

Von Kroll - Goldenbrunn.

Compendium

der

Geometrie

nach Legendre

für den Schulgebrauch bearbeitet

von

Dr. Carl Sechel.

Dritter Theil.

Sphärische Trigonometrie.

Reval 1868.

Verlag von Franz Kluge.

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or author's name, written in a cursive script.

Ent.



7056

Von der Censur erlaubt. — Riga den 18. November 1867.

L e h r b u c h
der
Sphärischen Trigonometrie

mit
zahlreichen Anwendungen auf reine und praktische Geometrie,
mathematische Geographie, Geodäsie und Astronomie.

Zum
Gebrauche in den obersten Klassen der Gymnasien und der höheren
Realschulen, sowie zum Selbstunterrichte bearbeitet

von
Dr. Carl Hechel.

Reval 1868.

Verlag von Franz Kluge.

Lehrbücher desselben Verfassers:

- Compendium der Planimetrie und
Compendium der Stereometrie. Nach Legendre für den Schulgebrauch bearbeitet. Franz Kluge in Reval. Zweite Auflage. 1865.
- Stereometrische Aufgaben (1200 Nummern) nebst ihren Auflösungen für den Gebrauch in höheren Lehranstalten. 2 Hefte. 1866. Franz Kluge in Reval.
- Ebene analytische Geometrie mit zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten. Leipzig. Fr. Volkmar. 1858.
- Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst zahlreichen Übungsaufgaben aus der Geometrie, Geodäsie, Physik und Astronomie für den Schulgebrauch und den Selbstunterricht. Leipzig. Fr. Volkmar. 1861.
- Auflösungen der Aufgaben in dem Lehrbuche der ebenen Trigonometrie. Dritte Auflage. 1866.
- Ebene Geometrie in russischer Sprache. Riga. 1857.
- Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für Gymnasien und Realschulen wird in kürzester Zeit erscheinen.

V o r w o r t.

Die vorliegende Schrift hat den Zweck, den mathematischen Lehrkursus der Gymnasien und der höheren Realschulen, welchen des Verfassers Lehrbücher über Geometrie und ebene Trigonometrie behandeln, weiter zu führen und für diese Theile der Mathematik zum Abschluß zu bringen. Bei ihrer Abfassung sind dieselben wissenschaftlichen und methodischen Grundsätze wie bei jenen früheren Arbeiten überall maßgebend gewesen. Unter möglichster Beschränkung ganz abstracter Beispiele ist eine nicht geringe Anzahl jener mannigfaltigen Anwendungen, welche der sphärischen Trigonometrie in so großer Fülle zu Gebote stehen, aufgenommen worden, da das Studium dieser Wissenschaft, in einem gewissen Gegensatz zu manchem anderen Zweige der reinen Mathematik, nur dann ein besonderes Interesse und einen wirklichen Werth für den Schüler haben kann, wenn die theoretischen Sätze überall mit der praktischen Nuzanwendung in enge Verbindung und beständige Wechselbeziehung gebracht werden. Eine besonders eingehende Berücksichtigung hat eine Reihe von Fragen der mathematischen Geographie, der Geodäsie und der Astronomie gefunden, deren wissenschaftliche Beantwortung nur mittels der sphärischen Trigonometrie möglich ist. Die zu diesem Zwecke dem letzten Abschnitte vorausgeschickten Erklärungen sind in mancher Beziehung abweichend von der sonst üblichen Darstellungsweise derselben in streng mathematischer Form gegeben, so nämlich, daß alle Begriffe, wie rein mathematische in vollkommener logischer Abhängigkeit von einander entwickelt wurden, welcher Weg unzweifelhaft der kürzeste und sicherste ist, um in diesen, für den Anfänger eben nicht ganz einfachen Betrachtungen allenthalben ein vollständiges, klares Verständniß herbeizuführen. Unter Hinzunahme der einfacheren, in den geographischen Lehrbüchern anzutreffenden Sätze über die Erde an sich und in ihrem Verhältnisse zu den übrigen Himmelskörpern kann der genannte Abschnitt in den obersten Klassen zugleich als Leitfaden für den wissenschaftlichen Unterricht in der mathematischen Geographie und den zunächst daran sich anschließenden astronomischen Fragen benutzt werden, ja selbst außerhalb der Schule Manchem dazu dienen, sich über die wichtigsten Erscheinungen unseres Sonnensystems eine gewisse Belehrung zu verschaffen, für welche sich noch immer der Mangel eines wirklich brauchbaren, kurz gefaßten Lehrmittels fühlbar macht. Hat überhaupt das Buch vielleicht eine größere Vollständigkeit erhalten, als das specielle Bedürfniß dieser oder jener An-

stalt sie erfordert haben würde, so bietet doch die Anordnung desselben die Möglichkeit dar, mit Uebergang einzelner Sätze oder selbst ganzer Abschnitte unbeschadet des innern Zusammenhanges das in einem bestimmten Falle Erforderliche auszuwählen, während für höhere Realschulen gerade nur das Nöthige sich hier finden dürfte. In Bezug endlich auf die Darstellung des theoretischen wie des praktischen Theils des Lehrbuches hat der Verfasser überall sein Hauptaugenmerk auf die möglichste Einfachheit, Klarheit und Uebersichtlichkeit in der Entwicklung der einzelnen Sätze sowol wie des ganzen Systems gerichtet, da nach seiner Ansicht die bekante Erscheinung, daß die sphärische Trigonometrie von so vielen Anfängern als ein schwieriges Lehrfach und die Sache eines besonders glücklichen Gedächtnisses betrachtet wird, ihren Grund nur in dem Umstande finden kann, daß die Lehrbücher häufig in ihren Voraussetzungen und Betrachtungen weit über den wahren Standpunkt des Lernenden hinausgehen oder durch Künsteleien in Bezeichnungen und Entwicklungen den naturgemäßen und daher immer evidenteren Weg aus dem Auge verlieren. Daß in dem vorliegenden Lehrbuche so manche Sätze und ganze Partieen eine neue, einfachere und faßlichere Behandlung erfahren haben, wird dem sachkundigen, mit der Literatur dieser Wissenschaft vertrauten Leser nicht entgehen.

Riga, im November 1867.

Der Verfasser.

Inhalt.

| | |
|---|-------------|
| Einleitung | § 1 bis § 2 |
| Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke | § 3 — § 10 |
| Grundgleichungen der schiefwinkligen Dreiecke | § 11 — § 16 |
| Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke | § 17 — § 23 |
| Vom Flächeninhalte der sph. Dreiecke | § 24 — § 27 |
| Auflösung solcher Dreiecke, deren Seiten im Verhältnisse zum Kugelradius sehr klein sind | § 28 — § 30 |
| Aufgaben aus der Sphärik | § 31 — § 41 |
| Aufgaben aus der Stereometrie | § 42 — § 50 |
| Erklärungen und Aufgaben der mathematischen Geographie, Geodäsie und Astronomie. | § 51 — § 88 |

E i n l e i t u n g.

§ 1. Die sphärische Trigonometrie hat die Aufgabe, die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks mit Hilfe der Goniometrie aufzusuchen und aus gegebenen Stücken des Dreiecks, welche hinreichen, dasselbe zu bestimmen, die übrigen durch Rechnung zu finden. Ebenso wie die Winkel werden auch die Seiten des Dreiecks stets in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückt, nicht ihrer absoluten Länge nach betrachtet; sind sie aber in Längemaße gegeben, so werden sie immer erst nach ihrer Zurückführung auf das Gradmaß in die Rechnung eingeführt.

Im Folgenden sollen bloß sphärische Dreiecke betrachtet werden, in welchen jede Seite kleiner als 180° ist, indem die Berechnung aller anderen Dreiecke auf solche zurückgeführt werden kann. Die Winkel eines sph. Dreiecks werden wir immer durch A, B, C und die ihnen gegenüberliegenden Seiten entsprechend mit a, b, c bezeichnen.

§ 2. Alle in der Stereometrie (§ 235 — § 264) vorgetragenen Sätze über die Kugel und die sphärischen Figuren werden ebenso wie die ebene Trigonometrie in den folgenden Abschnitten als bekannt vorausgesetzt. Aus der Goniometrie stellen wir einige Formeln wegen ihres spätern häufigen Gebrauchs hier zusammen.

$$1) \quad \sin (a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$2) \quad \cos (a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$3) \quad \sin a = 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a$$

$$4) \quad 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{1}{2} a$$

$$5) \quad 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{1}{2} a$$

$$6) \quad \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

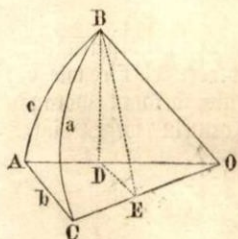
$$7) \quad \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$$8) \quad \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a}$$

- 9) $\cotg a = \frac{\cotg^2 \frac{1}{2} a - 1}{2 \cotg \frac{1}{2} a}$
- 10) $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A - B)$
- 11) $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2} (A + B) \sin \frac{1}{2} (A - B)$
- 12) $\cos B + \cos A = 2 \cos \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} (A - B)$
- 13) $\cos B - \cos A = 2 \sin \frac{1}{2} (A + B) \sin \frac{1}{2} (A - B)$
- 14) $\sin (a + 180^\circ) = \sin (360^\circ - a) = -\sin a$
- 15) $\cos (a + 180^\circ) = -\cos (360^\circ - a) = -\cos a$
- 16) $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin (a + b)}{\cos a \cos b}$

Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke.

§ 3. In einem sphärischen Dreieck, welches nur einen rechten Winkel enthält, werden wir den rechten Winkel immer mit A, die Hypotenuse mit a, die schiefen Winkel mit B und C, die Katheten entsprechend mit b und c bezeichnen.



Es sei ABC ein bei A rechtw. Dreieck mit den Seiten a, b, c, und der Mittelpunkt O der Kugel mit den Eckpunkten des Dreiecks verbunden. Aus B fälle man $BD \perp AO$, aus D die $DE \perp CO$ und ziehe BE. Da BD auf der Ebene AOC senkrecht steht, so ist $BE \perp CO$ (Stereom. § 166), also $\sphericalangle BED = C$; ferner ist $\sphericalangle BOC = a$, $\sphericalangle AOC = b$, $\sphericalangle AOB = c$. Hieraus ergeben sich die Grundgleichungen des rechtw. Dreiecks.

- 1) Aus den rechtwinkligen Dreiecken BEO, DEO, BDO folgt

$$\cos a = \frac{OE}{OB} = \frac{OD \cos b}{OB} = \frac{OB \cos c \cos b}{OB} \quad \text{oder}$$

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Produkte der Cosinuse der beiden Katheten.

- 2) Aus den rechtwinkligen Dreiecken BED, BDO, BEO folgt

$$\sin C = \frac{BD}{BE} = \frac{OB \sin c}{OB \sin a}, \quad \text{also}$$

$$\sin c = \sin a \sin C, \quad \text{analog } \sin b = \sin a \sin B.$$

Der Sinus einer Kathete ist gleich dem Sinus der Hypotenuse, multiplicirt mit dem Sinus des Gegenwinkels jener Kathete.

3) Aus den erwähnten Dreiecken folgt ferner

$$\cos C = \frac{DE}{BE} = \frac{OD \sin b}{OB \sin a} = \frac{OB \cos c \sin b}{OB \sin a} = \cos c \cdot \frac{\sin b}{\sin a}$$

Zufolge 2) ist aber $\frac{\sin b}{\sin a} = \sin B$, folglich

$$\cos C = \cos c \sin B, \quad \text{analog } \cos B = \cos b \sin C.$$

Der Cosinus eines schiefen Winkels ist gleich dem Cosinus der gegenüberliegenden Kathete, multiplicirt mit dem Sinus des andern schiefen Winkels.

$$4) \quad \text{Es ist } \operatorname{tg} b = \frac{DE}{OE} = \frac{BE \cos C}{OB \cos a} = \frac{OB \sin a \cos C}{OB \cos a}, \quad \text{also}$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C, \quad \text{analog } \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B.$$

Die Tangente einer Kathete ist gleich der Tangente der Hypotenuse, multiplicirt mit dem Cosinus des Zwischenwinkels dieser beiden Seiten.

5) Da $BD = OD \operatorname{tg} c$ und ebenfalls

$$BD = DE \operatorname{tg} C = OD \sin b \operatorname{tg} C, \quad \text{so ist}$$

$$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C, \quad \text{analog } \operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B.$$

Die Tangente einer Kathete ist gleich dem Sinus der andern Kathete, multiplicirt mit der Tangente des Gegenwinkels der ersten Kathete.

6) Zufolge 1) ist $\cos a = \cos b \cos c$. Setzt man hierin aus 3)

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C} \quad \text{und} \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}, \quad \text{so ist}$$

$$\cos a = \cotg B \cotg C.$$

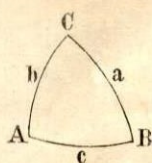
Der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Produkte der Cotangenten der beiden schiefen Winkel.

§ 4. Bei der Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke kommen sechs Fälle vor, indem gegeben sein können:

- 1) die beiden Katheten,
- 2) die Hypotenuse und eine Kathete,
- 3) die Hypotenuse und ein schiefer Winkel,
- 4) die beiden schiefen Winkel,
- 5) eine Kathete und der anliegende schiefe Winkel,
- 6) eine Kathete und der gegenüberliegende schiefe Winkel.

Erster Auflösungsfall.

§ 5. Gegeben die beiden Katheten b , c ; gesucht a , B , C .



Aufl. 1) $\cos a = \cos b \cos c$ (§ 3, 1)

2) $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}$ (§ 3, 5) und

3) $\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}$

Beispiel. Aus $b = 50^\circ 42' 43''$ und $c = 140^\circ 5' 50''$ folgt
 $a = 119^\circ 3' 45,22''$, $B = 62^\circ 18' 29,78''$, $C = 132^\circ 47' 11,02''$

Zweiter Auflösungsfall.

§ 6. Gegeben die Hypotenuse a und eine Kathete b ; gesucht c , B , C .

Aufl. 1) $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$ (§ 3, 1)

2) $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$ (§ 3, 2)

3) $\cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$ (§ 3, 4)

Die Unbestimmtheit ob B kleiner oder größer als 90° zu nehmen sei, wird dadurch beseitigt, daß wenn b kleiner oder größer als a ist, entsprechend B kleiner oder größer als $A = 90^\circ$ sein muß (Ster. § 258). Uebrigens hat man auch, da c bereits gefunden ist, die Formel (§ 3, 5).

4) $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}$.

Dritter Auflösungsfall.

§ 7. Gegeben die Hypotenuse a und ein schiefer Winkel C ; gesucht b , c , B .

Aufl. 1) $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$ (§ 3, 4)

2) $\sin c = \sin a \sin C$ (§ 3, 2)

3) $\operatorname{cotg} B = \cos a \operatorname{tg} C$ (§ 3, 6).

Hier gilt für die Bestimmung von c eine ähnliche Bemerkung wie in § 6.

Vierter Auflösungsfall.

§ 8. Gegeben die beiden schiefen Winkel B, C; gesucht a, b, c.

Aufl. 1) $\cos a = \cotg B \cotg C$ (§ 3, 6)

2) $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$ (§ 3, 3) und

3) $\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$

Fünfter Auflösungsfall.

§ 9. Gegeben eine Kathete b und der anliegende schiefe Winkel C; gesucht c, a, B.

Aufl. 1) $\tg c = \sin b \tg C$ (§ 3, 5)

2) $\tg a = \frac{\tg b}{\cos C}$ (§ 3, 4)

3) $\cos B = \cos b \sin C$ (§ 3, 3).

Sechster Auflösungsfall.

§ 10. Gegeben eine Kathete b und der gegenüberliegende schiefe Winkel B; gesucht a, c, C.

Aufl. 1) $\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}$ (§ 3, 2)

2) $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$ (§ 3, 1)

3) $\cos C = \frac{\tg b}{\tg a}$ (§ 3, 4)

Da sich für a zwei Werthe ergeben und die Bestimmung von c und C von a abhängig ist, so sind hier im Allgemeinen zwei Auflösungen möglich. Uebrigens hat man für c und C auch die Ausdrücke

4) $\sin c = \frac{\tg b}{\tg B}$ (§ 3, 5)

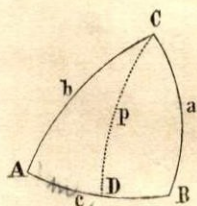
5) $\sin C = \frac{\cos B}{\cos b}$ (§ 3, 3)

Beispiel. Aus $b = 58^\circ 42' 36''$ und $B = 79^\circ 21' 15''$ findet man
 sowol $a = 60^\circ 24' 8,65''$, $c = 18^\circ 57,68''$, $C = 20^\circ 50' 10''$
 als auch $a = 119^\circ 35' 51,35''$, $c = 161^\circ 59' 2,32''$, $C = 150^\circ 9' 50''$.

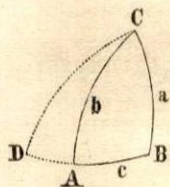
Grundgleichungen des schiefwinkligen Dreiecks.

§ 11. Relationen zwischen zwei Seiten und ihren Gegenwinkeln.

Fället man in einem beliebigen Dreieck ABC aus der einen Spitze C auf die Gegenseite ein sph. Perpendikel CD, so hat man in den rechtw. Dreiecken ADC und BDC (§ 3, 2)



$$\begin{aligned} \sin CD &= \sin b \sin A \text{ und} \\ \sin CD &= \sin a \sin B, \text{ also} \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A, \text{ oder} \\ \sin a : \sin b &= \sin A : \sin B, \text{ analog} \\ \sin a : \sin c &= \sin A : \sin C \\ \sin b : \sin c &= \sin B : \sin C. \end{aligned}$$



Wenn das Perpendikel CD außerhalb des Dreiecks ABC, also auf die Verlängerung der Seite AB fällt, so ist im $\triangle ADC$

$$\begin{aligned} \sin CD &= \sin b \sin CAD = \sin b \sin CAB, \\ \text{also } \sin CD &= \sin b \sin A \text{ wie vorhin.} \end{aligned}$$

Es gilt daher folgender Satz allgemein:

Die Sinusse der Seiten eines sph. Dreiecks verhalten sich wie die Sinusse ihrer Gegenwinkel.

§ 12. Relationen zwischen den drei Seiten und einem Winkel.

Fället man im Dreiecke ABC (erste Fig. § 11) aus C das Perpendikel CD und setzt $AD = m$, also $BD = c - m$, so ist im $\triangle BCD$ (§ 3, 1)

$$\cos a = \cos CD \cos (c - m) = \cos c \cos m \cos CD + \sin c \sin m \cos CD.$$

Ebenso ist $\cos m \cos CD = \cos b$, ferner (§ 3, 4)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} m &= \operatorname{tg} b \cos A, \quad \text{also durch Multiplication} \\ \sin m \cos CD &= \sin b \cos A. \end{aligned}$$

Durch Substitution der gefundenen Werthe für $\cos m \cos CD$ und für $\sin m \cos CD$ in die erste Gleichung findet man

$$(1) \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$(2) \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Man erhält also den Cosinus eines Winkels, wenn man von dem Cosinus der Gegenseite das Produkt der Cosinusse der einschließenden Seiten subtrahirt und den erhaltenen Unterschied durch das Produkt der Sinusse der einschließenden Seiten dividirt.

Um für die logarithmische Rechnung bequemere Formeln zu erhalten, setze man den obigen Ausdruck für $\cos A$ in die beiden Formeln (§ 2, 6 und 7)

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad \text{und} \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}, \quad \text{so ist}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{2 \sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{2 \sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\cos a - \cos(b+c)}{2 \sin b \sin c}}$$

Verwandelt man die Cosinusdifferenzen in Produkte (§ 2, 13), so ist

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(b-c+a) \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}}.$$

Setzt man $a + b + c = 2s$, also $a + b - c = 2(s - c)$,
 $a - b + c = 2(s - b)$ und $b + c - a = 2(s - a)$, so ist

$$(3) \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}} \quad (4) \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

und analog

$$(5) \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin a \sin c}} \quad (6) \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}$$

$$(7) \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}} \quad (8) \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

Die Division der Gl. (3) durch (4) giebt

$$(9) \quad \operatorname{tang} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

Da (§ 2, 3) $\sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$, so folgt aus (3) und (4)

$$(10) \quad \sin A = \frac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}.$$

§ 13. Relationen zwischen den drei Winkeln und einer Seite.

Denkt man sich zu dem sph. Dreieck ABC das Polardreieck A'B'C' construirt, so ist in diesem (§ 12, 2)

$$\cos A' = \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\sin b' \sin c'}$$

Setzt man $A' = 180^\circ - a$, $a' = 180^\circ - A$ u. s. w., so hat man

$$(1) \quad \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

Man erhält also den Cosinus einer Seite, wenn man zum Cosinus des Gegenwinkels das Produkt der Cosinusse der beiden anderen Winkel addirt und die erhaltene Summe durch das Produkt der Sinusse der letzteren Winkel dividirt.

Wendet man die Formel § 12, 9 auf das Polardreieck A'B'C' an, indem man $A = 180^\circ - a'$, $a = 180^\circ - A'$ u. s. w. setzt, so ist

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \operatorname{tg} \frac{180^\circ - a'}{2} = \operatorname{cotg} \frac{a'}{2}, \text{ ferner}$$

$$\sin s = \sin \frac{a+b+c}{2} = \sin \left(\frac{3 \cdot 180^\circ}{2} - \frac{A'+B'+C'}{2} \right) \quad \text{oder}$$

$$\sin s = \sin \left(180^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2} (A' + B' + C') \right)$$

Setzt man $\frac{1}{2} (A' + B' + C') = S$, so ist (§ 2, 14)

$$\sin s = \sin (180^\circ + 90^\circ - S) = -\sin (90^\circ - S) = -\cos S,$$

$$\sin(s-a) = \sin [180^\circ + 90^\circ - S - (180^\circ - A')] = \sin [90^\circ - (S - A')]$$

$$\text{also} \quad \sin(s-a) = \cos(S - A'), \quad \text{ebenso}$$

$$\sin(s-b) = \cos(S - B') \quad \text{und} \quad \sin(s-c) = \cos(S - C').$$

Substituirt man diese Werthe in Formel § 12, 9, und läßt die Accente weg, da das Polardreieck, also auch das ursprüngliche Dreieck

beliebig ist, so ergibt sich

$$(2) \quad \cotg \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-B) \cos(S-C)}{-\cos S \cos(S-A)}}.$$

§ 14. Relationen zwischen zwei Seiten, dem Zwischenwinkel derselben und einem Gegenwinkel.

