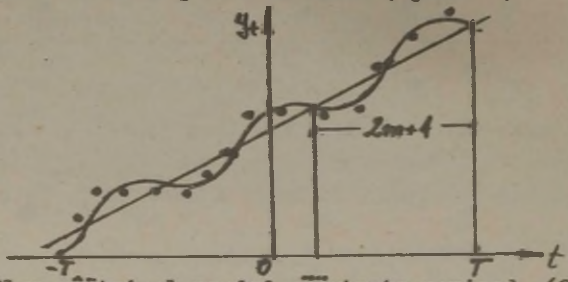
Eeldusel, et trend on eksponentsiaalne

$$y_t = a_0 a_1^t$$

ja kasutades parameetrite määramiseks vähimruutude meetodit, saame

$$a_0 = \exp\left(\frac{\sum_{t=-T}^{T} \ln y_t}{n}\right), \quad a_1 = \exp \frac{\sum_{t=-T}^{T} t \ln y_t}{\sum_{t=-T}^{T} t^2}.$$

Praktikas vôib esineda selliseid aegridu, mille trendi ei ole vôimalik esitada mingi matemaatilise funktsioonina. Seltlisel juhul kasutatakse trendi ligikaudsete väärtuste leidmiseks aegridade silumist nn. <u>libiseva keskmise meetodiga</u>. Libiseva keskmise meetodit kasutatakse ka veel juhul, kui koos lineaarselt kasvava tendentsiga on näha, et mõõtmistulemused muutuvad perioodiliselt (joon.)



Olgu mõõtmisel saadud väärtuste periood (2m + 1), siis toimub esialgse aegrea asendamine uuega, kus aegrea väärtused $\bar{y}_t$ on esialgse aegrea aritmeetilised keskmised:

$$\bar{y}_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{p=-m}^{m} y_{t+p} \quad (t = m+1, m+2, \dots, T-m).$$

Näide. On antud TRÜ farmaatsiaosakonna lõpetajate arv aastatel 1972 - 1980. Leida antud aegrea trend silumisel lineaarse funktsiooniga.

Aasta	y_t	t	$y_t t$	t^2
1972	20	-4	-80	16
1973	19	-3	-57	9
1974	20	-2	-40	4
1975	22	-1	-22	1
1976	34	0	0	0
1977	25	1	25	1
1978	30	2	60	4
1979	36	3	108	9
1980	27	4	108	16
	233		102	60

Arvutame valemitest (*)

$$a_0 = \frac{233}{9} = 25,9 \ ; \quad a_1 = \frac{102}{60} = 1,7$$

Selle aegrea trend on $y_t = 25,9 + 1,7t$.

VII. OPTIMISEERIMIS- JA JUHTIMISMEETODID FARMAATSIAS

Viimaste aastakümnete jooksul väljakujunenud uus teadusharu, mis uurib matemaatiliste meetodite kasutamise võimalusi majanduselu praktilises juhtimises, on tuntud operatsioonianalüüsi nime all. Operatsiooniks nimetatakse sealjuures mingi inimkollektiivi sihikindlat, teatavat eesmärki taotlevat juhitavat tegevust. Operatsioonianalüüs uuribki operatsioonide mingis mõttes parima organiseerimise võimalusi ja mooduseid. Operatsioonianalüüsi uurimisobjektideks olevate probleemide hulgas on matemaatiliselt kõige enam läbiuurituteks mitmesugused majandusliku planeerimisega seotud küsimused. Oma sisulise struktuuri järgi võib majanduslikul planeerimisel kerkivad matemaatilised ülesanded jaotada kahte suurde klassi.

1) Esimese klassi moodustavad need ülesanded, milles kõik otsitavad on määratud, süsteemil on üks lahend ja küsimus taandub selle väljaarvutamisele.

2) Teise klassi kuuluvad niisugused ülesanded, kus objektiivsed tingimused ei määra kõiki otsitavaid, vaid ainult teatud ulatuses kitsendavad nende valikut. Sellisel juhul jääb plaani koostajale vabadus valida võimalikest plaanidest see, mis mingi efektiivsuse kriteeriumi mõttes osutub parimaks.

Matemaatiline planeerimine ongi operatsioonianalüüsi see haru, mis tegeleb niisuguste „mingis mõttes parimate" ehk optimaalsete plaanide leidmiseks vajalike meetodite väljaselgitamisega.

1. Lineaarse planeerimise ülesande püstitamine

Leida niisugused mittenegatiivsed muutujad $x_1, x_2, \dots, x_n$, mis maksimiseerivad sihifunktsiooni

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \qquad (1)$$

ja rahuldavad kitsenduste süsteemi

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n\ a_{mn}x_x &\leqslant b_m,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

kus c_j $(j = 1,\dots,n)$ on j-nda muutuja ühiku väärtus optimaalsuse kriteeriumi (1) järgi, a_{ij} – kitsenduste süsteemi (2) kordajad ja b_i $(i = 1,2,\dots,m)$ — kitsenduste süsteemi vabaliikmed. Selle ülesande lahendit nimetatakse optimaalseks lahendiks. Lubatavaks lahendiks nimetatakse lahendit

$(x_1^{\circ}, x_2^{\circ},\dots, x_n^{\circ})$, mis rahuldab kitsenduste süsteemi (2) ja mittenegatiivsuse nõuet.

Lühemalt võib selle ülesande esitada järgmiselt. Leida muutujate $x_j (j = 1,2,\dots,n)$ niisugused mittenegatiivsed väärtused, mille puhul

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = max \quad e. \quad \sum_{j=1}^{n} (-c_j x_j) = min,$$

kui muutujad x_j rahuldavad tingimusi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Märkus. Tavaliselt on kitsenduste süsteemil (2) lõpmata palju lahendeid ja on võimalik valida nende hulgast see, mis muudab sihifunktsiooni maksimaalseks.

Optimiseerimisülesande kitsenduste analüüsimisel selgub, et võib esineda kolm erijuhtu:

1) kui kitsendused on vastuolulised, pole ülesandel ühtki lahendit;

2) kui lubatavate lahendite määramispiirkond on tõkestamata, on ka sihifunktsioon tõkestamata ja ülesandel lahendit pole;

3) kui lubatavate lahendite määramispiirkond on tõkestatud mittetühi hulk, leidub ülesandel vähemalt üks optimaalne lahend.

Lineaarse planeerimise teoorias tõestatakse, et viimasel juhul kehtivad järgmised kaks põhimõttelise tähtsusega tulemust:

1) kui lineaarsel planeerimise ülesandel leidub lokaalne ekstreemum, osutub see ekstreemum ühtlasi globaalseks;

2) kui optimaalne lahend on olemas, on see mingi lõpliku lahendusprotseduuri abil ka täpselt arvutatav.

Näide. On vaja valmistada poluvitamiine: 10 kg "undentumi" ja 12 kg "hendentumi" minimaalse hinnaga. Koostised ja hind on antud tabelis.

