mat 158

TH. KOIK

VILJANDI REAALGÜMNAASIUMI DIREKTOR

ELEMENTAARNE ALGEBRA

ÕPPERAAMAT KOOLIDELE JA ISEÕPPIJAILE

I

Tartu Ülikool inv. 158 Didakt.-metood. Seminar

5805

Inv. 241.

TARTU ÜLIKOOL.
DIDAKTILINE SEMINAAR
MATEMAATIKA JAOSKOND

VILJANDI LINNA JA KIHELKONNA ÕPETAJATE ÜHINGU
KIRJASTUS

1920

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
55995
A-3315 II
E 15046394

Ed. Bergmann'i trükikoda, Tartus.

Eessõna.

Käesoleva raamatu kirjutamiseks on annud tõuke õpperaamatute puudumine, mis käsitaksid algebrat.

Algebra formaalne iseloom ja aine hulk võivad õpperaamatu puudumisel tekitada pahe, et õppijaile algebra omandamine muutub mehaaniliseks võtete tarvitamiseks, millega aga selle teaduse õpetamise siht jääb täitsa kõrvale. Loomulikult peaks algebra õpperaamat sisaldama ka harjutusi, kuid et mitte edasi lükata raamatu ilmumist, olen pidanud esialgselt loobuma kavatsusest võtta kursusse ka näitusi ja ülesandeid õpilaste jaoks.

Et praegune töö on esimene algebra õpperaamat hulga aastate eest ilmunud Kurrik'u „Arvuvalla" järele, siis ei või ta vaba olla puudustest. Kõik arvustavad märkused raamatu kohta leiavad minu poolt täit tähelpanu. Terminoloogia alal olen käinud peaasjalikult „Matemaatika sõnastiku" järele, kuid mitte sihikindlalt; et meie terminoloogia veel on ühtlustamata, siis olen vastavail kohtadel tarvitud terminitele juurde lisanud sõnad, mis on mujal tarvitusel.

Aine korraldamisel selgus, et on soovitav seda teha kontsentriliselt, mille pärast tuli märksa kõrvale kalduda meil senini tarvitusel olnud algebra korralduskavadest. Minu arvamise järele on vaja õpilasi algebraga tutvustamisel vabastada neid esialgu kõige selle õppimisest, mis puhasformaalse iseloomuga, või mis neis ei ärata huvi sellepärast, et seda kohe ei saa tarvitada. Olen püüdnud õppijaid juhtida võimalikult ruttu algebra peaaine — arvlausete — juurde, kõrvale jättes kõike,

mis arvlausete lahendamisel esialgu täitsa ülearune. §§-id ehk nende osad, mis võivad jääda esiotsa kõrvale, olen ära märkinud tähisega *. Nende hulka kuuluvad paar teoreemi, polünoome jagamine, osalt ka kasvatamine, iseäranis aga kõik teisendamised, mis nõuavad algteguriteks lahutamist. Algteguriteks lahutamine on korraldud ise peatükki, mitte selleks, et seda teha omapäraseks käsitusaineks, vaid et õpetaja võiks juhatada selle osa juurde tarvilisel korral õpilasi, kui näitused nõuavad algteguriteks lahutamist. Kordamisel peaks ka märgiga * äratähendud osad kursusse võtma. Üleüldse aga ei ole õpetaja sunnitud ainet raamatu järjekorras käsitama, vaid ta võib sagedasti lahusolevaid osasid ühendada.

Iseäranis tarvilikuks olen pidanud õpilaste tutvustamise funktsionaalsuse mõistega, koordinaatidega ja graafiliste kujutustega; on ju viimased ühenduslülid algebra ja geomeetria vahel.

Oma meeldivaks kohuseks loen avaldada, et raamat oma praegust kuju ei ole saanud üksi minu töö läbi. Kõige suurema kaasabiga on mind toetanud käsikirja läbivaatamisel minu sõber Johannes Kiivet, kes oma põhjalikkude teadmistega ja suure vilumusega õpetamise alal mind on hoidnud paljude vääratuste ja vigade eest. Minu naine on sagedasti juhtinud minu tähelpanu konarluste ja puuduste peale ja on abiks olnud korrektuuri lugemisel. Avaldan neile siinkohal selle töö eest kõige sügavamat tänu. Viljandi Haridusseltsi tütarlastegümnaasiumi direktor M. Varrik võttis lahkelt oma peale käsikirja keelelise läbivaatamise, mille eest temale palju tänu ütlen. Kui raamatu keel mitte igas asjas kokku ei käi tarvitatava kirjakeelega, siis palun selles süüdistada ainult mind.

Viljandis, 17. aprillil 1920.

Th. Koik.

I.

Algebralised arvud ja tehted.

§ 1. Aastatuhanded tagasi elas Niiluse kallastel rahvas, egiptlased, kelle ehitustööd ja mälestusmärgid seisavad tänapäevani ja kõnelevad meile igavikku kadunud sündmustest. Sealt vanalt kultuurimaalt on leitud Ahmesi papüürus — kõige vanem matemaatika õpperaamat, kirjutud hieroglüüfidega, milles meie leiame ka algelemendid algebrast. See dokument, Ahmesi papüürus, hoitakse Londonis Briti Muuseumis, Rhindi kogus alal, mispärast teda nimetakse ka Rhindi papüüruseks. Rhindi papüürus on egiptlase Ahmesi kirjutud aastate 2000 ja 1700 vahel enne Kr. ja kannab pealkirja: „Õpetus kõigi salajate asjade teadasaamiseks". Kuid selle papüüruse kirjutaja teatab, et „Õpetus" põhjeneb palju vanemate dokumentide peal, mis ulatavad vast kuni 3000 aastani e. Kr.

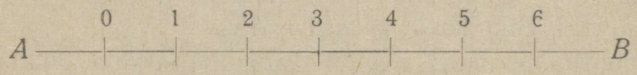
Meie võime seega algebra vanadust arvata 3500-ja, võib olla aga ka 5000-e aastani. Selle aja jooksul on algebra arendamise juures tööd teinud lugemata uurijad. Teda on arendanud rahvad, kes kord on olnud suured ja praegu kadunud, nagu egiptlased, ja rahvad, kellede elus kord olnud suur tõus ja selle järele käinud hääbumine, nagu greeklased, hindud, araablased. Mõnede nimetud rahvaste töö on ümberpanekute läbi saanud teiste rahvaste omanduseks, teiste töö oli unustuses aastasajad ja on jälle leitud ainult uuemal ajal. Praegusele kõrgusele on algebra tõstnud oma töödega eurooplased: greeklased, itaallased, prantslased, inglased ja sakslased. Meie

võime öelda, et matemaatika ajalugu üleüldse ja algebra arenemise ajalugu eraldi jutustab meile ühtlasi ka rahvaste ajalugu. Lühikesi ajaloolisi teateid algebra üle tahame anda edaspidi vastavail kohtadel.

§ 2. Arvude kujutamisest

Kui meie tahaksime kõnelda algebra sisust, siis peame ütlema, et alguses võimata on anda selget pilti sellest, millega teeb algebra tegemist — see selgub iseenesest järgnevast. Ainult niipalju ütleme, et algebra erineb omapärase ülesannete lahendamise viisiga aritmeetikast, milleks algebra tarvitab arve, mida ei tunta aritmeetikas. Edaspidi ei kujuta meie arve mitte ainult numbritega: 2, 5, $^1/_2$, $10^1/_3$ jne., vaid seletuste pildistamiseks tarvitame ka teistsugust arvude tähendamise viisi, millest kohe kõneleme.

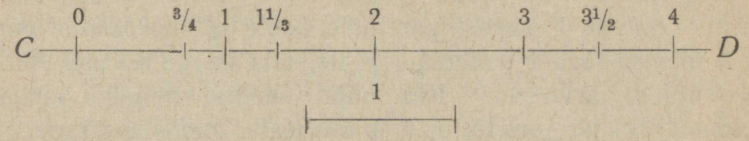
Arve võime meie kujutada järgmiselt: tõmbame sirgjoone *AB* (joon. 1) ja valime selle joone peal mingi punkti, mida nimetame nullpunktiks. Joonistusel on nullpunkt ära tähendud 0-ga. Selle järele võtame mingisuguse pikkuse üksuse, mis võib olla tsentimeeter, millimeeter, aga ka ükskõik missugune muu pikkus.



Joon. 1.

Nüüd võtame joonel *AB*, nullpunktist alates, paremale poole punktid, mis nullpunktist seisavad 1, 2, 3, 4 jne. pikkuse üksust kaugel. Need punktid tähendavad joonistusel arve 1, 2, 3, 4 jne. Arusaadav on, et kui mingisugune punkt seisab joonel *AB*, nullpunktist 14 pikkuse üksust paremal pool, siis tähendab ta arvu 14. Niisama ka, kui mingisugused punktid joonel *AB* asuvad nullpunktist $3^1/_2$ ehk $5^1/_3$ pikkuse üksust paremal pool, siis kujutavad need punktid arve $3^1/_2$ ehk $5^1/_3$.

Joonistusel 2 on ära tähendud mõned punktid joonel *CD* ja nende kohta kirjutud arvud, mida punktid kujutavad. Pikkuse üksus on joonistud alla.



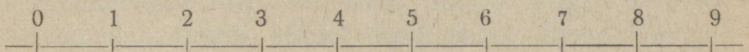
Joon. 2.

Arusaadav on, et nullpunkt kujutab arvu null.

Niisugust sirgjoont, millel kujutame arve, nimetakse arvteljeks.

§ 3. Kokku- ja mahaarvamisest arvteljel.

Oletame nüüd, et meie läheme arvteljel (joon. 3) esiteks nullpunktist 5 pikkuse üksust paremale poole ja pärast seda veel 3 pikkuse üksust, siis oleme jõudnud sel viisil punkti



Joon. 3.

juurde, mis kujutab arvu 8. Meie oleme arvudest 5 ja 3 tekitanud uue arvu, millel on niisama palju üksusi, kui 5-el ja 3-el kokku.

Kui lugeda arvteljel nullpunktist esiteks $2\frac{1}{2}$ pikkuse üksust paremale poole ja siis veel $1\frac{1}{4}$ pikkuse üksust, siis jõuame punkti juurde, mida tähendakse arvuga $3\frac{3}{4}$. Üleüldse oleme nullpunktist siis $3\frac{3}{4}$ pikkuse üksust edasi lugenud ja arvudest $2\frac{1}{2}$ ja $1\frac{1}{4}$ tekitanud uue arvu: $3\frac{3}{4}$, mida, nagu teada, nimetakse $2\frac{1}{2}$ ja $1\frac{1}{4}$ summaks. — Arve, mida kokku arvatakse, nimetakse kokkuarvatavaiks. Summa on seega arv, mis sisaldab niipalju ühelisi ja selle osasid, kui palju neid on kokkuarvatavais kokku. Aritmeetikast on teada, et kaks arvu

kokkuarvamisel ühendakse märgiga plus (+). Kui arvteljel tahame arve kokku arvata, siis peame, nagu nägime, nullpunktist alates võtma alati kokkuarvatavaid ühes sihis ja viimased paigutama üksteise otsa.

Kujutame nüüd endile ette, et meie võtame arvteljel nullpunktist esiteks 7 üksust paremale poole ja siis saadud punktist 3 üksust tagasi pahemale poole, siis saame sel teel punkti, mis kujutab arvu 4. Kui nüüd saadud neljale üksusele arvame 3 üksust juurde, s. t. 4 üksusele loeme 3 üksust paremale poole juurde, siis jõuame jällegi punkti juurde, mis tähendab 7.

On arusaadav, et kui meie jõudsime 7-st üksusest 3-e üksust pahemale poole lugedes 4-ja üksuse juurde, siis meie kujutasime arvteljel järgmise tehte:

$$7 - 3 = 4,$$

see tähendab, mahaarvamise tehte. Mahaarvamise tehet tähendakse märgiga miinus (—). Meie nimetame mahaarvamiseks niisugust tehet, kus otsime arvu (vahe), mis antud arvuga (vähendaja) kokkuarvatult annab teise antud arvu (vähendatav).

Öeldust selgub, et sel juhtumisel, kui me tahame arvteljel mõnele arvule teise arvu juurde arvata, siis arvteljel sellest punktist, mida kujutab esimene arv, nii mitu üksust ja üksuse osa peame paremale poole võtma, kui mitu üksust (ehk üksuse osa) sisaldab juurdepandav arv.

Tahame aga arvu maha võtta, siis peame võtma sellest punktist, mis kujutab vähendatavat arvu, niipalju üksusi ja osasid pahemale poole (tagasi), kui palju on üksusi ja selle osasid vähendajas. —

Esimene raamat, kus tarvitati märke + ja —, on Johann Viedmanni aritmeetika, mis ilmus Leipzigis 1489. a. On arvata, et need märgid olid esiotsa ainult sõnade „plus“ ja „miinus“ lühendused, sest need sõnad olid juba ammugi enne Viedmanni tarvitusel. Algebras hakati neid märke tarvitama aga alles François Viète ajal. Viète ehk Vieta oli Prantsuse arvteadlane (1540—1603).

§ 4. Tähtede tarvitamine.

1. A linnas on 4 alamajärgulist rahvakooli, 2 kõrgemajärgulist rahvakooli, 1 kaubanduskool ja 1 keskkool. Ajalehes antakse teada, et suvine vaheaeg algab kõigis A linna koolides 15. juunil. Kas teab keegi ajalehelugeja, kes elab kusagil mujal, kui palju koole lõpetab oma töö 15. juunil? Ei tea, kuid teatud ettekujutuse saab ta sellest ometi, mis sünnib 15. juunil A linna koolides.

2. B koolis kutsub kooliarst teatud päeval pooled I klassi õpilastest tervislisele järelvaatusele. Kas teab keegi kõrvaline isik, kellele I kl. õpilane kõneleb sellest, ilma et ta nimetaks klassi õpilaste arvu, kui palju õpilasi peab ilmuma järelvaatusele? Ei, ta võib õpilaste arvu kohta ainult öelda, et pooled I kl. õpilased peavad minema.

Need kaks näitust tõendavad, et meie igapäevases elus sagedasti tarvitame mõnda sõna, mille all meie mõistame mingit arvu, mille suurus meile aga tundmata. Neis näitustes oli tarvitud sõna kõik koolide arvu asemel ja pooled I kl. õpilased poole õpilaste arvu asemel.

Algebra iseäraldus on see, et ta tarvitab niisugusel korral tähti arvude asemel, teiste sõnadega, kujutab arve tähtedega.

Kui me näituseks edaspidi ülesannetes, ehk näitustes, kirjutame tähe *a*, siis kujutame temaga mingisugust arvu — täis- ehk murdarvu — näit.: kahte, viit, kümmet, sada, veerandit, kolme ja poolt j. n. e.

Niisama tähendab täht *c* jällegi igasuguseid arve, olgu 1, 4, $3^2/_5$, $12^1/_2$, 25, 71 j. n. e.

Sedasama võime öelda ka iga teise tähe: *m, n, p, x, z* j. n. e. kohta.

Küsimise peale, missugust arvu näit. tähega *q* tähendakse, võime ainult vastata, et *q* kujutab igasuguseid täis- ja murdarve.

Mõnikord on ülesandes ette määratud, missugune arvsuurus on teatud tähel (missugust arvu kujutakse temaga), siis, muidugi, ei või seesama täht kujutada teisi arve. Niisama

ei või kujutada üks ja seesama täht samas ülesandes kord üht, kord teist arvu, vaid alati üht ja sedasama. Kindlasti tuleb siis meeles pidada, et edaspidi iga tähega võime kujutada igat arvu, kui mitte ette ei ole teada, missugust arvu ta peab kujutama. Et me ei tea tähtedega kujutud arvude suurust, siis nimetame neid ilmutamata arvudeks, kuna aga numbritega kirjutud arve hüütakse ilmutud arvudeks. Kui tarvitame tähti arvude kujutamiseks, siis on loomulik, et võib korda saata nende „sümboolsete“ arvudega tehteid. Võtame järgmise ülesande:

1. Koolipoiss ostis omale õpperaamatuid a marga eest ja kirjutusmaterjaali b marga eest. Kui palju andis poiss õpitarvete eest üleüldse raha välja?

Selles ülesandes tähendavad a ja b mingisuguseid arve, missuguseid nimelt, on meile teadmata. Kindel on aga, et meie peame raamatute ja kirjutusmaterjaali peale tarvitud raha kokku arvama, et küsimise peale vastata. Kokkuarvamise märk on aga $+$ (plus). Et a ja b kokku tulevad arvata, seda tähendame järgmiselt:

$$a+b,$$ ja loeme: a plus b.

Kui me 4 ja 8 kokku arvame, siis tähendame seda, nagu teada, nii:

$$4+8.$$

Kuid meie võime ka öelda, kui palju on nende arvude summa, nimelt 12:

$$4+8=12.$$

Et me aga ei tea, missugused arvud on a ja b, siis ei või meie ka teada, kui palju on a ja b summa, ja sellepärast loeme meie küsimise vastatuks, kui oleme ära tähendanud, mis arvudega tuleb teha. Arvud a ja b tulid kokku arvata ja resultaadi võime kirjutada ainult nii:

$$a+b$$

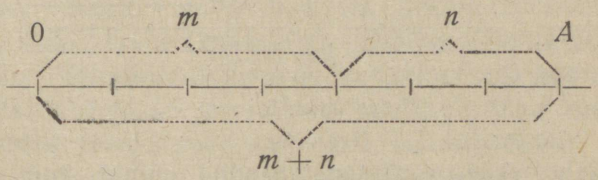
Sellepärast öeldakse, et $a+b$ on a ja b summa.

2. Üks vendadest on a aastat vana, teine on temast 1) 3 aast., 2) c aastat vanem. Kui vana on teine vend?

Selge on, et teise venna vanaduse leidmiseks esimese venna aastate arvule tuleb juurde panna vendade vanaduse vahet kujutav arv 1) 3, ehk 2) c.

Esimesel juhusel on teise venna vanadus $a+3$ aast. ja teisel juhusel $a+c$ aastat.

Niisama, kui arvteljel võisime kindlate arvudega kokkuarvamist toimetada, võime sedasama teha ka tähtedega kujutud arvudega.



Joon. 4.

Oletame, et nõutakse m ja n kokkuarvamist arvteljel. Selleks läheme (joon. 4 peal tähendab m arvu 4 ja n arvu 3) nullpunktist esite m üksust paremale poole ja saadud punktist veel n üksust paremale poole. Viimane punkt (märkisime tema tähega A) seisab siis nullpunktist $m+n$ üksust paremal pool ja punkt A kujutab siis arvu $m+n$.

Katsume vastata küsimise peale: missugune arv on täisarvude reas kolmandal kohal enne arvu k?

Arv k on mingisugune täisarv, näit., 10, 15, 21 j.n.e.

Kui tahame leida kolmanda koha peal arvu 17 ees seisvat arvu, siis peame 17-st maha arvama 3. Vahe 14 ongi nõutud arv, sest kui kirjutame rea: 14, 15, 16, 17, siis näeme, et 14 seisab tõesti kolmandal kohal enne 17. Selle järele võime ka kohe öelda, et arvu k ees kolmanda koha peal seisab täisarv:

$$k-3 \text{ (loe: } k \text{ miinus 3).}$$

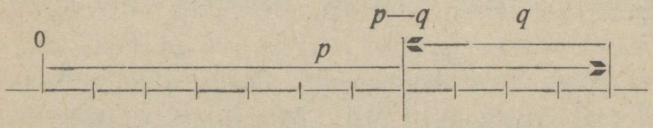
Teistviisi ei saa meie kujutada vahet k ja 3 vahel, sest arv k on meile teadmata.

Täisarvu p ees seisab q-da koha peal arv:

$$p-q \text{ (loe: } p \text{ miinus } q\text{).}$$

$p-q$ on vahe arvude p ja q vahel ja jällegi ei saa meie seda vahet kindlalt kirjutada, sest et p ja q on ükskõik missugused täisarvud. Sellest näeme, et algebras kahe arvu vahe otsimisel loeme küsimise vastatuks, kui ära oleme tähendanud, mida arvudega tuleb teha.

Arvteljel võime saada vahe $p-q$ järgmiselt. Võtame (joon. 5 peal kujutab ilmutamata arv p arvu 11 ja q arvu 4) nullpunktist p üksust paremale poole ja sealt, s. o. punktist



Joon. 5.

p pahemale poole q üksust. Saadud punkt kujutab arvu $p-q$. (Joonistuse peal on $p-q$ arvude 11 ja 4 vahe: $11-4=7$).

Esimene, kes hakkas algebras arve tähtedega järjekindlalt kujutama, oli Vieta (1540—1603), kuid ka enne teda tarvitasid mõned arvteadlased tähti, mitte aga alati.

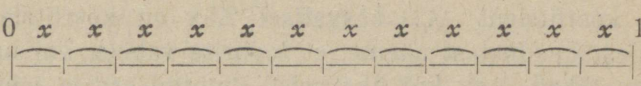
§ 5. Kasvatamine ja jagamine.

Sõidu eest raudteel võetakse maksu 15 penni kilomeetri pealt. Kui kahe naabrijaama vahe on 12 kilomeetrit, siis võetakse pileti eest nende kahe jaama vaheliseks sõiduks 15×12 penni ehk 180 penni. Mõne aja pärast muutub sõiduhind kilomeetri pealt; on selge, et siis muutub ka pileti hind sõidu jaoks mainitud jaamade vahel. Et aga ikkagi ära võiks tähendada pileti hinda, siis oletame, et kilomeetri pealt võetakse x penni; 12 kilom. sõidu eest tuleb maksta muidugi 12 korda enam. Seda tähendame nii:

$12 . x$ ehk lihtsalt $12x$ (loe: kaksteistkümmend x-i).

Arvteljel kujutame viimast tehet järgmiselt (joon. 6):

Võtame nullpunktist x üksust paremale poole, siis veel x üksust paremale poole j. n. e. 12 korda. Viimane punkt seisab $12x$ üksust nullpunktist paremal pool. x tähendab siin teatud arvu, mille, muidugi, vabalt võime valida.



Joon. 6.

Kasvatamine on niisugune tehe (v. joon. 6), kus üks arv (kasvatatav) võetakse nii mitu korda kokkuarvatavaks, mitu üksust on teises arvus (kasvataja). Saadav summa nimetakse kasvatiseks. Eelmises näituses on kasvatatav x ja kasvataja 12. Aritmeetikas kirjutakse kasvatatav harilikult enne kasvatajat, kuid algebras teeme seda sagedasti ümberpöördult. On ju aritmeetikast teada, et võib muuta kasvatatava ja kasvataja järjekorda.

Kooli telliti a lugemisraamatut ja makseti m marka raamatu eest. Kui palju makseti tellitud raamatute eest? Vastuse leidmiseks tuleb m kasvatada a-ga. Saadud arv tähendabki maksetud summat markades.

Tähendame seda:

$$a \,.\, m$$ ehk harilikult veel nii: am (loe: a m).

Arve, mida kasvatakse, nimetakse teguriteks, saadavat arvu kasvatiseks. Esimeses näituses on tegurid 12 ja x, kasvatis $12x$, teises näituses tegurid a ja m, kasvatis am.

Kasvatis võib olla ka kolme, nelja j. n. e. teguri resultaat. Niisuguseid kasvatisi tunneme juba aritmeetikast, kus me kasvatist $3 \,.\, 2 \,.\, 5$ nii välja arvasime, et enne leidsime $3 \,.\, 2 = 6$ ja siis 6 kasvatasime 5-ga. Niisama mõistetakse kasvatist abc ka algebras.

Et kasvatist $a \,.\, 1$ ei saa kujutada kui summat, kus a on võetud kokkuarvatavaks 1 kord (sest ei saa arvu a kokku arvata 1 kord!), siis mõistetakse kasvatise $a \,.\, 1$ all arvu a, nii et:

$$a \,.\, 1 = a$$

Võtame kasvatise $3b$; selles kasvatises on üks tegur, nimelt 3, kirjutud ilmutud arvuga, mitte tähega; niisugust ilmutud-arvulist tegurit nimetakse kasvatise koeffitsiendiks.

Näitused: kasvatisel $15a$ on koeffitsient 15, kasvatisel $^1/_2c$ on koeffitsient $^1/_2$, kasvatisel $2{,}5x$ on koeffitsient 2,5. Neist ülestähendustest näeme, et tegurite vahele, kui nad mõlemad on tähed, ehk kui üks neist ilmutud arv ja teine täht, ei kirjutata kasvatamismärki. (Mispärast peab lahutama kahte numbritega kirjutud arvu kasvatamise juures märgiga?)

Sel juhusel, kui kasvataja on murd, näit.: $a.^3/_4$, ei või meie enam öelda, et a tuleb võtta kokkuarvatavaks $^3/_4$ korda, vaid me laiendame kasvatamise tehte murde peale, öeldes, et a kasvatamine $^3/_4$-ga tähendab kolmneljandiku osa leidmist a-st. Viimne äramääramine on üleüldsem, sest et me võime öelda ka nelja kasvatamisel viiega, et me otsime neljast viit osa. (Muidugi on üks osa neli ühelist.)

Lõpuks peame veel ütlema, mil viisil tähendakse ära jagamise tehe ehk jagu (meie võime neid lugeda üheväärilisteks, sest, nagu öeldud, loeme tehte läbiviiduks, kui ära oleme tähendanud, mida arvudega vaja teha).

Nagu aritmeetikast teada, nimetakse jagamiseks tehet, millega otsitakse arvu (jagu), mis antud arvuga (jagaja) kasvatades annaks kasvatises teise antud arvu (jagatav).

Aritmeetikas kirjutasime, kui 15 jagasime 3-ga, ehk 4 jagasime 5-ga, nii:

$$15:3;\ 4:5,\ \text{ehk järgmiselt:}$$

$$\frac{15}{3};\quad \frac{4}{5}$$

Algebras tarvitakse neidsamu märke. Kui, näit., arv a tuleb jagada 5-ga, siis kirjutakse jagu järgmiselt:

$$a:5;\ \text{ehk}\ \frac{a}{5}.$$

Niisama kujutame jao u jagamist v-ga nii:

$$u:v,\ \text{ehk}\ \frac{u}{v}$$

Näitus. Kui linnas, milles elanikkude arv on y, tagavaraks oli 5000 kg. leivajahu, maha arvatud juba jahu, mis kaduma läheb mõõtmise j. n. e. juures, siis jatkub, kui jahu ühetasa ära jagada, iga isiku peale sellest

$$\frac{5000}{y} \text{ kilogrammi.}$$

§ 6. Avaldused ja nende arvsuurused.

Seniajani oli meil tegemist näituste ja ülesannetega, mille peale vastamiseks tuli tarvitada ainult üht tehet. Kuid enam jagu ülesandeid nõuab oma väljaarvamiseks rohkem tehteid. Näitus: aias kasvab c õuna- ja d pirnipuud. Neist puiest ei kanna 12 puud vilja. Palju viljakandjaid puid on aias?

Üleüldse on aias $c+d$ puud. Kui siit maha arvata 12, siis näitab vahe, et viljakandjaid puid on:

$$c+d-12.$$

2. Et jõuda neljakordse maja pööningule, on vaja üles minna kolmest trepist m astmega, ühest trepist n ja ühest p astmega. Mitu astet on maast pööningule?

Kolm treppi m astmega annavad kokku kolm kord m ehk $3m$ astet. Sinna juurde arvame veel n ja p astet, saame:

$$3m+n+\text{p}.$$

3. Kooli I klassis on p, II klassis q, III klassis r õpilast. I klassist puudus ühel päeval s, ja III klassist t õpilast. Kui palju õpilasi oli sel päeval koolis?

Kokku oli koolis õpilasi:

$$p+q+r.$$

Siit peame maha arvama s ja t, et teada saada koolis olijate õpilaste arvu; vastus on:

$$p+q+r-s-t.$$

Arvude kogu, tähtede ehk numbrite abil kirjutud, kus tähed ja numbrid märkidega üksteisega seotud, nimetakse a v a l d u s e k s.

TARTU ÜLIKOOL
DIDAKTILINE SEMINAR
MATEMAATIKA JAOSKOND

Nii näituseks on avaldused:

$$a+b,\ 2c-d,\ c+d-12,\ p+q-r-s \text{ j. n. e.,}$$

sest et neis kogudes arvud (tähed ehk numbrid) on ühendud tehete märkidega. Kõige lihtsamaks avalduseks võime lugeda üksikut arvu ehk tähte, nagu 4, a, x j. n. e. Edaspidi tuleb meil alatihti muuta avalduste välist kuju; niisugust tegevust nimetame avalduste teisendamiseks. Iga täht avalduses kujutab muidugi mõnda arvu. Selle järele, missuguseid arve kujutavad tähed avalduses, on ka selle avalduse arvsuurus, see tähendab see arv, mis me saame, kui tähtede asemele paneme arvud ja teeme nendega näidatud tehted.

Olgu antud avaldus:

$$c-d+e.$$

Kui $c=10$, $d=4$, $e=2$, siis saame, pannes antud avalduses c asemele 10, d asemele 4 ja e asemele 2, ehk, lühidalt öeldes, asendades neid avaldusse:

$$10-4+2;$$

peale näidatud tehete kordasaatmise saame 8.

Sellega on avalduse arvsuurus 8, kui tähed järgmisi arve kujutavad: $c=10$, $d=4$, $e=2$.

Kui aga:

$$c=15,\ d=1,\ e=12,$$

siis on sellesama avalduse arvsuurus

$$15-1+12=26.$$

Sellesama avalduse arvsuurus, kui $c=8$, $d=\frac{3}{4}$, $e=\frac{1}{2}$, on $7\frac{3}{4}$, sest

$$8-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=7\frac{3}{4}.$$

Me näeme neist näitustest, et avalduse arvsuurus võib mitmesugune olla, selle järele, missuguseid arve kujutakse tähiga.

Arvame välja järgmise avalduse arvsuuruse:

$$21-y-x+z,$$

kui $x=4$, $y=5\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{3}$.

Asendame need arvud teatud tähtede asemele:

$$21 - 5\frac{1}{2} - 4 + \frac{1}{3} = 11\frac{5}{6}.$$

Need kaks näitust olid nii valitud, et arvud olid üksteisega ühendud ainult märkidega + ja —. Siis tulevad tehted selles järjekorras teha, nagu märgid näitavad, s. t. üksteise järele algusest peale.

Sel juhusel aga, kui avalduses ette ei tule mitte ainult kokku- ja mahaarvamine (ehk esimese järgu tehted), vaid ka kasvatamine ja jagamine (teise järgu tehted), tehakse algebras tehteid järgmise juhtlause järele: Avalduses lahendakse enne teise järgu ja alles siis esimese järgu tehted.

Nii, näituseks, avalduses:

$$ab - 2xy + axy$$

tulevad kõige pealt: 1) a kasvatada b-ga, 2) 2 kasvatada x-i ja y-iga, 3) a kasvatada x-i ja y-iga, ja alles siis arvame esimesest kasvatisest maha teise ja paneme juurde kolmanda.

Kui $a = 5$, $b = 8$, $x = 3$, $y = 2$, siis saame, neid tähendusi asendades antud avaldusse:

$$5 \cdot 8 - 2 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 2$$

Väljaarvamise juures arvame kõige pealt kasvatised välja:

$$40 - 12 + 30 = 58.$$

Avalduse arvsuurus on seega 58.

Arvame välja järgmise avalduse arvsuuruse:

$$3pq + \frac{2p}{r} - qr,$$

kui $p = 10$, $q = 2$, $r = 5$.

Asendades arvud avaldusse ja kasvatamist ning jagamist enne kokku- ja mahaarvamist korda saates, saame järk-järgult:

$$3 \cdot 10 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 10}{5} - 2 \cdot 5 = 60 + \frac{20}{5} - 10 = 60 + 4 - 10 = 54.$$

3) Avaldusest:

$$2mnp - \frac{m}{2p} - \frac{n}{p}$$ saame, kui $m = 6$, $n = 4$, $p = 2$,

$$2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{6}{2 \cdot 2} - \frac{4}{2} = 96 - \frac{3}{2} - 2 = 92\frac{1}{2}.$$

§ 7. Klambrite tarvitamine.

Sagedasti on vaja avalduses väljaarvamise juures eesõigus anda kokku- ja mahaarvamisele, s. t. on vaja lahendada need tehted enne kasvatamist ja jagamist. Et seda ära tähendada, võetakse k l a m b r i d tarvitusele. Et nende tarvitamist selgitada, seame avalduse kokku, mis oleks vastuseks järgmise ülesande peale:

Kahes kotis oli suhkrut; esimeses oli teda m, teises n kilogrammi. Kilo hind on p marka. Kui palju maksab kõik suhkur?

Me võiksime seda ülesannet nii välja arvata:

Kahes kotis oli suhkrut $m + n$ kilogrammi. Et hinda välja arvata, peame p kasvatama eelpool kirjutud summaga. Et enne $m + n$ tuleb leida ja pärast see summa kasvatakse p-ga, siis tähendakse seda nii:

$$p \,.\, (m + n),$$

sagedamini jäetakse aga kasvatamise märk ära ja kirjutakse lihtsalt:

$$p\,(m + n)$$

Kui siin paneme: $p = 10$, $m = 8$, $n = 5$, siis saame, neid arve avaldusse asendades:

$$10\,(8 + 5)$$

Seda väljaarvates peame kõige pealt lahendama klambrites näidatud tehte, milleks ju klambrid ongi pandud, ja siis muud tehted; saame resultaadi:

$$10 \,.\, 13 = 130 \text{ (marka)}$$

Oleksime aga avalduse $p\,(m + n)$ kirjutanud ilma klambriteta: $pm + n$, siis oleksime saanud, asendades siia endised arvud:

$$10 \,.\, 8 + 5$$

Kõige pealt peame nüüd kasvatama 10 arvuga 8 ja kasvatisele juurde panema 5; saame 85.

See resultaat on koguni teine kui endine, pealegi ei ole ta koguni oma mõtte järele vastus ülesande peale, sest 10 . 8 on margad, kuna aga 5 on kilogrammid. Teada on aga, et ei

tohi mitmenimelisi arve kokku arvata, mille pärast 85 mitte ei või olla vastus küsimise peale.

Teine näitus:

$$(a - b)c + a(c + b)$$

Klambrid näitavad, et kõige pealt tulevad korda saata nende sees näidatud tehted ja alles peale seda väljaspool klambrid näidatud tehted harilikus järjekorras.

Paneme selles avalduses $a = 5$, $b = 2$, $c = 4$.

Leiame

$$(5 - 2)4 + 5(4 + 2) = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 12 + 30 = 42.$$

Klambrid tarvitakse aga mõnikord ka seal, kus üleüldse tahetakse ära näidata, et teatud tehted, mis nende sees näidatud, enne teisi tulevad lahendada.

Näitus:

$$10 - (12 - 4).$$

Kui seda avaldust välja arvata, siis tuleb kõige pealt arvust 12 maha arvata 4, on 8 ja alles selle järele $10 - 8 = 2$, nii et võime kirjutada:

$$10 - (12 - 4) = 10 - 8 = 2.$$

Teine näitus:

$$28 - 3(2 \cdot 4)$$

Klambrid näitavad, et esiteks kaks tuleb neljaga kasvatada $= 8$, siis kaheksa kolmega $= 24$ ja lõpuks maha arvata 28-st 24.

Seega talitame järgmiselt:

$$28 - 3(2 \cdot 4) = 28 - 3 \cdot 8 = 28 - 24 = 4.$$

Siin oleks võinud kirjutada terve avalduse ka ilma klambriteta, resultaat oleks ikkagi olnud 4.

Jagamistehte juures täidab klambrite aset sagedasti murdjoon.

Nii võib avalduse $(4 + 5) : 2$ asemel kirjutada $\frac{4+5}{2}$, ehk $a : (b - c)$ asemel $\frac{a}{b-c}$.

Klambrid leiame kõige varemini Girard'i juures (1590—1633).

§ 8. Summa ja vahe omadused.

Ümberasendatavus. Kui 7 tsentimeetrile 5 tsentimeetrit juurde panna, siis saame 12 tsentim. Sellesama summa saame, kui juurde arvame 5 cm-le 7 cm; niisama on kindel, et $2^1/_2 + 6$ on niisama palju, kui $6 + 2^1/_2$ jne. Üldistades seda, võime öelda:

$$a + b = b + a.$$

Seesama omadus on ka summal, kui kokkuarvatavate arv on suurem kui kaks. Näituseks on:

$$7 + 2 + 4 + 5 = 2 + 5 + 7 + 4$$

ehk üleüldse

$$a + b + c + d + e = c + e + a + d + b.$$

Summa omadust, mille järele summa suurus ei muutu kokkuarvatavate järjekorra muutmisega, nimetakse ümberasendatavuseks. See omadus võimaldab sagedasti kergemaviisilise summa leidmise, mida iseäranis peastarvamise juures sagedasti tarvitakse. Näitus:

Leida summa:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + \\ + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19.$$

Selle asemel, et kokku arvata arve 1 kuni 19 kirjutud järjekorras, arvame esimesele arvule juurde viimase, siis arvame juurde teise arvu ja eelviimase, siis kolmanda arvu eest ja kolmanda tagant jne., see tähendab, arvame arvud kokku järgmiselt:

$$1 + 19 + 2 + 18 + 3 + 17 + 4 + 16 + 5 + 15 + 6 + 14 + 7 + \\ + 13 + 8 + 12 + 9 + 11 + 10.$$

Näeme, et iga kahe arvu tagant saame summas ainult kümnelised; teada on aga, et kümnelisi peast hoopis kergem on kokku arvata, kui arve, milledes ilmuvad kümnelised ja ühelised.

2. Ühendatavus. Sadamas laetakse tõstekraaniga laevale kaste. Üksteise järele lastakse laeva kastid, millede

kaal on: 80 kg., 105 kg., 170 kg., 136 kg., 94 kg., 103 kg. ja 68 kg. On arusaadav, et laeva on lastud ühtekokku kaste

$80 + 105 + 170 + 136 + 94 + 103 + 68 = 756$ kilogrammi raskuses.

Kuid laeva oleks lastud niisamasugune raskus, kui esiteks oleks laetud kastid 80 kg. ja 105 kg. üheskoos, siis 170-kg. kast üksikult, siis 94-, 103- ja 68-kilogrammilised kastid korraga ja lõpuks 136-kilogrammiline kast, sest:

$$80 + 105 = 185; \quad 94 + 103 + 68 = 265;$$
$$185 + 170 + 265 + 136 = 756.$$

Seega:

$$80 + 105 + 170 + 136 + 94 + 103 + 68 =$$
$$= (80 + 105) + 170 + (94 + 103 + 68) + 136.$$

Klambritesse oleme pannud nende kastide kaalude summad, mis korraga lasti laeva.

Üleüldse:

$$a + b + c + d + e = (a + b + c) + (d + e)$$

ehk jälle:

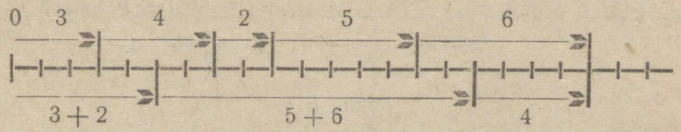
$$a + b + c + d + e = (a + d) + (b + c + e)$$ jne.

Me võime seega summas

$$a + b + c + d + e$$

kokkuarvatavaid vabalt ühendada gruppidesse, igas grupis leida summa ja siis kokku arvata kõigi gruppide summad.

Niisugust summa omadust, mille järele võime kokkuarvatavaid vabalt koondada gruppidesse ja gruppide summad kokku arvata, ilma et lõpulik summa selle läbi muutuks, nimetakse ühendatavuseks.



Joon. 7.

Arvteljel võime kujutada seda summa omadust järgmiselt (joon. 7).

Ülalpool arvtelge on kujutud summa

$$3+4+2+5+6$$

ja allpool

$$(3+2)+(5+6)+4.$$

Mõlemad summad on ühesuurused.

3. Klassitoas oli 21 pinki; sealt viidi esiteks 2, siis 4 ja lõpuks 5 pinki välja. Järele jäi seega sinna veel 10 pinki, missuguse arvu saame, kui 21-st maha arvame esiteks 2, siis 4 ja viimaks 5 pinki. Sellesama vahe saame aga, kui 21-st maha arvame esiteks 4, siis 5 ja 2, ehk enne 5, siis 2 ja lõpuks 4 jne.

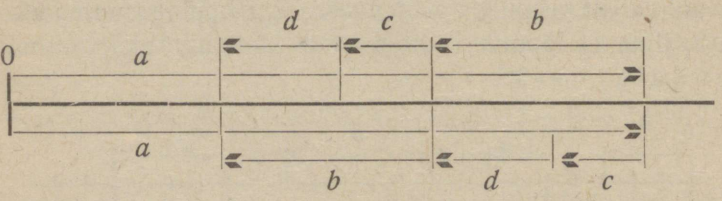
See tähendab siis, et:

$$21-2-4-5=21-4-5-2=21-5-2-4.$$

Seega on vahe üks ja seesama, kui arvust a maha arvame esiteks m ja siis n, ehk kui arvust a maha arvame esiteks n ja siis m. Järjelikult võime kirjutada:

$$a-b-c-d=a-c-d-b=a-c-b-d \text{ jne.}$$

Arvtelje peal võiksime kujutada viimast omadust järgmiselt (joon. 8); kui punktist, mis tähendab arvu a, võtta b üksust pahemale poole (ülemine jagu joonist.), siis veel c üksust ja d üksust ka pahemale poole (meie arvame b, c ja d maha), siis jõuame sellesama punkti juurde, kui punktist a võtta c, d ja b üksust pahemale poole (alumine jagu joonist.).



Joon. 8.

4. Õpilane ostis 10 sulge ühest ja 8 sulge teisest poest. Neist andis ta 5 sulge ära. Järele jäi tal seega

$$10+8-5=13 \text{ sulge.}$$

Kuid 13 sulge oleks tal ka siis jäänud järele, kui ta kohe peale esimeses poes käimise oleks ära annud 5 sulge ja siis teisest poest juurde ostnud 8 sulge, sest

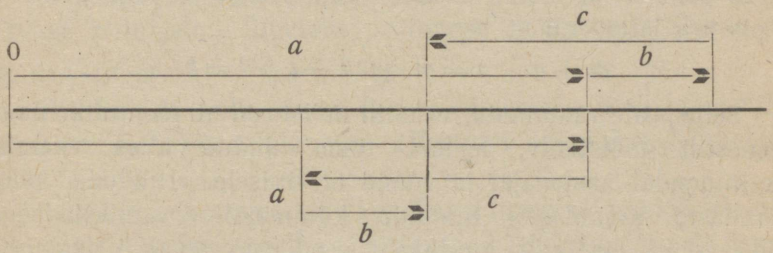
$$10 - 5 + 8 = 13.$$

Siit näeme siis, et

$$10 + 8 - 5 = 10 - 5 + 8,$$

s. t., et selle asemel, et summast $10 + 8$ maha arvata mõni arv, võib ühest kokkuarvatavast maha arvata nõutava arvu (5) ja siis vahele juurde panna teise kokkuarvatava. Üleüldse: (joon. 9)

$$a + b - c = a - c + b.$$



Joon. 9.

Joonistusel on ülalpool arvtelge kujutud $a+b-c$ ja allpool $a-c+b$.

Viimast omadust võime üldistada nii: kui mõnes avalduses esineb mitu korda kokku- ja mahaarvamine, siis võime muuta nende tehete järjekorda. Tähele panna tuleb aga, et arvuga tehtaks alati seesama tehe, mida näitas tema ees seisev märk esialgselt.

Näitus:

$$a - b + c + d - e = a + c - b - e + d = a + d - b + c - e.$$

§ 9. Null.

Kui arvteljel võtame nullpunktist esite a üksust paremale poole ja saadud punktist jälle a üksust pahemale poole, siis jõuame jälle nullpunkti tagasi.

Seda tegevust kirjutakse algebras:

$$a - a = 0,$$

mis tähendab, et kahe ühesuuruse arvu vahe tähendakse iseäralise arvuga null (0).

Läheme aga arvteljel punktist a esiteks b üksust paremale poole, siis jõuame punkti $a + b$, ja sealt jälle b üksust pahemale poole, siis jõuame jälle punkti a. Seda võime kujutada järgmiselt:

$$a + b - b = a;$$

see tähendab, et sel juhusel, kui ühe ja sellesama arvu juurde paneme ja maha arvame, võime selle arvu avaldusest hoopis ära jätta, nii et

$$m + n - n = m, \text{ ja } k - l + l = k.$$

Selle peale vaatamata, et nulli mõiste on nii loomulik, nagu iseenesest mõistetav, leidsid tema hindud alles viiendal ehk kuuendal aastasajal ja võtsid tarvitusele. Hindude käest omandasid araablased hindude kümnendik-arvamissüsteemi (mida nüüd ekslikult hüütakse araablaste omaks) ja nulli. Araablased nimetasid nulli as-sifr (sõnast sifra—tühi). Araablaste sifr'ist on pärast ladina zephirum ja prantsuse zéro (null) välja kujunenud. Sestsamast sõnast on saanud ka prantsuse chiffre, saksa Ziffer ja vene цыфра, mis tähendavad arvmärki. Alles 12. aastasaja lõpul hakati tarvitama hindude arvamissüsteemi Leonardo Pisano algatusel Euroopas (enne seda tarvitati rooma numbrid), aga asi edenes esiotsa väga visalt. Mõnikord keelati kaupmeestele isegi ära hindude numbrid tarvitada. Luca Paciuolo (1445?—1515?) võttis esimesena sõna nulla tarvitusele.

§ 10. Monoomid ja polünoomid. Liigete ühendamine.

Võtame avaldused: $3abc$ ja $\frac{2a}{3b}$. Neis avaldustes ei ole muid tehteid, peale kasvatamise ja jagamise. Niisuguseid avaldusi nimetame edaspidi monoomideks (üheosaline, üksliige).

Kui aga mingisugused monoomid, olgu ax, by, $2b$, siduda üksteisega märkidega + ehk —, siis nimetame saadava avalduse polünoomiks (mitmeosaline, hulkliige).

Avaldus

$$ax - 2b + by$$

on sellega polünoom.

Polünoom on ka avaldus

$$\frac{1}{2}a - 2bc + cd - 1,$$

sest monoomid $\frac{1}{2}a$, $2bc$, cd ja 1 on seotud üksteisega märkidega + ja —.

Monoome, mis polünoomis märkidega + ja — seotud, nimetakse polünoomi liigeteks. Viimase polünoomi liikmed on $\frac{1}{2}a$, $2bc$, cd ja 1.

Polünoomi, milles kaks liiget, nimetakse veel binoomiks (kaheosaline), kolme liikmega polünoomi nimetakse kolmeosaliseks j. n. e.

Tähele tuleb panna, et võetud avaldused ei sisalda klambrid; edaspidi laiendame tarvilikul korral monoomi ja polünoomi mõiste ka avalduste kohta, milles klambrid ette tulevad.

Kui me arvtelje peal kujutame

$$3 + 3 + 3 + 3,$$

siis jõuame punkti juurde, mis kujutab arvu 12. Selle asemel võime ka öelda, et see punkt kujutab $4 \cdot 3$.

Seega võime kirjutada polünoomi $3 + 3 + 3 + 3$ asemel $4 \cdot 3$.

Niisama saame arvteljel kujutades

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

punkti $\frac{5}{2}$, ehk $5 \cdot \frac{1}{2}$.

Üleüldse aga annab:

$$x + x + x + x + x + x = 6x.$$

Niisama on selge, et

$$a + a + a = 3a, \quad b + b + b + b = 4b.$$

Ümberpöördult: $5b = b + b + b + b + b$; $2\frac{1}{2}x = x + x + \frac{1}{2}x$ j.n.e.

Kui otsitakse järgmist summat:

$$3 . 4 + 3 . 4 + 3 . 4 + 3 . 4 + 3 . 4,$$

siis ei tarvitse meil esiteks välja arvata selles avalduses sugugi iga liiget (mis siin kõik on ühesugused, nimelt 3 . 4) ja siis nad kõik kokku arvata, vaid, tähele pannes, et siin on viis ühesugust kokkuarvatavat, võime öelda terve avalduse kohta, et selle arvsuurus on viis korda 3 . 4, mille nii kirjutame

$$5 . 3 . 4.$$

Seega: $3 . 4 + 3 . 4 + 3 . 4 + 3 . 4 + 3 . 4 = 5 . 3 . 4.$

Avalduse

$$am + am + am + am$$

võime teisendada järgmiselt: selles avalduses on kokkuarvatavaks am võetud 4 korda, mida lühidalt nii kirjutakse:

$$4 . am.$$

Järjelikult:

$$am + am + am + am = 4am.$$

Analoogiliselt leiame:

$$2xy + 2xy + 2xy = 3 . 2xy.$$

$2a + 3a$ võime kujutada, kui $2a$ asemel kirjutame $a + a$ ja $3a$ asemel $a + a + a$, järgmiselt:

$$(a + a) + (a + a + a).$$

Siin arvatakse kokku summad $a + a$ ja $a + a + a$. Kuid kerge on mõista, et summade kokkuarvamise asemel võib juurde panna kokkuarvatavaid üksikult, nii et $(a + a) + (a + a + a)$ asemel võime kirjutada:

$$a + a + a + a + a,$$

mis, nagu teada, on $5a$.

Seega:

$$2a + 3a = 5a.$$

Niisama saame avaldusest

$$x + 2x + 4x,$$

kui silmas peame, et $2x = x + x$, $4x = x + x + x + x$:

$$x + 2x + 4x = x + (x + x) + (x + x + x + x) =$$
$$= x + x + x + x + x + x + x = 7x.$$

Avalduse

$$5a + 2b + 2a + 3b + a$$

lihtsustamiseks koondame kõik liikmed, millel on tähelised (ilmutamata arvulised) tegurid ühed ja needsamad, kokku (ümberasendatavus ja ühendatavus!).

Leiame:

$$\underline{5a + 2a + a} + \underline{2b + 3b}.$$

Esimese allakriipsutud avalduse asemel võime kirjutada $8a$ ja teise asemel $5b$, nii et lõpulikult

$$5a + 2b + 2a + 3b + a = 8a + 5b.$$

Selsamal viisil talitame järgmiste avaldustega:

1) $x + 2y + 3z + 4x + y + 2z + 3y = \underline{x + 4x} + \underline{2y + y + 3y} +$
$$+ \underline{3z + 2z} = 5x + 6y + 5z.$$

2) $pq + 3xy + 2pq + 4xy = \underline{pq + 2pq} + \underline{3xy + 4xy} = 3pq + 7xy.$

Kõigis näitustes oleme mitmeliikmelise avalduse asemel saanud vähema arvu liigetega avaldused. Niisugust tegevust nimetakse avalduse lühendamiseks.

Kuid lühendada ei saa mitte iga polünoomi (mitmeosalist), vaid ainult niisugust, mille liigete hulgas on sarnased liikmed, s. t. niisugused, milledel ühesugused tähelised tegurid ja ühesuguseid tähelisi tegurid iga ühes ühepalju.

Näituseks on $5xy$, $2xy$, $3xy$ sarnased, sest tähelised tegurid on neis kõigis x ja y; niisama

$$2pqr,\ pqr,\ 3\tfrac{1}{2}pqr,$$

kuid $3x$, $4xy$ ei ole mitte sarnased, sest monoomil $4xy$ on täheline tegur y, mida ei ole monoomil $3x$; niisama ei ole $2pqr$ ja pr sarnased, sest $2pqr$-il on tegur q, mis puudub pr-il. Monoomid $5xyy$ ja $5xy$ ei ole sarnased, sest esimeses on y kaks korda teguriks, teises aga üks kord.

Et avalduste lühendamisel mitme sarnase liikme asemel saame ainult ühe liikme, siis võime avalduse lühendamist nimetada ka sarnaste liigete ühendamiseks.

§ 11. Järg.

Me teame, et arvust 6 võime maha arvata iga arvu, mis vähem on kui 6. Tarvitame seda avalduse

$$a+6-4$$

teisendamise juures.

Arvu 6 asemel võib võtta summa $2+4$. (Meie võtame niisuguse summa sellepärast, et saada kokkuarvatava 4, sest avalduses tuleb maha arvata 4). Arvame 6 asemel avalduses juurde 2 ja 4:

$$a+2+4-4.$$

Et aga viimases avalduses arvatakse 4 juurde ja 4 maha, siis võime § 9 põhjal jätta 4 avaldusest välja:

$a+2+4-4=a+2$. Nii et: $a+6-4=a+2$.

2) Selsamal viisil saame avaldusest

$x+2y-5+8$, kui temas 8 juurdearvamise asemel arvame juurde 5 ja 3:

$$x+2y-5+8=x+2y-5+5+3=x+2y+3.$$

3) Avalduses

$$3p+5q-3q$$

selle asemel, et arvata juurde $5q$, võime juurde arvata $3q$ ja $2q$:

$$3p+5q-3q=3p+3q+2q-3q=3p+2q.$$

4) On selge, et avaldust $2x+4y-a-3y$ võib teisendada järgmiselt:

$$2x+4y-a-3y=2x+3y+y-a-3y=2x+y-a.$$

Seniajani teisendasime niisuguseid avaldusi, kus tuli mõlemad sarnased liikmed juurde arvata ehk üks liige kokku arvata ja teine, esimesele sarnane, maha arvata, kusjuures kokkuarvatav liige ikka suurem oli kui mahaarvatav.

Vaatame nüüd järele, kuidas avaldusi teisendada, kus mahaarvatav liige on suurem kui kokkuarvatav liige, mis esimesega on sarnane.

Võtame sellekohase avalduse

$$a+3-7.$$

Selles avalduses on vaja lõpuks maha arvata 7.

Meie võime seda nii ette kujutada, et kolmest maha arvatakse 3, mille vahe on null, ja arvust a tuleks siis veel maha arvata 4. Seega (§ 8, lhk. 25):

$$a+3-7=a-4.$$

(2) $$m-5+2.$$

Selle avalduse võime nii kirjutada (vaata § 8):

$$m+2-5.$$

Siin arvame kahest maha 2, jääb veel maha arvata 3.

$$m+2-5=m-3.$$

(3) $$a+3b-5b.$$

Peale $3b$-st $3b$ mahaarvamise tuleb veel maha arvata $2b$.

$$a+3b-5b=a-2b.$$

(4) $$c+d-6d=c-5d.$$

Teisendame avalduse:

$$x-2y-y.$$

Selles avalduses arvatakse maha enne $2y$, siis veel y. Kuid selle asemel võime korraga maha arvata $3y$, nii et:

$$x-2y-y=x-3y.$$

Avalduses

$$z-2v-6v$$

arvatakse maha $2v$, siis veel $6v$, millise kahe mahaarvamise asemel võib maha arvata $8v$, nii et väljendame:

$$z-2v-6v=z-8v.$$

Me oleme teinud terve rea teisendusi, mida kõiki nimetame avalduste lühendamiseks. Lühendada võib avaldusi ainult siis, kui nad sisaldavad sarnaseid liikmeid.

Lühendada võime avaldusi järgmise juhtlause järele: Kaks sarnast liiget, ühesuguste tehete märkidega, arvatakse kokku ja pannakse saadud liikme ette endine tehtemärk; kui aga sarnased liikmed on mitmesuguste tehete märkidega, siis arvatakse suuremast liikmest maha vähem ja pannakse saadud liikme ette suurema liikme tehtemärk. Kui liikme ees ei ole mingit märki, siis peame selle liikme ees kujutama märki +; ilma märgita võib olla ainult esimene polünoomi liige.

Lühendame järgmise avalduse:

$$9a - 3b + 5a + 7b - 8a - b.$$

Selles avalduses on kahesugused sarnased liikmed: 1) teguriga a ja 2) teguriga b.

Kogume sarnased liikmed gruppidesse

$$9a + 5a - 8a - 3b + 7b - b.$$

Teine liige $5a$ arvatakse esimesele $9a$ juurde, nende summa on $14a$; selle järele arvame $14a$-st maha $8a$, on $6a$, nii et esimesed kolm sarnast liiget peale ühendamise annavad $6a$.

Nüüd ühendame sarnased liikmed teguri b-ga. Esimene liige neist $3b$ arvatakse maha, teine $7b$ juurde; sellepärast tuleb juhtlause järele suuremast liikmest ($7b$) maha arvata vähem ($3b$) ja võtta vahe (mis on $4b$) suurema liikme, s. o. $7b$ tehte märgiga, järjelikult plussiga; nii peame siis juurde arvama $4b$.

Leiame, et $4b$ arvatakse juurde ja b (ehk üks b) maha, nii et lõpulikult, neid kahte liiget ühendades, tuleb juurde panna $3b$.

Seega oleme leidnud:

$$9a - 3b + 5a + 7b - 8a - b = 6a + 3b.$$

(2) $$\underline{x} + \underline{\underline{8y}} + \underline{5x} - \underline{\underline{4y}} - \underline{\underline{3y}} - \underline{6x}.$$

Et hoida asjata ümberkirjutamiste eest, võib sarnaseid liikmeid ära tähendada kriipsukestega: üks kriips tõmmatakse ühte seltsi sarnaste liigete alla, kaks kriipsu teist seltsi liigete alla j. n. e. Kahe, kolme j. n. e. kriipsu asemel võib ka mõne teist laadi joone tõmmata, nagu ~~~, vvv j. n. e.

Liige x-ga ei ilmu meil peale koondamist üleüldse mitte, kuna y-ga liikmed annavad peale lühendamist ainult y, nii et kuueliikmelise polünoomi asemel saame ainult ühe liikme y.

3) $\underline{5a} + \underline{\underline{8b}} - \underline{\underline{\underline{7c}}} - \underline{2a} - \underline{\underline{9b}} + \underline{\underline{\underline{2c}}} - \underline{2a} + \underline{\underline{2b}} + \underline{\underline{\underline{6c}}}.$

Sarnased liikmed on ära märgitud ühe, kahe ja kolme kriipsukesega.

Peale lühendamist võime kirjutada antud polünoomi asemel järgmise polünoomi:

$$a + b + c.$$

Kriipsukestega sarnaste liigete äramärkimine on lubatav ainult esialgu; niipea aga kui lühendamises vilumus omandud, tuleb kõrvale jätta niisugune äramärkimine.

Polünoome, kus liigete koeffitsientideks on murrud, tuleb lühendada sellesama juhtlause järele, kui seni võetud polünoome.

Nii lühendame polünoomi

$$5\tfrac{1}{4}a - 3\tfrac{1}{2}b + 6b - 3\tfrac{1}{2}a + 7c - 8\tfrac{1}{2}c = 1\tfrac{3}{4}a + 2\tfrac{1}{2}b - 1\tfrac{1}{2}c.$$

§ 12. Ühtivused.

Aritmeetikast teame, et sel juhusel, kui kaks arvudega kirjutud avaldust on ühesuurused, võib neid = märgiga üksteisega siduda.

Näituseks on avaldused

$$12 + 10 \text{ ja } 30 - 8$$

ühesuurused ja sellepärast võime kirjutada

$$12 + 10 = 30 - 8.$$

Ka algebras talitame niisamati. Et näit. $a + 3c$ ja $4a$ on ühesuurused, siis võime kirjutada

$$a + 3a = 4a.$$

Ehk, kui teame, et $a + \frac{b}{2}$ ja $\frac{m}{n}$ ühesuurused, siis

$$a + \frac{b}{2} = \frac{m}{n}.$$

TARTU ÜLIKOOL
DIDAKTILINE SEMINAR

Kaks avaldust, mis = märgiga üksteisega seotud, tekitavad ühtivuse. Seega on ühtivused:

1) $12+10=30-8$; 2) $a+3a=4a$ ja 3) $a+\frac{b}{2}=\frac{m}{n}$.

Arusaadav on, et arv ehk avaldus on iseenesega alati ühesuurune:

$$3=3;\quad \frac{1}{2}=\frac{1}{2};\quad a=a;\quad a+b=a+b$$

Avaldust, mis ühtivuses asub pahemal pool = märki, nimetakse ühtivuse pahemaks pooleks, kuna avaldust, mis asub paremal pool = märki, nimetakse ühtivuse paremaks pooleks.

Näitus. Ühtivuse

$$x+2=2x-1$$

pahem pool on $x+2$, sest see avaldus asub pahemal pool = märki; ühtivuse parem pool on $2x-1$.

Edaspidi, kui meil harutustes vaja on toetada mõne ühtivuse peale, paneme selle ühtivuse kergemaks ülesleidmiseks pahemale poole ühtivusest arvud klambritesse, mis tähendavad harilikult ühtivuste järjekorda.

Ühtivusi:

(1) $a-b=2$,

(2) $c+1=3$

tähendame kui (1) ja (2).

Kui meie tahame ühtivust teisendada, näit. lühendada, siis võime teisendamist ette võtta ainult kummaski ühtivuse pooles eraldi.

Olgu näit. antud ühtivus:

(1) $4+3y-2=3b-b$

siis võib ühtivuses (1) lühendada ainult kumbagi poolt eraldi: pahemat ja paremat:

Leiame:

$$2+3y=2b.$$

Ühtivuste omadused.

Kui $3+2=5$, siis on loomulik, et ka $5=3+2$ ja kui $\frac{40}{5}=8$, siis ka $8=\frac{40}{5}$.

Niisama on ka arusaadav, et kui $a+1$ on ühesuurune avaldusega $b-2$, siis on ka $b-2$ ühesuurune avaldusega $a+1$, see tähendab, et ühtivusest:

$$a+1=b-2$$

järgneb ühtivus:

$$b-2=a+1.$$

Meie võime seega öelda, et võib muuta ühtivuse poolte järjekorda. Seda ühtivuste omadust võib nimetada ka ühtivuse paremalt poolt pahemale poole lugemiseks, nii et edaspidi, kui ühtivust

$$2+c=\frac{4}{c}$$

paremalt poolt pahemale loeme, siis kujutame sellega eelmist ühtivust nii: $\frac{4}{c}=2+c$.

Olgu antud ühtivused

(1) $a=b$

(2) $c=b$

Et neis ühtivustes niihästi a kui ka c mõlemad on ühesuurused b-ga, siis peavad ka a ja c ise ühesuurused olema:

$$a=c.$$

Edaspidi võime alati, kui kahe ühtivuse paremad (ehk pahemad) pooled on ühesuurused, nende pahemaid (ehk paremaid) pooli ühtlustada, s. o. $=$ märgiga siduda.

Seda omadust võib ka nii kujutada. Kui $a=b=c$, siis:

$$a=c.$$

Teised ühtivuste omadused seisavad järgmises. Kui meil on kaks ühesuurust arvu, ja kui me neile juurde ehk maha arvame kummalegi ühepalju, siis on saadavad resultaadid jällegi ühesuurused.