Zufolge § 12, 1 hat man

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

Setzt man den Ausdruck für $\cos b$ in die erste Gl., so ist
 $\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin b \sin c \cos A$
 Wenn man $\cos a \cos^2 c$ auf die linke Seite der Gl. bringt, dann
 $\cos a (1 - \cos^2 c) = \cos a \sin^2 c$ setzt und die Gleichung durch
 $\sin a \sin c$ dividirt, so ist

$$\cotg a \sin c = \cos c \cos B + \frac{\sin b}{\sin a} \cos A,$$

und da (§ 11) $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$, so ist

$$(1) \quad \cotg a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cotg A.$$

Wird diese Gl. auf das Polardreieck angewendet und wieder auf das ursprüngliche Dreieck zurückgeführt, so erhält man

$$(2) \quad \cotg A \sin C = -\cos C \cos b + \sin b \cotg a.$$

§ 15. Relationen zwischen allen sechs Stücken des Dreiecks (Gaußsche Gleichungen).

Setzt man in die Gleichung (§ 2, 1)

$$\sin \frac{1}{2}(A \pm B) = \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \pm \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B$$

die in § 12, 3, 4, 5, 6 gefundenen Ausdrücke, so folgt

$$\sin \frac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\sin(s-b) \pm \sin(s-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}, \quad \text{oder}$$

$$\sin \frac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\sin(s-b) \pm \sin(s-a)}{\sin c} \cdot \cos \frac{1}{2}C \quad (\S 12, 8),$$

Erstens hat man demnach

$$\sin \frac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\sin c} \left[\sin(s - b) + \sin(s - a) \right], \text{ also (§ 2, 10)}$$

$$\sin \frac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\sin c} \cdot 2 \sin \frac{1}{2}(2s - a - b) \cos \frac{1}{2}(a - b).$$

Wegen $a + b + c = 2s$ ist $2s - a - b = c$, folglich (§ 2, 3)

$$\sin \frac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}C}{2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c} \cdot 2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(a - b) \quad \text{oder}$$

$$(1) \quad \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2}C$$

Zweitens ist

$$\sin \frac{1}{2}(A - B) = \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\sin c} \left[\sin(s - b) - \sin(s - a) \right], \quad \text{also (§ 2, 11)}$$

$$\sin \frac{1}{2}(A - B) = \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\sin c} \cdot 2 \cos \frac{1}{2}(2s - a - b) \sin \frac{1}{2}(a - b)$$

$$\sin \frac{1}{2}(A - B) = \frac{\cos \frac{1}{2}C}{2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c} \cdot 2 \cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(a - b), \quad \text{also}$$

$$(2) \quad \sin \frac{1}{2}(A - B) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2}C$$

Durch eine ähnliche Entwicklung von $\cos \frac{1}{2}(A \pm B)$ findet man

$$(3) \quad \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}C$$

$$(4) \quad \cos \frac{1}{2}(A - B) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}C.$$

§ 16. Relationen zwischen fünf Stücken des Dreiecks (Nepersche Analogieen).

Dividirt man von den Gaußischen Gleichungen (1) durch (3), (2) durch (4), (4) durch (3) und (2) durch (1), so erhält man

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}C$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}c$$

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}c.$$

Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke.

§ 17. Bei der Auflösung schiefw. Dreiecke können gegeben sein

- 1) die drei Seiten,
- 2) die drei Winkel,
- 3) zwei Seiten und der Zwischenwinkel,
- 4) eine Seite und die beiden anliegenden Winkel,
- 5) zwei Seiten und ein Gegenwinkel,
- 6) zwei Winkel und eine Gegenseite.

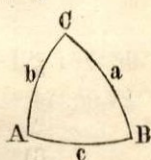
Erster Auflösungsfall.

§ 18. Gegeben die drei Seiten a, b, c ; gesucht die drei Winkel A, B, C .

Aufl. 1) $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ (§ 12, 2)

2) $\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$

3) $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$



Eine für die logarithmische Rechnung bequemere Auflösung ergibt sich aus § 12, 9

4) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{\sin(s-a)} \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}}$

5) $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{\sin(s-b)} \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}}$

6) $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{\sin(s-c)} \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}}$

In dieser Gestalt sind die Ausdrücke für die Rechnung bequemer als in der § 12, 9 aufgestellten Form, wo die Wurzelgröße für jeden Winkel von Neuem berechnet werden müßte.

Da man nur Dreiecke betrachtet, in welchen jeder Winkel kleiner als 180° , also der halbe Winkel ein spitzer ist, so sind sämtliche Wurzeln positiv zu nehmen.

Beispiel. Aus $a = 54^\circ 28'$, $b = 123^\circ 48'$, $c = 73^\circ 15' 20''$ folgt $A = 21^\circ 17' 21,66''$, $B = 158^\circ 14' 16,08''$, $C = 25^\circ 17' 34,48''$.

Zweiter Auflösungsfall.

§ 19. Gegeben die drei Winkel A, B, C ; gesucht die drei Seiten a, b, c .

$$\text{Aufl. } 1) \quad \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \quad (\S 13)$$

$$2) \quad \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$$

$$3) \quad \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

Bequemer für die logarithmische Rechnung sind die aus § 13, 2 folgenden Formeln:

$$4) \quad \cotg \frac{a}{2} = \frac{1}{\cos(S-A)} \sqrt{\frac{\cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}{-\cos S}}$$

$$5) \quad \cotg \frac{b}{2} = \frac{1}{\cos(S-B)} \sqrt{\frac{\cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}{-\cos S}}$$

$$6) \quad \cotg \frac{c}{2} = \frac{1}{\cos(S-C)} \sqrt{\frac{\cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}{-\cos S}}$$

Hier ist $\cos S$ immer negativ, also $-\cos S$ ebenso wie alle übrigen Factoren unter dem Wurzelzeichen positiv, daher geben die Formeln bei jedem möglichen sph. Dreieck reelle Wurzelwerthe.

Beispiel. Aus $A=107^\circ 48'$, $B=38^\circ 58' 30''$, $C=52^\circ 30'$ folgt $a=70^\circ 22' 42,56''$, $b=38^\circ 28' 48,8''$, $c=51^\circ 42' 26,5''$.

Dritter Auflösungsfall.

§ 20. Gegeben zwei Seiten a, b und der Zwischenwinkel C ; gesucht A, B, c .

Aufl. Mittels der Napierschen Analogien (§ 16)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cotg \frac{1}{2} C$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \cotg \frac{1}{2} C$$

berechnet man zuerst die halbe Summe und halbe Differenz der Winkel A und B, und findet dann

$$1) \quad A = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(A - B)$$

$$2) \quad B = \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}(A - B).$$

Aus § 16,3 folgt ferner

$$3) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)}{\cos \frac{1}{2}(A - B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b)$$

Eine andere, für die logarithmische Rechnung aber nicht ebenso bequeme Auflösung enthalten die Formeln (§ 14, 2).

$$4) \quad \operatorname{cotg} A = \frac{\sin b \operatorname{cotg} a - \cos b \cos C}{\sin C}$$

$$5) \quad \operatorname{cotg} B = \frac{\sin a \operatorname{cotg} b - \cos a \cos C}{\sin C} \quad \text{und (§ 12, 1)}$$

$$6) \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Beispiel. Aus $a = 91^\circ 47' 40''$, $b = 140^\circ 7' 56''$, $C = 129^\circ 57' 59''$ folgt $A = 123^\circ 48' 3,62''$, $B = 147^\circ 47' 46,62''$, $c = 112^\circ 47' 59,78''$.

Vierter Auflösungsfall.

§ 21. Gegeben eine Seite c und die anliegenden Winkel A, B; gesucht a, b, C.

Aufl. Mittels der Neper'schen Analogieen (§ 16, 3, 4)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c$$

bestimmt man die Seiten a und b, nämlich

$$1) \quad a = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b)$$

$$2) \quad b = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b).$$

Alsdann hat man zufolge § 16, 1

$$3) \quad \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}(a - b)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B).$$

Eine andere Auflösung geben die Formeln (§ 14, 1)

$$4) \cotg a = \frac{\cos c \cos B + \sin B \cotg A}{\sin c}$$

$$5) \cotg b = \frac{\cos c \cos A + \sin A \cotg B}{\sin c}$$

und die zu § 13, 1 analoge Formel für $\cos c$ durch Umformung

$$6) \cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B.$$

Beispiel. Aus $c = 70^\circ 25' 18,2''$, $A = 50^\circ 59' 58,48''$,
 $B = 106^\circ 28' 1,05''$ folgt $a = 54^\circ 7' 2,3''$, $b = 91^\circ 8' 41,5''$,
 $C = 64^\circ 39' 5,02''$.

Fünfter Auflösungsfall.

§ 22. Gegeben zwei Seiten a , b und ein Gegenwinkel A ; gesucht B , C , c .

Aufl. 1) $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$ (§ 11)

$$2) \cotg \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) \quad (§ 16, 1)$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (A - B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a + b) \quad (§ 16, 3)$$

Der durch seinen Sinus bestimmte Winkel B macht die Auflösung zweideutig. Da in einem Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, so ist für $b < a$ und wenn $A < 90^\circ$ ist, auch $B < 90^\circ$. Sonst giebt es im Allgemeinen zwei Dreiecke.

Beispiel. Aus $a = 37^\circ 48' 20''$, $b = 50^\circ 32' 40''$, $A = 40^\circ 36' 50''$ folgt

1) $B = 55^\circ 4' 47,48''$, $C = 102^\circ 52' 35,27''$, $c = 66^\circ 37' 59,34''$,

2) $B = 124^\circ 55' 12,52''$, $C = 19^\circ 56' 54,02''$, $c = 18^\circ 44' 23,06''$.

Sechster Auflösungsfall.

§ 23. Gegeben zwei Winkel A , B und eine Gegen-
 seite a ; gesucht b , c , C .

- Aufl. 1) $\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}$ (§ 11)
- 2) $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (A - B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a + b)$ (§ 16, 3)
- 3) $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B)$ (§ 16, 1)

Da für b zwei Werthe gefunden werden, so ist die Aufgabe zweideutig. Wenn $B < A$ und $A < 90^\circ$, so muß $b < 90^\circ$ sein.

Beispiel. Aus $A = 111^\circ 30'$, $B = 83^\circ 35'$, $a = 130^\circ 24' 18''$ folgt

- 1) $b = 54^\circ 25' 11,65''$, $c = 145^\circ 23' 39,64''$, $C = 136^\circ 3' 31,52''$;
 2) $b = 125^\circ 34' 48,35''$, $c = 19^\circ 38' 46,86''$, $C = 24^\circ 15' 19,02''$.

Vom Flächeninhalte der sph. Dreiecke.

§ 24. Während in den vorgehenden Auflösungen der Kugelradius unberücksichtigt blieb, da die aufgestellten Formeln im Grunde nur Beziehungen zwischen den Winkeln und den Seiten der Dreiecke ausdrücken, kommt es bei der Berechnung des Flächeninhalts der letzteren wesentlich auf die Größe des Radius an.

Sind gegeben die drei Winkel A, B, C eines Dreiecks und der Kugelradius r , so ist (Stereom. § 262) der Flächeninhalt des Dreiecks

$$F = (A + B + C - 180^\circ) \frac{\pi r^2}{180^\circ} = E \cdot \frac{\pi r^2}{180^\circ}$$

wo E den sphärischen Excess, d. h. den Ueberschuß der drei Winkel über 2 Rechte bezeichnet. In diesen Formeln müssen die Winkel A, B, C und ebenso E mit dem Winkel 180° in einerlei Einheit, also etwa nur in Graden und Decimaltheilen des Grades ausgedrückt werden.

Beispiel. Aus $A = 50^\circ 59' 58,48''$, $B = 106^\circ 28' 1,05''$,
 $C = 64^\circ 39' 5,02''$, $r = 6$ Fuß folgt $F = 26,46346 \square \text{ F.}$

§ 25. Die Winkel eines Dreiecks werden nicht bloß im Gradmaße, sondern oft auch im Bogenmaße oder in Bogenlänge gegeben, d. h. durch einen aus ihrem Scheitel zwischen den Schenkeln beschriebenen Bogen angegeben, welcher durch den Radius als Einheit gemessen, also in Theilen des Radius ausgedrückt ist.

Für den Radius $r = 1$ ist der ganze Kreisumfang $= 2\pi$, der halbe Umfang $= \pi$, der Quadrant $= \frac{\pi}{2}$, der Octant $= \frac{\pi}{4}$ u. s. w. Die entsprechenden Winkel sind also im Bogenmaße diese:

$$\begin{aligned} 360^\circ &= 2\pi = 6,2831853 & 180^\circ &= \pi = 3,1415926 \\ 90^\circ &= \frac{\pi}{2} = 1,5707963 & 45^\circ &= \frac{\pi}{4} = 0,7853981. \end{aligned}$$

Bezeichnet allgemein a die Anzahl Grade eines Winkels und b den entsprechenden in Theilen des Radius ausgedrückten Bogen, so folgen aus der Proportion

$$180^\circ : a^\circ = \pi : b$$

die beiden, zur Verwandlung des Gradmaßes in Bogenmaß und umgekehrt dienenden Formeln:

$$1) \quad b = \frac{a^\circ \pi}{180^\circ} \qquad 2) \quad a^\circ = \frac{b \cdot 180^\circ}{\pi}$$

Bezeichnet man nun die Winkel und den sphärischen Exceß eines Dreiecks im Gradmaße mit A, B, C, E , dagegen im Bogenmaße mit A', B', C', E' und setzt in der Formel des § 24

$$A = A' \cdot \frac{180^\circ}{\pi}, \quad B = B' \cdot \frac{180^\circ}{\pi}, \quad C = C' \cdot \frac{180^\circ}{\pi}, \quad E = E' \cdot \frac{180^\circ}{\pi}, \quad \text{so ist}$$

$$(3) \quad F = (A' + B' + C' - \pi) r^2 = E' \cdot r^2$$

d. h. der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem sph. Exceß im Bogenmaße, multiplicirt mit dem Quadrate des Kugelradius.

Man giebt dieser Formel gewöhnlich die Gestalt

$$(4) \quad F = A + B + C - 180^\circ = E$$

indem man den Radius gleich 1 und den sph. Exceß im Bogenmaße nimmt.

Beispiel. Aus $A = 1,2217304$, $B = 1,3089969$, $C = 1,3962634$, $r = 3$ Fuß folgt $F = 7,06859$ □ Fuß.

§ 26. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den sph. Exceß E und, wenn noch der Kugelradius r gegeben ist, den Inhalt F des Dreiecks zu finden.

Zufolge § 25,4 hat man

$$\frac{1}{2}(A + B + C) - 90^\circ = \frac{1}{2}E, \quad \text{also} \quad \sin \frac{1}{2}E = -\cos \frac{1}{2}(A + B + C) \quad \text{oder}$$

$$\sin \frac{1}{2} E = -\cos \frac{1}{2} (A+B) \cos \frac{1}{2} C + \sin \frac{1}{2} (A+B) \sin \frac{1}{2} C, \text{ also (§ 15, 1, 3)}$$

$$\sin \frac{1}{2} E = -\frac{\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} + \frac{\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c}$$

$$\sin \frac{1}{2} E = \frac{\sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c} \left(\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b}{2} \right)$$

Setzt man für $\sin \frac{1}{2} C$ und $\cos \frac{1}{2} C$ ihre Werthe in § 12, 7, 8 und wendet auf den eingeklammerten Ausdruck § 2, 13 an, so hat man

$$\sin \frac{1}{2} E = \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\sin a \sin b \cos \frac{1}{2} c}$$

Wird auf $\sin a$ und $\sin b$ die Formel § 2, 3 angewendet, so ist

$$\sin \frac{1}{2} E = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}$$

Nachdem hieraus $\frac{1}{2} E$ in Graden bestimmt ist, findet man (§ 24)

$$F = \frac{E}{2} \cdot \frac{\pi r^2}{90^\circ}$$

Beispiel. Wenn $a = 54^\circ 7' 2,3''$, $b = 91^\circ 8' 41,5''$

$c = 70^\circ 25' 18,2''$, $r = 3$ Fuß, so ist

$$\log \sqrt{\sin s \dots} = 9,5635193 - 10$$

$$\log \text{ des Nenners } = 0,0080275$$

$$\text{also } \log \sin \frac{1}{2} E = 9,5554918 - 10$$

$$\frac{1}{2} E = 21^\circ 3' 32,29'' = 21,05896 \text{ Grade,}$$

$$F = 2,105896 \pi = 6,615866 \square \text{ \textcircled{F}.}$$

Da $A + B + C$ zwischen 2 R. und 6 R. liegt (Stereom. § 256, 3), also E oder $A + B + C - 2 R.$ zwischen 0° und 360° , so liegt $\frac{1}{2} E$ zwischen 0° und 180° . Daher giebt $\sin \frac{1}{2} E$ zwei Werthe für $\frac{1}{2} E$, woraus auch für F zwei Werthe folgen. Diese anderen Werthe sind $\frac{1}{2} E = 158,94104$ Grade und $F = 49,93279 \square \text{ \textcircled{F}.}$

§ 27. Wenn ein sph. Dreieck durch andere Bestimmungsstücke als seine drei Winkel oder seine drei Seiten gegeben ist, so wird der Flächeninhalt des Dreiecks dadurch am einfachsten erhalten, daß man erst die Winkel und dann den Inhalt nach § 24 berechnet.

Auflösung solcher Dreiecke, deren Seiten im Verhältnisse zum Kugelradius sehr klein sind.

§ 28. Wenn die Seiten eines sph. Dreiecks im Verhältnisse zu dem Kugelradius sehr klein sind, so kann die Auflösung desselben auf die eines ebenen Dreiecks zurückgeführt werden. Da der Beweis dieses Satzes die Kenntniß der Berechnung des Sinus und Cosinus eines beliebigen Bogens durch unendliche Reihen voraussetzt, so lösen wir zuvor die Aufgabe:

sin x und cos x durch den in Theilen des Radius 1 gegebenen Bogen x in Reihen auszudrücken, die nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreiten.

Zu diesem Zwecke nehmen wir der Methode der unbestimmten Coefficienten gemäß die Reihen an:

$$\sin x = A + Bx + Cx^2 \dots$$

$$\cos x = a + bx + cx^2 \dots$$

Setzen wir hierin, da die Reihen für jeden Werth von x als gültig gedacht werden, $x = 0$, so ist $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$, und indem alle mit $x, x^2 \dots$ multiplicirten Glieder verschwinden, wird $A = 0$ und $a = 1$. Wir können demnach die beiden Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ einfacher auf folgende Art annehmen:

$$(1) \quad \sin x = Ax + Bx^2 + Cx^3 \dots$$

$$(2) \quad \cos x = 1 + ax + bx^2 + cx^3 \dots$$

Um die Coefficienten zu bestimmen, setzen wir (aus 1)

$$\frac{\sin x}{x} = A + Bx + Cx^2 \dots$$

Weil der Sinus stets kleiner ist als sein Bogen, so ist zwar der Quotient $\frac{\sin x}{x}$ immer ein ächter Bruch, aber derselbe kommt der Einheit desto näher, je kleiner der Bogen wird, und er erreicht zuletzt wirklich die Einheit, wenn $x = 0$ geworden ist. Setzt man also $x = 0$, so fallen rechter Hand alle mit x behafteten Glieder weg, woraus folgt, daß $A = 1$ sein muß.

Wenn ferner in den Gleichungen (1) und (2) statt x gesetzt wird $-x$, so erhält man, da $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ ist,

$$-\sin x = -Ax + Bx^2 - Cx^3 + \dots \quad \text{oder}$$

$$(3) \quad \sin x = Ax - Bx^2 + Cx^3 - \dots$$

$$(4) \quad \cos x = 1 - ax + bx^2 - cx^3 + \dots$$

Für jeden Werth von x muß die Reihe (1) dasselbe Resultat wie (3) und ebenso die Reihe (2) dasselbe wie (4) geben. Dieses ist aber offenbar nur dann möglich, wenn in der Reihe (1) die Coefficienten von allen geraden Potenzen von x , dagegen in der Reihe (2) die Coefficienten von allen ungeraden Potenzen von x gleich Null sind. — Wenn also die beiden Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ überhaupt möglich sind, so weiß man im Voraus, daß die erstere mit x beginnen und nach ungeraden Potenzen, die andern aber mit 1 beginnen und nach geraden Potenzen von x fortschreiten muß. Wir können demnach sogleich für $\sin x$ und $\cos x$ die Reihen

$$(5) \quad \sin x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 \dots$$

$$(6) \quad \cos x = 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 \dots$$

annehmen, wo aber die Coefficienten, obschon sie eben so wie früher bezeichnet sind, natürlich nicht mehr dieselbe Bedeutung haben.