Jrk. nr.	Aine	Undentum	Hendentum	1g aine hind
1.	Retinoli acetas	0,001	0,001	2,09
2.	Thiamini bromidum	0,00258	0,00194	0,50
3.	Riboflarinum	0,002	0,0015	0,50
4.	Puridoxini hydrochloridum	0,003	0,002	1,00
5.	Cyanocobalaminum	0,000002	0,00001	100,00
6.	Nicotinamidum	0,02	0,01	0,074
7.	Acidum ascorbinicum	0,075	0,075	0,04
8.	Acidum folicum	0,0005	0,0005	2,50
9.	Calcii pantothenas	0,003	0,003	0,06
10.	Vitaminum P	0,01	—	0,20
11.	Vitaminum E	0,01	—	ei ole hinda
12.	Tocophenoli acetas	—	0,005	"
13.	Ergocalciferolum	—	0,00612	"
	Kokku	0,127082	0,10607	

Vastav matemaatiline planeerimisülesanne on järgmine. Leida niisugused $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$, mis minimiseerivad sihifunktsiooni

$$z = 2{,}09x_1 + 0{,}50x_2 + 0{,}50x_3 + x_4 + 100x_5 + $$
$$+ 0{,}074x_6 + 0{,}04x_7 + 2{,}50x_8 + 0{,}06x_9 + 0{,}20x_{10}$$

ja rahuldavad kitsenduste süsteemi

$$0{,}001x_1+0{,}00258x_2+0{,}002x_3+0{,}003x_4+0{,}000002x_5+0{,}02x_6+0{,}075x_7+$$
$$+0{,}0005x_8+0{,}003x_(+0{,}01x_{10}+0{,}01x_{11} \geq 10000\cdot 0{,}127082$$
$$0{,}001x_1+0{,}00194x_2+0{,}0015x_3+0{,}002x_4+0{,}00001x_5+0{,}01x_6+0{,}075x_7+$$
$$+0{,}0005x_8+0{,}003x_9+0{,}005x_{12}+0{,}00612x_{13} \geq 12000\cdot 0{,}10607$$

2. Planeerimisülesande graafiline lahendamine

Kui lineaarses planeerimisülesandeks on ainult kaks muutujat, võib ülesande lahendada graafiliselt.

Ülesanne on järgmine. Leida võrratusesüsteemi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant b_m,$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

lahend, mis muudab maksimaalseks funktsiooni

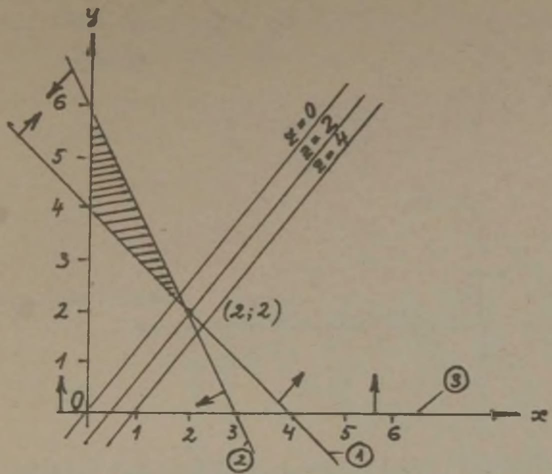
$$c_1x_1 + c_2x_2.$$

Lahendamine. Esiteks joonestame välja kõik sirged $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $(i = 1,\dots,m)$. Teiseks, leiame kitsenduste süsteemi lahendi, s.o. pooltasandite ühisosa. Joonestame välja ka sirge $c_1x_1 + c_2x_2 = z$, andes suurusele z erinevaid väärtusi. Saame paralleelsed sirged. Valime nende hulgast selle, millel on veel pooltasandite ühisosaga ühine punkt ja mille puhul z väärtus on suurim.

Näide 1. Leida maksimaalne z, kui $z = 5x - 4y$ ja x ning y rahuldavad tingimusi:

$$\begin{cases} x + y \geqslant 4 \\ 2x + y \leqslant 6 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

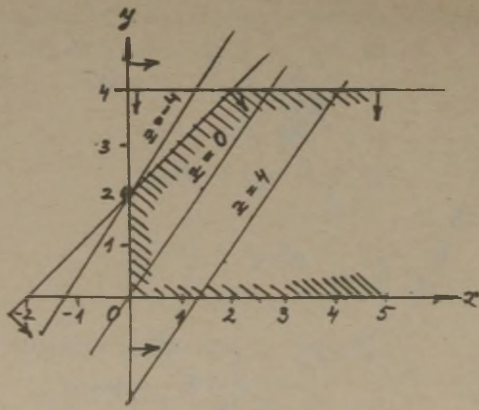
Lahendus. Joonestame ristkoordinaadistiku ja kanname sellele sirged $x + y = 4$, vt. (1), $2x + y = 6$, vt. (2), $y = 0$, vt. (3).



Et leida kitsenduste süsteemi lahendit, leiame iga võrratuse lahendi graafikul. Et lineaarse võrratuse lahendiks on üks pooltasanditest, milledeks sirge jaotab tasandi, siis valime suvalise punkti ühel pooltasandil ja paneme selle punkti koordinaadid võrratusse. Kui võrratus on täidetud, siis on lahendiks see pooltasand, kus asetses valitud punkt. Näiteks, esimese võrratuse $x + y \geqslant 4$ puhul valime näiteks koordinaatide alguspunkti. Selgub,et võrratus ei ole täidetud, järelikült on lahendiks see pooltasand, mis ei sisalda punkti (0;0). Märgime lahendi graafikul noolekestega.Jne. Lõpuks saame, et kitsenduste süsteemile vastab kolmnurk tippudega (2;2), (6,0) ja (4,0) (joonisel viirutatud). Nüüd joonestame sirge $5x-4y= = z$, andes z-le erinevaid väärtusi: $z = 0$, $z = 2$; $z = 4$. Toimub sirge paralleellüke. Jooniselt on näha, et maksimaalne $z = 2$ ja punkt (2;2) ongi otsitav punkt (kuulub lahendite piirkonda ja z-l on maksimaalne lahend), s.t. et optimaalne lahend on $x = 2$; $y = 2$.

Näide 2. Leida minimaalne z väärtus, nii et $z = 3x-2y$, $-2x + 2y \leqslant 4$, $y \leqslant 4$, $x \geqslant 0$.

Lahendus. Teeme joonise

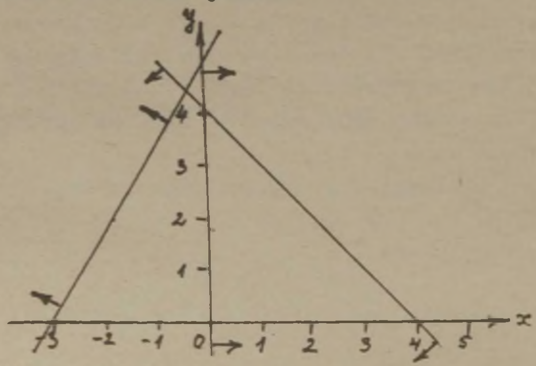


Nagu näha joniselt, on lubatavale lahendile vastav piirkond tõkestamata. Siiski on lahend olemas. Joonestame välja sirge $z = 3x - 2y$, andes z-le väärtused: -4; 0; 4. Nagu näha joniselt, on selle sirge ja lubatava piirkonna ühine punkt $(2,0)$ ja $z_{min} = -4$. Järelikult on optimaalne lahend $x = 0$, $y = 2$.

Näide 3. Leida z maksimaalne väärtus nii, et oleks täidetud tingimused:

$$z = 3x + 4y;$$
$$-2x + y \geqslant 6,$$
$$x + y \leqslant 4,$$
$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

Lahendus. Teeme joonise.

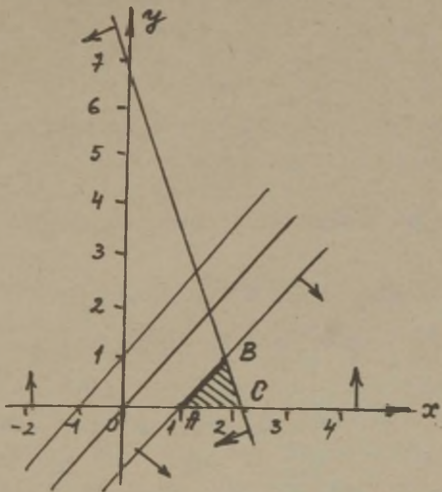


Nagu näha joniselt, puudub antud ülesandel lubatav lahend, kuna kitsenduste süsteem on vastuoluline.