Et aga ühtivus muud ei ole, kui kaks ühesuurust arvu ehk avaldust (mis ju ka on arvude kujutused), mis $=$ märgiga seotud, siis võime juurde panna ehk maha arvata ühtivuse

mõlematele pooltele ühe ja sellesama arvu, ilma et ühtivus selle läbi saaks rikutud. Nii et, kui:

$$a - b = 5, \text{ siis ka}$$
$$a - b + 3 = 5 + 3,$$

missuguse ühtivuse saame, kui juurde paneme esimese ühtivuse pooltele 3.

Kui

$$4 = 1 + x,$$

siis on ka õige ühtivus, mille leiame, kui mõlemilt poolt arvame maha näit. 1:

$$4 - 1 = 1 + x - 1$$

ehk peale poolte lühendamist:

$$3 = x.$$

Arusaadav on ka, et kui ühesuuruseid arve ehk avaldusi kasvatame ehk jagame ühe ja sellesama arvuga, siis resultaadid ikkagi on ühesuurused. Sellepärast võime ka ühtivuste pooli kasvatada ehk jagada ühesuguste arvudega ja ikkagi võib siduda saadavad resultaadid = märgiga.

Kui järgmine ühtivus on õige:

(2) $$a = b,$$

siis on õige ka ühtivus, mille leiame, kui kasvatame mõlemad pooled näit. kahega:

$$2a = 2b.$$

Niisama võime ühtivuse (2) pooli jagada 3-ga:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{3}.$$

Ainult nulliga ei tohi ühtivuse pooli kasvatada ja jagada. Mispärast — see selgub edaspidi.

§ 13. Isesuurused.

Kaht arvu, mis ei ole ühesuurused, nimetakse isesuurusteks. Nii on 3 ja 5 isesuurused arvud. Arvude isesuurust tähendakse märkidega $>$ ja $<$, kus juures märgi lahtine külg (suu-

rem) juhitakse suurema arvu poole. Kui tahame ära näidata, et viis suurem on kahest, siis kirjutame:

$5 > 2$ (loetakse: 5 on suurem kui 2).

Tahame aga tähendada, et 3 vähem on kui 8, ehk a vähem kui b, siis kirjutame:

$$3 < 8;\ a < b.$$

Neidsamu märke tarvitakse tähendamiseks, et mingisugune avaldus on teisega isesuurune.

Näit. $100 > 90 + 9$; $5 + 4 + 3 < 6 + 5 + 4$.

Kaks arvu, ehk kaks avaldust, mis üksteisega seotud on märgiga $>$ ehk $<$, tekitavad isesuuruse, ehk isesuuruslause.

Näitused:

$$1)\ x + 5 > 7;\ 2)\ 9 - x > 2$$

on isesuurused. Esimene neist: $x + 5 > 7$ näitab, et x võib ainult niisuguseid arve kujutada, mis suuremad on kui 2, sest muidu ei või x'i ja 5 summa suurem olla kui 7. Isesuurus $9 - x > 2$ näitab, et x võib kujutada ainult arve, mis vähemad on kui 7, sest muidu ei või vahe $9 - x$ suurem olla kui 2.

Isesuurusi võib lugeda ka paremalt poolt pahemale poole. Näit. võib $x + 5 > 7$ lugeda ka nii:

$7 < x + 5$ (märk tuleb teistpidi pöörata).

Isesuurus $10 > 9$ tähendab ka, et $9 < 10$.

Kui arvud a ja b on isesuurused, kuid teada ei ole, kumb neist suurem, siis tähendakse nende isesuurust järgmiselt: $a \neq b$.

§ 14. Klambrite avamine ja nende panemine.

§ 7 seletasime, et sel juhusel, kui mingisugune avaldus on pandud klambrite sisse, väljaarvamise juures kõige pealt lahendakse klambrite sees näidatud tehted ja alles siis saadud resultaat tuleb kokku — (kui klambrite ees on plus) ehk maha arvata (kui klambrite ees on —).

Neist juhustest, kui klambritest saadavat resultaati jagatakse ehk kasvatakse, kõneleme edaspidi.

Kui klambrites arvud tähtedega ära on tähendud, siis on klambrites juba resultaat kirjutud, mida ei saa teisendada, nagu näit. avalduses

$$3c - 2d + (4c + 2d) - (c + d).$$

Kuid ka siis võib avaldusi sagedasti lihtsustada, nagu allpool näeme.

Võtame avalduse: $8 - (5 - 2)$; kui siin näidatud tehted korda saata, siis leiame:

$$8 - (5 - 2) = 8 - 3 = 5.$$

Teisest küljest saame 5 ka järgmise avalduse resultaadina:

$$8 - 5 + 2.$$

Sellest võib järeldada, et

$$8 - (5 - 2) = 8 - 5 + 2,$$

kus ühtivuse mõlemal poolel ühed ja needsamad arvud on kirjutud. Me näeme sellest, et klambritega avaldusi võib kujutada ka ilma klambriteta, ilma et avalduste suurus muutuks.

Kui me klambrid oskaksime avada, see on klambrites kirjutud avalduse võiksime ilma klambriteta eelmise avalduse juurde kirjutada, ilma et kõige avalduse suurus muutuks, siis oleks meil sagedasti võimalik avaldust lühendada ja sellega lihtsustada. Sellest näeme, et klambrite avamisel (nende ärajätmisel) on suur tähtsus, ja sellepärast asume nüüd nende juhtlausete otsimisele, mille järele võime toimetada klambrite avamist.

Peastarvamise juures talitame siis, kui arvule 38 tahame juurde panna 24, harilikult nii: arvu 24 asemel võtame $20 + 4$ ja arvame 38-le juurde esiteks 20 ja siis 4.

See tähendab, et $38 + (20 + 4)$ järgmiselt välja arvame:

$$38 + 20 + 4.$$

Seega on õige ühtivus:

(1) $$38 + (20 + 4) = 38 + 20 + 4,$$

kus me ühtivuse paremal poolel klambrid oleme avanud.

Üleüldse, kui arvuga a kokku arvatakse summa $b + c$, siis tähendame seda:

$$a + (b + c),$$

ja seda avaldust võime välja arvata järgmiselt,

(2) $$a+(b+c)=a+b+c.$$

Seega võime alati summa juurdepanemise asemel kokkuarvatavad üksikult juurde arvata, ehk ümberpöördult, üksikute kokkuarvatavate juurdepaneku asemel nende summa juurde panna, sest eelmist. ühtivust paremalt poolt pahemale poole lugedes saame:

(3) $$a+b+c=a+(b+c)$$

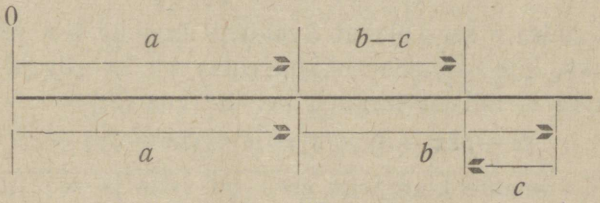
Ühtivuse (2) tarvitamine:

$$3a+(7b+11a)=3a+7b+11a=14a+7b;$$

$$14x+(12y+16x)=14x+12y+16x=30x+12y.$$

2. Paneme arvule 37 juurde 58; selle asemel, et otsekohe juurde panna 58, tehakse sagedasti nii, et juurde pannakse 60 (s. o. kahe võrra enam, kui nõutud) ja siis maha arvatakse kaks. S. t., et 58 asemel võetakse 60—2 ja talitakse järgmiselt:

(4) $$37+(60-2)=37+60-2=95.$$



Joon. 10.

Joonistus 10 näitab (pealpool arvtelge), et arvuga a kokku arvatakse vahe b—c, mille resultaadina saame:

$$a+(b-c).$$

Kuid joonistuse alumisest osast selgub, et leiame sellesama resultaadi, kui arvule a juurde paneme b ja maha arvame c, nii et:

(5) $$a+(b-c)=a+b-c$$

Selles ühtivuses paremat ja pahemat poolt ära vahetades, saame

(6) $$a+b-c=a+(b-c)$$

Ühtivuse (5) tarvitamine:

1) $15c+(2d-10c)=15c+2d-10c=5c+2d.$

2) $m+(n-3m)=m+n-3m=n-2m.$

Kokkuvõte. Ühtivustest (2) ja (5), mille siin veel kord kirjutame:

(2) $$a+(b+c)=a+b+c$$

(5) $$a+(b-c)=a+b-c$$

järgneb: kui klambrite ees seisab märk plus, siis tulevad klambrite avamisel nende sees olevad arvud endiste tehete märkidega eelmise avalduse juurde kirjutada. Arvu ette, mille ees klambrites märki ei seisa (näit. arv b ühtivuste (2) ja (5) pahemail poolil), tuleb panna pääle avamist $+$.

Kui klambrite sees on rohkem kui kaks liiget, siis tuleb avamist toimetada ikkagi eelmise juhtlause järele.

Olgu, näituseks, avada klambrid avalduses:

$$x+(2x-3y+z).$$

Klambrite sees olevat avaldust $2x-3y+z$ võime lugeda summaks, kus esimene kokkuarvatav on $2x-3y$ ja teine kokkuarvatav z, millest järgneb [v. ühtivus (2)]:

$$x+(2x-3y+z)=x+(2x-3y)+z.$$

Et viimaste klambrite sees on vahe ja see tuleb juurde panna, siis saame [ühtivus (5)]:

$$x+(2x-3y)+z=x+2x-3y+z,$$

mis on antud juhtlausega täiesti kokkukõlas.

Lõpulikult leiame:

$$x+(2x-3y+z)=x+2x-3y+z=3x-3y+z.$$

Vaatleme lähemalt ühtivusi (3) ja (6).

(3) $$a+b+c=a+(b+c).$$

(6) $$a+b-c=a+(b-c).$$

Neid ühtivusi võime sõnadega järgmiselt lugeda:

Klambrite panemisel avaldusse, kus nad puudusid, tuleb sel korral, kui klambrite ette paneme +, nende sisse kirjutada arvud endiste tehete märkidega.

Kui klambrites esimese arvu ette tuleb panna +, siis võib selle märgi panemata jätta.

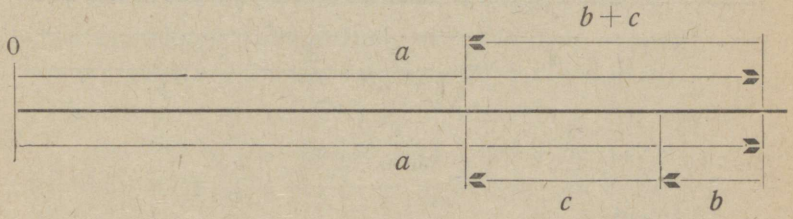
§ 15. Järg.

Kui 54-st maha arvata 26, siis võib seda järgmiselt toimetada: esiteks arvame maha 20, siis veel 6, s. t. meie kujutame arvu 26 nii: $26 = 20 + 6$ ja teeme mahaarvamise järgmiselt:

(1) $$54 - (20 + 6) = 54 - 20 - 6.$$

Vaatleme ühtivust (1) lähemalt; pahem pool näitab, et arvust 54 maha arvatakse summa, kuna parem pool ütleb, et seda võib nii toimetada, kui maha arvame kokkuarvatavad üksikult.

Joonistusest 11 selgub, et alati selle asemel, et maha arvata arvust a summa $b+c$ (vaata ülalpool arvtelge), võib arvust a maha arvata kokkuarvatavad b ja c üksikult (allpool arvtelge).



Joon. 11.

Seda võime kujutada ühtivusega:

(2) $$a - (b + c) = a - b - c.$$

Näitused:

1. $4pq - (3pq + st) = 4pq - 3pq - st = pq - st.$
2. $187 - (4a + 37) = 187 - 4a - 37 = 150 - 4a.$

Arvame arvust 43 maha 18; arvame esiteks arvust 43 maha 20, sellega on aga saadud vahe kahe võrra vähem kui õigus (meie arvasime kahe võrra enam maha), sellepärast tuleb siis veel juurde panna 2. Meie võtsime siin 18 asemel 20—2 ja arvasime selle vahe maha arvust 43.

Meie harutused näitavad, et seda võib nii toimetada:

(3) $$43-(20-2)=43-20+2.$$

Üleüldse võime kinnitada, et alati selle asemel, et arvust a maha arvata vahe $b-c$, võib esiteks arvust a maha arvata b; sellega arvame aga c võrra enam maha kui nõutakse, ja vähendame vahet c võrra, mispärast õige vahe leidmiseks veel tuleb juurde arvata c. Seega:

(4) $$a-(b-c)=a-b+c.$$

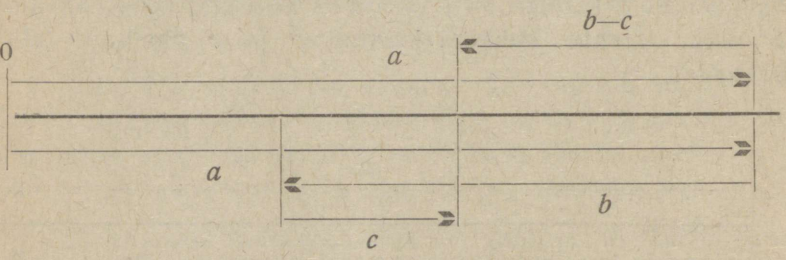
Seda selgitab ka joon. 12, kus pealpool arvtelge

$$a-(b-c),$$

ja allpool

$$a-b+c$$

on kujutud. Mõlemad resultaadid on ühesuurused.



Joon. 12.

Näitused:

$$5a-(3a-b)=5a-3a+b=2a+b;$$

$$15a-7b-(7a-5b)=15a-7b-7a+5b=8a-2b.$$

Kokkuvõte.

Ühtivused (2) ja (4):

(2) $$a-(b+c)=a-b-c,$$

(4) $$a-(b-c)=a-b+c$$

lubavad meil klambrid avada, kui nende ees seisab märk miinus. Nende ühtivuste paremaid ja pahemaid pooli vaadeldes leiame juhtlause: klambrite avamisel, millede ees seisab märk —, tulevad klambrite sees olevad liikmed kirjutada eelmise avalduse juurde vastupidiste märkidega. Kui klambrite sees esimese liikme ees märki ei ole, siis tuleb seal ette kujutada märk +, mis avamisel muutub miinuseks.

Kui avatavate klambrite sees leidub rohkem kui kaks liiget, tulevad klambrid avada eelmise juhtlause järele. Selleks õigustab meid harutus järgmise avalduse teisendamisel:

$$a-(b-c+d-e).$$

Klambrite sees on viimane tehe mahaarvamine, sellepärast võime öelda, et klambrites vahe on kirjutud, kus vähendatavaks on $b-c+d$ ja vähendajaks e. Et nimetud vahe tuleb maha arvata, siis saame antud juhtlause järele:

$$a-(b-c+d)+e.$$

Klambrite sees on summa, kus esimene kokkuarvatav on $b-c$ ja teine d, seega

$$a-(b-c+d)+e=a-(b-c)-d+e,$$

kuid:

$$a-(b-c)-d+e=a-b+c-d+e.$$

Sellega oleme väljendanud, et

$$a-(b-c+d-e)=a-b+c-d+e.$$

Näitus:

$$6a-3b+7c-(a-b+c)+(2a+b-6c)=$$
$$=6a-3b+7c-a+b-c+2a+b-6c=7a-b.$$

Kui tuntud ühtivusi

$$a-(b+c)=a-b-c,$$
$$a-(b-c)=a-b+c$$

paremalt poolt pahemale poole lugeda, siis leiame ühtivused:

$$a-b-c=a-(b+c),$$
$$a-b+c=a-(b-c),$$

mis meile järgmist kõnelevad:

Kui polünoomis paneme mõne osa klambritesse ja klambrite ette paigutame märgi miinus, siis peame klambrite sisse pandavatel liigetel muutma märgid vastupidisteks. Kui klambrite sees esimese liikme ette tuleb panna märk +, siis võib + ka panemata jätta.

Näitus:

$$a - 2b + 7c - d = a - (2b - 7c + d).$$

§ 16. Polünoomide kokku- ja mahaarvamine.

Antud on polünoomid:

$$10a + 10b - c \quad \text{ja} \quad 90a - 10b + c,$$

millede summat otsitakse. Selle leidmiseks paneme kummagi polünoomi klambritesse ja seome klambrid märgiga +, avame klambrid ja lühendame saadava avalduse:

$$(10a + 10b - c) + (90a - 10b + c) =$$
$$= 10a + 10b - c + 90a - 10b + c = 100a.$$

Analoogiliselt talitame polünoomide mahaarvamise juures, ainult selle vahega, et klambritesse pandud polünoomid seome miinusega.

Näitus:

Leida vahe järgmiste polünoomide vahel:

$$41x - 12y + z \quad \text{ja} \quad 30x - 10y - 5z,$$
$$(41x - 12y + z) - (30x - 10y - 5z) =$$
$$= 41x - 12y + z - 30x + 10y + 5z = 11x - 2y + 6z.$$

§ 17. Keskmiste klambrite tarvitamine.

Kui kokku- ja mahaarvatavates polünoomides juba enne nõutavat tehet klambrid on olemas, siis tulevad kokku- ja mahaarvamise tehete tähendamiseks tarvitusele võtta nõnda-

nimetud keskmised klambrid [ ], kuna siiamaale tarvitusel olnud nimetakse väikesteks.

Olgu, näituseks, leida polünoomide vahe:

$$(x+y)+3y \quad \text{ja} \quad x-(3y-y).$$

Väikesi klambrid ei saa meie enam tarvitada, kui näitame, et polünoomid maha arvatakse, sest kui kirjutada $((x+y)+3y)-(x-(3y-y))$, siis ei ole selge, missugused avaldused olid juba enne klambrites, ja sellepärast kujutame nõutava tehte nii:

$$[(x+y)+3y]-[x-(3y-y)].$$

Viimase avalduse teisendamisel avame kõige pealt tuntud juhtlause järele väikesed klambrid ja siis keskmised.

$$[(x+y)+3y]-[x-(3y-y)]=[x+y+3y]-[x-3y+y]=$$
$$=x+y+3y-x+3y-y=6y.$$

Lõpuks arvame välja avalduse arvsuuruse, kus suured klambrid $\{\}$ tarvitusel.

Antud on polünoomid:

$$4m-[(a-b)-(c-m)]; \quad m+[(b+c)-(c+m)]; \quad m+a.$$

Esimese kahe polünoomi summast maha arvata kolmas polünoom ja leida saadud avalduse arvsuurus, kui $a=2$, $b=0$, $c=3$, $m=5$.

Peale nõutud tehete tähendamist leiame avalduse:

$$\{4m-[(a-b)-(c-m)]\}+\{m+[(b+c)-(c+m)]\}-(m+a).$$

Selle asemel, et siia avaldusse panna tähtede asemele antud arvud, avame klambrid, esiteks väikesed, siis keskmised ja lõpuks suured, mille järele polünoomi lühendame, ja alles peale lühendamist asendame tähtede asemele antud arvud.

$$\{4m-[(a-b)-(c-m)]\}+\{m+[(b+c)-(c+m)]\}-(m+a)=$$
$$=\{4m-[a-b-c+m]\}+\{m+[b+c-c-m]\}-m-a=$$
$$=\{4m-a+b+c-m\}+\{m+b+c-c-m\}-m-a=$$
$$=4m-a+b+c-m+m+b+c-c-m-m-a=$$
$$=2m-2a+2b+c=2\,.\,5-2\,.\,2+2\,.\,0+3=$$
$$=10-4+0+3=9.$$

§ 18. Kasvatamine.

Nagu juba § 5 seletasime, tähendakse algebras arvude m ja n kasvatamise tehet ehk kasvatist üksteise kõrvale kirjutud tähtedega, s. o. avaldusega mn.

Kasvatise omadustest nimetame kaht, mis vastavad summa omadustele. Mõlemad need omadused on teada aritmeetikast. Esimene neist on, et tegurite järjekorra muutmisega kasvatise suurus ei muutu.

Nii on:

$$3.4 = 4.3; \quad \tfrac{1}{2}.2.5 = 2.5.\tfrac{1}{2};$$

$$ab = ba, \quad 4axb = a4bx = 4xab = \text{j. n. e.}$$

Kõne all olevat omadust nimetame tegurite ümberasendatavuseks. Selle omaduse põhjal võime kasvatisi alati nii kirjutada, et tegurid, mis tähtedega kujutud, asuksid tähestiku järjekorras ja numbritega kirjutud tegur ehk koeffitsient seisaks alati tähtede ees.

Seega kirjutame kasvatise $x\frac{1}{2}zy$ edaspidi harilikult nii:

$$\tfrac{1}{2}xyz.$$

Teine kasvatise omadus on tegurite ühendatavus.

Väljaarvamised näitavad, et kasvatis $3.4.7$ on üks ja seesama, kas tegurid kasvatakse näidatud järjekorras, ehk leitakse enne 7.3 ja kasvatakse resultaat veel 4-ga, või jälle otsitakse enne 4 ja 7 kasvatis ja kasvatakse see 3-ga.

Seega siis:

$$3.4.7 = (7.3).4 = (4.7).3.$$

Üleüldse saame:

$$(ab)c = a(bc) = b(ac),$$

$$(xy)(zv) = [(xy)v]z = (xzv)y = \text{j. n. e.}$$

Nagu näeme, seisab tegurite ühendatavus selles, et tegurid võime ühendada ükskõik mis järjekorras gruppidesse, millede kasvatised tulevad kasvatada üksteisega. Kui üks kahest tegurist on 0, siis on ka kasvatis 0.

Kui esimene tegur (kasvatatav) on null, siis järgneb see sellest, et

$$0 . m = 0 + 0 + 0 + \ldots + 0^{\text{m korda}} = 0$$

(m on täisarv).

On aga kasvatis

$$m . 0,$$

siis võime ümberasendatavuse põhjal kirjutada

$$m . 0 = 0 . m = 0.$$

Tähendus: Meie loeme kasvatise kohta ümberasendatavuse omaduse ka siis maksvaks, kui üks teguritest on null.

On tegurid enam kui kaks, ja üks neist 0, siis ei ole raske aru saada, et kasvatis on ka null, sest:

$$a . b . 0 . c = \overset{\text{üks teg.}}{(a\,b\,c)} \,.\, \overset{\text{teine teg.}}{0} = 0.$$

§ 19. Astmed ja nende kasvatamine.

Ühesuguste tegurite kasvatist tähendakse lühemalt ära. Nii kirjutakse $3 . 3 . 3 . 3$ asemel 3^4 (loe: kolme neljas aste) ehk $2 . 2 . 2 . 2 . 2$ asemel 2^5 (loe: kahe viies aste); $5 . 5 . 5 = 5^3$; $aa = a^2$ (loe: a teine aste); $bbb = a^3$ j. n. e.

Niisugust lühendud kasvatise ülestähendust nimetakse astmeks. Nii on 3^4 arvu 3 neljas aste; c^2 on arvu c teine aste.

Teist astet nimetakse veel arvu kvadraadiks, kolmandat astet arvu kuubiks.

Seega loetakse 5^2 välja: viie kvadraat; c^3 loetakse: c kuup.

Arvu astme otsimist nimetakse astme võtmiseks.

Arv, mille astet võetakse, nimetakse astme aluseks; arv, mis näitab, missugust astet võetakse, on astmenäitaja (eksponent).

Astmel: a^4 on aluseks a ja astmenäitajaks 4.

a^1 all kujutame lihtsalt arvu a.

Otsime astete a^2 ja a^3 kasvatise. Neil astetel on ühesugused alused a. Et $a^2 = aa$ ja $a^3 = aaa$, siis võime kirjutada:

$$a^2 \cdot a^3 = (aa) \cdot (aaa) = \overset{2 \text{ korda}+3 \text{ korda}}{a\,a\,a\,a\,a} = a^{2+3} = a^5.$$

Niisamati leiame, et

$$x^3 \cdot x^4 = (xxx) \cdot (xxxx) = xxxxxxx = x^{3+4} = x^7,$$

$$x \cdot x^2 = \overset{1 \text{ kord}}{(x)} \cdot \overset{2 \text{ korda}}{(x\,x)} = xxx = x^{1+2} = x^3.$$

Neist näitustest selgub juhtlause: Ühesuguste alustega astete kasvatise leidmiseks tuleb alus endiseks jätta ja astmenäitajad kokku arvata.

§ 20. Monoomide (üheosaliste) kasvatamine.

Antud on kaks monoomi $3xyz$ ja $4xyvt$.

Nende kahe monoomi kasvatist võime kujutada järgmiselt: $(3xyz) \cdot (4xyvt)$; ümberasendatavuse ja ühendatavuse omaduste tõttu võime seda kasvatist kujutada teisiti: koeffitsiendid paigutame ühte gruppi, ühesugused tähed teise, teistsugused tähed kolmandasse j. n. e.

$$(3xyz) \cdot (4xyvt) = (3 \cdot 4)(xx)(yy) \cdot zvt = 12x^2y^2zvt,$$

sest $3 \cdot 4 = 12$; $xx = x^2$, $yy = y^2$.

Näitused:

1) $5ab \cdot \frac{2}{3}bc = 5 \cdot \frac{2}{3}abbc = \frac{10}{3}ab^2c.$

2) $x^2y^4 \cdot xy^3 = x^3y^7.$

3) $\frac{1}{2}ab^2 \cdot 4abx = 2a^2b^3x.$

§ 21. Polünoomide kasvatamine monoomidega.

Otsime $(a+b-c)$ ja 3 kasvatise, kus juures $a+b-c$ loeme kasvatatavaks ja kolm kasvatajaks.

$(a+b-c)$ 3 ei kujuta muud, kui et $a+b-c$ tuleb võtta kokkuarvatavaks 3 korda:

$$(a+b-c)\,3 = (a+b-c) + (a+b-c) + (a+b-c) =$$

Avame klambrid ja lühendame avalduse:

$$a+b-c+a+b-c+a+b-c=3a+3b-3c$$

Seega leiame, et

(1) $$(a+b-c)3=3a+3b-3c$$

Kui meie endist polünoomi kasvatame murruga, olgu $\frac{2}{3}$, siis ei saa meie enam öelda, et polünoomi võtame kokkuarvatavaks $\frac{2}{3}$ korda, sest meie võime arvu 2, 3, 4, 10 j. n. e. kord kokku arvata, kuid mitte $\frac{2}{3}$ korda; sel juhusel anname avaldusele $(a+b-c)\frac{2}{3}$ selle mõtte, et polünoomist $a+b-c$ otsitakse $\frac{2}{3}$. Vaatame esiteks, kuidas sellest polünoomist $\frac{1}{3}$ leida.

Tõestame, et $(a+b-c)\frac{1}{3}=\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}$.

Et meie kolmandikku polünoomist $a+b-c$ otsime, siis peab resultaat $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}$ õige olema, kui $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}$ kasvatud 3-ga meile annab avalduse $a+b-c$.

Kasvatame sellepärast $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}$ arvuga 3, milleks meie ühtivuse (1) põhjal peame iga polünoomi liiget 3-ga kasvatama.

$$\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right)3=\frac{a.3}{3}+\frac{b.3}{3}-\frac{c.3}{3}=a+b-c,$$

mis tähendab, et meie $\frac{1}{3}$-ku polünoomist õieti oleme leidnud.

Seega siis:

$$(a+b-c)\frac{1}{3}=\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}.$$

Avaldust $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}$ võib ka nii kirjutada:

$$\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}c.$$

Pöörame nüüd $(a+b-c)\frac{2}{3}$ otsimise juurde tagasi. Kaks kolmandikku arvust ehk avaldusest, mis ju ka on arv, leiame nii: esiteks arvame $\frac{1}{3}$ arvust, ehk avaldusest, ja siis saa-

dud resultaadi kasvatame kahega. Kuid $\frac{1}{3}$ avaldusest oli $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}$. Seega peame nüüd $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}$ kasvatama kahega, mida juba oskame lahendada:

$$\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}-\frac{c}{3}\right).2=2.\frac{a}{3}+2.\frac{b}{3}-2.\frac{c}{3}=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b-\frac{2}{3}c.$$

Lõpulikult saame siis:

$$(2)\qquad (a+b-c)\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.a+\frac{2}{3}.b-\frac{2}{3}.c.$$

Vaatame saadud kasvatisi (1) ja (2):

$$(a+b-c)3=3a+3b-3c,$$
$$(a+b-c)\frac{2}{3}=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b-\frac{2}{3}c.$$

Paremad pooled on mõlemates ühtivustes saadud sel viisil, et polünoomi liikmed on kasvatud üksikult arvudega 3 ja $\frac{2}{3}$. Et aga iga kord, kui polünoomi kasvatakse täis- ehk murdarvuga, eelmisi harutusi võib korrata, siis on selge, et polünoomi kasvatamisel mõne arvuga kõik polünoomi liikmed tulevad üksikult selle arvuga kasvatada. Lõpuks mõned näitused:

$$(c-d-e)p=cp-dp-ep$$
$$(a-b)b=ab-b^2$$
$$(3x-2y+1)4=12x-8y+4.$$

Niisamati talitame, kui kasvataja esitab ühe arvu asemel mitme arvu kasvatist. Näituseks on avalduses:

$$(2p-3q+r)\,2pq$$

teiseks teguriks (kasvatajaks) $2pq$; kuid et $2pq$ on ikkagi arv, kas täis- ehk murdarv, siis käime leitud juhtlause järele. Kasvatame sellepärast kõik polünoomi liikmed $2pq$-ga.

$$(2p-3q+r)\,2pq=4p^2q-6pq^2+2pqr$$

2)

$$\left(\frac{1}{2}x^2y^3-\frac{2}{3}xy^2-x\right).\frac{3}{2}x^2y^2=\frac{3}{4}x^4y^5-x^3y^4-\frac{3}{2}x^3y^2.$$

Võtame nüüd järgmisekujulise kasvatise:

$$3m\,(m^2-2m+4),$$

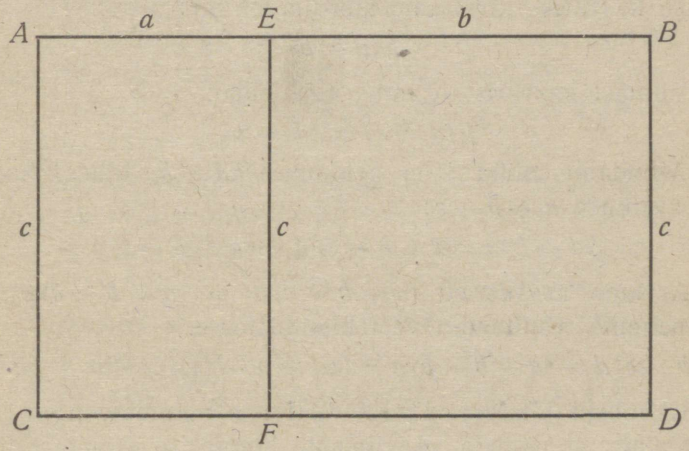
kus esimene tegur on monoom $3m$, teine tegur aga polünoom $m^2 - 2m + 4$, ja kasvatame kõik polünoomi liikmed $3m$-ga, seda sellega põhjendades, et kasvatis ei muutu tegurite järjekorra muutmisega, nii et:

$$3m(m^2 - 2m + 4) = (m^2 - 2m + 4)\,3m = 3m^3 - 6m^2 + 12m.$$

Antud juhtlauset polünoomi kasvatamise kohta monoomiga ehk vastupidiselt tarvitame meie sagedasti peast kasvatamise juures. Kui, näituseks, vaja 24 kasvatada 7-ga, siis kasvatame esiteks 20 seitsmega ja pärast 4 seitsmega, ning arvame saadud kasvatised kokku; järjelikult võtame 24 asemel $20 + 4$ ja teeme järgmist:

$$(20 + 4)\,7 = 7 \cdot 20 + 7 \cdot 4 = 140 + 28 = 168.$$

On teada, et pikkruudu pinnasuuruses on nii palju ruutüksusi, kui suur on pikkuse ja laiuse kasvatis, ehk lühemalt, pikkruudu väli on pikkuse ja laiuse kasvatis. Oletame, et pikkruudu *ABDC* (joon. 13) pikkus on $(a + b)$, laius aga c mingisugust pikkuse üksust (näit. tsentimeetrit).



Joon. 13.

Siis on terve pikkruudu väli $(a + b)c$ ruutüksust. Kuid teisest küljest näeme, et pikkruut *ABDC* on pikkruutude *AEFC* ja *EBDF* summa. *AEFC* väli on aga *ac*, ja *EBDF* väli on *bc*.

TRÜ Raamatukogu

Seega:

$ABDC$ väli $= AEFC$ väli $+ EBDF$ väli, ehk:

$(a + b)\,c = ac + bc$,

mis on uueks tõenduseks endise kasvatamise seadusele.

§ 22. Polünoomide kasvatamine polünoomidega.

Käesolevas paragrahvis püüame leida juhtlause, mille peale toetades võimalik oleks korda saata polünoomide kasvatamist polünoomidega. Võtame selleks polünoomid

$$(a + b - c) \text{ ja } (d - e),$$

millede kasvatis kujutakse, nagu teada, järgmiselt:

$$(a + b - c)\,(d - e).$$

Et klambrites kirjutud tähed on arvud, siis on selge, et peale näidatud tehete kordasaatmist kummaski klambris saame mingi arvu. Sellepärast võiksime ajutiselt, näit., esimese klambri avalduse ära tähendada ühe tähe, olgu k-ga. Eelmise kasvatise kirjutame siis ümber nii:

$$k\,(d - e)$$

Viimast kasvatist oskame aga leida:

$$k\,(d - e) = kd - ke.$$

Asendame nüüd jälle avaldusse $kd - ke$ tähe k asemele tema avalduse $a + b - c$:

$$kd - ke = (a + b - c)\,d - (a + b - c)\,e.$$

Arvame kasvatised $(a + b - c)\,d$ ja $(a + b - c)\,e$ välja, kuid paneme resultaadid veel klambritesse.

$$(a + b - c)\,d - (a + b - c)\,e = (ad + bd - cd) - (ae + be - ce).$$

Klambrid jätsime viimase ühtivuse paremale poole sellepärast alale, et näidata, et viimaste klambrite avamisel märgid tulevad muuta (klambrite ees märk —), muidu oleks see kergesti tähelpanemata võinud jääda.

Peale klambrite avamist annab ühtivuse parem pool:

$$ad + bd - cd - ae - be + ce$$

Seega oleme siis leidnud, et:

$$(a+b-c)\ (d-e) = ad+bd-cd-ae-be+ce.$$

Võrdleme selle ühtivuse paremat poolt pahemaga, et leida juhtlauset. Märke meie esialgu tähele ei pane. Esimesed kolm liiget *ad, bd, cd* saame, kui teisest polünoomist võtame esimese liikme *d* ja kasvatame ta kõikide esimese polünoomi liigetega. Järgmised kolm liiget *ae, be, ce* leiame, kui võtame teisest polünoomist teise liikme ja kasvatame ta jällegi kõikide esimese polünoomi liigetega. Märkide kohta võime öelda: kui kasvatame arvu, mille ees seisab +, arvuga, mille ees ka märk +, siis ilmub kasvatis plussiga; niisama saame kasvatise ees +, kui mõlemi kasvatatava arvu ees seisab märk —. Kui arvu ees märki ei ole, käime temaga ümber, nagu oleks tema ees +. Siis aga, kui ühe teguri ees on +, teise ees —, tuleb kasvatise ette panna märk —.

Lühidalt kõike öeldut kokku võttes, võime polünoomide kasvatamise juhtlause nii formuleerida: kõik teise (ehk esimese) polünoomi liikmed tulevad üksikult kasvatada esimese (ehk teise) polünoomi liigetega; kui mõlemad kasvatatavad arvud ilmuvad ühesuguste märkidega, paneme kasvatise ette plus, on nad aga mitmesuguste märkidega, siis miinus.

Näitame, et geomeetriliselt $(a+b-c)\ (d-e)$ on ka seesama avaldus, mis ennegi: $ad+bd-cd-ae-be+ce$. Olgu $a+b-c$ pikkruudu *ACLM* külje *AC* pikkus (joon. 14), kus $AC = AB+BD-CD\ (AB=a,\ BD=b,\ CD=c)$.

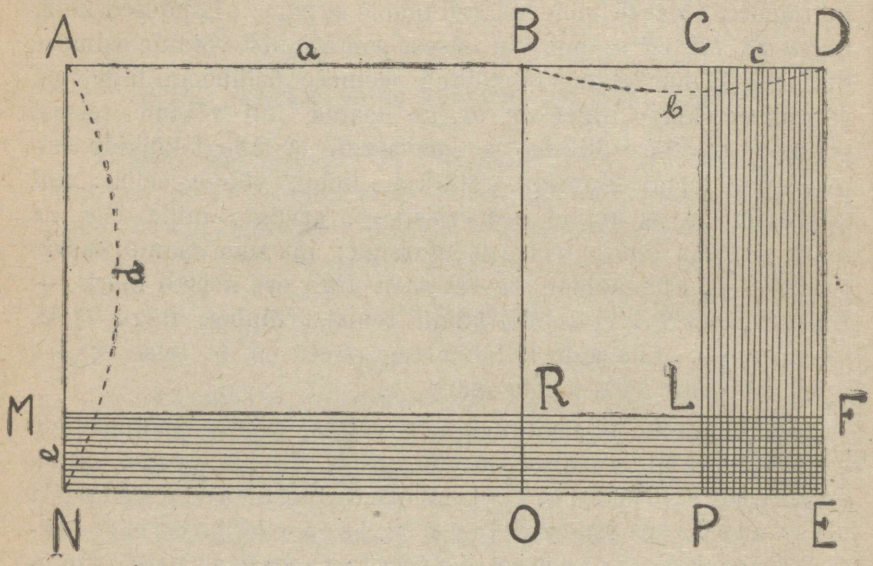
Olgu veel $d-e$ sellesama pikkruudu teise külje *AM* pikkus, kus $AM = AN-MN\ (AN=d,\ MN=e)$.

Pikkruudu *ACLM* pinnasuurus (väli) on $a+b-c$ ja $d-e$ kasvatis:

$$ACLM \text{ väli} = (a+b-c)\,.\,(d-e).$$

Teisest küljest võime aga, joonistuse peale vaadates, öelda, et *ACLM* välja võime saada, kui pikkruutude *ABON* ja *BDEO* väljad kokku arvame ja summast üleliigselt võetud pikkruutude *MRON*, *RFEO* ja *CDEP* väljad maha arvame

(täiskriipsutud pikkruudud). Kuid et siis *LFEP* väli kaks korda on maha arvatud (joon. peal kahekordselt läbi kriipsu-



Joon. 14.

tud), siis peame lõpuks veel juurde panema *LFEP* pinnas. Arusaadav on, et siis järgneva ühtivuse võime kirjutada:

ACLM pinnas. = *ABON* p. + *BDEO* p. — *CDEP* p.— *MRON* p.— — *RFEO* p. + *LFEP* p.

Kerge on aga näha, et *ACLM* p. = $(a+b-c)(d-e)$, *ABON* p. = *ad*, *BDEO* p. = *bd*, *CDEP* p. = *cd*, *MRON* p. = *ae*, *RFEO* p. = *be*, *LFEP* p. = *ce*.

Asendades need suurused ühtivusse, mis *ACLM* pinda kujutab, leiame:

$$(a+b-c)(d-e) = ad + bd - cd - ae - be + ce.$$

Meie oleme teisel teel sellesama resultaadi juurde jõudnud, mis ennegi saime.

Peale polünoomide kasvatamist võivad kasvatises liikmed ilmuda, mis on sarnased, missugusel juhusel kasvatise lihtsustamiseks tarvilik on saadud avaldust lühendada.

Näitused:

1) $(8a^2 - 3ab)(8a - b) = 64a^3 - 24a^2b - 8a^2b + 3ab^2$.

Peale lühendamist saame: $64a^3 - 32a^2b + 3ab^2$.

2) $(x+y-2z)(x-3y+z) = x^2 + xy - 2xz - 3xy - 3y^2 + 6yz + xz + yz - 2z^2 = x^2 - 2xy - xz - 3y^2 + 7yz - 2z^2$.

Lahendame nüüd näituse, kus peale kasvatamist saadud polünoomid tulevad kokku ehk maha arvata.

Kasvatame järgmises avalduses kõige pealt polünoomid, ilma klambrid avamata, siis avame viimased ja muudame, kui klambrite ees miinus, liigete märgid vastupidiseks. Lõpuks lühendame avalduse:

$$(7x - 3y)(5x + 4y) - (2x - 7y)(x - 5y) - (4x + 3y)(3x - 4y) =$$
$$= (35x^2 - 15xy + 28xy - 12y^2) - (2x^2 - 7xy - 10xy + 35y^2) -$$
$$- (12x^2 + 9xy - 16xy - 12y^2) = 35x^2 - 15xy + 28xy - 12y^2 -$$
$$- 2x^2 + 7xy + 10xy - 35y^2 - 12x^2 - 9xy + 16xy + 12y^2 =$$
$$= 21x^2 + 37xy - 35y^2.$$

§ 23. Jagamine.

Jagamise tehte äramääramise (§ 5) põhjal võime kinnitada, et järgmistest ühtivustest:

$$a : b = x \quad \text{ehk} \quad \frac{a}{b} = x$$

mõlemist järgneb:

$$a = bx$$

Et jagatav on jagaja ja jao kasvatis, siis võime öelda, et jagamisel meie antud kasvatise ja ühe teguri abil otsime teist tegurit.

Järeldused:

(1) $\frac{a}{a} = 1$, sest ainult $\overset{\text{jagu}}{1} \cdot \overset{\text{jagaja}}{a} = \overset{\text{jagatav}}{a}$.

(2) $\frac{a}{1} = a$.

(3) $\frac{ab}{b} = a$, sest $\overset{\text{jagu}}{a} \cdot \overset{\text{jagaja}}{b} = \overset{\text{jagatav}}{ab}$.

Jao omadused.

Selgituseks võtame ülesande: linna toitluskomitee poolt müüdi A linnas kolme kuu jooksul 172 tonni 830 kg. jahu linna elanikkudele välja. Küsitakse, kui palju oli linnas elanikke (keskmiselt muidugi), kui iga elanik sai kuus 5 kilo jahu.

Meie võime selle ülesande mitmel viisil lahendada.

Esiteks: 1 inimene sai 3 kuu jooksul $3 . 5 = 15$ kg. jahu. Keskmine elanikkude arv oli siis $\frac{172830}{15} = 11522$. Ülesande lahendamise juures jagasime 172830 kahe arvu kasvatisega $3 . 5$.

Kuid võib ka nii toimetada, et välja arvame, kui palju linna elanikud said kokku 1 kuus jahu.

$$\frac{172830}{3} = 57610 \text{ kg.}$$

ja siis, kui palju inimesi oli:

$$\frac{57610}{5} = 11522 \text{ in.}$$

Lõpuks võiksime veel ülesande nii lahendada, et enne välja arvame, mitu inimest oleks linnas elanud, kui kõik jahu 1 kuuga välja oleks müüdud,

$$\frac{172830}{5} = 34566 \text{ in.}$$

ja siis 34566 kolm korda vähendame (jahu jagati 3 kuuga)

$$\frac{34566}{3} = 11522 \text{ in.}$$

Sellest ülesandest selgub kõige pealt, et selle asemel, et arvu 172830 jagada kasvatise $3 . 5$-ga (I väljaarvamine) võime 172830 jagada üksikult kasvatise teguritega (II ja III väljaarvamine).

Üleüldse:

(4) $$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c.$$

Teiseks näitavad harutused, et kui arvu 172830 jagatakse enne 3-ga ja resultaat veel 5-ga, jagu on seesama, mis siis, kui 172830 jagada enne 5-ga ja pärast 3-ga.

Üleüldse:

(5) $$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$

Kolmas jao omadus on järgmine: kasvatise jagamise asemel võime üht tegurit jagada ja resultaati teise teguriga kasvatada.

Näituseks, selle asemel, et 8 . 20 jagada 5-ga, võime jagada 5-ga üht tegurit, olgu 20, ja resultaati kasvatada teise teguriga.

Üleüldse:

(6) $$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} . b$$

Viimast ühtivust paremalt poolt pahemale lugedes, saame

(6,a) $$\frac{a}{c} . b = \frac{ab}{c},$$

s. o.: jao kasvatamiseks peame kasvatama jagatavat.

Tõestame viimaks, et

(7) $$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$$

Kasvatame mõlemad arvatava ühtivuse (7) pooled *cb*-ga (v. § 12, ühtivuste omad.).

(8) $$\frac{ab}{cb} . cb = \frac{a}{c} . cb.$$

Pahem pool (8) annab § 23 (3) põhjal *ab*, parema poole leiame siis, kui $\frac{a}{c}$ kasvatame enne *c*-ga, siis *b*-ga:

$$\frac{a}{c} . c = a\,;\ a . b = ab.$$

Seega näeme, et parem ja pahem pool ühtivusest (8) on *ab*, mis tõestab, et ühtivus (7) on õige.

Ühtivus (7) lubab meid jagatavat ja jagajat ühe ja sellesama arvuga jagada.

§ 24. Astme jagamine astmega.

Jagame astme x^5 astmega x^2; neil astetel on ühesugused alused *x*. Nagu teame, võime jagu tähendada nii:

$$x^5 : x^2, \text{ ehk } \frac{x^5}{x^2}.$$

DIDAKTILINE SEMINAAR

Kuid $x^5 = x^3 \cdot x^2$, nii et

$$\frac{x^5}{x^2} = \frac{x^3 \cdot x^2}{x^2}$$

Jao omaduste põhjal [vaata § 23, (3)] leiame:

$$\frac{x^5}{x^2} = \frac{x^3 \cdot x^2}{x^2} = x^3$$

Selsamal teel leiaksime, et

$$\frac{a^4}{a^3} = a \text{ j. n. e.}$$

Saadud resultaate võrreldes antud arvudega, leiame, et ühesuguste alustega astete jagamisel jagatava astmenäitajast jagaja astmenäitaja maha tuleb arvata.

Näitused:

1) $a^4 : a^2 = a^{4-2} = a^2$

2) $y^3 : y = y^{3-1} = y^2$

Selge on, et jagatava astmenäitajast jagaja astmenäitaja ainult siis maha võib arvata, kui teine esimesest vähem, ehk temaga on ühesuurune.

Võtame viimse juhuse:

$$a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$$

Kuid teisest küljest teame, et arv $a^3 : a^3 = 1$ [§ 23, (1)], nii et:

$$a^0 = 1, \text{ s. t.}$$

Aste, mille astmenäitaja null, = 1.

§ 25. Monoomi jagamine monoomiga.

Olgu jagada $6a^3b^4x^2$ monoomiga $2ab^3x^2$.

Jagu on, nagu teada:

$$\frac{6a^3b^4x^2}{2ab^3x^2},$$

mille lihtsustamiseks harutame järgmiselt: et meie kasvatisega jagame, siis võime § 23 ühtivuse (4) põhjal jagada iga

jagaja teguriga eraldi. Jagame esiteks teguri 2-ga. Kuid jagatav on meil ka kasvatis; § 23, ühtivuse (6) peale toetades, võime kahega jagada üht tegurit, näituseks $6 : 2 = 3$;

$$\frac{6a^3b^4x^2}{2} = 3a^3b^4x^2.$$

Edasi tuleb $3a^3b^4x^2$ jagada veel a-ga, b^3-ga ja x^2-ga.

Esimese arvu, s. o. a-ga jagades võime üht tegurit, — olgu a^3 kasvatisest $3a^3b^4x^2$ — jagada a-ga:

$$\frac{3a^3b^4x^2}{a} = 3a^2b^4x^2,$$

sest $a^3 : a = a^2$.

Edasi, $3a^2b^4x^2$ jagame b^3-ga:

$$\frac{3a^2b^4x^2}{b^3} = 3a^2bx^2,$$

ja lõpuks viimase resultaadi x^2-ga,

$$\frac{3a^2bx^2}{x^2} = 3a^2b.$$

Meie võiksime kokku võtta kõikide harutuste resultaadi antud monoomide jagamise kohta ühtivuses:

$$\frac{6}{2} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^4}{b^3} \cdot \frac{x^2}{x^2} = 3a^2b.$$

Võetud näituses olid jagatava tegurite astmenäitajad suuremad kui vastavatel tähtedel jagajas. Järgmises näituses on vastupidiselt: ühe jagaja tähe näitaja on suurem kui vastaval tähel jagatavas.

$$12x^2y^3z : 3xy^5z.$$

Endiselt harutades tuleme otsusele, et resultaadi võib kirjutada:

$$\frac{12}{3} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{y^3}{y^5} \cdot \frac{z}{z},$$

ehk peale lihtsustamist

$$4x\frac{y^3}{y^5},$$

sest y^3 näitajast ei saa maha arvata y^5 näitajat.

Aga lihtsustada saame $\frac{y^3}{y^5}$ ometi, kui § 23 ühtivust (7) peame silmas, mis jagatavat ja jagajat ühe ja sama arvuga lubab jagada. Kõige suurem arv, millega y^3 ja y^5 jagatavad, on y^3. Leiame:

$$\frac{y^3 : y^3}{y^5 : y^3} = \frac{1}{y^2}.$$

Lõpulikult leiame siis järgmise jao:

$$4x \cdot \frac{1}{y^2}, \quad \text{ehk} \quad \frac{4x}{y^2}.$$

Viimaks arvame välja jao x^3yz^2 jagamisest yzv^2-ga.

Harutades niisama, kui esimese näituse juures, leiame, kui x^3yz^2 jagame kahe esimese jagaja teguriga yz-ga:

$$\frac{x^3yz^2}{yz} = x^3z;$$

viimase kasvatise jagame veel v^2-ga; et jagatavas tähte v ei olegi, sellest järeldame, et jagu lõpulikult ainult murru kujul võib kirjutada:

$$\frac{x^3z}{v^2}.$$

Kõike kokkuvõttes leiame juhtlause: Monoomide jagamise juures tuleb jagatava koeffitsient jagada jagaja koeffitsiendiga ja ühesuguste tähtede astmenäitajad maha arvata. Kui tähtedel on ühesugused näitajad jagatavas ja jagajas, siis ei ilmu see täht jaos üleüldse mitte; on aga jagaja astmenäitaja suurem, kui vastaval tähel jagatavas, ehk kui jagaja sisaldab tähte, mida pole jagatavas, siis võib jagu ainult murru kujul kirjutada.

Näitused:

1) $100x^9z^2 : 20x^5z^2 : = 5x^4$

2) $2ab^2x^4 : 3ab^5x^2 = \frac{2ab^2x^4}{3ab^5x^2} = \frac{2x^2}{3b^3}$

3) $b^3c^2 : 2b^5d^2 = \frac{b^3c^2}{2b^3d^2} = \frac{c^2}{2d^2}$

§ 26. Polünoomi jagamine monoomiga.

Polünoomi $a+b-c-d$ jagamist arvuga m peab nii mõistma, et nõutakse avaldust, mis arvuga m kasvatades annaks $a+b-c-d$.

Tõestame, et $(a+b-c-d):m=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}-\frac{d}{m}$. Selleks kasvatame arvatava jao $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}-\frac{d}{m}$ jagaja m-ga.

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}-\frac{d}{m}\right)m=\frac{a}{m}.m+\frac{b}{m}.m-\frac{c}{m}.m-\frac{d}{m}.m=a+b-c-d,$$

mida vaja oligi tõestada.

Tähendab, et polünoomi jagamiseks monoomiga tulevad polünoomi liikmed üksikult monoomiga jagada.

Näitused:

1. $(6ax-9bx-15x):3x=2a-3b-5.$
2. $(8a^2-4ac+12a):4a=2a-c+3.$
3. $\left(\frac{3}{4}axy-\frac{2}{5}bxy+\frac{7}{10}cxy\right):\frac{1}{20}xy=15a-8b+14c.$

§ 27. Monoomi jagamine polünoomiga.

Kui monoom, mida tähendame tähega a, jagatakse polünoomiga, olgu $ax+by+c$-ga, siis võime otsekohe öelda, et resultaat ei või olla ei polünoom ega monoom, sest jagamise tehte äramääramise järele otsime arvu, mis $ax+by+c$-ga kasvatades annaks a.

Aga polünoomide kasvatis on polünoom (§ 22), niisama ka monoomi ja polünoomi kasvatis (§ 21). Sellepärast võime jagu ainult nii kujutada:

$$a:(ax+by+c),\ \text{ehk}\ \frac{a}{ax+by+c}.$$

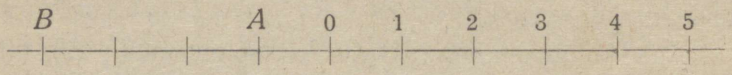
§ 28. Relatiivsed (suhtelised) arvud.

1. Oletame, et ostjal oli poodi minnes 15 marka raha. Kaupa ostis ta poest x marga eest, ja järele jäi tal peale maksmist veel $15-x$ marka. See vahe $15-x$ on kerge välja arvata,

niikaua kui x on vähem kui 15, ehk kui $x=15$ (sel juhusel on vahe 0). Kuid siis, kui ostetud kauba hind on suurem kui 15 m., ei saa meie enam $15-x$ väljaarvata. Aga ometi on meil tarvitusel iseäralik sõna, mis lubab $15-x$ ka siis nimetada. Kui, näituseks ostja 18 m. kauba eest pidi maksma, siis võis ta oma rahast ainult 15 m. ära maksta, kuna 3 m. võlgu jäi. Sõna võlg näitabki ära, et see 3 m. võlga on teistsuguse mõttega, kui 3 m. raha. Teada on ju, et 3 m. võlga on vastupidine mõiste, kui 3 m. raha.

2) Meie teame, et termomeetri skaala peal on punkt, mida tähendakse nulliga (0^0). Kui termomeetris elavhõbe seisab punktis 7^0, siis öeldakse harilikult, et on 7^0 sooja. Kujutame nüüd ette, et elavhõbe 8^0 langeb; siis liigub ta punktitest 6^0, 5^0, 4^0, 3^0, 2^0, 1^0, 0^0 läbi ja veel ühe kriipsuvahe allapoole nullpunkti, kuhu ta jääb seisma. Meie ei saa siis enam öelda, et on 1^0 sooja, sest 1^0 sooja oli siis, kui elavhõbe seisis 1 kriipsuvahe ülalpool nulli. Sel juhusel tarvitakse aga harilikult sõna külm, ja öeldakse, et on 1^0 külma. 5^0 sooja ja 5^0 külma on siis arvud, milledele meie anname vastupidise mõtte.

3) § 4 kõnelesime: kui arvtelje peal arvust 5 tahame maha arvata mingi arvu x ($x<5$ ehk $x=5$), siis peame meie punktist 5 võtma x üksust pahemale poole.



Joon. 15.

Siis aga, kui meie arvust 5 maha tahaksime arvata suurema arvu kui 5, näituseks 6, peame loomulikult punktist 5 võtma 6 üksust pahemale poole, kuid siis ei saa meie enam nullpunktist paremal pool ega ka nullpunktis eneses peatama jääda, vaid peame ühe üksuse nullpunktist pahemale poole võtma (v. joon. 15). Saame sellega punkti A. Selsamal viisil jõuaksime, kui arvust 5 arvtelje peal maha arvame 9, punkt B juurde, mis asub 4 üksust pahemal pool nullpunkti.

Jällegi tuleme otsusele, et arvud, mida kujutakse arvtelje peal paremal ja pahemal pool nullpunkti, on vastupidise mõttega.

Niisamasuguse järelduse teeme, kui ükskõik mis suuruse vähendame kuni nullini ja sealt veel edasi „teisele poole nulli“. Neist näitustest jätkub.

Et nüüd arvud on olemas, mis küll ühesuguste numbritega kirjutakse, kuid millede mõte on ometi vastupidine, siis tõuseb küsimus, kuidas neid arve kirjutada. Kui arvudele sõnad „on raha“ ja „on võlga“, ehk „sooja“ ja „külma“, või „paremale“ ja „pahemale“ poole juurde kirjutada, siis ei ole meie arvude kujutamine täielik, ja ei saa meie niisuguste arvudega, milledele sõnad juurde kirjutud, ka otsekohe tehteid teha. Et niisuguste vastupidise mõttega arvudega ümber käia võiksime, kui harilikkude arvudega, siis on nende tähendamiseks iseäraline viis võetud.

Võtame jällegi esimese näituse, kus ostja lõpuks jäi 3 m. võlgu. Oleks ostjal üle jäänud 3 m. raha, siis oleks meie lihtsalt öelnud, et temal on veel 3 m.; kuid et ta kõik oma raha välja oli annud ja kauba eest veel kolm marka oma rahast (kui tal seda oleks) välja oleks pidanud andma, siis ilmub resultaadis arv 3, mille maha peaks arvama. Mahaarvamise märk on aga miinus (—), sellepärast tähendame saadava arvu ära „—3“ ja loeme: miinus kolm, kuigi meie niisugusel korral märki — edaspidi mitte ei vaatle kui mahaarvamise märki. Nüüd ei ole vaja öelda, et ostja jäi 3 m. võlgu, vaid võime öelda: ostjal oli lõpuks miinus kolm marka raha.

Seega saame: $15 - 18 = -3$.

Järgmises näituses langes elavhõbe 7^0 pealt 8^0 allapoole, see tähendab, ta jäi seisma 1^0 võrra allpool nulli. Et vastavat kraadide arvu leida, peame tehte tegema:

$$7^0 - 8^0,$$

mille resultaadi ära ütleme sõnadega 1^0 külma, mida aga algebras kirjutakse nii:

$$7^0 - 8^0 = -1^0.$$

Nüüd ei ole meil vaja enam sõnu „sooja“ ja „külma“ tarvitada, vaid ainult esimest neist ja öelda, et oli — 1^0 kraad sooja. Teaduslikus keeles öeldakse aga, et termomeeter näitas — 1 kraadilist (miinus ühe kraad.) temperatuuri.

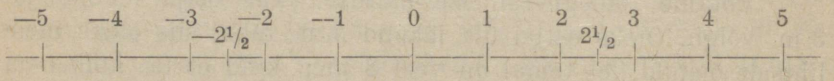
Viimases näituses kõnelesime arvteljel mahaarvamisest ja nägime: kui vähendaja on suurem vähendatavast, siis asub punkt, mis vahet kujutab, pahemal pool nullpunkti.

Kui arvust 5 maha arvata 6, siis on saadud punkt ühe üksuse võrra pahemal pool nullpunkti, kui aga 5-st maha arvata 9, siis asub saadav punkt 4 üksuse võrra pahemal pool nullpunkti. Neid arve, mis mainitud punkte kujutavad, tähendakse nii: — 1 (miinus 1) ja — 4 (miinus neli).

Seega paneme:

$$5 - 6 = -1;\ 5 - 9 = -4.$$

Sellest järgneb, et arvteljel ka nullpunktist pahemal pool asuvad punktid kujutavad arve (v. joon. 16).



Joon. 16.

Nende arvude tundemärgiks on, et neil miinus ette kirjutakse. Iga arvule paremal pool nullpunkti (olgu 4), vastab pahemal pool nullpunkti teine arv (—4); arvule 5 vastab „—5“, 2-le vastab „—2“, $2^1/_2$-le vastab $-2^1/_2$ j. n. e.

Mõlemad arvuread

0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .,

0, —1, —2, —3, —4, —5, . . .,

on pikendatavad kuni lõpmatuseni. Mõlemate ridade algus on 0.

Uuesti tundmaõpitud arve, mille tundemärgiks on nende ees seisev miinus, nimetakse negatiivseteks arvudeks.

Negatiivseid arve kujutavad arvteljel punktid pahemal pool nullpunkti. Neid arve, millega aritmeetikas opereeritakse, nimetakse positiivseteks arvudeks, näit. 3, 7, 25, $^1/_2$, $2^3/_4$ j. n. e.

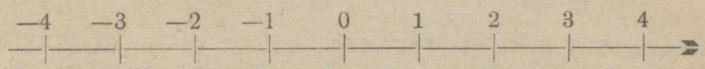
Et negatiivsetele arvudele ette kirjutakse miinus, siis kirjutakse ka sagedasti senini tarvitud n. n. positiivsetele arvudele ette plus (plus ja miinus on vastupidiste tehete märgid ja sellepärast nendega ka vastupidise mõttega arve ära tähendakse). Mispärast just need märgid on valitud, selgub edaspidi.

Sellepärast siis:

$$4 = +4,\ 10 = +10,\ \frac{1}{2} = +\frac{1}{2},\ a = +a \text{ j. n. e.}$$

Märgid + ja —, mis arvudele ette kirjutakse, ei ole mitte tehete märgid, nagu seniajani, sest ei ole mõtet +4-al märki + kokkuarvamise märgiks lugeda, kui puudub arv, millega teda kokku arvata. Sarnase põhjuse pärast ei ole ka miinus negatiivsete arvude ees mitte mahaarvamise märk. Neid märke nimetakse lihtsalt arvmärkideks. Niihästi positiivseid, kui negatiivseid arve hüütakse kokku relatiivseteks (suhtelisteks) arvudeks. Kui relatiivse arvu eest arvmärgi ära jätame, siis saame relatiivse arvu absoluutse suuruse: +8 ja —8 absoluutne suurus on mõlemil 8, niisama kui +0,5 ja —0,5 absoluutne suurus on 0,5.

Seniajani oleme arvteljel positiivse loomuliku arvrea tähendamiseks telje osa paremal pool nullpunkti tarvitanud. Punktid pahemal pool nullpunkti kujutavad siis negatiivseid



Joon. 17.

arve. Võib aga ka vastupidiselt toimetada: pahemal poolel kujutada positiivseid ja paremal poolel negatiivseid arve. Et eksitust ette ei tuleks, paneme telje otsa, kuhu poole positiivsed arvud kasvavad, noole märgi (joon. 17).

§ 29. Relatiivsete arvude kokkuarvamine.

Kui temperatuur hommikul oli $+8^0$, siis tõusis $+5^0$ ja veel $+4^0$, siis on selge, et viimaks temperatuur oli: $(+8^0)+(+5^0)+(+4^0)$; teisest küljest on aga kerge aru saada, et lõpulik temperatuur oli $8^0+5^0+4^0=17^0$.

Seega leiame:

$(+8^0)+(+5^0)+(+4^0)=+(8^0+5^0+4^0)=+17^0.$

Kujutame arvteljel $(+x)+(+y)+(+z)$[1]).

Seda peame nii mõistma, et esiteks võtame x üksust nullpunktist paremale, siis veel y üksust ja z üksust ka paremale poole, sellepärast leiame:

(1) $$(+x)+(+y)+(+z)=+(x+y+z)$$

Kui keegi on a marka võlgu ja tema laenab veel b ja siis c marka, siis võime tema raha hulka nii kujutada (v. § 28)

a m. võlga juurde b m. võlga juurde c m. võlga on võlga $a+b+c$ marka.

$$(-a)+(-b)+(-c)=-(a+b+c)$$

Arvteljel talitame $(-a)+(-b)+(-c)$ väljaarvamisel järgmiselt: Võtame nullpunktist a üksust pahemale poole (sest esimene kokkuarvatav on $-a$) ja veel b üksust ja c üksust pahemale poole, sellega oleme üleüldse $a+b+c$ üksust pahemale poole võtnud:

(2) $$(-a)+(-b)+(-c)=-(a+b+c)$$

Kahte saadud ühtivust (1) ja (2)

$$(+x)+(+y)+(+z)=+(x+y+z)$$
$$(-a)+(-b)+(-c)=-(a+b+c)$$

võrreldes, kus mõlemis relatiivseid arve kokku arvatakse (esimeses on nad positiivsed, teises negatiivsed), leiame juhtlause: Ühesuguste märkidega relatiivsete arvude kokkuarvamisel peame kokku arvama nende arvude absoluutsed suurused ja summa ette asetama endise arvmärgi.