Behufs der Bestimmung der Coefficienten in den vorstehenden Reihen setzen wir $x + z$ statt x und addiren die dadurch erhaltenen Reihen; dann ist

$$\begin{aligned} & \sin(x+z) + \cos(x+z) \\ &= 1 + (x+z) + a(x+z)^2 + A(x+z)^3 + b(x+z)^4 + \dots \quad \text{oder (§ 2, 1)} \\ & \quad (\sin x + \cos x) \cos z + (\cos x - \sin x) \sin z \\ &= (1 + x + z) + a(x^2 + 2xz + z^2) \\ & \quad + A(x^3 + 3x^2z + 3xz^2 + z^3) \\ & \quad + b(x^4 + 4x^3z + 6x^2z^2 + 4xz^3 + z^4) + \dots \end{aligned}$$

Wenn man links für $\sin x$ und $\cos x$ die Reihen (5) und (6) und ebenso für $\sin z$ und $\cos z$ die analogen Reihen substituirt, ferner rechts aus den Gliedern z, z^2, \dots heraushebt, so findet man

$$\begin{aligned} & (1 + x + ax^2 + Ax^3 + bx^4 \dots)(1 + az^2 + bz^4 \dots) \\ & + (1 - x + ax^2 - Ax^3 + bx^4 \dots)(z + Az^3 + Bz^5 \dots) \\ &= 1 + x + ax^2 + Ax^3 + bx^4 \dots \\ & + (1 + 2ax + 3Ax^2 + 4bx^3 \dots)z + \dots \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten dieser Gl. kommt der Theil $1 + x + ax^2 + Ax^3 \dots$ vor, welchen man rechts weglassen kann, wenn man zugleich links aus dem Ausdrucke $(1 + az^2 + bz^4 \dots)$ die 1 wegläßt; dividirt man dann noch die Gleichung durch z , so hat man

$$\begin{aligned} & (1 + x + ax^2 + Ax^3 \dots)(az + bz^3 \dots) \\ & + (1 - x + ax^2 - Ax^2 + bx^4 \dots)(1 + Az^2 + Bz^4 \dots) \\ &= 1 + 2ax + 3Ax^2 + 4bx^3 \dots \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von x und z gültig ist, so kann man auch $z = 0$ setzen; dann ist

$$-x + ax^2 - Ax^3 + bz^4 = 2ax + 3Ax^2 + 4bx^3 + 5Bx^4 \dots$$

Soll nun diese Gleichung bestehen, so müssen die Coefficienten gleichhoher Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich sein, nämlich

$$2a = -1, \text{ woraus folgt } a = -\frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$3A = a \quad \dots \quad A = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$4b = -A \quad \dots \quad b = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$5B = b \quad \dots \quad B = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \quad \text{u. s. w.}$$

Setzt man diese Werthe in (5) und (6), so ist

$$(7) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$(8) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

Beispiel. Um $\sin 1^\circ$ und $\cos 1^\circ$ zu berechnen, muß man den Bogen 1° erst in Theilen des Radius ausdrücken. Man erhält $\frac{\pi}{180} = 0,01745329$ und findet dann

$$\sin 1^\circ = 0,01745329 - \frac{1}{6} (0,01745329)^3$$

$$= 0,01745329 - 0,00000087 = 0,01745242$$

$$\cos 1^\circ = 1 - \frac{1}{2} (0,01745329)^2 = 1 - 0,00015231 = 0,99984769$$

Bei diesem Beispiele reichen zwei Glieder der Reihe hin, um den Sinus und Cosinus bis auf 8 Decimalstellen genau zu erhalten.

§ 29. Wir betrachten jetzt ein sph. Dreieck, in welchem die Seiten a, b, c sehr klein gegen den Kugelradius sind.

Setzt man in die Formel (§ 12, 2)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

die im vorigen § gefundenen Reihen für den Sinus und Cosinus, indem man alle Potenzen, welche die vierte übersteigen, als verschwindend klein wegläßt, so ist

$$\cos A = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{24}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24}\right)}{\left(b - \frac{b^3}{6}\right) \left(c - \frac{c^3}{6}\right)}$$

oder wenn man die Multiplication ausführt und wieder alle Glieder, welche von einer höhern Dimension als der vierten sind, vernachlässigt,

$$\cos A = \frac{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{24}(a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2)}{bc \left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6}\right)}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6}\right)$, so erhält man im Nenner $bc - \frac{bc}{36}(b^2 + c^2)^2$, aus welchem Ausdruck der zweite Theil wegen der hohen Potenzen von b und c weggelassen werden kann. Man erhält demnach

$$\cos A = \left[\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24bc} \right] \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6}\right)$$

Anstatt hier die Klammern aufzulösen und alle die vierte Potenz übersteigenden Glieder zu verwerfen, braucht man nur die Multiplication in dem Ausdrucke

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6}\right) + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24bc}$$

auszuführen, wodurch man erhält

$$(1) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4}{24bc}$$

Sei nun $A' B' C'$ ein ebenes Dreieck, dessen Seiten den Seiten a, b, c des sph. Dreiecks ABC der Länge nach gleich sind, so ist bekanntlich

$$\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \text{also}$$

$$\sin^2 A' = 1 - \cos^2 A' = \frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2} \quad \text{oder}$$

$$4b^2c^2 \cdot \sin^2 A' = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (1) giebt

$$(2) \quad \cos A = \cos A' - \frac{bc}{6} \sin^2 A'.$$

Die Winkel A und A' können nur wenig differiren. Setzen wir $A = A' + x$, wo x eine sehr kleine Größe ist, so ist

$$\cos A = \cos(A' + x) = \cos A' \cos x - \sin A' \sin x, \quad \text{also (§ 28, 7 und 8)}$$

$$\cos A = \cos A' \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots\right) - \sin A' \left(x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right),$$

oder wenn man alle die erste Potenz übersteigenden Glieder verwirft,

$$\cos A = \cos A' - x \sin A'.$$

Die Vergleichung dieser Gl. mit (2) zeigt, daß

$$x \sin A' = \frac{bc}{6} \sin^2 A' \quad \text{oder} \quad x = \frac{bc}{6} \sin A', \quad \text{daher}$$

$$A = A' + \frac{bc}{6} \sin A'. \quad \text{Da aber bekanntlich}$$

$$\triangle A'B'C' = \frac{bc}{2} \sin A', \quad \text{so ist (§ 25, 4)}$$

$$A = A' + \frac{1}{3} \cdot \triangle A'B'C' = A' + \frac{1}{3} E.$$

Man hat demnach die Ausdrücke

$$(3) \quad A = A' + \frac{1}{3} E, \quad \text{oder} \quad A' = A - \frac{1}{3} E \quad \text{und analog}$$

$$B = B' + \frac{1}{3} E, \quad \dots \quad B' = B - \frac{1}{3} E$$

$$C = C' + \frac{1}{3} E, \quad \dots \quad C' = C - \frac{1}{3} E \quad \text{d. h.}$$

Ein sph. Dreieck, dessen Seiten gegen den Kugelradius sehr klein sind, kann wie ein ebenes Dreieck berechnet werden, dessen Seiten einzeln die nämliche Länge haben und dessen Winkel dadurch gebildet sind, daß jeder Winkel des sph. Dreiecks um $\frac{1}{3}$ des sph. Excesses vermindert worden ist.

§ 30. Der vorstehende, von Legendre gefundene Satz ist insbesondere für die Geodäsie von großer Wichtigkeit, da die Seiten aller Dreiecke, welche auf der Oberfläche der Erde gemessen werden, gegen den

Erdradius immer nur sehr klein sein können, und die Berechnung eines sphärischen Dreiecks wesentlich vereinfacht wird, wenn es sich wie ein ebenes behandeln läßt.

Betrachtet man den sph. Exceß E als Bogen eines Kreises vom Radius gleich 1, so ist (§ 25, 3) der Inhalt des sph. Dreiecks

$$F = r^2 E, \text{ also } E = \frac{F}{r^2}$$

In den hier zu betrachtenden Fällen ist der sph. Exceß immer nur eine sehr kleine Größe, weshalb wir ihn in Secunden verwandeln wollen. Zufolge Ebene Trigon. § 54 ist

$$\text{arc. } 1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

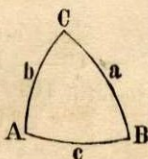
So oft also dieser Werth für den Bogen von $1''$ in $\frac{F}{r^2}$ enthalten ist, so viel Secunden muß E enthalten, und da man wegen der Kleinheit des Bogens von $1''$ ohne erheblichen Fehler $\text{arc. } 1'' = \sin 1''$ setzen kann, so hat man für den sph. Exceß

$$E'' = \frac{F}{r^2 \sin 1''} = \frac{F}{r^2} \cdot 206264,8 \text{ Sec.}$$

Betrachten wir jetzt einige Beispiele.

1). Von einem auf der Erde gemessenen sph. Dreieck kennt man eine Seite $c = 56559$ Toisen, die anliegenden Winkel $A = 59^\circ 50' 53,18''$ und $B = 78^\circ 4' 9,47''$ sowie den Erdradius $r = 3266359$ Toisen. (1 Toise = 6 Fuß). Man sucht den dritten Winkel C , die Seiten a und b , und den Inhalt F des sph. Dreiecks.

Aufsl. Um das sph. Dreieck wie ein ebenes aufzulösen, muß die Größe des sph. Excesses aus der oben stehenden Formel bestimmt werden. Zu diesem Zwecke berechnet man zuvor den Inhalt F des sph. Dreiecks mit hinreichender Genauigkeit wie den eines ebenen Dreiecks $A'B'C'$ aus einer Seite c und den anliegenden Winkeln A und B . Zufolge Ebene Trigon. § 123 hat man



$$\triangle A'B'C' = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)}, \text{ also } E'' = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 r^2 \sin(A+B) \sin 1''} = 39,03473''$$

Hieraus findet man für das ebene Hilfsdreieck die Winkel

$$A' = A - \frac{1}{3} E'' = 59^\circ 50' 40,17'' \text{ und } B' = B - \frac{1}{3} E'' = 78^\circ 3' 56,46''.$$

Nach der ebenen Trigonometrie (§ 123) berechnet man jetzt aus c, A', B' den Winkel C' und die Seiten a, b des Hilfsdreiecks, nämlich

$$C' = 180^\circ - (A' + B') = 42^\circ 5' 23,37''$$

$$a = \frac{c \sin A'}{\sin C'} = 72960 \text{ Toisen,}$$

$$b = \frac{c \sin B'}{\sin C'} = 82555,62 \text{ Toisen.}$$

Für das sph. Dreieck ABC hat man demnach

$$C = C' + \frac{1}{3} E = 42^\circ 5' 36,38''$$

$$a = 72960 \text{ L. und } b = 82555,62 \text{ L. und (§ 24)}$$

$$F = \frac{39,03'' \cdot \pi r^2}{180 \cdot 60 \cdot 60''} = 2018836700 \square \text{ Toisen.}$$

2). Es seien von einem sph. Dreieck auf der Erdoberfläche zwei Seiten $a = 38828,47$ Meter, $b = 33260,37$ M. nebst dem Zwischenwinkel $C = 110^\circ 52' 47,75''$ und dem Erdradius $r = 6366197$ Meter bekannt. Man sucht A, B, c und den Inhalt F des sph. Dreiecks.

Aufl. Um den sph. Exceß aus der Formel $E'' = \frac{F}{r^2 \sin 1''}$ zu finden, berechnet man den Inhalt F des sph. Dreiecks mit hinreichender Annäherung ebenso wie den Flächeninhalt eines ebenen Dreiecks, nämlich (Eb. Trigon. § 121)

$$F = \frac{1}{2} ab \sin C, \text{ also } E'' = \frac{ab \sin C}{2r^2 \sin 1''} = 3,07''.$$

Nun berechnet man für ein ebenes Dreieck aus a, b und $C' = C - \frac{1}{3} E'' = 110^\circ 52' 46,72''$ die Stücke A', B', c , durch die Formeln (Eb. Trigon. § 124)

$$\frac{1}{2}(A' + B') = 90^\circ - \frac{1}{2} C' = 34^\circ 33' 36,64''$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A' - B') = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C',$$

$$c = \frac{a \sin C'}{\sin A'} \quad \text{und findet}$$

$$A' = 37^\circ 36' 20,56'', \quad B' = 31^\circ 30' 52,72'', \quad c = 59451,35 \text{ M.}$$

Für das sph. Dreieck ist demnach

$$A = A' + \frac{1}{3} E'' = 37^\circ 36' 21,58''$$

$$B = B' + \frac{1}{3} E'' = 31^\circ 30' 53,74''$$

$$c = 59451,35 \text{ M.}$$

$$F = \frac{3,07'' \cdot \pi r^2}{180 \cdot 60 \cdot 60''} = 603216800 \square \text{ M.}$$

3) Sind die drei Seiten a, b, c eines sph. Dreiecks und der Kugelradius r gegeben, so berechnet man zuerst (Planim. § 147)

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

woraus $E'' = \frac{F}{r^2 \sin 1''}$ folgt. Berechnet man jetzt die drei Winkel A', B', C' des ebenen Dreiecks, dessen Seiten a, b, c sind, nach den Regeln der ebenen Trigonometrie (§ 128), so sind die Winkel und der Flächeninhalt des sph. Dreiecks diese:

$$A = A' + \frac{1}{3} E'', \quad B = B' + \frac{1}{3} E'', \quad C = C' + \frac{1}{3} E''$$

$$F = (A + B + C - 180^\circ) \frac{\pi r^2}{180^\circ}.$$

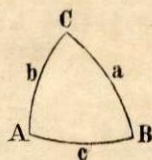
Aufgaben aus der Sphärik.

§ 31. Von einem Dreieck ist gegeben $a=90^\circ, B=42^\circ 12', C=54^\circ 43'$ und der Kugelradius $r=13,4164078$ Fuß; man sucht b, c, A und den Flächeninhalt F .

Aufl. Mittels § 21, 4, 5, 6 und § 24 findet man

$$b = 48^\circ 16,47'' \quad c = 64^\circ 34' 39,8''$$

$$A = 115^\circ 20' 4,56'' \quad F = 101,3203 \square \text{ Fuß.}$$



§ 32. Von einem Dreieck ist gegeben $a=b=23^\circ 57' 59,3''$ und $c=44^\circ 11' 8,02''$; man sucht $A=B$ und C .

Aufl. Zerlegt man das Dreieck durch ein aus C gefälltes Perpendikel in zwei rechth. Dreiecke, so ist (§ 3, 4 und 2)

$$\cos A = \cot g a \frac{1}{2} c, \text{ also } A = B = 24^\circ 3' 31,07''$$

$$\sin \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\sin a}, \text{ also } C = 135^\circ 36' 34,52'' \text{ (Ster. § 256, 3)}$$

§ 33. Von einem gleichseitigen Dreieck ist 1) gegeben eine Seite $a = 76^\circ 34' 24''$, und gesucht ein Winkel A ; 2) gegeben ein Winkel $A = 103^\circ 25' 36''$ und gesucht eine Seite a .

Aufl. Wird das Dreieck in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, so findet man (§ 3, 4 und 6)

$$1) \cos A = \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \cot g a \quad \text{also } A = 79^\circ 8' 16,86''$$

$$2) \cos a = \cot g \frac{1}{2} A \cot g A \quad \text{also } a = 100^\circ 51' 43,14''$$

Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks muß stets kleiner als 120° sein und der Winkel immer zwischen 60° und 180° liegen. (Ster. § 256, 2 und 3).

§ 34. In einem Dreiecke beträgt die Summe der Winkel $S = 222^\circ 7' 4,55''$, die Summe der Seiten $s = 215^\circ 41' 2''$, und der Flächeninhalt $F = 2646,346 \square \text{ F.}$; man sucht den Flächeninhalt des zugehörigen Polardreiecks.

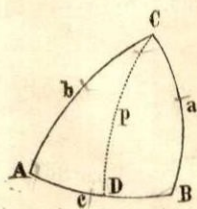
$$\text{Aufl.} \quad \frac{360^\circ - s}{S - 180^\circ} \cdot F = 9067,647 \square \text{ F.}$$

§ 35. Aus zwei Winkeln $A = 64^\circ 39' 5,02''$ und $B = 50^\circ 59' 58,48''$, dem Flächeninhalte $F = 6,615866 \square \text{ F.}$ und dem Kugelradius $r = 3$ Fuß eines Dreiecks den dritten Winkel C und die Seiten a, b, c zu finden.

Aufl. Man findet mittels § 24 und § 19

$$C = 106^\circ 28' 1,05'', \quad a = 70^\circ 25' 18,2''$$

$$b = 54^\circ 7' 2,3'', \quad c = 91^\circ 8' 41,5''$$



§ 36. Von einem Dreieck ABC sind die drei Seiten a, b, c gegeben; man soll die Länge des aus C auf die Gegenseite gezogenen sph. Perpendikels p und die Abschnitte AD und BD der Gegenseite finden.

Aufl. $\sin p = \sin b \sin A$ (§ 3, 2), folglich (§ 12, 10)

$$\sin p = \frac{2}{\sin c} \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}$$

Nachdem p gefunden ist, hat man (§ 3, 1)

$$\cos AD = \frac{\cos b}{\cos p} \quad \text{und} \quad \cos BD = \frac{\cos a}{\cos p}.$$

Das Perpendikel oder seine Verlängerung muß immer durch den Pol der zugehörigen Grundlinie gehen und fällt innerhalb des Dreiecks, wenn die Winkel A und B entweder zugleich kleiner oder zugleich größer als 90° sind. Ist A oder B gleich 90° , so fällt p bezüglich mit b oder a zusammen. Wenn $A = B = 90^\circ$, so ist C der Pol der Grundlinie, und da man alsdann von C unendlich viele Perpendikel nach dieser ziehen kann, so ist die Lage des Perpendikels unbestimmt.

Beispiel. Gegeben $a = 6$, $b = 9$, $c = 12$, Kugelradius $r = 50$ in Fuß. — Verwandelt man die Seiten durch Multiplication mit $\frac{180^\circ}{\pi r}$ in Gradmaß, so ist ihre halbe Summe $s = 15^\circ 28' 11,48''$. Die im Gradmaß gefundenen Bogen sind schließlich durch Multiplication mit $\frac{\pi r}{180^\circ}$ in Längenmaß zu verwandeln.

$$p = 5^\circ 0' 13,46'' = 4,366587 \text{ \textcircled{f}}.$$

$$AD = 9^\circ 1' 46,97'' = 7,879909 \text{ \textcircled{f}}.$$

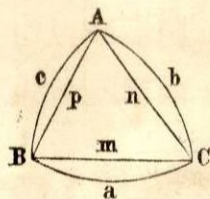
$$BD = 4^\circ 43' 17,65'' = 4,120345 \text{ \textcircled{f}}.$$

§ 37. Die drei Seiten eines Dreiecks sind gegeben, $a = 123^\circ 52'$, $b = 101^\circ 47' 50''$, $c = 123^\circ 1'$. Wenn sich auf den beiden ersten Seiten von C aus in den Abständen $m = 123^\circ 50'$ und $n = 46^\circ 25' 50''$ zwei Punkte befinden; wie groß ist der Hauptbogen (x) zwischen denselben?

$$\text{Auf.} \quad \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\cos x - \cos m \cos n}{\sin m \sin n} \quad (\S 18),$$

$$\cos x = \frac{\sin m \sin n}{\sin a \sin b} (\cos c - \cos a \cos b) + \cos m \cos n.$$

$$x = 134^\circ 39' 23,14''$$



§ 38. Die geraden Linien, welche die drei Winkelspitzen eines sph. Dreiecks mit einander verbinden, schließen ein ebenes Dreieck ein, welches das Sehnendreieck des sphärischen Dreiecks genannt wird.

Aus den gegebenen Seiten a, b, c eines sph. Dreiecks sollen die Seiten m, n, p des Sehnendreiecks, und umgekehrt, jene gefunden werden, wenn diese gegeben sind.

Aufl. Da die Sehne eines Bogens, dessen Radius als Einheit angenommen wird, doppelt so groß ist als der Sinus des halben Bogens, so hat man, wenn r der Radius ist, $\frac{1}{2} m = r \sin \frac{1}{2} a$, folglich

$$1) \quad m = 2r \sin \frac{1}{2} a. \quad 2) \quad \sin \frac{1}{2} a = \frac{m}{2r}$$

Beispiele. 1) Gegeben $a = 50$, $b = 44$, $c = 64$, $r = 106$ in Fuß. Nachdem man diese Werthe durch Multiplication mit $\frac{180^\circ}{\pi r}$ in Gradmaß verwandelt hat, findet man

$$m = 49,53772 \text{ F.}, \quad n = 43,68478 \text{ F.}, \quad p = 63,03234 \text{ F.}$$

2) Aus $r = 200$ F. und der Seite $m = 3,490614$ F. des gleichseitigen Sehnendreiecks die Seite a , den Winkel A und den Inhalt F des gleichseitigen sph. Dreiecks zu berechnen.

Man findet $a = 1^\circ$, $A = 60^\circ 9,07''$ (§ 33, 1 oder § 39, 5) und $F = 5,27671$ □ F. (§ 24).

§ 39. 1) Aus den Seiten a, b, c eines sph. Dreiecks ABC die Winkel M, N, P des Sehnendreiecks, und 2) aus den Seiten m, n, p des Sehnendreiecks die Winkel A, B, C des sphärischen Dreiecks zu finden.

$$\text{Aufl. } 1) \quad \cos M = \frac{n^2 + p^2 - m^2}{2np}, \quad \text{also (§ 38, 1)}$$

$$\cos M = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} b + \sin^2 \frac{1}{2} c - \sin^2 \frac{1}{2} a}{2 \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}$$

$$2) \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad (\text{§ 18})$$

Zufolge § 2, 3 und 5 und § 38, 2 ist, wenn $r = 1$ gesetzt wird,

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} a = 1 - \frac{1}{2} m^2$$

$$\sin b = 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} = 2 \sin \frac{b}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{b}{2}} = n \sqrt{1 - \frac{n^2}{4}}$$

Durch Substitution dieser und der analogen Ausdrücke für $\cos b$, $\cos c$, $\sin c$ folgt

$$\cos A = \frac{1 - \frac{1}{2} m^2 - (1 - \frac{1}{2} n^2)(1 - \frac{1}{2} p^2)}{n \sqrt{1 - \frac{1}{4} n^2} \cdot p \sqrt{1 - \frac{1}{4} p^2}} \quad \text{also}$$

$$\cos A = \frac{2(n^2 + p^2 - m^2) - n^2 p^2}{np \sqrt{(4 - n^2)(4 - p^2)}}$$

Zufüge. Ist das sph. Dreieck gleichschenkelig, etwa $b = c$, so ist

$$\cos M = 1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a}{2 \sin^2 \frac{1}{2} b}, \quad \text{also}$$

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} a}{2 \sin^2 \frac{1}{2} b} = 1 - \cos M = 2 \sin^2 \frac{1}{2} M, \quad \text{folglich}$$

$$(3) \quad \sin \frac{1}{2} M = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{2 \sin \frac{1}{2} b}$$

Wenn im Sehndreieck $n = p$ ist, so ist

$$\cos A = \frac{n^2(4 - n^2) - 2m^2}{n^2(4 - n^2)} = 1 - \frac{2m^2}{n^2(4 - n^2)}$$

$$\frac{2m^2}{n^2(4 - n^2)} = 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A, \quad \text{folglich}$$

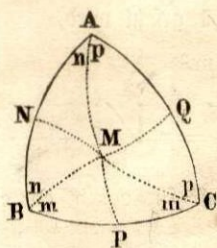
$$(4) \quad \sin \frac{1}{2} A = \frac{m}{n \sqrt{4 - n^2}}$$

Für das gleichseitige Sehndreieck folgt wegen $m = n = p$

$$(5) \quad \sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{\sqrt{4 - m^2}}$$

§ 40. Die drei Seiten a , b , c eines sph. Dreiecks ABC sind gegeben; man soll 1) den sphärischen Radius r des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises, 2) den sph. Radius R des dem Dreiecke umschriebenen Kreises berechnen.