Näide 4. Leida z minimaalne väärtus nii, et oleks täidetud tingimused

$$z = 2x - 2y;$$
$$x - y \geqslant 1,$$
$$3x + y \leqslant 7,$$
$$y \geqslant 0.$$

Lahendus. Teeme joonise.



Leiame, et lubatavaks lahendiks on kolmnurga ABC kõik punktid, kus A(1,0), B(2,1) ja $C(\frac{7}{3},0)$. Sihifunktsioonile vastav sirge $z = 2x - 2y$ on paralleelne kolmnurga küljega AB, kusjuures $z_{min} = 2$ ja ta ühtib küljega AB. Järelikult optimaalseks lahendiks võivad olla kõik lõigu AB punktid ja ülesandel on lõpmata palju lahendeid.

3. Simpleksmeetod

Lineaarse planeerimisülesande kitsenduste süsteem on esitatud võrratuste kujul. **Näiteks**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1 - 4x_2 \geq -1 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad -x_1 + 4x_2 \leq 1.$$

Võrratustelt on alati võimalik üle minna võrranditele, tuues sisse mittenegatiivsed abitundmatud, antud näites x_3 ja x_4. Saame

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$$
$$-x_1 + 4x_2 + x_4 = 1.$$

Olgu sihifunktsiooniks $z = x_1 + x_2$, mille maksimum meid huvitab.

Üldjuhul tuleb leida süsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{3}$$

lahend nii, et $z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ (4)

omandaks maksimaalse väärtuse. Viimase võrrandi võib kirjutada kujul:

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n + z = c_0 \tag{5}$$

Teeme antud ülesandele vastava simplekstabeli:

Vaba liige	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	z
c_0	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	1
b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	0
b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	0

(6)

Üheks baasilahendiks e. nulliliseks erilahendiks on $z = c_0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$, $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2$, ..., $x_{n+m} = b_m$.

Meie ülesandeks on konstrueerida uus erilahend nii, et endiselt oleks $x_j \geqslant 0$ $(j = 1,2,\dots,n + m)$ ja z omandaks suurima väärtuse. Kõigepealt paneme tähele, et olemasolevast erilahendist mingi lubatava lahendi saamiseks tuleb vähemalt üks vabadest tundmatutest $x_1, x_2, \ldots, x_n$ muuta positiivseks. Millist valida, et z suureneks? Vaatleme sihifunktsiooni z avaldist (4). On selge, et kui mingi kordaja c_j on negatiivne, siis vastava x_j suurendamine ei suurenda z väärtust, vaid vähendab. Seega niisuguste tundmatute suurendamine meid sihile ei vii. Kui kõik kordajad c_j on negatiivsed või nullid, siis tundmatut z pole üldse võimalik suurendada ning me olemegi leidnud planeerimisülesande optimaalse lahendi. Sel juhul on simplekstabeli kõik esimese rea elemendid, välja arvatud c_o, mittenegatiivsed.

Olgu simplekstabeli esimeses reas üks element negatiivne, näiteks $-c_1 < 0$, siis valime juhtveeruks 1 veeru. Selle juhtveeru teisendame ühikvektoriks. Juhtreaks tuleb valida niisugune rida, kus juhtveerus paiknev element on positiivne. Kui juhtveerus positiivset elementi pole, siis sihifunktsioon on tõkestamata ja planeerimisülesandel optimaalne lahend puudub.

Juhtreaks tuleb valida juhtveerus positiivsete elementidega ridade hulgast see, mille puhul rea esimese elemendi (vabaliikme) jagatis juhtveeru samas reas paikneva elemendiga on kõige väiksem. Kui juhtrida on valitud, siis teostades maatriksi ridadega elementaarteisendusi, muudame juhtveeru ühikveeruks. Nii saame uue lubatava lahendi, kusjuures x_1 läheb otsitavate hulka, üks endistest otsitavatest vabade tundmatute hulka.

Nii olemegi kirjeldanud ühe sammu ülesande lahendamisel. Edasi kordub täpselt sama protseduur. Kordamisi jätkatakse seni, kuni saadud maatriksi esimeses reas ei ole negatiivseid elemente. Viimane sel viisil saadud erilahend ongi planeerimisülesande optimaalne lahend.

Simpleksmeetod on saanud oma nime 1949.a. ameerika matemaatikult G.B.Dantzigilt,kes esimesena seda kasutas,kusjuures kehtib reegel: üleminek ühelt erilahendilt teisele tuleb teostada nii, et maatriksi esimese veeru esimene element kasvaks ja selle veeru ülejäänud elemendid jääksid positiivseteks.

(Raskus tekib siis, kui mingis maatriksis juhtrea esimene element b_k võrdub nulliga. Siis uue erilahendi leidmisel sihifunktsiooni väärtus ei kasva. Saame niinimetatud kõdunud lahendi juhu, kus nullist erinevate tundmatute arv on väiksem kui kitsenduste arv.)

Näide. Koostame selle punkti alguses toodud ülesandele vastava simplekstabeli ja lahendame ülesande simpleksmeetodil.

1. Vabaliige	2. x_1	3. x_2	4. x_3	5. x_4	6. z	Teisendus	Baasilahend
1. 0	-1	-1	0	0	1	+ II rida	
2. 1	1	-2	1	0	0		
3. 1	-1	4	0	1	0	+ II rida	(0;0;1;1;0)
1. 1	0	-3	1	0	1	+ 3 kordne	
2. 1	1	-2	1	0	0	+ 2 kordne	
3. 2/2	0	2/2	1/2	1/2	0	: 2	(1;0;0;2;1)
1. 4	0	0	5/2	3/2	1		
2. 3	1	0	2	2	0		
3. 1	0	1	1/2	1/2	0		(3;1;0;0;4)

Viimasel sammul saadud lahend:
$x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ ongi optimaalne ja sihifunktsiooni maksimaalne väärtus $z_{max} = 4$.

Lahendus. Simplekstabelist võib kohe välja kirjutada ühe baasilahendi, võttes $x_1 = x_2 = 0$. Valime juhtveeruks 2. veeru. Kuna selles on ainult üks positiivne element, mis asub 2. reas, siis võtame juhtreaks 2. rea. Nüüd muudame juhtveeru ühikveeruks (vt. teisendus). Baasilahendis $x_2 = x_3 = 0$, ülejäänud otsitavad on otseselt leitavad tabelist. Paneme tähele, et esimese rea 3. veeru element on negatiivne, järelikult leitud lahend ei ole optimaalne.

Valime uueks juhtveeruks 3. veeru ja juhtreaks 3. rea, kus asub positiivne element. Jagame antud rea kahega, et saada juhtelemendiks arv 1 ja teisendame ülejäänud juhtveeru elemendid nullideks. Saame baasilahendi, võttes $x_3 = x_4 = 0$.

Nagu näha, on saadud lahend (3,1,0,0,4) optimaalne, esimeses reas ei ole negatiivseid elemente ja maksimaalne $z = 4$.

4. Transpordiülesanne

Olgu meil tarvis vedada mingit kaupa ladudest $L_1, L_2, \dots, L_m$ tarbijatele $T_1, T_2, \dots, T_n$. Olgu teada selle kauba tagavarad ladudes a_i ja tarbijate vajadused b_j.

Oletame, et kaupa on võimalik vedada mistahes laost L_i mistahes tarbijani T_j ja on teada veo maksumus c_{ij} laost L_i tarbijani T_j. Meie soovime koostada sellist veoplaani, mille korral kõikide tarbijate vajadused saaksid rahuldatud ja vedude kogukulu oleks minimaalne.