Näitused:

1) $(+7)+(+3)+(+4)=+14=14.$
2) $(+2a)+(+3a)+(+b)=+(2a+3a+b)=$
$=+(5a+b)=5a+b.$
3) $(-2)+(-5)+(-10)=-(2+5+10)=-17.$
4) $(-m)+(-3m)+(-b)+(-5b)=-(m+3m+$
$b+5b)=-(4m+6b).$

[1]) x, y ja z tähendavad arvude absoluutset suurust, näit. $x=3$, $y=8\frac{1}{2}$, $z=10$.

Kui negatiivne arv nii on kirjutud, et miinus seisab summa ees, siis võime selle miinuse iga kokkuarvatava ette kirjutada.

Näit. $-(a+b+c)=-a-b-c$, sest $-(a+b+c)$ tähendab, et arvteljel nullpunktist a üksust, b üksust ja c üksust pahemale poole on võetud, mida $-a-b-c$ kujutabki. (Võrdle klambrite avamise juhtlausega, § 14!)

Mitmesuguste märkidega relatiivsete arvude kokkuarvamine.

Võtame niisuguse näituse: Maantee läheb teetulba juures põhjast lõunasse. Loeme positiivsed kaugused samba juurest põhja poole, negatiivsed lõunasse. Poiss astus esite 42 sammu positiivses sihis ja siis 35 sammu negatiivses sihis. Missuguses punktis oli poiss siis? Väljaarvamiseks peame $+42$ sammule juurde panema -35 sammu.

42 s. posit. sihis juurde 35 s. negat. sihis

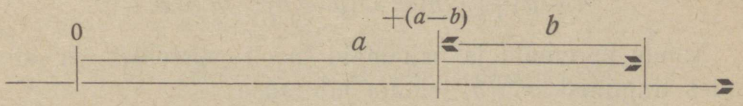
$$+\ 42\ +\ (-\ 35)$$

Kui aga punktist 42 lõuna poole lugeda 35 sammu, siis jääme peatama maantee positiivses osas, nimelt punktis 7. (Kujutage seda arvteljel!)

Sellepärast leiame:

$$(+42)+(-35)=+7.$$

Arvteljel kujutame $(+a)+(-b)$ järgmiselt: (tingimine, et $a>b$). Esiteks võtame a üksust positiivsele poole ja sealt



Joon. 18.

veel (kokkuarvamise märk!) b üksust negatiivsele poole; et aga $a>b$, siis viibime telje positiivses osas punktis $+(a-b)$ (joon. 18).

positiivne osa

(1) $$(+a)+(-b)=+(a-b).$$

2) Kui aga poiss enne oleks astunud 30 sammu põhja poole ja sealt 50 sammu lõuna poole, siis peaksime tema seisukoha väljaarvamiseks leidma:

30 sammu põhja poole juurde 50 s. lõuna poole.
(+ 30) + (— 50).

Arusaadav on, et kui poiss punktist +30 astus 50 sammu negatiivsele poole, siis ta nullpunktist (teetulp) üle astus ja veel 20 sammu negatiivses osas sammus.

Seega:

$$(+30)+(-50)=-20.$$

Arvu —20 võime arvudest +30 ja —50 saada nii: 30—50, mis nagu teame, on —20.

Arvteljel oleks avalduse $(-a)+(+b)$, kus $a>b$, väljaarvamine järgmine. Võtame a üksust telje negatiivsele poole ja sealt b üksust positiivsele poole. Kui viimast punkti tähendava arvu märgi tähele panemata jätame, siis peame seda punkti tähendama arvuga $a-b$, et meie aga lõpulikult ikkagi viibime telje negatiivses osas ($a>b$), siis oleme punktisse jõudnud, mis kujutab negatiivset arvu.

See arv on:

$$-(a-b).$$

(2) $$(-a)+(+b)=-(a-b).$$

Kirjutame ühtivused (1) ja (2) välja:

$$(+a)+(-b)=+(a-b);\quad a>b,$$
$$(-a)+(+b)=-(a-b);\quad a>b.$$

Nende paremaid ja pahemaid pooli võrreldes ja silmas pidades tingimist $a>b$, leiame juhtlause:

Mitmesuguste märkidega relatiivsete arvude kokkuarvamisel tuleb suuremast arvust vähem maha arvata ja vahe suurema arvu märgiga võtta.

Näitused:

1) $(+10)+(-7)=+(10-7)=+3;$
2) $(+5)+(-12)=-(12-5)=-7;$

3) $(+3y)+(-8y)=-(8y-3y)=-5y$;

4) $(-2x)+(3x)=+(3x-2x)=+x$.

Tähendus: meie seletasime, et

$$(+a)+(-b)=+(a-b)$$

ehk:

$$(+a)+(-b)=a-b$$

tingimisel, kui $a>b$.

Kuid kerge on näidata, et ka siis võib võtta:

$$(+a)+(-b)=a-b,$$

kui $a<b$.

Õigustab meid selleks järgmine harutus. Olgu välja arvata:

$$(+3)+(-7).$$

Arvteljel peame selleks võtma 3 üksust positiivsele poole ja saadud punktist 7 üksust negatiivsele poole, mida aga järgmiselt võib kujutada:

$$3-7.$$

Seega:

$$(+3)+(-7)=3-7.$$

Üleüldse võib, kui analoogiliselt harutada, saada summast $(+a)+(-b)$:

$$a-b,$$

kuigi $a<b$.

§ 30. Relatiivsete arvude mahaarvamine.

Maha arvata arvust $+a$ relatiivne arv $+b$, see tähendab, et tuleb leida arv x, mis kokku arvates arvuga $+b$ annaks $+a$:

vähendatav vähendaja vahe

(1) $(+a)-(+b)=x$,

vahe + vähendaja = vähendatav

(2) $x+(+b)=+a$.

Kuidas aga leida x-i? Kui x-ile paneme juurde $(+b)$, siis peame saama $+a$, see tähendab, et peale $+b$ juurdepa-

nemist peab kaduma x-i ja $+b$ summast täht b ja juurde ilmuma $+a$. Kerge on aga näha, et x peab olema avaldus

$$+a+(-b),$$

sest kui viimasele avaldusele juurde panna $+b$, siis saame:

$$(+a)+(-b)+(+b);$$

kuid kui punktist, mis kujutab arvteljel arvu $+a$, negatiivses sihis võtta b üksust ja saadud punktist võtta positiivses sihis b üksust, siis jõuame jälle punktisse $+a$.

Seega:

$$(+a)+(-b)+(+b)=+a,$$

mis näitab, et oleme õieti välja arvanud x-i.

Ühtivuse (1) kirjutame siis ümber järgmiselt, pannes x-i asemele $(+a)+(-b)$:

(3) $$(+a)-(+b)=(+a)+(-b).$$

Niisama leiame kui:

(4) $$\begin{matrix}\text{vähendatav}\ \text{vähendaja}\ \text{vahe}\\ (+a)-(-b)=x,\\ \text{vahe}\ \text{vähendaja}\ \text{vähendatav}\\ x+(-b)=+a,\end{matrix}$$

et x peab olema $(+a)+(+b)$; sest et $(+a)+(+b)$ ja $(-b)$ summa on $(+a)+(+b)+(-b)=+a$; sellega leiame, et ühtivuse (4) võime ümber kirjutada, kui paneme $x=(+a)+(+b)$, järgmiselt:

(5) $$(+a)-(-b)=(+a)+(+b).$$

Ühtivustest (3) ja (5) selgub, kui võrdleme ühtivuste paremaid ja pahemaid pooli, et relatiivse arvu mahaarvamise asemel võime sellesama arvu vastupidise märgiga juurde arvata.

Näitused:

1) $7-(+4)=7+(-4)=7-4=3$;

2) $2-(-3)=2+(+3)=2+3=5$;

3) $pq-(+3pq)=pq+(-3pq)=pq-3pq=-2pq$.

Kõike kokku võttes, mis relatiivsete arvude kokku- ja mahaarvamise kohta öeldud,

leiame, et relatiivsete (suhteliste) arvudega tehete lahendamisel niisama tuleb talitada, kui klambrite avamisel (§ 14, 15). Kui klambrite ees seisab +, siis jääb arvu ette peale klambrite avamist tema endine märk, on aga klambrite ees —, siis tuleb relatiivse arvu ees märk muuta vastupidiseks.

Sellest selgub, et üldistuse mõttes on kasulik, kui meie negatiivsete arvude äratähendamiseks tarvitame märki miinus.

Näitus:

$$(+2a)+(-3b)-(-a)+(--b)=2a-3b+a-b=3a-4b.$$

Et: $a+(-b)=a-b$, ja $a-(+b)=a-b$, siis võime öelda et:

$$a+(-b)=a-(+b).$$

Viimasest ühtivusest näeme, et tehte ja arvu märke võib vastastikku vahetada.

Kuid

$$a+(-b)=a-b;$$

seega leiame, eelmist ühtivust paremalt poolt pahemale lugedes:

$$a-b=a+(-b)$$

See ühtivus lubab mahaarvamise tehet $a-b$ kujutada kokkuarvamisena $a+(-b)$.

Sellepärast võime avaldustes, kus esinevad vähendajad, neid ümber kirjutada kokkuarvatavatena.

Võtame, näituseks, polünoomi:

$$ax-2bx-cx^2$$

ja kujutame liikmed $-2bx$ ja $-cx^2$ kokkuarvatavatena:

$$ax-2bx-cx^2=ax+(-2bx)+(-cx^2).$$

Et niisugust teisendamist saab igas polünoomis teha, siis võime kinnitada, et iga polünoomi liikmeid võime nimetada kokkuarvatavateks ja polünoomi ennast summaks.

Kõik positiivsete arvude summa ja vahe omadused on ka negatiivsete arvude summal ja vahel, näit. ümberasendatavus j. n. e.

§ 31. Relatiivsete arvude kasvatamine.

Relatiivsete arvude kasvatamisel peame järgmised 4 juhust silmas:

1. Mõlemad tegurid on positiivsed. Näit. $(+3).(+4)$.
2. Esimene tegur on negatiivne, teine positiivne. Näit. $(-2).(+3)$.
3. Esimene tegur on positiivne, teine negatiivne. Näit. $(+5).(-4)$.
4. Mõlemad tegurid on negatiivsed. Näit. $(-3).(-4)$.

Asume esimese juhuse juurde.

1. $(+3).(+4)$ ei kujuta muud, kui kasvatist, 3.4, ehk $+(3.4)$; sellepärast:

$$(+3).(+4) = +(3.4).$$

Üleüldse võime öelda, et

$$(+a).(+b) = +ab.$$

2. Kasvatisest $(-3).(+4)$ peame nii aru saama, et -3 tuleb kokkuarvatavaks võtta 4 korda:

$$(-3)+(-3)+(-3)+(-3) = -12.$$

Kui aga teine tegur on murd, nagu: $(-3).(+\frac{2}{5})$, siis mõistame seda niisama, kui aritmeetikas murruga kasvatamist, s. t. nii, et arvust -3 tuleb leida $\frac{2}{5}$.

$\frac{1}{5}$ arvust -3 on $-\frac{3}{5}$ (järelkatseks kasvatame arvu $-\frac{3}{5}$ 5-ga).

Kui aga $\frac{1}{5}$ arvust -3 on $-\frac{3}{5}$, siis on $\frac{2}{5}$ sellestsamast arvust: $-\frac{3}{5}.2 = -\frac{6}{5}$.

Meie järeldame: kui kahe relatiivse arvu kasvatamisel esimene tegur on negatiivne ja teine tegur positiivne täis- ehk murdarv, siis lmub resultaat märgi miinusega; üleüldse:

$$(-a).(+b) = -ab.$$

3. Kui esimene tegur on positiivne, teine tegur negatiivne, näit. $(+3) . (-4)$, siis ei või meie enam endiselt öelda, et $+3$ tuleb võtta kokkuarvatavaks -4 korda, (võib kokku arvata 2, 3, 4, 5 ... korda, mitte -4 korda).

Siin aga võime panna kasvatise $(+3) . (-4)$ kohta tingimise, et oleks jõusse jäänud tegurite ümberasendatavus.

Meie nõuame seega, et:

$$(+3) . (-4) = (-4) . (+3).$$

Viimane kasvatis on eelmise järele -12, ja seega

$$(+3) . (-4) = -12,$$

$$(+a) . (-b) = -ab.$$

4. Viimase juhuse kohta peame ka ütlema, et ei saa -3 võtta kokkuarvatavaks -4 korda.

Missugust arvu meie peame $(-3) . (-4)$ all kujutama, selgub meile järgmisest.

Teada on, et

$$(-4) + (+4) = 0.$$

Kasvatame nüüd $-4 + 4$ arvuga -3 sellesama juhtlause järele, mis leidsime § 21 polünoomide kasvatamise kohta monoomidega:

$$-3 . (-4 + 4) = (-3) . (-4) - 12.$$

Kuid, et $(-4) + (+4) = -4 + 4 = 0$, siis peab ka eelmise summa ja -3 kasvatis olema null:

$$(-3) . (-4) - 12 = 0.$$

Viimase ühtivuse pahemal pool on kirjutud vahe, kus vähendatavaks on $-3 . -4$ ja vähendajaks 12.

Et vahe on null, siis peab vähendatav olema ühesuurune vähendajaga:

$$-3 . -4 = 12,$$

ehk

$$(-3) . (-4) = +12.$$

Üleüldse:

$$(-a) (-b) = +ab.$$

Vaatame nüüd nelja saadud ühtivust:

$$(+a).(+b) = +ab,$$
$$(-a).(+b) = -ab,$$
$$(+a).(-b) = -ab,$$
$$(-a).(-b) = +ab.$$

Neist ühtivustest järgneb: Ühesuguste märkidega tegurite kasvatis võetakse märgiga plus (esimene ja neljas ühtivus), mitmesuguste märkidega tegurite kasvatis aga märgiga miinus (teine ja kolmas ühtivus).

Selgituseks võtame veel järgmise näituse. Igapäevasest elust oleme tuttavad ühtlase (ühetaolise) liikumise kiirusega. Seda kiirust mõõdetakse teega, mida ühtlaselt liikuv keha igas aja üksuses edasi liigub. Näituseks, kui raudtee rong ühtlaselt liikudes igas sekundis 10 meetrit edasi liigub, siis on tema liikumise kiirus 10 meetrit sekundis, mida nii tähendakse:

$$10 \frac{\text{meetrit}}{\text{sekundis}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Teada on ka, et kiirusel on oma siht; ta võib olla näituseks lõunasse ehk põhja sihitud, selle järele, kuhu poole liigub rong. Et neile sihtidele vahet teha, paneme kiiruse ette +, kui ta sihitud on põhja, vastasel korral aga märgi —. Kui meie ütleme, et rongi kiirus oli $-8\frac{\text{m}}{\text{s}}$, siis teame otsekohe, et rong sõitis lõuna poole $8\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kiirusega. Oli rongi kiirus $+9\frac{\text{m}}{\text{s}}$, siis sõitis rong põhja poole 9 meetri kiirusega sekundis.

Ka aega võiksime tähendada positiivsete ja negatiivsete arvudega, näit. võime aja peale kella 2 lugeda positiivseks ja enne kella 12 negatiivseks. Seega tähendab „—15 sekundit“ kellaaega: 15 sek. enne kella 12, ja „+5 minutit“ kellaaega: 5 minutit peale kella 12.

Oletame nüüd, et rong sõidab ühtlaselt liikudes lõunast põhja kiirusega $+10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja sõidab punkt kell 12 mingist jaamast ilma peatamata läbi. Kell +8 sek. oli ta jaamast kaugel $+10 . +8 = +80$ meetrit. Et ta aga kell +8 sek. jaa-

mast põhja pool liikus, siis peame tee jaamast põhja poole lugema positiivseks (sest kasvatis on +80) ja lõuna poole negatiivseks. Kell —5 sek. oli rong jaamast: $(-5).(+10)=-50$ meetrit kaugel, see on lõuna pool jaama, mis täitsa õige on.

Kujutame ette, et rong sõidab negatiivse kiirusega (põhjast lõunasse); 4 sekundit enne 12 on rong jaamast $(-4).(-10)=+40$ meetrit kaugel (rong oli tõesti põhja pool jaama), 6 sekundit pärast kella 12 on tema kaugus jaamast: $(+6).(-10)=-60$ meetrit (rong on lõuna pool jaama).

Võrdluseks: minu sõbra sõber on minu sõber; minu vaenlase sõber on minu vaenlane; minu sõbra vaenlane on minu vaenlane; minu vaenlase vaenlane on minu sõber. (Sõber — plus, vaenlane — miinus).

§ 32. Mitme teguri kasvatis.

Et leida mitme teguri kasvatist, kui tegurid on suhtelised arvud, peab kasvatise märgi leidmiseks vaatlema ainult negatiivsete tegurite arvu.

Tõepoolest, olgu positiivseid tegurid ükskõik kui palju, ikkagi on nende kasvatis positiivne.

Näit:

$$(+3).(+2).(+1)=+6;$$

$$(+a).(+b).(+c).(+d)=+abcd.$$

Kasvatise märk oleneb ainult negatiivseist teguritest. On neid tegurid kaks, siis annavad nad kasvatamise juures +; [näit: $(+2).(-3).(-4)=+24$]; kui neid on kolm, siis —; [näit. $(-1).(-2).(-2)=-4$]; neli negatiivset tegurit jälle +, viis — j. n. e. Järjelikult võime öelda, et kasvatise ette pannakse märk +, kui negatiivseid tegurid on paaris arv, vastasel korral —.

Näitused:

$$(-2).(-3).(+2).(-1)=-12,$$

$$(+a).(-b).(-c).(+d)=+abcd.$$

Relatiivsete arvude kasvatisel on needsamad omadused, mis positiivsete arvude kasvatisel, see tähendab:

1) Nende kasvatis ei muutu mitte tegurite järjekorra muutmisega (ümberasendatavus, v. § 31).

2) Kasvatis ei muutu mitte tegurite ühendamisel gruppidesse (ühendatavus).

Relatiivsete (suhteliste) arvude kasvatamisel võime veel tarviduse järele muuta tegurite märke. On selge, et kui kahel teguril on märgid + ja +, siis võime nende asemele panna — ja —, sest nende muudetud märkidega tegurite kasvatis on endist viisi märgiga +.

On aga ühe teguri ees +, teise ees —, siis võime alati esimese ette panna —, teise ette +, sest kasvatis on endist viisi märgiga —.

Kui aga ühe paari tegurite märkide muutmine kasvatist ei muuda, siis ei muutu kasvatis ka nelja, kuue j. n. e. teguri märkide vastupidiseks muutmisega.

Näitused:

$$1)\ (-a).(+b).(-c) = (+a)\ (+b)\ (+c)$$

$$2)\ 2ab = 2.(-a)\ (-b)$$

$$3)\ (a-b)\ (c-d) = (b-a)\ (d-c),$$

sest kui muudame teguri $a-b$ märki, saame: $-(a-b)$, ehk $b-a$, niisama teguri $c-d$ märki muutes leiame: $d-c$. Tahame aga muuta ainult ühe teguri märki, siis peame, et kasvatis ei muutuks, veel kasvatise ees märgi muutma.

Näit.:

$$(+a)\ (+b)\ (-c) = -(-a)\ (+b)\ (-c),$$

$$(b-d)\ (a+b) = -(d-b)\ (a+b).$$

§ 33. Negatiivsete arvude astmed.

Võtame astmed:

$$(-a)^1 = -a$$

$$(-a)^2 = -a.-a = +a^2$$

$$(-a)^3 = -a.-a.-a = -a^3$$

$$(-a)^4 = -a.-a.-a.-a = +a^4$$

Niisama leiame, et:

$$(-a)^5 = -a^5;\ (-a)^6 = +a^6 \text{ j. n. e.}$$

Juhtlause: Negatiivse arvu paaris aste on positiivne, paarita aste aga negatiivne arv.

Juhime tähelepanu avalduste $-(a)^4$ ja $(-a)^4$ isesuuruse peale. Avalduses $-(a)^4$ võetakse a neljas aste ja resultaat miinusega: $-(a)^4 = -a^4$.

Avalduses $(-a)^4$ võetakse $-a$ neljas aste:

$$(-a)^4 = +a^4$$

Meie näeme, et $-(a)^4$ ja $(-a)^4$ eralduvad märgiga.

§ 34. Relatiivsete (suhteliste) arvude jagamine.

Relatiivsete arvude jagamist mõistame niisamuti kui positiivsete arvude jagamist. Sellepärast võime öelda: relatiivse arvu (jagatav) relatiivse arvuga (jagaja) jagamine on arvu otsimine, mis jagajaga kasvatades annaks jagatava.

Jagu tähendame niisama ära, kui enne. Näituseks:

$$-4 : +5 = \frac{-4}{+5};\ (+a) : (-b) = \frac{+a}{-b}$$

Selge on, et relatiivsete arvude jagu oma absoluutse suuruse poolest on arv, mis nendesamade arvude jagamisel saadakse, kui märgid jäetakse tähele panemata.

Nii on

$-3 : +2$ jao absoluutne suurus $\frac{3}{2}$

$(+a) : (-b)$ jao absoluutne suurus $\frac{a}{b}$

Jääb järele otsustada veel märgi küsimus. Meie näitame kohe, et kahe märgi asemel (lugeja ja nimetaja ees) võib jao ette ainult ühe märgi panna.

I. Võtame juhuse $(+a) : (+b)$; et siin jagatakse positiivsed arvud, siis on selge, et jagu on $+\frac{a}{b}$.

(1) $$(+a) : (+b) = +\frac{a}{b}.$$

II. Olgu jagada: $(+a) : (--b)$.

Jao absoluutne suurus on $\frac{a}{b}$, kuid missuguse märgiga peab selle arvu võtma? Selle saame kätte jagamise tehte äramääramisest. Kui jagu kasvatada jagajaga, s. o. arvuga $-b$, siis peame saama $+a$. Sellega võib jagu olla ainult negatiivne arv, sest ainult kaks negatiivset tegurit võivad positiivse kasvatise anda.

(2) $$(+a):(-b)=-\frac{a}{b}.$$

III. $(-a):(+b)$.

Jagu võib olla ainult $-\frac{a}{b}$, sest ainult negatiivne arv annab positiivse arvuga kasvatades negatiivse arvu.

(3) $$(-a):(+b)=-\frac{a}{b}.$$

IV. $(-a):(-b)$.

Et jao ja jagaja kasvatis on negatiivne arv $-a$, ja jagaja ise on ka negatiivne arv, siis peab jagu olema positiivne arv:

(4) $$(-a):(-b)=+\frac{a}{b}.$$

Võrdleme järgmiste ühtivuste (1), (2), (3) ja (4) pooli:

(1) $$(+a):(+b)=+\frac{a}{b},$$

(2) $$(+a):(-b)=-\frac{a}{b},$$

(3) $$(-a):(+b)=-\frac{a}{b},$$

(4) $$(-a):(-b)=+\frac{a}{b},$$

Meie näeme, et ühesuguste märkidega relatiivsete arvude jagamisel pannakse jao ette plus (esimene ja neljas ühtivus), mitmesuguste märkidega relatiivsete arvude jagamisel ilmub jagu miinusega (teine ja kolmas ühtivus).

Et

$$(+a):(-b)=-\frac{a}{b},$$

$$(-a):(+b)=-\frac{a}{b},$$

siis saame, nende ühtivuste pahemaid pooli ühtlustades, (paremad pooled on ühesuurused):

(1) $$(+a):(-b)=(-a):(+b).$$

Niisama leiame ühtivustest:

$$(+a):(+b)=+\frac{a}{b},$$

$$(-a):(-b)=+\frac{a}{b},$$

kui ühtlustame jälle pahemad pooled:

(2) $$(+a):(+b)=(-a):(-b).$$

Ühtivustest (1) ja (2) näeme, et relatiivsete arvude jagamisel jagaja ja jagatava märgid korraga võime muuta vastupidisteks.

§ 35. Negatiivsetest arvudest avaldustes.

Seniajani oleme tähtede all kujutanud ikka positiivseid arve, s. t. et arv a kujutas 1, $2^1/_2$, 5, 100 j. n. e. ehk nulli, kuid nüüd, peale relatiivsete arvude tundmaõppimist, laiendame selle kujutamise ka negatiivsete arvude peale. Sellega siis peame edaspidi mingi tähe x-i all kujutama niihästi positiivseid kui ka negatiivseid arve, olgugi, et selle tähe x-i ees seisab üks märkidest + ehk —.

Võtame avalduse

$$ax-by+2axy,$$

ja arvame selle avalduse arvsuuruse välja, kui $a=-2$, $b=1$, $x=-3$, $y=^1/_2$.

Neid arve asendades avaldusse, leiame:

$$ax-by+2axy=(-2).(-3)-1.\frac{1}{2}+2.(-2).(-3).\frac{1}{2}.$$

Jätame selles avalduses tehete märgid esiotsa alale ja kasvatame ainult liigetes relatiivsed arvud antud juhtlausete järele; saame:

$$+6-\frac{1}{2}+(+6).$$

Kui viimases avalduses tehted lahendame, siis leiame:

$$6 - \frac{1}{2} + 6 = 11\frac{1}{2}$$

Niisama leiame avalduse $2ab - 3b - 4a$ arvsuuruse, kui $a = -3$, $b = -1$;

$$2ab - 3b - 4a = 2 \cdot (-3)\ (-1) - 3 \cdot (-1) - 4\ (-3) = 6 + 3 + 12 = 21.$$

Meie oleme juba (§ 21, 22, 26) teinud selgeks, kuidas polünoome monoomidega kasvatada ja jagada, niisama, kuidas polünoome polünoomidega kasvatada.

Neidsamu juhtlauseid võime tarvitada ka, kui avaldustes ilmuvad relatiivsed arvud. Kui relatiivsed arvud varjatud kujul avaldustes ilmuvad, s. t. kui näit. a kujutab -2, siis tuleb ikkagi talitada nii, kui oleks a positiivne arv. Võtame näituse:

$$c(a - b) + (a - c) : b$$

Meie näitame, et:

$$(1) \qquad c(a - b) + (a - c) : b = ac - bc + \frac{a}{b} - \frac{c}{b}$$

s. t., et tehete lahendamine endiste juhtlausete järele tuleb toimetada, kujutagu a, b, c, missuguseid tahes arve: positiivseid ehk negatiivseid.

Olgu:

$$a = -3,\ b = 2,\ c = -4.$$

Pahem pool avaldusest annab peale nende arvude tähtede asemele panemise ja teisendamise:

$$-4(-3 - 2) + (-3 + 4) : 2 = (-4) \cdot (-5) + 1 : 2 = 20 + \frac{1}{2} = 20\frac{1}{2}.$$

Parema poole arvsuuruse leiame järgmiselt:

$$(-3) \cdot (-4) - 2 \cdot (-4) + \frac{-3}{2} - \frac{-4}{2} = 12 + 8 - \frac{3}{2} + 2 = 20\frac{1}{2}$$

Meie näeme, et mõlemad pooled on ühesuguse arvsuurusega. See on kaudseks tõenduseks, et ühtivus (1) ka siis on maksev, kui tähtede all mõista negatiivseid arve.

Võtame veel ühtivuse ja arvame tema poolte arvsuuruse välja:

(2) $(b-d)(-p+q)-(c-d):-q=-bp+dp+bq-dq+\frac{c}{q}-\frac{d}{q}$.

Olgu:

$$b=5,\ d=2,\ c=-3,\ p=-4,\ q=1.$$

Asendame need arvud ühtivuse (2) pahemasse poolde ja teisendame avalduse:

$$(b-d)(-p+q)-(c-d):-q=(5-2)(4+1)-(-3-2):-1=$$
$$=3\,.\,5-\frac{-5}{-1}=15-5=10.$$

Niisama asendame tähtede arvsuurused ühtivuse (2) paremasse poolde ja teisendame saadud avalduse.

$$-bp+dp+bq-dq+\frac{c}{q}-\frac{d}{q}=$$
$$=-5\,.\,(-4)+2\,.\,(-4)+5\,.\,1-2\,.\,1+\frac{-3}{1}-\frac{2}{1}=$$
$$=+20-8+5-2-3-2=10.$$

Jällegi on mõlemal poolel ühesugune arvsuurus.

Arvame veel mõne näituse välja, kus negatiivsete arvudega kasvatakse ehk jagatakse.

1) $-ab^5:3a^3b^2=-\frac{b^3}{3a^2}$

2) $\frac{1}{2}m^2n\,.\,-2n^3=-m^2n^4$

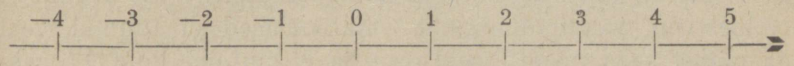
3) $(-2a+b^2-c)\,.\,-2ab=+4a^2b-2ab^3+2abc$

4) $(-x^2+y^2):-\frac{1}{3}xy=+\frac{3x}{y}-\frac{3y}{x}$

Tartu Ülikool

§ 36. Negatiivsete arvude suurusest.

Kui arve kujutada arvteljel (joon. 19) ja telje sihti lugeda pahemalt poolt paremale, siis võime positiivsete arvude suuruse kohta järgmist öelda:



Joon. 19.

Iga arv, mis arvust *a* pahemal pool kujutud, on vähem kui *a*. Näituseks on iga arv, mis 5-est pahemal pool, vähem kui 5. Kui seesama juhtlause maksvaks lugeda ka negatiivsete arvude kohta, siis peame:

1) iga negatiivse arvu lugema vähemaks kui mingi positiivse arvu. Näit.: $-2<1$, $-5<\frac{1}{2}$ j. n. e.

2) iga negatiivse arvu vähemaks kui 0 (näit. $-3<0$, $-\frac{1}{2}<0$);

3) negatiivse arvu suurema absoluutse suurusega vähemaks kui negatiivse arvu vähema absoluutse suurusega (näit.: $-5<-4$, $-2<-1\frac{1}{2}$, $-1<-\frac{1}{2}$ j. n. e.).

Selgituseks võtame näituse, kus loeme positiivseid arve varanduseks ja negatiivseid võlaks.

Arusaadav on, et kui kellegil on 5 m. võlga, siis temal on vähem raha kui teisel, kel 3 m. raha.

$(-5<3)$.

Niisama on selge, et inimesel, kellel on 3 m. võlga, vähem on raha kui teisel, kel ei võlga ega raha ei ole $(-3<0)$. Lõpuks on sellel, kel 8 m. on võlga, vähem raha kui teisel, kel 5 m. võlga. $(-8<-5)$.

Veel hiljem kui nulli, oli negatiivsete arvude leidmine; Greeka kõige suurem algebraist Diophant (3. aastasajal p. Kr.), kelle teost algebra alal enne Rhindi papüüruse leidmist loeti kõige vanemaks, ei tunne negatiivseid arve. Alles õpetud hindud (bramiinid), kes avaldasid oma suurte ülesleidustega (kümnendik arvamissüsteem, null) tähelpanemisväärilist mõttejulgust, said ka negatiivsete arvude leidjaiks. Nemad seletasid vahet positiivsete ja negatiivsete arvude vahel, esimesi kui „varandusi“, teisi kui „võlgu“ kujutades, nagu meiegi seda tegime ühes näituses. Ka kujutasid õpetud hindud (bramiinid) negatiivseid arve kui suurusi, milledel positiivsete arvudega võrreldes on vastupidine siht. Eurooplased ei tunnud veel kaua pärast seda negatiivseid arve, ja ei suutnud kuni 17. aastasajani oma matemaatiliste vaadete poolest hindude kõrguseni

tõusta. Negatiivsete arvude täielik seletus ja tarvitamine saab aluse prantsuse matemaatiku ja mõtteteadlase Réné Descartes'ilt (1596—1650). Õpperaamatuisse leiab negatiivsete arvude seletus tee alles 19. aastasaja keskel.

Niikaua, kui ei kujutud negatiivseid arve arvteljel, ei osatud ka nende mõtet seletada. Mitmed matemaatikud nimetasid neid „mõttetuiks" arvudeks.

Negatiivsete arvude juures puutume teist korda kokku arvu mõiste laiendamisega. Meie teame, et täisarvudega kokkuarvamist ja kasvatamist alati täide võib saata, ükskõik missugused on antud arvud. Kuid mahaarvamise ja jagamisega ei ole lugu nii: enne murdarvude tundmaõppimist ütlesime, et ei saa 10 jagada 3-ga. Murdarvude õppimisel laiendasime aga arvu mõistet ja ütlesime, et kuigi ei saa 10 jagada 3-ga täisarvude jagamise mõttes (tervelt), siiski on võimalik kujutada jagu ka nende arvude jagamisest, ning anda sellele jaole teatud mõte.

Niisama võisime enne negatiivsete arvude tundmaõppimist maha arvata ainult arve, mis on vähendatavast vähemad ehk temaga ühesuurused. Pärast hakkasime meie vähemast arvust ka suuremaid maha arvama, kirjutasime vahe teatud viisil ja nimetasime tema negatiivseks arvuks, millele meie anname positiivsete arvudega võrreldes vastupidise mõtte. Ka edaspidi tuleb algebras tegemist teha niisuguste juhustega, et meie kahe arvu tehtele, mida meie esialgu lugesime mõttetuks, mõtte anname. Meie tarvitame selle läbiviimise juures seadust või printsiipi, mida Hankel „permanentsuse printsiip" nimetas.

*§ 37. Jagamisest nulliga.

1) $0 : m$ ehk $\frac{0}{m}$ all mõistame, kui $m \neq 0$, niisugust arvu, mis arvuga m kasvatades annab nulli. Kuid ainuke arv, mis vastab sellele nõudmisele, on 0. Seega:

$$0 : m = 0, \quad \text{ehk} \quad \frac{0}{m} = 0.$$

2) Kui jagaja on ka null, peame tehet nii ära tähendama:

$$0:0 \text{ ehk } \frac{0}{0},$$

missuguse avalduse all mõistame jällegi arvu, mis jagajaga, s. o. nulliga, kasvatades annaks jagatava, s. t. nulli. Et aga iga arvu ja nulli kasvatis on null, siis ei kujuta $\frac{0}{0}$ mitte üht kindlat arvu, vaid iga arvu. Sellepärast nimetakse ka $\frac{0}{0}$ määramatu arvuks ehk avalduseks:

$$\frac{0}{0}=1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ 5,\ 8\frac{3}{4},\ -2\frac{1}{3} \text{ j. n. e.}$$

3) Kui jagaja on null ja jagatav ei ole null, siis peame jagamise tehte äramääramise järele $\frac{m}{0}$ all kujutama arve, mis nulliga kasvatades annaksid m, mis ei ole null.

Kuid see on võimata ja sellepärast peame $\frac{m}{0}$ vaatlema kui avaldust, millel mõtet ei ole, nii kaua, kuni meie peame jagamise tehte ära määramisest kinni.

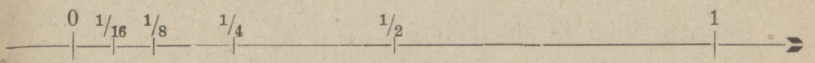
Avaldust $\frac{m}{0}$ mõistetakse aga ka teist viisi, millest järgnevas kõneleme.

Võtama arvude rea: 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, . . ., kus iga järgmine arv eelmisest on kaks korda vähem.

Kui meie seda arvude rida ikka enam ja enam pikendame, siis saame arvud, mis enam ja enam vähenevad. Mida v ä h e m on aga arv (meie kõneleme ainult positiivseist arvudest), seda lähemal seisab ta nullile. Meie võime eelmist arvude rida pikendades leida niisuguse arvu, mis väiksem on kui igasugune etteantud arv, olgu viimane nii väike kui tahes. Olgu näituseks antud arv $\frac{1}{1.000.000}$; meie võime antud arvude reas ikkagi arvu leida, mis vähem on kui $\frac{1}{1.000.000}$; see arv on nimelt 21-ne võetud reas.

Kui aga mingi suurus vähem võib olla ja jääda, kui iga etteantud arv, siis öeldakse, et selle suuruse piir on 0. Meie võiksime seda asjaolu arvteljel kujutada järgmiselt:

Joonistusel 20 on kujutud punkt 1, siis $^1/_2$, $^1/_4$, j. n. e. Igaüks neist punktidest arvteljel on paremal pool nullpunkti. Meie võime neid arve kujutades nullile nii lähedale minna, kui tahame, nii et kaugus nulli ja arvu vahel vähem on kui iga etteantud pikkus.



Joon. 20.

Seega on arvude piir antud arvude reas null.

Pöörame nüüd tagasi avalduse $\frac{m}{0}$ juurde. Võtame avalduse $\frac{6}{y}$ ja anname tähele y arvsuurused 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, j. n. e. Leiame sellekohaselt $\frac{6}{y}$ arvsuurused:

$$\frac{6}{1} = 6,$$

$$\frac{6}{\frac{1}{2}} = 6 : \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 2}{1} = 12,$$

$$\frac{6}{\frac{1}{4}} = 24,$$

$$\frac{6}{\frac{1}{8}} = 48, \text{ j. n. e.}$$

Meie näeme, et avalduse $\frac{6}{y}$ arvsuurus kasvab seda enam, mida vähemad arvsuurused on tähel y. Kui tähele y anname lõpmata väikse arvsuuruse, siis muutub murd $\frac{6}{y}$ lõpmata suureks, mida kujutakse:

$$\frac{6}{0} = \infty,$$

ja loetakse: kuus jagatud nulliga on lõpmatus.

Niisama leiame, et:

$$\frac{20}{0} = \infty,$$

$$\frac{4\frac{1}{2}}{0} = \infty,$$

üleüldse:

$$\frac{m}{0} = \infty, \text{ kui } m \neq 0.$$

Sümbooliga $\frac{m}{0} = \infty$ tähendame seega ära tõsiasja, et murd $\frac{m}{y}$ muutub lõpmata suureks, kui y läheneb nullile.

Eelmise viisi järele leiame:

$$\frac{-3}{0} = -\infty,$$

ja

$$\frac{-a}{0} = -\infty,$$

kui $a \neq 0$, ja kui ta on positiivne arv.

Lõpmata suurt positiivset arvu võiks kujutada arvtelje positiivsel poolel lõpmata kaugel nullpunktist; $-\infty$ on negatiivsel arvtelje poolel lõpmata kaugel nullist.

Huvitav on, kui õieti hindu matemaatik Bhaskara Acarya (sündinud 1114 p. Kr.) $\frac{a}{0}$ kohta harutab: „Mida enam jagajat vähendakse, seda enam suureneb jagu. Kui jagajat lõpmata vähendakse, suureneb jagu lõpmata; aga niikaua, kui võib öelda, et jagu on nii ja nii suur, ei ole ta veel lõpmatus, sest võib kujutada alati veel suuremat arvu".

Mõned erijuhused polünoomide kasvatamisel.

§ 38.

Joonistame ruudu (kvadraadi), mille külje pikkus oleks kahe arvu summa $a + b$ (joon. 21).

Et iga pikkruudu väli on pikkuse ja laiuse kasvatis, siis on ka kujutud ruudu väli $(a + b)(a + b)$, ehk, nagu seda lühidalt kirjutakse, $(a + b)^2$.

Joonistusest näeme aga, et selle ruudu väli on ruudu A, ruudu C ja kahe ühesuuruse pikkruudu B väljade summa.

Ruudu A väli on $a \cdot a = a^2$.

Ruudu C väli on $b \cdot b = b^2$.

Pikkruudu B väli on $a \cdot b$.

Saame avalduse $(a+b)^2$ jaoks, nimelt:

(1) $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

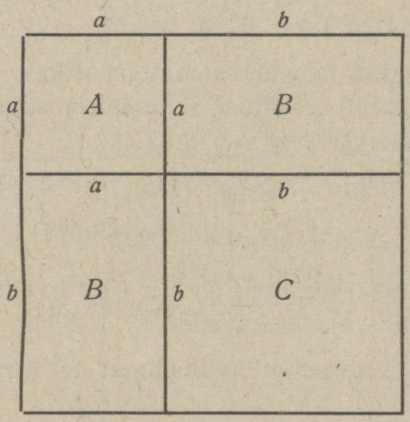
Sellesama resultaadi juurde jõuame, kui harilikul teel leiame $(a+b)^2$:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 =$$

(1) $$= a^2 + 2ab + b^2,$$

nii et jällegi:

(1) $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Joon. 21.

Et alati võiksime ilma kasvatamata $(a+b)^2$ kujulisi kasvatisi välja arvata, paneme järgmist tähele:

Ühtivuse (1) pahemal poolel on kirjutud kahe arvu summa kvadraat; paremal poolel on kolme liikme summa: esimene neist on esimese arvu a kvadraat, teine liige on arvude a ja b kahekordne kasvatis (lihtne kasvatis on ab), ja kolmas liige on teise arvu b kvadraat.

Lõpulikult võime öelda, et kahe arvu summa kvadraat on esimese arvu kvadraat, plus kahekordne antud arvude kasvatis, plus teise arvu kvadraat.

Leitud ühtivust (1) võime tarvitada arvude kvadraatide leidmiseks peastarvamisel. Olgu näituseks leida 27 kvadraat, s. t. $27 \cdot 27$. Kujutame arvu 27 summana: $27=20+7$ ja otsime antud juhtlause järele $20+7$ kvadraadi.

1) $(20+7)^2=20^2+2 \cdot 20 \cdot 7+49=400+280+49=729$, mida kerge peast välja arvata.

2) Leida 103^2,
$103^2=(100+3)^2=100^2+2 \cdot 100 \cdot 3+3^2=10.000+600+9=10609$.

3) $(a+3)^2=a^2+6a+9$.

4) $(2a+5b)=4a^2+20ab+25b^2$.

Ühtivusi, mida tarvitakse matemaatikas, et nende eeskujul teisendada teatud avaldusi, ilma mitmesuguseid tehteid lahendamata, nimetakse f o r m u l'iteks.

Näituseks võime ühtivuse (1):

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

abil alati kahe arvu summa, olgu $x+2y$ kvadraadi võtta, ilma et meil tegelikult vaja oleks leida $(x+2y)(x+2y)$.

Ühtivust (1) nimetame sellepärast formuliks.

§ 39.

Joonistame ruudu, mille külje pikkus oleks arvude a ja b vahe, s. o. $a-b$. See ruut on joonistusel tähega A ära tähendud (joon. 22).

Ruudu A väli, mille külg $a-b$, on $(a-b) \cdot (a-b)$, ehk $(a-b)^2$. Teisest küljest saame ruudu A välja, kui ruudu $DEFG$ väljast (küljega a) maha arvame ruudu C välja (küljaga b) ja kahe ühesuuruse pikkruudu B välja. Mainitud pikkruutude üks külg on $(a-b)$, teine külg b ja pinnasuurus sellega $b(a-b)$.

Seda sidet algebraliste sümboolidega tähendades, leiame:

$$(a-b)^2=a^2-2b(a-b)-b^2.$$

Peale klambrite avamist annab parem pool viimasest ühtivusest:

$$a^2 - 2b(a-b) - b^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

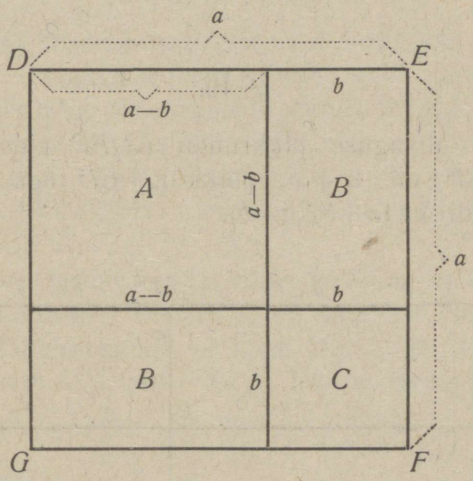
nii et:

(2) $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ühtivus (2) on nimetud geomeetrilise joonistuse algebraline kujutus.

Meie võime aga viimase ühtivuse saada ka puht-algebralisel teel, kui tähele paneme, et $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ ja viimase kasvatise tuntud viisil välja arvame:

$$(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$



Joon. 22.

Jällegi oleme väljendanud, et:

(2) $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ühtivuse (2) pahemal poolel seisab arvude a ja b vahe teine aste (kvadraat). Paremal poolel on kolm liiget, milledest esimene kujutab arvu a kvadraati; teine liige on miinusega võetud arvude a ja b kahekordne kasvatis, kuna kolmas liige on teise arvu b kvadraat.

TARTU ÜLIKOOL.
DIDAKTILINE SEMINAAR

Sellepärast võime nüüd saadud formuli (2) sõnadega nii välja öelda:

Kahe arvu vahe kvadraat on esimese arvu kvadraat, miinus kahekordne arvude kasvatis, plus teise arvu kvadraat.

Väljendud formulit võime tarvitada peastarvamise juures arvude kvadraadi otsimisel. Olgu, näituseks, leida 49^2. Kujutame 49 vahena: $49=50-1$ ja võtame $50-1$ kvadraadi ülemise formuli järele:

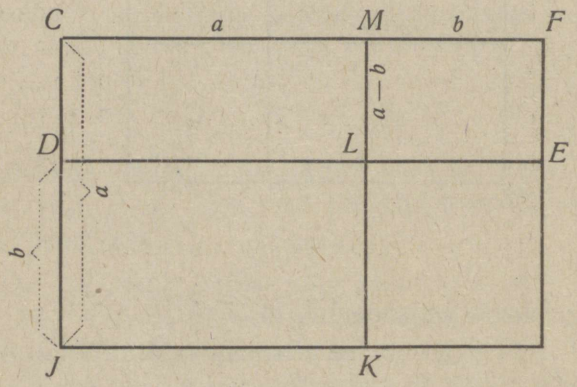
$$(50-1)^2=50^2-2\,.\,50\,.\,1+1^2=2500-100+1=2401.$$

2) $(2c-3)^2=4c^2-12c+9,$

$$(\tfrac{1}{2}-2a)^2=\tfrac{1}{4}-2a+4a^2.$$

§ 40.

Võtame niisuguse pikkruudu $CDEF$ (joon. 23), mille üks külg CF on $a+b$, põikkülg CD aga $a-b$; selle pikkruudu väli on $(a+b)(a-b)$.



Joon. 23.

Kuid pikkruudu $CDEF$ väli = ruudu $MCJK$ väli — pikkruudu $DJKL$ väli + pikkruudu $MLEF$ väli.

Ruudu *MCJK* pinnasuurus on $a \cdot a = a^2$;
pikkruudu *DJKL* pinnasuurus on $a \cdot b$;
pikkruudu *MLEF* pinnasuurus on $(a - b)\,b$.
Järgneb ühtivus:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + (a - b)b;$$

paremat poolt ühtivusest klambritest vabastades ja liikmeid ühendades, leiame lõpulikult:

(3) $$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Sellesama ühtivuse leiame, kui $a + b$ kasvatame $a - b$-ga.

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2,$$

nii et jällegi

(3) $$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Pahemal poolel praegu kirjutud ühtivuses on kahe arvu a ja b summa ja nendesamade arvude vahe kasvatis, kuna aga parem pool kujutab nendesamade arvude kvadraatide vahet; sellepärast edaspidi alati, kui kahe arvu summa kasvatakse nendesamade arvude vahega, võime selle kasvatise asemel võtta nende arvude kvadraatide vahe.

Viimast formulit (3) võib tarvitada mõnikord arvude peastkasvatamisel. Oletame, et vaja on kasvatada 68 arvuga 72. Tähele pannes, et 72 on 70+2, kuna aga 68 on nendesamade arvude vahe: 70—2, leiame formuli (3) põhjal:

$$(70+2)(70-2) = 70^2 - 2^2 = 4900 - 4 = 4896.$$

Näitused:

1) $(3x - 4y)(3x + 4y) = 9x^2 - 16y^2$;

2) $(xy - \frac{1}{2}z)(xy + \frac{1}{2}z) = x^2y^2 - \frac{1}{4}z^2$.

*§ 41.

Avaldust $(a + b)^3$ mõistame meie kui lühendud kujul kirjutud kolme ühesuguse teguri $a + b$ kasvatist:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b).$$

Et aga kahe teguri $(a+b)(a+b)$ kasvatis on $(a+b)^2=$ $=a^2+2ab+b^2$ (§ 38 üht. 1), siis võime kirjutada:

$$(a+b)^3=(a+b)^2\,(a+b)=(a^2+2ab+b^2)\,(a+b).$$

Kui tegurid $a^2+2ab+b^2$ ja $a+b$ üksteisega kasvatada, siis leiame:

$$(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3.$$

Peale lühendamist muutub parem pool avalduseks:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Järjelikult:

(1) $$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

See tähendab, et kahe arvu summa kolmas aste on esimese arvu kolmas aste, + kolmekordne esimese arvu kvadraadi ja teise arvu kasvatis, + kolmekordne esimese arvu ja teise arvu kvadraadi kasvatis, + teise arvu kolmas aste.

Selsamal teel teisendame $(a-b)^3$:

$$(a-b)^3=(a-b)\,(a-b)\,(a-b)=(a-b)^2\,(a-b)=$$

$$=(a^2-2ab+b^2)\,(a-b)=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=$$

$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Seega oleme leidnud, et:

(2) $$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Ühtivuse (2) võime järgmiselt lugeda: kahe arvu vahe kolmas aste on esimese arvu kolmas aste, — kolmekordne esimese arvu kvadraadi ja teise arvu kasvatis, + kolmekordne esimese arvu ja teise arvu kvadraadi kasvatis, — teise arvu kolmas aste.

Juhime tähelpanu selle peale, et kahe arvu vahe kolmanda astme laotuses $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ märgid vahelduvad: esimese liikme ees +, teise ees —, kolmanda ees +, neljanda ees —, muidu aga on liikmed needsamad, mis kahe arvu summa kuubi laotuses.

Formulite (1) ja (2) tarvitamine.

1) $(2a+5)^3 = 8a^3 + 3 \cdot 4a^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2a \cdot 25 + 125 = 8a^3 + 60a^2 + 150a + 125$.

2) $(x-3y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 3y + 3x \cdot 9y^2 - 27y^3 = x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$.

*§ 42.

Kasvatame $a+b$ polünoomiga. a^2-ab+b^2:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + b^3,$$

nii et:

(1) $$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3.$$

See tähendab, et kahe arvu summa kasvatud polünoomiga, mille liikmed on: esimese arvu kvadraat — arvude kasvatis + teise arvu kvadraat, annab nendesamade arvude kolmandate astete summa.

Niisama leiame, et

(2) $$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

Viimase ühtivuse võime sõnadega lugeda analoogiliselt formuliga (1).

Näitused:

1) $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3-8$,

2) $(ab+2c)(a^2b^2-2abc+4c^2) = a^3b^3+8c^3$.

* Tehted korraldud polünoomidega.

* § 43. Korraldud polünoomid.

Polünoomis $3x^2-x+2x^3-4$ on üleüldse 4 liiget; neist neljast liikmest sisaldavad kolm tähte x, kuna üks liige on ilma tähelise tegurita. Tähe x astmenäitajad on 2, 1, 3. Seda polünoomi liiget, milles teatud täht (siin x) ilmub kõige suu-

rema astmenäitajaga, nimetakse polünoomi ülemliikmeks; antud polünoomis on see liige $+ 2x^3$. Liiget aga, milles teatud täht ilmub kõige vähema astmenäitajaga, ehk milles see täht ei ilmugi, nimetakse polünoomi alamliikmeks. Antud polünoomi alamliige on $- 4$.

Kirjutame nüüd polünoomi nii ümber, et kõige enne seisaks ülemliige, siis liige, milles x-i näitaja oleks järgmine oma suuruse poolest j. n. e., ja viimaseks liikmeks alamliikme:

$$2x^3 + 3x^2 - x - 4.$$

Meie nimetame niiviisi ümberkirjutud polünoomi x-i alanevate astete järjes korraldud polünoomiks. Antud polünoomi oleksime võinud ka x-i tõusvate astete järjes korraldada: siis oleksime pidanud kõige enne alamliikme kirjutama, selle järele liikme, milles tähe x-i näitaja oleks järgmine oma suuruse poolest j. n. e., viimaks polünoomi ülemliikme:

$$- 4 - x + 3x^2 + 2x^3.$$

Näitus.

Korraldame järgmise polünoomi alanevate astete järjes:

$$a - 2a^2 + 1 - a^3;$$

$$- a^3 - 2a^2 + a + 1.$$

Tõusvate astete järjes oleks meie pidanud antud polünoomi kirjutama järgmiselt:

$$+ 1 + a - 2a^2 - a^3.$$

Kui polünoomis kaks, ehk enam tähti leidub ja seda polünoomi tahame korraldada, siis peame ühe tähe välja valima, mille astete järele meie antud polünoomi korraldame. Nimetame seda tähte polünoomi peatäheks.

Olgu antud polünoom: $a^4b + a^5 - b^5 - ab^4 - a^2b^2$.

Kui siin peatäheks lugeda a, siis tuleks see polünoom korraldada tähe a alanevate astete järjes järgmiselt:

$$a^5 + a^4b - a^2b^2 - ab^4 - b^5.$$

Kui aga täht b on peatäht, siis peaks polünoomi korraldama tähe b alanevate astete järjes järgmiselt:

$$-b^5 - ab^4 - a^2b^2 + a^4b + a^5.$$

Viimane avaldus on ühtlasi korraldud ka tähe a tõusvate astete järjes, mis muidugi ei ole mitte alati nii.

Näitus.

Polünoom:

$$x - 2x^2y + 4x^3y^5 - x^4y^2 - 3x^5y^4$$

on korraldud tähe x-i tõusvate astete järjes. Sellesama polünoomi kirjutame, kui teda tähe y-i alanevate astete järjes korraldame, järgmiselt ümber:

$$4x^3y^5 - 3x^5y^4 - x^4y^2 - 2x^2y + x.$$

*§ 44. Korraldud polünoomide kasvatamine.

Otsime polünoomide $8y^2 + x^2 - 7xy$ ja $x^2 - xy$ kasvatise. Korraldame selleks need avaldused tähe x alanevate astete järjes ja kirjutame kasvataja kasvatatava alla:

$$\begin{array}{rl} & x^2 - 7xy + 8y^2 \\ \times & \quad x^2 - xy \\ \hline & x^4 - 7x^3y + 8x^2y^2 \\ & \quad - x^3y + 7x^2y^2 - 8xy^3 \\ \hline & x^4 - 8x^3y + 15x^2y^2 - 8xy^3 \end{array}$$

Kasvatame kõik esimese polünoomi liikmed x^2-ga ja kirjutame resultaadi joone alla; selle järele kasvatame kõik esimese polünoomi liikmed $-xy$-ga ja kirjutame saadavad kasvatised endiste alla, nii et sarnased liikmed seisaksid sarnaste all. Lõpuks arvame kasvatised kokku, s. t. ühendame üksteise alla kirjutud sarnased liikmed. Nagu näeme, on niisugusel kasvatamise tehte rakendamisel see hea külg, et sarnaseid liikmeid ei ole vaja otsida.

Arusaadav on ka, et ei ole sarnaseid liikmeid kasvatise ülem- ja alamliikmel, sellepärast, et ülemliikme kasvatises saame, kui tegurite ülemliikmed kasvatame, mille juures kasvatise peatähe astmenäitaja on tegurite peatähe astmenäitajate summa ja seega kõige suurem kasvatises. Niisama on kasvatise alamliikmes peatäht kõige vähema näitajaga. Sellest järgneb, et kasvatises ülem- ja alamliikmed tingimata peavad jääma, sest et neile sarnaseid ei leidu, kuna kõik teised liikmed võivad ühendamise juures kaduda.

Meie võime sellepärast öelda, et polünoomide kasvatamise saadus võib olla ainult polünoom. Oleme sellest juba ülalpool kõnelenud.

Võib juhtuda, et kasvataja teise, kolmanda j. n. e. liikme kasvatamisel kasvatatavaga ilmub liige, mis sarnane ei ole ühegagi enne saadud liigetest; sel juhusel kirjutame selle liikme rea alamliikme järele.

Kasvatame polünoomid:

$$x^4+2x^3+2x+1 \text{ ja } x^2-2x+1.$$

$$\begin{array}{rl} & x^4+2x^3+2x+1 \\ \times & \quad x^2-2x+1 \\ \hline & x^6+2x^5+2x^3+x^2 \\ & -2x^5 \quad -4x^2-2x-4x^4 \\ & \quad +2x^3 \quad +2x+x^4+1 \\ \hline & x^6 \quad +4x^3-3x^2 \quad -3x^4+1. \end{array}$$

Selles näituses ilmub, et $-2x$-i kasvatamisel esimese polünoomi liigetega saame liikme $-4x^4$, mis sarnane ei ole ühegagi esimese rea kasvatise liigetest, sellepärast jätsime peale x^2-ga liikme veel tühja koha selle rea alamliikme jaoks ja kirjutasime $-4x^4$ rea lõppu. Ka kirjutasime teise polünoomi kolmanda liikme kasvatamise juures liikme $+x^4$ teise rea viimse liikme alla, sest $-4x^4$ ja x^4 on sarnased liikmed.

Üleüldse võib öelda, et polünoome kasvatamiseks korraldada ainult siis on mõtet, kui tähtede astmenäitajad korraldud polünoomides üksteisele järgnevad ilma suurema vaheta,

või enam-vähem ühtlaselt kasvavad ehk kahanevad, nagu: x, x^4, x^7, x^{10} j. n. e.

Vastasel korral sarnaseid liikmeid kasvatises ei ole sugugi, ehk neid oleks vähe, ja nende pärast tehet kirjeldud viisil rakendada oleks üleliigne.

*§ 45. Polünoomi jagamine polünoomiga.

Polünoomide jagamise juures võime alati enne tehte lahendamist jagatava ja jagaja ära korraldada peatähe alanevate astete järjes.

Olgu, näituseks, leida:

$2pxy + 2mx^3y - 2nx^2y$ ja $-nx + mx^2 + p$ jagu.

Neid polünoome tähe x alanevate astete järjes korraldades, võime jao kirjutada järgmiselt:

$$(2mx^3y - 2nx^2y + 2pxy) : (mx^2 - nx + p)$$

ehk murru kujul:

$$\frac{2mx^3y - 2nx^2y + 2pxy}{mx^2 - nx + p}$$

Resultaati võib aga sagedasti lihtsustada, milleks nii harutame: jagu võib olla monoom ehk jälle polünoom. On jagu monoom, siis peab ta jagajaga kasvatades andma jagatava; on arusaadav, et see monoom jagaja ülemliikmega mx^2-ga kasvatades peab kasvatises andma jagatava ülemliikme $2mx^3y$. Selle monoomi leidmiseks peab järjelikult $2mx^3y$ jagama mx^2-ga; saame $2xy$. Kordame veel kord: jagu võib olla $2xy$, aga ainult siis, kui $2xy$ ja jagaja kasvatis on jagatav. Et selle üle selgusele jõuda, rakendame tehte, nagu allpool kujutud, ja kasvatame $2xy$ jagajaga ning kirjutame saadavad kasvatised jagatava liigete alla.

$$\begin{array}{l|l} 2mx^3y - 2nx^2y + 2pxy & mx^2 - nx + p \\ 2mx^3y - 2nx^2y + 2pxy & 2xy \end{array}$$

Et kasvatis tõesti on jagatavaga ühtlane, siis on jagu $2xy$.

Näitus:

$$\begin{array}{l|l} 9x^3y^2 - 36x^2y^2 & x-4 \\ \hline 9x^3y^2 - 36x^2y^2 & 9x^2y^2 \end{array}$$

Kui jagu ei ole monoom, saame jao esimese liikme, nimelt ülemliikme, ikkagi sellel teel, kui jagatava ülemliikme jagame ülemliikmega. Viimane asjaolu järgneb sellest, et kui jagu on polünoom, siis teda korraldades alanevate astete järjes, ainult ülemliige (s. o. esimene liige) jagaja ülemliikmega kasvatades annab jagatava ülemliikme.

Jagame polünoomi:

$6x^3 + x^2 - 29x + 21$ polünoomiga $2x - 3$.

$$\begin{array}{rl} 6x^3 + x^2 - 29x + 21 & \mid 2x-3 \\ \underline{\overset{-}{(+)}\,6x^3\ \overset{+}{(-)}\,9x^2} & \\ \text{esimene vahe } 10x^2 - 29x + 21 & \quad 3x^2 + 5x - 7 \\ \underline{\overset{-}{(+)}10x^2\ \overset{+}{(-)}15x} & \quad \text{jao ülemliige.} \\ \text{teine vahe...} -14x + 21 & \\ \underline{\overset{+}{(-)}14x\ \overset{-}{(+)}21} & \\ \text{kolmas vahe...} 0 & \end{array}$$

Jao ülemliikme leiame, nagu juba seletud, kui $6x^3$ jagame $2x$-ga, mis on $3x^2$. Kasvatame $3x^2$ kõige jagajaga ja kirjutame saadavad liikmed jagatava sarnaste liigete alla. Arvame allakirjutud liikmed jagatavast maha, milleks muudame vähendaja liigete märgid (endised paneme klambritesse) ja ühendame nad ülemistega. Vahe on $10x^2 - 29x + 21$. See vahe ei ole muud midagi, kui järgnevate jao liigete ja jagaja kasvatis, sest jagatav peab jagaja ja kõigi jao liigete kasvatis olema; kuna aga meie juba esimese jao liikmega jagaja oleme kasvatanud, siis peab ülejääk olema ülejäänud jao liigete ja jagaja kasvatis.

Järgmise jao liikme saame, kui vahe ülemliikme, s. o. $10x^2$ jagame jagaja ülemliikme $2x$-ga, sest meie võime ette kujutada, nagu oleks meil nüüd jagada $10x^2 - 29x + 21$ polünoomiga $2x - 3$ ja sellest jagamisest saadava jao ülemliiget oskame endise seletuse järele leida. Uus liige jaos on $5x$.

Kui $5x$ kasvatamisel jagajaga annaks $10x^2 - 29x + 21$, siis oleks jagamine lõppenud; et seda aga mitte ei ole, siis kasvatame $5x$ jagajaga ja kirjutame saadavad liikmed esimese vahe, s. o. $10x^2 - 29x + 21$ sarnaste liigete alla ja arvame nad sellest vahest maha. Ülejääk on $-14x + 21$.