Aufl. 1) Halbirt man die Winkel des Dreiecks durch Hauptbogen, so schneiden sich diese in einem und demselben Punkte M , der von den



drei Seiten gleichen sphärischen Abstand hat, also der Mittelpunkt des die Seiten berührenden Nebenkreises ist, was sich auf dieselbe Weise wie für den entsprechenden Satz der Planimetrie zeigen läßt. Zieht man nun von M sphärische Perpendikel auf die Seiten, so ist $MN = MP = MQ = r$ und im rechth. $\triangle MAN$ (§ 3, 5)

$$\operatorname{tg} MN = \sin AN \operatorname{tg} MAN, \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg} r = \sin AN \operatorname{tg} \frac{1}{2} A.$$

Aus der Symmetrie je zweier an einer Winkelspitze A, B, C zusammenstoßenden Dreiecken folgt

$$AN = AQ, \quad BP = BN, \quad CP = CQ.$$

Setzt man die halbe Summe der Seiten des gegebenen Dreiecks

$$AN + BP + CP = s, \quad \text{so ist}$$

$$AN = s - (BP + CP) = s - a, \quad \text{folglich}$$

$$\operatorname{tg} r = \sin (s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} A.$$

Setzt man für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ den Ausdruck in § 12, 9 und multiplicirt Zähler und Nenner des Bruches unter dem Wurzelzeichen mit $\sin s$, so ist

$$\operatorname{tg} r = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}}{\sin s}$$

2) Errichtet man auf den drei Seiten des Dreiecks in ihren Halbierungspunkten N, P, Q sphärische Perpendikel, so gehen diese durch einen und denselben Punkt M, der von den Eckpunkten gleichen Abstand hat, also der sphärische Mittelpunkt des durch A, B, C gehenden Nebenkreises ist, was sich wie in der Planimetrie beweisen läßt. Zieht man also von M nach A, B, C Bogen größter Kreise, so ist in den gleichschenkligen Dreiecken

$$MA = MB = MC = R \quad \text{und}$$

$$A = n + p, \quad B = n + m, \quad C = m + p, \quad \text{daher}$$

$$\frac{1}{2}(A + B + C) = m + n + p = m + A, \quad \text{also } m = \frac{1}{2}(B + C - A)$$

Im rechth. $\triangle BPM$ hat man (§ 3, 4)

$$\operatorname{tg} BP = \operatorname{tg} BM \cos m, \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \operatorname{tg} R \cos \frac{1}{2}(B + C - A),$$

$$\text{also} \quad \text{tg } R = \frac{\text{tg } \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} (B + C - A)}$$

Nun ist zufolge § 12, 3, 5, 7

$$\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{\sin(s-a)}{\sin a} \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}} = \frac{\sin(s-a)}{\sin a} \cdot \sin \frac{1}{2} A.$$

Wendet man diese Formel in derselben Weise wie in § 13 gezeigt worden ist, auf das Polardreieck an und betrachtet den daraus hervorgehenden Ausdruck als einen für jedes beliebige Dreieck giltigen, so ist

$$\cos \frac{1}{2} b \cdot \cos \frac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2} (B + C - A)}{\sin A} \cos \frac{1}{2} a \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} (B + C - A) &= \frac{\cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \sin A}{\cos \frac{1}{2} a}, \quad \text{also (§ 12, 10)} \\ &= \frac{2 \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a \sin b \sin c} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}, \\ &= \frac{\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}{2 \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} a} \quad (\text{§ 2, 3}). \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck für tg R und beachtet, daß $\cos \frac{1}{2} a \text{ tg } \frac{1}{2} a = \sin \frac{1}{2} a$ ist, so folgt

$$\text{tg } R = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}$$

In Uebereinstimmung mit den doppelten Werthen, die man für tg r und tg R in Folge der Quadratwurzel erhält, giebt es zwei eingeschriebene und umschriebene Kreise, deren Pole Gegenpunkte sind.

Beispiel. Aus $a = 38^\circ 28' 48,8''$, $b = 5^\circ 42' 26,5''$, $c = 70^\circ 22' 42,6''$ findet man $r = 13^\circ 16' 20,52''$ und $R = 35^\circ 27' 52,13''$.

§ 41. Aus den drei Winkeln A, B, C eines sph. Dreiecks den sph. Radius R des umschriebenen Kreises zu berechnen.

Aufl. Wie in § 40, 2 findet man hier

$$\text{tg } R = \frac{\text{tg } \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} (B + C - A)}$$

Bedeutet S die halbe Summe der Winkel A, B, C , so ist

$$\operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a}{\cos (S - A)}$$

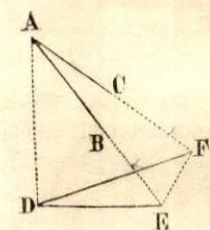
Substituirt man den aus § 13, 2 sich ergebenden Werth für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a$, so hat man

$$\operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}}$$

Beispiel. Aus $A = 38^{\circ} 58' 30''$, $B = 52^{\circ} 30'$, $C = 107^{\circ} 48'$ folgt $R = 0,6189716$ in Theilen des Radius.

Aufgaben aus der Stereometrie.

§ 42. Einen Winkel auf den Horizont zu reduciren.



1) Es sei der in einer geneigten Ebene liegende Winkel $BAC = a$ und die Neigung seiner Schenkel mit der Verticalen AD , nämlich $\sphericalangle BAD = b$ und $\sphericalangle CAD = c$ gegeben; man soll den auf der Horizontalebene EDF von den Projectionen DE und DF der Schenkel gebildeten Winkel EDF finden. — Denkt man sich aus A als Mittelpunkt eine Kugeloberfläche beschreiben, so bestimmen ihre Durchschnitte mit den drei Seitenflächen der Ecke A ein sph. Dreieck, in welchem aus den drei Seiten a, b, c der Gegenwinkel EDF der ersten Seite durch eine der beiden Formeln (§ 18) gefunden wird:

$$\cos EDF = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} EDF = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}}$$

2) Um den Neigungswinkel (EF) der Ebene des Winkels BAC gegen die Horizontalebene zu bestimmen, betrachte man das der Ecke E entsprechende sph. Dreieck, welches wegen des rechten Flächenwinkels (DE) ein rechtwinkliges ist. Aus einer Kathete, welche gleich $\sphericalangle AED = 90^{\circ} - b$ ist, und einem anliegenden schiefen Winkel, nämlich dem Flächenwinkel (AE), der sich aus der Ecke A bestimmen läßt, findet man (§ 3, 3)

$$\cos (EF) = \cos (90^\circ - b) \sin (AE) = \sin b \sin (AE).$$

Setzt man für $\sin (AE)$ seinen Werth zufolge § 12, 10, so ist

$$\cos (EF) = \frac{2}{\sin a} \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}.$$

Beispiel. Aus $A = 91^\circ 47' 40''$, $b = 87^\circ 12' 30''$ und $c = 50^\circ$ folgt $EDF = 94^\circ 41' 40''$ und $\sphericalangle (EF) = 40^\circ 16' 33,09''$.

§ 43. Einen Winkel (x) im Raume aus seiner Horizontalprojection $p = 106^\circ 32' 15,3''$ und aus der Neigung seiner Schenkel zur Horizontalebene $m = 41^\circ 57'$ und $n = 37^\circ$ zu berechnen.

$$\text{Aufsl.} \quad \cos x = \sin m \sin n + \cos m \cos n \cos p \quad (\S 12, 1)$$

$$x = 76^\circ 30' 55''.$$

§ 44. Die Fläche der Projection einer ebenen Figur ist gleich dem Inhalte der ursprünglichen Figur, multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels beider Figurenebenen.

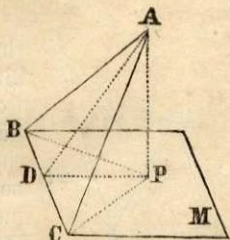
Fället man von allen Ecken eines Vielecks auf eine andere Ebene Perpendikel, so ist das durch die Fußpunkte der letzteren bestimmte Vieleck die Projection des ersten Vielecks. Ebenso bestimmen die Fußpunkte der Perpendikel, die man von allen Punkten des Umfanges einer krummlinigen Figur auf eine Ebene fällt, die Projection der Figur auf die letztere Ebene.

1). Man nehme nun zunächst an, die Figur sei das Dreieck ABC und die Projectionsebene M gehe durch eine Seite BC des Dreiecks. Zieht man $AD \perp BC$ und $AP \perp M$, so ist $PD \perp BC$, also $\sphericalangle ADP = m$ der Neigungswinkel beider Ebenen und $\triangle PBC$ die Projection von $\triangle ABC$. Nun ist

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD \quad \text{und} \quad \triangle PBC = \frac{1}{2} BC \cdot PD,$$

$$\text{und} \quad PD = AD \cos m, \quad \text{also}$$

$$\triangle PBC = \frac{1}{2} BC \cdot AD \cos m = \triangle ABC \cdot \cos m.$$



2). Liegt aber das Dreieck ABC ganz außerhalb M , so denke man sich durch eine Winkelspitze A eine Hilfsebene N parallel zu M gelegt. Nun mag N das Dreieck ABC in AD schneiden, so entstehen die Dreiecke

ADB und ADC , deren Projectionen auf N entsprechend ADb und ADc seien. Zuzufolge 1) hat man wieder

$$ADb = ADB \cos m \quad \text{und} \quad ADc = ADC \cos m, \quad \text{also}$$

$$ADb + ADc = (ADB + ADC) \cos m = ABC \cdot \cos m, \quad \text{d. h.}$$

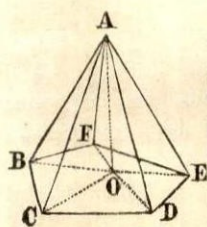
es ist die ganze Projection $Abc = ABC \cdot \cos m$.

Weil aber $N \parallel M$, so ist Abc congruent mit der Projection abc des $\triangle ABC$ auf M , folglich wie vorher

$$\triangle abc = \triangle ABC \cdot \cos m.$$

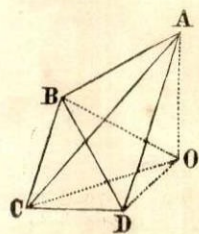
3). Ein Vieleck kann man in lauter Dreiecke zerlegen und eine krummlinige Figur als eine geradlinige von unendlich vielen Seiten betrachten, woraus die Gültigkeit des obigen Satzes für alle ebenen Figuren folgt.

§ 45. In einer Pyramide ist die Grundfläche gleich der Summe der Produkte aus jeder Seitenfläche in den Cosinus ihres Neigungswinkels mit der Grundfläche.



Wenn man aus der Spitze A auf die Grundfläche G die Senkrechte AO fällt und die Projection O des Punktes A mit allen Ecken der Grundfläche verbindet, so sind die Dreiecke BOC , COD ... die Projectionen der Seitenflächen der Pyramide, folglich ist (§ 44)

$$G = \triangle BAC \cdot \cos (BC) + \triangle CAD \cdot \cos (CD) + \dots$$



Bildet eine Seitenfläche mit der Grundfläche einen stumpfen Flächenwinkel, wie in der dreiseitigen Pyramide $ABCD$ die Fläche ABD , so fällt die Projection jener Seitenfläche ganz außerhalb der Grundfläche; von den übrigen Seitenflächen kommt dann nur ein Theil ihrer Projection, nämlich hier BOD außerhalb zu liegen, wobei das außerhalb liegende Stück immer von zwei, einander deckenden Projectionen gebildet wird. Nun ist aber

$$BCD = BOC + COD - BOD, \quad \text{und weil}$$

$$BOD = BAD \cdot \cos [180^\circ - (BD)] = -BAD \cdot \cos (BD), \quad \text{so ist ebenfalls}$$

$$BCD = BAC \cdot \cos (BC) + CAD \cdot \cos (CD) + BAD \cdot \cos (BD).$$

Ebenso läßt sich in dem Falle, wo die Projectionen von zwei Seitenflächen außerhalb der Grundfläche fallen, zeigen, daß der obige Satz auch dann seine Gültigkeit behält.

§ 46. Aus drei Seitenflächen A , B , C und den von ihnen gebildeten Flächenwinkeln (AB) , (AC) , (BC) , einer dreiseitigen Pyramide die Größe der vierten Seitenfläche D zu bestimmen.

Aufl. Projicirt man je drei Seitenflächen auf die vierte, so erhält man (§ 45)

$$D = A \cos (AD) + B \cos (BD) + C \cos (CD)$$

$$C = A \cos (AC) + B \cos (BC) + D \cos (CD)$$

$$B = A \cos (AB) + C \cos (BC) + D \cos (BD)$$

$$A = B \cos (AB) + C \cos (AC) + D \cos (AD).$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit D , C , B , A , und zieht von der ersten die Summe der drei übrigen ab, so erhält man

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB \cos (AB) - 2AC \cos (AC) - 2BC \cos (BC).$$

d. h. das Quadrat der vierten Seitenfläche ist gleich der Summe der Quadrate der drei anderen Seitenflächen, weniger den doppelten Produkten aus je zwei derselben in den Cosinus ihres Neigungswinkels.

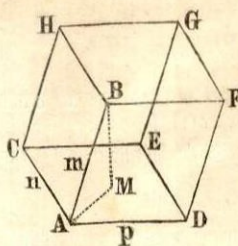
Wenn von den drei Seitenflächen A , B , C je zwei auf einander senkrecht stehen, so folgt

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

d. h. das Quadrat der Hypotenusenfläche ist gleich der Summe der Quadrate der drei Kathetenflächen.

§ 47. Von einem Parallelepipedon oder einem dreiseitigen Prisma oder einer dreiseitigen Pyramide sind die an einer Ecke A zusammenstoßenden Kanten und Kantenwinkel gegeben, $AB = m$, $AC = n$, $AD = p$, $BAC = a$, $BAD = b$, $CAD = c$. Man soll den Neigungswinkel der Seitenkante AB zur Basis, die Höhe BM , die Flächenwinkel (AD) , (AC) , (AB)

an den drei gegebenen Kanten und den Körperinhalt (K) jedes der drei Körper berechnen.



Aufl. Als Höhe ist BM senkrecht auf der Basis, daher BAM der gesuchte Neigungswinkel. Der Ecke A entspricht ein sph. Dreieck, dessen Seiten a, b, c sind und dessen Winkel in der Ordnung, wie sie jenen Seiten gegenüberliegen, den Flächenwinkeln (AD), (AC), (AB) gleichkommen. Der Neigungswinkel BAM ist dasselbe, was in dem sph. Dreieck das auf die Seite c aus der Spitze des Gegenwinkels gefällte Perpendikel ist, also § 36

$$(1) \quad \sin BAM = \frac{2}{\sin c} \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}.$$

Ferner ist die Höhe $BM = m \sin BAM$, also wenn man den vorstehenden Quadratwurzel-Ausdruck durch Q bezeichnet,

$$(2) \quad BM = \frac{2m}{\sin c} \cdot Q.$$

Den Flächenwinkel (AD) findet man nach § 12, 10, nämlich

$$(3) \quad \sin (AD) = \frac{2}{\sin b \sin c} \cdot Q.$$

und ebenso die Winkel (AC) und (AB).

Die vorstehenden Formeln gelten für jeden der drei genannten Körper. In Bezug auf die Bestimmung des Körperinhaltes ist im Parallelepipedon

Basis $ACED = np \cdot \sin c$, also $K = np \sin c \cdot BM$, daher aus (2)

$$(4) \quad K = 2 mnp \cdot Q.$$

Setzt das schiefwinklige Parallelepipedon in ein rechtwinkliges über, so ist $a = b = c = 90^\circ$, also $s = 135^\circ$ und $(s - a) = (s - b) = (s - c) = 45^\circ$ und weil $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so ist $K = mnp$.

Das dreiseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedons von gleicher Höhe und doppelt so großer Grundfläche, also ist sein Inhalt

$$(5) \quad K = mnp \cdot Q.$$

Die dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche, folglich ist für dieselbe

$$(6) \quad K = \frac{1}{3} mnp \cdot Q.$$

Beispiel. Von einer dreiseitigen Pyramide $BACD$ (Fig. § 48) kennt man die an einer Ecke A liegenden Kantenwinkel $BAC = 75^\circ 17' 22''$, $BAD = 62^\circ 8' 45''$, $CAD = 91^\circ 38' 4''$ und die Kanten $m = 2 \text{ F.}$, $n = p = 3 \text{ F.}$ Hieraus findet man:

$$\text{Winkel } BAM = 57^\circ 25' 51,18''$$

$$\text{Höhe } BM = 1,685485 \text{ F.}$$

$$\text{Winkel } (AD) = 72^\circ 23' 51,64''$$

$$\text{Inhalt } K = 2,5272 \text{ C. F.}$$

§ 48. Für den Körperinhalt einer dreiseitigen Pyramide aus den in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten und Kantenwinkeln läßt sich noch ein anderer Ausdruck finden.

Es sei die Pyramide durch die Kanten m, n, p und die Kantenwinkel $BAC = a$, $BAD = b$, $CAD = c$ gegeben und BM die Höhe derselben. Aus dem der Ecke A entsprechenden sph. Dreieck folgt (§ 18, 1)

$$\cos(AD) = \sqrt{1 - \sin^2(AD)} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \text{ also } A$$

$$\sin(AD) = \frac{\sqrt{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}}{\sin b \sin c},$$

oder, $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b$ und $\sin^2 c = 1 - \cos^2 c$ gesetzt und reducirt

$$\sin(AD) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin b \sin c}$$

In der bei A rechtwinkligen Ecke $ABMD$ ist (§ 3, 2)

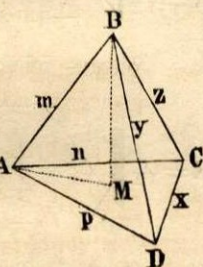
$$\sin BAM = \sin b \sin(AD), \text{ also}$$

$$BM = m \sin BAM = m \sin b \sin(AD).$$

Da endlich $\triangle ACD = \frac{1}{2} np \sin c$, so ist

$$K = \frac{1}{6} mnp \cdot \sin b \sin c \sin(AD), \text{ also}$$

$$K = \frac{1}{6} mnp \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}$$



§ 49. Den Körperinhalt K einer dreiseitigen Pyramide aus ihren sechs Kanten m, n, p, x, y, z zu finden, von welchen die drei letzten den drei ersten gegenüberliegen.

Erste Auflösung (Fig. § 48). In den ebenen Dreiecken BAC, BAD, CAD ist

$$\cos a = \frac{m^2 + n^2 - z^2}{2mn}, \quad \cos b = \frac{m^2 + p^2 - y^2}{2mp}, \quad \cos c = \frac{n^2 + p^2 - x^2}{2np}.$$

Diese Werthe in den Ausdruck für K in § 48 gesetzt geben

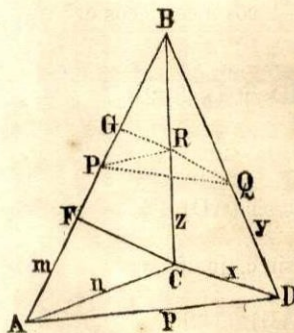
$$K = \frac{1}{6} mnp \sqrt{1 - \left(\frac{m^2 + n^2 - z^2}{2mn}\right)^2 - \left(\frac{m^2 + p^2 - y^2}{2mp}\right)^2 - \left(\frac{n^2 + p^2 - x^2}{2np}\right)^2 + 2 \left(\frac{m^2 + n^2 - z^2}{2mn}\right) \cdot \left(\frac{m^2 + p^2 - y^2}{2mp}\right) \cdot \left(\frac{n^2 + p^2 - x^2}{2np}\right)}$$

$$K = \frac{1}{12} \sqrt{4m^2n^2p^2 - p^2(m^2 + n^2 - z^2)^2 - n^2(m^2 + p^2 - y^2)^2 - m^2(n^2 + p^2 - x^2)^2 + (m^2 + n^2 - z^2)(m^2 + p^2 - y^2)(n^2 + p^2 - x^2)}$$

Hieraus folgt durch Entwicklung und Reduction

$$K = \frac{1}{12} \sqrt{m^2x^2(n^2 + p^2 + y^2 + z^2 - m^2 - x^2) + n^2y^2(m^2 + p^2 + x^2 + z^2 - n^2 - y^2) + p^2z^2(m^2 + n^2 + x^2 + y^2 - p^2 - z^2) - (m^2n^2z^2 + m^2p^2y^2 + n^2p^2x^2 + x^2y^2z^2)}$$

Geht die Pyramide in ein regelm. Tetraeder über, so ist $m = n = p = x = y = z$, folglich $K = \frac{m^3}{12} \sqrt{2}$.