Tähistame laost L_i tarbijale T_j veetava kauba koguse x_{ij}. On ilmne, et $x_{ij} \geqslant 0$ ja et ühestki laost ei saa kaupa rohkem välja vedada, kui seal tagavaraks on

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i , \tag{7}$$

Teiselt poolt peab iga tarbija T_j vajadus saama täpselt rahuldatud

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j . \tag{8}$$

Kogukulu on

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} . \tag{9}$$

Ülesanne. Leida kitsendusi (7) ja (8) rahuldavad mittenegatiivsed suurused x_{ij} ($i = 1,2,\dots, m$, $j = 1,2,\dots, n$), mis annavad suurusele (9) minimaalse väärtuse.

Antud ülesanne on lineaarse planeerimise ülesanne. Sellel ülesandel leidub alati optimaalne lahend kui vaid

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

ehk ladudes olevast kaubast jätkub kõikide vajaduste rahuldamiseks. Juhul kui ladudes oleva kauba hulk ja tarbijate summaarsed vajadused on võrdsed, nimetatakse ülesannet kinniseks transpordiülesandeks.

Kinnisele transpordiülesandele vastab tabel

	$\sum_{j=1}^{n} b_j$	Vajadused			
		b_1	b_2	...	b_n
Tagavarad	a_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
	a_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
	...	...	...	...	...
	a_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

Nagu näha, selles tabelis pole kirja pandud veokulusid. Veokulusid arvestamata võib leida lubatava transpordiplaani niinimetatud „loodenurga" reegliga, mille võib esitada järgmiselt. Tabelit hakatakse täitma ülevalt vasakult nurgast. Kõigepealt leiame

$$x_{11} = \min (a_1, b_1).$$

On kaks võimalust:

1) kui $a_1 < b_1$, siis $x_{11} = a_1$ ja $x_{12} = \ldots = x_{1n} = 0$,

2) kui $b_1 < a_1$, siis $x_{11} = b_1$ ja $x_{21} = \ldots = x_{m1} = 0$.

Edasi, kui realiseerus 1. võimalus, siis järgmisena leiame

$$x_{12} = \min (a_1 - b_1, b_2),$$

kui realiseerus 2. võimalus, siis järgmisena leiame

$$x_{12} = \min (a_1 - b_1, b_2).$$

Jne.

Näide.

	18	Vajadused				
		3	2	4	6	3
Tagavarad	2	2	0	0	0	0
	8	1	2	4	1	0
	4	0	0	0	4	0
	4	0	0	0	1	3

Saadud lahend on lubatav, kuid pole optimaalne, kuna pole arvestatud veokulusid.

5. Transpordiülesande lahendamine Vogeli meetodiga

Nimetatud meetod arvestab ka veokulusid. Meetodi idee on lihtne — kaup tuleb vedada sellist kõige odavamat marsruuti pidi, mille korral hinnalt järgmine marsruut tooks kaasa kõige suurema kahju. Koostame transporditabeli, kuhu kanname vajadused ja tagavarad ning iga ruudu vasakusse ülemisse nurka veokulu c_{ij}. Kahju saame vastava rea (või veeru) kõige väiksema veokulu lahutamisel temale selles reas (või veerus) suuruselt järgmisest veokulust. Kauba kogused x_{ij} kirjutame tabelisse iga ruudu paremasse alumisse nurka.

Meetodi selgitamiseks toome näite, algandmed on esitatud tabelina:

21	Vajadused			
	7	7	5	2
Tagavarad 11	6	8	4	7
6	7	8	8	3
4	6	5	6	4

Arvutame kahjud, kandes need tabelisse lk.62.
Tabeli 1. rea kahju I on leitud $c_{11} = 6$ ja $c_{13} = 4$ vahena. Nüüd otsime välja selle rea või veeru, milles kahju I on kõige suurem. Leitud rea (või veeru) kõige väiksemale veokulule c_{ij} vastaval marsruudil L_iT_j tuleb teostada maksimaalne võimalik vedu, s.t. tuleb valida $x_{ij} = \min (a_i, b_j)$. Antud juhul on suurim kahju 4 2.reas, milles väikseim veokulu on 3. Et sellele vastavad vajadused 2 ja tagavarad 6, siis saame korraga rahuldada kõik vajadused, nii et $x_{24} = 2$ ja $x_{14} = x_{34} = 0$.

Edasi arvutame uued kahjud — kahju II, kusjuures ei arvesta 4. veergu, mis on juba täidetud. Saime suurima kahju 3 2. veerus, kus väikseim veokulu on 5, teeme veo L_3T_2 — 4.

21		Vajadused				Kahjud			
		7	7	5	2	I	II	III	IV
Tagavarad	11	^{6} 6	^{8} 0	^{4} 5	^{7} 0	2	2	2	2
	6	^{7} 1	^{8} 3	^{8} 0	^{3} 2	4	1	1	1
	4	^{6} 0	^{5} 4	^{6} 0	^{4} 0	1	1	-	-
Kahjud	I	0	3	2	1				
	II	0	3	2	-				
	III	1	0	4	-				
	IV	1	0	-	-				

Nagu näha, 3. ladu saab tühjaks, aga 2. tarbija vajadused pole veel kõik rahuldatud. Saame $x_{32} = 4$, $x_{31} = x_{33} = 0$.

Arvutame kahju III. Suurim on 3. veerus 4. Teostame veo kõige odavamalt $c_{13} = 4$. Saame $x_{13} = 5$, $x_{23} = 0$.

Arvutame kahju IV. Suurim on 1. reas, milles kõige odavam veokulu on $c_{11} = 6$. Et vastav vajadus on 7, aga laos 1 on ainult $11 - 5 = 6$ ühikut, siis $x_{11} = 6$, $x_{12} = 0$.

Viimasena tuleb täita veel 2. rida, et rahuldada kõik vajadused: $x_{21} = 1$, $x_{22} = 3$. Vedude kogumaksumuse leiame valemist (9), pannes vastavad arvud asemele, $z = 67$.

Vogeli meetodiga saadud lahend on sageli üsna lähedane optimaalsele ja mõnikord isegi optimaalne.

6. Transpordiülesande lahendamine potentsiaalide meetodil

Transpordiülesande optimaalse lahendi leidmiseks lähtume mingist lubatavast alglahendist, milles vaid $n + m - 1$ tundmatut võivad erineda nullist. Koostame tabeli ja kanname selle alglahendi nullist erinevad ehk baasikomponendid

x_{ij} tabelisse. Anname eeskirja selle lahendi muutmiseks, nii et sihifunktsiooni väärtus väheneks.

Leiame potentsiaalid $u_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ ja $v_j (j = 1, 2, \ldots, n)$, nii et oleksid täidetud võrdused

$$u_i + v_j + c_{ij} = 0, \tag{1}$$

kus c_{ij} on nullist erineva baasikomponendi x_{ij} veokulu. Saame tegelikult $n + m - 1$ võrrandit u_i ja v_j määramiseks. Et tundmatuid on ühe võrra rohkem kui võrrandeid, siis võime ühele tundmatutest anda täiesti vabalt väärtuse ja leida ülejäänud süsteemist (1). Nüüd arvutame suurused

$$w_{ij} = u_i + v_j + c_{ij}. \tag{2}$$

Kui kõik w_{ij} on mittenegatiivsed, siis on esialgne baasilahend ka optimaalne lahend. Kui aga leidub indeksite paar (ij), et

$$w_{ij} < 0,$$

siis pole lahend optimaalne ning tuleb asuda parema lahendi konstrueerimisele.