See n. n. teine vahe on järgnevate jao liigete (ehk liikme) ja jagaja kasvatis. Uue jao liikme leidmiseks tuleb nüüd teise vahe ülemliige $-14x$ jagada jagaja ülemliikme $2x$-iga; leiame -7, mida jälle kasvatame jagajaga. Uus kasvatis on aga $-14x + 21$, nii et mahaarvamisel saame, 0 ja jagamine on sellega lõpetud. Jagu on seega: $3x^2 + 5x - 7$.

Teine näitus:

$$
\begin{array}{rl|l}
a^4 & -1 & a-1 \\
\overset{-}{(+)}\,a^4 \overset{+}{(-)}\,a^3 & & a^3+a^2+a+1 \\
\hline
\text{esimene vahe...} + a^3 & -1 & \\
\overset{-}{(+)}\,a^3 \overset{+}{(-)}\,a^2 & & \\
\hline
\text{teine vahe...} + a^2 & -1 & \\
\overset{-}{(+)}\,a^2 \overset{+}{(-)}\,a & & \\
\hline
\text{kolmas vahe...} + a & -1 & \\
\overset{-}{(+)}\,a \overset{+}{(-)}\,1 & & \\
\hline
\text{neljas vahe...} & 0 &
\end{array}
$$

Et jagatavas a^4 järele kohe -1 ilmub, s. t., et vahepealt puuduvad a^3, a^2, a, siis kirjutame a^4 ja -1 üksteisest kaugemale, mis, nagu kohe näeme, tehte rakendamisel on kasulik.

Selle jagamise tehte lahendamisel leiame jao ülemliikme, mille kasvatamisel jagajaga saame $a^4 - a^3$, kuid teisel liikmel ($-a^3$) ei ole jagatavas sarnast liiget. Kirjutame ta sellepärast

a^4 järele, sest kolmas a aste peab ju kohe järgnema a^4-le. Esimene vahe on $a^3 - 1$; jällegi kirjutame a^3 ja -1 üksteisest kaugemale, sest, nagu näeme, ilmub jao teise liikme ja jagaja kasvatamisel liige $-a^2$, mille kirjutame a^3 ja -1 vahele jäetud tühja koha alla. Niisama talitame ka teise vahe juures. Alles kolmandas vahes seisab -1 kohe a järel.

Muidugi võib juhtuda, et meie ei saagi ülejääki 0, vaid et mõne vahe ülemliige ei lase jagaja ülemliikmega jagada, nagu näituses:

$$\begin{array}{r|l} a^2 + 2a + 1 & a^2 - 2 \\ \overline{(+)\, a^2 \quad (-)\, 2} & 1 \\ \hline 2a + 3. & \end{array}$$

Vahe on $2a + 3$; $2a$ ei lase a^2-ga jagada, nii et tervet jagu ei ole olemas.

Niisama võib olla, et vahes ilmub ainult üks liige, kuna aga jagaja kasvatamisel ilmub polünoom, ja seega on ka niisugusel juhusel jagamine ülejäägiga, nagu järgmises näituses:

$$\begin{array}{r|l} 2a^2 - 6a & 2a - 3 \\ \overline{(+)\, 2a^2 \, (-)\, 3a} & a \\ \hline -3a. & \end{array}$$

Näitustes tarvitud harutusi kokku võttes, võime välja öelda järgmise juhtlause:

Et polünoomi polünoomiga jagada, korraldame nad mõne tähe alanevate astete järjes ja jagame jagatava ülemliikme jagaja ülemliikmega; saadud liige on jao ülemliige. Kasvatame viimase jagajaga ja arvame saadava kasvatise maha jagatavast. Vahe ülemliikme jagame jälle jagaja ülemliikmega, mille tagajärjel leiame teise jao liikme, ja kasvatame

uue jao liikme jälle jagajaga ning arvame kasvatise esimesest vahest maha j. n. e. Toimetame nii edasi, kuni vahe on 0, ehk monoom, või kuni vahe ülemliige ei jagane enam jagaja ülemliikmega. Viimasel kahel juhusel ei ole tervet jagu olemas.

Üks tundemärkidest, mis lubab meil järeldada, et ülejäägita jagamine võimatu, on see, et jagaja mõnda tähte sisaldab, mida ei ole jagatavas. Niisamuti on ülejäägita jagamine võimatu, kui jagatava ülemliige ei jagane jagaja ülemliikmega, ehk alamliige alamliikmega.

Et see nii on, järgneb sellest, et jagatava ülemliige on jagaja ja jao ülemliigete kasvatis, kuna jälle jagatava alamliige on jagaja ja jao alamliigete kasvatis.

Kui aga mainitud liikmed ei jagane nimetud liigetega, siis ei või tervet jagu olla.

Tähendus: Mittejaganemise all tuleb seda mõista, et tähelised tegurid ei jaga; koeffitsiendid võivad tervelt ka mitte jaganeda; siis muidugi ilmuvad jaos murrulised koeffitsiendid.

Näitused:

$$a^2 - b^2 \mid \underline{a - b^3}$$

Lihtsustamine on võimata, sest alamliige $-b^2$ ei jagane alamliikmega b^3. Jagu võib kirjutada:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b^3}.$$

2)
$$\begin{array}{l|l} 2x^3y^2 - 3x^2y^3z & 3x^2y^2 - \frac{9}{2}xy^3z \\ \underline{\overset{-}{(+)}2x^3y^2 \overset{+}{(-)} 3x^2y^3z} & \hline \\ 0. & \frac{2}{3}x \end{array}$$

Ehk küll ülem- ja alamliigete koeffitsiendid jagamisel annavad murrud, on jagamine ülejäägita.

Võtame jälle endise näituse:

$$(2a^2 - 6a) : (2a - 3).$$

Sellest jagamisest leidsime jao: a ja vahe: $-3a$. Meie võime tehet kujutada ka ilma ülejäägita, nimelt järgmiselt:

$$(2a^2 - 6a) : (2a - 3) = a - \frac{3a}{2a - 3.}$$

Oleks ülejäägi ees olnud plus, siis oleksime ka murru ette pidanud panema plus.

* § 46.

Seni ajani oleme polünoomide jagamise juures neid ikka korraldanud alanevate astete järjes. Viimane ei ole aga sugugi kohustav, vaid meie võiksime jagamist toimetada ka siis, kui polünoomid korraldame tõusvate astete järjes.

Olgu näituseks jagada:

$21 - 29x + x^2 + 6x^3$ polünoomiga $-3 + 2x$.

Mõlemad polünoomid on korraldud tähe x-i tõusvate astete järjes.

Harutame analoogiliselt endisega:

$$\begin{array}{rl|l}
21 - 29x + & x^2 + 6x^3 & -3 + 2x \\
\overset{-}{(+)}\,21\ \overset{+}{(-)}\,14x & & \hline
 & & -7 + 5x + 3x^2 \\
\hline
 - 15x + & x^2 + 6x^3 & \\
\overset{+}{(-)}\,15x\ \overset{-}{(+)}\,10x^2 & & \\
\hline
 - 9x^2 + & 6x^3 & \\
\overset{+}{(-)}\ 9x^2\ \overset{-}{(+)}\,6x^3 & & \\
\hline
0 & &
\end{array}$$

Jagatava alamliige on jao ja jagaja alamliigete kasvatis, järjelikult leiame jao alamliikme, kui jagatava alamliikme 21 jagame -3-ga; saame -7.

Kui leitud arvuga -7 kasvatame jagajat ja arvame saadud kasvatise jagatavast maha, siis on vahe kõikide teiste jao liigete (peale -7-me) ja jagaja kasvatis.

Vahe on $-15x+x^2+6x^3$.

Selle vahe alamliige $-15x$ peab olema jagaja alamliikme ja järgmise jao liikme kasvatis. Järgmine jao liige on seega: $-15x:-3=+5x$.

Selle uue liikmega talitame endiselt ja leiame lõpuks jao viimase liikme $+3x^2$, mis jagajaga kasvatades ja maha arvates teisest vahest annab kolmanda vahe 0.

Jagu on seega $-7+5x+3x^2$, mis on § 45 saadud vastusega täiesti ühtlane.

Alanevate astete järjes korraldud polünoome on ainult siis kerge jagada, kui jagamine lõpulik. Vastasel korral võime jagamise tehet sagedasti lõpmata pikendada, nagu järgmisest näitusest selgub:

$$
\begin{array}{r|l}
2-a+3a^2-2a^3 & 1-a+a^2 \\
\overset{-}{(+)}\,2\,\overset{+}{(-)}\,2a\,\overset{-}{(+)}\,2a^2 & \hline
\cline{1-1}
a+a^2-2a^3 & 2+a+2a^2-a^3+\ldots \\
\overset{-}{(+)}\,a\,\overset{+}{(-)}\,a^2\,\overset{-}{(+)}\,a^3 & \\
\cline{1-1}
2a^2-3a^3 & \\
\overset{-}{(+)}\,2a^2\,\overset{+}{(-)}\,2a^3\,\overset{-}{(+)}\,2a^4 & \\
\cline{1-1}
-a^3-2a^4 & \\
\overset{+}{(-)}\,a^3\,\overset{-}{(+)}\,a^4\,\overset{+}{(-)}\,a^5 & \\
\cline{1-1}
3a^4+a^5\ldots &
\end{array}
$$

Et jao ülemliige, mida ülemliigete jagamisega leiame, on $-2a^3:a^2=-2a$, kuna aga jaos juba liikmed a^2-ga, a^3-ga

esinevad, ja järgmistes vahedes täht a ikka kõrgemal ja kõrgemal astmel ilmub, siis on lõpulik jagamine võimata. Seda oleks juba siis võinud öelda, kui teine vahe ei olnud 0, sest teises jao liikmes ilmub juba tähe a esimene aste, ja ülemliigete jagamisega leidsime, et jao ülemliige peab olema $-2a$.

§ 47. Erijuhused jagamisel.

Oleme sellest juba kõnelenud (§ 5), et kui:

$$a : b = c, \quad \text{siis} \quad bc = a.$$

Näitame, et ka ümberpöördult:

$$\text{kui } a = bc, \quad \text{siis } \frac{a}{b} = c, \quad \text{ehk } \frac{a}{c} = b.$$

Mõlemat ühtivuse:

(1) $$a = bc$$

poolt jagades, esiteks b-ga, ja teiseks c-ga, leiame tõesti:

(2) $$\frac{a}{b} = c;$$

(3) $$\frac{a}{c} = b.$$

Ühtivuste (1), (2) ja (3) põhjal võime kasvatamise formulitest saada jagamise formulid, millede järele otsekohe, ilma jagamata, teatud polünoomide jagamisel jao võime leida. Need ühtivused näitavad, et kui mingi hulk on kahe teise hulga kasvatis (üht. 1), siis esimene hulk mõlema teise hulgaga on jagatav (üht. 2 ja 3).

Näitused. Et:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\text{siis: } (a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b.$$

Niisamati väljendame:

formulist: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

formuli: $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = a - b$;

formulist: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

formuli: $(a^2-b^2):(a+b)=a-b$;

formulist: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

formuli: $(a^2-b^2):(a-b)=a+b$.

* § 42-es leidsime, et:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

ja $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,

milledest järgneb:

$$(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2,$$

$$(a^3+b^3):(a+b)=a^2-ab+b^2$$ j. n. e.*

§ 48. Kõige suurem ühine jagaja.

Aritmeetikast oleme tuttavad antud täisarvu jagaja mõistega, mille all kujutame iga täisarvu, millega antud arv on jagatav. Ka algebras peame algebralise avalduse jagajatega tegemist tegema. Meie kõneleme edaspidi ainult tervete koeffitsientidega monoomide ja polünoomide jagajaist.

Kui vaatlesime täisarve aritmeetikas, siis leidsime, et iga arv on jagatav iseenesega ja 1-ga. Üldistud arve algebrast juurde võttes, võime öelda, et arv 5 on jagatav $+5$, $+1$, -5, -1-ga, ja arv a on jagatav $+a$, $+1$, $-a$, -1-ga.

Niisama on selge, et arv $2ax$ jagatav on arvudega $+2ax$, $+1$, $-2ax$, -1. Et algebras iga hulk alati siis, kui ta $+a$-ga jagatav, ka $-a$-ga on jagatav, sellepärast loeme edaspidi kõik arvu jagajad ülesloetuks, kui öelnud oleme, missugused positiivsed jagajad on arvul.

Edaspidi ütleme siis, et arvul 6 on jagajad, peale ühe ja iseenese, 2 ja 3 ja jätame ütlemata -2, -3, ehk et hulgal: ax on jagajad, peale 1 ja ax, veel a, x ja jätame ütlemata, et ax-i jagajaiks on ka $-a$, $-x$, $-ax$, -1.

Peale nimetud jagajate on hulgal ax veel lõpmata palju jagajaid, näit.: $2a$, $3x$, $\frac{1}{2}ax$ j. n. e., sest $ax : 2a = \frac{1}{2}x$; $ax : \frac{1}{2}ax = 2$.

Kuid niisuguseid jagajaid ei pea meie edaspidi mitte silmas, sest nad sisaldavad murde, ehk on jagu ise murruline.

Võtame nüüd kaks tervete koeffitsientidega monoomi, olgu $2ab$ ja $6ac$. Selle järele, mis jagamisest kõneldud, võime öelda, et $2ab$ on jagatav järgmiste hulkadega: 1, 2, a, b, $2a$, $2b$, ab, $2ab$.

$6ac$ on aga jagatav hulkadega: 1, 2, 3, 6, a, c, $2a$, $2c$, $3a$, $3c$, $6a$, $6c$, ac, $2ac$, $3ac$, $6ac$.

Viimaseid kahte arvrida üksteisega võrreldes, leiame, et hulkadel $2ab$ ja $6ac$ on ühiseid jagajaid, s. t. hulke, millega mõlemad monoomid $2ab$ ja $6ac$ on jagatavad. Niisugused hulgad on 1, 2, a, $2a$.

Viimaste hulgast nimetame $2a$ monoomide $2ab$ ja $6ac$ kõige suuremaks ühiseks jagajaks, sest $2a$ ilmub teiste ühiste jagajate hulgas kõige suurema koeffitsiendi ja kõige rohkema arvu täheliste teguritega.

Eelmisest on selge, et $10abcx$ ja $15acx$ kõige suurem ühine jagaja on $5acx$.

Kui monoomides esinevad astmed, peame võtma kõige suuremasse ühisesse jagajasse selle astme kõige väiksema näitajaga, millega ta monoomides esineb, sest ainult siis on kõik monoomid tekitud avaldusega jagatavad.

Näitus. Monoomide $6a^3b^2c^5$, $12a^2b^2c^3$, $8ab^3c^2$ kõige suurem ühine jagaja on $2ab^2c^2$.

* Polünoomide kõige suurema ühise jagaja leidmiseks peame antud polünoomid algteguriteks lahutama ja nende teguritega niisama talitama, kui monoomides üksikute tähtedega.

Näitus: Leida $a^2 - 2ab + b^2$ ja $a^3 - b^3$ kõige suurem ühine jagaja.

Lahutades antud polünoomid teguriteks, leiame:

$(a^2 - 2ab + b^2) = (a - b)^2$, $\quad a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$.

Esimest polünoomi tekitavad tegurid on: $a-b$ ja $a-b$, teist polünoomi: $a-b$ ja a^2+ab+b^2.

Ühiseid tegurid on ainult üks: $a-b$ ja see ongi antud polünoomide kõige suurem ühine jagaja.

2) $10x^2-40y^2$; $5x^2+10xy+20y^2$

$$10x^2-40y^2=10(x^2-4y^2)=10(x+2y)(x-2y)$$

$$5x^2+20xy+20y^2=5(x^2+4xy+4y^2)=5(x+2y)^2.$$

Et esimese polünoomi tegurid on 2, 5, $x+2y$ ja $x-2y$ ja teise polünoomi tegurid: 5, $x+2y$ ja $x+2y$, siis on nende polünoomide kõige suurem ühine jagaja

$$5(x+2y).*$$

Võib muidugi juhtuda, et antud monoomidel ei olegi ühiseid jagajaid, peale 1, nagu näit.:

$$3a^2bx,\ 5c^3,\ 4dy.$$

Niisugused monoomid on ühistegurita monoomid.

* Polünoomide $a^2-2ab+b^2$ ja $4a+2b-6c$ kõige suurem ühine jagaja on 1, sest: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, $4a+2b-6c=2(2a+b-3c)$, ja neil hulkadel ei ole ühiseid jagajaid. *

§ 49. Kõige vähem ühine mitmekordne.

Võtame hulga $3a^2x$; selle hulga jaoks võib lugemata arvu tervete koeffitsientidega avaldusi kirjutada, mis kõik hulgaga $3a^2x$ on jagatavad, nagu näit.:

$$3a^2x,\ 12a^2x^2,\ 15a^2xy^3 \text{ j. n. e.}$$

Kõiki neid hulke, mis antud hulgaga jagatavad, nimetakse antud hulga mitmekordseteks. On aga antud kaks ehk rohkem avaldust, siis võib ka nende jaoks leida lõpmata palju avaldusi, mis jagatavad on antud avaldustega.

Olgu antud avaldused:

$$2ab^2,\ ca^2b \text{ ja } 3ca^2;$$

nende avaldustega on jagatavad näituseks järgmised avaldused:

$$6a^2b^2c,\ 12a^2b^2c^2,\ 18a^2b^3c^3,\ 24a^4b^4c^2 \text{ j. n. e.}$$

Kuid üks viimaste avalduste hulgast on kõige vähema koeffitsiendiga ja sisaldab kõige vähem tähelisi tegurid kõige väiksemate näitajatega; see avaldus on $6a^2b^2c$. Meie nimetame seda avaldust antud avalduste kõige vähemaks ühiseks mitmekordseks.

Otsime avalduste $3a^2bx$, $4a^3b^2$, $8abx^2$ kõige vähema ühise mitmekordse, harutades järgmiselt: otsitava avalduse koeffitsient peab olema antud avalduste koeffitsientide 3, 4 ja 8 kõige väiksem ühine mitmekordne, seega 24.

Peale selle peab ta sisaldama tähti: a, b, x niisugusel astmel, et nad oleksid jagatavad a^3, b^2, x^2-ga, s. o. antud avaldustes ettetulevate kõige suuremate astetega. Selleks peame a, b, x-i kõige vähemalt näitajatega 3, 2 ja 2 võtma. Kuid ka suuremate näitajatega ei või neid tegurid võtta, sest meie otsime kõige vähemat ühist mitmekordset. Sellepärast on otsitav avaldus $24a^3b^2x^2$. Järjelikult võime öelda, et tervete koeffitsientidega monoomide kõige vähema ühise mitmekordse leidmiseks peame otsima antud monoomide koeffitsientide kõige vähema ühise mitmekordse ja kasvatama selle arvu monoomides ettetulevate tähtedega, iga tähte kõige suurema näitajaga võttes, millega ta antud monoomides ilmub.

Näitused:

1) Monoomide $8x^3y^2$, $12x^2y$ ja $15y^3$ kõige väiksem ühine mitmekordne on $120x^3y^3$.

2) Monoomide $3a^2b^3$ ja $4c$ kõige väiksem ühine mitmekordne on $12a^2b^3c$.

3) Monoomide $12m^4n^5$, $6mn^2$ ja $3m^2n^2$ kõige väiksem ühine mitmekordne on $12m^4n^5$.

* Kui antud avaldused on polünoomid, siis peame nende kõige väiksema ühise mitmekordse leidmiseks teadma nende

polünoomide tegurid. Järjelikult tulevad siis polünoomid esiteks lahutada algteguriteks.

Siis tuleb nende tegurite peale vaadata, kui üksikute tähtede peale, ja endist viisi kõige vähem ühine mitmekordne leida.

Näitus. Otsida polünoomide $4a^2 - 36$ ja $6a^3 - 162$ kõige vähem ühine mitmekordne.

Lahutame polünoomid algteguriteks:

$$4a^2 - 36 = 4(a^2 - 9) = 4(a + 3)(a - 3)$$

$$6a^3 - 162 = 6(a^3 - 27) = 6(a^3 - 3^3) = 6(a - 3)(a^2 + 3a + 9).$$

Esimene polünoom laguneb teguriteks 2, 2, $a + 3$, $a - 3$, teine aga 2, 3, $a - 3$, $a^2 + 3a + 9$.

Kõige väiksem ühine jagatav on: $12(a + 3)(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$.

Tähendus: Muidugi võime ka $-12(a + 3)(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$, ehk kui miinuse avalduse eest ära kaotame: $12(a + 3)(3 - a)(a^2 + 3a + 9)$ kõige väiksemaks ühiseks mitmekordseks võtta, sest ta jaganeb ka antud polünoomidega ja sisaldab niisama palju tegurid.*

II.

Murrud.

§ 50.

Ülalpool oleme seletanud, et arvude a ja b jagu võib kujutada järgmiselt: $a:b$ ehk $\frac{a}{b}$.

Avaldust, mis kujutab kahe ilmutamata arvu jagu ja kirjutud on aritmeetilise murru viisi, nimetakse algebraliseks murruks.

Murrus $\frac{a}{b}$ nimetakse a lugejaks ja b nimetajaks. Algebralise murru tähendus on siis seesama, mis aritmeetilisel murrul: ta on jagu. Vahe, mis algebraliste ja aritmeetiliste murdude vahel, on see, et aritmeetilistel murrudel lugeja ja nimetaja on alati positiivsed täisarvud, kuna aga algebralistel murdudel lugeja ja nimetaja kujutavad igasuguseid arve: täis- ehk murdarve, positiivseid ehk negatiivseid arve.

Nii on $\frac{a}{b}$ arvsuurus, kui $a=4$, $b=-2$:

$$\frac{4}{-2}=-2.$$

Kui aga $a=-\frac{2}{3}$, $b=+3$, siis omab murd kuju:

$$\frac{-\frac{2}{3}}{+3}.$$

Edaspidi õpime niisuguseid murde lihtsustama.

Algebras võivad murru lugejaks ja nimetajaks olla ka algebralised avaldused, nagu näituseks:

$$\frac{2a-3b^2}{a^2-ab+b^2};\quad \frac{3x}{x(x+y)}\text{ j. n. e.,}$$

kus juures iga murdu ikkagi tuleb mõista kui jagu (lugeja jagamisest nimetajaga).

Algebralise murru arvsuuruse väljaarvamiseks on vaja välja arvata esite lugeja ja siis nimetaja arvsuurus ja esimene arv jagada teisega.

Kui algebralise murru $\frac{a}{b}$ liikmed vahetada, siis saame $\frac{b}{a}$, mida nimetakse vastupidiseks murruks murrule $\frac{a}{b}$.

§ 51. Murru liigete märkidest.

Jagamisseaduste järele teame, et

$$(+a):(-b)=-\frac{a}{b},\text{ ja }(-a):(+b)=-\frac{a}{b}$$

ehk, nende ühtivuste pahemaid pooli murru kujul kirjutades, leiame:

$$\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b};\ \frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b}.$$

Viimastest ühtivustest järgneb: kui murru ühe liikme ees seisab miinus, siis võib selle miinuse panna murru ette.

Näitused:

1) $\frac{4}{-a}=-\frac{4}{a}$;

2) $\frac{-a-b}{c+d}=\frac{-(a+b)}{c+d}=-\frac{a+b}{c+d}$;

3) $\frac{x-y}{k}=\frac{-(y-x)}{k}=-\frac{y-x}{k}$.

Oletame nüüd, et mõlemad murru liikmed on negatiivsed, näit. murd:

$$\frac{-a}{-b}.$$

Tõestame, et ka siis võib miinuse ühe murru liikme eest murru ette kirjutada, nii et

$$\frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b}.$$

Meie teame (§ 34, ühtivus 2), et

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Kasvatame selle ühtivuse pooled —1-ga:

$$-1 \cdot \frac{a}{-b} = -1 \cdot \left(-\frac{a}{b}\right),$$

ehk

(1) $$-\frac{a}{-b} = +\frac{a}{b}.$$

Peale selle teame, et:

(2) $$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}.$$

Ühtivuste (1) ja (2) pahemaid pooli ühtlustades, leiame:

$$\frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b}.$$

Niisamati võime tõestada, et

$$\frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b}.$$

Juhtlause: murru liikme eest võib miinuse panna alati murru ette.

Ka vastupidiselt on õige: murru eest võib miinuse asendada kas lugeja ehk nimetaja ette, sest ühtivusi

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

ja

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

paremalt poolt pahemale lugedes leiame:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$$

ja

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

§ 52. Murru peaomadus.

Kasvatame algebralise murru $\frac{a}{b}$ lugejat ja nimetajat ühe ja sellesama arvuga m, mille juures ainuke tingimine on, et $m \neq 0$, saame murru $\frac{am}{bm}$.

Tõestame nüüd, et

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Tõestamiseks kasvatame oletud eelmise ühtivuse pooli ühe ja sellesama arvuga. Kui mõlemad pooled peale kasvatamist annavad ühesuurused avaldused, siis peavad ka avaldused $\frac{a}{b}$ ja $\frac{am}{bm}$ olema ühesuurused. Teguriks, millega $\frac{a}{b}$ ja $\frac{am}{bm}$ kasvatame, võtame bm.

Kasvatame $\frac{a}{b}$ hulgaga bm. Ühendades tegurid $\frac{a}{b}$ ja b, kirjutame kasvatise ümber järgmiselt:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) \cdot m.$$

Kuid silmas pidades ühtivust (3) § 23-as leiame, et:

$$\frac{a}{b} \cdot b = a,$$

ja seega

$$\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) \cdot m = am.$$

Kasvatame nüüd oletud ühtivuse parema poole bm-ga. Ühtivuse (3) põhjal § 23-as järeldame:

$$\frac{am}{bm} \cdot bm = am.$$

Seega võime kinnitada, et:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm},$$

mida vaja oligi tõestada.

* Kui aga $m = 0$, siis ei ole $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, sest $\frac{a.0}{b.0} =$ määramatu arv (§ 37, 2), kuna aga $\frac{a}{b}$, kus a ja b on kindlad arvud, on kindla suurusega arv. *

Meie võime murru peaomadust sõnuda järgmiselt: murru lugeja ja nimetaja kasvatamisega ühe ja sellesama arvuga, mis ei ole 0, ei muutu murru suurus mitte.

Järeldus:

Antud on murrud 1) $\frac{a}{b}$, 2) $\frac{-a}{-b}$, 3) $\frac{-a}{b}$, 4) $\frac{+a}{-b}$.

Eelmiste murdude liikmeid kasvatame -1-ga:

1) $\frac{a}{b} = \frac{-1.a}{-1.b} = \frac{-a}{-b}$;

2) $\frac{-a}{-b} = \frac{-a.-1}{-b.-1} = \frac{+a}{+b}$;

3) $\frac{-a}{b} = \frac{-a.-1}{b.-1} = \frac{+a}{-b}$;

4) $\frac{+a}{-b} = \frac{+a.-1}{-b.-1} = \frac{-a}{+b}$.

Neist ühtivustest näeme, et murru liigete märke võime ühekorraga vastupidiseks muuta.

Näitus:

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{-(a-b)}{-(c-d)} = \frac{b-a}{d-c}.$$

Murru peaomadus lubab meid lihtsustada niisuguseid murde, kus lugejas ja nimetajas ilmuvad murdarvud.

1) Lihtsustame murru $\frac{\frac{3}{4}a}{\frac{5}{6}c}$. Et lugejat $\frac{3}{4}a$ vabastada murrust, peame lugeja kasvatama kas 4, 8, 12, . . . s. t arvu 4 mitmekordsega.

Niisama peaksime nimetaja $\frac{5}{6}c$ murrust vabastamise otstarbel kasvatama teda 6, 12, 18, . . . s. t. arvu 6 mitmekordsega. Kuid, et murru suurus ei muutuks, peame mõle-

maid murru liikmeid kasvatama ühe ja sellesama arvuga, ja nimelt niisugusega, mis kaotab lugejast ja nimetajast murrud.

Kõige väiksem niisugune arv on arvude 4 ja 6 kõige väiksem ühine mitmekordne, s. o. 12.

Kasvatame murru $\frac{\frac{3}{4}a}{\frac{5}{6}c}$ liikmed 12-ga:

$$\frac{\frac{3}{4}a \cdot 12}{\frac{5}{6}c \cdot 12} = \frac{9a}{10c}.$$

2) $$\frac{5b}{\frac{2}{3}c}.$$

Kasvatame murru liikmed kolmega:

$$\frac{5b}{\frac{2}{3}c} = \frac{5b \cdot 3}{\frac{2}{3}c \cdot 3} = \frac{15b}{2c}.$$

3) $$\frac{\frac{1}{2}a - b}{a + b}.$$

Kasvatame murru liikmed 2-ga

$$\frac{\frac{1}{2}a - b}{a + b} = \frac{2\left(\frac{1}{2}a - b\right)}{2\,(a + b)} = \frac{a - 2b}{2a + 2b}$$

4) $$\frac{\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}c}{c - \frac{1}{2}d}.$$

Kasvatame lugeja ja nimetaja neis ettetulevate murdude $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ nimetajate kõige v. ühise mitmekordsega. Et 3, 4 ja 2 k. v. ü. mitmekordne on 12, siis peame antud murru liikmeid kasvatama 12-ga

$$\frac{\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}c}{c - \frac{1}{2}d} = \frac{12\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}c\right)}{12\,(c - \frac{1}{2}d)} = \frac{8a - 3c}{12c - 6d}.$$

§ 53. Murdude koondamine.

Ühtivusest $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ järgneb:

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

mida võime sõnadega nii avaldada: murru liikmeid võime ühe ja sellesama arvuga, mis ei ole null, jagada, ilma et murru suurus selle läbi muutuks. Niisugust murru lihtsustamist lugeja ja nimetaja jagamisega ühe ja sama arvuga nimetakse murru koondamiseks. Arv, millega murdu koondakse, kirjutakse harilikult murru kõrvale üles:

Näitused.

1) Murru $\frac{4ab}{3ac}$ lugeja ja nimetaja on jagatavad a-ga, sellepärast koondame murru selle arvuga:

$$\frac{4ab}{3ac} \overset{a}{=} \frac{4b}{3c}$$

2) $$\frac{24x^2y^3c}{15axy^4c} \overset{3xy^3c}{=} \frac{8x}{5ay}$$

3) $$\frac{2m^2n^3}{6m^4n^5} \overset{2m^2n^3}{=} \frac{1}{3m^2n^2}$$

4) $$\frac{a^3c}{ac} \overset{ac}{=} \frac{a^2}{1} = a^2.$$

* Kui murru lugeja ja nimetaja on polünoomid, siis peab murru koondamiseks lugeja ja nimetaja lahutama algteguriteks ja murdu koondama ühiste teguritega.

Näitused:

1) $$\frac{ab-b}{ab+b} = \frac{b\,(a-1)}{b\,(a+1)} \overset{b}{=} \frac{a-1}{a+1}.$$

2) $$\frac{8ax+20x}{4a^2+20a+25}=\frac{4x\overbrace{(2a+5)}^{2a+5}}{(2a+5)^2}=\frac{4x}{2a+5}.$$

3) $$\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}=\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}=$$
$$=\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2}.$$ *

Tähendus: Õppijate tähelpanu juhime eksituse peale, mida alguses sagedasti tehakse.

Selgituseks võtame murru:

$$\frac{a+m}{b+m}.$$

Algajad koondavad mõnikord selle murru arvu m-ga ja saavad resultaadi: $\frac{a+1}{b+1}$, või jälle $\frac{a}{b}$.

Järelkatse arvsuurusega näitab kohe, et $\frac{a+m}{b+m}$ ei ole $\frac{a}{b}$.

Olgu: $a=2$, $m=3$, $b=7$, siis

$$\frac{a+m}{b+m}=\frac{2+3}{7+3}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2};$$

kuid

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{7},$$

ja sest selgub kohe, et viga peab olema tehtud meie murru teisendamises. Viga on nimelt selles, et ei ole jagatud mitte murru lugejat ja nimetajat m-ga — need hulgad ei jagagi m-ga — vaid jagatud on ainult üks kokkuarvatav lugejast ja nimetajast tähega m, ehk jälle arvatud maha lugejast ja nimetajast m.

Sellesama põhjuse pärast ei või koondada murdu $\frac{a+bm}{c+dm}$ m-ga, sest et lugeja ega nimetaja kumbki ei ole jagatavad tähega m.

Analoogiline aritmeetilise murru valesti koondamine oleks, kui saaksime:

$$\frac{16}{26}=\frac{1(6)}{2(6)}=\frac{1}{2},$$

millest kohe näha, et niisugune ühtivus on võimatu.

Kui mingi avalduse teisendamisel ilmub lõpuliku resultaadina murd, siis tuleb võimalikul korral seda murdu koondada, millega märksa lihtsustame avaldust.

* Mispärast murru liikmeid ei või jagada nulliga, selgub sellest, et nulliga jagamine (§ 37) muudab lugeja ja nimetaja lõpmatuseks, nii et murd omab kuju $\frac{\infty}{\infty}$, mis aga mitte ei või enam olla koondatava murruga ühesuurune. *

§ 54. Murdude ühenimelisteks tegemine.

Murru lugeja ja nimetaja kasvatamisega ühe ja sama arvuga võime murru kuju muuta, ilma et murru suurus muutuks. Mainitud omaduse põhjal võime antud murdude kuju nii muuta, et neil kõigil oleksid ühesugused nimetajad, missugust tegevust nimetakse murdude ühenimelisteks tegemiseks.

Võtame murrud:

$$\frac{2a}{3b^2c^3},\quad \frac{m}{2bc^2d},\quad \frac{n}{4b^3d^2}.$$

Kui nende murdude kuju tahame muuta, siis peame kasvatama iga murru liikmeid ühe ja sellesama arvuga.

Et meie aga murde ühenimelisteks tahame teha, siis on loomulik, et ühe murru liikmeid ühe, teise murru liikmeid teise j. n. e. arvuga tuleb kasvatada.

Nimetame hulka, millega kasvatame teatud murru liikmeid, selle murru täiendusteguriks. Olgu esimese murru täiendustegur x, teisel y, kolmandal z.

Et murdude nimetajad muutuvad ühesuurusteks, siis leiame järgmised ühtivused, murdude nimetajaid vastavalt x, y ja z-ga kasvatades:

$$3b^2c^3 \,.\, x = 2bc^2d \,.\, y = 4b^3d^2 \,.\, z.$$

Meie teame aga, et kahe teguri kasvatis on jagatav kummagi teguriga (§ 56); see tähendab, et kasvatis $(3b^2c^3)z$ on jagatav $3b^2c^3$-ga, kasvatis $(2bc^2d)y$ on jagatav $2bc^2d$-ga ja kasvatis $(4b^3d^2)z$ on jagatav $4b^3d^2$-ga.

Mainitud kasvatised on aga ühesuurused, ja sellepärast peab ühine nimetaja jaganema:

$$3b^2c^3,\ 2bc^2d \text{ ja } 4b^3d^2\text{-ga},$$

s. t. iga murru nimetajaga. Niisuguseid hulki on aga lugemata palju; loomulik on, et nende hulgast meie otsime kõige väiksema. Sellega nõuab siis ülesanne murdude nimetajate kõige väiksema ühise mitmekordse leidmist (§ 49).

See avaldus on antud murdude jaoks $12b^3c^3d^2$.

Endiste nimetajate asemele peab siis astuma $12b^3c^3d^2$. Missuguste avaldustega aga tulevad murdude liikmed kasvatada, et nimetajaiks peale kasvatamise oleks $12b^3c^3d^2$?

Võtame esimese murru; tema nimetaja $3b^2c^3$ peab mingi avalduse x-ga kasvatades muutuma avalduseks: $12b^3c^3d^2$.

Et üks tegur ($3b^2c^3$) ja kasvatis ($12b^3c^3d^2$) on teada, siis leiame teise teguri x, kui jagame $12b^3c^3d^2$ esimese murru nimetajaga:

$$12b^3c^3d^2 : 3b^2c^3 = 4bd^2.$$

Esimese murru täiendustegur $x = 4bd^2$. Teise murru täiendustegur $y = 6b^2cd$, sest

$$12b^3c^3d^2 : 2bc^2d = 6b^2cd.$$

Kolmanda murru täiendustegur on $3c^3$.

Kasvatame nüüd iga murru liikmed tema täiendusteguriga, mille järele ülesanne on lahendud.

$$\frac{2a}{3b^2c^3} = \frac{2a \cdot 4bd^2}{3b^2c^3 \cdot 4bd^2} = \frac{8abd^2}{12b^3c^3d^2};$$

$$\frac{m}{2bc^2d} = \frac{m \cdot 6b^2cd}{2bc^2d \cdot 6b^2cd} = \frac{6b^2cdm}{12b^3c^3d^2};$$

$$\frac{n}{4b^3d^2} = \frac{n \cdot 3c^3}{4b^3d^2 \cdot 3c^3} = \frac{3c^3n}{12b^3c^3d^2}.$$

Juhtlause:

Murdude ühenimelisteks tegemiseks otsitakse antud murdude nimetajate k. v. ü. ~~mitmekordne~~ ja jagatakse viimane murdude nimetajatega.

Saadud arvudega, n n. täiendusteguritega, kasvatakse vastavate murdude liikmed.

Muidugi mõista, et siis, kui ühine nimetaja kord õieti leitud, vaja pole lõpuks enam iga murru lugejat ja nimetajat täiendusteguriga kasvatada, vaid ainult lugejat, kuna nimetajaks kohe ühise nimetaja võib panna.

Näitus:

1) $\frac{1}{12x^3y^2}, \quad \frac{a}{6x^4}.$

Ühine nimetaja on $12x^4y^2$; täiendustegurid x ja $2y^2$, mis mõnikord ka murru äärde üles kirjutakse.

$$\frac{1}{12x^3y^2} \overset{x}{=} \frac{x}{12x^4y^2};$$

$$\frac{a}{6x^4} \overset{2y^2}{=} \frac{2ay^2}{12x^4y^2}.$$

2) $\overset{y}{\frac{a}{x^2y^2}}, \quad \overset{xy}{\frac{b}{xy^2}}, \quad \overset{1}{\frac{c}{x^2y^3}}.$

Ühine nimetaja: x^2y^3.

Leiame ühenimelised murrud:

$$\frac{ay}{x^2y^3}, \quad \frac{bxy}{x^2y^3}, \quad \frac{c}{x^2y^3}.$$

* Kui murru nimetajad on polünoomid, siis peame ühise nimetaja leidmiseks lahutama nimetajad algteguriteks ja siis antud juhtlause järele talitama.

Näitus:

$$\frac{1}{x^2+3x+2}, \quad \frac{1}{x^2-x-2}.$$

Lahutame nimetajad algteguriteks:

$$x^2+3x+2 = x^2+2x+x+2 = x(x+2)+(x+2) =$$
$$= (x+2)(x+1).$$

$$x^2-x-2 = x^2-2x+x-2 = x(x-2)+(x-2) =$$
$$= (x-2)(x+1).$$

Ühine nimetaja on: $(x+1)(x+2)(x-2)$.

Täiendustegurid on: esimese murru jaoks: $x-2$, teise murru jaoks: $x+2$.

Leiame:

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{\overbrace{(x-2)}}{(x+2)(x+1)(x-2)};$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{\overbrace{(x+2)}}{(x+2)(x-2)(x+1)}.$$

2) $\frac{A}{(x-a)(x-b)}$; $\frac{B}{(a-x)(x-c)}$; $\frac{C}{(b-x)(c-x)}$.

Antud murdude nimetajaid vaadeldes, näeme, et teise murru nimetaja tegur $a-x$ erineb ainult märgiga esimese murru nimetaja tegurist $x-a$.

Et need tegurid oleksid täitsa ühed, muudame murru ja nimetaja ees märgid (§ 60), saame $-\frac{B}{-(a-x)(x-c)}$ ja paneme kõige nimetaja eest märgi miinuse esimese teguri $a-x$ märgiks, mille järele murd teiseneb murruks:

$$-\frac{B}{(x-a)(x-c)}.$$

Kolmanda murru nimetajat tähele pannes leiame, et tema nimetaja tegurid erinevad mõlemad märkidega esimese murru nimetaja ja teise teisendud kujul võetud murru nimetaja teguritest.

Kuid § 32 järele võime alati kasvatises kahe teguri märgid vastupidisteks muuta, ja selle põhjal võime öelda, et

$$\frac{C}{(b-x)(c-x)} = \frac{C}{(x-b)(x-c)}.$$

Antud murdude asemel ilmuvad nüüd endistega ühesuurused murrud:

$$\frac{A}{(x-a)(x-b)}, \quad -\frac{B}{(x-a)(x-c)}, \quad \frac{C}{(x-b)(x-c)},$$

millede ühine nimetaja on, nagu kerge näha, $(x-a)(x-b)(x-c)$.

TARTU ÜLIKOOL
DIDAKTILINE SEMINAAR

Täiendustegurid: I murrul $x-c$, II murrul $x-b$, III murrul $x-a$.

Otsitavad ühenimelised murrud on:

$$\frac{A(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)},\quad \frac{B(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)},\quad \frac{C(x-a)}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

§ 55. Murdude kokku- ja mahaarvamine.

§ 26-s nägime, et:

$$(a+b+c):d=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d},$$

ehk:

$$\frac{a+b+c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}.$$

Selle ühtivuse poolte järjekorda muutes, leiame ühtivuse:

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{d}.$$

Viimast ühtivust loeme järgmiselt: Ühenimeliste murdude summa on murd, mille lugejaks on murdude lugejate summa ja nimetajaks endine nimetaja.

On teada, et

$$(a-b):c=\frac{a}{c}-\frac{b}{c},$$

millest järgneb, kui seda ühtivust paremalt poolt pahemale loeme:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Sõnadega võime viimast ühtivust lugeda järgmiselt: Kahe ühenimelise murru vahe on murd, mille lugejaks on murdude lugejate vahe ja nimetajaks endine nimetaja.

Murdude kokku- ja mahaarvamise resultaati koondame, kui see võimalik.

Näitused:

1) $$\frac{4a}{3}+\frac{5a}{3}=\frac{4a+5a}{3}=\frac{9a}{3}=3a$$

2) $$\frac{2a-1}{4}+\frac{a+1}{4}=\frac{2a-1+a+1}{4}=\frac{3a}{4}$$

3) $$\frac{2q-6p}{5x}-\frac{4q-5p}{5x}=\frac{(2q-6p)-(4q-5p)}{5x}=$$
$$=\frac{2q-6p-4q+5p}{5x}=\frac{-2q-p}{5x}=-\frac{2q+p}{5x}.$$

Juhime tähelpanu selle peale, et vähendaja murru lugeja liikmed siis, kui esimesest lugejast teise lugeja mahaarvamisel meie klambrid ei tarvita, otsekohe vastupidiste märkidega saaks kirjutud:

$$\frac{x-3y}{5}-\frac{2x-5y}{5}=\frac{x-3y-2x+5y}{5}=\frac{2y-x}{5}.$$

Kui meie ühenimelisi murde oskame kokku ja maha arvata, siis ei ole raske igasuguste murdudega neidsamu tehteid lahendada, kui silmas peame, et mitmenimelisi murde ühenimelisteks võib muuta. Arvame välja summa:

$$\frac{2}{3a}+\frac{1}{6a^2b}+\frac{1}{4b^2}.$$

Tartu Ülikoo
Didakt.-metood

Teeme need murrud ühenimelisteks; murdude ühine nimetaja on $12a^2b^2$; arvame murrud tuntud juhtlause järele kokku:

$$\frac{2}{3a}\overset{4ab^2}{+}\frac{1}{6a^2b}\overset{2b}{+}\frac{1}{4b^2}\overset{3a^2}{=}\frac{8ab^2}{12a^2b^2}+\frac{2b}{12a^2b^2}+\frac{3a^2}{12a^2b^2}=\frac{8ab^2+2b+3a^2}{12a^2b^2}$$

2) $$\frac{5x-4}{6x}\overset{3x}{+}\frac{7x-6}{9x^2}\overset{2}{=}\frac{(5x-4)\,3x+(7x-6)\,.\,2}{18x^2}=$$
$$=\frac{15x^2-12x+14x-12}{18x^2}=\frac{15x^2+2x-12}{18x^2}.$$

Mitmenimeliste murdude mahaarvamine tehakse niisama, selle vahega, et lugejate summa asemel kujutame nende vahe.

Näitus:

$$\frac{a}{3c^2d}\overset{2e}{\smile} - \frac{b}{6ce}\overset{cd}{\smile} = \frac{2ae - bcd}{6c^2de}.$$

Kui murruta avaldusega mingi murd kokku ehk maha arvatakse, siis võime murruta avalduse murruks lugeda, mille nimetaja on 1.

Näitus:

$$x - \overset{a-b}{\smile}\frac{ax}{a-b} = \frac{x(a-b) - ax}{a-b} = \frac{xa - xb - ax}{a-b} = -\frac{xb}{a-b}.$$

* Niisamati toimetame, kui murdude nimetajad kujutavad polünoome, ühise nimetaja leidmiseks nimetajaid, kui võimalik, algteguriteks lahutades.

Näitus:

$$\frac{x}{x+y-z} + \frac{xy}{(x+y)^2 - z^2};$$

teise murru nimetaja lahutame algteguriteks valemi $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ järele:

$$(x+y)^2 - z^2 = (x+y+z)(x+y-z).$$

Selgub, et murdude ühine nimetaja on $(x+y+z)(x+y-z)$.

Esimese murru täiendustegur on $x+y+z$, teise murru täiendustegur on 1.

$$\frac{x}{x+y-z}\overset{x+y+z}{\smile} + \frac{xy}{(x+y+z)(x+y-z)} = \frac{x(x+y+z)+xy}{(x+y+z)(x+y-z)} =$$

$$= \frac{x^2+xy+xz+xy}{(x+y+z)(x+y-z)} = \frac{x^2+2xy+xz}{(x+y+z)(x+y-z)}.$$ *

Kui mitu murdu üksteisega kokku ehk maha arvatakse, siis peab nad kõik ühenimelisteks tegema ja siis lugejad vastavalt kokku ehk maha arvama, selle järele, missugune tehe murruga vaja korda saata.

Arvame sel teel järgmise avalduse välja:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{4}{1-x} - \frac{8}{1+x} + \frac{3x+7}{x^2-1}.$$

Tähendame selle avalduse ära tähega A, et mitte alati pikka avaldust ümber kirjutada.

Kui avalduses A teise murru nimetaja märgi (§ 51) ja kolmanda murru nimetaja liigete järjekorra muudame, siis teiseneb A järgmiseks avalduseks:

$$A = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-1} - \frac{8}{x+1} + \frac{3x+7}{x^2-1}.$$

Ühine nimetaja on $(x+1)(x-1)$, kuna täiendustegurid murdude kõrvale üles on kirjutud.

$$A = \frac{x+1+4(x+1)-8(x-1)+3x+7}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{x+1+4x+4-8x+8+3x+7}{(x+1)(x-1)} = \frac{20}{x^2-1}. *$$

§ 56. Murdude kasvatamine.

Jagame kasvatise ac kasvatise bd-ga.

Selle asemel, et kasvatist ac jagada kasvatisega bd, võime ac jagada enne ühe teguri b, siis veel teise teguri d-ga (§ 23, üht. 4):

(1) $$\frac{ac}{bd} = \left(\frac{ac}{b}\right) : d.$$

Kuid avalduse $\frac{ac}{b}$ väljaarvamisel võime jagada enne arvu a arvuga b ja resultaadi kasvatada c-ga (§ 23, üht. 6):

(2) $$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b} \cdot c.$$

Meie võime ühtivuse (1) nüüd ümber kirjutada järgmiselt, asendades paremale poole avalduse $\frac{ac}{b}$ asemele saadud avalduse $\frac{a}{b} \cdot c$.

$$\frac{ac}{bd} = \left(\frac{a}{b} \cdot c\right) : d.$$

Paremal poolel praegu kirjutud ühtivust on näidatud, et kasvatis $\frac{a}{b} \cdot c$ jagada tuleb arvuga d. Selle asemel võime aga ühe teguri, olgu c, jagada arvuga d ja resultaadi kasvatada $\frac{a}{b}$-ga (§ 23, üht. 6).

Leiame:

$$\frac{ac}{bd} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b},$$

ehk:

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

Leitud ühtivust paremalt poolt pahemale lugedes, väljendame ühtivuse:

(3) $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Sõnadega ühtivust (3) lugedes saaksime juhtlause: Murdude kasvatis on murd, mille lugeja on lugejate kasvatis ja nimetaja nimetajate kasvatis.

Meie võime selle juhtlause laiendada ka enam, kui kahe murru kasvatise peale; aitab, et laiendame selle kolme murru kasvatise jaoks.

Tõestame, et

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}.$$

Leiame, et

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}.$$

Näitused:

1) $$\frac{7}{a} \cdot \frac{5ax}{14by} = \frac{7 \cdot 5ax}{a \cdot 14by} = \frac{35ax}{14aby},$$

ehk peale koondamist $7a$-ga

$$\frac{5x}{2by}$$

2) $$\frac{-2x^2y^3}{a^2b} \cdot \frac{a}{-4xy^2} = \frac{-2ax^2y^3}{-4a^2bxy^2} = \frac{\overbrace{2axy^2}\ xy}{2ab}.$$

* Murdudega, milledel polünoomi kujulised lugejad ja nimetajad, talitame, nagu järgmises näituses selgitud:

$$\frac{x^2+2x-3}{x-5} \cdot \frac{x^2-25}{x+1} = \frac{(x^2+2x-3)\,(x^2-25)}{(x-5)\,(x+1)}.$$

Edasi ei kasvata meie polünoome lugejas ja nimetajas enne mitte ära, vaid katsume selgusele jõuda, kas murd $\frac{(x^2+2x-3)\,(x^2-25)}{(x-5)\,(x+1)}$ on koondatav.

Selleks lahutame üksikud tegurid algteguriteks, kui nad seda juba ei ole. Käesolevas näituses annavad mõlemad lugeja tegurid lahutada:

$$x^2+2x-3 = x^2+3x-x-3 = x(x+3)-(x+3) =$$
$$= (x-1)(x+3);$$
$$x^2-25 = x^2-5^2 = (x+5)(x-5).$$

Murd omab kuju:

$$\frac{(x-1)(x+3)(x+5)(x-5)}{(x-5)(x+1)},$$

mis peale koondamist muutub murruks

$$\frac{(x+3)(x+5)(x-1)}{x+1}.$$

Nüüd võime, kui soovime, lugejas polünoomid $x+3$, $x+5$ ja $x-1$ kasvatada; meie võime nad aga ka kasvatamata jätta, sest lihtsamaks kasvatamise täidesaatmine murdu ei teeks. *

Kui tähele paneme, et murruta hulka alati murruna võib kujutada, mille nimetaja on 1, siis võib antud juhtlause järele ka terveid hulke murdudega kasvatada, näit.

$$1)\quad 4a \cdot \frac{x}{2a^2} = \frac{4a}{1} \cdot \frac{x}{2a^2} = \frac{\overset{2a}{4ax}}{2a^2} = \frac{2x}{a};$$

$$2)\quad 3(p-q) \cdot \frac{5a}{(p-q)^2} = \frac{15a(p-q)}{(p-q)^2} = \frac{15a}{p-q}.$$

§ 57. Murdude jagamine.

Murdude jagamise tehte määrame järgmiselt: jagamine on tehe, millega otsitakse arvu, mis jagajaga kasvatades annaks jagatava.

Tähendame arvu, mis saadakse murru $\frac{a}{b}$ jagamisel murruga $\frac{c}{d}$, tähega x:

(1) $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x.$$

Jagamise tehte äramääramise põhjal saame:

$$\frac{c}{d} \cdot x = \frac{a}{b};$$

et aga:

$$\frac{c}{d} \cdot x = \frac{cx}{d}$$

(§ 56 lõpp), siis:

$$\frac{cx}{d} = \frac{a}{b}.$$

Kasvatades selle ühtivuse pooli murruga $\frac{d}{c}$ ja koondades, leiame:

$$x = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

Kuid ühtivusest (1) saame:

$$x = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}.$$

Kahe viimase ühtivuse paremaid pooli = märgiga sidudes, leiame:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Sõnadega seda ühtivust lugedes, saame juhtlause:

Murdude jagamisel tuleb jagatav murd kasvatada vastupidise jagaja murruga.

Näitused:

1) $\frac{a^2}{b} : \frac{c}{b} = \frac{a^2 \overset{\smile}{b}}{bc} = \frac{a^2}{c}$,

2) $\frac{4pq}{3r^3} : \frac{2q^2}{r^2} = \frac{4pq \cdot r^2}{3r^3 \cdot \overset{\smile}{2q^2}} = \frac{2p}{3rq}$.

Seda juhtlauset võib ka siis tarvitada, kui jagatav ehk jagaja on täisarvud; tuleb ainult silmas pidada, et täisarv on murd, mille nimetaja on 1.

Näitused:

1) $a : \frac{bc}{a} = \frac{a \cdot a}{bc} = \frac{a^2}{bc}$;

2) $\frac{p}{qx} : x = \frac{p}{qx \cdot x} = \frac{p}{qx^2}$.

Jagame 1 murruga $\frac{a}{b}$:

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{1 \cdot b}{a} = \frac{b}{a}.$$

Meie näeme, et 1 jagamisel murruga $\frac{a}{b}$ leiame vastupidise murru antule.

* Jagame $\frac{a-b}{a^2-2ab-3b^2}$ murruga $\frac{a^2+2ab-3b^2}{a+b}$.

Eelpool antud juhtlauset tarvitades, leiame:

$$\frac{a-b}{a^2-2ab-3b^2} : \frac{a^2+2ab-3b^2}{a+b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a^2-2ab-3b^2)(a^2+2ab-3b^2)}.$$

Et murdu võimalikult lihtsustada, lahutame nimetaja tegurid algteguriteks (lugeja tegurid on algtegurid).

$$a^2-2ab-3b^2=a^2-3ab+ab-3b^2=a(a-3b)+b(a-3b)=$$
$$=(a-3b)(a+b);$$

$$a^2+2ab-3b^2=a^2+3ab-ab-3b^2=a(a+3b)-b(a+3b)=$$
$$=(a+3b)(a-b).$$

Saadud jao kirjutame järgmiselt ümber:

$$\frac{(a-b)(a+b)}{(a-3b)(a+b)(a+3b)(a-b)}$$

Peale koondamist võtab murd kuju:

$$\frac{1}{(a-3b)(a+3b)}=\frac{1}{a^2-9b^2}.$$

2) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x-1}:(x+1)^2.$

Et $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$, siis leiame:

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x-1}:(x+1)^2=\frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{x+1}{x-1}.$$ *

* § 58. Mitmekordsete murdude lihtsustamine.

Võtame murru

(1) $$\frac{1+\frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}},$$

mille lugejaks on: $1+\dfrac{1}{a+1}$ ja nimetajaks: $\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}$.

Murru lihtsustamiseks harutame järgmiselt: murd on jagu ja sellepärast võime kujutada antud murdu ka järgmiselt:

(2) $$\left(1+\frac{1}{a+1}\right):\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right).$$

Kuid jagatavat $1+\frac{1}{a+1}$ võime teisendada, kui 1 ja $\frac{1}{a+1}$ kokku arvame:

$$1+\frac{1}{a+1}=\frac{\overbrace{a+1}+1}{a+1}=\frac{a+2}{a+1}.$$

Niisamati teisendame jagaja, maha arvates murrust $\frac{1}{a-1}$ murru $\frac{1}{a+1}$:

$$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}=\frac{\overbrace{a+1}-\overbrace{a-1}}{(a-1)(a+1)}=\frac{2}{(a+1)(a-1)}.$$

Nüüd võime ühtivuse (2) kujutada teisiti, asetades jagatava ja jagaja asemele leitud avaldused:

$$\left(1+\frac{1}{a+1}\right):\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right)=\frac{a+2}{a+1}:\frac{2}{(a+1)(a-1)}.$$

Kuid:

$$\frac{a+2}{a+1}\cdot\frac{2}{(a+1)(a-1)}=\frac{(a+2)(a+1)(a-1)}{(a+1)\cdot 2}=\frac{(a+2)(a-1)}{2}.$$

Seega oleme leidnud, et

$$\frac{1+\frac{1}{a+1}}{\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}}=\frac{(a+2)(a-1)}{2}.$$

Meie oleme lihtsustanud antud murru, teda teisendades mitmejärgulisest harilikuks murruks.*

III.

Proportsionaalsus ja proportsioonid.

§ 59. Otseproportsionaalsed suurused.

Oletame, et mingi keha liigub ühtlaselt, olgu 4 meetrit sekundis; arusaadav on, et see keha t sekundi jooksul $4t$ meetrit edasi on liikunud. Kui edasiliigutud tee tähega s ära tähendame, siis

(1) $$s = 4t.$$

See ühtivus seob kaht suurust — teed ja aega — üksteisega. Meie võime ühele neist suurustest anda vaba arvsuuruse, teine suurus omab siis kindla tähenduse. Kui, näituseks, $t = 3$, siis on $s = 4 \cdot 3 = 12$, s. t., et keha kolme sekundi jooksul on edasi liikunud 12 meetrit; kui $t = 6\frac{1}{2}$, siis $s = 4 \cdot 6\frac{1}{2} = 26$ j. n. e.

Meie võime aga ka anda tähele s vabalt arvsuuruse, olgu $s = 20$; paneme selle tähenduse ühtivusse (1):

$$20 = 4t.$$

Nüüd ei saa meie tähele t enam vabalt arvsuurust anda, vaid selge on, et kui keha 4 meetri kiirusega liikudes 20 meetrit edasi on liikunud, siis see $20 : 4 = 5$ sekundi jooksul on sündinud, tähendab $t = 5$.

Niisama leiame, et kui $s = 30$, siis $t = 7\frac{1}{2}$ j. n. e.

Anname nüüd tähele t järk-järgult tähendused 1, 2, 3, 4, j. n. e. ja arvame välja s. Leiame:

kui $t=1$, siis $s=4$,
„ $t=2$, „ $s=8$,
„ $t=3$, „ $s=12$,
„ $t=4$, „ $s=16$ j. n. e.

Kui kummagi samba arve tähele paneme, siis näeme, et arvud niihästi esimeses kui ka teises sambas kasvavad vastavas reas ühepalju kordi; kolmanda rea arvud on 3 korda suuremad, kui esimeses reas, neljandas neli korda suuremad j. n. e. Meil on siin tegemist niisuguste suurustega, et ühe suurendamisega (ehk vähendamisega) ka teine suurus niisama palju kordi suureneb (ehk väheneb).

Nimetame niisuguseid suurusi otseproportsionaalseteks ehk lihtsalt proportsionaalseteks (ka päriprop.) suurusteks.

Käesoleval juhusel on aeg ja tee otseproportsionaalsed suurused.

Vaatame, kas ühtivused lubavad meid kujutada sidet mitme proportsionaalse suuruse vahel.

Kui mitu suurust millegi ühe suurusega on proportsionaalsed, siis peab viimane suurus 2, 3, 4 j. n. e. korda suurenema ehk vähenema, kui ühte esimestest suurustest 2, 3, 4 j. n. e. korda suurendame ehk vähendame. Tuletame nüüd meelde, et kasvatisel just niisugune omadus on võrreldes teguritega, s. t. kasvatis suureneb ehk väheneb nii mitu korda, mitu korda meie üht tegurit suurendame ehk vähendame. Loomulik on, et kui y on proportsionaalne suuruste v, u ja t-ga, siis

$$y = vut.$$

Tähendus: allpool näeme, et paremat poolt tuleb sagedasti veel mingi kindla arvuga kasvatada. —

Järelkatseks näitame, et y-i ja v, u, t side on tõesti niisugune.

Kui $v=1$, $u=1$, $t=1$, siis $y=1$.

Jätame nüüd u ja t muutmata ja suurendame v-d 2, 3, 4 j. n. e. korda, s. t. anname tähele v tähendused 2, 3, 4 ...:

Kui $v=1$	$u=1$, $t=1$	siis $y=1$
„ $v=2$	„ „	„ $y=2$
„ $v=3$	„ „	„ $y=3$

Meie näeme, et tõesti v suurendamisega 2, 3 j. n. e. korda suureneb ka y kaks, kolm j. n. e. korda.

Oletame nüüd, et $v=1$, $u=3$, $t=2$. Siis $y=1.3.2=6$.

Jätame v ja t tähendused muutmata ja suurendame u kaks, kolm j. n. e. korda; et enne $u=3$, siis peame nüüd võtma $u=6$, 9, 12 j. n. e.

Leiame:

Kui $u=3$	$v=1$, $t=2$	$y=1.3.2=6$
„ $u=6$	„ „	$y=1.6.2=12$
„ $u=9$	„ „	$y=1.9.2=18$
„ $u=12$	„ „	$y=1.12.2=24$ j. n. e.

Meie näeme jällegi, et u suurendamisega (ehk vähendamisega) 2, 3, 4 j. n. e. korda, suureneb (ehk väheneb) y niisama palju kordi (esimene tähendus oli $y=6$, teine 12, kolmas 18, ...).

Sellepärast võime öelda, et v, u ja t on proportsionaalsed y-ga.

Näituses, kus kõnelesime keha liikumisest, võtsime liikumise kiiruseks 4 meetrit sekundis; üleüldse, kui liikumise kiirus on c meetrit sekundis, siis edasiliigutud tee

$$s=ct.$$

Meie võime seega üleüldse öelda, et ühtlase liikumise juures tee on proportsionaalne kiirusega ja ajaga. Et aga harilikult kõneldakse teatud ühtlasest liikumisest, kus kiirus c on kindel suurus (näit. 4 m. sek.), siis öeldakse harilikult, et ühtlane liikumine on niisugune liikumine, kus tee on proportsionaalne ajaga.

§ 60. Vastuproportsionaalsed suurused.

Kui keha, ühtlaselt liikudes, t sekundiga s meetrit edasi on liikunud, ja selle keha kiiruse tähega c ära tähendame, siis võime keha liikumise kiiruse c välja arvata, kui s jagame ajaga t.

$$c = \frac{s}{t} \frac{meetrit}{sekundis}.$$

Vaatame, kuidas muutub c, kui aega t vabalt muutma hakkame.

Kui $s = 1$, $t = 1$, siis $c = \frac{1}{1} = 1 \frac{meetr.}{sek.}$

Jätame s muutmataks ja suurendame t kaks, kolm, j. n. e. korda.

Kui $s = 1$	$t = 1$	siis $c = 1$
„ „	$t = 2$	„ $c = \frac{1}{2}$
„ „	$t = 3$	„ $c = \frac{1}{3}$ j. n. e.

Näeme, et sel juhusel, kui tee jääb muutmataks ja aega 2, 3 j. n. e. korda suurendame (ehk vähendame), liikumise kiirus 2, 3 j. n. e. korda väheneb (ehk suureneb). Kaht niisugust suurust, milledest üks suureneb kaks, kolm, neli j. n. e. korda, kui teine väheneb kaks, kolm j. n. e. korda, ehk vastupidiselt, nimetakse vastuproportsionaalseteks suurusteks.