Zweite Auflösung. (Ohne trigon. Functionen). In der Pyramide $BACD = K$ seien wie vorhin m, n, p die Kanten an der Ecke A und der Reihe nach x, y, z ihre Gegenkanten. Macht man $BP = BQ = BR = d$, wo d eine beliebige Strecke bedeutet, so wird die gerade Pyramide $BPQR = k$ gebildet, in welcher das Höhenperpendikel h den Mittelpunkt des dem Dreieck $PQR = \triangle$ umschriebenen Kreises treffen muß. Sind die Seiten dieses Dreiecks $PR = a, PQ = b, QR = c$, so ist (Ebene Trig. § 136) der Radius des umschriebenen Kreises $\frac{abc}{4\triangle}$, also

$$h = \sqrt{d^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{16 \Delta^2}} = \frac{1}{4 \Delta} \sqrt{16 d^2 \Delta^2 - a^2 b^2 c^2}, \text{ daher}$$

$$k = \frac{1}{12} \sqrt{16 d^2 \Delta^2 - a^2 b^2 c^2} \quad \text{oder (Planim. § 147)}$$

$$k = \frac{1}{12} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)d^2 - a^2 b^2 c^2} \quad \text{oder}$$

$$(1) \quad k = \frac{1}{12} \sqrt{(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2)d^2 - a^2 b^2 c^2}.$$

Die dreiseitigen Pyramiden k und K , die den Körperwinkel B gemein haben, verhalten sich wie die Produkte aus den drei, den Körperwinkel B bildenden Kanten. Denn nach Planim. § 90 ist

$$\triangle ABC : \triangle PBR = BA \cdot BC : BP \cdot BR = mz : d^2,$$

und denkt man sich von D und Q Perpendikel auf die Seitenfläche ABC gefällt, so verhalten sich dieselben wie BD und BQ , woraus leicht folgt

$$(2) \quad K : k = myz : d^3 \quad \text{also} \quad K = \frac{myz}{d^3} \cdot k.$$

Nun ziehe man RG und CF senkrecht auf AB , so ist $\frac{BF}{BG} = \frac{BC}{BR} = \frac{z}{d}$, ferner ist im $\triangle ABC$ und $\triangle PBR$ (Planim. § 77)

$$n^2 = m^2 + z^2 - 2m \cdot BF, \quad \text{also} \quad BF = \frac{m^2 + z^2 - n^2}{2m},$$

$$a^2 = 2d^2 - 2d \cdot BG, \quad \text{also} \quad BG = \frac{2d^2 - a^2}{2d}, \quad \text{mithin}$$

$$\frac{BF}{BG} = \frac{z}{d} = \frac{m^2 + z^2 - n^2}{2d^2 - a^2} \cdot \frac{d}{m}$$

Hieraus folgt mit abkürzender Bezeichnung

$$(3) \quad a^2 = \frac{d^2}{mz} (2mz - m^2 - z^2 + n^2) = \frac{d^2}{mz} \cdot A^2, \quad \text{analog}$$

$$b^2 = \frac{d^2}{my} (2my - m^2 - y^2 + p^2) = \frac{d^2}{my} \cdot B^2$$

$$c^2 = \frac{d^2}{yz} (2yz - y^2 - z^2 + x^2) = \frac{d^2}{yz} \cdot C^2$$

Setzt man diese Werthe für a^2 , b^2 , c^2 in (1) und reducirt, so ist

$$k = \frac{d^3}{12 myz} \sqrt{-y^2 A^4 - z^2 B^4 - m^2 C^4 + 2 yz A^2 B^2 + 2 my A^2 C^2 + 2 mz B^2 C^2 - A^2 B^2 C^2}$$

daher zufolge (2)

$$K = \frac{1}{12} \sqrt{-y^2 A^4 - z^2 B^4 - m^2 C^4 + 2 yz A^2 B^2 + 2 my A^2 C^2 + 2 mz B^2 C^2 - A^2 B^2 C^2}$$

Setzt man hierin statt der Hilfsgrößen A^2, B^2, C^2 ihre Werthe aus (3), so findet man nach gehöriger Reduction denselben Ausdruck für K , wie in der ersten Auflösung.

§ 50. Berechnung der regelmässigen Polyeder.

Für ein beliebiges regelm. Polyeder sei

a die Kante,

M der Kantenwinkel,

N der Neigungswinkel zweier Seitenflächen,

m die Anzahl der Begränzungsflächen an einer Ecke,

s die Anzahl aller Begränzungsflächen,

n die Anzahl Seiten jeder Begränzungsfläche,

R der Radius der umschriebenen Kugel,

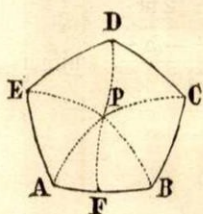
r der Radius der eingeschriebenen Kugel,

O die Oberfläche,

K der Körperinhalt.

Zunächst ist als Umfangswinkel des regelm. netz jeder Kantenwinkel

$$(1) \quad M = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$



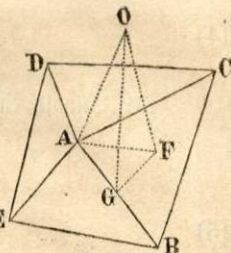
Beschreibt man aus der Spitze der m -seitigen Ecke mit dem Radius 1 eine Kugelfläche, so bildet der Schnitt derselben mit den Seitenflächen der Ecke ein regelm. sph. netz $ABCD \dots$, in welchem die Seiten den Kantenwinkeln, die Umfangswinkel den Flächenwinkeln der Ecke entsprechen, so daß $M = \angle AB = BC = \dots$ und $N = \angle ABC = BCD = \dots$ ist. Die sph. Dreiecke $APB, BPC \dots$ sind gleich-

schenklig und congruent, mithin ist $\angle BAP = \frac{1}{2} N$ und $\angle APB = \frac{360^\circ}{m}$.
Zieht man aus P den Bogen $PF \perp AB$, so ist im rechth. $\triangle AFP$ (§ 3, 3)

$$\sin FAP = \frac{\cos APF}{\cos AF}, \quad \text{d. h.}$$

$$(2) \quad \sin \frac{1}{2} N = \frac{\cos \frac{180^\circ}{m}}{\cos \frac{1}{2} M} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{m}}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$$

Es sei ferner A die Ecke eines beliebigen regelm. Polyheders, O der Mittelpunkt der dem Polyeder um- und eingeschriebenen Kugeln, also $AO = R$. Von O sei die Senkrechte OF auf die Seitenfläche ABC und von F die $FG \perp AB$ gezogen, so ist F der Mittelpunkt des regelm. necks ABC..., G die Mitte von AB, $\sphericalangle FAG = \frac{1}{2} M$, $OF = r$, $AG = \frac{1}{2} a$, und weil $OG \perp AB$, Winkel $OGF = \frac{1}{2} N$.



Aus den rechth. Dreiecken AGF und OFG folgt

$$GF = \frac{AG}{\cotg \frac{1}{2} M} = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} M = \frac{1}{2} a \cotg \frac{180^\circ}{n}$$

$$OF = GF \cdot \operatorname{tg} OGF = GF \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} N, \quad \text{also}$$

$$(3) \quad r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} N \cotg \frac{180^\circ}{n}$$

$$\text{Ferner ist } OG = \frac{GF}{\cos OGF} = \frac{\frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} M}{\cos \frac{1}{2} N}$$

und weil man im $\triangle AOG$ hat $AO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + OG^2$, so ist

$$R^2 = \frac{a^2}{4} \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} M}{\cos^2 \frac{1}{2} N}\right) = \frac{a^2}{4 \cos^2 \frac{1}{2} N} \left(\cos^2 \frac{1}{2} N + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} M\right)$$

Aus (1) und (2) folgt, daß

$$\cos^2 \frac{1}{2} N + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} M = 1 - \frac{\cos^2 \frac{180^\circ}{m}}{\sin^2 \frac{180^\circ}{n}} + \cotg^2 \frac{180^\circ}{n} \quad \text{oder}$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} N + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} M = \frac{1 - \cos^2 \frac{180^\circ}{m}}{\sin^2 \frac{180^\circ}{n}} = \frac{\sin^2 \frac{180^\circ}{m}}{\sin^2 \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\text{Zufolge (2) ist aber } \sin^2 \frac{180^\circ}{n} = \frac{\cos^2 \frac{180^\circ}{m}}{\sin^2 \frac{1}{2} N}, \quad \text{also}$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} N + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} M = \sin^2 \frac{1}{2} N \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{m}, \quad \text{daher}$$

$$R^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} N \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{m}}{\cos^2 \frac{1}{2} N}, \quad \text{oder}$$

$$(4) \quad R = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} N \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{m}.$$

Der Inhalt eines regelm. necks ist (Ebene Trig. § 109, 3) gleich

$$\frac{1}{4} a^2 n \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}, \quad \text{also}$$

$$(5) \quad O = \frac{1}{4} a^2 n s \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Durch Ebenen, die man durch den Mittelpunkt und je eine Kante des Polyheders legt, wird dieses in s einander congruente Pyramiden von der Höhe r zerlegt. Demnach ist

$$(6) \quad K = \frac{1}{3} r \cdot O = \frac{1}{24} a^3 n s \operatorname{tg} \frac{1}{2} N \cdot \operatorname{cotg}^2 \frac{180^\circ}{n}.$$

Nach den vorstehenden Formeln wollen wir die fünf regelmässigen Polyeder einzeln berechnen, indem wir folgende, in der ebenen Trigonometrie (§ 29 bis § 31) entwickelten Werthe als bekannt voraussetzen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}, & \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1 \\ \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} & \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} & \operatorname{cotg} 60^\circ = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sin 18^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) & \cos 18^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \\ \operatorname{tg} 18^\circ = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} & \operatorname{cotg} 18^\circ = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

Außerdem ist hier zu merken die algebraische Formel zur Ausziehung der Quadratwurzel aus einem irrationalen Binom:

$$(8) \quad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

I. Tetraeder. Hier ist $m = 3$, $n = 3$, $s = 4$.

$$\sin \frac{1}{2} N = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \operatorname{cotg} 60^\circ = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\cos N = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} N = \frac{1}{3}, \quad \text{also} \quad N = 70^\circ 31' 44''.$$

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} 60^\circ \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} N}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} N}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$R = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} N}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} N}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$O = 3a^2 \operatorname{cotg} 60^\circ = a^2\sqrt{3}$$

$$K = \frac{1}{3} rO = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

II. $\text{\textcircled{S}}\text{y}\text{aeder. } m = 3, n = 4, s = 6.$

$$\sin \frac{1}{2} N = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\sin N = 2 \sin \frac{1}{2} N \cos \frac{1}{2} N = 1, \text{ also } N = 90^\circ.$$

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} 45^\circ \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{2}$$

$$R = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$O = 6a^2 \operatorname{cotg} 45^\circ = 6a^2$$

$$K = a^3.$$

III. $\text{\textcircled{O}}\text{ctaeder. } m = 4, n = 3, s = 8.$

$$\sin \frac{1}{2} N = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos N = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} N = -\frac{1}{3}, \text{ also } N = 109^\circ 28' 16''.$$

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} 60^\circ \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} N}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} N}} = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

$$R = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \frac{1}{2} N = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$O = 6a^2 \operatorname{cotg} 60^\circ = 2a^2\sqrt{3}$$

$$K = \frac{1}{3} rO = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}.$$

IV. $\text{\textcircled{D}}\text{odekaeder. } m = 3, n = 5, s = 12.$

$$\sin \frac{1}{2} N = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$$

$$\cos N = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} N = -\frac{1}{3} \sqrt{5}$$

$$\operatorname{tg} N = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 N}}{\cos N} = -2, \text{ also } N = 116^\circ 33' 54''$$

$$r = \frac{a}{2} \cotg 36^\circ \operatorname{tg} \frac{1}{2} N = \frac{a}{2} \frac{\cotg^2 18^\circ - 1}{2 \cotg 18^\circ} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} N}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} N}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$$

$$R = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} \frac{1}{2} N = \frac{a}{4} \sqrt{18 + 6\sqrt{5}} = \frac{a}{4} (\sqrt{3} + \sqrt{15})$$

$$O = 15 a^2 \cotg 36^\circ = 3 a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

$$K = \frac{1}{3} r \cdot O = \frac{a^3}{4} \sqrt{2(5 + 2\sqrt{5})(25 + 11\sqrt{5})} = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5})$$

V. Ifofaeder. $m = 5, n = 3, s = 20.$

$$\sin \frac{1}{2} N = \frac{\cos 36^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1 - 2 \sin^2 18^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6} (\sqrt{3} + \sqrt{15})$$

$$\sin N = 2 \sin \frac{1}{2} N \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} N} = \frac{2}{3}, \text{ also } N = 138^\circ 11' 23''.$$

$$r = \frac{a}{2} \cotg 60^\circ \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} N}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} N}} = \frac{a}{12} \sqrt{42 + 18\sqrt{5}} = \frac{a}{12} (\sqrt{15} + 3\sqrt{3})$$

$$R = \frac{a}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} 18^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 18^\circ} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} N}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2} N}} = \frac{a}{2} \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} \\ = \frac{a}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

$$O = 15 a^2 \cotg 60^\circ = 5 a^2 \sqrt{3}$$

$$K = \frac{1}{3} r O = \frac{5 a^3}{12} (\sqrt{5} + 3)$$

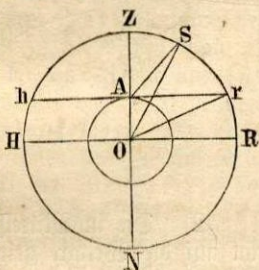
Die hier berechneten Kugelradien, Oberflächen und Körperinhalte der regelm. Polyeder sind sämmtlich durch die Kante a des Polyeders ausgedrückt. Wäre eine andere Größe als die Kante gegeben, so müßte a durch dieselbe ausgedrückt und der gefundene Werth in die obigen Formeln substituirt werden. Bemerkenswerth ist, daß für jedes der fünf Polyeder entweder der Sinus oder der Cosinus oder die Tangente des Flächenwinkels einen rationalen Werth hat.

Die vorstehenden Werthe für r, R, O, K sind auf geometrischem Wege in des Verfassers Sammlung stereometrischer Aufgaben abgeleitet worden, woselbst sich (Nr. 839—870) verschiedene Anwendungen derselben und weitere Berechnungen über die regelm. Polyeder finden.

Erklärungen und Aufgaben
der mathematischen Geographie,
Geodäsie und Astronomie.

§ 51. 1) Jedem Beobachter auf einem freien Standpunkte erscheint die Oberfläche der Erde als eine von einem Kreise begränzte Ebene und das Himmelsgewölbe als eine hohle Halbkugel, in deren Mitte sich der Beobachter selbst befindet. Diese Halbkugel, zu einer ganzen Kugel ergänzt gedacht, wird die Sphäre oder die Himmelskugel genannt.

2) Stellt der kleinere Kreis die Erdkugel, der größere die Himmelskugel, O den gemeinschaftlichen Mittelpunkt beider vor, und ist A der Standpunkt des Beobachters auf der Erde, so heißt der nach A gezogene, zu beiden Seiten bis an das Himmelsgewölbe verlängerte Erddurchmesser ZN die Verticale oder Scheitellinie jenes Beobachtungsortes. Von den beiden, durch die Verticale bestimmten Punkten am Himmelsgewölbe wird der über dem Scheitel des Beobachters liegende Punkt Z das Zenith oder der Scheitelpunkt, der andere N das Nadir oder der Fußpunkt des Beobachtungsortes genannt.

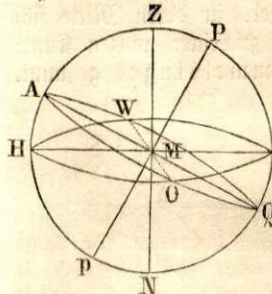


3) Eine im Standpunkte A senkrecht auf die Verticale gelegte und bis an das Himmelsgewölbe erweiterte Ebene hr ist der scheinbare Horizont jenes Ortes und scheidet die sichtbare Hälfte der Himmelskugel von der unsichtbaren. Die mit dem scheinbaren Horizont parallel durch den Mittelpunkt der Erde gelegte und bis an das Himmelsgewölbe erweiterte Ebene HR ist der wahre Horizont desselben Ortes. Dieser theilt die ganze Himmelskugel in zwei Hemisphären. — Zenith und Nadir sind die Pole des Horizontes. Jeder Ort auf der Erde hat seinen besondern Horizont und sein eigenes Zenith und Nadir. — Der Erdradius oder der Abstand der beiden Horizonte von einander ist im Vergleich zu den großen Dimensionen des Himmelsgewölbes und namentlich zu der Entfernung der Fixsterne vom Erdmittelpunkte verschwindend klein; man kann daher bei allen Beobachtungen der Fixsterne annehmen, daß der scheinbare Horizont mit dem wahren zusammenfällt, also der Beobachter sich im Mittelpunkte der Erde befindet.

4) Der Winkel ASO, den die von einem Standorte A auf der Erde und von dem Erdmittelpunkte zu einem über dem Horizonte befind-

lichen Gestirne S gezogenen Linien mit einander einschließen, heißt die Höhenparallaxe des Gestirnes S. Befindet sich der Stern im Horizonte in r, so heißt der Winkel ArO die Horizontparallaxe von r.

§ 53. 1) Die Sterne haben, mit Ausnahme der Planeten (Wandelsterne) und Kometen, am Himmelsgewölbe eine unveränderliche Stellung zu einander, weshalb sie Fixsterne heißen. Indessen ändert sich doch beständig ihre Stellung zur Erdoberfläche. Die scheinbare Bewegung der Himmelskugel ist nämlich der Art, als ob die Erde in der Mitte derselben feststehe und das ganze Himmelsgewölbe sammt allen Gestirnen in je 24 Stunden sich um eine feste Axe herumdrehe, so daß alle Fixsterne nach derselben Richtung hin Kreise beschreiben, die einander parallel sind. Der Durchmesser Pp der Himmelskugel, welcher auf jenen parallelen Kreisen senkrecht steht, also deren Mittelpunkte verbindet, wird die Weltaxe genannt. Die beiden Punkte, in welchen die Weltaxe das Himmelsgewölbe trifft, heißen die Welt- oder Himmelspole, und zwar der in unseren Gegenden sichtbare P der Nordpol, der andere p, welcher in der für uns unsichtbaren Hemisphäre liegt, der Südpol.



2) Die im Mittelpunkte M der Erde oder der Himmelskugel senkrecht auf die Weltaxe gelegte Ebene oder auch die Kreislinie AOQW, in welcher diese Ebene das Himmelsgewölbe schneidet, wird der Himmelsäquator genannt. Dieser theilt die Himmelskugel in zwei gleiche Theile, in die nördliche und südliche Hemisphäre. Alle von den Fixsternen bei der täglichen Bewegung des Himmels beschriebenen Kreise sind dem Aequator parallel und heißen deshalb Parallelkreise.

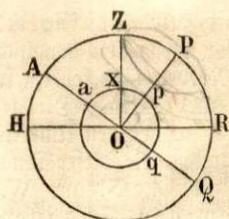
3) Denkt man sich durch die Weltaxe Pp und durch das Zenith Z eines Beobachtungsortes eine Ebene gelegt, so heißt der Kreis PZHPR, in welchem dieselbe das Himmelsgewölbe schneidet, der Meridian, und die Gerade HR, in welcher die Ebene des Meridians die Ebene des Horizontes HORW schneidet, die Mittagslinie jenes Beobachtungsortes. Die beiden Ebenen stehen auf einander senkrecht.

4) Die beiden Punkte H und R, in denen die Mittagslinie den Umkreis des Horizontes schneidet, heißen Norden (Nordpunkt) und Süden (Südpunkt), und zwar derjenige Norden (R), nach welchem der Beobachter hingekehrt ist, wenn er das Auge nach dem Nordpol (P) richtet. Die Weltaxe theilt den Meridian in die nördliche Hälfte PRp, in welcher der Nordpunkt R liegt, und in die südliche Hälfte PHp, in welcher sich der Südpunkt H befindet. — Errichtet man in der Ebene des Horizontes durch den Erdmittelpunkt M auf die Mittagslinie ein Perpen-

difel OW, so werden dessen Durchschnittspunkte mit dem Umkreise des Horizontes Osten (Ostpunkt) und Westen (Westpunkt) genannt. Wenn sich der Beobachter mit dem Gesichte nach Norden (R) kehrt, so liegt ihm Osten (O) zur Rechten und Westen (W) zur Linken. Die genannten Punkte heißen die vier Weltgegenden und theilen den Umkreis des Horizontes in vier gleiche Theile. Die Halbirungspunkte dieser Quadranten werden in der Reihenfolge zwischen N. und O., N. und W., S. und O., S. und W. bezüglich Nordosten, Nordwesten, Südosten, Südwesten genannt. In der Nautik unterscheidet man noch mehr Unterabtheilungen. Eine nach 32 bis 64 Himmelsgegenden eingetheilte Scheibe heißt eine Windrose, und wenn über ihr im Mittelpunkte auf einem Stifte noch eine Magnetnadel frei schwebt, ein Kompaß.

§ 53. 1) Die Erde hat eine kugelförmige Gestalt und dreht sich in 24 Stunden um sich selbst oder um ihre Aze ein Mal herum, deren beide Endpunkte der Nord- (arctischer) und der Süd- (antarctischer) Pol sind. Der Aequator, d. h. der von jedem der beiden Pole um 90° abstehende Umkreis der Erde theilt diese in die nördliche und südliche Halbkugel. Alle mit dem Aequator parallel um die Erde gezogenen Kreise heißen Parallelkreise oder Breitenkreise. Die Größe derselben nimmt nach den Polen zu ab. Unter ihnen sind besonders bemerkenswerth erstens auf der nördlichen Halbkugel der Wendekreis des Krebses, und auf der südlichen der Wendekreis des Steinbocks, jeder $23\frac{1}{2}^\circ$ vom Aequator entfernt; zweitens der nördliche und der südliche Polarkreis, jeder $23\frac{1}{2}^\circ$ von dem nähern Pole, also $66\frac{1}{2}^\circ$ vom Aequator entfernt. Jeder größte Kreis, welcher durch die beiden Pole um die Erde gezogen wird, also den Aequator nebst allen Parallelkreisen rechtwinklig schneidet und die Erde in eine östliche und westliche Halbkugel theilt, ist ein Meridian der Erde. — Der Durchschnitt der Weltaxe, des Himmelsäquators und des Himmelsmeridians mit der Erde giebt den Nord- und Südpol der Erde, den irdischen Aequator und den irdischen Meridian.

2) Die geographische Breite eines Ortes ist der Bogen seines Meridians zwischen dem Aequator und dem Orte selbst und kann nördlich oder südlich sein; die geographische Länge ist der Bogen des Aequators zwischen dem Meridiane des Ortes und dem eines andern Ortes, der zum Ausgangspunkte bei der Bestimmung der Länge angenommen worden ist. Gewöhnlich wird die Länge von dem durch die Insel Ferro gehenden Meridiane an gezählt, welcher der Nullmeridian ist und mit dem Meridian 360° zusammenfällt. Die Engländer nehmen auch den Meridian von Greenwich, die Franzosen den von Paris, und die Deutschen häufig den von Berlin oder Wien zum Ausgangspunkte der Zählung an. Die Länge ist östlich oder westlich und wird von 0 bis 180° gezählt, oder man zählt sie bloß östlich von 0 bis 360° .



3) Der kleinere Kreis stelle die Erdfugel, der größere die Himmelskugel vor, P den Nordpol der letztern, AQ und aq den Himmels- und den Erdäquator, und für den Ort x sei HR der (wahre) Horizont und Z das Zenith.

Die Polhöhe eines Ortes x auf der Erde ist der Neigungswinkel POR der Weltaxe gegen die Ebene des Horizontes und wird in unseren Gegenden durch den zwischen dem Nordpol des Himmels und dem Nordpunkte des Horizontes liegenden Bogen PR des Meridians gemessen. Die Äquatorhöhe ist der Neigungswinkel AOH der Ebene des Äquators gegen die Ebene des Horizontes und wird von dem zwischen Äquator und Horizont liegenden Bogen AH oder QR des Meridians gemessen. Polhöhe und Äquatorhöhe ergänzen einander zu 90° .

4) Die Polhöhe eines Ortes ist immer gleich der geographischen Breite desselben.