Uue lahendi saamiseks valime $(k\,l)$ nii, et

$$w_{kl} = \min w_{ij},$$
$$w_{ij} < 0$$

ja muudame x_{kl} baasitundmatuks. Niisugust muutmist on otstarbekohane teostada järgmiselt. Leiame vaadeldava ülesande alglahendit sisaldava tabeli k-ndas reas mingi baasitundmatu x_{kj_1}, siis veerus j_1 uue baasitundmatu $x_{i_1j_1}$, siis i_1-s reas uue baasitundmatu $x_{i_1j_2}$ jne., kuni oleme jõudnud tundmatuni x_{kl}. Niimoodi saime kinnise ahela. Alustades ruudust (k,l) märgistame ahelasse kuuluvad ruudud vaheldumisi sümbolitega „ + " ja „ - ". Ilmselt saab sellises ahelas olla vaid paarisarv erinevaid tundmatuid. Nüüd valime „miinus" märgiga ahela moodustanud baasilahenditest selle, millel on minimaalne väärtus c. Uue baasilahendi leidmiseks liidame c kõikidele „pluss" märgiga ruutudes asuvatele baasilahenditele ja lahutame kôigist „miinus" märgiga ruutudes asuvatest baasikomponentidest. Nii oleme muutnud kôiki ahelasse kuuluvaid elemente, kaasa arvatud ka x_{kl}. Saame uue baasilahendi.

Nüüd tuleb jällegi moodustada süsteem (1), mis vastab uuele baasilahendile , ja korrata eespool toodud lahendust, kuni kôik leitud w_{ij} on mittenegatiivsed ja vastav lahend ongi otsitav optimaalne lahend.

Näide 1. Vôtame punktis 5 toodud näite, kusjuures olgu teada üks lubatav lahend: $x_{11} = 6$, $x_{12} = 1$, $x_{13} = 4$, $x_{21} = 1$, $x_{22} = 2$, $x_{23} = 1$, $x_{24} = 2$, $x_{32} = 4$, $x_{14} = x_{31} = x_{33} = x_{34} = 0$.

Koostame vastava tabeli, kuhu kanname kauba hulga ladudes a_i , tarbijate nôudmised b_j , veokulud c_{ij} (iga vastava ruudu vasakusse ülemisse nurka) ja nullist erinevad x_{ij}. Tabelile lisame veel veeru u_i ja rea v_j märkimiseks, mille leiame vastava süsteemi lahendamisel.

		Vajadused				
21		1 7	2 7	3 5	4 2	u_i
Tagavarad	1 11	6 − 0 7	8 4	4 + 0 4	7 8	4
	2 6	7 + −3	8 0 3	8 − 0 1	3 0 2	0
	3 4	6 −1	5 0 4	6 1	4 4	3
v_j		−10	−8	−8	−3	

Koostame süsteemi eeskirja (1) kohaselt.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 + 6 = 0, \\ u_1 + v_3 + 4 = 0, \\ u_2 + v_2 + 8 = 0, \\ u_2 + v_3 + 8 = 0, \\ u_2 + v_4 + 3 = 0, \\ u_3 + v_2 + 5 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Selles süsteemis on 7 tundmatut ja 6 võrrandit. Järelikult võime ühe tundmatu väärtuse vabalt ette anda. Olgu $u_2 = 0$. Siis $v_2 = -8$, $v_3 = -8$, $v_4 = -3$, $u_1 = 4$ $v_1 = -10$, $u_3 = 3$.

Kanname saadud lahendi tabelisse ja arvutame valemi (2) järgi suurused w_{ij}. Kanname ka need tabelisse, iga ruudu vasakusse alumisse nurka. Paneme tähele, et igale baasikomponendile vastav $w_{ij} = 0$, sest ta rahuldab süsteemi (1)'. Saime, et potentsiaalide hulgas on 2 negatiivset $w_{21} = -3$ ja $w_{31} = -1$. Järelikult antud lahend ei ole optimaalne.

Uue lahendi saamiseks kasutame potentsiaalide meetodit. Uue lahendi saamiseks leiame $\min(w_{21}, w_{31}) = w_{21}$. Nüüd moodustame ahela alates ruudust indeksitega (21), kandes vaheldumisi tabelisse „ + " ja „ - " märgid. Nagu näha, koosneb ahel neljast elemendist $x_{21} = 0$ (+); $x_{23} = 1$ (-); $x_{13} = 4$ (+); $x_{11} = 7$ (-). Nüüd valime

$$\min(x_{23}; x_{11}) = x_{23}$$

Et $x_{23} = 1$, siis lisame saadud arvu „ + " märgiga ruutudes olevatele muutujatele ja lahutame „ - " märgiga muutujatest.

Saame uue baasilahendi

$$x_{11} = 6, \quad x_{13} = 5, \quad x_{21} = 1, \quad x_{22} = 3, \quad x_{24} = 2, \quad x_{32} = 4,$$

$$x_{12} = x_{14} = x_{23} = x_{31} = x_{33} = x_{34} = 0.$$

Koostame uue tabeli, et kontrollida, kas saadud lahendit tuleb veelgi parandada või see on optimaalne.

	21	Vajadused 7	7	5	2	u_i
Tagavarad	11	6 0 6	8 1	4 0 5	7 5	1
	6	7 0 1	8 0 3	8 3	3 0 2	0
	4	6 2	5 0 4	6 4	4 4	3
	v_j	-7	-8	-5	-3	

Selles tabelis u_i ja v_j väärtused on leitud süsteemist:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 + 6 = 0; \\ u_1 + v_3 + 4 = 0; \\ u_2 + v_1 + 7 = 0; \\ u_2 + v_2 + 8 = 0, \\ u_2 + v_4 + 3 = 0, \\ u_3 + v_2 + 5 = 0, \end{cases}$$

võttes $u_2 = 0$ ja leides $v_1 = -7$, $v_2 = -8$, $v_4 = -3$, $u_3 = 3$, $u_1 = 1$, $v_3 = -5$. Leitud potentsiaalid w_{ij} on kõik mittenegatiivsed, järelikult võime väita, et saadud lahend on optimaalne. Täpselt sama lahendi saime punktis 1 Vogeli meetodiga.

7. Ravimite jaotamise ülesanne

Õppisime lahendama transpordiülesannet käsitsi. Kaasajal on mitmeid häid meetodeid, kuid kõik nad on küllalt töömahukad ja aeganõudvad. Käesolevaks momendiks on koostatud küllaldane hulk programme elektronarvutile, võib lahendada ülesandeid sadade ja tuhandate ladude ja tarbijatega. Meie vabariigi vajadused on suhteliselt väikesed ja seda on arvestatud ka programmide koostamisel. Nii on koostatud programmid järgmiste ülesannete lahendamiseks: 1) Ravimite ülejääkide ümberjaotamine ladude ja apteekide vahel; 2) apteegivalitsuse autotranspordi optimaalne kasutamine ja 3) uute apteekide optimaalne paigutamine.

Tutvume antud kursuses ravimite ülejääkide ümberjaotamise ülesandega ja selle lahendamisega. Igas kvartalis saabub informatsioon ravimite varudest ja nõudmistest Vene Föderatsiooni oblastite ja teiste vabariikide apteekidest ja ladudest NSVL Tervishoiuministeeriumi Peaarvutuskeskusesse, kus toimub saadud andmete ümbertöötamine arvutil. Selle tulemusena saadakse täielik ülevaade nii maa apteegivõrgust kui ka igast apteegivalitsusest eraldi. Saadud tulemused väljastatakse perfolindil ja ka säilitatakse magnetlindil. Viimased on omakorda algandmeteks ravimite ülejääkide ümberjaotamise ülesandele. Viimase lahendamiseks on tarvis leida terve rea transpordiülesannete optimaalsed lahendid.