Ühtlase liikumise juures on seega kiirus vastuproportsionaalne ajaga.

Võtame sideme y ja r, t vahel, mis oleks avaldud järgmiselt:

$$y = \frac{24}{rt}.$$

Oletame, et $r = 2$, $t = 1$, siis $y = 12$.

Kui nüüd jätta muutmataks t ja anda tähele r arvsuurused 4, 6, 8 j. n. e., s. o. suurendada teda 2, 3, ... korda, siis leiame y-i jaoks tähendused:

Kui $t = 1$	$r = 2$	siis $y = 12$
„ „	$r = 4$	„ $y = 6$
„ „	$r = 6$	„ $y = 4$ j. n. e.

Näeme, et y arvsuurus väheneb esimese arvsuurusega võrreldes 2, 3, ... korda, sest esiti oli $y = 12$, siis 6, siis 4, kuid et r arvsuurus suureneb 2, 3, ... korda, siis on järjelikult y ja r vastuproportsionaalsed suurused. Niisamati harutades leiaksime, et ka y ja t on vastuproportsionaalsed suurused.

Meie võime seega lugeda ühtivust

$$y = \frac{24}{rt}$$

järgmiselt: y on vastuproportsionaalne r ja t-ga. Arvu 24 juurde pöörame veel tagasi.

Nüüd võime järgmist öelda: kui mingi suurus y on teiste suuruste u, v, r, t-ga nii seotud, et seda sidet ühtivusega võib kujutada:

$$y = \frac{vt}{ur},$$

siis järgneb sellest, et y on proportsionaalne v ja t-ga ning vastuproportsionaalne u ja r-ga; sest kui lugeja üht tegurit suurendame ja teised endiseks jätame, siis suureneb y niisama palju kordi, ja kui nimetaja üht tegurit suurendame, siis väheneb y niisama palju kordi.

§ 61. Proportsionaalsuse koeffitsiendist.

Oletame nüüd, et oleme leidnud mingi ülesande lahendamisel, et y on proportsionaalne p-ga ja vastuproportsionaalne q-ga, seega peaks y, p ja q seotud olema ühtivusega:

(1) $$y = \frac{p}{q}.$$

Kuid oletame veel, et kui

$$p = 1,\ q = 1,\ \text{siis}\ y = \frac{2}{3}.$$

Neid arve asendades ühtivusse, leiame:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{1},$$

mis mitte õige ei ole.

Et viimane ühtivus oleks õige, peame paremat poolt kasvatama $\frac{2}{3}$-ga, nii et:

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1}.$$

Sellepärast peame ka, et ühtivus (1) näitaks õiget sidet y, p ja q vahel, kasvatama selle ühtivuse paremat poolt $\frac{2}{3}$-ga.

Ühtivus (1) muutub järgmiseks:

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{q}.$$

Nüüd leiame tõesti, et kui

$$p = 1,\ q = 1,\ \text{siis}\ y = \frac{2}{3}.$$

Arv, praegusel juhusel $\frac{2}{3}$, millega kasvatama peame ühtivuse poolt, et ühtivus tõesti õiget sidet näitaks proportsionaalsete ja vastuproportsionaalsete suuruste vahel, nimetakse proportsionaalsuse koeffitsiendiks.

Võtame veel täiendava näituse.

On teada, et kui pikkruudu ühe külje pikkus on a tsentimeetrit, teise külje pikkus b tsentimeetrit, selle pikkruudu väli s on ab ruuttsentimeetrit suur:

(2) $$s = ab.$$

Ühtivus (2) näitab, et pikkruudu väli on proportsionaalne külgedega.

Oletame aga nüüd, et pikkruudu üht külge mõõdame tsentimeetritega, teist külge aga detsimeetritega, välja jällegi ruuttsentimeetritega.

Olgu esimene külg v tsentim., teine u detsim.

Meie ei või enam öelda, et väli on vu ruuttsentim., küll võime aga kinnitada, et väli s ikkagi on proportsionaalne v ja u-ga; meie peame, et sidet s, v ja u vahel kujutada, abiks võtma proportsionaalsuse koeffitsiendi, ja nimelt, kasvatama

vu veel määramata proportsionaalsuse koeffitsiendi c-ga, nii et:

$$s = cvu.$$

Missugune arv on aga c?

Meie teame, et kui:

$$v = 1 \text{ cm}, \quad u = 1 \text{ dcm},$$

siis, kui cm^2 tähendab sõna ruutsent.:

$$s = 1 \,.\, 10 \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$$

(1 detsimeeter = 10 cm.) ja tähendab: $10 = c \,.\, 1 \,.\, 1$, ehk:

$$10 = 1 \,.\, c,$$

kust näha on, et $c = 10$.

Lõpulikult kujutab siis sidet s, v ja u vahel ühtivus:

$$s = 10vu.$$

Nüüd võime alati üht külge tsentimeetritega ja teist külge detsimeetritega mõõta ja saadud arvud kohe viimasesse ühtivusse panna, mis annab välja ruutsentimeetrites.

Peab aga silmas pidama, et proportsionaalsuse koeffitsient on 10 ainult käesoleval juhusel: kui meie üht külge oleksime mõõtnud tsentimeetritega, teist meetritega, ja välja ruutsentimeetritega, siis oleks olnud prop. koeffitsient 100.

Ainult siis, kui mõlemat külge sama pikkuse üksusega (näit. meetr.) ja välja selle ruutüksusega (ruutmeetr.) mõõdetakse, on koeffitsient 1.

Proportsionaalsuse koeffitsient mängib tähtsat osa füüsikas.

Võtame ühtivuse:

$$y = \frac{1}{2} gt^2,$$

kus g on kindel arv.

Seda ühtivust lugedes peame ütlema, et y on proportsionaalne t^2-ga, kus juures prop. koeff. $= \frac{1}{2} g$.

Kui $ab = cde$, siis on a proportsionaalne c, d ja e-ga ja vastupropor. b-ga. Järgneb see sellest, et ühtivust $ab = cde$ jagades b-ga, leiame:

$$a = \frac{cde}{b}.$$

Ümberpöördult: d on proports. a ja b-ga ja vastuprop. c ja e-ga, sest jagades ühtivust $cde = ab$ kasvatise ce-ga leiame:

$$d = \frac{ab}{ce}.$$

§ 62. Proportsioonid.

On kaks suurust a ja d proportsionaalsed teise kahe suuruse c ja b-ga ja proportsionaalsuse koeff. $= 1$, siis järgneb ühtivus:

$$ad = bc.$$

Jagame selle ühtivuse bd-ga; leiame:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd},$$

ehk, peale koondamist:

(1) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Ühtivust (1) nimetakse proportsiooniks ja loetakse järgmiselt: a on b-st nii mitu korda suurem, kui c on d-st suurem, ehk: a on b vastu, nagu c on d vastu. Jagu $\frac{a}{b}$ näitab ühtlasi, mitu korda a on suurem kui b, sellepärast võime jagu $\frac{a}{b}$ nimetada vahekorraks a ja b vahel (ehk suhteks a ja b vahel).

Proportsioon

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

on seega ühtivus vahekordade (suhete) $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ vahel, ja võib teda lugeda sellepärast ka nii: a vahekord b-ga on, nagu c vahekord d-ga (a suhtub b-ga, nagu c d-ga).

a ja d nimetakse proportsiooni välisliigeteks, b ja c siseliigeteks. Veel nimetakse a esimese vahekorra eesliikmeks ja b järelliikmeks, niisama c teise vahekorra ees- ja d järelliikmeks.

Kasvatame proportsioonis

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

kummagi vahekorra bd-ga, leiame:

$$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d},$$

ehk:

$$ad = cb,$$

mis kujutab, et iga proportsiooni välisliigete kasvatis on siseliigete kasvatisega ühesuurune.

Vastupidiselt, nagu nägime, on ka õige: kui kahe arvu a ja d kasvatis on kahe teise arvu b ja c kasvatisega ühesuurune, siis annavad arvud a, b, c, d proportsiooni.

Proportsioonist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

järgneb, kui kasvatada vahekordi b-ga:

$$\frac{ab}{b} = \frac{cb}{d},$$

ehk:

$$a = \frac{cb}{d},$$

s. t.: välisliige on kahe siseliikme kasvatis, jagatud teise välisliikmega.

Kirjutame proportsiooni

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

vahekordade järjekorda muutes, järgmiselt:

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b},$$

millest väljendame, kui proportsiooni vahekordi kasvatame d-ga:

$$c = \frac{ad}{b}.$$

See tähendab, et siseliige on välisliigete kasvatis, jagatud teise siseliikmega.

§ 63. Proportsiooni liigete ümberasendamine.

Antud on proportsioon

(1) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

millest, nagu teame, järgneb:

(2) $$ad = bc.$$

Jagame ühtivuse (2) kasvatisega cd, leiame:

(3) $$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Proportsiooni (3) võime saada, kui proportsiooni (1) siseliikmed ümber asendame.

Jagame ühtivuse (2) ab-ga; leiame proportsiooni:

(4) $$\frac{d}{b} = \frac{c}{a},$$

mida oleks võinud saada ka proportsiooni (1) välisliikmeid ümber asendades.

Jagame veel ühtivuse (2) ac-ga:

(5) $$\frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$

mis muud ei kujuta, kui proportsiooni (4) ümberasendud siseliigetega.

Meie oleme seega proportsioonile (1) lisaks kolm proportsiooni (3, 4, 5) leidnud, mida võime saada sise- ja välisliigete ümberasenduse teel antud proportsioonist (1).

Paigutades proportsioonide (1, 3, 4, 5) vahekorrad ümber, leiame:

(6) $$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

(7) $$\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$

(8) $$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

(9) $$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Kõiki neid proportsioone võib saada, kui paneme proportsioonides (1), (3), (4) ja (5) välisliigete asemele siseliikmed ja ümberpöördult. Nii saame kirjeldud teel proportsioonist (1) proportsiooni (9), proportsioonist (3) proportsiooni (8) j. n. e.

Üleüldse võib antud proportsiooni (1) liigete mitmesuguste ümberasenduste teel saada temale lisaks seitse proportsiooni (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Mõned näitused.

1) Et jagu $\frac{20}{5}$ on ühesuurune jaoga $\frac{12}{3}$, siis võime kirjutada proportsiooni

$$\frac{20}{5} = \frac{12}{3},$$

mille sise- ja välisliigete kasvatised on ühesuurused:

$$20 \cdot 3 = 5 \cdot 12.$$

2) Proportsioonist

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{21},$$

võime siseliigete ümberpaigutamisega saada proportsiooni:

$$\frac{2}{14} = \frac{3}{21}.$$

Iseäralist tähelpanu teenivad proportsioonid mitmesuguste ülesannete lahendamisel, kus proportsionaalsete suurustega tegemist. Võtame paar niisugust ülesannet.

3) Füüsikast on teada, et 1 cm^3 elavhõbedat kaalub 13,6 grammi. Kui palju kaalub elavhõbe, mis 30 cm^3 suuruse klaasi täidab?

Selge on, et elavhõbeda hulga keharuum ja tema raskus on proportsionaalsed suurused, sest ühe suurendamisega suureneb teine niisama palju kordi. Tähendame 30 cm^3 elavhõbeda raskuse grammides ära tähega x; x peab olema 13,6-st niipalju kordi suurem, kui palju kordi 30 on 1-st suurem:

$$\frac{x}{13,6} = \frac{30}{1},$$

kust tundmatu välisliikme leiame siseliikmeid kasvatades ja kasvatist tuntud välisliikmega jagades.

$$x = \frac{13,6 \cdot 30}{1} = 408 \text{ grammi.}$$

4) Teada on, et ühe ja sellesama temperatuuri mõõtmisel Réaumuri ja Celsiuse termomeetritega saadud kraadide arv Réaumuri järele on Celsiuse kraadide arvu vastu, nagu 4:5. Vee temperatuuri mõõtmisel Réaumuri termomeetriga leiti vee temperatuur 17,5° R. Mitu Celsiuse kraadi on vee temperatuur?

Tähendame otsitava kraadide arvu tähega x; andmete järele kirjutame proportsiooni:

$$\frac{17,5^0}{x} = \frac{4}{5},$$

kust leiame teatud viisil tundmatu siseliikme:

$$x = \frac{17,5^0 \cdot 5}{4} = \frac{87,5^0}{4} = 21,9^0 \text{ C},$$

kus x on välja arvatud kuni 0,1 peenuseni.

§ 64. Pidevad ja tuletud proportsioonid.

Kui proportsiooni välis- ehk siseliikmed on ühesuurused, siis saame n. n. pideva proportsiooni:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

ehk

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}.$$

Proportsiooni peaomaduse (sise- ja välisliigete kasvatiste ühesuurus) põhjal leiame:

$$b^2 = ac.$$

Korduv liige b pidevas proportsioonis nimetakse geomeetriliseks keskarvuks a ja c vahel.

Geomeetrilise keskarvu kõrval on kohane tutvuneda ka aritmeetilise keskarvu mõistega. Olgu antud kolm arvu: 5, 11 ja 14, millede summa on 30. Seda summat jagades antud arvude arvuga. s. o. 3-ga (meil on kolm arvu), leiame $\frac{30}{3} = 10$. Arv 10 nimetakse 5, 11 ja 14 aritmeetiliseks keskarvuks. Niisamati on arvude 4, 9, 15 ja 7 aritmeetiline keskarv:

$$\frac{4+9+15+7}{4} = \frac{35}{4}.$$

Üleüldse on a, b, c, d, e aritmeetiline keskarv:

$$\frac{a+b+c+d+e}{5},$$

ehk, kui arve a, b, c, . . ., m on üleüldse n, siis on nende arvude aritmeetiline keskarv:

$$\frac{a+b+c+\ldots+m}{n}.$$

Arvame proportsiooni $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ vahekordadele 1 juurde:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1.$$

Et $\frac{a}{b}$ on murd, siis võime summat $\frac{a}{b}+1$ teisendada, kokkuarvatavaid ühenimelisteks tehes (§ 55):

$$\frac{a}{b}+1=\frac{a}{b}+\frac{\overset{\smile}{b}}{b}=\frac{a+b}{b}.$$

Niisama leiame:

$$\frac{c}{d}+1=\frac{c}{d}+\frac{d}{d}=\frac{c+d}{d}.$$

Lõpulikult saame esimese tuletud proportsiooni.

(1) $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

mida sõnadega järgmiselt loetakse:

Esimese vahekorra liigete summa on oma järelliikme vastu, nagu teise vahekorra liigete summa oma järelliikme vastu.

Arvame antud proportsiooni vahekordadest 1 maha:

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

ehk, peale teisendamist:

(2) $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

See on teine tuletud proportsioon, mida loeme:

Esimese vahekorra liigete vahe on oma järelliikme vastu, nagu teise vahekorra liigete vahe oma järelliikme vastu.

Asendame proportsioonis

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

välisliikmed siseliigete asemele ja vastupidiselt; ilmub proportsioon:

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

Arvame saadud proportsiooni vahekordadele: 1) 1 juurde, 2) 1 maha:

$$\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1,$$

$$\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1.$$

Peale teisendamist muutuvad ühtivused proportsioonideks:

(3) $$\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c},$$

(4) $$\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}.$$

Esimese neist tuletud proportsioonidest, kui võrdleme teda antud proportsiooniga, loeme järgmiselt:

Esimese vahekorra liigete summa on oma eesliikme vastu, nagu teise vahekorra liigete summa oma eesliikme vastu.

Kui proportsiooni (4):

$$\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$$

kasvatame —1-ga, siis saame:

$$\frac{-1(b-a)}{a}=\frac{-1(d-c)}{c},$$

ehk

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c},$$

s. t.: esimese vahekorra liigete vahe on oma eesliikme vastu, nagu teise vahekorra liigete vahe oma eesliikme vastu.

Niisuguseid tuletud proportsioone võiksime veel palju saada. Tuletud proportsioone tarvitakse iseäranis geomeetrias.

Näitused:

1) Proportsioonist

$$\frac{x}{2}=\frac{3}{5}$$

võime tuletada proportsiooni

$$\frac{x+2}{2} = \frac{3+5}{5},$$

ehk

$$\frac{x+2}{2} = \frac{8}{5}.$$

2) Keedusool (NaCl) on naatriumi (Na) ja kloor (Cl) keemiline ühendus. Need algained võivad keedusoolaks ainult siis ilma ülejäägita ühineda, kui naatriumi klooriga vahekorras 23:35,5 võtta. Mitu grammi naatriumi ja kloori on 234 grammiks keedusoolaks ühinenud?

Kui naatriumi ja kloori hulka grammides vastavalt ära tähendada tähiga x ja y, siis peab x-i vahekord y-ga olema, nagu 23:35,5, s. t.

$$\frac{x}{y} = \frac{23}{35,5}.$$

Tuletud proportsiooni (3) välja kirjutades, leiame:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{23+35,5}{23}.$$

Kuid $x+y$ on saadava keedusoola hulk, seega 234 gr., mille eelmisse proportsiooni asendame:

$$\frac{234}{x} = \frac{58,5}{23}.$$

Viimasest proportsioonist leiame x-i:

$$x = \frac{234 \cdot 23}{58,5} = 92 \text{ grammi},$$

s. t., et naatriumi 234 grammis keedusoolas on 92 gr., kuna kloori ühendusse on astunud $234 - 92 = 142$ grammi.

* Geomeetrias tarvitakse veel üht tuletud proportsiooni, mille väljendamisele nüüd asume.

Oletame, et vahekorrad:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \ldots, \frac{m}{n}$$

on ühesuurused (ühtlased):

(5) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots = \frac{m}{n}.$$

Et kõik vahekorrad on ühesuurused, siis võime nende suurust ühe tähega, olgu p-ga tähendada:

$$\frac{a}{b}=p;\ \frac{c}{d}=p;\ \frac{e}{f}=p,\ldots,\ \frac{m}{n}=p.$$

Kasvatame ühtivuse $\frac{a}{b}=p$ arvuga b, ühtivuse $\frac{c}{d}=p$ arvuga d, ..., ühtivuse $\frac{m}{n}=p$ arvuga n.

Leiame peale koondamist ühtivused:

$$a=bp,\ c=dp,\ e=fp,\ \ldots,\ m=np.$$

Arvame nende ühtivuste pahemad ja paremad pooled kokku:

$$a+c+e+\ldots+m=bp+dp+fp+\ldots+np.$$

Võtame paremal pool ühise teguri p klambrite taha:

$$a+c+e+\ldots+m=(b+d+f+\ldots+n)p.$$

Peale mõlemate poolte jagamist summaga $b+d+f+\ldots+n$ leiame:

$$\frac{a+c+e+\ldots+m}{b+d+f+\ldots+n}=p.$$

Et aga $p=\frac{a}{b}$, siis muutub viimane ühtivus järgmiseks:

$$\frac{a+c+e+\ldots+m}{b+d+f+\ldots+n}=\frac{a}{b}, \tag{6}$$

mis omakorda on:

$$\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots=\frac{m}{n}.$$

Meie oleme väljendanud ühtlaste vahekordade reast (5) proportsiooni (6), mille välisliikmed on $a+c+e+\ldots+m$ ja b, siseliikmed $b+d+f+\ldots+n$ ja a.

Loeme selle tuletud proportsiooni sõnadega: ühtlaste vahekordade eesliigete summa on järelliigete summa vastu, nagu ühe antud vahekorra eesliige järelliikme vastu. *

Proportsiooni mõistega olid vanaaegsed rahvad, kelle matemaatikatöist meil teateid, juba tuttavad. Babiloonlaste järele tegid proportsioonidega tegemist greeklased, 5. aastasajal e. K., kes juba kolmesuguseid proportsioone eritasid. Teaduslise proportsioonide õpetuse loojaks võib Eudoxus't pidada (4. aastasajal e. K.). Loomulikult arenes see õpetus kõige pealt mitmesuguste geomeetriliste küsimuste lahendamisel; ka praegugi etendavad proportsioonid geomeetrias tähtsat osa. Üks suuremaist greeka matemaatikuist, kes proportsioone käsitas, oli Euklid (3. aastasajal e. K.), tema nimelise — Euklidi geomeetria — looja. Euklidi geomeetriat käsitavad praegu pea kõik geomeetria õpperaamatud. Keskaja matemaatikuist, kes oma töisse proportsioonide õpetuse sisse võtsid, võib nimetada Thomas Bradvardinus't (4. aastasajal p. Kr.), ja uuemast ajast Johann Viedmann'i (15. aastasajal p. Kr.), kes oma raamatu: „Behennd und hübsch Rechnung uff allen Kauffmannschafften" teises osas proportsioonidest ja kolmeliikme arvamisest kõneleb.

IV.

Arvlaused.

§ 65. Arvlaused (ekvatsioonid, võrrandused) ja samasused.

Algebra kursuse algul (§ 12) tutvunesime ühtivuse mõistega. Käesolevas paragrahvis tahame ühtivuste liigitamise juurde asuda, sest, nagu kohe näeme, võivad ühtivused mitmesugused olla.

Võtame ühtivused:

(1) $$4 + 6 = 30 : 3$$

(2) $$(a - b)c = ac - bc.$$

Ühtivuse (1) mõlemil poolel näeme ainult ilmutud arvudega kirjutud avaldusi, mis on ühesuurused. Ühtivuse (2) parem pool on saadud tuntud juhtlause järele pahemast poolest; peale selle on ühtivusel (2) veel järgmine ülitähtis omadus: kui meie paneme tähtede a, b, c asemele ükskõik missugused arvud ja välja arvame ühtivuse (2) poolte arvsuurused, siis on saadavad arvsuurused ühesugused.

Olgu, näituseks:

$$a = 5,\ b = \frac{1}{2},\ c = 4.$$

Asendame need arvud ühtivusse (2) ja arvame esiteks pahema ja siis parema poole arvsuuruse välja:

$$\left(a - b\right)c = \left(5 - \frac{1}{2}\right) . 4 = 4\frac{1}{2} . 4 = 18.$$

$$ac - bc = 5 . 4 - \frac{1}{2} . 4 = 20 - 2 = 18.$$

Mõlemad arvsuurused on ühesugused.

Niisamuti otsime ühtivuse (2) poolte arvsuurused, kui $a = -4$, $b = 1$, $c = -2$:

$$(a - b)\,c = (-4 - 1) \cdot -2 = -5 \cdot -2 = +10.$$

$$ac - bc = (-4) \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = +8 + 2 = 10.$$

Jällegi on resultaadid ühesugused.

Niisamasuguse järelduse teeksime, kui a, b ja c asemele ükskõik missugused arvud asendame.

Võtame veel ühtivuse:

(3) $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Paneme: $a = 0$, $b = 3$

$$(a + b)^2 = (0 + 3)^2 = 3^2 = 9.$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 3^2 = 3^2 = 9.$$

Mõlemad ühtivuse pooled on omanud ühesuguse arvsuuruse.

Olgu:

$$a = \frac{1}{4},\ b = -2$$

$$(a+b)^2 = \left(\frac{1}{4} - 2\right)^2 = \left(-\frac{7}{4}\right)^2 = +\frac{49}{16}.$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-2\right) + \left(-2\right)^2 = \frac{1}{16} - 1 + 4 =$$

$$= 3\frac{1}{16} = +\frac{49}{16}.$$

Meie võime ka ühtivusse (3) a ja b asemele vabalt valitud arvud panna, ikkagi oleks mõlemate poolte arvsuurus ühesugune.

Sellest järgneb, et on olemas tähelised ühtivused, mille mõlemad pooled omavad ühesugused arvsuurused, kui tähtede asemele panna ükskõik missugused arvud. Neid ühtivusi nimetakse samasusteks.

Ühtivused (2) ja (3) on samasused. Ka ühtivust (1) nimetakse samasuseks, olgugi, et siin juba arvud antud, mida enam ei saa muuta. Meie võime ühtivust (1) nimetada ka ilmutud arvudega kirjutud samasuseks, ning (2) ja (3) tähelisteks samasusteks.

Ühtivused:

(4) $$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

(5) $$(c-d+e) \cdot e = ce - de + e^2.$$

(6) $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

on kõik samasused. (Katsuge seda järele, pannes tähtede asemele vabalt valitud arvud.)

Tähendus: Meie ütlesime, et samasuste mõlemad pooled muutuvad arvuliselt ühesuurusteks, kui tähtede asemele panna ükskõik missugused ilmutud arvud. Ainult nulli kohta tuleb erand teha, nimelt siis, kui nulliga jagatakse.

* Ühtivus:

$$(m-n):p = \frac{m}{p} - \frac{n}{p}$$

on samasus, kuid ei või mitte võtta

$$p = 0$$

sest, nagu § 37 nägime, kaotab

$$(m-n):p,$$

kui $p = 0$, oma mõtte, niisama ka $\frac{m}{p}$ ja $\frac{n}{p}$. *

Olgu antud ühtivus:

(7) $$a + 5 = 12.$$

Kui sellesse ühtivusse panna $a = 1$, siis tuleme võimatu ühtivuse juurde:

$$1 + 5 = 12,$$

sest $1 + 5 < 12$.

Ka siis, kui $a = 2$ ehk $3\frac{1}{2}$, leiame, et need arvud, asendatult ühtivusse, annavad võimatud ühtivused:

$$2 + 5 = 12,$$

$$3\frac{1}{2} + 5 = 12.$$

Nii võiksime lõpmata palju arve a asemele paigutada, ikkagi ei muutuks mõlemad pooled ühesuurusteks.

On ainult üks arv, nimelt $a = 7$, mis teeb mõlemad ühtivuse (7) pooled ühesuuruseks:

$$7 + 5 = 12.$$

Võtame veel teise ühtivuse

(8) $$4 + a = 3a.$$

Selle ühtivuse mõlemad pooled omavad ühesuguse arvsuuruse ainult siis, kui $a = 2$, sest

$$4 + 2 = 3 \cdot 2.$$

Kõik muud arvud, olgu nad täis- ehk murdarvud, positiivsed või negatiivsed, ei muuda ühtivuse (8) pooli ühesuuruseks (tehke järelkatse!).

Niisugust ühtivust, kus tähtede asemele peab ainult teatud arvud panema, et ühtivuse pooled omaksid ühesuguse arvsuuruse, nimetakse arvlauseks ehk ekvatsiooniks, või võrranduseks.

Ühtivused (7) ja (8) on seega arvlaused (ekvatsioonid). Kerge on näha, et ühtivus

9) $$x + 1 = 4x - 1$$

on arvlause (võrrandus), sest ainult

$$x = \frac{2}{3}$$

muudab ühtivuse (9) pooled ühesuuruseks.

Niisama on ühtivus

(10) $$y - 2 = 2y - 1$$

arvlause (võrrand., ekvatsioon). (Tehke järelkatse mõne arvuga ja võtke siis $y = -1$).

Meie nimetame seda arvu, mis arvlauses tuleb tähe asemele panna, et mõlemad arvlause pooled muutuksid ühesuuruseks, arvlause j u u r e k s.

Arvlausel (7) on juur:

$$a = 7.$$

Arvlausel (8) on juur:

$$a = 2.$$

Arvlausel (9) on juur:

$$x = \frac{2}{3}$$

ja arvlausel (10) on juur:

$$y = -1.$$

Öeldakse veel, et arvlause juur rahuldab (samastab) arvlauset, ehk muudab tema samasuseks.

Nii siis rahuldab

$$y = -1$$

arvlause:

(10) $$y - 2 = 2y - 1,$$

ehk muudab tema samasuseks

$$-1 - 2 = 2 . (-1) - 1.$$

Arvlausel võib olla ka kaks ehk enam juuri. Järelkatse näitab, et arvlausel:

$$x^2 + x = 2$$

on kaks juurt;

$$x = -2, \quad x = 1,$$

sest

$$(-2)^2 + (-2) = +4 - 2 = 2$$

ja

$$1^2 + 1 = 2.$$

Arvlausel

$$x^2 = 9$$

on juured

$$x = +3, \quad x = -3,$$

sest mõlemate arvude kvadraadid on $+9$.

Arvlauset välja arvata ehk lahendada tähendab: tema juurt ehk juuri leida. Sellepärast nimetakse tähte, mille arvsuurust otsitakse, ka tundmatuks, ehk otsitavaks. Tundmatuid tähendakse arvlausis harilikult alfabeedi viimaste tähtedega x, y, z j. n. e. ära.

Võimalikud on ka kaks ehk enam arvlauseid, milledel on ühesugused juured. Näituseks arvlausetel:

(A)
$$4 + 2x = 6,$$
$$2 = 3 - x,$$

on mõlemil üks ja seesama juur:

$$x = 1.$$

Arvlausetel:

(B)
$$x - 1 = 2,$$
$$x = 2 + 1,$$
$$9 - 3x = 0$$

on kõigil üks ja seesama juur, nimelt:

$$x = 3.$$

Arvlauseid, milledel samased juured (ühised juured), nimetakse samasteks arvlauseteks. Sellega on arvlaused (A) samased ja arvlaused (B) samased.

Arvlauses, peale tema lihtsustamist (vaata järgnevas), võib tundmatu esineda esimesel astmel, teisel astmel j. n. e. Näit. arvlauses:

$$3x = 15$$

ilmub otsitav x esimesel astmel, mispärast seda arvlauset esimese astme arvlauseks nimetakse. Selle vastu ilmub arvlauses

$$x^2 - 3 - 2x = 0$$

tundmatu x-i teine aste esimeses liikmes, ja esimene x-i aste kolmandas liikmes. See on teise astme arvlause, sest kõige kõrgem aste, millega otsitav ilmub, on 2.

Niisama on:

$$x = x^2 - 4$$

teise astme arvlause, sest x-i kõrgem aste on 2.

Pärastpoole määrame arvlause astme mõiste kindlalt ära.

Arvlausete lahendamine põhjeneb kahe tõelause (teoreemi) peal, milledest järgnevates paragrahvides kõneleme.

§ 66. I teoreem arvlausete kohta.

Teoreemid I ja II (§§ 66, 67) on maksvad ükskõik mis astme arvlause kohta.

I teoreem: Kui arvlause mõlematele pooltele ühepalju juurde, ehk mõlematest ühepalju maha arvata, siis saame arvlause, mis endisega on samane.

Kui meie seda teoreemi näit. arvlause

(1) $$x^2 - 3x = -2$$

juures tarvitame, siis võime järgmist tõendada: järelkatse näitab, et arvlause (1) juur on:

$$x = 2,$$

sest

$$2^2 - 3 \cdot 2 = -2;$$

arvame nüüd arvlause (1) pooltele juurde 5, leiame arvlause:

(2) $$x^2 - 3x + 5 = 3.$$

Teoreemi põhjal peab ka arvlausel (2) olema juur

$$x = 2,$$

mida järelkatse ka tõesti kinnitab.

Ümberpöördult, et arvlausel (2) on juur

$$x = 1,$$

(tehke järelkatse!), siis peab ka arvlausel (1) olema juur

$$x = 1,$$

sest arvlause (1) saame arvlausest (2), kui mõlemilt poolt maha arvame 5.

* Et teoreemi iga arvlause kohta tõestatuks võiksime pidada, peame arvlause võtma üleüldisel kujul.

Selleks tähendame arvlause pahema poole ära järgmiselt:

$$A_x \quad \text{(loe: } A \text{ märgiga } x\text{)},$$

paremat poolt aga nii:

$$B_x \quad \text{(loe: } B \text{ märgiga } x\text{)}.$$

Märk x tähtede A ja B all on selleks pandud, et näidata, et pahemas ja paremas arvlause pooles x esineb (ta võib aga ka ühes neist olemata olla).

Seega on meil antud arvlause:

(3) $$A_x = B_x.$$

Tõestame, et arvlausel

(4) $$A_x + c = B_x + c$$

on needsamad juured, mis arvlausel (3), ja, ümberpöördult, arvlausel (3) on needsamad juured, mis arvlausel (4).

Oletame, et arvlause (3) juur on:

$$x = 2;$$

see tähendab: kui meie arvlausesse

$$A_x = B_x$$

tundmatu x asemele paneme 2, siis on mõlemad pooled arvuliselt ühesuurused:

(5) $$A_2 = B_2.$$

Paneme arvlause (4) pooltesse x asemele 2. Pahemal pool saame $A_2 + c$ ja paremal pool $B_2 + c$. Kuid ühtivuse (5) järele on $A_2 = B_2$. Siis peab ka $A_2 + c = B_2 + c$, sest kui ühesuurustele arvudele A_2 ja B_2 ühepalju juurde arvata, siis saame ühesuurused arvud.

Kui aga

$$A_2 + c = B_2 + c,$$

siis on ka järjelikult

$$x = 2$$

arvlause (4) juur.

Tõestame nüüd, et iga arvlause (4) juur on ka arvlause (3) juur. Oletame, et (4) juureks on

$$x = 5,$$

siis peab $x = 5$ arvlauset (4) samastama:

(6) $$A_5 + c = B_5 + c.$$

Paneme sellesama juure $x = 5$ arvlausesse (3). Pahem pool annab A_5 ja parem pool B_5. Kuid $A_5 = B_5$, sest meie saame viimase ühtivuse samasusest (6), kui mõlemalt poolt ära võtame c.

(Aksioom: kui ühesuurustest arvudest $A_5 + c$ ja $B_5 + c$ ühepalju ära võtta, siis jäävad ühesuurused arvud järele.)

Samasus $A_5 = B_5$ näitab, et $x = 5$ on ka arvlause (3) juur. Seega võime teoreemi tõestatuks pidada, sest kui mõlematest arvlause pooltest mingisugune arv maha võtta, siis jäävad eelmised harutused jõusse.

Järeldused.

Antud on esimese astme arvlause:

(7) $$2x - 3 = x + 1.$$

Arvame kummalegi poolele 3 juurde (eelmise teoreemi põhjal ei muutu juured siis mitte):

$$2x - 3 + 3 = x + 1 + 3$$

ehk peale pahema poole lühendamist

(8) $$2x = x + 1 + 3.$$

Antud arvlauses (7) on pahemal pool arv -3, arvlauses (8) näeme aga, et -3 pahemalt poolt on ära kadunud ja

ilmunud paremale poole märgiga $+$. Edasi võtame peale lihtsustamist saadud arvlause (8)

(9) $$2x = x + 4$$

ja arvame mõlemilt poolt maha x:

$$2x - x = x + 4 - x$$

ehk, peale parema poole lihtsustamist:

(10) $$2x - x = 4.$$

Viimast arvlauset võrreldes arvlausega (9) näeme, et paremalt poolt x pahemale poole on üle kantud vastupidise märgiga.

Saadud arvlause (10) võime nii välja kirjutada:

$$x = 4,$$

see näitab, et meie oleme juure leidnud. Järelkatse kinnitab, et $x = 4$ on tõesti arvlause (7) juur:

$$2 \cdot 4 - 3 = 4 + 1.$$

Seega lubab meid teoreem arvlause liikmeid ühelt poolt teisele poole kanda vastupidise märgiga.

Edaspidi kanname esimese astme arvlauses harilikult kõik tundmatud liikmed (s. o. liikmed, mis tundmatut arvu sisaldavad) pahemale ja tuntud liikmed paremale poole.

Näitus:

$$5 + 7z + 2 - z = 3z - z + 10 + 3z.$$

Kanname tundmatud liikmed pahemale, tuntud liikmed paremale poole:

$$7z - z - 3z + z - 3z = 10 - 5 - 2$$

ehk, peale lühendamist:

$$z = 3;$$

tähendab, antud arvlause juur on 3.

Kui mõlemis arvlause pooles üks ja seesama liige ühe ja sellesama märgiga ilmub, siis võime need liikmed arvlausest ära jätta.

Näit.:

$$16 + x = 16 + 5.$$

Kui siin 16 pahemalt poolt paremale poole märgiga — kanda, siis saame

$$x = 16 + 5 - 16,$$

mille järele paremal pool 16—16 kõrvale võime heita:

$$x = 5.$$

Oleksime võinud siis lihtsalt kirjutada

$16 + x = 16 + 5$ asemel $x = 5$.

§ 67. II teoreem arvlausete kohta.

Teoreem. Arvlause mõlemate poolte kasvatamisega ehk jagamisega ühe ja sellesama tuntud arvuga, mis ei ole null, saame arvlause, mis endisega on samane. S. t., et meie II teoreemi põhjal näit. arvlause

$$17z + 33 = 20z$$

mõlemaid pooli 4-ga kasvatades saame uue arvlause

$$68z + 132 = 80z,$$

millel on seesama juur, mis esimeselgi. (Tehke järelkatse juurega: $x = 11$!).

* Tähendame jällegi antud arvlause lühendatult nii:

(1) $$A_x = B_x.$$

Mõlemat arvlause poolt (ehk, lühidalt öeldud, arvlauset) tuntud arvu m-ga (näit. $m = 2$, 5, $^1/_2$ j. n. e.) kasvatades, saame

(2) $$A_x m = B_x m.$$

Tõestame, et siis, kui arvlausel (1) on juur:

$$x = 2,$$

siis on seesama juur ka arvlausel (2).

Arvlausest (1) saame samasuguse

$$A_2 = B_2,$$

sest $x = 2$ samastab arvlause (1). Paneme x-i asemele 2 arvlausesse (2). Pahemal pool saame A_2m ja paremal pool B_2m. Et aga $A_2 = B_2$, siis peab ka

$$A_2m = B_2m,$$

sest ühesuurusi arve A_2 ja B_2 kasvatades m-ga peame saama ühesuurused hulgad.

Ümberpöördult, oletame, et arvlause (2) juur on

$$x = 4,$$

see tähendab, et olemas on samasus:

$$A_4m = B_4m.$$

Esimese teoreemi järelduse põhjal saame eelmisest ühtivusest:

$$A_4m - B_4m = 0,$$

sest kui B_4m paremalt poolt märgiga „—“ pahemale poole kanda, siis on parem pool null.

Viimases samasuses võtame m klambrite ette (v. § 105):

$$m(A_4 - B_4) = 0.$$

Siin on kahe teguri m ja $A_4 - B_4$ kasvatis null, mis ainult siis võimalik on, kui kõige vähemalt üks tegur on null.

Teoreemi andmete põhjal ei ole m mitte null, seega peab

$$A_4 - B_4 = 0,$$

ehk

$$A_4 = B_4.$$

Kuid viimane samasus ei ole muud kui arvlause (1), kui temasse x-i asemele panna 4. Et aga saadav ühtivus $A_4 = B_4$ on samasus, siis on ka 4 arvlause (1) juur, mida vaja oligi tõestada.

Tähendus. Selle asemel, et tõestada, et arvlause mõlemaid pooli võib m-ga jagada, võime tõestada, et arvlause pooli $\frac{1}{m}$-ga võib kasvatada, ilma et juured selle läbi muu-

TARTU ÜLIKOOL
DIDAKTILINE SEMINAAR

tuksid, sest $\frac{1}{m}$-ga kasvatamine on üheväärtusline m-ga jagamisega.

Kuid praegu tõestud teoreemi peale toetades, võime arvlause pooli $\frac{1}{m}$-ga kasvatada, sellepärast võime tervet teoreemi tõestatuks lugeda.

Vaja on veel selgeks teha, mispärast meie ei või arvlause pooli nulliga kasvatada ehk jagada.

Seda selgitab järgmine näitus.

Antud on arvlause

$$17z + 33 = 20z.$$

Tema juur, nagu järelkatse näitab, on 11.

Kasvatame arvlause pooli nulliga:

$$0(17z + 33) = 20z \,.\, 0.$$

Kui siia arvlausesse z asemele paneme ükskõik missuguse arvu, siis muutuvad mõlemad pooled arvuliselt ühesuuruseks (sest nulli ja mingi arvu kasvatis on null), ja see näitab, et viimasel arvlausel on lugemata hulk juuri, kuna antud arvlausel neid on ainult üks:

$$z = 11.$$

Seega ei ole arvlaused samased. Nulliga ei või meie arvlauseid jagada, sest siis muutuvad mõlemad arvlause pooled mõttetuiks avaldusiks.

Mis siis sünnib, kui arvlauset mõne avaldusega kasvatada, milles tundmatu esineb, näeme järgmisest näitusest.

Antud on arvlause (3)

$$A_x = B_x \,, \tag{3}$$

mille juured meil olgu teada. Oletame, et nende seas ei ole juuri $x = 0$ ja $x = -2$.

Kasvatame arvlause (3) $x(x+2)$-ga, s. t. avaldusega, mis sisaldab tundmatu x-i:

$$x(x+2)A_x = x(x+2)B_x. \tag{4}$$

Viimasel arvlausel, nagu järelkatse näitab, on juured $x=0$ ja $x=-2$, sest pannes ühtivusse (4) x-i asemele 0, leiame, et

$$0(0+2)A_0 = 0(0+2)B_0$$

on samasus, sest kummalgi pool on üks teguritest 0.

Niisama on samal põhjusel samasus:

$$-2(-2+2)A_{-2} = -2(-2+2)B_{-2},$$

sest tegur $-2+2$ on null.

See näitab, et saadud arvlausel on kaks juurt, mida antud arvlausel ei ole mitte, ja seega pole arvlaused (3) ja (4) samased.

Antud on arvlause

$$(5) \qquad (x-1)(x+3)A_x = (x-1)(x+3)B_x,$$

peale selle on antud, et teisel arvlausel,

$$(6) \qquad A_x = B_x$$

ei ole juuri $x=1$ ja $x=3$.

Järelkatse näitab, et arvlausel:

$$(x-1)(x+3)A_x = (x-1)(x+3)B_x$$

muu seas on juured:

$$x=1 \text{ ja } x=-3.$$

Seda arvlauset võime jagada $(x-1)(x+3)$-ga, s. t. avaldusega, mis sisaldab tundmatu x-i; saame arvlause

$$A_x = B_x,$$

millel oletuse järele juuri

$$x=1 \text{ ja } x=-3$$

ei ole. Meie oleme siis antud arvlausest (5) uue arvlause (6) saanud, mis endisega ei ole samane.

Seega oleme näidanud, et arvlauset avaldustega, mis sisaldavad tundmatu, kasvatades ehk jagades arvlause võime saada, mis antud arvlausega ei ole samane.

Mõnikord aga võib ka arvlauseid avaldustega kasvatada ehk jagada, mis sisaldavad tundmatut, ilma et arvlause juu-

red selle läbi muutuks; lähemalt meie nende juhuste juures ei peata.

Üleüldse aga peame igakord, kui meie arvlauseid niisuguste avaldustega kasvatame ehk jagame, silmas pidama, et selle läbi saadud uutel arvlausetel mõned juured endistega võrreldes juurde võivad ilmuda, ehk selle vastu ära kaduda.*

§ 68. Järeldused.

1) Teise teoreemi põhjal võime arvlausis järgmisi teisendusi teha: kõikide liigete märgid võime vastupidisteks muuta, sest märkide muutmine tähendab liigete kasvatamist —1-ga.

Näit.:

$$-4-3x=-2x+8.$$

Kasvatades kõiki liikmeid „—1"-ga, saame

$$4+3x=2x-8.$$

Tundmatuid eraldades tuntud liigetest, leiame:

$$3x-2x=-8-4$$

ehk

$$x=-12.$$

2) Olgu antud esimese astme arvlause:

$$2x-1=14-3x$$

ehk, peale liigete eraldamist:

$$2x+3x=14+1,$$

või

$$5x=15.$$

Viimane arvlause on kõige lihtsamal kujul kirjutud, ta seisab koos ainult kahest liikmest.

Et meie x-i suurust otsime, siis peame tema leidmiseks arvlause pahemal pool saama ainult x ja seega vabanema x-i koeffitsiendist.

Et x-i koeffitsiendist vabaneda, jagame mõlemad pooled 5-ga:

$$x = \frac{15}{5} = 3.$$

2) Näitus:

$$3 - z = 2z - 15.$$

Eraldame tundmatud tuntud liigetest:

$$-z - 2z = -15 - 3,$$

ehk

$$-3z = -18,$$

või, märke muutes:

$$3z = 18,$$

kust järgneb:

$$z = 6.$$

Alati, kui arvlausele kõige lihtsama kuju oleme annud ja tundmatu liikme ees seisab miinus, muudame liigete märgid vastupidisteks (kasvatame — 1-ga).

3) Kui arvlauses esinevad murrud, siis võib neid ära kaotada, kui kõiki arvlause liikmeid murdude ühise nimetajaga kasvatame.

Näitus:

(5) $$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 14.$$

Kasvatame kõiki liikmeid murdude ühise nimetajaga, s. o. 12-ga:

$$\frac{12\,x}{4} + \frac{12 . x}{3} = 12 . 14,$$

ehk, peale koondamist:

$$3x + 4x = 168,$$

või

$$7x = 168,$$

$$x = 24.$$

(6) $$\frac{x+7}{4} - \frac{x-1}{8} = \frac{x-5}{2} + \frac{x-3}{6}.$$

Et murdudest vabaneda, kasvatame arvlauset 24-ga:

$$\frac{24(x+7)}{4} - \frac{24(x-1)}{8} = \frac{24(x-5)}{2} + \frac{24(x-3)}{6},$$

ehk, peale murdude koondamist:

$$6(x+7) - 3(x-1) = 12(x-5) + 4(x-3).$$

Avame klambrid:

$$6x + 42 - 3x + 3 = 12x - 60 + 4x - 12.$$

Eraldame tuntud tundmatutest ja lühendame:

$$6x - 3x - 12x - 4x = -42 - 3 - 60 - 12$$

ehk

$$-13x = -117,$$

või:

$$13x = 117,\ x = 9.$$

§ 69. Järg.

Harilikult ei talitata mitte täpipealt nii, kui kahes viimases näituses, vaid järgmiselt.

Oletame, et murdu $\frac{x-1}{8}$ vaja on kasvatada 24-ga:

$$\frac{24(x-1)}{8}$$

ehk, peale koondamist

$$3(x-1).$$

Meie näeme, et lõpulikult ainult murru lugeja kasvatada tuleb murru „täiendusteguriga". Niiviisi võime alati talitada, kui arv, millega murdu kasvatame murru, nimetajaga on jagatav. Kuid arvlauset murdude ühise nimetajaga kasvatades, on meil tegemist just niisuguse arvuga. Sellepärast on lihtsam järgmist teha: otsime arvlause murdude ühise nimetaja üles; ühist nimetajat murru nimetajaga jagades leiame selle murru täiendusteguri, mida lõpuks ainult murru lugejaga kasvatame.

Näit.

1) $$\frac{5x-11}{4} - \frac{x-1}{10} = \frac{11x-1}{12}.$$

Ühine nimetaja murdudel on 60. Murdude täiendustegurid on: esimesel 15, teisel 6 ja kolmandal 5; harilikult kirjutakse need arvud arvlause murdude kõrvale kaare peale:

$$\frac{5x-11}{4}\overset{15}{\smile} - \frac{x-1}{10}\overset{6}{\smile} = \frac{11x-1}{12}\overset{5}{\smile}.$$

Kasvatame täiendustegurid lugejatega:

$$(5x-11)\,15-(x-1)\,6=(11x-1)\,5$$

ehk, peale klambrite avamist:

$$75x-165-6x+6=55x-5,$$

millest harilikul viisil edasi arvates järgneb:

$$75x-6x-55x=165-6-5,$$

$$14x=154,$$

$$x=11.$$

Tähele tuleb panna juhust, kui murru ees seisab, „—“ nagu antud näituses teise murru ees. Murru lugeja $x-1$ tuleb kasvatada 6-ga ja kasvatis pärast maha arvata, sest murru ees on miinus.

Peale kasvatamist saame $6x-6$ ja peale mahaarvamist

$$-6x+6.$$

2) $$\frac{7x+9}{4}-\left(x-\frac{2x-1}{9}\right)=7.$$

Avame arvlauses klambrid:

$$\frac{7x+9}{4}-x+\frac{2x-1}{9}=7.$$

Vabastame arvlause murdudest:

$$\frac{7x+9}{4}\overset{9}{\smile} - x + \frac{2x-1}{9}\overset{4}{\smile} = 7.\overset{36}{\smile}$$

$$(7x+9)\,9-36x+(2x-1)\,4=7\,.\,36.$$

Avame eelmises ühtivuses klambrid:

$$63x+81-36x+8x-4=252.$$

Tundmatuid eraldades tuntud liigetest, leiame:

$$63x - 36x + 8x = 252 - 81 + 4,$$

$$35x = 175,$$

$$x = 5.$$

Kõike kokku võttes, mis neljas viimases paragrahvis kõneldud, võime esimese astme ühe tundmatuga arvlauseid nii välja arvata: vabastame arvlause klambritest ja murdudest, kanname tundmatud liikmed ühele (harilikult pahemale), tuntud teisele poole (harilikult paremale), lühendame kummagi poole avaldused ja jagame mõlemad pooled tundmatu koeffitsiendiga.

* Vaatleme arvlauset:

$$\frac{3x-1}{x-4} + \frac{2x-1}{x+4} - 5 = \frac{96}{x^2-16}.$$

Murdudest vabastamise otstarbel peame kasvatama liikmeid ühise nimetajaga. Kuid et viimase murru nimetaja algtegurid on $x+4$ ja $x-4$, siis on selge, et ühine nimetaja on: $(x+4)\,(x-4)$.

Edasi talitame nii kui enne seletud, s. t. kasvatame arvlause liigete lugejad nende täiendusteguritega.

$$\frac{\overbrace{3x-1}^{x+4}}{x-4} + \frac{\overbrace{2x-1}^{x-4}}{x+4} - \frac{\overbrace{5}^{x^2-16}}{1} = \frac{96}{x^2-16},$$

$$3x^2 - x + 12x - 4 + 2x^2 - x - 8x + 4 - 5x^2 + 80 = 96,$$

$$2x = 16,$$

$$x = 8.$$

* Võtame teise näituse:

$$\frac{3}{4x^2+20x+25} + \frac{4}{(2x+1)^2} = \frac{7}{(2x+5)\,(2x+1)},$$

Et $4x^2 + 20x + 25 = (2x+5)^2$, siis on ühine nimetaja

$$(2x+5)^2\,(2x+1)^2.$$

Täiendustegurid on:

1) $(2x+1)^2$;

2) $(2x+5)^2$;

3) $(2x+5)(2x+1)$.

Antud arvlause võime järgmiselt ümber kirjutada:

$$3(2x+1)^2+4(2x+5)^2=7(2x+5)(2x+1),$$

kust leiame:

$$12x^2+12x+3+16x^2+80x+100=28x^2+14x+70x+35.$$

$$8x=-68,$$

$$x=-\frac{17}{2}.$$ *

* Kolmas näitus:

$$\frac{x}{x^2-1}+\frac{2x}{1-x}=-2.$$

Et esimese murru nimetaja x^2-1 laguneb algteguriteks $(x+1)(x-1)$, siis võime, teise murru ees märki muutes, saada tema nimetajaks $x-1$, s. o. esimese murru nimetajas esineva teguri:

$$\frac{x}{\underbrace{(x+1)}_{1}(x-1)}-\frac{2x}{\underbrace{x+1}_{x^2-1}}=-2.$$

Arvlauset murdudest vabastades leiame:

$$x-2x(x+1)=-2(x^2-1),$$

ehk

$$x-2x^2-2x=-2x^2+2,$$

ehk, peale sarnaste liigete ühendamist:

$$-x=2, \quad \text{või} \quad x=-2.$$

Järelkatseks arvame välja antud arvlause pahema poole arvsuuruse, pannes temasse $x=-2$:

$$\frac{-2}{(-2)^2-1}+\frac{-2\cdot 2}{1+2}=\frac{-2}{4-1}+\frac{-4}{3}=\frac{-2}{3}+\frac{-4}{3}=-\frac{6}{3}=-2.$$

Et aga arvlause parem pool on ka -2, siis on arvlause õieti väljaarvatud. *

* § 70. Tähelised arvlaused.

Matemaatikas tarvitakse sagedasti arvlauseid, kus tuntud arvud on tähtedega kujutud.

Võtame sellekohase arvlause:

$$ax - b = -cx + d.$$

Tundmatuks siin arvlauses on x, sest tundmatuid tähendakse harilikult tähestiku viimaste tähiga x, y, z-iga j. n. e., kuna aga a, b, c ja d on tuntud arvud. Niisuguste arvlausete lahendamiseks käime endist teed: kõige pealt eraldame tuntud liikmed tundmatutest:

$$ax + cx = b + d.$$

Et x-i koeffitsienti kujutada, võtame pahemal pool liigete ühise teguri x-i klambrite ette:

$$x(a + c) = b + d.$$

Arvlauset x-i koeffitsiendiga, s. o. $a + c$-ga, jagades leiame:

$$x = \frac{b + d}{a + c}.$$

2. näitus:

$$\frac{a + bx}{a - 2b} = \frac{c + dx}{c - 2d}.$$

Vabastame arvlause murdudest, milleks tema kasvatame ühise nimetajaga: $(a - 2b)(c - 2d)$-ga.

$$\frac{\overbrace{a + bx}^{c - 2d}}{a - 2b} = \frac{\overbrace{c + dx}^{a - 2b}}{c - 2d},$$

$$ac + bcx - 2ad - 2bdx = ac + adx - 2bc - 2bdx,$$

kust järgneb:

$$bcx - adx = 2ad - 2bc,$$

$$x(bc - ad) = 2(ad - bc),$$

$$x = \frac{2(ad - bc)}{bc - ad} = -2. *$$

Juba kõige vanemas matemaatika ajaloo allikas Rhindi papüüruses puutume kokku arvlausetega. Selles dokumendis on näituseks antud ülesanne, mille lahendamine arvlause

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x + x = 37$$

abil võimalik.

Pärastpoole leiame uurimisi arvlausete üle Diophant'i juures. Araablased, kes kasutasid ja suurendasid 7. aastasajast 13. aastasajani neid matemaatilisi varandusi, mis nad pärisid greeklastelt ja hindudelt, on just arvlausete käsitamisel annud algebrale tema nime. Terve rea araabia matemaatikute eesotsas seisab Muhammed ibn Musa Alchwarizmi, kes a. 820 kirjutas õpperaamatu „Algebr w' almukabala". Sõnadega: Algebr (loe: aldshebr) ja almukabala kujutas araabia matemaatik arvlause teisendamisi.

Kui näituseks arvlausest

$$2x + 3 = x + 3,$$

ühesuguste liigete mahaarvamisega saadakse:

$$2x = x,$$

siis on see almukabala.

Kui aga arvlausest

$$ax - b = x^2$$

liikme — b ülekandega paremale poole saadakse

$$ax = x^2 + b,$$

siis nimetati seda algebr.

Pärastpoole jäeti sõna almukabala ära ja hakati algebr'i asemel sõna algebra tarvitama terve teadusharu tähendamiseks.

§ 71. Arvlausete tarvitamine.

Arvlausete abil on võimalik lahendada kõige mitmesugusemaid ülesandeid. Kõik ülesanded, mis aritmeetikast tuttavad, on väljaarvatavad arvlausete abil.

Kuid veel enam, palju ülesandeid on olemas, millede peale aritmeetika võimetu on vastama, sellepärast, et nende

ülesannete väljaarvamiseks tehteid tarvis, mida ei tunta aritmeetikas.

Ka muutuvad aritmeetikas mitmesugused harutused, mis ülesande lahendamisel tarvilikud, nii keeruliseks ja sellega vähe arusaadavaks, et mitte igaüks harutuste käiku silmas ei suuda pidada.

Algebras on aga harutused sagedasti palju lihtsamad ja nende kujutused igaühele kergesti arusaadavad. Et näidata, missugune vahe on nende võtete vahel, mida tarvitavad aritmeetika ja algebra, võtame järgmise lihtsa ülesande:

15 kg soolahapet kahte nõusse valada, nii et esimeses oleks 3 kg hapet rohkem kui teises.

Harilikult harutame nii: oletame, et oleme juba 15 kg kahte nõusse valanud, nagu nõutakse.

Kui esimesest nõust need kolm kg ära võtta, mis temas rohkem kui teises, siis jääb nõudesse kokku

$$15 - 3 = 12 \text{ kilogrammi}$$

järele, ja kummagisse nimelt:

$$12 : 2 = 6 \text{ (kg)}.$$

Tõelikult oli aga ainult teises nõus 6 kg, sest et temast midagi ära ei võetud, kuna esimeses oli

$$6 + 3 = 9 \text{ kg}.$$

Algebras lahendakse seesama ülesanne järgmiselt.

Et meie ei tea, kui palju valada kummagisse nõusse hapet, siis tähendame nõutava kilogrammide arvu teises nõus mingisuguse tähega ära, olgu x-ga. Et esimeses nõus hapet kolme kg võrra peab enam olema kui teises, siis on temas $x + 3$ kg hapet. Kokku on mõlemis nõus siis $x + (x + 3)$ ehk lihtsalt:

$$x + x + 3 \text{ (kg.)},$$

või

$$2x + 3 \text{ (kg.)}.$$

Teada on aga, et nõudes kokku oli 15 kg hapet, seega peab $2x + 3$ niisama palju olema kui 15, ehk lühidalt:

$$2x + 3 = 15.$$

Meie näeme, et ülesanne meid on arvlause juurde toonud, mida välja arvata, s. o. x-i leida oskame. Seda arvlauset tuntud viisil lahendades leiame järk-järgult:

$$2x + 3 = 15,$$
$$2x = 15 - 3,$$
$$2x = 12,$$
$$x = 6.$$

Kuid x tähendab teise nõu happe kilogrammide arvu, seega on teises nõus 6 kg hapet. Esimese nõu happe kilogrammide arv oli

$$x + 3,$$

ehk

$$6 + 3,$$

mis on enne saadud resultaadiga ühtlane.

Kui viise võrrelda, millede abil ülesande välja arvasime, siis võime öelda järgmist: aritmeetikas opereerime tuntud arvudega 15, 3 ja 2-ga. Neist arvudest saame teatud tehete abil uued arvud 12, 6 ja 9, milledest viimased kaks on vastused meie ülesande jaoks.

Algebra viisi järele astume vastupidist teed. Ilma et puudutaksime tuntud arve, kujutame veel ühe tundmata arvu, mida ülesandes nõutakse, millega aga käime ümber, nagu oleks ta tuntud, see tähendab, meie arvame temale juurde ja temast maha teisi arve, ehk kasvatame teda ja jagame.

Nende tundmata ja antud arvude abil loome kaks hulka, mis peavad olema ühesuurused ülesande andmete põhjal, ja seome nad ühtivusmärgiga. Arvlause arvame välja, ja saadud tundmatu arvsuurus ongi vastus.

Eelmisest näeme, et enne, kui algebraliste võtete abil saame mingit ülesannet välja arvata, peame selle ülesande kohase arvlause kokku seadma; teiste sõnadega, meie peame seda, mis ülesandes sõnadega välja on öeldud, kujutama algebraliste sümboolide (tähti ja märke) avaldusena, mida nimetakse arvlauseks. Arvlausete kokkuseadmine antud ülesannete järele on siis tegevus, mis ülesande väljaarvamisel on kõige tähtsam,

sest arvlause väljaarvamine on küsimus, mis teataval viisil tuleb lahendada.

Tähendus: meie kõneleme siin ja eespool ainult neist ülesannetest, millede väljaarvamine viib, arvlause juurde, kus tundmatu esineb ainult esimesel astmel. Niisuguseid arvlauseid oskame aga, nagu nägime, välja arvata, sellepärast võimegi öelda, et arvlause kokkuseadmise järele on ülesanne lahendud.

Arvlausete kokkuseadmiseks ei ole üleüldiseid juhtlauseid olemas, vaid nende kokkuseadmisel peab silmas pidama ülesande iseäraldusi. Võib aga öelda, et järgmiselt peab talitama:

Ülesanne tuleb tähelpanelikult läbi lugeda ja ära määrata:

1) Mis on antud.

2) Mida otsitakse.

Selle järele oletame, et otsitav (tundmatu) on teada, ja kujutame otsitava arvu tähega, harilikult x-ga.

Võib olla, et otsitavaid on rohkem kui üks; siis tähendakse üks neist tähega, ja seatakse teiste tundmatute avaldused võetud tähe ja antud arvude abil kokku.

Selle järele seotakse tuntud arvud tundmatuga, nii et kõik suurused, milledest ülesandes kõneldakse ja mis neist otsekohe järgnevad, oleksid tekitud. Otsitakse kaks hulka, mis on ühesuurused ja seotakse nad = märgiga.

Lahendakse saadud arvlause ja tehakse järelkatse, kas saadud arv vastab ülesande nõuetele.

§ 72. Näitused.

1. ülesanne. Otsida arv, mille kolmekordne, mahaarvatud sajast, annab niisama palju, kui arvu kahekordne, kokku arvatud viieteistkümnega.

Arvamine.

Tähendame otsitava arvu x-ga.

Selle arvu kolmekordne on $3x$.

Arvu kolmekordne, maha arvatud 100-st, on:

$$100 - 3x.$$

Arvu kahekordne on $2x$.

Viimase arvu ja 15 summa on $2x + 15$.

Kuid ülesande tingimise järele peavad $100 - 3x$ ja $2x + 15$ ühesuurused olema:

$$100 - 3x = 2x + 15.$$

Arvame selle arvlause välja:

$$-3x - 2x = -100 + 15$$

ehk

$$-5x = -85$$

ehk

$$5x = 85,$$

$$x = 17.$$

Järelkatse näitab, et 17 tõesti on otsitav arv.

Meie oleks võinud arvlause kokkuseadmisel ka järgmiselt toimetada:

Otsitav arv on x. Talitame selle x-ga nii, nagu tahaks meie järelkatset teha, kas ülesanne ka õieti on lahendud.

Selleks võtame x-i kolmekordse, saame $3x$; arvame selle arvu sajast maha: $100 - 3x$.

Selle järele otsime x-i kahekordse: $2x$ ja arvame temale 15 juurde: $2x + 15$.

Kuid need arvud $100 - 3x$ ja $2x + 15$ on ühesuurused, kust järgneb arvlause:

$$100 - 3x = 2x + 15,$$

mis endisega on samane.

2. ülesanne.

Raudtee rongi III klassi vagunites sõitis 4 korda enam reisijaid kui II klassi vagunites. Tee peal läksid III klassist 32 sõitjat välja, kuna II klassi 12 reisijat juurde tuli, mille järele teises klassis oli pool kolmanda klassi sõitjate arvust. Kui palju oli lõpuks III klassis reisijaid?

Olgu vastus: x reisijat.

Et kolmandast klassist 32 reisijat välja on tulnud, siis pidi seal esialgu $x + 32$ reisijat olema.

II klassis oli lõpuks pool III klassi reisijate arvust, seega $\frac{1}{2}x$ inimest, enne juurdetulekut aga 12 inimese võrra vähem, s. o. $\frac{1}{2}x - 12$ sõitjat.