Dem für den Ort x ist ax die geogr. Breite und PR die Polhöhe. Da nun $\sphericalangle AOP = \sphericalangle ZOR = 90^\circ$, so ist auch $\sphericalangle AOZ = \sphericalangle POR$, d. h. es ist $ax = PR$ in Bezug auf die Anzahl der Grade.

Am Erdäquator ist die geogr. Breite und auch die Polhöhe gleich 0, d. h. die Weltaxe fällt mit dem Horizonte zusammen. Am Erdpole ist sowohl die geogr. Breite als auch die Polhöhe 90° , folglich steht daselbst die Weltaxe auf dem Horizonte senkrecht und der Äquator fällt mit dem Horizonte zusammen.

§ 54. 1) Die von den Gestirnen bei ihrer täglichen Bewegung von Osten nach Westen beschriebenen Parallelkreise werden gegen die beiden Pole zu immer kleiner. Diejenigen Sterne, deren Kreise den Horizont eines Ortes nicht mehr durchschneiden, bleiben fortwährend über demselben und gehen also für diesen Ort weder auf noch unter. Solche Sterne werden Circumpolarsterne genannt, z. B. für unsere Gegenden die sieben Sterne des großen Bären. Ebenso bleiben wiederum am Südpole andere Sterne immer unter unserem Horizonte. Diese Erscheinungen verändern sich aber, sobald der Beobachter seinen Standpunkt ändert, da nur diejenigen Sterne, deren Abstand vom Weltpole kleiner als die Polhöhe des Ortes ist, beständig über dem Horizonte desselben bleiben können.

2) Der über dem Horizonte liegende Theil des von einem Gestirne beschriebenen Kreises heißt der Tagebogen, der unter dem Horizonte liegende der Nachtbogen desselben. Für alle Sterne, welche auf dem Himmelsäquator liegen, ist der Tagebogen dem Nachtbogen gleich, da jeder (wahre) Horizont den Äquator in zwei gleiche Theile theilt. In unseren Gegenden ist der Tagebogen für die auf der nördlichen, dagegen der Nachtbogen für die auf der südlichen Hemisphäre liegenden Sterne der größere

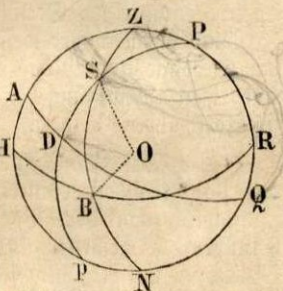
Theil der von ihnen beschriebenen Kreise. Bei der Sonne und dem Monde verändert sich der Tage- und Nachtbogen fortwährend wegen ihres veränderlichen Standes am Himmel.

3) Bei der täglichen Umdrehung des Himmelsgewölbes erreichen die Gestirne für einen Beobachtungsort ihre größte Höhe, die Mittags-höhe, in dem Augenblicke, wo sie culminiren, d. h. in den Meridian treten. Ihr größter Höhenpunkt heißt der Culminationspunkt derselben. Die Circumpolarsterne kommen während 24 Stunden zwei Mal über dem Horizonte in den Meridian, ein Mal wenn sie auf der Ostseite des Himmels aufsteigend ihren höchsten Punkt erreicht haben, und dann, wenn sie nach ihrem Niedergange auf der Westseite in ihrer tiefsten Stellung angekommen sind. Sie haben also für uns eine sichtbare obere und eine sichtbare untere Culmination, während bei den auf- und untergehenden Sternen für uns bloß die obere Culmination, die untere dagegen nur unseren Antipoden sichtbar ist. — Den Zeitpunkt der obren Culmination der Sonne nennt man Mittag und jenen der untern Mitternacht.

§ 55. Um den Ort eines Gestirnes am Fixsternhimmel genau bestimmen zu können, hat man auf der Oberfläche der Kugelfugel ein Coordinatensystem größter Kreise construirt, ähnlich der Bestimmung eines Ortes auf der Erde durch Länge und Breite.

1) Seien P und p die Weltpole, AQ der Aequator, HR der Horizont eines Ortes, Z das Zenith und N das Nadir desselben.

Der durch einen Stern S, durch Zenith und Nadir gelegte größte Kreis ZSN heißt der Höhenkreis, oder weil er durch die Verticale ZN geht und daher auf dem Horizonte senkrecht steht, der Verticalkreis des Sternes. Der Bogen SB dieses Kreises zwischen dem Stern und dem Horizonte heißt die Höhe des Sternes. Diese ist also gleich dem Neigungswinkel SOB der vom Auge des Beobachters (oder dem Mittelpunkte der Sphäre) nach dem Sterne gezogenen Geraden gegen die Ebene des Horizontes. Der Bogen SZ des Höhenkreises vom Stern bis zum Zenith ist die Zenithdistanz des Sternes. Höhe und Zenithdistanz ergänzen einander zu 90° .



2) Der Bogen HB des Horizontes zwischen dem Südpunkte H desselben und dem Höhenkreise wird das Azimuth des Sternes S genannt. Dieses ist also auch der Winkel HZB, welchen der Höhenkreis mit dem Meridian bildet. Gewöhnlich wird das Azimuth vom Südpunkte aus in der Richtung nach West (90°), Nord (180°), Ost (270°) bis 360° gezählt, oder man unterscheidet östliche und westliche Azimuthe, indem

man vom Südpunkte aus jene über Osten bis 180° , diese über Westen bis 180° zählt, so daß z. B. ein Stern, dessen Azimuth gleich 315° ist, ein östliches Azimuth von 45° hat. In der Figur bezeichnet HB das östliche Azimuth des Sternes S. Zuweilen wird auch das Azimuth vom Nordpunkte R aus über Osten nach Süden bis 180° und ebenso über Westen nach Süden bis 180° gerechnet, wie man auch oft vom Höhenkreise aus ein südliches Azimuth BH und ein nördliches BR unterscheidet. (§ 62).

Azimuth und Höhe oder Zenithdistanz bestimmen die Lage eines Gestirnes am Himmelsgewölbe rücksichtlich des Horizontes und werden daher die Horizontalcoordinaten des Gestirnes genannt.

§ 56. (Fig. § 55). 1) Alle durch die Weltaxe Pp gelegten Ebenen schneiden die Himmelkugel in größten Kreisen, welche Stundenkreise oder Declinationskreise genannt werden. Durch jeden Stern kann man einen Stundenkreis legen und dieser steht immer senkrecht auf der Ebene des Aequators. Der Bogen SD des Stundenkreises zwischen einem Stern S und dem Aequator heißt die Declination oder Abweichung des Sternes, und diese ist entweder nördlich (+) oder südlich (—), je nachdem der Stern auf der nördlichen oder südlichen Halbkugel sich befindet. Der Bogen SP des Stundenkreises zwischen dem Stern und dem nähern der beiden Weltpole heißt die Poldistanz des Sternes. Letztere ergänzt die Declination zu 90° . — Die tägliche Declination der Fixsterne bleibt immer dieselbe, da diese Parallellkreise beschreiben. Dagegen haben Sonne und Mond außer ihrem täglichen Umlauf um die Erde noch eine eigene Bewegung am Himmel, in Folge deren auch ihre Declination sich fortwährend ändert.

2) Der von dem Stundenkreise eines Sternes mit dem Meridiane am Pole gebildete Winkel APD heißt der Stundenwinkel des Sternes und wird von dem Bogen AD des Aequators zwischen Meridian und Stundenkreis gemessen. Man zählt den Stundenwinkel von demjenigen Punkte A des Aequators beginnend, wo der südliche Theil des Meridians diesen schneidet, entweder in der Richtung nach Osten bis 180° und in der Richtung nach Westen bis 180° , in welchem Falle man einen östlichen und westlichen Stundenwinkel unterscheidet, oder bloß in der Richtung nach Westen von 0 bis 360° . In der Figur entspricht der Bogen AD dem östlichen Stundenwinkel des Sternes.

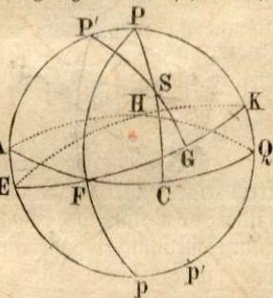
3) Die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Culminationen eines und desselben Fixsternes heißt ein Sternstag (gleich 24 Stunden zu 60 Minuten u. s. w.). Die nach dieser Einheit gemessene Zeit (Sternzeit) ist verschieden von der bürgerlichen Zeiteintheilung (§ 59). Da jeder Punkt am Himmel in gleichförmiger Bewegung innerhalb 24 Stunden Sternzeit einen Kreis von 360° , mithin in 1 Stunde 15° und in 1 Zeitsecunde 15 Raumsecunden zurücklegt, so läßt sich auch jeder im Gradmaße

gegebene Stundenwinkel in Zeit ausdrücken, und umgekehrt, jeder im Zeitmaße gegebene Stundenwinkel auf Grade, Minuten und Secunden zurückführen. — Der in Zeit ausgedrückte Stundenwinkel eines Gestirnes sagt aus, wieviel Stunden, Minuten und Secunden (Sternzeit) in dem Falle, wo der Stundenwinkel ein westlicher ist, seit der Culmination des Gestirnes bis zu einem bestimmten Momente verflossen sind, dagegen wenn er ein östlicher ist, wie viele derselben von einem bestimmten Momente an bis zur Culmination verfließen werden.

Stundenwinkel und Declination bestimmen die Lage eines Sternes in Bezug auf den Aequator und heißen daher die Aequatorialcoordinaten des Sternes.

Ex bibl. univ. Tart.

§ 57. 1) Nebst ihrer täglichen, mit allen übrigen Gestirnen gemeinschaftlichen Bewegung von Ost nach West besitzt die Sonne noch eine eigene der vorigen entgegengesetzte Bewegung, vermöge welcher sie von West nach Ost fortschreitend während eines Jahres einen vollen Umlauf am Himmel macht. Diese von der Sonne zurückgelegte elliptische Bahn (welche eigentlich die Erde beschreibt) ist die Ekliptik EFKH, deren Ebene durch den Erdmittelpunkt geht und mit der Ebene des Aequators AFQH einen Winkel von $23^{\circ} 28'$ (genauer $23^{\circ} 27' 28''$) bildet, welcher die Schiefe der Ekliptik genannt wird. Erweitert man die Ebene der Ekliptik nach allen Seiten, so schneidet sie die Himmelskugel in einem größten Kreise, den man ebenfalls die Ekliptik nennt. — Die beiden Durchschnittspunkte F und H des Aequators mit der Ekliptik, welche Gegenpunkte sind, heißen die Nachtgleichen- oder Aequinoctialpunkte, weil in der Zeit, wo die Sonne sich in denselben, also auf dem Aequator befindet, an allen Orten der Erde Tag und Nacht gleich sind. Der Punkt F, an welchem sich die Sonne am 21. März befindet, wenn sie sich in die nördliche Hemisphäre erhebt, heißt das Frühlingäquinocetium oder der Frühlingpunkt, der andere Punkt H, welchen die Sonne am 22. September passirt und von dem sie in die südliche Hemisphäre hinabsteigt, wird das Herbstäquinocetium oder der Herbstpunkt genannt. Nach der Frühlingnachtgleiche beschreibt die Sonne in der nördlichen Hemisphäre Tag für Tag einen andern, weiter vom Aequator abtgehenden Parallelkreis, bis sie im Punkte K am 21. Juni ihre größte nördliche Declination $KQ = 23^{\circ} 28'$ erreicht. Hierauf nimmt die Declination wieder ab, und wenn die Sonne im Herbstpunkte H angekommen ist, so erhält sie eine südliche Declination, die am 22. December im Punkte E ihren größten Werth $AE = 23^{\circ} 28'$ erreicht.



2) Die beiden Punkte, an welchen die Sonne am 21. Juni und 22. December sich befindet und ihre größte Declination erreicht, heißen die

Solstitial- oder Wendepunkte, und zwar der in der nördlichen Hemisphäre liegende K das Sommer-solstitium und der in der südlichen Hemisphäre liegende E das Winter-solstitium. — Der durch den Frühlingspunkt F gehende Declinationskreis PFP wird der Aequinoctial-Kolur und der durch die Solstitialpunkte gelegte Declinationskreis PEPK der Solstitial-Kolur genannt. Die Ebenen der beiden Koluren bilden einen rechten Winkel mit einander.

3) Die im Mittelpunkte der Erd- oder Himmelkugel auf der Ebene der Ekliptik errichtete Senkrechte bestimmt am Himmelsgewölbe den Nordpol P' und den Südpol p' der Ekliptik. Da der Solstitial-Kolur auf der Ekliptik senkrecht steht, so müssen in demselben ihre Pole P' und p' liegen und zwar jeder um die Schiefe der Ekliptik von dem gleichnamigen Pol des Aequators entfernt, nämlich $P'P = p'p = 23^{\circ} 28'$. — Die durch die Pole der Ekliptik gelegten Parallelkreise heißen Polar-kreise und die durch die Solstitialpunkte gelegten Parallelkreise die Wendekreise des Himmels, und zwar von den letzteren der durch K gehende der Wendekreis des Krebses, der durch E gehende der Wendekreis des Steinbocks. Die Polar-kreise stehen von den Himmelspolen eben so weit ab wie die Wendekreise vom Aequator, nämlich um die Schiefe der Ekliptik. Die Durchschnitte ihrer Ebenen mit der Erde geben die Polar- und Wendekreise der letzteren (§ 53, 1).

§ 58. (Fig. § 57). 1) Der Winkel CPF, den der Declinationskreis eines Sternes S mit dem Declinationskreise des Frühlingspunktes bildet, oder auch der Bogen FC des Aequators vom Frühlingspunkte bis zum Durchschnittspunkte mit dem Declinationskreise des Sternes heißt die Rectascension oder gerade Aufsteigung des Sternes und wird immer auf dem Aequator vom Frühlingspunkte an in einer der täglichen Bewegung des Himmels entgegengesetzten Richtung, also von Süd nach Ost u. s. w. bis 360° gezählt und entweder im Gradmaße oder in Zeit ($15^{\circ} = 1$ Stunde Sternzeit) ausgedrückt (§ 56, 3). Im letzteren Falle giebt die Rectascension an, wieviel Stunden und Minuten (Sternzeit) der fragliche Stern später culminirt als der Frühlingspunkt.

2) Der durch einen Stern S und die Pole (P', p') der Ekliptik gelegte, also auf der Ekliptik senkrechte Kreis P'G heißt der Breitenkreis und der Bogen SG desselben zwischen dem Stern und der Ekliptik die Breite des Sternes. Die Breite ist nördlich oder südlich, je nachdem sich der Stern auf der nördlichen oder südlichen Seite der Ebene der Ekliptik befindet. — Von allen Gestirnen hat nur die Sonne keine Breite, weil sie sich auf der Ekliptik selbst befindet. — Den Bogen FG der Ekliptik zwischen dem Frühlingspunkte und dem Breitenkreise nennt man die Länge des Sternes und zählt sie immer vom Frühlingspunkte ausgehend in der Richtung von Süd nach Ost bis 360° . — Haben zwei Gestirne gleiche Länge, so daß sie also zusammen auf- und untergehen, so stehen sie in Conjunction; sind ihre Längen um 180° verschieden, so sind sie in

Opposition, und wenn der Unterschied ihrer Längen 90° beträgt, so wird ihre Stellung Quadratur genannt. —

Länge und Breite eines Sternes sind die Ekliptikcoordinaten desselben.

3) Man theilt die Ekliptik in 12 gleiche Theile, deren jeder 30° enthält und nennt diese Theile Zeichen der Ekliptik. Die Zone des Himmels, die sich zu beiden Seiten der Ekliptik bis auf 10° von ihr entfernt, wird der Zodiakus oder Thierkreis genannt. Dieser umfaßt die Sternbilder, von welchen jene Zeichen ihre Namen und Figuren (im Kalender) erhalten haben, z. B. wenn es heißt, die Sonne sei im Zeichen des Widders, so bedeutet dieses, daß sie sich im Frühlingspunkte befinde.

§ 59. In der Astronomie unterscheidet man drei Arten von Zeit, nämlich Sternzeit, wahre Sonnenzeit und mittlere Sonnenzeit.

1) Die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Culminationen eines und desselben Fixsternes, also die Zeit, in welcher die Erde eine Umdrehung um ihre Aze vollendet, ist der Sterntag und hat immer gleiche Länge. Man theilt den Sterntag in 24 gleiche Theile oder Sternstunden und rechnet seinen Anfang von dem Augenblicke, wo der Frühlingspunkt culminirt (§ 56, 3). Der Sternzeit bedient man sich nur in der Astronomie.

2) Der wahre Sonnentag ist die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Culminationen der Sonne und wegen der ungleichförmigen Geschwindigkeit der Ixtern in ihrer Bahn nicht immer von gleicher Dauer. Der Sonnentag ist länger als der Sterntag und zwar im Durchschnitt um $3' 56,2''$; denn die Sonne rückt täglich ungefähr einen Grad weiter ostwärts und culminirt daher etwas später als ein Stern, mit dem sie am vorhergehenden Tage zusammen in den Meridian getreten ist. Die Sonnenuhren zeigen wahre Sonnenzeit.

3) Im bürgerlichen Leben bedient man sich statt des wahren veränderlichen Sonnentages des mittlern Sonnentages von stets gleichbleibender Länge. Man denkt sich nämlich neben der wahren Sonne eine andere, die immer gleichzeitig mit jener durch den Frühlingspunkt geht, sich aber auf dem Aequator gleichförmig bewegt, so daß der Tag eine unveränderliche Länge erhält. Unsere gewöhnlichen, gleichförmig gehenden Räderuhren geben mittlere Zeit an, welcher der mittlere Sonnentag zu Grunde liegt.

4) Die wahren Sonnentage sind bald etwas länger, bald etwas kürzer als der mittlere Sonnentag, so daß die Culmination der Sonne bald vor, bald nach 12 Uhr der bürgerlichen Zeit stattfindet. Der Unterschied zwischen der mittlern und der wahren Zeit, welcher die Zeitgleichung heißt, findet sich für jeden Tag des Jahres in manchen Kalendern

angegeben. Wenn die Zeitgleichung für einen bestimmten Ort z. B. angiebt: 1. Januar + 3' 43'', so heißt es: Wenn am 1. Januar die Uhr 12 zeigt, so muß die Räderuhr 12 Uhr 3' 43'' zeigen, oder der mittlere Mittag tritt um 3' 43'' früher als der wahre Mittag ein. Wenn ferner für den 23. April — 1' 40'' angegeben ist, so heißt es: Wenn die Sonnenuhr 12 zeigt, so muß die Räderuhr 12^h — 1' 40'' = 11^h 58' 20'' zeigen, oder der mittlere Mittag ist um 1' 40'' später als der wahre.

§ 60. Das siderische Jahr oder das Sternjahr ist die Zeit vom Augenblicke, wo die Sonne bei irgend einem Fixsterne sich befindet, bis zu dem, wo sie wieder zu demselben zurückkehrt. Dasselbe beträgt 365,25638 mittlere Sonnentage oder 365 Tage 6 St. 9 M. 8,35 Sec.

Die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt heißt das tropische Jahr und beträgt im Durchschnitte 365,24224 mittlere Sonnentage oder 365 Tage 5 St. 48 M. 49,536 Sec. — Diese Verschiedenheit von dem siderischen Jahre rührt von der Präcession her, d. h. der alljährlich erfolgenden Vorrückung des Frühlingspunktes gegen Westen um 50,1'', vermöge welcher der Frühlingspunkt in etwa 25868 Jahren (während des sogenannten großen platonischen Jahres) die ganze Ekliptik durchläuft. Der Frühlingspunkt kommt also der ostwärts auf der Ekliptik sich fortbewegenden Sonne etwas entgegen, mithin erreicht diese ihn auch etwas früher, als wenn er ebenso wie ein Fixstern seine Stelle unverändert behalten hätte.

Im bürgerlichen Leben rechnet man das Jahr zu 365 Tagen und jedes vierte Jahr (Schaltjahr) zu 366 Tagen. Diese Unrichtigkeit wird durch Auslassung von 3 Schalttagen in 400 Jahren und durch Unterdrückung eines Schaltjahres in je 3600 Jahren vollends berichtigt.

§ 61. Der zwölfte Theil des mittlern tropischen Jahres, nämlich 30 Tage 10 St. 29 M. 4,125 Sec. heißt ein Sonnenmonat oder ein astronomischer Monat.

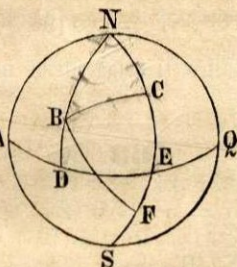
Der siderische Monat ist die Zeit, welche vergeht, bis der Mond von einem bestimmten Fixsterne ausgegangen, zu demselben zurückkehrt, und beträgt 27,32166 Tage oder 27 Tage 7 St. 43 M. 11,424 Sec. — Die Umlaufszeit des Mondes von dem Frühlingspunkte bis wieder zu demselben heißt der tropische oder periodische Monat und beträgt 27 Tage 7 St. 43 M. 4,718 Sec.

Der synodische Monat ist die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Conjunctionen oder Oppositionen des Mondes mit der Sonne und dauert 29,530587 Tage oder 29 Tage 12 Stunden 44 M. 2,7168 Sec., also länger als der siderische Monat; denn während der Mond, von einer Conjunction mit der Sonne ausgehend, einen vollen Umlauf von 360°

zurücklegt, ist auch die Sonne weiter nach Osten fortgerückt, so daß der Mond über 360° hinaus sich noch weiter fortbewegen muß, um die Sonne wieder einzuholen. — Die bürgerlichen Monate haben lauter ganze Tage und sind von ungleicher Länge; der Februar hat 28 Tage und jedes vierte Jahr 29 Tage, der April, Juni, September und November haben 30 Tage, die übrigen Monate 31 Tage.

§ 62. Bestimmung der kürzesten Entfernung zweier Orte auf der Erde.

Die kürzeste Entfernung zweier Orte B und C ist der kleinere Bogen BC des durch sie gelegten Hauptkreises. In der Figur sei N der Nordpol, AQ der Aequator, ND der Meridian von B und NE der von C, endlich NAS der durch Ferro gehende Nullmeridian (0° oder 360°).