Tuleb kohe märkida, et majandusliku kasusaamise faktor pole jaotamise aluseks, vaid selleks on aeg, mis kulub ravimi saatmiseks ühest kohast teise. Aeg, mida minimiseeritakse, sõltub omakorda vahekaugustest ja ravimi kogusest.

Saadud informatsiooni alusel võib väita, et 50% ravimitest, mis on jäänud seisma ühtedes apteekides, viiakse üle teistesse, kusjuures seismajäänud ravimid katavad 20 - 30% vajadustest. Nii tuleb Peaarvutuskeskuses jaotada umbes 400 ravimit ja lahendada sama palju transpordiülesandeid. Kohalikud apteegivalitsused lahendavad aga transpordiülesandeid käsitsi.

Olenevalt ajast, mis on jäänud ravimi kehteaja lõpuni, jaotatakse ravimi varud kahte suurde gruppi:

1) grupp С (срочная), ravimi kehtaeg on 6-12 kuud, järelikult tuleb see ravim kiiresti ära kasutada, ütleme, et ravim sobib ekstra vajaduste rahuldamiseks;

2) grupp Т (текущая), ravimi kehteaeg on 12 ja enam kuud ja ta sobib nii ekstra kui ka jooksva vajaduse rahuldamiseks.

Ülesannetes kasutame järgmisi tähistusi. Olgu x_{ij} ravimi hulk, mis viiakse apteegist i apteeki j. Nii näitab esimene indeks i (i = 1,2,...,m) apteegi numbrit, kus see ravim on ülejäägis ja nende apteekide arv on m, ja teine indeks j (j = 1,2,...,n), apteegi numbrit, kus see ravim on defektuuris ja nende apteekide koguarv on n. Kui ravim on ülejäägis, siis lisame tema grupi tähistusele И (излишний) ja kui defektuuris, siis Д (дефектура). Näiteks tähistab ДС; ravimi С grupi hulka, mis tuli puudus j-ndas apteegis. ИО ravimi kogu (общий) ülejääki i-ndas apteegis.

Olenevalt ravimi ülejääkide hulgast ja selle ravimi vajadustest, mis arvestavad kehteaega, võib koostada mitu erinevat varianti ravimi optimaalse ümberjaotamise ülesandest.

Kõik need ülesanded on taandatavad transpordiülesandele, mida õppisime lahendama eespool. Apteegid, milles jääb ravimit üle, vastavad ladudele; apteegid, kus on ravim defektuuris, vastavad tarbijatele. Kui ülejäägid ületavad vajadusi, siis tuuakse formaalselt sisse veel üks tarbija (fiktiivne apteek), kuhu lähevad kôik ülejäägid,transporditabelis tuleb juurde üks veerg. Kui aga ravimi ülejäägid ei kata täielikult vajadusi, lisatakse transporditabelile üks rida,millesse kantakse puudutulev ravimi hulk. Transporditabelisse kantakse ka apteekide vahelised kaugused c_{ij}. Fiktiivsete apteekidena vôiks ette kujutada mingit ravimite keskladu,kuhu viiakse lôppülejäägid ja kust saadakse lisa, et ümberjaotamisel puudutulevat ravimi hulka katta. Nii et vastavasse veergu vôi ritta tuleks kanda vastava apteegi kaugus kesklaost.

Nüüd vôib formuleerida vastava transpordiülesande. Leida suurused x_{ij}, mis minimiseerivad sihifunktsiooni

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij}, \tag{1}$$

tingimustel $x_{ij} \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m+1), \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{3}$$

(v.t. transporditabelit.)

Vaatame môningaid selle ülesande eri variante.

I. variant. Eeldame, et ravimi ülejääk kôikides apteekides kokku $\mathcal{UO} = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{UO}_i$ ei ületa vajaduste summat $\mathcal{DC} = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{DC}_j$ ehk $\mathcal{UO} \leq \mathcal{DC}$.

Kanname transporditabelisse $a_i = \mathcal{UO}_i$ (i = 1, ... m) ja $b_j = \mathcal{DC}_j$ (j = 1, ...n) ning $a_{m+1} = \mathcal{DC} - \mathcal{UO}$, $b_{n+1} = 0$.

Nüüd $\sum = \sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$ ja saame kinnise transpordiülesande optimaalse lahendi x_{ij} leidmiseks.

Transporditabel.

		Vajadused				
	$\sum$	b_1	b_2	...	b_n	b_{n+1}
Tagavarad	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	... ...	c_{1n} x_{1n}	c_{1n+1} x_{1n+1}
	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	... ...	c_{2n} x_{2n}	c_{2n+1} x_{2n+1}
	...	...	...	...	...	...
	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	... ...	c_{mn} x_{mn}	c_{mn+1} x_{mn+1}
	a_{m+1}	c_{m+11} x_{m+11}	c_{m+12} x_{m+12}	... ...	c_{m+1n} x_{m+1n}	c_{m+1n+1} x_{m+1n+1}

II <u>variant</u>. Kui ravimi C grupi ülejääk on väiksem kui nõudmine selle järele

$$UC \leq DC,$$

kus $UC = \sum_{i=1}^{m} UC_i$; ja $DC = \sum_{j=1}^{n} DC_j$, aga samal ajal ka kogu ülejääk on väiksem kui nõudmine

$$UO \leq DO,$$

kus $UO = UC + UT$ ja $DO = DC + DT$.

Siin $UT = \sum_{i=1}^{m} UT_i$ ja $DT = \sum_{j=1}^{n} DT_j$.

Põhimõttel „ekstranõudmised ülejääkidest" saame kaks transpordiülesannet:

1° Kasutame ära kõik ravimi C grupi ülejäägid. Kanname transporditabelisse:

$a_i = UC_i$ (i = 1,...,m), $a_{m+1} = DC - UC$, $b_j = DC_j$,

$b_{n+1} = 0$ ($j = 1,\ldots,n$). Nüüd leiame selle ülesande optimaalse lahendi x_{ij}.

2° Rahuldame ravimi nii ekstra kui ka jooksvad vajadused. Paneme tähele, et ekstra vajadused, mis jäid täitmata, on leitud ülesande 1° lahendamisel ja asuvad selle tabeli viimases reas: $x_{m+1\,j}$ ($j = 1,2,\ldots,n$). Need tuleb lisada jooksvatele vajadustele. Kanname andmed transporditabelisse: $a_i = U\bar{C}_i$,

$$a_{m+1} = DO - UO, \quad b_j = D\bar{C}_j + x_{m+1\,j}, \quad b_{n+1} = 0.$$

Nagu näha, kui vajadused ületavad ülejääke, tuleb tuua sisse jällegi rida m + 1, mis näitab, palju tuleb viia apteekidesse otse laost.

Kui ravimi ümberjaotamise ülesandes on tingimus, et esimeses järjekorras tuleb rahuldada ekstra vajadused, ka siis, kui sellele kaasneb suurem transpordikulu ja samal ajal $UC < DC$, $DC < UO < DO$, siis tuleb pärast ülesande 1° lahendi leidmist lahendada ülesanne, milles ekstra vajadused rahuldatakse ravimi $\bar{C}$ grupi jääkidest.

3° Leiame $DC_j' = x_{m+1\,j}$, siin $x_{m+1\,j}$ on leitud ülesande 1° lahendamisel. Täidame transporditabeli $a_i = U\bar{C}_i$ ($i = 1,\ldots,m$),

$$a_{m+1} = 0, \quad b_j = DC_j' \; (j = 1,\ldots,n), \quad b_{n+1} = U\bar{C} - DC', \text{ kus}$$

$$DC' = \sum_{j=1}^{n} DC_j', \qquad U\bar{C} = \sum_{i=1}^{m} U\bar{C}_i.$$

Nagu näha, tuleb antud juhul tabelisse juurde üks veerg n+1, kuhu märgime lahenduse käigus leitud $\bar{C}$ grupi ülejäägid $U\bar{C}_i = x_{i\,m+1}$.