Kuid esiotsa oli III klassis sõitjaid 4 korda rohkem, kui II klassis. See tingimine võimaldab meile arvlause väljakirjutamise. Nimelt, selleks, et kaht ühesuurust arvu saada, peame väiksema arvu, s. o. $\frac{1}{2}x - 12$ neljaga kasvatama, siis saame suurema arvu, s. o. $x + 32$:

(A) $$\left(\frac{1}{2}x - 12\right)4 = x + 32.$$

Oleks võinud ka suuremat arvu, s. o. $x + 32$ neljaga jagada, siis oleksime saanud väiksema arvu ja arvlause oleks järgmine:

$$\frac{1}{2}x - 12 = \frac{x + 32}{4}.$$

Arvame esimese arvlause (A) juure välja.

Klambrid avades leiame:

$$2x - 48 = x + 32.$$

Edasi:

$$2x - x = 32 + 48,$$
$$x = 80.$$

Järelkatse.

Lõpuks oli kolmandas klassis 80, enne mahaminekut $80 + 32 = 112$ sõitjat. Teises klassis oli lõpuks pool 80-st, s. o. 40, enne juurdetulekut aga $40 - 12 = 28$ sõitjat. Arv 28 on tõesti neli korda vähem arvust 112, mis näitab, et ülesanne õieti on lahendud.

3. ülesanne.

Kui arvule, mis kolme ühesuguse numbri abil kirjutud, 112 juurde arvata ja summa 125-ga jagaga, siis saame jaos ühekohalise arvu, mis endise numbriga kirjutakse. Missugune on see arv?

Et arv on kolmekohaline, siis esinevad temas ühelised, kümnelised ja sajalised. Kuna aga neid ülesande tingimise järele on ühepalju, siis võime oletada, et arvus on x ühelist, x kümnelist ja x sajalist.

Kuidaviisi seda arvu aga ära tähendada?

Seda ei või meie $x.x.x$ kirjutada, sest xxx on x kasvatud x kasvatud x-ga.

Kui meie näituseks võtame arvu 583, siis ei ole siin mitte $5.8.3$ vaid $500+80+3$, see tähendab, et 5 sajalist ja 8 kümnelist on ühelisteks alandud ja 3-ga kokku arvatud. Sedasama teeme meie ka arvuga, kus x sajalist, x kümnelist ja x ühelist on. Et x sajalist ühelisteks alandada, peame x-i kasvatama sajaga, saame $100x$ ühelist, x kümnelisest saame $10x$ ühelist.

Sellega võime otsitavat arvu nii kujutada:

$$100x+10x+x \text{ ehk } 111x.$$

Selle arvu ja 112 summa on $111x+112$.

Viimast summat 125-ga jagades saame:

$$\frac{111x+112}{125}.$$

Kuid ülesande järele on jagu endise numbriga kirjutud arv, s. o. x, seega järgneb arvlause:

$$\frac{111x+112}{125}=x.$$

Vabastame arvlause murrust:

$$111x+112=125x.$$

Edasi leiame:

$$111x-125x=-112,$$

$$-14x=-112,$$

ehk

$$14x=112,$$

$$x=8.$$

Otsitav arv on 888.

Järelkatse:

$$888 + 112 = 1000,$$

$$1000 : 125 = 8.$$

4. ülesanne:

Kahe küla M ja N vahe on 10 km. Teekäija astus külast M välja kell 8 homm. ja jõudis külla N kell 10. Ratsanik sõitis külast N välja kell 9 ja jõudis külla M kell 9.40 min. Kunas ja kus kohal läksid nad üksteisest mööda?

Selles ülesandes nõutakse vastust kahe küsimise peale, kella-aja ja koha üle, ehk teiste sõnadega, nõutakse, mitu kilomeetrit N-st ehk M-st oli kokkusaamise koht.

Selge on, et kui teame vastuse ühe küsimise peale, siis leiame teise kergesti.

Olgu möödamineku koht punkt R, mis asub M-st z kilomeetrit kaugel (joon. 24).

M-st kuni R-ni oli z kilomeetrit. Selle maa käis teekäija $\frac{z}{5}$ tunniga ära, sest ta läks 2 tunnis 10 km., 1 tunnis seega 5 km. N-st kuni R-ni oli $10 - z$ kilom. Ratsanik sõitis ära selle maa $\frac{10-z}{15}$ tunniga, sest ratsaniku sõidu kiirus oli 15 km. tunnis. Kuid $\frac{z}{5}$ tundi peab ühe tunni võrra suurem olema kui $\frac{10-z}{15}$, sest et teekäija läks ühe tunni varem teele kui ratsanik, ja mõlemad jõudsid korraga punkt R. Et ühtivust saada, peame $\frac{z}{5}$-st maha arvama 1, leiame avalduse, mis ühesuurune avaldusega $\frac{10-z}{15}$:

$$\frac{\overset{3}{\smile}}{5} - \overset{15}{\smile}1 = \frac{10 - \overset{1}{\smile}z}{15}.$$

Järk-järgult saame siit:

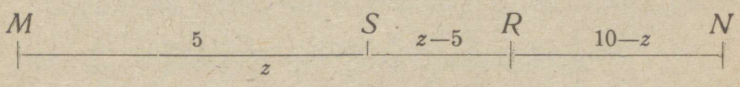
$$3z - 15 = 10 - z;$$

$$3z + z = 10 + 15;$$

$$4z = 25;$$

$$z = 6^1/_4.$$

Selle ülesande oleksime võinud ka järgmiselt välja arvata Teekäija käis kõige tee kahe tunniga ära, seega oli tema käigu kiirus 5 km. tunnis, kuna aga ratsanik sellesama tee 40 minutiga $= \frac{2}{3}$ tunniga ära sõitis, millest ratsaniku sõidu kiiruse $10 : \frac{2}{3} = 15 \frac{\text{kilomeetrit}}{\text{tunnis}}$ leiame.



Joon. 24.

Ratsanik sõitis N-st kell 9 välja; sel silmapilgul oli teekäija juba 1 tunni teel olnud ja seega 5 kilomeetrit M-st kaugele jõudnud. Tähendame selle punkti S-ga. Vahe $MS = 5$km., $SR = z - 5$ km., $RN = 10 - z$ km. Et maad SR ära käia, läheb teekäijal $\frac{z-5}{5}$ tundi vaja.

Ratsanik sõidab aga maa NR ehk $(10 - z)$ kilomeetrit $\frac{10-z}{15}$ tunniga ära.

Kuid teekäija ja ratsanik sõidavad ühel ja samal silmapilgul esimene S-st, teine N-st välja ja jõuavad korraga punkti R. Arusaadav on siis, et aeg $\frac{z-5}{5}$ tundi ajaga: $\frac{10-z}{15}$ tundi on ühesuurune:

$$\frac{\overset{3}{\smile}}{z-5} = \frac{\overset{1}{\smile}}{10-z}.$$

Vabastame arvlause murdudest:

$$3z - 15 = 10 - z;$$

harilikul viisil edasi arvates saame järk-järgult:

$$3z + z = 10 + 15;$$

$$4z = 25;$$

$$z = 6\frac{1}{4},$$

s. t. et $6\frac{1}{4}$ kilomeetrit külast M said mõlemad kokku. Et teada saada, mis kella ajal see oli, paneme tähele, et teekäija $6\frac{1}{4}$ kilomeetrit ära oli käinud, ja et tema käigu kiirus oli 5 kilomeetrit tunnis, siis saame $6\frac{1}{4}$ kilomeetri käimiseks tarvitud aja, kui $6\frac{1}{4}$ jagame 5-ga.

$$6\frac{1}{4} : 5 = \frac{25}{4.5} = \frac{5}{4} \text{ tundi} = 1\frac{1}{4} \text{ tundi.}$$

Teekäija läks aga kell 8 välja, seega pidi ta kell 9.15 min. ratsanikuga kohtama.

Järelkatse: Teekäija käis $1\frac{1}{4}$ tunniga $6\frac{1}{4}$ kilomeetrit. Ratsanik sõitis aga $\frac{1}{4}$ tunniga (sest ratsanik sõitis välja alles kell 9) $\frac{15.1}{4} = 3\frac{3}{4}$ kilomeetrit. Liginenud olid nad üksteisele kell 9.15 min.

$$6\frac{1}{4} \text{ km.} + 3\frac{3}{4} \text{ km.} = 10 \text{ kilomeetrit,}$$

tähendab, sel kella ajal läksid nad üksteisest mööda, mis tõendab ülesande õiget väljaarvamist.

5. ülesanne.

Raudteel on kaks paari rööpaid, mida mööda ühes ja samas sihis sõidavad sõidu- ja kaubarong. Sõidurongi liikumise kiirus on 30 kilomeetrit tunnis. Missugune on kaubarongi liikumise kiirus tunnis, kui reisija, kes vaguni aknast välja vaatas, kaubarongist 40 sekundi jooksul mööda sõitis? Kaubarongi pikkus = 200 meetrit.

Et sõidurong 40 sekundiga kaubarongist mööda sõitis, siis peab sõidurong 40 sekundiga täpipealt 200 meetrit enam sõitma, kui kaubarong.

Olgu viimase rongi liikumise kiirus x $\frac{\text{kilom.}}{\text{tunnis}}$. Ühe sekundiga jõuab ta edasi $\frac{x}{60.60}$ kilomeetrit ja 40 sek. $\frac{40x}{60.60} = \frac{x}{90}$ kilomeetrit.

Sõidurong liigub 1 sekundiga $\frac{30}{60.60} = \frac{1}{120}$ kilomeetrit edasi ja 40 sekundiga $\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$ kilomeetrit.

Kuid $\frac{1}{3}$ kilomeetrit peab, nagu öeldud, $\frac{x}{90}$ kilomeetrist just 200 meetrit $= \frac{1}{5}$ km. enam olema.

Et ühtivust saada, peame vähemale arvule, s. o. $\frac{x}{90}$-le juurde panema $\frac{1}{5}$; summa on siis $\frac{1}{3}$-ga ühesuurune:

$$\underset{\smile}{\frac{x}{90}} + \underset{\smile}{\frac{18}{5}} = \underset{\smile}{\frac{30}{3}};$$

$$x + 18 = 30;$$

$$x = 12.$$

Seega on kaubarongi liikumise kiirus 12 kilomeetrit tunnis.

Tähendus: Ülesandes on sõidurongi kiirus antud kilomeetrites tunnis, möödasõidu aeg aga sekundites ja kaubarongi pikkus meetrites. Ülesande lahendamisel peame selle peale tähelpanu juhtima, et kõik pikkuse, aja j. n. e. mõõdud oleksid vastavalt ühenimelised. Üleüldse peavad avaldused, mis samaseid suurusi (näit. pikkus) kujutavad, ühenimelistes mõõtudes ilmuma. —

6. ülesanne.

Aerutaja võib seisvas vees tunnis 9 kilomeetrit edasi jõuda. Jõge mööda *A*-st *B*-sse allavett sõudes tarvitab ta kaks korda vähem aega, kui *B*-st *A*-sse vastuvett sõites. Missugune on jõevoolu kiirus?

Olgu voolu kiirus x $\frac{\text{kilomeetrit}}{\text{tunnis.}}$

Allavett sõudes on aerutaja kiirus võrreldes kaldaga $x + 9$. Vastuvett sõudes on aerutaja kiirus võrreldes kaldaga $9 - x$. Kuid et allavett liikudes teatud maa kaks kord rutem ära sõidetakse, kui vastuvett, siis peab $x + 9$ kaks korda suurem olema kui $9 - x$.

Arvlause seadmiseks peame vähema hulga: $x - 9$ kahega kasvatama, et suuremat hulka $x + 9$ saada.

$$2(9 - x) = 9 + x;$$
$$18 - 2x = 9 + x;$$
$$+ 3x = + 9;$$
$$x = 3,$$

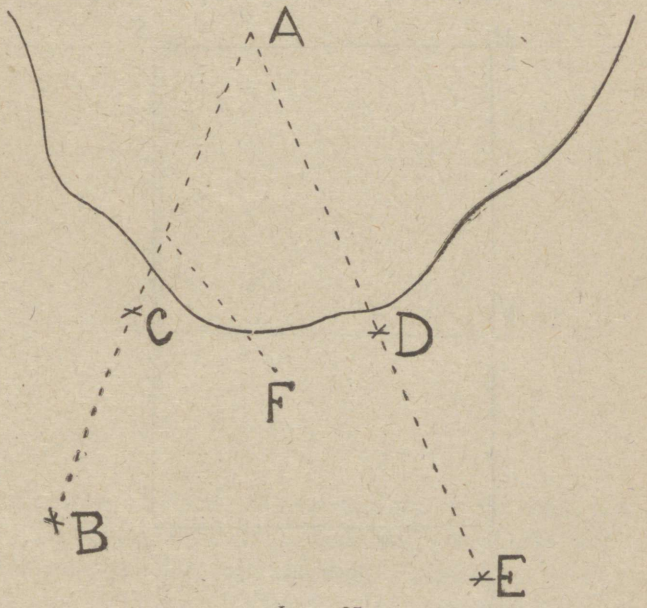
s. t., et jõevoolu kiirus on $3 \frac{\text{kilom.}}{\text{tunnis}}$.

V.

Koordinaadid ja graafilised kujutused.

§ 73. Koordinaadid.

Kujutame endile ette kalamehe, kes suurema järve või mere peal mõni kilomeeter kaldast eemal heidab võrgud vette ja jätab nad mõneks ajaks sinna. Kuidas võib tema nad jälle uuesti leida?



Joon. 25.

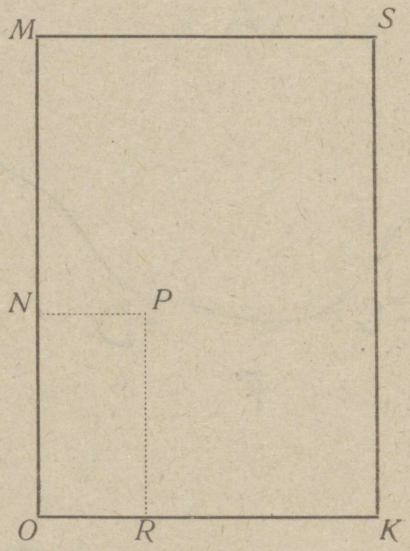
Kui koht *A* (joon. 25), kuhu võrgud jäeti, on mõne kilomeetri kaugusel kaldast, siis paistavad sinna kohta kahtlemata

kaldalt üksikult kasvavad pikemad puud, majad, kirikutornid j. n. e. ära.

Kalamehel on vaja tähele panna, missugust kaks niisugust keha on tema võrkudega ühe sirgjoone peal. Olgu nad maja *C* ja kirikutorn *B*.

Nüüd on kalamehel siht *BCA* teada, mille peal tema võrgud asuvad, kuid selle sihi teadmine üksi ei võimalda temal võrkude leidmist. Kui ta aga veel teise sihi on tähele pannud, mis ka *A*-st läbi lõikab, siis on koha *A* leidmine kerge asi.

Oletame, et *D* (mingisugune ehitus kaldal) ja *E* (kaugele nähtav puu) on *A*-ga ühe joone peal, siis on punkt *A* määratud kahe joone *BCA* ja *EDA* läbi, millede lõikpunkt ongi *A*. Kui kalamehe kodu on punkt *F*, siis sõidab ta, kui võrke vaja välja võtta, esite sihi *BA* peale ja seda mööda nii kaua edasi, kuni sihi *EA*-ni; seal ümbruses peab ta oma võrke otsima.



Joon. 26.

2) Täisnurksel põllul (joon. 26) on poiss linnupesa *P* leidnud ja tahaks seda pärast teistele näidata. Kuid tal ei ole midagi ligi, millega kohta kaugelt nähtavaks teha.

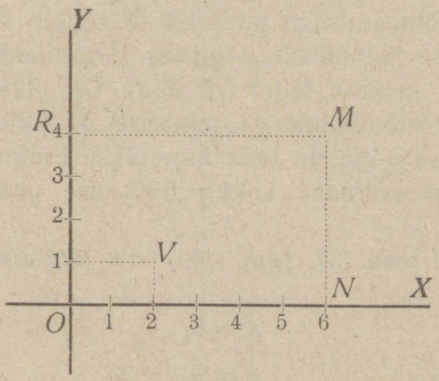
Et seda kohta võiks leida, toimetab poiss järgmiselt.

Ta mõõdab sammudega pesa P kauguse põllupeenrast OK; selleks astub ta mööda ristjoont PR kuni OK-ni. Sealt mõõdab poiss sammudega punkti R kauguse põllu nurgast O-st.

Olgu joonlõik PR 42 sammu ja RO 28 sammu, siis võib poiss pesa koha jällegi üles otsida, kui ta O-st 28 sammu paremale poole ja sealt ristjoont mööda 42 sammu edasi põllule astub. Arusaadav on, et selle asemel, et R kaugust O-ni mõõta, oleks võinud ka P kaugust peenrast OM mõõta, sest $PN = RO$. Neist kahest näitusest selgub, et võimalik on tasapinna punkte joonte ehk arvude abil ära tähendada.

Kõige sagedamini tehakse järgmiselt.

Tõmmatakse kaks ristjoont OX ja OY, mida koordinaatide telgedeks nimetakse ja milledest esimene (joonistuse peal) on harilikult horitsontaalne ja teine vertikaalne (joon. 27). Esimest nimetakse abstsisside ja teist ordinaatide teljeks.



Joon. 27.

Mingisuguse punkti M seisukohta võib siis järgmiselt määrata. Tõmbame läbi M jooned: MN, mis ristjoon OX-ga (ehk $\parallel$ OY-ga), ja MR, mis ristjoon OY-ga (ehk $\parallel$ OX-ga).

Mõõdame, pikkuse üksuseks tsentimeetrit, detsim., tolli j. n. e. võttes, joonlõikude MR ja NM pikkuse ära, ehk, mis seesama on, telje OX lõigu ON (mille algus O ja lõpp N) ja telje OY lõigu OR (algusega O ja lõpuga R).

Mõõtmine annab meile kaks arvu, olgu $ON = 6$ (cm), $OR = 4$ (cm). Arusaadav on, et teades neid kahte arvu 6 ja 4, alati võime punkt M üles leida.

Selleks mõõdame punktist O mööda OX paremale poole 6 pikkuse üksust, saades punkt N, ja telje OY peal punktist O ülespoole 4 pikkuse üksust, leiame punkt R.

Punktidest N ja R tõmbame telgedele OX ja OY ristjooned NM ja RM, millede lõikpunkt ongi otsitav punkt M. Niisama võime teise punkti leida, kui ON oleks 2 ja $OR = 1$. Selleks võtame punktist O alates telje OX peal lõike pikkusega 2 ja telje OY peal lõike pikkusega 1 ja tõmbame saadud punktidest telgede OX ja OY-le ristjooned. Nende ristjoonte lõikpunkt V ongi otsitav punkt.

Siit näeme, et tasapinna peal asuvat punkti M kahe arvu abil võimalik on ära tähendada, mida teades punkti alati võimalik on leida.

Esimene arv kujutab lõigu ON pikkust teljel OX (joon. 27), mis ristjoone tõmbamisega punktist M teljele OX tekib. Seda arvu tähendakse üleüldiselt x-iga ära ja nimetakse abstsiss'iks.

Teine arv määrab teljel OY lõigu OR pikkuse, mis saadakse ristjoone tõmbamisega punktist M telje OY-le. Seda arvu tähendakse y-iga, ja teda nimetakse ordinaat'iks

Abstsiss ja ordinaat kokku hüütakse punkti koordinaatideks.

Punkti M joon. 27. peal võib siis järgmise kahe ühtivusega kujutada

$$x = 6,$$

$$y = 4.$$

Niisama punkti V järgmiselt:

$$x = 2,$$

$$y = 1.$$

Lühidalt kirjutakse seda nii:

$$M(6,4),$$

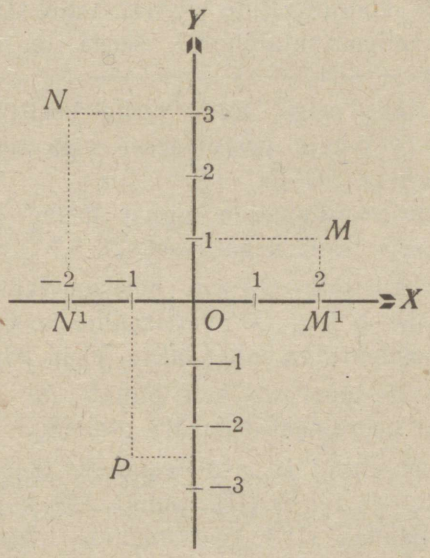
$$V(2,1),$$

s. o. punkti äramärkiva tähe juurde pannakse klambrid ja neisse kirjutakse selle punkti koordinaadid, enne abstsiss ja pärast ordinaat. Punkt O (telgede lõikpunkt) nimetakse koordinaatide alguseks.

§ 74.

Öeldust ei jatku aga veel, et i g a punkt tõesti kindlalt ära oleks määratud.

Otsime punktide M ja N koordinaadid (joon. 28).



Joon. 28.

Oletame, et abstsisside telje lõikude pikkused on: $OM^1 = 2$ ja $ON^1 = 2$. Et mitte segadust ei tuleks, peaksime arvude 2 ja 2 vahel mingi vahe tegema.

Arusaadav on, et kui punkt M^1 tähendab arvu 2 teljel OX, siis tähendab punkt N^1 arvu „-2“, sest meie loeme ON^1 sihti vastupidiselt OM-le, nii et mõlema lõigu algus

on *O*. Kõik abstsissid, millede lõpp pahemal pool koordinaatide algust, on negatiivsed.

Analoogiliselt harutades leiame: kui punkti *M* ordinaat on $+1$, siis on ka punkti *N* ordinaat positiivne arv, näit. $+3$, sest nende koordinaatide lõpud seisavad ühel pool koordinaatide algust. Kui aga võtame punkti *P* (joon. 28) ja otsime tema koordinaate, siis tõmbame jällegi punkti *P* läbi ristjooned telgedele *OX* ja *OY*. Esimene neist annab teljel *OX* lõigu, mille lõpp pahemal pool koordinaatide algust.

Seega on punkti *P* abstsiss negatiivne, olgu -1. Niisamati on selle punkti ordinaat negatiivne, sest et tema lõpp asub allpool koordinaatide algust teljel *OY*, nimelt $2^1/_2$ pikkuse üksust allpool nullpunkti, seega on punkti *P* ordinaat $-2^1/_2$.

Et alati oleks selge, kuhu poole positiivsed abstsissid loeme, paneme *OX*-telje positiivsesse otsa noolemärgi. Niisama teeme ka telje *OY*-ga.

Ühele poole koordinaatide algust loeme kõik ordinaadid positiivseks, teisele poole negatiivseks.

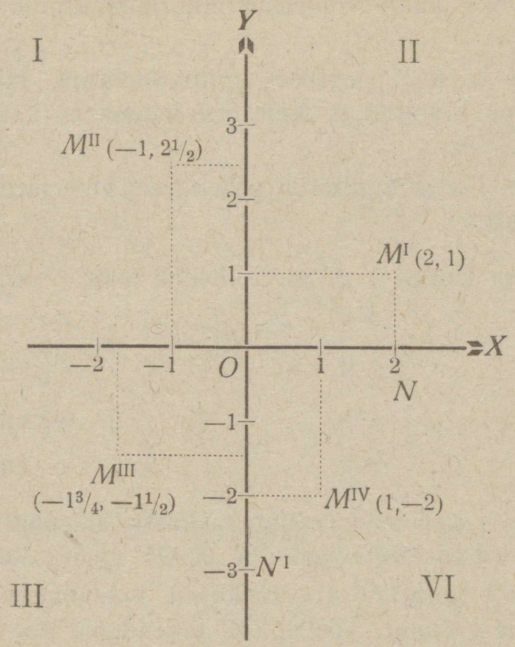
Harilikult, kui telg *OX* on horitsontaalne ja paremale poole sihitud, siis on telg *OY* vertikaalne ja sihitud ülespoole, mida jällegi noolemärgiga tähendakse (joon. 28).

Joonistuse 29. peal on neli punkti M^{I}, M^{II}, M^{III} ja M^{IV} ühes iga punkti koordinaatidega ära tähendud.

Öeldakse, et punkt M^{I} asub esimeses koordinaatide veerandis (I), punkt M^{II} teises (II), punkt M^{III} kolmandas (III) ja punkt M^{IV} neljandas (IV) koordinaatide veerandis, millede mõiste on joonistusest iseenesest selge.

Kõigil punktidel, mis asuvad esimeses veerandis, on mõlemad koordinaadid positiivsed arvud. Teise veerandi punktidel on abstsiss negatiivne ja ordinaat positiivne; kolmanda veerandi punktidel on mõlemad koordinaadid negatiivsed, kuna neljandas veerandis asuvatel punktidel abstsiss on positiivne ja ordinaat negatiivne. Punktidel, mis abstsisside teljel asuvad, on ordinaadiks null, neid punkte võib seega ära tähendada nii: $M(x,0)$, kus x on positiivne ehk negatiivne arv, kuna

aga punktidel, mis ordinaatide teljel, abstsiss on O, seega võib üleüldiselt ära neid määrata järgmiselt: $M(0,y)$, kus y on positiivne ehk negatiivne arv.



Joon. 29.

Koordinaatide alguse O kujutus on: $O(0,0)$.

Punkti N (joon. 29) kujutus on: $N(2,0)$, punkti N^1 kujutus $(0,-3)$.

§ 75. Graafilised kujutused.

Mitmesuguseks otstarbeks on sagedasti vaja mõne suuruse muutusi näitlikuks teha. Kuid suurus muutub mitmesuguste muude suuruste muutumisega ühes, nii, näituseks, pikeneb raudkang tema soojendamisega ja lüheneb tema jahutamisega. Õhu temperatuur öö-päeva jooksul muutub ajaga,

õhurõhumine muutub niisama ajaga, edasiliigutud maa muutub ühes ajaga, maapinna kõrgus ühes kaugusega mingisugusest kohast j. n. e.

Selgituseks, kuidas suuruste muutumisi kujutakse, võtame paar näitust.

Tehakse katseid peenikese gumminööriga, mille üks ots naela külge on kinnitud ja teise otsa kausikene kaalupommide jaoks seotud.

Oletame, et gumminööri pikenemine järgmise tabeli abil on näidatud:

Kui panna kaussi	1 g,	siis pikeneb nöör	1 cm	võrra,	
„ „ „	2 g,	„ „ „	2 cm	„	
„ „ „	3 g,	„ „ „	$2\frac{3}{4}$ cm	„	
„ „ „	4 g,	„ „ „	$3\frac{1}{2}$ cm	„	
„ „ „	5 g,	„ „ „	4 cm	„	

Et nööri pikenemist teatud raskuste all näitlikuks teha, tõmbame koordinaatide teljed OX ja OY (joon. 30).

Teljel OX märgime ära raskused, iga pikkuse üksusega kujutades üht grammi. Teljel OY tähendame ära nööri pikenemised, iga endise pikkuse üksusega kujutades tsentimeetrilist pikenemist. Et 1 grammi raskuse all nöör pikeneb 1 cm võrra, siis võtame

$$x = 1,$$

$$y = 1$$

ja kujutame nende koordinaatide abil punkti A; järgmise punkti B leiame ühtivuste:

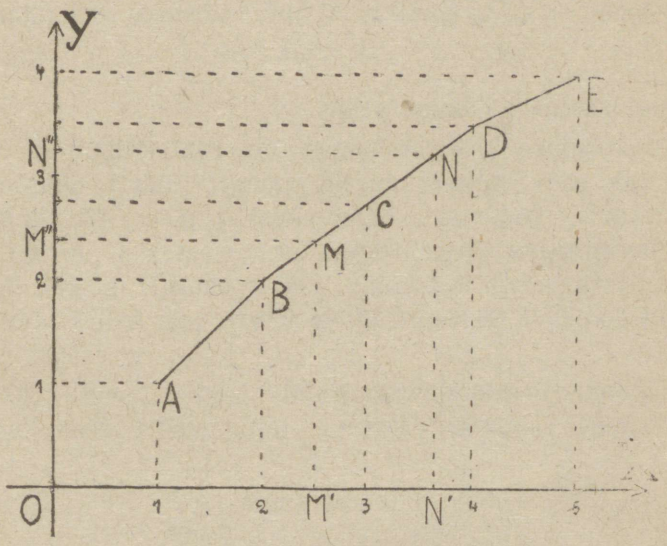
$$x = 2,$$

$$y = 2$$

abil.

Kolmandat punkti C kujutavad koordinaadid $\left(3,\ 2\frac{3}{4}\right)$ j. n. e.

Kui andmete järele kõik punktid oleme kujutanud, siis ühendame *A*, *B*, *C* ... üksteisega sirgjoontega. Leiame murdjoone *ABCDE*, mis meile näitab väga selgelt, kuidas nöör raskuste otsariputamise tagajärjel on pikenenud.



Joon. 30.

Kõige pealt näeme saadud murdjoonest, et nöör seda enam pikeneb, mida suurema raskuse temale otsa riputame, sest mida suurem abstsiss (raskus), seda suurem ka ordinaat (väljavenimine). Teiseks näeme, et nöör suuremate raskuste otsariputamisega mitte enam nii kiirelt välja ei veni, kui väikeste raskuste all (abstsisside juurdekasv on ikka 1 pikkuse üksus, ordinaadid kasvavad ikka vähem ja vähem).

Murdjoon lubab meid ka öelda, kui palju nöör on välja veninud, kui näit. otsa riputame 2,5 g. Selleks võtame $x = 2{,}5$ ja tõmbame punktist M^{I} (2,5; 0) ristjoone teljele *OX*. See ristjoon lõikab joone *ABCDE* punktis *M*; viimase punkti ordinaat OM^{II} annabki meile nõutava pikenemise

$$y = 2\frac{3}{8}.$$

Niisama võiksime leida raskuse, mis nööri 3,25 cm võrra pikemaks venitab. Võtame selleks

$$y = 3{,}25,$$

tõmbame läbi punkti N^{II} (0; 3,25) ristjoone OY-le. Ristjoon lõikab joone $ABCDE$ punktis N, mille abstsiss on ligikaudselt:

$$x = 3{,}6$$

mis ongi vastus küsimise peale.

Ilmateaduse (meteoroloogia) observatooriumites mõõdetakse iga päev mitmesuguseid suurusi, näit.: õhurõhumist, temperatuuri, sademeid, õhuniiskust j. n. e. Harilikult loetakse instrumente (baromeeter, termomeeter j. n. e.) kolm korda päevas: kell 7 homm., kell 1 päeval ja kell 9 õhtul, ehk kui öö-päeva 24 tunni järele arvata, siis kell 7, kell 13 ja kell 21.

Tallinna mereobservatooriumis loeti 1. sept. 1919 õhu temperatuuri vaatlusel Celsius'e termomeetri pealt temperatuurid:

kell 7 temperatuur 12,4°,
„ 13 „ 14,9°,
„ 21 „ 11,9°.

Kolmest temperatuuri arvsuurusest: 1) 12,4°, 2) 14,9° ja 3) 11,9°, leitakse n. n. keskmine temperatuur öö-päeva kohta 1. septembril 1919 järgmiselt: võetakse temperatuuride summa:

$$12{,}4^0 + 14{,}9^0 + 11{,}9^0 = 39{,}2^0$$

ja jagatakse see summa vaatluste arvuga. Et mereobservatooriumis päevas kolm vaatlust toimetakse, siis on keskmine temperatuur:

$$\frac{39{,}2^0}{3}.$$

Välja arvates ainult terved kraadid, leiame, et keskmine temperatuur on:

$$13^0\ \text{C}.$$

Iga päeva jaoks leitakse analoogiliselt selle päeva keskmine temperatuur. Niiviisi on saadud mereobservatooriumis järgmine tabel 1919. a. septembrikuu esimese poole kohta:

Kuupäev.	Keskmine temperatuur C kraadides.
1. sept. 1919. a.	13° C,
2. „ „ „	12° C,
3. „ „ „	12° C,
4. „ „ „	15° C,
5. „ „ „	15° C,
6. „ „ „	17° C,
7. „ „ „	19° C,
8. „ „ „	14° C,
9. „ „ „	12° C,
10. „ „ „	12° C,
11. „ „ „	14° C,
12. „ „ „	15° C,
13. „ „ „	11° C,
14. „ „ „	8° C,
15. „ „ „	11° C.

Selle tabeli põhjal võime temperatuuri muutumisi kaunis selgelt kujutada, kuid veel näitlikumaks muutub see tabel, kui järgmiselt talitame:

Tõmbame koordinaatide teljed OX ja OY (joon. 31). Abstsisside teljel märgime üles 1 päeva, 2 päeva, 3 päeva j. n. e., iga päeva ära tähendades 1 cm. pikkuse lõiguga. Ordinaatide teljel tähendame ära temperatuurid, iga kraadi poole tsentimeetri pikkuse lõiguga kujutades.

Võtame andmed esimese päeva kohta: 1 päev — 13° ja kujutame punkti koordinaatidega:

$$x = 1;\ y = 13.$$

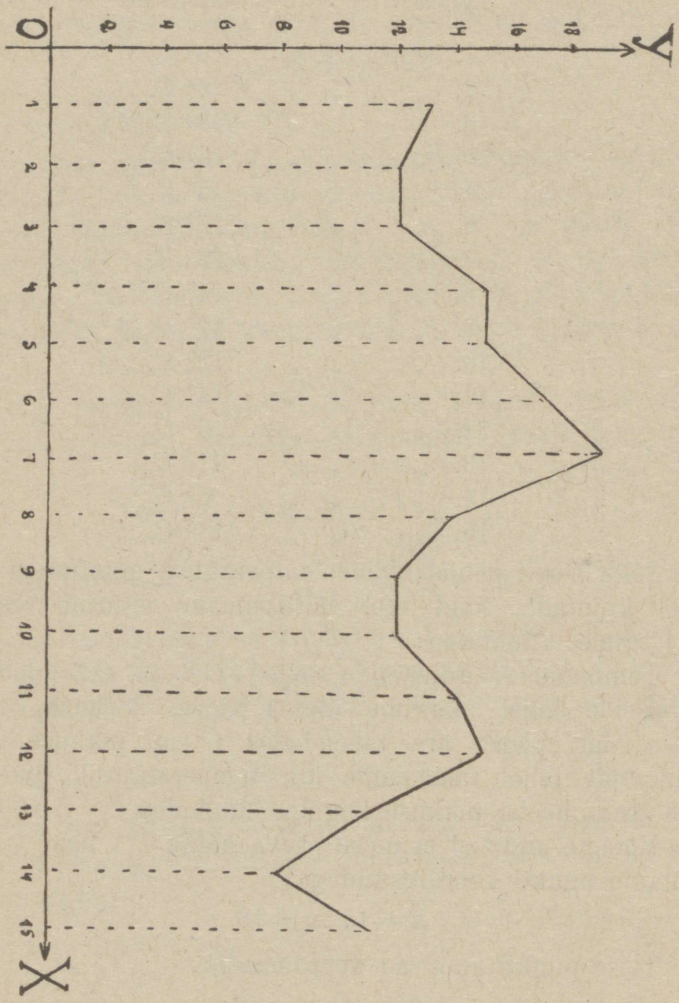
Teise punkti annavad koordinaadid:

$$x = 2;\ y = 12.$$

Kolmandat punkti kujutavad koordinaadid:

$$x = 3;\ y = 12 \text{ j. n. e.}$$

Kui andmed 15 päeva kohta kõik on kujutud, siis ühendame saadud punktid sirgjoontega. Saame murdjoone, mis kujutabki temperatuuri muutumisi septembrikuu esimesel poolel.



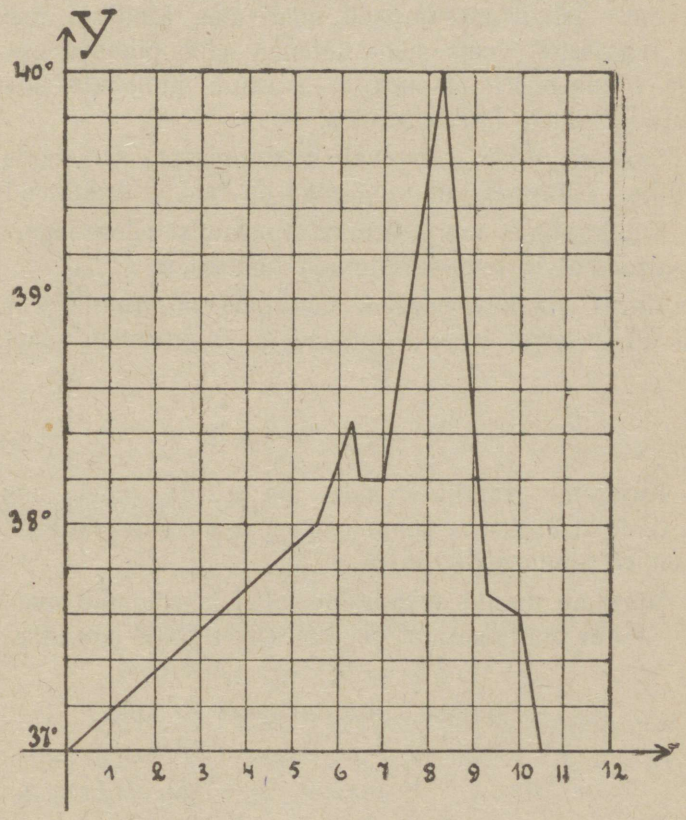
Joon. 31.

Mõnikord ühendatakse kujutud punktid murdjoone asemel kõverjoonega.

Joonistus 31 näitab, kunas temperatuur kahel päeval ühesuguseks on jäänud (2. ja 3. päev, 9. ja 10. päev), kunas on ta tõusnud (näit. 5.—7. sept.) ja alanenud (näit. 12.—14. sept.) j. n. e.

Kahes viimases näituses (gumminööri pikenemine ja temperatuuri muutumine) oleme suuruste muutumisi joonte abil kujutanud.

Niisugust suuruste muutumiste joonelist ülestähendamist kutsutakse graafiliseks kujutuseks.



Joon. 32.

Eelseisev graafiline kujutus näitab haige kehatemperatuuri muutumist peale rõugete panemist (vaccination).

Joonistus on võetud raamatust Schottelius, „Bakterien".

Abstsisside teljel on kujutud päevad ja ordinaatide teljel temperatuur alates 37° C.

Temperatuurid on märgitud iga 0,2° C järele.

Kui üks suurus teisega nii on seotud, et esimene neist omab mingi arvsuuruse, kui teisele anda teatud arvsuurus, siis nimetakse esimest suurust teise funktsiooniks.

Näituses, kus kõnelesime gumminööri pikenemisest, andsime meie vabalt arvsuurused nööri otsa kinnitud raskusele; selle tagajärjel venis nöör lühema ehk pikema osa välja. Seega võime nööri pikenemise suurust nimetada nööri otsa kinnitud raskuse funktsiooniks.

Suurust, mida meie vabalt muudame, nimetame argumendiks. Näituses gumminööriga on raskus argumendiks.

Kui kujutada temperatuuri muutumisi päevadega, siis on aeg argument ja temperatuur aja funktsioon.

Murd- ehk kõverjooned, mis neid muutumisi kujutavad, näitavad kujukalt sidet argumendi ja funktsiooni vahel.

§ 76.

Kujutame graafiliselt sidet aja ja tee vahel, mis aurupaat 0, 1, 2, 3, 4, ... tunni jooksul ära sõidab, kui sõidu kiirus on 15 kilomeetrit tunnis.

Märgime tunnid abstsisside teljel ja sõidetud maa 15, 30, 45, ... km. ordinaatide teljele (joon. 33) järgmise tabeli abil:

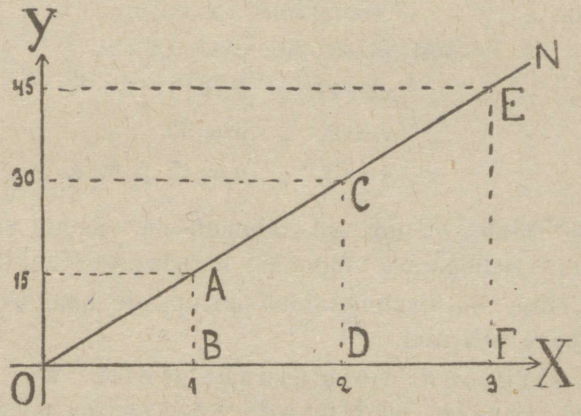
1 tunniga sõitis aurupaat 15 km.,
2 „ „ „ 30 „
3 „ „ „ 45 „ j. n. e.

Joon *ON* (joon. 33) kujutabki sidet, mis on ärasõidetud maa ja aja vahel.

Joonistus näitab, et *ON* on sirgjoon, ja seda võib ka matemaatiliselt tõestada.

* Tõestame, et kolmenurgelised: $\triangle OAB$, $\triangle OCD$, $\triangle OEF$ j. n. e. on sarnased. Võetud kolmenurgelised on täisnurksed ja täisnurke tekitavad küljed on proportsionaalsed, mis järgnevast selgub:

$$OB = 1,\ OD = 2,\ OF = 3,\ \ldots$$
$$AB = 15,\ CD = 30,\ EF = 45,\ \ldots$$



Joon. 33.

Et $\frac{OB}{AB} = \frac{1}{15}$; $\frac{OD}{CD} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$; $\frac{OF}{EF} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$, siis leiame ühtlaste vahekordade rea:

$$\frac{OB}{AB} = \frac{OD}{CD} = \frac{OF}{EF} = \ldots$$

Seega on kolmenurgelised sarnased, millest järgneb:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = \sphericalangle EOF = \ldots$$

Et aga nurkade küljed OB, OD, OF tekitavad ühe sirgjoone, siis peavad ka küljed OA, OC, OE, ... asuma ühel sirgjoonel, mida oligi vaja tõestada.*

Kuid aurupaadi kaugust algpunktist võib avaldusega kujutada, mille järgmiselt leiame:

Kui aurupaat sõidab 1 tunniga 15 km., siis sõidab ta x tunniga $15x$ kilomeetrit edasi. Tähendame aurupaadi kauguse lähtekohast tähega y; leiame ühtivuse:

$$y = 15x,$$

mis kujutabki sidet kauguse y-i ja tundide arvu x-i vahel.

Paneme viimases ühtivuses $x = 0, 1, 2, 3$, j. n. e.

Leiame:

Kui $x = 0$, siis $y = 0$,
„ $x = 1$, „ $y = 15$,
„ $x = 2$, „ $y = 30$,
„ $x = 3$, „ $y = 45$ j. n. e.

Sellest näeme, et iga x-i tähendusele vastab isesugune y-i tähendus. Sellepärast võime y-i lugeda x-i funktsiooniks.

Kuid enne kujutasime sidet aurupaadi kauguse ja aja vahel sirgjoone *ON* abil.

See sirgjoon võimaldab meile ka antud abstsissi järele ordinaadi väljaarvamist, niisama kui y-i võisime välja arvata antud x-i järele ühtivusest

$$y = 15x.$$

Sellepärast võime öelda, et sirgjoon *ON* on ühtivuse

$$y = 15x$$

graafiline kujutus.

Oletame nüüd, et aurupaat enne, kui ta ühetasaselt 6 $\frac{\text{km}}{\text{tunnis}}$ hakkas liikuma, juba 4 km. ära oli sõitnud; arusaadav on, et sellele maale, mis ta ühetasase kiirusega edasi oli liikunud, tuleb 4 km juurde arvata, et kõike ärasõidetud teed leida. Kui endist viisi y tähendab üleüldse ärasõidetud teed ja x tundide arvu, mis sest ajast mööda on läinud, kui paat ühetasaselt sõitma hakkas, siis saame

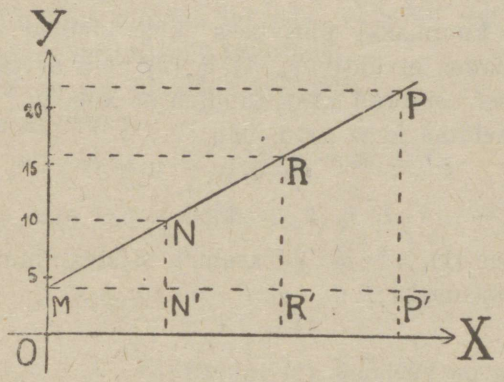
(A) $$y = 6x + 4.$$

Siit järgneb:

Kui $x = 0$, siis $y = 4$,
„ $x = 1$, „ $y = 10$,
„ $x = 2$, „ $y = 16$,
„ $x = 3$, „ $y = 22$.

Meie näeme, et iga x-i tähendusele vastab kindel y-i tähendus, s. t., et y on x-i funktsioon.

Kujutame jällegi need arvud graafiliselt ja võtame aja abstsissideks ja tee ordinaatideks.



Joon 34.

Peale kujutud punktide ühendamist sirgjoontega saame jällegi joone *MNRP*, mille kohta võib tõestada, et ta on sirgjoon. Joon *MNRP* kujutab sidet aja ja kauguse vahel.

* Selleks, et tõestada, et *MNRP* tõesti on sirgjoon, tõmbame joone $MP^{I} \parallel OX$ ja vaatleme kolmnurki MNN^{I}, MRR^{I}, MPP^{I}. Need kolmenurgelised on sarnased (tõestage seda!), kust siis ka endiselt järgneb, et joon *MNRP* on sirgjoon. *

Kui aga ühtivuses (A) x-i asemele panna ükskõiki missugused arvud (täis- ehk murdarvud), nende järele y välja arvata ning siis saadud resultaadid koordinaatideks võtta ja punktid kujutada, mis ühendame sirgjoontega, siis on punktide ühendaja joon seesama sirgjoon *MP* (joonistage seda!).

Sellepärast võime meie öelda, et sirgjoon MP on ühtivuse (A) graafiline kujutus.

Kui vaadelda ühtivusi:

(1) $$y = 15x,$$

(2) $$y = 6x + 4,$$

siis paneme tähele, et neis mõlemis esinevad kaks ilmutamata arvu x ja y. Kuid neile ei või ühtivustes mõlemale korraga anda vabalt arvsuurusi, sest ühtivuse mõiste järele peavad parema ja pahema poole arvsuurused ühesugused olema. Kuid ühele, näit. x-ile võime anda vabalt tähendused, olgu:

$$x = 0,\ {}^1/_2,\ 3^1/_5,\ 7,\ \ldots,\ -1,\ -1^3/_4,\ -5,\ \ldots$$

y omab siis kummaski ühtivuses juba kindlad arvsuurused. Sellest järeldame, et ühtivusi (1) ja (2) võib arvlausiks nimetada, milledes esinevad kaks tundmatut x ja y. Arvlause (1) juurteks nimetame kaht arvu, näit.:

$$x = 3;$$
$$y = 45,$$

mis, arvlauses (1) x-i ja y-i asemel seistes, muudavad selle ühtivuse samasuseks:

$$45 = 15 \,.\, 3.$$

Niisama on arvlause (2) juured:

$$x = 5;$$
$$y = 34,$$

sest asendades need arvud ühtivusse (2), leiame:

$$34 = 6 \,.\, 5 + 4.$$

Eelmisest selgub, et kahe tundmatuga arvlausel ei ole mitte ainult üks paar juuri, vaid neid on lugemata hulk, sest võttes vabalt, näituseks arvlauses (2):

$$x = \frac{1}{2},$$

leiame kohe:

$$y = 7.$$

Ehk, kui $x = \frac{3}{4}$, siis $y = 8\frac{1}{2}$ j. n. e.

Sellepärast võime sirgjoont *ON* (joon. 33) arvlause

$$y = 15x$$

graafiliseks kujutuseks nimetada, niisama sirgjoont *MP* (joon. 34) arvlause (funktsiooni)

$$y = 6x + 4$$

graafiliseks kujutuseks.

§ 77. Arvlausete (funktsioonide) graafilisest kujutamisest.

Sellest, mis seni kahe arvlause graafilisest kujutamisest kõneldud, võib juba aimdus tekkida, et võib igat (esimese astme) arvlauset graafiliselt kujutada.

Ja tõesti on see üleüldse võimalik.

Võtame arvlause

$$2y = 4x + 3, \text{ ehk } y = 2x + 1\tfrac{1}{2}.$$

Paneme siin x-i asemele 0, 1, 2, 3 . . ., — 1, — 2, — 3. Saame:

Kui $x = 0$, siis $y = 1\frac{1}{2}$,

„ $x = 1$, „ $y = 3\frac{1}{2}$,

„ $x = 2$, „ $y = 5\frac{1}{2}$,

„ $x = 3$, „ $y = 7\frac{1}{2}$,

. . . . . .

„ $x = -1$, „ $y = -\frac{1}{2}$,

„ $x = -2$, „ $y = -2\frac{1}{2}$,

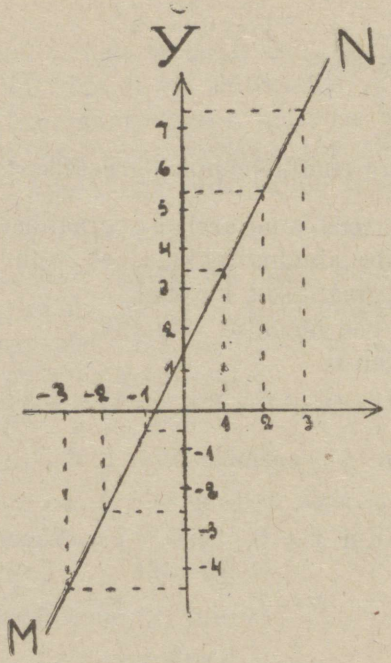
„ $x = -3$, „ $y = -4\frac{1}{2}$ j. n. e.,

x-id loeme abstsissideks ja y-id ordinaatideks.

Nende andmete järele kujutame punktid ja ühendame joonega (joon. 35).

TARTU ÜLIKOOL
DIDAKTILINE SEMINAAR
MATEMAATIKA JAOSKOND

Joon *MN* on jällegi sirgjoon (tõestame seda endiselt). Meie oleme kolm 1 astme arvlauset kahe tundmatuga (x ja y) võtnud ja nende graafilisel kujutamisel oleme ikka sirgjooned saanud.



Joon. 35.

Meie võtame vastu järgmise tõelause ilma tõestamata (seda tõestakse matemaatika harus, mida nimetakse analüütiliseks geomeetriaks): Kui ükskõik missugust kahe tundmatuga esimese astme arvlauset graafiliselt kujutada, siis on selle arvlause (funktsiooni) kujutus sirgjoon.

Katsuge seda joonistuse peal järele arvlausete jaoks:

1) $y = 3x - 2$,
2) $y = -x + 1$,
3) $y = x - 2$,
4) $y = -2x + 1$.

Asume nüüd küsimuse juurde, kuidas antud arvlause järele sirgjoont kõige lihtsamalt ehitada. Teada on, et sirgjoon on kahe punkti läbi ära määratud (kahe punkti läbi võib ainult ühe sirgjoone tõmmata!).

Meie võiksime siis arvlause abil joone kaks punkti üles otsida, nii nagu seda seni oleme teinud. Anname esiti x-le vabalt valitud arvsuuruse ja arvame selle arvsuuruse järele ka y-i arvsuuruse välja.

Näit. olgu antud arvlause

$$3 - 2x + y = 3y + x - 1.$$

Et väljaarvamist kergendada, kanname y-ga liikmed pahemale, muud liikmed paremale poole ja lühendame:

$$-3y + y = x - 1 - 3 + 2x;$$

$$-2y = 3x - 4;$$

muudame siin märgid:

$$2y = -3x + 4,$$

jagame arvlause kahega:

$$y = -\frac{3}{2}x + 2.$$

Niiviisi kirjutame ümber harilikult kõik arvlaused, mida graafiliselt kujutame, s. t. kanname y-ga liikmed pahemale, muud liikmed (x-ga liikmed ühes tuntud liigetega) paremale poole ja jagame arvlause y-i koeffitsiendiga. Kui y-i ees miinus seisab, siis muudame veel arvlause liigete märgid.

Nüüd anname x-ile vabalt mingisuguse tähenduse, näituseks: $x = 1$, siis saame arvlausest, kui x-i asemele 1 panna:

$$y = -\frac{3}{2} + 2,$$

ehk

$$y = \frac{1}{2}.$$

Seega on üks sirgjoone punkt $\left(x = 1,\ y = \frac{1}{2}\right)$.

Selle järele teeme

$$x = -1,$$

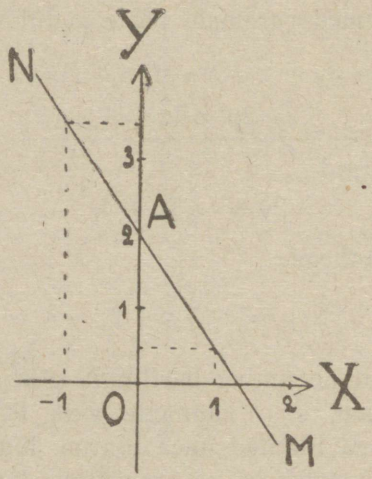
$$y = +\frac{3}{2} + 2 = 3^1/_2.$$

Teine sirgjoone punkt on $\left(x = -1,\ y = 3\frac{1}{2}\right)$.

Kujutame need punktid joonistuse peal ja tõmbame nende läbi sirgjoone NM, mis ongi arvlause (funktsiooni)

$$3 - 2x + y = 3y + x - 1$$

graafiline kujutus (joon. 36).



Joon. 36.

Kuid veel lihtsamaks muutub väljaarvamine, kui enne arvlauses teeme $x = 0$ ja arvame välja y-i, see tähendab, arvame välja lõigu, mis sirgjoon annab teljel OY. Eelmises arvlauses saame sel teel:

$$y = 2.$$

Tähendab, esimene teatud punkt on: A (0,2).

Selle järele teeme arvlauses $y = 0$ ja arvame välja x-i, s. t. lõigu, mis sirgjoon annab teljel OX.

Eelmise arvlause kohta annab see:

$$O = -\frac{3}{2}x + 2,$$

ehk peale väljaarvamist

$$3x = 4,$$

$$x = \frac{4}{3}.$$

Teine punkt on $B\left(\frac{4}{3}, 0\right)$. Need kaks punkti määravadki sirgjoone.

Teine näitus.

Kujutada graafiliselt arvlause (funktsioon):

$$\frac{3x - 2\overset{2}{\smile}y}{3} = \frac{1 + \overset{3}{\smile}x}{2}.$$

Vabastame selle arvlause murdudest:

$$6x - 4y = 3 + 3x,$$

ehk, peale lühendamist:

$$3x - 4y = 3.$$

Teeme siin $x = 0$, siis $y = -\frac{3}{4}$. Esimene punkt M on määratud koordinaatidega: $M\left(0, -\frac{3}{4}\right)$. Võtame $y = 0$, siis $x = 1$. Teine punkt on $N(1,0)$.

Otsime nende kahe punkti seisukoha joonistuse peal (antud on teljed OX ja OY) ja tõmbame joone MN, mis kujutabki antud arvlauset.

§ 78. Ühe tundmatuga arvlausete kujutamisest.

Mida kujutab graafiliselt arvlause ühe tundmatuga? Näituseks, arvlause

$$3x + 2 = 8?$$

Peale tuntud liigete ülekannet paremale poole ja lühendamist saame:

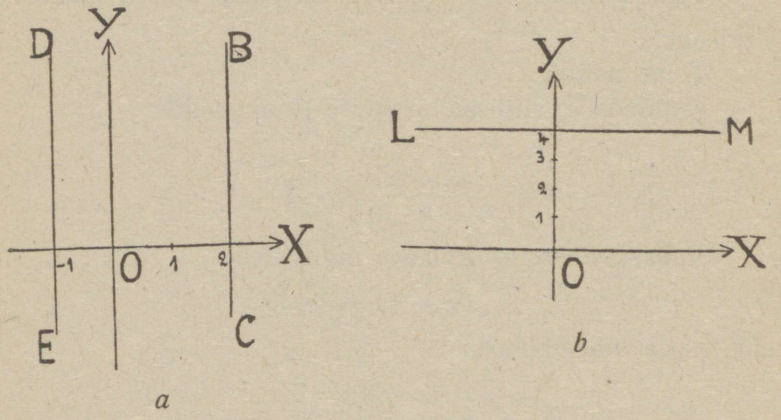
$$3x = 6;$$

$$x = 2.$$

Viimases arvlauses ei ole teist tundmatut olemaski.

Meie võime seda nii seletada, et y ükskõik missuguse tähendusega võib olla, kuna aga iga y-i tähendusele vastab alati

$$x = 2.$$



Joon. 37.

Võtame (joon. 37*a*) punktid: (2,1), (2,2), (2,—1), (2,—2), s. t. niisugused punktid, kus ordinaat ükskõik missugune, abstsiss aga alati oleks 2, ja kujutame nad joonistuse peal. Selge on, et kõik need punktid asuvad ühekaugusel teljest OY ja sellepärast, kui neid punkte ilmlõpmata hulk võtta, siis annavad nad sirgjoone BC, mis on telje OY-ga paralleelne ja seisab temast 2 pikkuse üksust positiivses sihis eemal.

Niisama annab arvlause $x = -1$ sirgjoone DE, mis telje OY-ga on paralleelne ja temast ühe pikkuse üksuse negatiivsele poole kaugel seisab (joon. 37-a).

Just niisama arutades tuleme otsusele, et arvlause $y = 4$ on sirgjoon LM, mis teljega OX on paralleelne, ja temast 4 pikkuse üksust positiivsele poole kaugel seisab (joon. 37-b).

Meie oleme näidanud, et iga esimese järgu arvlause kujutab sirgjoont. Seda võime veel nii mõista: oletame, et sirgjoon on kujutud arvlausega

(1) $$y = x - 3;$$

siis peavad kõikide punktide koordinaadid, mis sirgjoone peal asuvad, rahuldama sirgjoone arvlauset. Kui, näituseks, teame, et M ($x = 4$, $y = 1$) on sirgjoone peal, siis peavad need koordinaadid rahuldama sirgjoone arvlauset (1)

$$1 = 4 - 3.$$

Ümberpöördult, kui punkti N ($x = 1$, $y = -2$) koordinaadid rahuldavad arvlause (1), nii et:

$$-2 = 1 - 3,$$

siis asub punkt N sirgjoone peal, mida arvlause (1) kujutab.

Punktid, mille koordinaadid ei rahulda antud arvlauset, ei asu ka sirgjoone peal, mida antud arvlause kujutab.

§ 79. Graafiliste kujutuste tarvitamisest ülesannete lahendamisel.

Ülesanne. Vihmavee kogumise nõust oli $\frac{1}{3}$ veega täidetud. Vihmahoo ajal jooksis nõusse 3 pange juurdi, kuid ometi jäi $\frac{5}{12}$ nõust veel tühjaks. Mitu pange mahutab nõu üleüldse?

Seame arvlause selle ülesande kohaselt kokku. Oletame, et nõu mahutab x pangi. Siis saame ülesande tingimiste kohaselt arvlause:

(1) $$\frac{1}{3}x + \frac{5}{12}x + 3 = x,$$

sest $\frac{1}{3}$ nõud $+ 3$ pangi $+ \frac{5}{12}$ nõud peavad andma terve nõu suuruse. Ehk, peale väljaarvamist:

$$x = 12.$$

Arvlause (1), mille kokku seadsime, on ühtivus, kuid tegelikult ei ole ta niikaua veel mitte ühtivus, kuni meie x-i tähendust ei tea, s. t. (1) on tingivalt ühtivus.

Alles siis, kui x-i tähenduse üles oleme leidnud ja x-i asemele arvlausesse pannud, muutub arvlause tõelikuks ühtivuseks (s. o. samasuseks).

See tähendab, et kui saadud arvlause

$$\frac{1}{3}x + \frac{5}{12}x + 3 = x$$

ümber kirjutada nii:

$$\frac{1}{3}x + \frac{5}{12}x + 3 - x = 0,$$

ja pahemat poolt ühe tähega y ära tähendada:

(2) $$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{12}x + 3 - x,$$

siis ei ole y niikaua veel mitte null, kuni x arvsuurus arvlauses (1) ei ole teada.

Seni on aga (2) ühtivus, milles kummalgi tundmatul on lugemata hulk arvsuurusi, sest igale x-ile vastab kindel y-i tähendus. Meie teame juba, et niisugune arvlause (2) graafiliselt kujutab sirgjoont (joon. 38). Kuid selle sirgjoone abil võime leida otsitava arvu, mis antud arvlause

(1) $$\frac{1}{3}x + \frac{5}{12}x + 3 = x$$

juur on.

Nimelt võib arvlauses (2)

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{12}x + 3 - x$$

x-ile niisuguse tähenduse anda, mis y-i muudab nulliks.

Kuid see x-i tähendus muudab muidugi ka parema poole

$$\frac{1}{3}x+\frac{5}{12}x+3-x$$

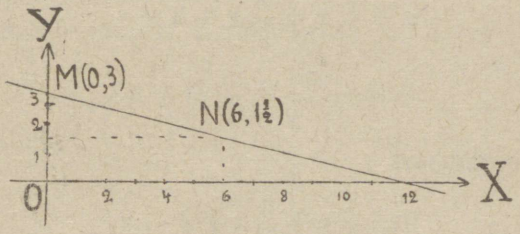
nulliks, ehk, ta samastab arvlause:

$$\frac{1}{3}x+\frac{5}{12}x+3=x.$$

Oletame nüüd, et oleme kujutanud sirgjoone

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{12}x+3-x.$$

x, mis teeb $y=0$, ei ole muud midagi, kui lõigu pikkus teljel OX, sest kui $y=0$, siis peab vastav sirgjoone punkt asuma teljel OX.



Joon. 38.

Et aga sirgjoont graafiliselt kujutada, peame teadma sirgjoone kaht punkti.

Esimese saame, kui teeme arvlauses (2)

$$x=0,$$

y on siis 3.

Esimene punkt on seega

$$M(0,3).$$

Teise punkti leidmiseks paneme vabalt

$$x=6.$$

Arvame välja y-i:

$$y=\frac{1}{3}\cdot 6+\frac{5}{12}\cdot 6+3-6=2+2\frac{1}{2}+3-6=1\frac{1}{2}.$$

Otsitava sirgjoone määravad punktid:

$$M(0,3) \text{ ja } N\left(6,1\frac{1}{2}\right).$$

Tõmbame selle sirgjoone (joon. 38) ja mõõdame telje OX lõigu OB ära. Lõigu pikkus annabki nõutava arvu. Joonistusest näeme, et lõigu pikkus väga ligidal on 12-le.

Tähendus: Varemalt seletasime, et sirgjoone ehitamiseks kõige parem on kaht punkti nii leida, et enne paneme $x=0$ ja arvame välja y-i, siis paneme $y=0$ ja arvame välja x-i.

Seekord aga ei ole mõtet viimast teha, sest kui meie, näituseks, arvlauses

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{12}x+3-x$$

võtame

$$y=0,$$

siis peame arvlausest

$$0=\frac{1}{3}x+\frac{5}{12}x+3-x$$

otsima x-i.

Kuid viimane arvlause ongi see arvlause, mille juurt meie graafiliselt üles tahtsime otsida; kui aga selle juure täpipealse tähenduse teame, siis ei ole mõtet tema ligikaudset tähendust otsida, sest graafiline väljaarvamine annab, üldiselt võetud, ikkagi ainult ligikaudse tundmatu arvsuuruse.