Ist gegeben die geogr. Breite und Länge der beiden Orte $BD = b$, $CE = b'$, $AD = l$, $AE = l'$, also auch der Unterschied ihrer Längen $l' - l = DE = d$ bekannt, so hat man in dem sph. Dreieck NBC, dessen drei Spitzen der Nordpol und die beiden Orte sind, aus zwei Seiten $NB = 90^\circ - b$, $NC = 90^\circ - b'$ und dem Zwischenwinkel $BNC = d$ die Seite BC zu berechnen, also (§ 20, 6)

$\cos BC = \cos(90^\circ - b) \cos(90^\circ - b') + \sin(90^\circ - b) \sin(90^\circ - b') \cos d$ oder

$$(1) \quad \cos BC = \sin b \sin b' + \cos b \cos b' \cos d.$$

Da 1° des Umkreises der Erde 15 geogr. Meilen beträgt, so wird BC in geogr. Meilen ausgedrückt, wenn man die gefundene Anzahl Grade des Bogens mit 15 multiplicirt.

Der Winkel NBC, den der Bogen BC mit dem Meridian von B bildet, ist das vom Nordpunkte aus gezählte Azimuth des von B aus betrachteten Ortes C, d. h. in B erscheint am Horizonte die Abweichung der Lage des Ortes C vom Nordpunkte unter dem Winkel NBC. Ebenso ist der Winkel NCB das vom Nordpunkte an gezählte Azimuth des Ortes B, von C aus gesehen. In der Geodäsie und Nautik wird für einen bestimmten Standpunkt die Abweichung eines Punktes am Horizonte vom Nordpunkte nach Ost oder West entsprechend das nordöstliche oder nordwestliche Azimuth, und ebenso die Abweichung eines Punktes vom Südpunkte nach Ost oder West das südöstliche oder südwestliche Azimuth dieses Punktes genannt. Zufolge § 20,4 ist

$$\cotg NBC = \frac{\sin(90^\circ - b) \cotg(90^\circ - b') - \cos(90^\circ - b) \cos d}{\sin d} \quad \text{oder}$$

$$(2) \quad \cotg NBC = \frac{\cos b \operatorname{tg} b' - \sin b \cos d}{\sin d}, \text{ ebenso}$$

$$(3) \quad \cotg NCB = \frac{\cos b' \operatorname{tg} b - \sin b' \cos d}{\sin d}.$$

Liegen die beiden Orte auf verschiedenen Seiten des Aequators, wie B und F, so ist wegen der nunmehr umgekehrten Lage der Breite $EF = b'$ die Größe b' in den vorstehenden Formeln negativ zu setzen, denn es ist

$$\cotg NF = \cotg(90^\circ + b') = -\operatorname{tg} b' \quad \text{und auch} \quad \operatorname{tg}(-b') = -\operatorname{tg} b'$$

$$\cos NF = \cos(90^\circ + b') = -\sin b' \quad \text{und auch} \quad \sin(-b') = -\sin b'$$

Alles Uebrige bleibt in den Formeln wie vorher.

§ 63. Für Berlin (B) ist die geogr. Breite $b = 52^\circ 31' 12''$ und die Länge $l = 31^\circ 3' 30''$; für St. Petersburg (C) ist $b' = 59^\circ 56' 24''$ und $l' = 47^\circ 59'$. Man soll die kürzeste Entfernung (BC) beider Orte und die Azimuthe (NBC und NCB) ihrer Lage zu einander bestimmen.

Aufl. $BC = 11^\circ 55' 24,55'' = 178,8522$ geogr. Meilen.

$$NBC = 44^\circ 53' 42,45'' \quad \text{und} \quad NCB = 120^\circ 58' 28,91''.$$

§ 64. Die kürzeste Entfernung zwischen Paris unter 20° L. und $48^\circ 50' 13'' \text{ B.}$ und Dorpat unter $44^\circ 23' 10'' \text{ L.}$ und $58^\circ 22' 47'' \text{ B.}$ zu finden.

Aufl. $17^\circ 10' 52,77'' = 257,7198$ Meilen.

§ 65. Die Entfernung zwischen Philadelphia (B) und dem Cap der guten Hoffnung (F) zu finden, wenn für diese Orte entsprechend gegeben ist:

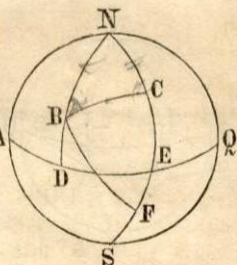
$$b = +39^\circ 57' 7,5'' \quad \text{und} \quad l = 302^\circ 30' 38,1''$$

$$b' = -33^\circ 56' 3'' \quad \text{und} \quad l' = 36^\circ 8' 31,1''.$$

Aufl. Der Unterschied der Längen östlich von Ferro ist $l - l' = 266^\circ 22' 7''$. Da aber der kleinere von beiden, zwischen B und F liegenden Bogen die gesuchte Entfernung giebt, so hat man auch $d = 360^\circ - (l - l') = 93^\circ 37' 53''$ oder den Unterschied der Längen westlich von Ferro zu nehmen und findet dann (§ 62, 1)

$$BF = 113^\circ 30' 1,46'' = 1702,865 \text{ Meilen.}$$

§ 66. Die geogr. Breite von Dorpat (C) ist $b = 58^{\circ} 22' 47''$, die Breite von Jacobstadt (B) ist $b' = 56^{\circ} 30' 4,6''$, die Entfernung (BC) beider Orte von einander $e = 29,12425$ Meilen, und in Jacobstadt beträgt das nordöstliche Azimuth (NBC) von Dorpat $a = 14^{\circ} 17' 40''$. Man soll den Längenunterschied d beider Orte und die Größe des Erdradius r finden.



Aufl. Im $\triangle NBC$ ist gegeben $NC = 90^{\circ} - b$, $NB = 90^{\circ} - b'$, $\sphericalangle NBC = a$, gesucht $\sphericalangle N = \text{Bog. DE} = d$ und $BC = e$ in Graden, also (§ 22,1)

$$\sin NCB = \frac{\sin(90^{\circ} - b') \sin a}{\sin(90^{\circ} - b)} = \frac{\sin a \cos b'}{\cos b}.$$

Von den beiden Werthen für NCB ist hier der stumpfe Winkel $164^{\circ} 56' 5,41''$ zu nehmen. Nun ist (§ 22, 2 und 3)

$$\cotg \frac{1}{2} d = \frac{\sin \frac{1}{2}(b + b')}{\cos \frac{1}{2}(b - b')} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(NCB + a), \text{ also } d = 54' 51,58'',$$

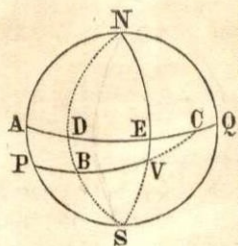
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} e = \frac{\cos \frac{1}{2}(NCB + a)}{\cos \frac{1}{2}(NCB - a)} \cotg \frac{1}{2}(b + b'), \text{ woraus folgt}$$

$e = 1^{\circ} 56' 29,82'' = 1,941683$ Grade. Man findet jetzt aus der Proportion $180^{\circ} : e^{\circ} = \pi r : 29,12425$

$$r = \frac{180 \cdot 29,12425}{e \pi} = 859,407 \text{ Meilen.}$$

§ 67. Bei der Schifffahrt im größten Kreise kommt es außer der Berechnung des kürzesten Weges darauf an, die Azimuthe des fahrenden Schiffes an den beiden Endpunkten und einigen Zwischenpunkten, also die von dem zurückzulegenden Wege mit den Meridianen jener Orte gebildeten Winkel zu bestimmen, um sowol dem Schiffe bei der Abfahrt die nöthige Richtung zu geben als auch seinen Kurs zur Erhaltung desselben in dem größten Kreise reguliren zu können.

Ein Schiff fährt im größten Kreise von Port Jackson (P) unter $b = -33^{\circ} 52'$ und $l = 168^{\circ} 55' 50''$ (östl. von Ferro) nach Valparaiso (V) unter $b' = -33^{\circ} 1'$ und $l' = 305^{\circ} 47' 50''$. Der Meridian eines Zwischenpunktes B liege um $AD = 60^{\circ}$ östlich von P. Man soll bestimmen 1) die Länge des We-



ges PV und die nordöstlichen Azimuthe NPV und NVC des Kurses in P und V, 2) die geogr. Breite BD des Zwischenpunktes B, seine Entfernung von P und das nordöstliche Azimut NBV des Kurses in B, 3) unter welchem Winkel (ACP) und unter welchem Grade der Länge die verlängerte Kurslinie des Schiffes den Aequator AQ schneidet.

Aufl. 1) Im $\triangle PNV$ ist gegeben $NP = 90^\circ + b$, $NV = 90^\circ + b'$, $\sphericalangle PNV = l' - l = d = 136^\circ 52'$; gesucht PV, $\sphericalangle NPV = P$ und $\sphericalangle PVN = V$. Aus § 20, 1, 2, 3 folgt durch Reduction

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(V + P) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b - b') \operatorname{cotg} \frac{1}{2} d}{-\sin \frac{1}{2}(b + b')}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(V - P) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b - b') \operatorname{cotg} \frac{1}{2} d}{\cos \frac{1}{2}(b + b')}, \text{ also}$$

$$V = 144^\circ 33' 10,54'' \text{ und daher } NVC = 35^\circ 26' 49,46'',$$

$$P = NPV = 144^\circ 9' 1,1''.$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} PV = - \frac{\cos \frac{1}{2}(V + P) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(b + b')}{\cos \frac{1}{2}(V - P)},$$

also $PV = 101^\circ 47' 51,14'' = 6107,852$ Seemeilen ($1^\circ = 60$ Seem.)

2) Im $\triangle PNB$ ist gegeben $NP = 90^\circ + b$, $\sphericalangle PNB = \text{Bog. AD} = 60^\circ$, $\sphericalangle NPB = 144^\circ 9' 1,1''$; gesucht $NB = 90^\circ + BD = p$, woraus sich BD ergibt, ferner $PB = n$ und $\sphericalangle NBP = B$. Aus § 21, 1, 2, 3 folgt durch Reduction

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(p + n) = \frac{\cos \frac{1}{2}(P - N) \operatorname{cotg} (45^\circ - \frac{1}{2} b)}{\cos \frac{1}{2}(P + N)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(p - n) = \frac{\sin \frac{1}{2}(P - N) \operatorname{cotg} (45^\circ - \frac{1}{2} b)}{\sin \frac{1}{2}(P + N)}, \text{ also}$$

$p = 150^\circ 39' 35,22''$, folglich $BD = p - 90^\circ = 60^\circ 39' 35,22''$,

$n = PB = 46^\circ 25' 56,7'' = 2785,945$ Seemeilen.

Ferner hat man

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} B = \frac{\cos \frac{1}{2}(p + n) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(NPB + PNB)}{\cos \frac{1}{2}(p - n)}, \text{ also}$$

$$B = NBP = 82^{\circ} 57' 20,36'', \text{ folglich}$$

$$\sphericalangle NBV = 97^{\circ} 2' 39,64''.$$

3) In dem bei A rechtwinkligen $\triangle ACP$ ist $AP = b$ und $\sphericalangle P = 144^{\circ} 9' 1,1''$, folglich (§ 9, 3 und 1)

$$\cos ACP = \cos b \sin P, \text{ also } \sphericalangle ACP = 60^{\circ} 54' 9,37''$$

$$\text{tg } AC = \sin b \text{ tg } P, \text{ also } AC = 158^{\circ} 4' 5''$$

Da der Ort P die Länge $l = 168^{\circ} 55' 50''$ hat, so schneidet die Kurslinie den Aequator unter $AC + l = 326^{\circ} 59' 55''$ östl. Länge.

§ 68. Ein Schiff verläßt Cap Vizard unter $12^{\circ} 30'$ D. L. (von Ferro) und $49^{\circ} 58'$ N. B. mit einem südwestlichen Azimuthe von $33^{\circ} 45'$ und segelt im größten Kreise. 1) Unter welchem Grad der Länge, 2) nach wieviel Seemeilen, 3) mit welchem Azimuthe durchschneidet es den Aequator?

Aufl. 1) $14^{\circ} 35' 40,17''$ westlich von Ferro.

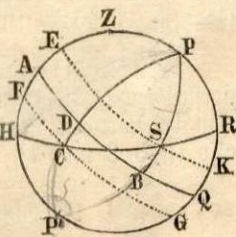
2) $55^{\circ} 3' 55,05'' = 3303,9175$ Seemeilen.

3) nordöstliches Azimuth $20^{\circ} 56' 17,62''$.

§ 69. Wie lange befindet sich für Wien, dessen Polhöhe $p = 48^{\circ} 12' 35''$ beträgt, die Sonne an den beiden Tagen über dem Horizonte, an welchen sie 1) die nördliche Declination $d = 7^{\circ} 8' 10''$, 2) die südliche Declination $d = 23^{\circ} 1' 40''$ hat?

Aufl. Der Kreis sei der Meridian von Wien, H der Süd- und R der Nordpunkt des Horizontes, AQ der Aequator, P und P' der Nord- und der Südpol, also $PR = p$ die Polhöhe.

1) Hat die Sonne eine nördliche Declination, H so bewegt sie sich auf einem nördlichen Parallelkreise KE. Ist nun S ihr Aufgangspunkt am Horizonte und PSB der Declinationskreis, so ist $SB = d$ und $\sphericalangle HPS = s$ der östliche vom Bogen AB gemessene Stundenwinkel. Da der halbe Tagebogen SE als Parallelkreis dieselbe Anzahl Grade hat wie AB, so ist auch $s = \text{Bogen } SE$. Der in Zeit verwandelte Stundenwinkel s ($15^{\circ} = 1^h$) giebt die Zeit vom Auf-



gange der Sonne bis zu ihrer Culmination in E, d. h. die Dauer des Vormittags, wovon das Doppelte die gesuchte Tageslänge ist. — In dem bei H rechtwinkligen Dreieck HPS ist also $PH = 180^\circ - PR = 180^\circ - p$ und $PS = 90^\circ - d$, folglich (§ 6, 3)

$$\cos s = \frac{\operatorname{tg} (180^\circ - p)}{\operatorname{tg} (90^\circ - d)} = -\operatorname{tg} p \operatorname{tg} d.$$

$$\text{also } 2s = 196^\circ 6' 14,78'' = 13^h 4^m 24,98^s.$$

2) Befindet sich die Sonne auf einem südlichen Parallelkreise FG in ihrem Aufgangspunkte C, so ist $CD = d$ und CF der halbe Tagesbogen, dem der östliche Stundenwinkel $HPC = s'$ entspricht. Im rechth. $\triangle HPC$ ist $PH = 180^\circ - p$ und $PC = 90^\circ + d$, also wie vorhin

$$\cos s' = \frac{\operatorname{tg} (180^\circ - p)}{\operatorname{tg} (90^\circ + d)} = \operatorname{tg} p \operatorname{tg} d,$$

$$\text{folglich } 2s' = 123^\circ 12' 34'' = 8^h 12^m 52,26^s.$$

Im ersten Falle, wo die Sonne eine nördliche Declination hat, ist $\cos s$ negativ, also $s > 90^\circ$, woraus folgt, daß der Tagesbogen der Sonne für den gegebenen Ort größer ist als der Nachtbogen. Im zweiten Falle ist $s' < 90^\circ$, also der Tagesbogen kleiner als der Nachtbogen.

Die Declination der Sonne findet sich in den astronomischen Tafeln (z. B. in dem Berliner astronomischen Jahrbuche) für jeden Tag des Jahres berechnet.

§ 70. Für die Polhöhe von Mitau $p = 56^\circ 39'$ den Auf- und Untergang der Sonne am 27. April und 27. November und die Azimuthe der auf- und untergehenden Sonne zu berechnen, wenn die Declination derselben an jenen Tagen $d = +13^\circ 52'$ und $d = -21^\circ 10'$ beträgt.

Aufsl. 1) Wenn in Fig. § 69 der Kreis den Meridian von Mitau vorstellt, während alles Uebrige die frühere Bedeutung behält, so ist in dem bei R rechtwinkligen $\triangle PRS$ bekannt $PR = p$ und $PS = 90^\circ - d$, also (§ 6, 3 und 1)

$$\cos RPS = \frac{\operatorname{tg} p}{\operatorname{tg} (90^\circ - d)} = \operatorname{tg} p \operatorname{tg} d$$

$$\cos RS = \frac{\cos (90^\circ - d)}{\cos p} = \frac{\sin d}{\cos p}.$$

Man findet $\sphericalangle RPS = 67^\circ 58' 12,2''$, also ist (§ 56, 3)

$$\text{Sonnenaufgang } \frac{\sphericalangle RPS}{15} = 4^h 31^m 52,48^s.$$

$$\text{Sonnenuntergang} = 12^h - (4^h 31^m 52,48^s) = 7^h 28^m 7,52^s.$$

Ferner ist $RS = 64^\circ 9' 15,73''$ das Azimuth der auf- und untergehenden Sonne von Nord (R) aus bezüglich über Ost oder West nach Süd gezählt.

2) Ist C der Aufgangspunkt der Sonne, so ist in dem $\triangle PRC$ bekannt $PR = p$ und $PC = 90^\circ + d$, also wie vorhin

$$\cos RPC = \frac{\text{tg } p}{\text{tg } (90^\circ + d)} = - \text{tg } p \text{ tg } d$$

$$\cos RC = \frac{\cos (90^\circ + d)}{\cos p} = - \frac{\sin d}{\cos p}$$

Es ist $PRC = 126^\circ 2' 22,55''$, also Aufgang $= 8^h 24^m 9,5^s$,

Untergang $= 3^h 35^m 50,5^s$ und Azimuth $RC = 131^\circ 3' 25,1''$.

Die hier berechnete Zeit ist wahre Sonnenzeit. Will man sie in mittlere Zeit verwandeln und giebt die Zeitgleichung (§ 59, 4) z. B. für den 27. April — 2 Min. an, so geht an jenem Tage die Sonne um 2 Min. früher, also um $4^h 29^m 52,48^s$ auf und um $7^h 26^m 7,52^s$ unter.

§ 71. Die Polhöhe (p) von Riga beträgt $56^\circ 57'$ und die von Reval $59^\circ 26' 30''$. Man soll für beide Orte berechnen 1) die Dauer des längsten Tages, 2) die Morgen- und Abendweite an diesem Tage, d. h. die Bogen des Horizontes zwischen dem Ostpunkte und dem Aufgangspunkte und zwischen dem Westpunkte und dem Untergangspunkte der Sonne.

Aufsl. (Fig. § 69). Der längste Tag tritt am 22. Juni ein, wenn die Sonne ihre größte nördliche Declination $d = 23^\circ 28'$ erreicht hat.

1) Für den Stundenwinkel s oder den halben Tagebogen ist (§ 69, 1)

$$\cos s = - \text{tg } p \text{ tg } d$$

Für Riga ist $s = 131^\circ 51' 58,08''$, also der längste Tag gleich $\frac{2s}{15} = 17^h 34^m 55,74^s$.

Für Reval ist $s = 137^\circ 19' 50,56''$, also der längste Tag gleich $18^h 18^m 12,67^s$.

2) Das Azimuth der auf- und untergehenden Sonne vom Nordpunkte R aus gerechnet ist RS, daher die Morgen- oder Abendweite $W = 90^\circ - RS$, folglich (§ 70, 1)

$$\sin W = \cos RS = \frac{\sin d}{\cos p}, \text{ also nordwärts gezählt}$$

für Riga $W = 46^\circ 54' 3,5''$ und für Reval $W = 51^\circ 33' 32,27''$.

§ 72. Für St. Petersburg, dessen Polhöhe $p = 59^\circ 56'$ ist, die Zeit des Aufganges und des Unterganges der Sonne am längsten und am kürzesten Tage zu bestimmen.

Aufl. 1) Für den längsten Tag (22. Juni), wo die Declination der Sonne $d = 23^\circ 28'$ ist, ergibt sich aus § 70, 1

Aufgang $2^h 45^m 40,33^s$ und Untergang $9^h 14^m 19,67^s$.

2) Für den kürzesten Tag (22. December) ist $d = -23^\circ 28'$, also

Aufgang $9^h 14^m 59,67^s$ und Untergang $2^h 45^m 0,33^s$.

Mit Hilfe der Zeitgleichung kann die hier gefundene wahre Sonnenzeit in mittlere verwandelt werden (§ 70).

§ 73. Die Polhöhe p von Dorpat zu finden, wenn der längste Tag daselbst $t = 17^h 58^m 42,13^s$ dauert.

Aufl. Der halbe Tagebogen (Stundenwinkel) in Graden ist $s = \frac{15t}{2} = 134^\circ 50' 15,9''$. Da (§ 71, 1) $\cos s = -\operatorname{tg} p \operatorname{tg} d$, wo $d = 23^\circ 28'$ ist, so hat man

$$\operatorname{tg} p = -\cos \frac{15t}{2} \cdot \operatorname{cotg} d, \text{ also } p = 58^\circ 22' 48''.$$

§ 74. Unter welcher Breite (p) geht die Sonne am längsten Tage nicht unter?

Aufl. In diesem Falle ist der ganze Tagebogen

$2s = 24$ Stunden $= 360^\circ$, daher (§ 73)

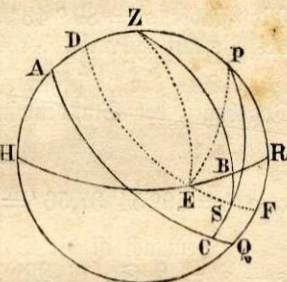
$\operatorname{tgp} = -\cos 180^\circ \operatorname{cotg} d = \operatorname{cotg} 23^\circ 28'$, also

$p = 90^\circ - 23^\circ 28' = 66^\circ 32'$.

§ 75. Ehe die Sonne aufgeht und nachdem sie untergegangen ist, wird durch Zurückwerfung des Lichtes Dämmerung erzeugt. Man unterscheidet bürgerliche und astronomische Dämmerung. Gewöhnlich rechnet man die Dauer der bürgerlichen Abenddämmerung von Sonnenuntergang bis zu der Zeit, wo die Sonne ungefähr 6° , die astronomische dagegen so lange, bis die Sonne 18° unter den Horizont hinabgesunken ist. Entsprechend wird die Dauer der Morgendämmerung angenommen.

Für Riga, dessen Polhöhe $p = 56^\circ 57'$ ist, die Dauer der bürgerlichen Dämmerung am 1. Mai zu bestimmen, zu welcher Zeit die Declination der Sonne $d = 15^\circ 13' 40''$ beträgt.