Need saavad algandmeteks ülesande 2° lahendamisel.

III variant. Kui antud ravimi C grupi varud UC on väiksemad kui vajadused, aga üldülejäägid ületavad koguvajaduse, siis $UC < DC$, $UO > DC$, kus $UO = UC + U\bar{C}$; $DO = DC + D\bar{C}$, siis esialgu nagu II variandis lahendame ülesande 1°, mille viimasesse ritta kirjutatakse ülesande lahendamise käigus rahuldamata jäänud vajadused ravimi C grupi osas kujul $x_{m+1\,j}$.

Seejärel lahendatakse järgmine transpordiülesanne. Koostame transporditabeli $a_i = U\Pi_i$ (i = 1,..,m), $b_j = D\Pi_j$ (j = 1,...,n) $b_{n+1} = U\Pi - D\Pi'$, kus $D\Pi'_j = D\Pi_j + x_{m+1\,j}$, siin $x_{m+1\,j}$ on leitud ülesande 1° lahendamisel ja

$$D\Pi' = \sum_{j=1}^{n} D\Pi'_j .$$

IV variant. Kui ravimi C grupi ülejäägid ületavad vajadusi nende järgi $UC > DC$, aga samal ajal Π-grupi ülejäägid on väiksemad kui nende vajadused, siis lahendatakse kaks transpordiülesannet.

1° Esimesena lahendatakse jällegi ülesanne „ekstra vajadused ülejääkidest". Selleks koostame transporditabeli $a_i = UC_i$ (i = 1,...,m), $a_{m+1} = 0$, $b_j = DC_j$ (j = 1,...,n), $b_{n+1} = UC - DC$, kus $UC = \sum_{i=1}^{m} UC_i$, $DC = \sum_{j=1}^{n} DC_j$.

2° Teisena lahendatakse jooksvate vajaduste ülesanne. Nüüd tuleb kanda tabelisse $a_i = U\Pi_i$ (i = 1,...,m), $a_{m+1} = D\Pi - U\Pi$, $b_j = D\Pi_j$ (j = 1,...,n), $b_{n+1} = 0$.

Pärast lahendamist on näha tabelist, et vajaduste täielikuks rahuldamiseks ei piisa ülejääkidest ja viimasesse ritta on kantud $x_{m+1\,j}$ – puudutulev ravimi hulk.

V variant. Kui ravimi C grupi ülejäägid ületavad ekstra vajadusi $UC > DC$ ja Π-grupi ülejäägid ületavad jooksvaid nõudmisi $U\Pi > D\Pi$, siis tuleb jällegi lahendada 2 transpordiülesannet. Esimene ülesanne ühtib täielikult IV variandi ülesandega 1°. Teisena tuleb täita uus tabel, kus $a_i = U\Pi_i$ (i = 1,...,m), $a_{m+1} = 0$, $b_j = D\Pi_j$ (j = 1,...,n), $b_{n+1} = U\Pi - D\Pi$.

Ülesande lahendamise käigus kantakse veergu n + 1 kõik ülejäägid, mida ei lähe tarvis.

Näide. Vitamiini D_2 (ergokalsiferooli) ümberjaotamise ülesanne. Seitse apteeki (m = 7) teatas, et neil on ülejäägid kokku 62 tuhat pakki, 3 apteeki (n = 3) soovis seda saada kokku 42 tuhat pakki.

Vastav tabel ülejääkide ja nõudmiste kohta on järgmine.

Ülejäägid				Nõudmised			
Apteek nr.	Kokku UO	Kehtib 6–12 k. UC	Kehtib üle 12 k. $U\Pi$	Apteek nr.	Kokku $\mathcal{D}O$	Ekstra $\mathcal{D}C$	Jooksev $\mathcal{D}\Pi$
1	11	3	8	1	10	3	7
2	8	2	6	2	20	5	15
3	10	5	5	3	12	4	8
4	6	1	5	$\sum$	42	12	30
5	10	–	10				
6	7	–	7				
7	10	–	10				
$\sum$	62	11	51				

Apteekide vahelised kaugused c_{ij} on esitatud tabelina.

$i \backslash j$	1	2	3
1	50	44	47
2	78	17	24
3	60	48	54
4	89	45	40
5	64	29	34
6	91	7	10
7	69	30	31

Võrreldes tabelis antud andmeid, leiame, et see ülesanne rahuldab III variandi tingimusi ,
Järelikult tuleb meil lahendada järjest 2 transpordiülesannet.

1° Siin võtame arvesse ainult need apteegid, milles vitamiin $\mathcal{D}_2$ kuulub C gruppi. Kuna $UC < \mathcal{D}C$, siis tuleb tuua sisse üks fiktiivne apteek (tabelisse tuleb juurde üks rida), mille kauguse teistest apteekidest võrrutame nulliga, kuna meil pole plaanis seda vedu teostada, vaid see on algandmetaks teisele ülesandele.

Koostame vastava transporditabeli

12		Vajadused 1: 3	2: 5	3: 4
Tagavarad	1: 3	50	44	47
	2: 2	78	17	24
	3: 5	60	48	54
	4: 1	89	45	40
	5: 1	0	0	0

Leiame ülesande lahendi Vogeli meetodiga. Saame järgmise tabeli

12		Vajadused			Kahjud				
		3	5	4	I	II	III	IV	V
Tagavarad	3	50 2	44 0	47 1	3	3	3	3	3
	2	78 0	17 2	24 0	7	7	–	–	–
	5	60 0	48 3	54 2	6	6	6	6	6
	1	89 0	45 0	40 1	5	5	5	5	–
	1	0 1	0 0	0 0	0	–	–	–	–
Kahjud	I	50	17	24					
	II	10	27	16					
	III	10	1	7					
	IV	–	1	7					
	V	–	4	7					

Selleks, et teada saada, kas leitud lahend on optimaalne, kasutame potentsiaalide meetodit. Selleks koostame tabeli, kandes sellesse ainult nullist erineva lahendi.

		Vajadused			u_i
	12	3	5	4	
Tagavarad	3	50 / 0 / 2	44 / 3	47 / 0 / 1	-47
	2	78 / 52	17 / 0 / 2	24 / 1	-23
	5	60 / 3	48 / 0 / 3	54 / 0 / 2	-54
	1	89 / 46	45 / 11	40 / 0 / 1	-40
	1	0 / 0 / 1	0 / 9	0 / 3	3
v_j		-3	6	0	

Siis moodustame baasilahendile vastava aüsteemi:

$$u_1 + v_1 = -50;$$
$$u_1 + v_3 = -477;$$
$$u_2 + v_2 = -17;$$
$$u_3 + v_2 = -48;$$
$$u_3 + v_3 = -544;$$
$$u_4 + v_3 = -40;$$
$$u_5 + v_1 = 0.$$

Kuna võrrandeid on ühe võrra vähem kui otsitavaid, võtame $v_3 = 0$ ja leiame $u_1 = -47$, $u_3 = -54$, $u_4 = -40$, $v_1 = 3$, $u_5 = 3$, $v_2 = 6$, $u_2 = -23$. Kanname saadud tulemused tabelisse ja arvutame potentsiaalid. Selgub, et nad on kõik mittenegatiivsed. Järelikult on leitud lahend optimaalne. Leiame ka saadud lahendile vastava sihifunktsiooni väärtuse $\mathcal{L}$ valemi (1) järgi.

$$\mathcal{L} = 2\cdot 50 + 1\cdot 47 + 2\cdot 17 + 3\cdot 48 + 2\cdot 54 + 1\cdot 40 = 473.$$