2. ülesanne.

Poisile, kes ilma isa lubata kodunt ära oli läinud, sõidab $3\frac{1}{2}$ tunni pärast isa jalgrattaga järele. Kui kaua aja pärast jõuab ta poisile järele, kui see 5 kilomeetrit tunnis ära käib, kuna isa neli korda nii kiirelt sõidab kui poiss käib?

Oletame, et isa jõuab x tunni pärast poisile järele. Selle aja jooksul on isa $20x$ kilomeetrit edasi sõitnud.

Poiss on aga teel olnud $(x+3\frac{1}{2})$ tundi ja edasi jõudnud

$$5(x+3\tfrac{1}{2}) \text{ kilomeetrit.}$$

Arusaadav on, et mõlemad kodunt kuni kokkupuutumise kohani ühepalju maad ära on käinud või sõitnud, kust järgneb:

$$(x+3\tfrac{1}{2})\,5 = 20x,$$

ehk

$$(x+3\tfrac{1}{2})\,5 - 20x = 0.$$

Arvame x-i graafiliselt välja.

Ühtlustame pahema poole y-iga:

$$y = (x+3\tfrac{1}{2})\,5 - 20x.$$

Teeme siin

$$x = 0,$$

ja leiame:

$$y = 3\tfrac{1}{2} \cdot 5 = 17\tfrac{1}{2}.$$

Võtame $x = 1$, siis on

$$y = (1+3\tfrac{1}{2}) \cdot 5 - 20 = 4\tfrac{1}{2} \cdot 5 - 20 = 2\tfrac{1}{2}.$$

Esimene sirgjoone punkt on:

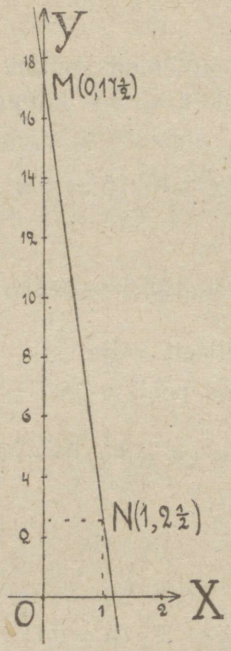
$$M(0,17\tfrac{1}{2}),$$

teine punkt on:

$$N(1,2\tfrac{1}{2}).$$

Kujutades seda sirgjoont (joon. 39), võtame, et joonistus oleks selgem, abstsisside jaoks pikema pikkuse üksuse, kui ordinaatide tarvis.

Lõigu pikkus teljel OX on ligikaudselt $1\frac{1}{5}$ üksust. Seega jõudis isa pojale $1\frac{1}{5}$ tunni pärast järele.



Joon. 39.

Arvake selle arvlause juure matemaatiline arvsuurus välja.

Kui suur on vahe tõeliku ja ligikaudse juure vahel?

§ 80. Rongide liikumise plaani graafiline kujutus.

Igas raudteejaamas on iseäraliste seinatahvlite peale rongide liikumise plaanid kinnitud. Need sõiduplaanid näitavad, mis ajal rongid jaamadesse jõuavad ja neist jälle ära sõidavad.

Näituseks võtame rongide mineku-tuleku tabeli Tallinna-Tapa vahelisel teel suvel 1919. Järgnevas tabelis on üles

tähendud ainult rongide jaamast mineku aeg, välja arvatud lõpujaamad, kus on antud tuleku aeg. Seisuaeg, mis mõne minuti kestab, ei ole antud. Nooled näitavad rongide liikumise sihti: rongid pahemal pool jaamade latrit liiguvad Tallinnast Tapa poole, paremal pool vastupidises sihis.

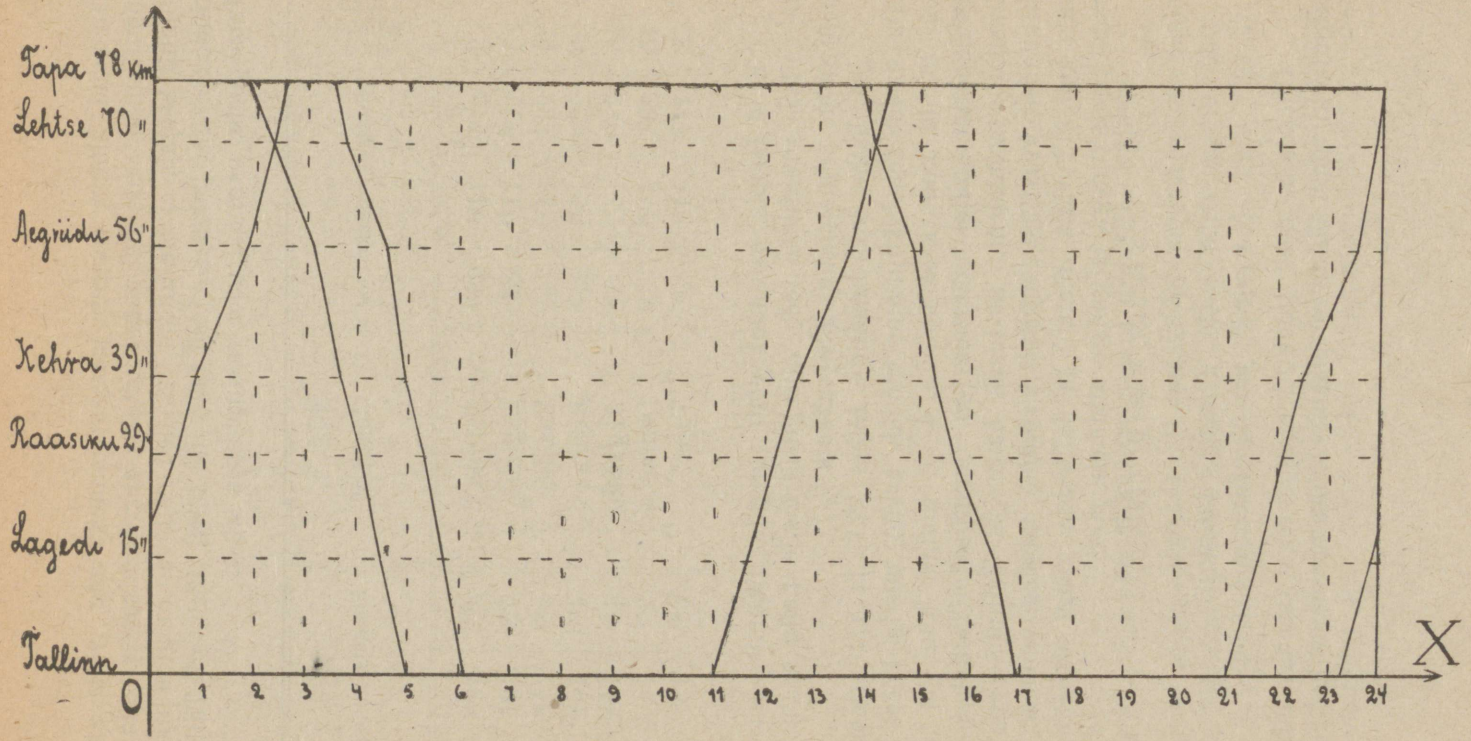
Kaugus Tallinnast kilom.	Rongide mineku aeg			Jaamad	Rongide mineku aeg		
0	21^{00}	11^{00}	23^{15}	Tallinn	6^{06}	16^{57}	5^{00}
15	21^{34}	11^{36}	23^{50}	Lagedi	5^{41}	16^{26}	4^{32}
29	22^{05}	12^{10}	24^{23}	Raasiku	5^{18}	15^{38}	4^{05}
39	22^{24}	12^{35}	24^{48}	Kehra	4^{58}	15^{15}	3^{42}
56	23^{25}	13^{35}	1^{50}	Aegviidu	4^{30}	14^{55}	3^{10}
70	23^{5}	14^{06}	2^{17}	Lehtse	3^{45}	14^{10}	2^{15}
78	24^{03}	14^{21}	2^{31}	Tapa	3^{30}	13^{50}	1^{50}

Kuid hoopis paremini võib rongide liikumise kava üles tähendada graafilisel teel, mis lubab meile palju enam üksikasju mõne silmapilguga üle vaadata.

Tõmbame koordinaatide teljed OX ja OY (joon. 40). Abstsisside teljel kujutame tundide arvud, mis kesköösst mööda on läinud kuni kesköösni, s. o. 0 tunnist kuni 24 tunnini. Ordinaatide teljel märgime ära kaugused Tallinnast kuni üksikute jaamadeni. Et saada näituseks Tallinna-Tapa rongi liikumise graafilist kujutust, võtame tabelist esimese rongi, mis kell 21^{00} välja sõidab, ja kujutame rongi seisakud jaamades punktidega järgmiste andmete järele:

$x = 21^{00}$, $y = 0$ (Tallinn),
$x = 21^{34}$, $y = 15$ (Lagedi),
$x = 22^{05}$, $y = 29$ (Raasiku),
$x = 22^{24}$, $y = 39$ (Kehra) j. n. e.

Ühendame need punktid sirgjoontega; saadav murdjoon kujutabki rongi liikumise plaani. Niisama teeme iga rongiga.


Tapa 78 km
Lehtse 70 "
Aegviidu 56"
Kehra 39"
Raasiku 29"
Lagedi 15"
Tallinn
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
X

Joon. 40.

Joonistusest 40 on näha, et öö-päevas kolm rongi Tallinast Tapale sõidavad, sest kolm murdjoont nihkuvad pahemalt poolt paremale. Niisama sõidavad kolm rongi sellesama aja jooksul Tapalt Tallinna. Kuid joonistus 40 lubab meid ka pealiskaudsegi vaatlemise järele veel mõndagi kinnitada, nagu näituseks:

1) Kas rong alati ühesuguse kiirusega sõidab?

2) Missuguse jaamavahe rong kiiremalt, missuguse aeglasemalt läbi sõidab?

3) Missugustele rongidele sõidavad teised vastu?

4) Missuguses jaamas ja mis ajal nad kohtavad? j. n. e.

Vastake nende küsimiste peale joonistuse 40. abil!

VI.

Esimese astme arvlaused kahe ja enam tundmatuga.

§ 81. Arvlaused kahe tundmatuga.

Lihtsustamine.

Arvlauset:

(1) $$2x - y = 4 - 3y + x$$

järele vaadates, näeme temas kolmesuguseid liikmeid: ühtedes ilmub tundmatu x (esimene liige pahemal pool, ja viimane liige paremal pool), teistes y (teine liige pahemal ja paremal pool), kolmandates ainult kindlad arvud (esimene liige parem. p.).

Meie oleme siin esimese astme kahe tundmatuga arvlause välja kirjutanud. Niisuguses arvlauses esinevad mõlemad tundmatud ainult esimesel astmel; ka nende tundmatute kasvatis ei tohi esimese astme arvlauses peale selle lihtsustamist üheski liikmes olla.

Seega ei ole arvlause

$$4x - y = 2 - 3xy,$$

mitte esimese astme arvlause, sest viimases liikmes on teguriks x-i ja y-i kasvatis.

Kõigile esimese astme kahe tundmatuga arvlausetele võib ärgmisel viisil kõige lihtsama kuju anda. Kanname kõik

tundmatud liikmed (liikmed, mis tundmatuid sisaldavad) pahemale ja tuntud liikmed paremale poole ja lühendame saadud avaldused.

Teeme seda esialgu võetud arvlauses:

$$2x - y = 4 - 3y + x.$$

Saame:

$$2x - y + 3y - x = 4.$$

Peale avalduste lühendamist saame arvlause kõige lihtsamal kujul:

$$x + 2y = 4.$$

Niiviisi võib iga kõne all oleva liigi arvlausega ümber käia ja sellepärast võime öelda, et kõiki esimese astme kahe tundmatuga arvlauseid võib nii kujutada, et neis ainult kolm liiget ilmub: esimese tundmatuga, teise tundmatuga ja tuntud liige. Viimast nimetakse ka vabaks liikmeks.

Lihtsustame veel arvlause:

$$3 - 5y + x = 2x - 3y + 4.$$

Kanname tundmatud liikmed pahemale, tuntud paremale poole ja lühendame:

$$-5y + x - 2x + 3y = 4 - 3,$$

$$-2y - x = +1,$$

ehk, peale märkide muutmist:

$$x + 2y = -1.$$

Kui arvlauses klambrid ja murrud ette tulevad, peame arvlause lihtsustamiseks klambrid avama ja arvlause murdudest vabastama.

Näitus:

$$\frac{7+x}{5} - 1 - \frac{2x-y}{4} = 3(y-2).$$

Avame selles arvlauses klambrid:

$$\frac{7+x}{5} - 1 - \frac{2x-y}{4} = 3y - 6.$$

Vabastame viimase arvlause murdudest: selleks kasvatame arvlause 20-ga; täiendustegurid on murdude ehk arvude kõrval üleval välja kirjutud.

$$28 + 4x - 20 - 10x + 5y = 60y - 120.$$

Kanname tundmatud liikmed pahemale, tuntud liikmed paremale poole:

$$4x - 10x + 5y - 60y = -28 + 20 - 120$$

ehk, peale lühendamist:

$$-6x - 55y = -128.$$

Peale märkide muutmist saame arvlause kõige lihtsamal kujul

$$6x + 55y = 128.$$

§ 82.

Võtame järgmise arvlause:

$$5x + 3y = 36.$$

Meie võime tõestada, et x-il ja y-il on lugemata hulk arvsuurusi, mis rahuldavad seda arvlauset, teiste sõnadega, et niisugusel arvlausel on lõpmata hulk juuri.

Tõepoolest, kui arvlauses y-iga liige kanda paremale poole, siis saame:

$$5x = 36 - 3y;$$

arvlauset x-i koeffitsiendi, s. o. 5-ga jagades, leiame:

$$x = \frac{36 - 3y}{5}.$$

Kui y-ile siin anda vaba tähendus, olgu:

$$y = 7,$$

siis

$$x = \frac{36 - 21}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Nii on siis esimene paar juuri:

$$x = 3,\ y = 7.$$

Olgu:

$$y = 2,$$

siis

$$x = \frac{36 - 6}{5} = 6;$$

teine paar juuri on:

$$x = 6,\ y = 2.$$

Anname y-ile tähenduse

$$y = 0,$$

siis

$$x = \frac{36}{5}.$$

Olgu:

$$y = -\frac{4}{3},$$

siis

$$x = \frac{36 + 3 \cdot \frac{4}{3}}{5} = \frac{36 + 4}{5} = 8 \text{ j. n. e.}$$

Siit näeme, et igale arvsuurusele, mis y-le anname, vastab teatud kindel x-i arvsuurus. Et aga y-ile lugemata hulga tähendusi võime anda, siis saab ka x lõpmata palju tähendusi, s. t., et võetud arvlausel on lõpmata palju mitmesuguseid juuri.

Seda, mida ütlesime praegu antud arvlause kohta, võime korrata iga esimese astme kahe tundmatuga arvlause kohta.

Tähendus. Et igale y-ile vabalt antud tähendusele vastab kindel x-i tähendus, siis võime esimese järgu kahe tundmatuga arvlauses x-i lugeda funktsiooniks ja y-i argumendiks. Oleks meie aga antud arvlausest y-i välja arvanud:

$$y = \frac{36 - 5x}{3},$$

siis oleks igale x-ile antud tähendusele vastanud kindel y-i tähendus ja x oleks olnud argument, kuna y funktsioon oleks olnud.

Kui kahe tundmatuga esimese järgu arvlausel on lugemata hulk juuri, siis peab ka ülesandel, mille algebraline kujutus ta on, olema lõpmata palju vastuseid.

Näituseks võtame ülesande:

Segatakse kahte sorti ainet; esimene sort maksab 5 marka kilo, teine 3 marka kilo. Kui palju peab kumbagi sorti võtma, et segu 36 marka maksaks? Harutame järgmiselt: oletame, et esimest sorti võeti x, teist y kilo. Esimene sort maksab siis $5x$ marka, teine sort $3y$ marka. Terve segu aga maksis 36 marka, kust järgneb arvlause:

$$5x + 3y = 36,$$

mis ongi paragrahvi alguses võetud arvlause. Endised harutused näitavad, et võetud ülesandel on lugemata hulk vastuseid.

Selge on siis, et üks arvlause kahe tundmatuga ei anna kunagi kindlat vastust.

§ 83. Kahe arvlause süsteem kahe tundmatuga.

Mida annavad meile aga kaks arvlauset kahe tundmatuga, kus tundmatuteks on võetud ühed ja needsamad arvud?

Et selle peale vastust saada, võtame ülesande, milles otsitakse kaht arvu, ja seame võimalikult kaks arvlauset kahe tundmatuga kokku.

Ülesanne.

Õde ja vend otsisid pähklaid. Õde leidis neid kaks korda rohkem, kui vend; kui ta aga vennale 5 tükki ära andis ja vend veel 1 pähkla leidis, sai neid mõlemil ühepalju. Kui palju pähklaid oli kummalgi esialgu?

Oletame, et vennal oli x ja õel y pähklat. Kuid et õel kaks korda neid enam oli, kui vennal, siis peame venna pähklate arvu kahega kasvatama, et saada niisugust arvu, kui õe pähklate arv.

Siit järgneb esimene arvlause:

$$2x = y.$$

Kui õde vennale viis pähklat andis, siis sai vennal $x+5$ ja õele jäi $y-5$ pähklat. Et vend aga veel 1 pähkla juurde leidis, siis oli tal neid lõpulikult $x+5+1$ ehk $x+6$ tükki.

Ülesande tingimise järele sai vennal ja õel pähklaid ühepalju:

$$y-5=x+6,$$

ehk, kui siin tuntud liikmed ühendada, siis saame teise arvlause:

$$y=x+11.$$

Saadud kaks arvlauset, milledes ühesugused tähed tähendavad üht ja sedasama arvu, tekitavad arvlausete süsteemi.

Süsteemi kirjutakse mõnikord nii:

$$\text{I.}\quad 2x=y.$$

$$\text{II.}\quad y=x+11.$$

Kui selles süsteemis panna vabalt:

$$x=2;$$

$$y=3,$$

siis saame võimatud ühtivused:

$$4=3 \quad \text{ja} \quad 3=13.$$

Kui aga esimesest arvlausest (I) välja arvata y, pannes vabalt

$$x=1,$$

siis leiame:

$$y=2\,.\,1=2.$$

Arvsuurused: $x=1$ ja $y=2$ rahuldavad arvlause I.

Pannes need arvud arvlausesse II x-i ja y-i asemele, saame:

$$2=1+11,$$

mis näitab, et mitte iga arvude paar, mis rahuldab arvlauset I, ei rahulda arvlauset II.

Meie ülesanne on nüüd otsida niisugust arvude paari, mis, x-i ja y-i asemele pandud, rahuldab mõlemad arvlaused I ja II, ehk teiste sõnadega, rahuldab süsteemi.

Niisuguseid x-i ja y-i arvsuurusi, mis rahuldavad kahe arvlause süsteemi, nimetakse süsteemi juurteks.

Kerge on näha, et arvsuurused:

$$x = 11 \text{ ja } y = 22$$

rahuldavad süsteemi, sest pannes süsteemis $x = 11$ ja $y = 22$, leiame:

$$\text{I}_{(a)} \quad 2 \,.\, 11 = 22,$$
$$\text{II}_{(a)} \quad 22 = 11 + 11,$$

mis on samasused.

Seega on süsteemi (I, II) juured:

$$x = 11;$$
$$y = 22.$$

Vaatame nüüd, mis süsteem (I, II) annab graafiliselt. Esimene arvlause (I) annab, nagu teame, sirgjoone, niisama ka teine (II).

Otsime esimest joont määravad kaks punkti välja.

Kui $x = 0$, siis $y = 0$,

„ $x = 2$, „ $y = 4$.

Kaks esimese sirgjoone punkti on:

$$O(0,0) \text{ ja } M(2,4).$$

Teisest arvlausest saame:

Kui $x = 0$, siis $y = 11$,

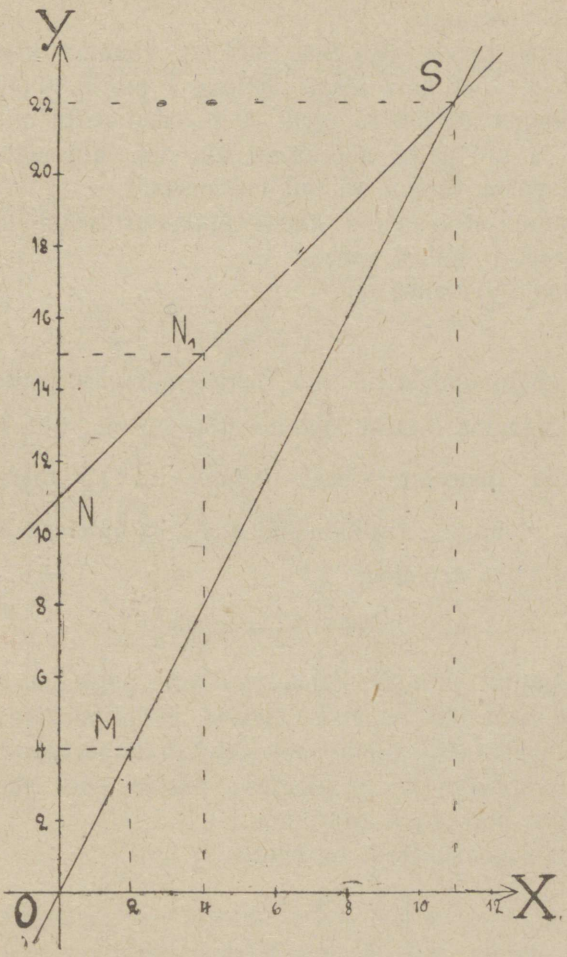
„ $x = 4$, „ $y = 15$.

Teise sirgjoone määravad ära punktid $N(0,11)$ ja $N_1(4,15)$.

Kujutame need sirgjooned, kusjuures mõlema sirgjoone kujutamisel ühe ja sellesama pikkuse üksuse võtame.

Meie näeme, et need kaks sirgjoont lõikavad punktis S üksteist läbi (joon. 41). Mis see tähendab? Nagu teame, rahuldavad iga joone OS punkti koordinaadid esimese arvlause. Niisama rahuldavad ka joone N_1S-iga punkti koordinaadid teise arvlause. Kuid punkti S koordinaadid rahuldavad niihästi

esimese kui teise arvlause, sest punkt S on ühine mõlemale joonele. Sellepärast võime öelda, et lõikpunkti S koordinaadid on arvlausete süsteemi juured.



Joon. 41.

Need koordinaadid saame ligikaudselt joonistusest:

$$x = 11 \qquad y = 22.$$

Seega võime öelda, et õel oli 22, vennal 11 pähklat.

Et kaks sirgjoont annavad ainult ühe lõikpunkti, siis võime ka öelda, et kahe arvlause süsteemil, milles kaks tundmatut, ainult üks paar juuri on, mis seda süsteemi rahuldavad.

Teine ülesanne.

Õpereisi tarvis pidi iga osavõtja vanema klassi õpilane 2 mrk. 25 p., noorema klassi õpilane 1 mark 80 penni tooma. Üleüldse kogus niiviisi 25 mrk. 20 p. Kui palju oli osavõtjaid vanemast ja kui palju nooremast klassist, kui neid vanemast klassist 5 võrra vähem oli kui nooremast?

Oletame, et vanema klassi õpilastest võtsid x ja nooremast klassist y õpilast reisust osa.

Esimene arvlause on:

$$y - x = 5,$$

sest nooremaid õpilasi oli viie võrra enam, kui vanemaid.

Iga vanema klassi õpilane tõi $2\frac{1}{4}$ m., ühtekokku $2\frac{1}{4}x$ marka, iga noorema klassi õpilane tõi $1\frac{4}{5}$ marka ja ühtekokku $1\frac{4}{5}y$ marka. Kokku tõid aga kõik õpilased $25\frac{1}{5}$ marka; siit saame teise arvlause:

$$2\tfrac{1}{4}x + 1\tfrac{4}{5}y = 25\tfrac{1}{5}.$$

Tähendus: Juhime tähelpanu selle peale, et arvud, mis kujutavad samaseid suurusi, oleksid ühenimelistes mõõtudes. Viimases arvlauses pahem pool kujutab kahe klassi poolt kokkukupandud rahasummat markades; parem pool peab niisama rahasummat markades kujutama. —

Arvlausete süsteem on seega

$$\begin{cases} y - x = 5, \\ 2\frac{1}{4}x + 1\frac{4}{5}y = 25\frac{1}{5}, \end{cases}$$

ehk, kui teise arvlause murdudest vabastame ja koondame:

(A)
$$\begin{cases} y - x = 5, \\ 5x + 4y = 56. \end{cases}$$

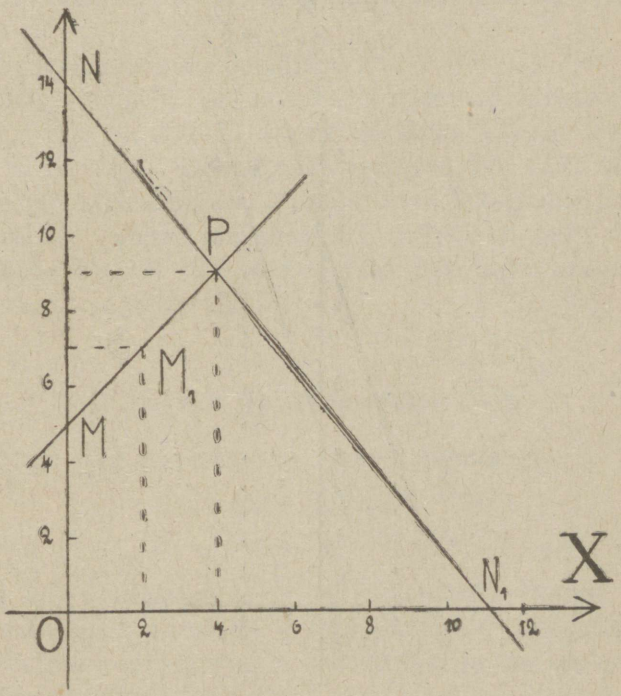
Esimest sirgjoont (joon. 42) kujutavad punktid:

$$M(0,5),\ M_1(2,7).$$

Teise sirgjoone määravad punktid:

$$N(0,14),\ N_1\left(11\tfrac{1}{5},0\right).$$

Sirgjooned lõikavad üksteist punktis P (joon. 42), mille koordinaadid on $x = 4$, $y = 9$.



Joon. 42.

See tähendab, et arvude paar $x = 4$, $y = 9$ on ainuke paar ühiseid juuri arvlausete süsteemil (A). Seega oli õpereisuist osavõtjaid 4 õpilast vanemast, 9 õpilast nooremast klassist.

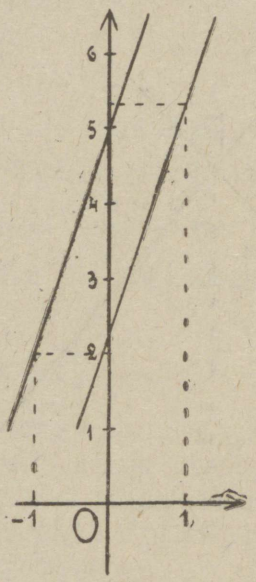
Niiviisi võime iga esimese astme kahe arvlause süsteemi graafiliselt välja arvata, see tähendab, niisuguse arvude paari leida, mis rahuldab mõlemaid arvlauseid.

Muidugi tuleb seda silmas pidada, et niisugune paar juuri on ainult ligikaudse väärtusega.

Tähendus: Võib niisuguse arvlausete süsteemi kirjutada, mille graafiline kujutus on kaks sirgjoont, mis lõikpunkti ei annagi, s. t. paralleelsed on. See näitab, et mitte igal arvlausete süsteemil ei ole juuri.

Olgu näituseks võetud süsteem:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x + 5 \\ 3y &= 9x + 7 \end{aligned}\right\}$$



Joon. 43.

Esimese sirgjoone (joon. 43) määravad punktid:

$$(0,5), \quad (-1,2)$$

ja teise sirgjoone punktid:

$$\left(0,\frac{7}{3}\right), \quad \left(1,5\frac{1}{3}\right)$$

Kujutame jooned (joon. 43); näeme, et nad on paralleelsed, ja sellepärast ei olegi neil lõikpunkti.

Ühtlasi ei ole ka antud arvlausete süsteemil ühiseid juuri.

§ 84. Täpipealsete juurte väljaarvamine arvlausete süsteemist.

Et graafilisel teel leitud arvlausete süsteemi juured on ligikaudsed, siis otsime nüüd võtte, kuidaviisi leida täpipealseid juuri.

Üks arvlause kahe tundmatuga ei anna kindlat vastust, seda oleme ülalpool seletanud. Niisugune arvlause annab lugemata hulga vastuseid. Et vastus oleks kindel, läheb veel teist arvlauset vaja. Kokku annavad need arvlaused süsteemi. Et süsteemi lahendada, s. t. kaht arvu leida, mis x-i ja y-i asemel seistes rahuldavad süsteemi, selleks on mitu viisi olemas, millede kõikide siht on arvlauset ühe tundmatuga saada, mida oskame välja arvata.

I. Kokku- ja mahaarvamise viis.

Võtame järgmise süsteemi kahe tundmatuga:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left\{ \begin{array}{l|l} 3x + 2y = 32 & 2 \\ 2x + \ y = 21 & 3 \end{array} \right. \\ \text{II} & \end{array}$$

Kui ühel tundmatul, näit. x-il, mõlemais arvlauseis ühesugused koeffitsiendid oleksid ja kui esimesest arvlausest teise maha arvaksime (1. teoreem!), siis saaksime arvlause, milles ainult teine tundmatu esineks.

Kuid ühesugused koeffitsiendid x-il võime saada, kui esimest arvlauset kasvatame 2-ga ja teist 3-ga (2. teoreem!).

Need arvud kirjutakse harilikult püstjoone kõrvale arvlausete taha. Peale kasvatamist saame süsteemi:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left\{ \begin{array}{l} 6x + 4y = 64 \\ \underline{(+)\,6x \,(+)\, 3y = (+)\,63.} \end{array} \right. \\ \text{II} & \end{array}$$

Nüüd esimesest arvlausest teist maha arvates (selleks muudame vähendajal arvlausel märgid ja arvame arvlaused kokku), saame:

$$4y - 3y = 64 - 63,$$

ehk:

$$+y = +1.$$

Et x-i tähendust leida, samastame arvlausete kasvatamisega teatud arvudega y-i koeffitsiendid. Selleks jätame esimese arvlause muutmata ja kasvatame teise arvlause kahega:

$$\left.\begin{array}{r} \overset{-}{(+)}\,3x\,\overset{-}{(+)}\,2y = \overset{-}{(+)}\,32 \\ 4x + 2y = \quad 42 \end{array}\right\}$$

Teisest arvlausest esimest maha arvates (esimesel arvlausel muudame märgid ja arvame ta teisega kokku), saame:

$$x = 10.$$

Tähendus: Meie arvasime siin t e i s e s t arvlausest e s i m e s e sellepärast maha, et peale mahaarvamist x-i koeffitsient oleks positiivne.

Kuid veel lihtsam oleks olnud peale y-i väljaarvamist y-i arvsuurust ühte antud arvlausesse asendada.

Asendame

$$y = 1$$

teise (II) arvlausesse:

$$2x + 1 = 21;$$

saame ühe tundmatuga arvlause, millest, välja arvates, leiame:

$$2x = 20,$$

$$x = 10.$$

Järjelikult on antud arvlausete süsteemi vastused:

$$x = 10,$$

$$y = 1.$$

Järelkatse näitab, et need arvud rahuldavad tõesti süsteemi:

$$3 \cdot 10 + 2 = 32$$
$$2 \cdot 10 + 1 = 21.$$

Teine näitus.

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 46 \\ 7x - 4y &= 22 \end{aligned}\right\}$$

Kasvatame esimese arvlause 4-ga ja teise 3-ga.

$$\left.\begin{aligned} 4x + 12y &= 184 \\ 21x - 12y &= 66 \end{aligned}\right\}$$

Teine süsteem on samane, mis esimene, ainult y-i koeffitsiendid on mõlemais arvlauseis ühesuurused, milleks meie arvlauseid kasvatasimegi 4 ja 3-ga.

Kui nüüd esimesest arvlausest teine maha arvata, siis ei kaoks y mitte ära; küll aga saame siis, kui mõlemad arvlaused kokku arvame, uue arvlause, mis ainult üht tundmatut x-i sisaldab.

Peale kokkuarvamist leiame:

$$4x + 21x = 184 + 66,$$

ehk peale lühendamist

$$25x = 250,$$

kust

$$x = 10.$$

Asendame selle x-i arvsuuruse teise antud arvlausesse

$$70 - 4y = 22,$$

millest y-i tähenduse leiame:

$$-4y = 22 - 70,$$
$$-4y = -48,$$
$$y = 12.$$

Neist näitustest selgub, milles seisab kokku- ja mahaarvamise viisi järele arvlausete süsteemi väljaarvamine.

Selleks muudame antud süsteemi esiteks kõige lihtsamakujuliseks süsteemiks, siis teisendame viimase süsteemi tema arvlausete kasvatamisega teatud arvudega niisuguseks süsteemiks, et x-i ehk y-i koeffitsiendid oleksid ühesuurused. Arusaadav, et kasvataja leidmiseks tuleb kas x-i ehk y-i koeffitsientide kõige vähem ühine mitmekordne otsida ja viimane arv x-i ehk y-i koeffitsiendiga jagada.

Arvame siis, kui mõlemais arvlauseis ühtlustud koeffitsientidega tundmatud liikmed ilmuvad ühesuguste märkidega, ühest arvlausest teise maha; on aga koeffitsiendid vastupidiste märkidega, siis peab arvlaused kokku arvama. Sel teel saadud y-i ehk x-i tähenduse asendame ühte antud arvlausesse, mille järele arvame sealt x-i ehk y-i välja.

Teist arvlauset võib järelkatseks tarvitada.

§ 85. Asendamise viis.

Antud on süsteem:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{3}{7}x + \tfrac{4}{5}y &= 14 \\ \tfrac{8}{5}y - x &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Anname sellele süsteemile esiteks kõige lihtsama kuju; selleks vabastame ta murdudest, mille järele saame:

$$\left.\begin{aligned} 15x + 28y &= 490 \\ 8y - 5x &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Otsime esimesest arvlausest x-i avalduse, lugedes teise tundmatu tuntuks:

$$15x = 490 - 28y$$

$$x = \frac{490 - 28y}{15}$$

Kuid et teises arvlauses x sedasama arvu tähendab, mis esimeses, siis võime teises arvlauses x-i asemele panna

$$\frac{490 - 28y}{15}.$$

Saame:

$$8y - 5 \cdot \frac{490 - 28y}{15} = 10.$$

Oleme saanud seega arvlause ühe tundmatuga, mille kõige pealt murdudest vabastame.

$$120y - 5(490 - 28y) = 150,$$

kust järk-järgult leiame:

$$120y - 2450 + 140y = 150;$$

$$260y = 2600;$$

$$y = 10.$$

x-i leiame, kui ühtivusse

$$x = \frac{490 - 28y}{15}$$

asendame y-i asemele tema tähenduse 10.

$$x = \frac{490 - 280}{15} = \frac{210}{15} = 14.$$

Seega on leitud arvlausete süsteemi vastus:

$$x = 14; \quad y = 10.$$

Teine näitus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{7 - 2x}{5 - 3y} &= \frac{3}{2} \\ y - x &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Vabastame süsteemi murdudest ja anname temale kõige lihtsama kuju.

Esimene arvlause annab:

$$14 - 4x = 15 - 9y,$$

ehk

$$9y - 4x = 1.$$

Seega on antud süsteem samane süsteemiga:

$$\left.\begin{aligned} 9y - 4x &= 1 \\ y - x &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Teisest arvlausest leiame:

$$y = x + 4,$$

mille esimesesse arvlausesse y-i asemele paigutame:

$$9(x + 4) - 4x = 1,$$

ehk

$$9x + 36 - 4x = 1,$$

ehk

$$5x = -35, \quad x = -7;$$

y-i leiame ühtivusest:

$$y = x + 4$$

asendades x-i asemele -7;

$$y = -3.$$

* § 86. Ühtlustamise ja Bézout viis.

$$\left.\begin{aligned} 10x + 3y &= 3 \\ 5x + 6y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Arvame esimesest ja teisest arvlausest ühe ja sellesama tundmatu, näit. x-i, välja.

Selleks jätame x-iga liikmed pahemale poole ja kanname muud liikmed paremale poole; siis jagame ühtivused vastavalt x-i koeffitsientidega.

Esimesest arvlausest saame:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3 - 3y}{10} \\ \text{Teine arvlause annab:} \quad & \\ x &= \frac{3 - 6y}{5} \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Et x mõlemais arvlauseis tähendab üht ja sedasama arvu, siis peavad praegu kirjutud ühtivuste paremad pooled ühesuurused olema:

$$\frac{3-3y}{10} = \frac{3-6y}{5}.$$

Vabastame selle arvlause murdudest:

$$3-3y = 6-12y,$$

millest, edasi arvates, saame:

$$9y = 3,$$

$$y = \frac{1}{3},$$

x-i leiame, kui paneme ühte ühtivustest (A) $y = \frac{1}{3}$.

Nii annab esimene arvlause:

$$x = \frac{3-3\cdot\frac{1}{3}}{10} = \frac{3-1}{10} = \frac{1}{5}.$$ *

* **Bézout viis.**

(a) $$8x-15y = -30$$

(b) $$2x+3y = 15.$$

Kasvatame esimese arvlause (a) arvu u-ga; u on esialgu määramata arv.

Resultaat on:

$$8xu-15yu = -30u.$$

Arvame saadud arvlause teise arvlausega (b) kokku. (Arvlause võiks ka maha arvata!)

$$8xu-15yu+2x+3y = -30u+15.$$

TARTU ÜLIKOOL.
DIDAKTILINE SEMINAAR

Võtame ühise teguri x-i ja y-i neis liigetes, kus see võimalik, (võib ka numbritega kirjutud tegurid kaasa võtta) klambrite ette. (Vaata algteguriteks lahutamine.)

(B) $$2x(4u+1)-3y(5u-1)=-30u+15.$$

Et u on meil täitsa määramata arv, siis võime u niisuguseks arvuks lugeda, mis $2x$-i koeffitsiendi

$$4u+1$$

muudab nulliks.

Et seda u tähendust leida, paneme

$$4u+1=0,$$

kust saame:

$$u=-\frac{1}{4}.$$

Kui nüüd panna arvlausesse (B) $u=-\frac{1}{4}$, siis saame:

$$-3y\left(-\frac{5}{4}-1\right)=\frac{30}{4}+15,$$

see on arvlause ühe tundmatuga, mida oskame lahendada.

Sellest arvlausest leiame:

$$\frac{15}{4}y+3y=\frac{30}{4}+15,$$

ehk

$$15y+12y=30+60,$$

ehk

$$27y=90,$$

$$y=3\frac{1}{3}.$$

x-i leidmiseks võiksime arvlauses (B) u niisuguseks arvuks lugeda, mis $-3y$-i koeffitsiendi

$$5u-1$$

teeb nulliks.

Kuid, kui $5u-1=0$, siis $u=+\frac{1}{5}$.

Seda u tähendust arvlausesse (B) asetades saame:

$$2x\left(+\frac{4}{5}+1\right)=-\frac{30}{5}+15$$

ehk, edasi arvates:

$$+\frac{8}{5}x+2x=-\frac{30}{5}+15;$$

$$+\cdot 8x+10x=-30+75;$$

$$18x=45;$$

$$x=2\frac{1}{2}.$$

Märkus. Süsteemi lahendamisel ei tarvitata mitte alati üht viisi mõlema tundmatu leidmiseks, vaid lihtsuse otstarbel kord üht, kord teist viisi (vaata § 91).*

§ 87. Kahe tundmatuga arvlausete süsteemi tarvitamisest.

Kahe tundmatuga arvlausete süsteemi võib väga paljude ülesannete väljaarvamiseks tarvitada, nimelt nende ülesannete juures, milledes otsitakse kaht arvu. Selleks on tarvis esiteks kokku seada ülesande kohaselt teda väljendaja süsteem. Kui kokku seatud süsteem on esimeseastmeline, siis võib ülesande üleüldse välja arvata. Meie ütleme, et ülesande võib üleüldse lahendada, sest mitte kõigist arvlauseist kahe tundmatuga ei saa tundmatute kindlaid arvsuurusi teada. (Vaata sellest § 94).

Arvlausete süsteemi kokkuseadmist oleme näinud § 83-s. Selleks tuleb pea niisama talitada, kui ühe tundmatuga arvlause kokkuseadmise juures (§ 71):

Loeme ülesande läbi, tähelpanu juhtides selle peale:

1) mis on antud,
2) mida otsitakse.

Selle järele tähendame kummagi otsitava arvu tähega, esimest harilikult x-i, teist y-iga. Tekitame nende ja antud arvude abil avaldused suuruste jaoks, milledest kõneldakse

ülesandes. Seome kaks saadud avaldust, mis ülesande põhjal ühesuurused, = märgiga. Siis otsime veel kaks avaldust, mis ühesuurused, ja seome nad jällegi = märgiga. Sel viisil saame kaks arvlauset kahe tundmatuga, mida ükskõik mil viisil lahendame. Peale väljaarvamist teeme kontrolliks järelkatse.

Näitused:

1. ülesanne: Kui üks veekraan 25 ja teine 28 minutit on avatud, siis jookseb neist 1465 l vett välja. Kui aga esimene kraan on 20 ja teine 21 m. lahti, siis voolab kokku 1130 l vett välja. Kui palju vett annab kumbki kraan minutis?

Arvamine.

Oletame, et esimesest kraanist voolab x liitrit, teisest kraanist y liitrit minutis vett. Et aga esimene kraan 25 minutit oli avatud, siis voolas vett $25x$ liitrit välja. Teise kraani läbi voolas vett 28 minutiga $28y$ liitirt. Mõlemaist kraanidest kokku voolas aga 1465 l vett, sellepärast on esimene arvlause järgmine:

$$25x + 28y = 1465.$$

Teise arvlause saame analoogilisel teel:

$$20x + 21y = 1130.$$

Arvlausete süsteem on järgmine:

$$25x + 28y = 1465,$$
$$20x + 21y = 1130.$$

Esimest arvlauset 4-ga, teist 5-ga kasvatades ja teist arvlauset esimesest maha arvates leiame:

$$112y - 105y = 5860 - 5650,$$
$$7y = 210,$$
$$y = 30.$$

x-i leiame asendamisega:

$$x = 25.$$

2. ülesanne: Kui põlemiseks (keemiline ühinemine hapnikuga) võtta vesinikku nii palju, et vesiniku raskus hapniku

raskuse vastu on nagu 1 : 8, siis astuvad mõlemad algained täielikult ühendusse. Mitu grammi peab kumbagi ainet võtma, et nende ühendus (vesi) kaaluks 40,5 g?

Oletame, et peab vesinikku võtma x, hapnikku y grammi. Siis:

$$x + y = 40{,}5$$

sest mõlemad ained peavad ühinedes 40,5 g vett andma (aine püsivuse seadus).

Teisest küljest on teada, et:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{8};$$

Arvlausete süsteem on seega järgmine:

$$x + y = 40{,}5$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{8}$$

ehk, peale murdudest vabastamist:

$$2x + 2y = 81,$$

$$8x - y = 0,$$

mida lahendades saamegi vastuse küsimuse peale:

$$x = 4\frac{1}{2};$$

$$y = 36.$$

3. ülesanne: Jalakäija, kes 5,4 km. tunnis käib, jõuab $\frac{3}{4}$ tunni pärast teisele järele. Kui teekäijad aga üksteisele vastu oleksid liikunud, siis oleksid nad 5 minuti järele kohtanud. Kui kiirelt käib teine teekäija ja missugune oli esialgne kaugus nende vahel?

Olgu teise teekäija liikumise kiirus $x\frac{\text{kilomeetrit}}{\text{tunnis}}$. Esialgne kaugus teekäijate vahel olgu y kilomeetrit. Üks neist käib $\frac{3}{4}$ tunniga $\frac{3}{4} \cdot 5{,}4$ km. $= \frac{81}{20}$ km., teine aga $\frac{3}{4}x$ kilomeetrit.

Nende avalduste vahe peab olema y, sest et see teekäija, kes 5,4 $\frac{\text{km}}{\text{tunnis}}$ käib, jõuab $\frac{3}{4}$ tunniga y kilomeetrit enam edasi kui teine, seega:

$$\frac{81}{20} - \frac{3}{4}x = y.$$

Teise arvlause saame, kui silmas peame, et reisijad, üksteisele vastu tulles, 5 minutiga $= \frac{1}{12}$ tunniga peavad üksteisele liginema y kilomeetrit.

Esimene jõuab aga $\frac{1}{12}$ tunniga $5{,}4 \cdot \frac{1}{12}$ kilomeetrit $= \frac{9}{20}$ kilomeetrit, teine $\frac{1}{12}x$ km edasi, kust järgneb:

$$\frac{9}{20} + \frac{1}{12}x = y.$$

Ilma et arvlauseid murdudest hakkaksime vabastama, arvame esimesest arvlausest teise maha; leiame:

$$\frac{72}{20} - \frac{10}{12}x = 0,$$

ehk

$$\frac{18}{5} - \frac{5}{6}x = 0.$$

Viimase arvlause vabastame murdudest:

$$108 - 25x = 0$$

$$x = 4\frac{8}{25} \text{ km}$$

y-i leiame ükskõik kummast arvlausest:

$$y = \frac{81}{100} \text{ km}.$$

Ülesandeid, mida saab kahe tundmatuga arvlausete süsteemi abil lahendada, võib sagedasti üsna kergesti ka ühe arvlause abil välja arvata. Näituseks võtame ülesande:

4) Kahe arvu summa on 15; esimene neist on 1,5 korda suurem kui teine. Missugused on need arvud?

Olgu esimene arv x, teine y. Et nende summa on 15, siis:

$$x+y=15.$$

Kuid x peab olema $1{,}5y$, ehk:

$$x=1{,}5y,$$

ehk, peale murrust vabastamist ja koondamist:

$$2x=3y.$$

Arvlausete süsteem on järgmine:

$$x+y=15,$$
$$2x=3y,$$

millest, ükskõik mil viisil, leiame:

$$x=9;$$
$$y=6.$$

Sellesama ülesande oleks võinud lahendada ühe arvlausega järgmiselt: olgu esimene arv x; et arvude summa on 15, siis peab teine arv olema $15-x$. Kuid et esimene arv x on $1\frac{1}{2}$ korda suurem kui teine, s. o. $15-x$, siis peame arvlause saamiseks $15-x$ kasvatama $1\frac{1}{2}$-ga, mille järele leiame:

$$x=\tfrac{3}{2}(15-x).$$

Peale klambrite avamist, murdudest vabastamist ja väljaarvamist leiame:

$$x=9.$$

Teine arv on $15-x=6$.

Nagu näeme, on resultaadid ühesugused endisega.

Sel juhusel oli ülesande lahendamine ühe arvlause abil lihtne; kuid suuremalt jaolt on nende ülesannete lahendamine, milles otsitakse kaht arvu, ühe arvlause abil raskem, kui süsteemi abil.

Ühe arvlause tarvitamise juures muutuvad avaldused sagedasti keeruliseks, kuna aga süsteemi kokkuseadmine on palju kergem.

§ 88. Arvlaused kolme tundmatuga.

Iga arvlause, milles on kolm ehk enam tundmatut, võib, kõiki liikmeid pahemale poole kandes (parem pool on siis 0) ja sarnaseid liikmeid ühendades, nii teisendada, et temas ainult üks liige x-iga, üks liige y-iga, üks liige z-iga, . . . ilmuks, kuna üks liige tuntud arvud avaldaks.

Nii võib arvlausest:

$$3x+2-y+4z+2v-1=x+y-v+3z+3$$

sel teel saada:

$$2x-2y+z+3v-2=0.$$

Vaba liige, s. o. liige, milles ilmuvad tuntud arvud, kantakse sagedasti paremale poole, nii et antud arvlause ka järgmiselt võib ümber kirjutada:

$$2x-2y+z+3v=2.$$

Edaspidi anname igale arvlausele, kui temas klambrid avatud ja ta murdudest on vabastud, niisuguse kuju. Sedasama tuleb ka ülesannete lahendamisel alati teha.

Võtame arvlause, milles kolm tundmatut.

Olgu see arvlause niisugune:

(1) $$2x-3y+2z=4.$$

Sellest arvlausest järgneb:

$$x=\frac{4+3y-2z}{2}.$$

Siin võime y-ile ja z-ile anda ükskõik missugused arvsuurused, x omab siis kindla tähenduse; nii vastab tähendustele:

$$y=0,$$

$$z=1.$$

x-i arvsuurus:

$$x = 1,$$

ehk, kui

$$y = 1,$$

$$z = 2,$$

siis:

$$x = \frac{3}{2} \text{ j. n. e.}$$

See tähendab, et üht arvlauset kolme tundmatuga rahuldab lõpmata hulk x-i, y-i ja z-i tähendusi.

Ka kaks arvlauset kolme tundmatuga annavad iga tundmatu jaoks lugemata hulga vastuseid.

Kui endisele arvlausele (1):

(1) $$2x - 3y + 2z = 4$$

lisame juurde teise arvlause:

(2) $$x + y - 3z = 1,$$

siis võib neid kaht arvlauset jällegi rahuldada ilmlõpmata hulga tähendustega.

Et seda näidata, arvame esimesest ja teisest arvlausest välja x-i, lugedes tuntuks liikmeid y-i ja z-iga; leiame:

(1,a) $$x = \frac{4 + 3y - 2z}{2},$$

(2,a) $$x = 1 - y + 3z.$$

Et neis arvlauseis aga x tähendab üht ja sedasama arvu, siis võime kirjutada, paremaid arvlausete pooli $=$ märgiga sidudes:

(A) $$\frac{4 + 3y - 2z}{2} = 1 - y + 3z,$$

mis on arvlause kahe tundmatuga, mida võib rahuldada lugemata hulga y-i ja z-i arvsuurustega.

Kui need y-i ja z-i tähendused panna ühtivusse:

$$x = 1 - y + 3z,$$

siis omab ka x lugemata hulga tähendusi.

Kui aga kahe eelmise arvlause süsteemile tuleb juurde veel kolmas, olgu:

(3) $$x+z=0,$$

siis on antud kolme arvlause süsteem kolme tundmatuga:

$$\left.\begin{array}{rr} (1) & 2x-3y+2z=4 \\ (2) & x+y-3z=1 \\ (3) & x+z=0 \end{array}\right\}$$

mida võib rahuldada ainult teatud x-i, y-i ja z-i tähendustega, nagu kohe tõestame.

Esimesest kahest arvlausest saime uue arvlause (A), mille nüüd veel kord välja kirjutame:

(4) ehk (A) $$\frac{4+3y-2z}{2}=1-y+3z.$$

Arvlausest (3) järgneb, kui z paremale poole kanda:

(5) $$x=-z.$$

Kuid arvlausest (2) saame, viies x pahemale poole:

(6) $$x=1-y+3z.$$

Seega annavad kaks viimast ühtivust (5) ja (6), kui paremad pooled seome = märgiga:

(7) $$-z=1-y+3z.$$

Nüüd on meil kaks uut arvlauset (4) ja (7):

$$\left.\begin{array}{rr} (4) & \frac{4+3y-2z}{2}=1-y+3z \\ (7) & -z=1-y+3z \end{array}\right\}$$

mis on kahe arvlause süsteem kahe tundmatuga. Viimasel süsteemil on aga, nagu teame, vastus; seda süsteemi rahuldavad ainult kindlad y-i ja z-i tähendused.

Kui paneme need y-i ja z-i tähendused, mis süsteemi (4,7) rahuldavad ühtivusse:

$$x = \frac{4 + 3y - 2z}{2},$$

siis saame viimasest teada x-i tähenduse.

Sellest järgneb, et meil kolme tundmatu jaoks peab olema kolm arvlauset, kui neist tahame leida kolm tundmatut.

§ 89. Kolme arvlausega süsteemi lahendamine.

Kolme arvlausega süsteemi väljaarvamiseks võime neidsamu viise tarvitada, mis on kahe arvlausega süsteemi lahendamiseks tarvitusel.

I. Kokku- ja mahaarvamise viis.

Antud on süsteem:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 4x - 3y - z = 0 \\ (2) & 6x - 9y + 7z = 7 \\ (3) & 2x + 3y - 5z = -3 \end{array}\right\}$$

Et selle süsteemi vastust leida, võtame kaks esimest arvlauset ja kaotame tuttaval viisil kokku- ehk mahaarvamisega mingisuguse tundmatu ära, olgu y-i:

$$\left\{\begin{array}{l|l} 4x - 3y - z = 0 & 3. \\ 6x - 9y + 7z = 7 & 1. \end{array}\right.$$

Peale arvlausete kasvatamist vastavalt 3- ja 1-ga saame:

$$12x - 9y - 3z = 0,$$

$$\underset{(+)}{-}\ 6x \overset{+}{\underset{(-)}{-}}\ 9y \underset{(+)}{-}\ 7z = \underset{(+)}{-}\ 7.$$

Esimesest teist arvlauset maha arvates, saame:

$$(4) \qquad 6x - 10z = -7.$$

Nüüd võtame jällegi ühe juba enne tarvitud arvlause, olgu esimese, ja kolmanda ning saavutame nende kokkuarvamisega uue arvlause, milles puuduks jällegi y.

$$\begin{array}{rl} & 4x - 3y - z = 0 \\ + & 2x + 3y - 5z = -3 \\ \hline (5) & 6x - 6z = -3. \end{array}$$

Kaks uut arvlauset (4) ja (5) annavad meile süsteemi, milles esinevad ainult x ja z:

$$(A) \quad \left.\begin{array}{l} 6x - 10z = -7 \\ 6x - 6z = -3 \end{array}\right\}$$

Niisugust süsteemi oskame välja arvata; siin pole vaja muud teha, kui teisest arvlausest esimene maha arvata, et uut arvlauset ainult tundmatu z-iga saada. See arvlause on järgmine:

$$4z = 4,$$

kust väljendame:

$$z = 1.$$

Tarvis on silmas pidada, et järgmise tundmatu leidmiseks ei ole enam ühtegi kokku-mahaarvamist teha, kui ainult õieti talitame.

Vaja on x-i leiuks ainult üht arvlauset süsteemist (A) tarvitada — olgu esimest. Asendame sinna leitud z-i arvsuuruse:

$$6x - 10 = -7,$$

kust järgneb:

$$6x = 3,$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Teist arvlauset süsteemist (A) tarvitame järelkatseks, temasse asendades leitud z-i ja x-i tähendusi.

$$6 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3,$$

mis näitab, et oleme õieti kaks tundmatut välja arvanud.

Viimase tundmatu leidmiseks paneme antud süsteemi (1, 2, 3) ühte arvlausesse, olgu teise, z-i ja x-i arvsuurused:

$$6 \cdot \frac{1}{2} - 9y + 7 \cdot 1 = 7,$$

ehk:

$$3 - 9y = 0,$$

millest leiame:

$$y = \frac{1}{3}.$$

Teist kaht arvlauset antud süsteemist võime tarvitada juba järelkatse juures. Võtame selleks kolmanda arvlause:

$$2x + 3y - 5z = -3.$$

Pahem pool, peale leitud arvude tähtede kohale asendamist, annab:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 5 \cdot 1 = 1 + 1 - 5 = -3,$$

mis näitab, et arvlausete süsteem on õieti välja arvatud.

II. Asendamise viis.

Arvame selle viisi järele välja järgmise süsteemi:

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & 3x - 2y + 4z = 3 \\ (2) & 7x + 4y - 8z = 7 \\ (3) & 5x - 6y - 12z = -1. \end{array}\right\}$$

Esimene arvlause annab:

$$(4) \qquad x = \frac{3 + 2y - 4z}{3}$$

Et teises kahes arvlauses x tähendab sedasama arvu, mis esimeses, siis võime viimasesse kahte arvlausesse (2 ja 3) x-i asemele panna:

$$\frac{3 + 2y - 4z}{3}.$$

Siis omandavad need arvlaused järgmise kuju:

$$\left.\begin{array}{rl} (5) & 7 \cdot \frac{3+2y-4z}{3} + 4y - 8z = 7 \\ (6) & 5 \cdot \frac{3+2y-4z}{3} - 6y - 12z = -1 \end{array}\right\}$$

Viimane süsteem sisaldab ainult kaks tundmatut ja on seega väljaarvatav. Selleks vabastame arvlaused kõige pealt murdudest, mille järele saame:

$$\left.\begin{array}{l} 7(3+2y-4z) + 12y - 24z = 21 \\ 5(3+2y-4z) - 18y - 36z = -3 \end{array}\right\}$$

Peale klambrite avamise ja sarnaste liigete ühendamise kirjutame selle süstcemi nii ümber:

$$\left.\begin{array}{l} 26y - 52z = 0 \\ -8y - 56z = -18 \end{array}\right\}$$

Esimese arvlause koondame 26, teise «— 2»-ga:

$$\left.\begin{array}{rl} (7) & y - 2z = 0 \\ (8) & 4y + 28z = 9 \end{array}\right\}$$

Eelviimane arvlause (7) annab:

$$(9) \qquad y = 2z.$$

Asendame arvlausesse (8) y-i asemele $2z$:

$$8z + 28z = 9,$$

ehk:

$$36z = 9,$$

ehk:

$$z = \frac{1}{4}.$$

Oleme seega leidnud z-i arvsuuruse.

x-i leidmiseks asendame $z = \frac{1}{4}$ arvlausesse (9), kust leiame:

$$y = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Lõpuks asendame ühtivuses (4) z-i asemele $\frac{1}{4}$ ja y-i asemele $\frac{1}{2}$, mis annab lõpulikult:

$$x = \frac{3 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4}}{3} = \frac{3 + 1 - 1}{3} = 1.$$

Seega on antud süsteemi vastus:

$$x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{4}.$$

Seame näituseks kokku allpool antud ülesande jaoks süsteemi, milles kolm tundmatut ja arvame süsteemi välja.

Ülesanne: Kolmekohalise arvu ristsumma on 15; kui kümneliste ja sajaliste numbrid ära vahetada, siis on saadav arv 180 võrra antud arvust suurem. Kui aga kümneliste ja üheliste numbrid ümber paigutada, siis kasvab arv 18 võrra. Missugune on see arv?

Arvlausete kokkuseadmine ja väljaarvamine: Tähendame sajaliste, kümneliste ja üheliste arvu vastavalt tähtedega x, y, z ära.

Et arvu ristsumma on 15, siis järgneb arvlause:

(1) $$x + y + z = 15.$$

Arvu, milles x sajalist, y kümnelist ja z ühelist, võime kirjutada nii:

$$100x + 10y + z,$$

sest sajalised ja kümnelised peame enne alandama ühelisteks, kui neid ühelistega kokku võime arvata.

Et aga sajalisi ja kümnelisi ühelisteks alandada, peame nende arvu kasvatama vastavalt 100-ga ja 10-ga.

Kui aga sajaliste ja kümneliste numbrid ümber paigutada, siis on saadav arv:

$$100y + 10x + z;$$

kuid viimane arv peab olema 180 võrra antud arvust suurem, millest järgneb arvlause:

$$100y + 10x + z - 180 = 100x + 10y + z,$$

kust peale lihtsustamist saame:

(2) $$x - y = -2.$$

Viimase arvlause väljendame viimasest ülesande tingimisest, et kümneliste ja üheliste numbrite ümberpaigutamine suurendab arvu 18 võrra. Analoogiliselt teise arvlausega (2) võime kirjutada:

$$100x + 10z + y - 18 = 100x + 10y + z,$$

mis teiseneb peale lihtsustamist arvlauseks:

(3) $$y - z = -2.$$

Ülesande küsimuse peale annab vastuse süsteem:

$$\left.\begin{array}{rr} (1) & x + y + z = 15 \\ (2) & x - y = -2 \\ (3) & y - z = -2. \end{array}\right\}$$

Süsteemi lahendamiseks arvame esimesest arvlausest teise maha, millega kõrvaldame x-i:

(4) $$2y + z = 17.$$

Et viimases arvlauses (3) x-i ei olegi, siis võime saadud arvlauset (4) ja arvlauset (3) uueks süsteemiks kahe tundmatuga lugeda:

$$\begin{array}{rr} (4) & 2y + z = 17 \\ (3) & y - z = -2. \end{array}$$

Viimasest süsteemist leiame kokkuarvamisega:

$$3y = 15$$

$$y = 5.$$

z-i leidmiseks asendame $y = 5$ arvlausesse (3):

$$5 - z = -2,$$

ehk:

$$z = 7.$$

Asendades $y = 5$ arvlausesse (2) leiame:

$$x - 5 = -2,$$

millest järgneb:

$$x = 3.$$

Otsitav arv on seega 357.

* III. Ühtlustamise viis.

Ühtlustamise viisi oleme juba § 88 tarvitanud, kui tõestasime, et kolme tundmatu väljaarvamiseks läheb vaja kolme arvlauset.

Arvame nüüd selle viisi järele järgmise süsteemi välja:

$$\left.\begin{array}{rr} (1) & 3y + 2z - x = 9 \\ (2) & 3x + 5y - 11z = 5 \\ (3) & 10x - 2y - 7z = 20 \end{array}\right\}$$

Arvame kõigist arvlauseist ühe ja sellesama tundmatu, näit. y-i, välja.

Esimesest arvlausest $y = \frac{9 - 2z + x}{3}$ (4)

Teisest „ $y = \frac{5 - 3x + 11z}{5}$ (5)

Kolmandast „ $y = \frac{10x - 7z - 20}{2}$ (6)

Et (4) ja (5) ühtivuste pahemad pooled on ühesuurused, siis peavad seda ka paremad pooled olema:

$$\frac{9 - 2z - x}{3} = \frac{5 - 3x + 11z}{5}.$$

Sedasama võime ka kinnitada (4) ja (6) ühtivuse kohta:

$$\frac{9 - 2z + x}{3} = \frac{10x - 7z - 20}{2}.$$

Oleme saanud kaks uut arvlausete süsteemi kahe tundmatuga:

$$\left.\begin{aligned}\frac{9-2z+x}{3}&=\frac{5-3x+11z}{5}\\ \frac{9-2z+x}{3}&=\frac{10x-7z-20}{2}\end{aligned}\right\}$$

Peale murdudest vabastamise ja lühendamise võime viimase süsteemi nii ümber kirjutada:

$$\left.\begin{aligned}14x-43z&=-30 \quad (7)\\ 28x-17z&=78 \quad (8)\end{aligned}\right\}$$

Mõlemaist arvlauseist (7) ja (8) x-i välja arvates leiame:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{43z-30}{14} \quad (9)\\ x&=\frac{17z+78}{28} \quad (10)\end{aligned}\right\}$$

Nende ühtivuste paremaid pooli ühtlustades, saame arvlause:

$$\frac{43z-30}{14}=\frac{17z+78}{28},$$

mis sisaldab ainult ühe tundmatu.

Sellest arvlausest leiame, et

$$z=2.$$

Seda tähendust arvlausesse (9) ehk (10) asendades, leiame x-i tähenduse:

$$x=4.$$

Lõpuks, asendades

$$z=2 \text{ ja } x=4$$

ükskõik missugusesse arvlauseist (4), (5) või (6) leiame

$$y=3.$$

Seega on antud süsteemi vastus:

$$x=4,\ y=3,\ z=2.$$

Lahendame selle järele süsteemi:

$$\left.\begin{array}{rl} (1) & 5x+3y+2z= \quad 5 \\ (2) & 3x+2y-4z= \quad 19 \\ (3) & 7x-5y+3z=-12 \end{array}\right\}$$

Kasvatame esimese arvlause määramata arvu u_1-ga ja teise määramata arvu u_2-ga, ja arvame nad siis kolmanda arvlausega kokku, mille järele saame:

$$(4) \quad x(5u_1+3u_2+7)+y(3u_1+2u_2-5)+z(2u_1- \\ -4u_2+3)=5u_1+19u_2-12.$$

Et u_1 ja u_2 on määramata arvud, siis võime nende suurust nii ära määrata, kuidas see on meile kõige kasulikum. Kui meie aga kaht arvu u_1 ja u_2 ära määrata tahame, siis peame siduma neid kahe isesuguse ühtivusega, sest ainult kahest ühtivusest (arvlausest) võime leida kahe arvu suuruse.

Valime u_1 ja u_2 tähendused nii, et nad arvlauses (4) x-i ja y-i koeffitsiendid muudaksid nulliks. Et see sünniks, peavad u_1 ja u_2 niisugused arvud olema, mis rahuldavad järgmise arvlausete süsteemi:

$$\left.\begin{array}{l} 5u_1+3u_2+7=0 \\ 3u_1+2u_2-5=0 \end{array}\right\}$$

Sellest süsteemist otsime ükskõik missugusel viisil u_1 ja u_2 arvsuurused välja; selgub, et

$$u_1=-29$$
$$u_2=46.$$

Kui need tähendused arvlausesse (4) asendame, teisendavad nad, x-i ja y-i koeffitsiente nulliks muutes, arvlause järgmiselt:

$$z(-2\,.\,29-4\,.\,46+3)=-5\,.\,29+19\,.\,46-12$$

ehk:

$$-239z=717$$

ehk:

$$z=-3$$

Kui aga valida u_1 ja u_2 nii, et nad muudaksid x-i ja z-i koeffitsiendid arvlauses (4) nulliks, siis saame u_1 ja u_2 väljaarvamiseks süsteemi:

$$\left.\begin{aligned} 5u_1 + 3u_2 + 7 &= 0 \\ 2u_1 - 4u_2 + 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

millest leiame $u_1 = -\frac{37}{26}$; $u_2 = \frac{1}{26}$.

Need arvud u_1 ja u_2 asemele arvlausesse asendades, saame arvlause (x-i ja z-i koeff-id muutuvad nulliks):

$$y\left(-3\ \frac{37}{26} + 2 \cdot \frac{1}{26} - 5\right) = -5 \cdot \frac{37}{26} + 19 \cdot \frac{1}{26} - 12,$$

millest teisendades järgneb

$$-239y = -478$$

ehk:

$$y = +2.$$

Lõpuks valides u_1 ja u_2 nii, et nad muudaksid y-i ja z-i koeffitsiendid arvlauses (4) nulliks, saame nende arvude määrajaks arvlausete süsteemi:

$$\left.\begin{aligned} 3u_1 + 2u_2 - 5 &= 0 \\ 2u_1 - 4u_2 + 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Siit u_1 ja u_2 välja arvates, leiame:

$$u_1 = \frac{7}{8},\ u_2 = \frac{19}{16}.$$

Need tähendused jällegi arvlausesse (4) asendades, saame arvlause x-i väljaarvamiseks:

$$x\left(5 \cdot \frac{7}{8} + 3 \cdot \frac{19}{16} + 7\right) = 5 \cdot \frac{7}{8} + 19 \cdot \frac{19}{16} - 12.$$

Viimasest ühtivusest leiame:

$$x = 1. *$$

* § 90. Arvlaused 4-ja ja enam tundmatuga.

Kui arvlausete arv, mis tundmatuid üksteisega seob, vähem on kui tundmatute arv, siis võiksime analoogilisel teel nagu § 88 alguses seda kolme tundmatuga arvlausete juures näitasime, ka siin tõestada, et niisugune süsteem võimaldab iga tundmatu jaoks lugemata hulga tähendusi.

Et iga tundmatu jaoks kindlat arvu leida, peab arvlausete arv niisama suur olema kui tundmatute arv: 4 tundmatu jaoks nelja-arvlauseline süsteem, 5 tundmatu jaoks viie-arvlauseline süsteem j. n. e., üleüldse n tundmatu jaoks n-arvlauseline süsteem.

Et välja arvata n-arvlauselist süsteemi n tundmatuga, võime viise, mida kolme-arvlauselise süsteemi juures tarvitasime, n arvlause kohta laiendada.

I. Kokku- mahaarvamise viis.

Esimesest kahest arvlausest kaotame kokku- mahaarvamisega mingisuguse tundmatu ära. Kaotame selsamal viisil esimesest ja kolmandast arvlausest sellesama tundmatu ära, niisama esimesest ja neljandast j. n. e.

Saame sel teel lõpuks $n-1$-arvlauselise süsteemi $n-1$ tundmatuga.

Viimase süsteemiga käime niisama ümber, s. t. arvlauseid kokku ehk maha arvates saavutame uue $n-2$-arvlauselise süsteemi $n-2$ tundmatuga j. n. e. Lõpuks tuleme sel teel ühe arvlause juurde ühe tundmatuga, millest selle tundmatu leiame. Tema tähendust järk-järgult arvlausesse asendades, leiame ka teised tundmatud.

II. Asendamise viis.

Esimesest arvlausest arvame mingi tundmatu välja, vaadates teiste, kui kindlate suuruste peale. Asendame selle tundmatu avalduse kõigisse teistesse arvlauseisse, mille läbi $n-1$ arvlauset $n-1$ tundmatuga saame.

Selle süsteemi ühest arvlausest otsime teise tundmatu avalduse, ülejäänud $n-2$ otsitavat kindlateks arvudeks lugedes, ja asendame selle avalduse ülejäänud $n-2$ arvlauseisse, mille tagajärjel leiame $n-2$ arvlauset $n-2$ otsitavaga j. n. e., kuni lõpuks jõuame ühe arvlause juurde ühe tundmatuga.

Teades ühe otsitava arvsuurust, leiame järk-järgult teised, kui paneme saadud arvsuuruse enne leitud teiste tundmatute avaldustesse.

III. Tundmatute ühtlustamise viis.

Arvame kõigist arvlauseist ühe ja sellesama tundmatu, teisi kindlaiks lugedes, välja. Seome selle tundmatu avalduse kõikide teiste sellesama tundmatu avaldustega; sel teel leiame $n-1$ uut arvlauset $n-1$ otsitavaga.

Viimase süsteemiga talitame niisama ja leiame süsteemi $n-2$ arvlausega ja $n-2$ otsitavaga j. n. e.

IV. Määramata tegurite viis.

Tähendame tundmatud (nende arv on n) tähtedega x, y, z, ... t, u, v. Kasvatame esimese arvlause m_1, teise m_2, kolmanda m_3 . . . eelviimase m_{n-1}-ga, kus arvud m_1, m_2, m_{n-1} täitsa määramata arvud olgu, ja arvame kõik saadud arvlaused kokku.

Valime arvud m_1, m_2 . . , m_{n-1} nii, et x, y, z . . . , n koeffitsiendid muutuksid nulliks.

Saame m_1, m_2 . . . , m_{n-1} väljaarvamiseks $n-1$ arvlausest $n-1$ tundmatuga.

Asendame nende arvulised tähendused kokkuarvamise teel saadud arvlausesse ja leiame arvlause ühe tundmatu v-ga.

Sellest arvlausest arvame välja v.

Valime m_1, m_2, . . . m_{n-1} tähendused nii, et nad muudaksid nulliks koeffitsiendid x, y . . . , t, v juures (u koeff. ei muutu nulliks!).

Nende arvude m_1, m_2 . . ., m_{n-1} leidmiseks on meil siis tarvitada $n-1$-arvlauseline süsteem $n-1$ tundmatuga j. n. e.

Et eelmisi seletusi illustreerida, lahendame asendamise teel järgmise süsteemi.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 6z + 2u &= 4 \\ 4x - y - 3u &= 7 \\ 2y - 4z - 2u &= 8 \\ 3x + y + 2z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Esimesest arvlausest järgneb:

$$(1) \qquad x = \frac{4 - 3y + 6z - 2u}{2}.$$

Asendame selle avalduse teistesse arvlausetesse.

(Muutmataks jääb kolmas arvlause, sest selles ei leidu x-i.)

Peale asendamist ja resultaadi lihtsustamist saame järgmise süsteemi:

$$\left.\begin{aligned} 7y + 7u - 12z &= 1 \\ 2y - 4z - 2u &= 8 \\ 22z - 7y - 6u &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Siit esimesest arvlausest y-i välja arvates, saame:

$$(2) \qquad y = \frac{12z - 7u + 1}{7}.$$

Seda avaldust teise kahte arvlausesse asendades, saame kahe-arvlauselise süsteemi:

$$\left.\begin{aligned} 2z + 14u &= -27 \\ 10z + u &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Viimasest arvlausest süsteemis järgneb:

$$(3) \qquad u = 3 - 10z,$$

mille paneme esimesse arvlausesse u-i asemele:

$$2z + 42 - 140z = -27,$$

ehk:

$$+138z = +69,$$

ehk:

$$z = \frac{1}{2}.$$

Seda tähendust u jaoks leitud avaldusse (3) paigutades, saame:

$$u = -2.$$

y-i arvame välja ühtivusest (2) ja x-i ühtivusest (1). Sel teel saame antud süsteemi vastuse:

$$x = 1,\ y = 3,\ z = \frac{1}{2},\ u = -2.$$

* § 91. Lihtsustused süsteemi väljaarvamisel.

Arvlausete süsteemi lahendamisel tuleb, kui tundmatute arv üle kolme, nagu näinud oleme, hulk tehteid teha, mis sagedasti õige palju aega viidavad.

Et väljaarvamise tööd kergendada, peame ette võtma igasuguseid lihtsustusi, kus see võimalik. Nii, näituseks, koondame alati saadavad arvlaused, muidugi, kui see võimalik on. Seda oleme ka peaaegu alati eelpool väljaarvatud arvlausete juures teinud. Mõne süsteemi juures on võimalik veel mitmesuguseid muid lihtsustusi teha ja sel viisil hoopis lühemat teed kaudu eesmärgile jõuda. Kui, näituseks, mõnest süsteemi arvlausest puudub mingi tundmatu, siis võime selle arvlause peale nii vaadata, kui oleks sealt mingisugusel viisil otsitav kõrvaldud.

Jääb järele veel kõrvaldada seesama tundmatu teistest arvlausetest. Veel lihtsam on arvlausete väljaarvamine, kui mõni tundmatu puudub kahest ehk rohkem arvlausest: siis kõrvaldame veel selle tundmatu teistest arvlausetest.

Üleüldse peab alati selle tundmatu kõrvaldamisega peale hakkama, mis esineb kõige vähemas arvus arvlauseis. Ehk küll arvlausete lahendamist peaaegu alati *teatud* viisiga,

näit. asendamisega, võib toimetada, ei peeta sellest aga mitte kinni, vaid tarvitakse ühe ja sellesama süsteemi lahendamise juures sagedasti mitut viisi, selle järele, mis võimaldab väljaarvamist vähema tööga.

Kõige sagedamini on tarvitusel asendamise ja kokkumahaarvamise viisid.

Lahendame järgmise süsteemi:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 13 \\ 4u - 2x &= 30 \\ 2y + z &= 7 \\ 5y + 3u &= 32 \end{aligned}\right\}$$

Et x-iga ainult kaks esimest arvlauset esinevad, kõrvaldame selle tundmatu kõige pealt; kõige lihtsam on seda teha kokkuarvamisega sest x-i koeffitsiendid on, absoluutselt ühesugused, vastupidiste märkidega arvud. Peale kokkuarvamist saame süsteemi:

$$\left.\begin{aligned} 2z - 3y + 4u &= 43 \\ 2y + z &= 7 \\ 5y + 3u &= 32 \end{aligned}\right\}$$

Selle süsteemi esimesest kahest arvlausest kõrvaldame asendamise teel z-i, selleks z-i välja arvates teisest arvlausest (esimesest arvlausest on z murruline avaldus).

Asendades $z = 7 - 2y$ esimesse arvlausesse, kirjutame süsteemi nii ümber:

$$\left.\begin{aligned} 4u - 7y &= 29 \\ 5y + 3u &= 32 \end{aligned}\right\}$$

Esimene arvlause annab:

$$u = \frac{29 + 7y}{4},$$

mida teise arvlausesse asendades, saame:

$$41y = 41$$

ehk:

$$y = 1.$$

Tartu Ülikooli Didakt.-metood. Seminar

Edasi järgneb:

$$u = 9,\ z = 5 \text{ ja } x = 3.$$

Mõnikord lubab arvlausete korrapärane kuju meid teatud võtete abil süsteemi väga lihtsalt välja arvata.

Olgu võetud näituseks süsteem:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+u &= 6 \\ x+y+z-u &= 2 \\ x+y-z+u &= 2 \\ x-y+z+u &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Arvame esimesest arvlausest teise maha:

$$2u = 4,$$

ehk

$$u = 2.$$

Arvame kolmanda ja neljanda maha esimesest, kust järgneb:

$$2z = 4,\ z = 2,$$

$$2y = 2,\ y = 1.$$

Neid tähendusi esimesse antud arvlausesse asendades, leiame x-i:

$$x = 1.$$

2. näitus:

$$\frac{2}{3x} + \frac{1}{2y} = 3.$$

$$\frac{5}{6x} - \frac{3}{4y} = 1.$$

Kui selle süsteemiga harilikku teed käia, ja ta murdudest vabastada, siis saaksime arvlauseis liikmed x-i ja y-i kasvatisega. Need arvlaused kuuluvad juba teise astme arvlausete liiki, millede lahendamine mitte nii lihtne ei ole, kui esimese astme arvlauseil. Et teise astme arvlausetest kõrvale hoida, talitame järgmiselt: meie võime murdu $\frac{2}{3x}$ kujutada nii: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$, murdu $\frac{3}{4y}$ nii: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{y}$ j. n. e.

Tähendame $\frac{1}{x}$ ära tähega m ja $\frac{1}{y}$ tähega n.

Selge on, et kui teame m ja n, siis teame ka nende vastupidised tähendused x ja y, sest:

$$\frac{1}{m} = x \text{ ja } \frac{1}{n} = y.$$

Sellepärast kirjutame antud süsteemi nii ümber:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3}m + \frac{1}{2}n &= 3 \\ \frac{5}{6}m + \frac{3}{4}n &= 1 \end{aligned}\right\}$$

ehk, peale murdudest vabastamist:

$$\left.\begin{aligned} 4m + 3n &= 18 \\ 10m + 9n &= 12 \end{aligned}\right\}$$

Seda süsteemi välja arvates saame:

$$m = 21,$$

$$n = -22,$$

kust kohe leiame:

$$x = \frac{1}{m} = \frac{1}{21};$$

$$y = \frac{1}{n} = -\frac{1}{22}.$$

* § 92. Üleliigsed ja puuduvad juured.

Arvlauseid murdudest vabastades, peame § 67 tähendusi silmas pidama, et meie ühise nimetajaga arvlauset kasvatades mitte *üleliigseid* tegurid, mis tundmatuid sisaldavad, ühisesse nimetajasse ei võtaks, sest sel teel tekitame arvlauses uued juured, mis mitte alati ei rahulda antud arvlauset.

Sellepärast peame ka sel juhusel, kui arvlauses ühe tundmatu jaoks enam kui ühe arvsuuruse saame ja arvlause tundmatut sisaldava avalduse peale oleme kasvatanud, järele katsuma,

kas nad ka kõik rahuldavad antud arvlauset. Teisest küljest, kui arvlauset koondada mingi avalduse peale, mis tundmatut sisaldab, siis kaotame sellega mõne tundmatu arvsuuruse (juure). Et seda mitte sündida lasta, peame koondatava teguri nulliga ühtlustama ja saadava arvlause välja arvama.

Viimast illustreerime näitusega:

$$\frac{5+3x}{5+2x} = \frac{7+x}{7-x}.$$

Seda arvlauset murdudest vabastades, saame peale lihtsustamist samase arvlause:

$$5x^2 + 3x = 0.$$

Meie võiksime selle arvlause x-iga koondada, kuid et näidata, et selle juures tõesti üks juur kaduma läheb, võtame arvlause pahemas pooles x-i klambrite ette:

$$x(5x+3) = 0.$$

Kahe teguri x-i ja $5x+3$ kasvatis on null, mis aga siis, ja ainult siis, on võimalik, kui vähemalt üks neist on null; s. t. peab olema kas:

$$x = 0,$$

mis on üks arvlause juur, ehk jälle:

$$5x + 3 = 0.$$

Viimane arvlause

$$5x + 3 = 0$$

annab meile:

$$x = -\frac{3}{5}.$$

Seega oleme leidnud kaks juurt:

$$x = 0 \text{ ja } x = -\frac{3}{5}.$$

Esimene neist oleks läinud kaotsi, kui meie ühist tegurit x-i, millega arvlauset koondasime, mitte ei oleks ühtlustanud nulliga. *

* § 93. Arvlaused üleüldisel kujul.

Esimese astme ühe tundmatuga arvlause võib üleüldisel kujul kirjutada, kui tähele paneme, et niisuguses arvlauses peab olema x-iga liige ja võib olla veel kindel liige. Tundmatu liikme koeffitsiendi tähendame tähega a ja kindla liikme tähega b. Arvlause ise on siis järgmine:

$$ax + b = 0,$$

kus a ja b võivad igasugused arvud olla, kuid kus

$$a \neq 0,$$

sest kui $a = 0$, siis ei oleks arvlauses tundmatut.

Niisuguse arvlause juure saame tuttavate juhtlausete põhjal kätte:

$$ax = -b;$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Esimese järgu kahe tundmatuga arvlauses peavad olema peale lihtsustamist järgmised liikmed: liikmed tundmatute x-i ja y-iga, milledel muidugi ka koeffitsiendid ees võivad seista; x-i koeffitsiendi tähendame tähega a, y-i koeffitsiendi tähega b ära, seega on arvlauses liikmed ax ja by. Peale nende kahe liikme võib arvlause veel sisaldada kindla liikme, mille tähega c ära tähendame. a, b ja c on teatud arvud — positiivsed ehk negatiivsed, täis- ehk murdarvud.

Seega võtab mainitud arvlause kuju:

$$ax + by = c.$$

Teist arvlauset siia juurde kirjutades saame kahe arvlause süsteemi üleüldisel kujul.

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a_1x + b_1y &= c_1 \end{aligned}\right\}$$

a_1, b_1 ja c_1 võivad jällegi olla igasugused arvud.

Selle süsteemi väljaarvamiseks kasvatame esimese arvlause b_1-ga ja teise b-ga ja arvame esimesest teise maha:

$$ab_1x + bb_1y = b_1c$$

$$\underline{\overline{(+)}\, a_1bx \;\overline{(+)}\, bb_1y = \overline{(+)}\, bc_1}$$

$$ab_1x - a_1bx = b_1c - bc_1$$

ehk:

$$x(ab_1 - a_1b) = b_1c - bc_1;$$

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}$$

Analoogiliselt leiame, esimest arvlausest kasvatades a_1-ga, teist a-ga ja arvlauseid maha arvates:

$$y(ba_1 - ab_1) = a_1c - ac_1,$$

ehk:

$$y = \frac{a_1c - ac_1}{a_1b - ab_1}$$

või, kui kasvatada murru liikmeid „— 1“-ga:

$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

Niisamasugusel viisil lahendakse ka arvlausete süsteemid üleüldisel kujul kolme ja enam tundmatuga. *

* § 94. Süsteemi väljaarvamise võimalusest.

Meie võiksime endile küsimise ette panna, kas on kaks arvlauset kahe tundmatuga ka alati tõesti väljaarvatavad.

Eelmises paragrahvis lahendud kahe arvlause süsteem üleüldisel kujul lubab meid nüüd selle küsimise peale vastata.

Vastused selle süsteemi jaoks on:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}; \\ y &= \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}. \end{aligned}\right\}$$

Ükskõik missugused arvud a, b, c, a_1, b_1, c_1 ka oleksid, alati on meil võimalik, kaht viimast avaldust x-i ja y-i jaoks tarvitades, x-i ja y-i leida, välja arvatud ainult kaks juhust, millest kohe kõneleme. Niihästi x-i kui y-i avaldustel on üks ja seesama nimetaja $ab_1 - a_1b$.

Kui nüüd arvud a, a_1, b, b_1 on niisugused, mis avalduse $ab_1 - a_1b$ teevad nulliks, siis ei ole ka x-i ja y-i avaldustel mõtet, sest et murrud, milledel nimetajaks o, on mõttetud (vaata § 37).

Ühtivus:

$$ab_1 - a_1b = 0$$

laseb end nii kirjutada:

$$ab_1 = a_1b.$$

Mõlemaid pooli jagades a_1b_1-ga saame:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1},$$

mis näitab, et siis, kui x-i ja y-i avaldused muutuvad mõttetuks, tundmatute koeffitsiendid peavad olema üksteisega proportsionaalsed ja ümberpöördult.

Võtame näituseks süsteemi

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x + 5 \\ 3y &= 9x + 7 \end{aligned}\right\}$$

Asendades $y = 3x + 5$ teise arvlausesse, leiame

$$9x + 15 = 9x + 7,$$

ehk

$$15 = 7,$$

mis on täitsa võimata (absurd), sest 7 ei või 15-ga ühesuurune olla. Seega ei ole antud süsteem lahendatav.

Kirjutame antud süsteemi hariliku korra järele üles:

$$\left.\begin{aligned} 3x - y &= -5 \\ 9x - 3y &= -7 \end{aligned}\right\}$$

Tundmatute x-i ja y-i koeffitsiendid: 3, -1, 9 ja -3 annavad tõesti enne väljendud proportsiooni:

$$\frac{3}{9} = \frac{-1}{-3}.$$

Antud on teine süsteem:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{y-16}{3} \\ x &= \frac{y+3}{3} \end{aligned}\right\}$$

Kui selle süsteemi harilikus korras kirjutame, siis saame:

$$3x - y = -16,$$
$$3x - y = 3.$$

Et tundmatute koeffitsiendid annavad proportsiooni:

$$\frac{3}{3} = \frac{-1}{-1},$$

siis ei ole sel süsteemil vastust.

Süsteemi, millel vastust ei ole, nimetakse ühtimatuks.

Meie teame juba, et iga esimese järgu arvlause kahe tundmatuga kujutab graafiliselt mingisugust sirgjoont.

Kui nüüd süsteemi lahendamisel leiame, et x ja y muutuvad mõttetuks avalduseks, siis võime § 37 seletuse järele niisuguseid x-i ja y-i avaldusi ka lõpmata suureks lugeda. Kuid et kahe arvlause süsteemi juured graafiliselt tähendavad kahe sirgjoone lõikpunkti koordinaate, siis peab ühtimatu süsteem kujutama kaht paralleeljoont. On ju teada, et paralleeljoonte lõikpunkt öeldakse otsatuses olevat, s. t. et nende lõikpunkti koordinaadid on lõpmata suured.

Seega on siis selge, et kaks arvlauset kujutavad paralleeljooni, kui nende tundmatute koeffitsiendid on proportsionaalsed.

Oletame nüüd, et kahe arvlause koeffitsiendid a, b, c, a_1, b_1, c_1 on niisugused, et nad avalduste

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b},\ y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$$

lugejad ja nimetajad muudavad nulliks, näituseks:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 4x - 6y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

kust saame, kui välja arvame x ja y eelmiste avalduste järele, võttes

$$a = 2,\ b = -3,\ c = 1,\ a_1 = 4,\ b_1 = -6,\ c_1 = 2.$$

$$x = \frac{-6 \cdot 1 - (-3) \cdot 2}{2 \cdot (-6) - 4 \cdot (-3)} = \frac{-6 + 6}{-12 + 12} = \frac{0}{0};$$

$$y = \frac{2 \cdot 2 - 4 \cdot 1}{2 \cdot (-6) - 4 \cdot (-3)} = \frac{4 - 4}{-12 + 12} = \frac{0}{0}.$$

Seega:

$$x = \frac{0}{0},$$

$$y = \frac{0}{0}.$$

Kuid $\frac{0}{0}$ on määramata arv, see tähendab, et $\frac{0}{0}$ võib olla iga arv. Sellest järgneb, et niihästi x-il kui y-il on lugemata hulk arvsuurusi, mis arvlauseid rahuldavad. Nii võib olla $x = 0$, siis $y = -\frac{1}{3}$; $y = 1$, siis $x = 2$ j. n. e. Kui neid arvlauseid graafiliselt kujutada, siis selgub meile, miks neid rahuldab lugemata hulk arve.

Otsime esimese sirgjoone kaks punkti:

kui $x = 0$, siis $y = -\frac{1}{3}$

„ $x = 2$, „ $y = 1$.

Esimese sirgjoone määravad seega punktid $M\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ja $M_1(2, 1)$.

Teise sirgjoone punktid leiame analoogiliselt:

kui $x = 0$, siis $y = -\frac{1}{3}$

„ $x = 2$, „ $y = 1$.

TARTU ÜLIKOOL
DIDAKTILINE SEMINAAR

Tähendab, et teise joone needsamad punktid $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ja (2, 1) ära määravad, mis esimesegi, s. t., et mõlemad jooned liituvad ühte.

Sellepärast ongi neil sirgjoontel lugemata hulk lõikpunkte (liitpunkte) ja arvlausete süsteemil, mis neid kujutab, on lõpmata hulk vastuseid.

Kui lõpuks kahte antud arvlauset

$$2x - 3y = 1$$

$$4x - 6y = 2$$

vaadata, siis näeme, et teise arvlause saame esimesest, kui teda kasvatame 2-ga. Teine arvlause on siis ainult esimese järeldus, või teisiti öeldud, ta on seesama, mis esimene. Nüüd on selge, et juhtlauset kahe arvlause süsteemi ühtimise kohta järgmiselt võime formuleerida:

Kahearvlauseline süsteem on ainult siis ühtiv (s. t. annab kindla vastuse), kui tundmatute koeffitsiendid ei ole proportsionaalsed, ehk kui teine arvlause ei ole esimese järeldus.*

VII.

Algteguriteks lahutamine.

* § 95. Algebraliste avalduste tegurid.

Aritmeetikas nimetasime mingi arvu teguriteks arve, millede kasvatamisel ilmub esimene arv. Nii on 5 ja 12 arvu 60-ne tegurid; 4, 2 ja 6 on arvu 48 tegurid j. n. e.

Kui arvu tegurid on algarvud, siis nimetakse niisuguseid tegurid algteguriteks, nagu näit. arvul 30 on algtegurid 2, 3 ja 5.

Ka algebras nimetame kaht avaldust, millede kasvatamisel ilmub kolmas avaldus, viimase teguriteks.

Nii on avalduse

$$a(a+b)$$

tegurid a ja $a+b$.

Kuid

$$a(a+b)=a^2+ab.$$

Seda ühtivust paremalt poolt pahemale lugedes, saame:

(1) $$a^2+ab=a(a+b),$$

mis näitab, et on võimalik mõnikord saada summa (siin a^2+ab) asemel kasvatist, siin $a(a+b)$.

Üleüldse võib algebras sagedasti terveid polünoome teisendada kasvatiseks, mille tegurid on terved monoomid ja polünoomid.

Märkus: Tervete polünoomide all kujutame polünoome, millede liikmeis ei ilmu murrud. Niisama ei ilmu ka terveis monoomes murrud.

Niisugust teisendamist nimetakse polünoomide teguriteks lahutamiseks.

Seega kujutab ühtivus (1) summa $a^2 + ab$ teguriteks lahutamist. Kuid mitte kõiki polünoome ei saa kujutada tervete tegurite kasvatisena; nii ei saa kujutada

$$a + b - c$$

mingi tervete monoomide ega polünoomide kasvatisena. Niisuguseid avaldusi nimetame algavaldusteks. Teguriteks lahutamise juures loeme ülesande täidetuks, kui saadud tegurid on algavaldused, ehk, nagu neid veel nimetakse, algtegurid. Ühtivuses (1) on a ja $a + b$ algtegurid, sest et neid eraldi enam kasvatisena ei saa kujutada. *

* § 96.

Üleüldist juhtnööri, mis järeldada lubaks, kas antud avaldus võimaldab algteguriteks lahutamist või mitte, ei ole algebras olemas. Sellepärast ei lahutata algebralisi avaldusi alati ühe ja sellesama viisi järele algteguriteks.

Kõik juhtlaused, millede järele algteguriteks lahutamine sünnib, saadakse kasvatamise juhtlausetest.

Algame kõige lihtsama võttega; võtame tuntud ühtivused:

(1) $$5(a + b^2) = 5a + 5b^2$$

(2) $$a(c - d + i) = ac - ad + ai$$

(3) $$3b^2c(a - b - 2c^3) = 3ab^2c - 3b^3c - 6b^2c^4.$$

Neid ühtivusi kasvatamise alalt paremalt poolt pahemale lugedes saame:

(4) $$5a + 5b^2 = 5(a + b^2)$$

(5) $$ac - ad + ai = a(c - d + i)$$

(6) $$3ab^2c - 3b^3c - 6b^2c^4 = 3b^2c(a - b - 2c^3).$$

Vaatleme nende ühtivuste pahemaid poole.

Ühtivuses (4) on pahemal poolel kaks liiget: $5a$ ja $5b^2$. Neis liigetes esineb mõlemais tegur 5.

Ühtivuse (4) paremal poolel näeme aga, et tegur 5 klambrite ette on kirjutud. Klambrite sees olevad liikmed $a+b^2$ saame, kui polünoomi $5a+5b^2$ liikmed üksikult 5-ga jagame.

Ühtivustes (5) ja (6) on pahemal poolel kõigil kolmel liikmel ühine tegur: ühtivuses (5) on see tegur a, ühtivuses (6) aga $3b^2c$. Need ühised tegurid on ühtivuste paremal poolel klambrite ette kirjutud, kuna klambrite sees olevad liikmed on saadud jällegi jagamisega.

Iseenesest mõista, et võime ühise teguri ka klambrite taha panna, sest

$$a(c-d+i)=(c-d+i)a.$$

Eeloleva seletuse põhjal võime esimest polünoomide teguriteks lahutamise võtet ühise teguri klambrite ette võtmiseks nimetada.

Juhtlause: Polünoomi liigete ühine tegur võetakse klambrite ette (ehk taha) ja kirjutakse klambrite sisse avaldus, mis saadakse polünoomi jagamisest klambrite ette võetud ühise teguriga.

Võib juhtuda, et polünoomi liigetel on ühine tegur, mis mitte monoom ei ole, vaid polünoom, näituseks:

$$a(b+c)+d(b+c);$$

selles polünoomis on kaks liiget:

$$a(b+c) \text{ ja } d(b+c),$$

milledel on ühine tegur $b+c$.

Meie võtame selle ühise teguri endist viisi klambrite ette, kuid et see ühine tegur on polünoom ja teda peame kasvatama, siis paneme ta klambrite sisse; seega:

$$a(b+c)+d(b+c)=(b+c)(a+d).$$

Teiste klambrite sees oleva polünoomi $a+d$ saame jällegi, kui $a(b+c)+d(b+c)$ jagame ühise teguriga $b+c$.

Näitused:

1) $2a(x-1)-x(x-1)=(x-1)(2a-x)$;

2) $4q(p+1)+2(p+1)^2=2(p+1)(2q+p+1)$,

sest polünoomi liigetel on ühine tegur $2(p+1)$;

3) $2p(p-q)-3q(p-q)^2$.

Jagades polünoomi liikmeid ühise teguriga $p-q$-ga, saame jao:

$$2p-3q(p-q).$$

Seda jagu peame kasvatama $p-q$-ga, milleks $2p-3q(p-q)$ peame panema keskmistesse klambritesse, sest jaos $2p-3q(p-q)$ esinevad juba väikesed klambrid. Kasvatis on:

$$(p-q)[2p-3q(p-q)].$$

Nüüd võime teise teguri lihtsustada, avades temas väikesed klambrid:

$$(p-q)[2p-3pq+3q^2].$$

Lõpuks paneme keskmiste klambrite asemele väiksed, sest et keskmisi klambrid enam vaja ei ole. Leiame lõpulikult:

$$(p-q)[2p-3pq+3q^2].$$

4) $a(x-y)+x-y=a(x-y)+(x-y)=$
$=(x-y)(a+1)$;

5) $n(p-q)+(q-p)=n(p-q)-(p-q)=$
$=(p-q)(n-1)$;

6) $a(x^3-3)+b(3-x^3)-3+x^3=a(x^3-3)-$
$-b(x^3-3)+(x^3-3)=(x^3-3)(a-b+1)$.

Kahes viimases näituses muutsime polünoomi teisel liikmel klambrite sees märgi vastupidiseks, et saada tegurit, nagu ta on esimesel liikmel; selle tagajärjel pidime, et mitte polü-

noomi suurust muuta, ka klambrite ette vastupidise märgi võtma. Kui aga meil, näituses, liige $(a+b)^2$ esineb, siis võime klambrite sees olevad arvud vastupidiste märkidega võtta, ilma et klambrite ees märki tuleks muuta, sest $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ ja $(b-a)^2 = b^2-2ab+a^2$, mis on täitsa ühtlased.

Seda võime alati teha, kui liikmed kujutavad teist, neljandat, ühe sõnaga, paaris astet, sest kõikide arvude paaris aste on positiivne arv:

$$(-3)^2 = -3 \cdot -3 = +9,$$

$$(3)^2 = 3 \cdot 3 = +9,$$

$$(-a)^4 = -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a = +a^4,$$

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a = +a^4.$$

Sagedasti tuleb ette, et algteguriteks lahutatava polünoomi liigetel, üksikult võetud, ühiseid tegurid ei ole, kui aga liikmed gruppeerida kahe, kolme j. n. e. kaupa, need grupid kujutada iseseisvalt kasvatistena, siis ilmub neil gruppidel ühine tegur, kui aga gruppeerimise juures liikmed on otstarbekohaselt kokku võetud.

Nii ei ole polünoomi a^3-2a^2+2a-4 liigetel ühist tegurit, sellepärast talitame järgmiselt.

Ühendame esimese ja teise liikme ühte, kolmanda ja neljanda t e i s e gruppi ja kujutame need grupid kasvatisena

$$7)\quad a^3-2a^2+2a-4 = (a^3-2a^2)+(2a-4) =$$

$$= a^2(a-2)+2(a-2) = (a-2)(a^2+2).$$

Oleks võinud ka nii toimetada:

$$a^3-2a^2+2a-4 = (a^3+2a)-(2a^2+4) =$$

$$= a(a^2+2)-2(a^2+2) = (a^2+2)(a-2),$$

mis on endisega ühtlane.

§ 97. Kvadraatide vahe teguriteks lahutamine.

Võtame kasvatise

$$(a+b)\ (a-b);$$

nagu teame, saame peale kasvatamist

$$(a+b)\ (a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

Ühtivust:

$$(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$$

paremalt poolt pahemale lugedes saame:

$$a^2-b^2=(a+b)\ (a-b).$$

Viimase ühtivuse pahem pool kujutab kvadraatide a^2 ja b^2 vahet; alusteks on neil kvadraatidel a ja b. Paremal poolel näeme aluste a ja b summa ja nendesama aluste a ja b vahe kasvatist, tähendab, meie oleme a^2-b^2 lahutanud algteguriteks, sest $a+b$ ja $a-b$ on algtegurid.

Juhtlause: Kvadraatide vahe on kvadraatide aluste summa ja nendesamade aluste vahe kasvatis.

Näitused:

1) $9-a^2b^2$;

siin on meil kaks kvadraati:

$$9 \text{ ja } a^2b^2,$$

alusteks on 3 ja ab, sellepärast võime kirjutada:

$$9-a^2b^2=3^2-(ab)^2=(3+ab)\ (3-ab).$$

2) $16n^2-25m^2p^2=(4n)^2-(5mp)^2=$
$(4n+5mp)\ (4n-5mp)$.

3) $4ab^2-9ac^4$;

selles näituses ei ole liikmed kvadraadid, sest ei $4ab^2$ ega $9ac^4$ ei ole kumbki kvadraadid.

Kuid siin võime enne ühise teguri a klambrite ette võtta:

$$4ab^2-9ac^4=a(4b^2-9c^4).$$

Nüüd kujutab klambrite sees olev tegur $4b^2 - 9c^4$ kvadraatide vahet; teda algteguriteks lahutades saame lõpulikult

$$4ab^2 - 9ac^4 = a(2b + 3c^2)(2b - 3c^2).$$

Märkus: Käesolevas näituses pidime enne, kui kvadraatide vahe võisime kujutada, ühise teguri klambrite ette võtma: seda tuleb alati teha, sest sellega saame märksa lihtsama avalduse teguriks, mida siis katsutakse edasi lahutada. Nii siis, teguriteks lahutamisel peame kõige pealt vaatama, kas liigetel ei ole ühist tegurit, mida klambrite ette võiks võtta.

4) $\frac{8}{49}p^2r - \frac{2}{25}q^2r = 2r\left(\frac{4}{49}p^2 - \frac{1}{25}q^2\right) =$

$$= 2r\left(\frac{2}{7}p + \frac{1}{5}q\right)\left(\frac{2}{7}p - \frac{1}{5}q\right).$$

5) $(a - b)^2 - c^2$.

Selles näituses on kujutud kahe kvadraadi: $(a - b)^2$ ja c^2 vahe; alusteks on $a - b$ ja c.

Aluste summa on $(a - b) + c$, ehk $a - b + c$ ja aluste vahe: $(a - b) - c$, ehk $a - b - c$, sellepärast võime antud polünoomi nii algteguriteks lahutada:

$$(a - b)^2 - c^2 = (a - b + c)(a - b - c).$$

6) $c^2 - (m - n)^2$

aluste summa selles näituses on $c + (m - n)$, ehk $c + m - n$, aluste vahe: $c - (m - n) = c - m + n$, sellepärast:

$$c^2 - (m - n)^2 = (c + m - n)(c - m + n)$$

täielikult kõike välja kirjutades oleks meie saanud:

$$c^2 - (m - n)^2 = [c + (m - n)][c - (m - n)] =$$
$$= (c + m - n)(c - m + n).$$

Keskmistesse klambritesse kirjutasime aluste summa ja vahe välja, pärast avasime väikesed klambrid ja kirjutasime siis keskmiste klambrite asemele väikesed.

7) $(a - b)^2 - (c - d)^2 = [(a - b) + (c - d)][a - b) -$
$$- (c - d)] = (a - b + c - d)(a - b - c + d).$$

8) $4(n-m)^2-9c^2(n+m)^2=[2(n-m)]^2-$
$-[3c(n+m)]^2=[2(n-m)+3c(n+m)][2(n-$
$-m)-3c(n+m)]=(2n-2m+3cn+$
$+3cm)(2n-2m-3cn-3cm)$. *

* § 98. Kolmliikete algteguriteks lahutamine.

Võtame kaks tuntud formulit:

(1) $$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

(2) $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Neid ühtivusi paremalt poolt pahemale lugedes saame kaks tähtsat formulit:

(3) $$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

(4) $$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

Paneme neid lähemalt tähele.

Niihästi ühtivuses (3) kui ka (4) on pahemais pooltes kaks kvadraati a^2 ja b^2; alusteks neil kvadraatidel on a ja b. Kolmas liige $2ab$, mis avaldustes seisab teisel kohal, on kas plussi ehk miinusega võetud eelnimetud aluste a ja b kahekordne kasvatis (lihtne kasvatis on ab). Paremais pooltes näeme neid polünoome kujutud olevat kasvatistena, sest

$$(a+b)^2$$

on lühidalt kirjutud

$$(a+b)(a+b)$$

ja

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b);$$

$(a+b)^2$, s. t. summa kvadraat, on siis kirjutud, kui meil pahemal pool ühtivuses aluste kahekordne kasvatis ilmub plussiga; $(a-b)^2$, ehk vahe kvadraadi, saame sel juhusel, kui ka-

hekordne kasvatis esineb miinusega. Tähele tuleb veel panna, et pahemais poolses kvadraatide ees alati + seisab.

Nii siis järgneb juhtlause: Kolmliige, milles kaks märgiga plus võetud kvadraati ja kolmas liige on nende kvadraatide aluste kahekordne kasvatis, teiseneb teguriteks järgmiselt: kui kahekordne kasvatis ilmub märgiga +, siis on kolmliige kvadraatide aluste summa kvadraat, kui aga kahekordse aluste kasvatise ees on märk —, siis saame kolmliikmest kvadraatide aluste vahe kvadraadi.

Näitused.

1) $p^2 + 2pq^2 + q4 = p^2 + 2pq^2 + (q^2)^2 = (p + q^2)^2$,

sest alused on siin p ja q^2, kuna keskmine liige on kahekordne aluste kasvatis ja esineb märgiga +.

2) $z^2 - 14z + 49 = z^2 - 14z + 7^2 = (z - 7)^2$,

sest alused on z ja 7.

3) $-a^2 + 2ab - b^2 = -(a^2 - 2ab + b^2) = -(a-b)^2$.

4) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$.

Selles polünoomis gruppeerime kolm esimest liiget:

$$x^2 - 2xy + y^2 - z^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - z^2.$$

Klambrites olev polünoom on $(x-y)^2$; seega saame:

$$x^2 - 2xy + y^2 - z^2 = (x-y)^2 - z^2,$$

mis on kvadraatide vahe, mida teatud viisil lahutame teguriteks:

$$(x-y)^2 - z^2 = (x-y-z)(x-y+z).$$

Seega leidsime:

$$x^2 - 2xy + y^2 - z^2 = (x-y-z)(x-y+z).$$

5) $9a^2 - 4a^2 - 12ab - 9b^2 = 9a^2 - (4a^2 + 12ab + 9b^2) = (3a)^2 - (2a + 3b)^2 = (3a + 2a + 3b)(3a - 2a - 3b) = (5a + 3b)(a - 3b)$.

§ 99. Kolmliigete algteguriteks lahutamine, kui kolmliikmed ei kujuta summa ega vahe kvadraate.

Võtame kolmliikme:

1) $x^2 - 5x - 6.$

Selles kolmliikmes on x^2-i ees koeffitsient 1. Teises liikmes ilmub sellesama tähe x-i esimene aste, kuna teda kolmandas liikmes ei olegi; sellepärast nimetame kolmandat liiget vabaks liikmeks. Vaba liige on „-6“; meie saame -6 kasvatamise teel järgmiselt:

$$-6 \cdot 1;\quad -1 \cdot 6;\quad 2 \cdot -3;\quad 3 \cdot -2.$$

Kui mingisugune arvude paar summas annab keskmise liikme koeffitsiendi, siis võime antud kolmliikme teguriteks lahutada. Katsume järele, missugused summad meie nende arvude paaridest saame:

$$-6 + 1 = -5,$$
$$-1 + 6 = 5,$$
$$2 + (-3) = -1,$$
$$3 + (-2) = 1.$$

Esimene paar andis keskmise liikme koeffitsiendi: -5. Et $-5 = 1 - 6$, siis võime $-5x$ asemel kirjutada:

$$(1 - 6)x,$$

ehk:

$$x - 6x.$$

Kolmliige eiseneb järgmiselt:

$$x^2 - 5x - 6 = x^2 + x - 6x - 6.$$

Gruppeerime esimese ja teise liikme, selle järele kolmanda ja neljanda:

$$(x^2 + x) - (6x + 6) = x(x + 1) - 6(x + 1) = (x + 1)(x - 6).$$

2) $a^2 - 8a + 15$.

Vaba liikme $+15$ võime järgmiselt kasvatisena kujutada:

$$15 . 1,\ -15 . -1,\ 3 . 5,\ -3 . -5,$$

sest vaba liikme $+15$ saame kahe ühesuguse märgiga arvu kasvatamise teel, kuna aga mitmesuguste märkidega kahe arvu kasvatis annaks negatiivse arvu.

Viimase paari tegurite summa on:

$$-3 + (-5) = -8,$$

mis on keskmise liikme koeffitsiendiga ühtlane; sellepärast kirjutame keskmise liikme järgmiselt:

$$-8a = -3a - 5a.$$

Kolmliige teiseneb järgmiseks:

$$a^2 - 3a - 5a + 15 = a(a-3) - 5(a-3) = (a-3)(a-5).$$

Näitame, et üleüldse kolmliikmeid, millede kuju on:

$$x^2 + (m+n)x + mn,$$

ehk:

$$x^2 - (m+n)x + mn,$$

võib teguriteks lahutada.

$$x^2 + (m+n)x + m . n = x^2 + mx + nx + mn = x(x+m) + n(x+m) = (x+m)(x+n).$$

Teiseks leiame:

$$x^2 - (m+n)x + mn = x^2 - mx - nx + mn = x(x-m) - n(x-m) = (x-m)(x-n).$$

Neis näitustes on vaba liige arvude m ja n või $-m$ ja $-n$ kasvatis.

Esimene liige on x-i kvadraat. Koeffitsiendiks sellel liikmel on 1.

Teises liikmes esineb x-i esimene aste koeffitsiendiga, mis on esimeses näituses m ja n summa, teises näituses $-m$ ja $-n$ summa, s. t. nendesamade arvude summa, millest kasvatisena võime kujutada kolmandat (vaba) liiget.

Niisama võime teguriteks lahutada näit. kolmliikme:

$$x^2 - 14xy + 33y^2,$$

kus tähtede koeffitsientidel on endised omadused, nimelt esimese liikme koeffitsient on 1, kolmanda liikme koeffitsiendi saame kasvatisena kujutada järgmiselt:

$$33 . 1, \quad -33 . -1, \quad 11 . 3, \quad -11 . -3.$$

Viimane paar annab summas $-11 - 3 = -14$, s. o. keskmise liikme koeffitsiendi, sellepärast talitame eelmise viisi järele:

$$x^2 - 14xy + 33y^2 = x^2 - 11xy - 3xy + 33y^2 =$$
$$= x(x - 11y) - 3y(x - 11y) = (x - 11y)(x - 3y). \ *$$

* § 100. Kolmandate astete summa või vahe teguriteks lahutamine.

Otsime

$$a + b \text{ ja } a^2 - ab + b^2,$$

kasvatise. Peale kasvatamist ja avalduse lühendamist saame:

(1) $$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Niisama:

(2) $$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Neid ühtivusi (1 ja 2) vastupidiselt kirjutades saame kaks uut formulit:

(3) $$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

(4) $$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Esimene neist (3) lubab kolmandate astete summa, teine (4) kolmandate astete vahe teguriteks lahutada. Paremat poolt ühtivuses (3) järele vaadates, leiame, et seal kolmandate astete a^3 ja b^3 aluste summa on kasvatud polünoomiga,

mille liigeteks on esimese aluse a kvadraat — aluste kasvatis, + teise aluse kvadraat.

Ühtivuse (4) parem pool erineb ühtivuse (3) paremast poolest sellega, et aluste summa asemel seisab aluste vahe ja et teise teguri liikmed on kõik märkidega +.

Näitused:

1) $x^3 + 1$ ehk $x^3 + 1^3$;

alusteks on x ja 1.

Formuli (3) järele $x^3 + 1^3$ teguriteks lahutades saame:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

2) $27a^3 - 8y^3 = (3a)^3 - (2y)^3 = (3a - 2y)(9a^2 + 6ay + 4y^2)$.

3) $729 - x^3y^3 = 9^3 - (xy)^3 = (9 - xy)(81 + 9xy + x^2y^2)$.

Võtame tuntud samasused:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Vastupidiselt eelmisi ühtivusi kirjutades saame:

I. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

II. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$.

Teist formulit (II) tarvitades võime näituseks lahutada teguriteks avalduse:

$$1 - 3a + 3a^2 - a^3;$$

leiame

$$1 - 3a + 3a^2 - a^3 = (1 - a)^3. *$$

* § 101. Mõned iseäralised juhtumised.

Liigete kokku- ja mahaarvamisega võib mõnikord polünoomi niisuguseks muuta, mida gruppeerimise teel võib kergesti algteguriteks lahutada.

Võtame tuntud avalduse:

$$a^3 - b^3,$$

arvame vahele $a^3 - b^3$ juurde ja temast maha a^2b ja ab^2. Meie võime seda teha, sest ühesuuruste hulkade juurde- ja mahaarvamisega ei muutu polünoom mitte.

$$a^3 - b^3 = a^3 + a^2b - a^2b + ab^2 - ab^2 - b^3 = (a^3 - a^2b) + (a^2b - ab^2) + (ab^2 - b^3) = a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Meie oleme seega juba eespool saadud algtegurite juurde jõudnud:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Näitused:

1) $x^5 - y^5 = x^5 + x^4y - x^4y + x^3y^2 - x^3y^2 + x^2y^3 - x^2y^3 + xy^4 - xy^4 - y^5 = (x^5 - x^4y) + (x^4y - x^3y^2) + (x^3y^2 - x^2y^3) + (x^2y^3 - xy^4) + (xy^4 - y^5) = x^4(x-y) + x^3y(x-y) + x^2y^2(x-y) + xy^3(x-y) + y^4(x-y) = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$.

2) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + a^2b^2 + b^4 + a^2b^2 - a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$. *

Kõike seda, mis algteguriteks lahutamise kohta öeldud, kokku võttes, võime järgmise juhtnööri järele talitada: Vaatame, kas polünoomi liigetel ühine tegur on, mida võiks klambrite ette võtta, ehk kas polünoomi liikmeid gruppeerides ja neid teguriteks lahutades mitte ühine tegur ei ilmu. Edasi vaatame, kas polünoom on

$$a^2 - b^2, \quad a^2 \mp 2ab + b^2, \quad a^3 \mp b^3$$

kujuline, või jälle katsume mõnda liiget algebraliseks summaks muuta, et saaks mõnda tuttavat formulit tarvitada. *

TARTU ÜLIKOOL.
DIDAKTILINE SEMINAAR
MATEMAATIKA JAOSKOND

VIII.

Lisa.

§ 102. Bézout teoreem.

Kui alanevate astete järjes kirjutud polünoomi

(1) $b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$

jagada

$x - a$-ga,

siis on ülejääk sellest jagamisest:

(2) $b_0a^m + b_1a^{m-1} + b_2a^{m-2} + \ldots + b_{m-1}a + b_m$,

mis saadakse polünoomist (1), kui temas x-i asemele panna a.

b_0, b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m ja a võivad olla ükskõik missugused arvud, täis- ehk murdarvud, positiivsed ehk negatiivsed, ainuke tingimine on, et:

$$b_0 \neq 0;$$

m võib olla igasugune täisarv.

Bézout (loe besuu) teoreem ütleb näituseks polünoomi

(3) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

jagamise kohta polünoomiga

$x - 4$,

et ilma jagamist lahendamata võime leida ülejäägi sellest jagamisest, kui paneme polünoomis (3) x-i asemele 4 (sest a on nüüd 4):

$$4^3 - 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 64 - 32 - 20 + 6 = 18.$$

Tõepoolest leiame jagamisega:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 4 \\ \overline{\overset{-}{(+)}\, x^3 \overset{+}{(-)}\, 4x^2} & \overline{x^2 + 2x + 3} \\ \quad + 2x^2 - 5x & \\ \quad \overset{-}{(+)}\, 2x^2 \overset{+}{(-)}\, 8x & \\ \overline{\qquad\qquad 3x + 6} & \\ \qquad \overset{-}{(+)}\, 3x \overset{+}{(-)}\, 12 & \\ \overline{\text{Ülejääk} = 18.} & \end{array}$$

Niisama leiame ülejäägi sellesama polünoomi (3) jagamisest

$$x + 6\text{-ga},$$

kui paneme polünoomis (3) x-i asemele -6, sest

$$x + 6 = x - (-6),$$

nii et

$$a = -6:$$

$$-6)^3 - 2(-6)^2 - 5 \cdot (-6) + 6 = -216 - 72 + 30 + 6 = -252.$$

Jagamisega leiame:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x + 6 \\ \overline{\overset{-}{(+)}\, x^3 \overset{-}{(+)}\, 6x^2} & \overline{x^2 - 8x + 43} \\ \quad - 8x^2 - 5x & \\ \quad \overset{+}{(-)}\, 8x^2 \overset{+}{(-)}\, 48x & \\ \overline{\qquad\qquad + 43x + 6} & \\ \qquad \overset{-}{(+)}\, 43x \overset{-}{(+)}\, 258 & \\ \overline{\text{Ülejääk} = -252} & \end{array}$$

Et Bézout teoreemi tõestada, tähendame polünoomi (1) ära järgmiselt:

$$P_x = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m.$$

Indeksiga (indeks on märk, mis mingi tähe juurde pannakse) x näitame, et polünoomi (1) peatäht on x.

Kui polünoomi (1) jagame x — a-ga, siis ei või ülejäägis esineda enam täht x, sest kui see nii oleks, võiksime veel jagamist edasi toimetada.

Tähendame ülejäägi ära tähega R. Jao aga tähendame märgiga

$$Q_x,$$

kus indeks x jällegi sellepärast on pandud, et näidata, et jaos esineb täht x.

Jao omaduse põhjal — jagatav = jagaja ja jao kasvatis + ülejääk — kirjutame:

(5) $$P_x = (x - a)\,Q_x + R.$$

Paneme ühtivuses (5) tähe x asemele a; leiame:

(6) $$P_a = (a - a)\,Q_a + R.$$

Et aga

$$a - a = 0,$$

siis peab ka

$$(a - a).\,Q_a = 0,$$

ja sellepärast teiseneb ühtivus (6) järgmiseks:

(7) $$P_a = R.$$

Kuid et P_a muud ei ole, kui polünoom (1), milles tähe x-i asemele pandud a, ja R on ülejääk, siis näitabki ühtivus (7), et teoreem on tõestud. *

* § 103. Järeldused Bézout teoreemist.

I. Kui polünoom (1) muutub nulliks (§ 102), kui temasse x-i asemele panna a, siis on polünoom (1) $x - a$-ga jagatav; teiste sõnadega: ülejääk polünoomi (1) jagamisest $x - a$-ga on null.

Võtame ühtivuse (5)

$$P_x = (x - a)\,Q_x + R$$

ja asendame temas x-i asemele a:

$$P_a = (a - a)\,Q_a + R,$$

et aga P_a tingimise järele on null ja $(a - a)\,Q_a$ ka on null, siis peab ka R olema null. Kui aga ülejääk on null, siis peab polünoom (1) jagatav olema

$$x - a\text{-ga}.$$

Näitus.

Polünoom:

(8) $$x^3 + 10x^2 + 31x + 30$$

muutub nulliks, kui temasse x-i asemele panna -2, sest:

$$(-2)^3 + 10 \cdot (-2)^2 + 31 \cdot (-2) + 30 = -8 + 40 - 62 + 30 = 0;$$

sellepärast peab polünoom (8) jagatav olema

$$x - (-2)\text{-ga},$$

ehk

$$x + 2\text{-ga}.$$

Tõepoolest:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 10x^2 + 31x + 30 & x + 2 \\ \overline{(+)\,x^3\ (+)\,2x^2} & \overline{x^2 + 8x + 15} \\ \quad + 8x^2 + 31x & \\ \quad \overline{(+)\ 8x^2\ (+)\ 16x} & \\ \quad\quad 15x + 30 & \\ \quad\quad \overline{(+)\ 15x\ (+)\ 30} & \\ \quad\quad\quad 0. & \end{array}$$

II. Bézout teoreem lubab meid järeldada, kas binoom

$$x^m = y^m,$$

kus m on mingisugune positiivne täisarv, jaganeb

$$x - y \text{ ja } x + y\text{-ga}.$$

Teeme vahet juhuste vahel:

1) m on paarisarv.

2) m on paarita arv.

Tähendus: Paarisarvu tundemärk on see, et ta on 2-ga jagatav; kui aga mingi arv on kahega jagatav, siis peab üks selle arvu teguritest olema 2.

Üleüldse võib siis paarisarvu ära tähendada avaldusega

$$2n.$$

Kui siin panna $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, siis saame kõik paarisarvud, lugedes nende hulka ka nulli.

Paarita arvu leiame, kui paarisarvule juurde paneme 1. Et aga paarisarv on kujutud avaldusega $2n$, siis peab paarita arvu avaldus olema:

$$2n + 1,$$

kus n on jällegi 0, 1, 2, 3, j. n. e.

1. m on paarisarv:

$$m = 2n.$$

Bézout teoreemi põhjal leiame ülejäägi binoomi $x^{2n} - y^{2n}$ jagamisest $x - y$ ja $x + y$-ga, kui asendame binoomi $x^{2n} - y^{2n}$ x-i asemele y ja $-y$ (a asemel esineb meil y ehk $-y$), leiame:

$$y^{2n} - y^{2n} = 0;$$

$$(-y)^{2n} - y^{2n} = y^{2n} - y^{2n} = 0.$$

Seega jaganeb

$$x^{2n} - y^{2n}$$

alati $x - y$ ja $x + y$-ga, mida sõnadega nii väljendakse: ühesuguste paaris astete vahe alati on jagatav aluste summa ja vahega.

2. m on paarita arv:

$$m = 2n + 1.$$

Otsime ülejäägi $x^{2n+1} - y^{2n+1}$ jagamisest $x - y$-ga, milleks asendame esimesse binoomi x-i asemele y:

$$y^{2n+1} - y^{2n+1} = 0,$$

seega on ühesuguste paarita astete vahe jagatav aluste vahega.

Kui aga otsida ülejääki $x^{2n+1} - y^{2n+1}$ jagamisest $x+y$-ga, siis leiame, et ülejääk on:

$$(-y)^{2n+1} - y^{2n+1} = -y^{2n+1} - y^{2n+1} = -2y^{2n+1},$$

mis ei ole null.

Ühesuguste paarita astete vahe ei ole jagatav aluste summaga.

Selsamal viisil võime kindlaks teha, et binoom

$$x^m + y^m$$

ei ole jagatav $x+y$ ega $x-y$-ga, kui m on paarisarv $2n$, sest mõlemal juhusel on ülejääk $2y^{2n}$.

Kui aga

$$m = 2n + 1,$$

siis on binoom

$$x^{2n+1} + y^{2n+1}$$

jagatav $x+y$-ga ja ei ole jagatav $x-y$-ga.

Viimasel juhusel on ülejääk:

$$y^{2n+1} + y^{2n+1} = 2y^{2n+1}. \ *$$

Sisu.

I.

Algebralised arvud ja tehted . . . . . 7—109

Arvude kujutamisest. Kokku ja mahaarvamisest arvteljel. Tähtede tarvitamine. Kasvatamine ja jagamine. Avaldused ja nende arvsuurused. Klambrite tarvitamine. Summa ja vahe omadused. Null. Monoomid ja polünoomid. Liigete ühendamine. Ühtivused. Isesuurused. Klambrite avamine ja nende panemine. Polünoomide kokku- ja mahaarvamine. Keskmiste klambrite tarvitamine. Kasvatamine. Astmed ja nende kasvatamine. Monoomide kasvatamine. Polünoomide kasvatamine monoomidega. Polünoomide kasvatamine polünoomidega. Jagamine. Astme jagamine astmega. Monoomi jagamine monoomiga. Polünoomi jagamine monoomiga. Monoomi jagamine polünoomiga. Relatiivsed arvud. Relatiivsete arvude kokku- ja mahaarvamine. Negatiivsete arvude kasvatamine ja jagamine. Negatiivsete arvude suurusest. Jagamisest nulliga. Mõned erijuhused kasvatamisel. Tehted korraldud polünoomidega: kasvatamine ja jagamine. Erijuhused jagamisel. Kõige suurem ühine jagaja ja kõige vähem ühine mitmekordne.

II.

Murrud . . . . . 110—131

Murru liigete märkidest. Murru peaomadus. Murdude koondamine ja ühenimelisteks tegemine. Murdude kokku- ja mahaarvamine, kasvatamine ja jagamine. Mitmekordsete murdude lihtsustamine.

III.

Proportsionaalsus ja proportsioonid . . . . . 132—149

Otseproportsionaalsed suurused. Vastuproportsionaalsed suurused. Proportsionaalsuse koeffitsiendid. Proportsioonid. Proportsiooni liigete ümberasendamine. Pidevad ja tuletud proportsioonid.

IV.

Arvlaused . . . . . 150 — 182

Arvlaused (ekvatsioonid, võrrandused) ja samasused. I teoreem arvlausete kohta. II teoreem arvlausete kohta. Järeldused. Tähelised arvlaused. Arvlausete tarvitamine. Näitused.

V.

Koordinaadid ja graafilised kujutused . . . . . 183 — 215

Koordinaadid. Graafilised kujutused. Arvlausete (funktsioonide) graafilisest kujutamisest. Ühe tundmatuga arvlausete kujutamisest. Graafiliste kujutuste tarvitamisest ülesannete lahendamisel. Rongide liikumise plaani graafiline kujutus.

VI.

Esimese astme arvlaused kahe ja enam tundmatuga . . . . . 216 — 26[illegible]

Arvlaused kahe tundmatuga. Kahe arvlause süsteem kahe tundmatuga. Täpipealsete juurte väljaarvamine arvlausete süsteemist. Kokku- ja mahaarvamise viis. Asendamise viis. Ühtlustamise ja Bézout viis. Kahe tundmatuga arvlausete süsteemi tarvitamisest. Arvlaused kolme tundmatuga. Kolme arvlausega süsteemi lahendamine. Arvlaused nelja ja enam tundmatuga. Lihtsustamised süsteemi väljaarvamisel. Üleliigsed ja puuduvad juured. Arvlaused üleüldisel kujul. Süsteemi väljaarvamise võimalusest.

VII.

Algteguriteks lahutamine . . . . . 267 — 280

Algebraliste avalduste tegurid. Kvadraatide vahe teguriteks lahutamine. Kolmliigete algteguriteks lahutamine. Kolmliigete algteguriteks lahutamine, kui kolmliikmed ei kujuta summa ega vahe kvadraate. Kolmandate astete summa või vahe teguriteks lahutamine. Mõned iseäralised juhtumised.

VIII.

Lisa . . . . . 281 — 286

Bézout teoreem. Järeldused Bézout teoreemist.