Nagu näha tabelist (lk. 74), jäid 1. apteegi vajadused osaliselt rahuldamata. Seda tuleb arvestada ülesande 2° lahendamisel ja võtta puudutulnud ravimi hulk (1 ühik) jooksvatest ülejääkidest. Täidame uue transporditabeli, kus $b_1 = 7 + 1$. Leiame lahendi „loodenurga reegli" abil. Teatavasti sel meetodil ei arvestata veokulusid, neid pole ka tabelisse vaja kanda. Vastav tabel on järgmine:

			Vajadused			
			1	2	3	4
		51	8	15	8	20
Tagavarad	1	8	8	0	0	0
	2	6	0	6	0	0
	3	5	0	5	0	0
	4	5	0	4	1	0
	5	10	0	0	7	3
	6	7	0	0	0	7
	7	10	0	0	0	10

Lahendi optimiseerimiseks kasutame potentsiaalide meetodit. Koostame uue tabeli, kuhu kanname veokulud ja äsja leitud lubatava baasilahendi. Leiame, et veokulu $\mathcal{L}_1 = 1200$. Nüüd koostame süsteemi:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = -50; \\ u_2 = v_2 = -17; \\ u_3 + v_2 + -48; \\ u_4 + v_2 = -45; \\ u_4 + v_3 = -40; \\ u_5 + v_3 = -34; \\ u_5 + v_4 = 0; \\ u_6 + v_4 = 0; \\ u_7 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Selles süsteemis on 9 võrrandit 11 tundmatuga.Kaks tundmatut võime vabalt ette anda. Olgu $v_1 = v_2 = 0$, Leiame süsteemist: $u_2 = -17$, $u_3 = -48$, $u_4 = -45$, $v_3 = 5$, $u_5 = -39$,

$v_4 = 39$, $u_6 = -39$, $u_7 = -39$, $u_1 = -50$

Kanname saadud tulemused tabelisse ja arvutame potentsiaalid (lk.77)

Selgub, et leitud lahend pole optimaalne, sest osa potentsiaalidest on negatiivsed. Valime absoluutväärtuselt suurima negatiivse potentsiaali.See on tabelis 6-ndas reas ja teises veerus -32. Muudame lubatavat transpordiplaani, moodustades ahela, tabelisse märgime „ + " ja „ - " märgidega. Valime vähima „ - " märgiga märgitud x_{ij}-dest:

$$\min (7,7,4) = 4$$

Järelikult tuleb kõikidesse „ + " märgiga ruutudes liita lahendile 4 ja „ - " märgiga ruutudes olevast lahendist lahutada 4. Saame uue lahendi: $x_{11} = 8$, $x_{22} = 6$, $x_{32} = 5$, $x_{42} = 0$, $x_{43} = 5$, $x_{53} = 3$, $x_{54} = 7$, $x_{62} = 4$, $x_{64} = 3$, $x_{74} = 10$. Leiame ka vastava veokulu $\mathcal{L}_2 = 1072$. Loomulikult on see väiksem kui esimesel sammul leitud $\mathcal{L}_1$, kus polnud üldse veokulusid arvesse võetud.

Nüüd tuleks potentsiaalide meetodit korrata, et kontrollida saadud uue lahendi optimaalsust. Soovitav on lahendada ülesanne lõpuni iseseisvalt.

		Vajadused				
	51	8	15	8	20	u_i
Tagavarad	8	50 0 8	44 -6	47 2	0 -11	-50
	6	78 67	17 0 6	24 12	0 22	-17
	5	60 12	48 0 5	54 11	0 -9	-48
	5	89 44	45 − 0 4	40 + 0 1	0 -6	-45
	10	64 25	29 -10	34 − 0 7	0 + 0 3	-39
	7	91 52	7 + -32	10 -24	0 − 0 7	-39
	10	69 30	30 -9	31 -8	0 0 10	-39
v_j		0	0	5	39	

Tabel 1

Normaalne tihedusfunktsioon

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	0,0
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918	0,1
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0,2
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0,3
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0,4
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352	0,5
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0,6
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0,7
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0,8
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0,9
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203	1,0
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1,1
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1,2
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1,3
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1,4
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	1,5
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1,6
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1,7
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1,8
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1,9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449	2,0
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363	2,1
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2,2
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2,3
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2,4
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139	2,5
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2,6
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2,7
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2,8
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2,9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	3,0
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3,1
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3,2
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	3,3
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3,4
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006	3,5
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3,6
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3,7
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3,8
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	3,9
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t

Tabel 2

Standardiseeritud normaaljaotuse jaotusfunktsioon

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−0,0	0,5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
−0,1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
−0,2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
−0,3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
−0,4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
−0,5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
−0,6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
−0,7	2420	2389	2358	2327	2297	2266	2236	2206	2177	2148
−0,8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
−0,9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
−1,0	0,1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
−1,1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
−1,2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
−1,3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
−1,4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
−1,5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
−1,6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
−1,7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
−1,8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
−1,9	0288	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
−2,0	0,0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
−2,1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
−2,2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
−2,3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
−2,4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
−2,5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
−2,6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
−2,7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
−2,8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
−2,9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014

t = −3,0	−3,1	−3,2	−3,3	−3,4	−3,5	−3,6	−3,7	−3,8	−3,9
$F(t)$ = 0,0013	,0010	,0007	,0005	,0003	,0002	,0002	,0001	,0001	,0000

Tabel 2 (järg)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0,8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	0,9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986

t = 3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(t) = ,9987	,9990	,9993	,9995	,9997	,9998	,9998	,9999	,9999	1,0000

T a b e l 3.

Normaaljaotuse normeeritud hälvete täiendkvantiilid $z_{\gamma/2}$

$\gamma/2$	$z_{\gamma/2}$
0,50	0,0000
0,45	0,1257
0,40	0,2533
0,35	0,3853
0,30	0,5244
0,25	0,6745
0,20	0,8416
0,15	1,0364
0,10	1,2816
0,05	1,6449
0,025	1,9600
0,001	2,3263
0,0005	2,5758
0,0001	3,0902
0,00005	3,2905
0,00001	3,7190
0,000005	3,8906

T a b e l 4

Studenti jaotuse täiendkvantiilid $t_{\gamma/2}$

$f \backslash \gamma/2$	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32
7	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50	4,03
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06	3,43
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37
14	1,34	1,76	2,15	2,62	2,98	3,33
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81

T a b e l 5

Fisheri jaotuse täiendkvatiilid F_γ

f_2 \ f_1	$\gamma = 0{,}01$								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

T a b e l 5 (järg)

f_2 \ f_1	$\gamma = 0,01$								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	9,9	9,5	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	3,7	3,3	2,9
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,3	2,9	2,4
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,0	2,7	2,2
26	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,5	2,1	1,6
120	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,2	1,8	1,0

Kasutatud kirjandus.

I. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическя статистика. Москва "Высшая школа", I977.

2. Мартыненко В.Ф., Попов Ю.В., Девышев Г.И. Модели функционирования и управления в аптечной системе. Москва, Медицина, I977.

3. Soonets K. Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika. Tartu, TRÜ Kirjastus 1976.

4. Lepik Ü., Soonets K. Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika keemikutele. Tartu, TRÜ Kirjastus 1975, 1982.

5. Kaasik Ü., Kivistik L. Operatsioonianalüüs. Tallinn, "Valgus" 1980.

S I S U K O R D

УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ОТДЕЛЕНИЯ ФАРМАЦИИ.
Изд. 2-е.
Составитель Ийви В а й н и к к о.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja J. Volmer.
Paljundamisele antud 25.02.1987.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 5,12.
Arvestuspoognaid 4,62. Trükipoognaid 5,5.
Trükiarv 300.
Tell. nr. 252.
Hind 15 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Tiigi t. 78.