Aufl. Stellt der Kreis den Meridian von Riga vor, H und R den Süd- und den Nordpunkt des Horizontes, Z, P, S bezüglich Zenith, Nordpol und Sonne, und behalten wir im Uebrigen die früheren Bezeichnungen in der Figur bei, so ist $SC = d$ und $BS = h = 6^\circ$ die Tiefe der Sonne unter dem Horizonte, ferner im $\triangle ZPS$ bekannt $ZP = 90^\circ - p$, $PS = 90^\circ - d$, $ZS = 90^\circ + h$. Hieraus bestimmt man zuerst den Stundenwinkel $ZPS = s$, welcher dem von der Sonne seit Beginn der Morgendämmerung bis zu ihrer Culmination beschriebenen Bogen SD gleich ist, also in Zeit verwandelt die Dauer des Vormittags nebst der Morgendämmerung angiebt, nämlich (§ 18, 1)



$$\cos s = \frac{\cos(90^\circ + h) - \cos(90^\circ - d) \cos(90^\circ - p)}{\sin(90^\circ - d) \sin(90^\circ - p)} \quad \text{oder}$$

$$\cos s = - \frac{\sin h + \sin d \sin p}{\cos d \cos p},$$

$$\text{also } s = 128^\circ 5' 54,03'' = 8 \text{ St. } 32 \text{ Min. } 23, 6 \text{ Sec.}$$

Jetzt berechnet man aus p und d die Dauer des Vormittags oder den Bogen ED, indem man sich die Sonne von S nach E fortgeschritten denkt, wodurch das Bogenstück $BS = h = 0$ wird, d. h. die Sonne hat bei ihrem Aufgange keine Tiefe oder Höhe. Setzt man in der obigen Formel $h = 0$ und in dem neuen $\triangle ZPE$ den Stundenwinkel $ZPE = s'$, so ist

$$\cos s' = - \frac{\sin d \sin p}{\cos d \cos p} = - \operatorname{tg} d \operatorname{tg} p,$$

$$\text{also } s' = 114^\circ 43' 55,1'' = 7 \text{ St. } 38 \text{ Min. } 55,6 \text{ Sec.}$$

Demnach ist die Dauer der Abend- oder Morgendämmerung gleich $s - s' = 53 \text{ Min. } 28 \text{ Sec.}$

§ 76. Für Halle unter der nördl. Breite $p = 51^{\circ} 30' 34''$ die Dauer der astronomischen Dämmerung zur Zeit des Winter-solstitiums zu finden.

Aufl. Am 22. December beträgt die Declination der Sonne $d = -23^{\circ} 28'$. Für die astronomische Dämmerung ist die Tiefe der Sonne unter dem Horizonte $h = 18^{\circ}$. Setzt man (§ 75) in der ersten Formel $-d$ statt d , so ist $\sin(-d) = -\sin d$ und $\cos(-d) = \cos d$, folglich

$$\cos s = \frac{-\sin h + \sin d \sin p}{\cos d \cos p}.$$

Man findet $s = 89^{\circ} 43' 55,19'' = 5$ St. 58 M. 55,68 Sec. die Dauer des Vormittags nebst der Dämmerung.

Aus der vorstehenden Formel folgt für $h = 0$, wenn dem halben Tagebogen der Stundenwinkel s' entspricht,

$$\cos s' = \operatorname{tg} d \operatorname{tg} p,$$

also $s' = 56^{\circ} 54' 37,56'' = 3$ St. 47 M. 38,5 Sec. = der Vormittagsdauer.

Demnach ist die Dauer der Abend- oder Morgendämmerung gleich $s - s' = 2$ St. 11 Min. 17,18 Sec.

§ 77. Wenn der Ort auf der Erde so gelegen ist, daß um Mitternacht die Sonne nicht tiefer als 18° unter den Horizont hinabsinkt, so tritt die immerwährende Dämmerung (die hellen Nächte) ein, indem alsdann Abend- und Morgendämmerung in einander übergehen. Dieses findet statt, wenn auf dem nördlichen Meridian PQ in Figur § 75 der Bogen $RF \leq 18^{\circ}$ ist. Da $PQ = 90^{\circ}$, $PR = p$, $FQ = d$, also unter jener Voraussetzung

$$QR = d + 18^{\circ} = 90^{\circ} - p \text{ ist, so muß}$$

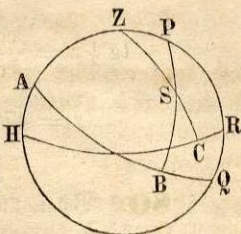
$$d = 72^{\circ} - p$$

sein, wenn immerwährende Dämmerung stattfinden soll. Letztere tritt also für einen bestimmten Ort an dem Tage ein, an welchem die Declination der Sonne die Größe $72^{\circ} - p$ erreicht, und sie wird sich stets wiederholen, so lange d gleich oder größer als $72^{\circ} - p$ bleibt. Wenn wiederum $d < 72^{\circ} - p$ geworden ist, so findet Finsterniß um Mitternacht statt.

Wollte man in der Aufgabe § 75 die Dauer der astronomischen Dämmerung für Riga am 1. Mai berechnen, also $h = 18^{\circ}$ setzen, so fände man $\cos s = 1,00561$, also einen unmöglichen Werth in Uebereinstimmung damit, daß für $p = 56^{\circ} 57'$ und $d = 15^{\circ} 13' 40''$ sich ergibt $d > 72^{\circ} - p$, also am 1. Mai für Riga keine völlige Finsterniß stattfindet.

§ 78. Um wie viel Uhr und in welchem Azimuthe (a) hat in Wien, dessen Polhöhe $p = 48^\circ 12' 35''$ ist, die Sonne eine Höhe von $h = 30^\circ$, wenn die Declination derselben $d = 9^\circ 19' 50''$ beträgt?

Aufl. Haben die Bezeichnungen in der Figur die frühere Bedeutung (§ 75), so ist $PR = p$, $SC = h$, $SB = d$, also in dem $\triangle PZS$ bekannt $ZP = 90^\circ - p$, $ZS = 90^\circ - h$, $PS = 90^\circ - d$. Da $\sphericalangle PZS = a$ und wenn man den Stundenwinkel $RPB = s$ setzt, der $\sphericalangle ZPS = 180^\circ - s$ ist, so hat man (§ 18, 1)



$$\cos(180^\circ - s) = \frac{\cos(90^\circ - h) - \cos(90^\circ - d) \cos(90^\circ - p)}{\sin(90^\circ - d) \sin(90^\circ - p)}, \text{ also}$$

$$1) \quad \cos s = \frac{\sin d \sin p - \sin h}{\cos d \cos p} \quad \text{und ebenso}$$

$$2) \quad \cos a = \frac{\sin d - \sin h \sin p}{\cos h \cos p}.$$

Man findet $s = 125^\circ 12' 23,92'' = 8^h 20^m 49,59^s$.

Die Sonne hat also am Vormittage um $8^h 20^m 49,59^s$ und am Nachmittage um $3^h 39^m 10,41^s$ die Höhe 30° .

Das Azimuthe ist $a = 111^\circ 24' 32,58''$ von Nord aus am Vormittage ostwärts und am Nachmittage westwärts gezählt.

§ 79. In Palermo, dessen Polhöhe $p = 38^\circ 6' 44''$ ist, wurde das Azimuthe a und die Zenithdistanz z eines Sternes in dem Augenblicke gesucht, als der Stundenwinkel $ZPS = s = 38^\circ 22'$ und die Declination des Sternes $d = 5^\circ 44'$ nördlich war. Man soll a und z finden. (Fig. § 78)

Aufl. In dem $\triangle PZS$ ist bekannt $PS = 90^\circ - d$, $PZ = 90^\circ - p$, $\sphericalangle ZPS = s$; gesucht $\sphericalangle PZS = a$ und die Seite $ZS = z$. Setzt man den (parallactischen) Winkel $ZSP = n$, so ist (§ 20, 1, 2, 3)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + n) = \frac{\cos \frac{1}{2}(90^\circ - d - 90^\circ + p)}{\cos \frac{1}{2}(180^\circ - p - d)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}s, \text{ also}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + n) = \frac{\cos \frac{1}{2}(p - d)}{\sin \frac{1}{2}(p + d)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}s, \text{ ebenso}$$

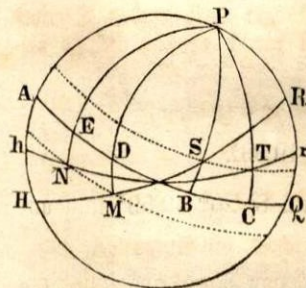
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - n) = \frac{\sin \frac{1}{2}(p - d)}{\cos \frac{1}{2}(p + d)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}s, \text{ folglich}$$

$$a = 123^{\circ} 7' 4,28'' \text{ und } n = 41^{\circ} 28' 21,56''$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}z = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + n)}{\cos \frac{1}{2}(a - n)} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(d + p), \text{ also}$$

$$z = 47^{\circ} 30' 58,18''.$$

§ 80. Von zwei auf demselben Meridian liegenden Orten X und Y hat der erste die Polhöhe $p = 30^{\circ}$, der andere die Polhöhe $p' = 60^{\circ}$. Wenn die Declination eines Sternes $d = 16^{\circ} 20'$ ist und zwar 1) nördlich und 2) südlich; um wie viel geht der Stern für den einen Ort früher auf als für den andern?



Aufl. Der Kreis sei der Meridian der beiden Orte, AQ der Äquator und P der Nordpol, ferner für X der Horizont HR, also $PR = p$, und für Y der Horizont hr, also $Pr = p'$.

1) Befindet sich der Stern in den Aufgangspunkten S und T, so ist $SB = TC = d$. Der Stundenwinkel $SPR = s$ entspricht der Aufgangszeit des Sternes für den Ort X, der Stundenwinkel $TPr = s'$ der Aufgangszeit des Sternes für den Ort Y. Zusage § 70, 1 ist

$$\cos s = \operatorname{tg} d \operatorname{tg} p \quad \text{und} \quad \cos s' = \operatorname{tg} d \operatorname{tg} p', \text{ also}$$

$$s = 80^{\circ} 15' 32,61'' \quad \text{und} \quad s' = 59^{\circ} 29' 49,78'',$$

$$\text{oder } s = 5^{\text{h}} 21^{\text{m}} 2,17^{\text{s}} \quad \text{und} \quad s' = 3^{\text{h}} 57^{\text{m}} 59,31^{\text{s}},$$

welches die Aufgangszeiten des Sternes für X und Y sind. Der Stern geht demnach für Y früher auf als für X um

$$s - s' = 1^{\text{h}} 23^{\text{m}} 2,86^{\text{s}}.$$

2) Befindet sich der Stern in den Aufgangspunkten M und N, so ist die südliche Declination desselben $MD = NE = d$. Für die beiden Stundenwinkel $MPR = s$ und $NPr = s'$ hat man (§ 70, 2)

$$\cos s = -\operatorname{tg} d \operatorname{tg} p \quad \text{und} \quad \cos s' = -\operatorname{tg} d \operatorname{tg} p', \text{ also}$$

$$s = 99^{\circ} 44' 27,39'' \quad \text{und} \quad s' = 120^{\circ} 30' 10,22''$$

$$\text{oder } s = 6^{\text{h}} 38^{\text{m}} 57,82^{\text{s}} \quad \text{und} \quad s' = 8^{\text{h}} 2^{\text{m}} 0,68^{\text{s}}.$$

Der Stern geht also für X früher als für Y auf um

$$s' - s = 1^{\text{h}} 23^{\text{m}} 2,86^{\text{s}}.$$

Der Ort, welcher die kleinere Polhöhe hat oder südlicher liegt, sieht also den Stern später aufgehen, wenn dessen Declination nördlich ist, dagegen früher, wenn die Declination südlich ist.

§ 81. Dorpat hat die geogr. Breite $b = 58^{\circ} 22' 47''$ und die Länge $l = 44^{\circ} 23' 30''$; Rom hat die Breite $b = 41^{\circ} 53' 54''$ und die Länge $l' = 30^{\circ} 8' 45''$ (östlich von Ferro). Wenn die nördliche Declination eines Sternes $d = 7^{\circ} 22' 28''$ beträgt; um wie viel geht derselbe für Dorpat früher auf als für Rom?

Aufl. Der Stundenwinkel des für Dorpat aufgehenden Sternes sei s , und des für Rom aufgehenden s' , so ist für dieselbe Länge beider Orte (§ 80, 1)

$$\cos s = \operatorname{tg} d \operatorname{tg} b \quad \text{und} \quad \cos s' = \operatorname{tg} d \operatorname{tg} b',$$

$$s = 77^{\circ} 51' 55,52'' = 5^{\text{h}} 11^{\text{m}} 27,7^{\text{s}}$$

$$s' = 83^{\circ} 19' 54,68'' = 5^{\text{h}} 13^{\text{m}} 19,64^{\text{s}},$$

$$\text{also} \quad s' - s = 1^{\text{m}} 51,94^{\text{s}} \text{ Zeitunterschied im Aufgange.}$$

Hierzu muß der Längenunterschied $l - l' = 14^{\circ} 14' 45'' = 56^{\text{m}} 59^{\text{s}}$ addirt werden, also geht der Stern für Dorpat um 58 Min. 50,94 Sec. früher auf.

§ 82. In Göttingen, dessen Polhöhe $p = 51^{\circ} 31' 54''$ ist, wurde einst am Nachmittage, als die Uhr 4 St. 2 Min. (mittlere oder bürgerliche Zeit) zeigte, die Höhe der Sonne $h = 24^{\circ} 37' 30''$ gefunden. Wenn die Declination der Sonne damals $d = +2^{\circ} 50' 42''$ betrug; um wieviel differirte die Uhr von der wahren Sonnenzeit?

Aufl. Fig. § 78. Im $\triangle ZPS$ findet man aus $ZP = 90^{\circ} - p$, $ZS = 90^{\circ} - h$ und $PS = 90^{\circ} - d$ den Stundenwinkel $ZPS = s$ (§ 18, 1)

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin d \sin p}{\cos d \cos p}, \quad \text{also} \quad s = 52^{\circ} 32' 44,3''.$$

Die Beobachtung fand also nach wahrer Sonnenzeit statt um $3^{\text{h}} 30^{\text{m}} 10,95^{\text{s}}$ und die Uhr ging demnach der wahren Zeit voraus um 31 Min. 49,05 Sec.

§ 83. In Freiburg, dessen Polhöhe $p = 48^\circ$ ist, fand man die Höhe der Sonne, als die Uhr $1^h 58^m 36^s$ zeigte, gleich $h = 30^\circ$. Wenn für jenen Tag die Zeitgleichung $+ 12^m 2^s$ und die Declination der Sonne $d = -6^\circ 32' 55''$ betrug; welches war der wahre Beobachtungsmoment nach mittlerer Zeit?

Aufl. Wie in § 82 findet man für den Stundenwinkel

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin d \sin p}{\cos d \cos p}, \text{ also } s = 28^\circ 24' 4,3''.$$

Die Beobachtung fand demnach statt:

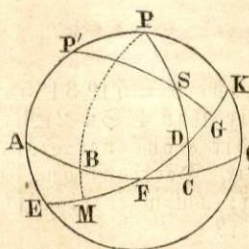
nach wahrer Sonnenzeit um $1^h 53^m 36,28^s$,

folglich, wenn man hierzu den Werth der Zeitgleichung addirt,

nach richtiger mittlerer Zeit um $2^h 5^m 38,28^s$.

Da aber die Uhr $1^h 58^m 36^s$ zeigte, so ergibt sich, daß dieselbe um 7 Min. 2,28 Sec. nachging.

§ 84. Aus der Rectascension $r = 60^\circ$ und der Declination $d = 40^\circ$ eines Sternes sowie aus der Schiefe der Ekliptik $e = 23^\circ 28'$ die Länge l und die Breite b des Sternes zu finden.



Aufl. Sei AQ der Aequator, EK die Ekliptik, F der Frühlingspunkt, P der Nordpol, P' der Pol der Ekliptik, S der Stern, PC der Declinationskreis und P'G der Breitenkreis desselben, so ist $FC = r$, $SC = d$, $PP' = KQ = e$, $FG = l$, $SG = b$ (§ 57 und 58). In dem $\triangle PSP'$ ist gegeben $PP' = e$, $PS = 90^\circ - d$, $P'S = \text{Bog. } AC = 90^\circ + r$, gesucht $\sphericalangle PP'S = \text{Bog. } GK = 90^\circ - l$ und $P'S = 90^\circ - b$. Setzt man den Positionswinkel des Sternes $PSP' = n$, so ist (§ 20)

$$\text{tg } \frac{1}{2} (90^\circ - l + n) = \frac{\cos \frac{1}{2} (90^\circ - d - e)}{\cos \frac{1}{2} (90^\circ - d + e)} \cotg \frac{1}{2} (90^\circ + r)$$

$$\text{tg } \frac{1}{2} (90^\circ - l - n) = \frac{\sin \frac{1}{2} (90^\circ - d - e)}{\sin \frac{1}{2} (90^\circ - d + e)} \cotg (90^\circ + r)$$

$$\text{also } l = 66^\circ 6' 15,33'' \text{ und } n = 12^\circ 9' 20,91''.$$

Die Seite $P'S = 90^\circ - b$ findet man jetzt nach § 11, nämlich

$$\sin(90^\circ - b) = \frac{\sin e}{\sin n} \sin(90^\circ + r) \quad \text{oder} \quad \cos b = \frac{\sin e \cos r}{\sin n},$$

folglich $b = 18^\circ 59' 32,64''$.

§ 85. Aus der Länge $l = 60^\circ$ und der nördl. Breite $b = 10^\circ$ eines Sternes nebst der Schiefe der Ekliptik $e = 23^\circ 28'$ soll die Rectascension r und die Declination d des Sternes gefunden werden.

Aufl. Den Bezeichnungen der Figur § 84 zufolge ist $FG = l$ und $SG = b$, also im $\triangle PSP'$ gegeben $\sphericalangle PP'S = 90^\circ - l$, $P'S = 90^\circ - b$, $PP' = e$, gesucht $\sphericalangle P'PS = 90^\circ + r$ und $PS = 90^\circ - d$. Aus § 20, 4 und 6 folgt durch Reduction

$$\operatorname{tg} r = \frac{\cos e \sin l - \sin e \operatorname{tg} b}{\cos l}, \quad \text{also} \quad r = 55^\circ 22' 52,24''$$

$$\sin d = \sin b \cos e + \cos b \sin e \sin l, \quad \text{also} \quad d = 29^\circ 55' 40,83''.$$

§ 86. Die Declination d der Sonne zu finden, wenn außer der Schiefe der Ekliptik $e = 23^\circ 28'$ die Rectascension der Sonne, nämlich 1) $r = 42^\circ 7' 10''$, und 2) $r = 340^\circ$ gegeben ist. (Fig. § 84)

Aufl. Befindet sich die Sonne auf der Ekliptik in D , so ist in dem bei C rechth. $\triangle CDF$ gegeben $FC = r$ und $\sphericalangle CFD = e$, gesucht $CD = d$, folglich (§ 9, 1)

$$\operatorname{tg} d = \sin r \operatorname{tg} e.$$

$$1) \quad \text{Für } r = 42^\circ 7' 10'' \text{ ist } d = 16^\circ 13' 59,54''.$$

$$2) \quad \text{Für } r = 340^\circ \text{ ist } \operatorname{tg} d = \sin 340 \operatorname{tg} e = -\sin 20^\circ \operatorname{tg} e.$$

Da der größte absolute Werth, den d haben kann, gleich e ist und weil $-\operatorname{tg} d = \operatorname{tg}(-d)$, so setze man

$$\operatorname{tg}(-d) = \sin 20^\circ \operatorname{tg} e, \quad \text{woraus folgt } d = -8^\circ 26' 43,67'',$$

d. h. die Declination der Sonne ist südlich. Dieses ergibt sich auch aus der Figur. Geht man nämlich vom Frühlingspunkte F auf dem Aequator in der Richtung FCQ ... bis 340° , so gelangt man im vierten Quadranten dieses Umfanges zum Punkte B , so daß $FB = 20^\circ$ ist; der durch B gelegte Stundenkreis PM giebt in M den Ort der Sonne an, deren Declination MB südlich ist.

§ 87. Die Rectascension r und die Declination d der Sonne zu finden, wenn außer der Schiefe der Ekliptik $e = 23^{\circ} 28'$ gegeben ist die Länge der Sonne, nämlich 1) $l = 36^{\circ} 59'$ und 2) $l = 245^{\circ}$. (Fig. § 84).

Aufl. Bezeichnet D die Sonne, so ist in dem bei C rechth. $\triangle CDF$ gegeben $\sphericalangle CFD = e$ und $FD = l$, gesucht $FC = r$ und $CD = d$, also (§ 7, 1 und 2)

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} l \cos e \quad \text{und} \quad \sin d = \sin l \sin e.$$

Dieses folgt auch aus § 85 für $b = 0$ (§ 58, 2).

1) Es ist $r = 34^{\circ} 38' 13,68''$ und $d = 13^{\circ} 51' 37,98''$

2) Für $l = 245^{\circ}$ ist $\operatorname{tg} 245^{\circ} = \operatorname{tg} (245^{\circ} - 180^{\circ}) = \operatorname{tg} 65^{\circ}$, folglich

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} 65^{\circ} \cos 23^{\circ} 28', \quad \text{also} \quad r = 63^{\circ} 3' 12,16''.$$

Da aber die gegebene Länge $l = 245^{\circ}$ dem dritten Quadranten angehört, so fällt auch die Rectascension in diesen; folglich ist

$$r = 63^{\circ} 3' 12,16'' + 180^{\circ} = 243^{\circ} 3' 12,16''.$$

Ferner ist $\sin l = \sin 245^{\circ} = -\sin (245^{\circ} - 180^{\circ}) = -\sin 65^{\circ}$, also

$$\sin d = -\sin 65^{\circ} \sin 23^{\circ} 28' \quad \text{oder wie in § 86,2}$$

$$\sin(-d) = \sin 65^{\circ} \sin 23^{\circ} 28', \quad \text{also} \quad d = -21^{\circ} 9' 21''$$

§ 88. An einem Orte war die Culminationshöhe der Sonne $H = 55^{\circ} 50'$, und nach $t = 3$ St. 12 Min. war ihre Höhe $h = 40^{\circ}$. Man sucht die Polhöhe p des Ortes und die Declination d der Sonne. (Fig. § 78).

Aufl. Ist die Sonne aus dem Meridian PH nach ihrer Culmination herausgetreten und während der Zeit t nach S fortgeschritten, so ist in dem $\triangle ZPS$ die Seite $ZS = 90^{\circ} - h$, $PS = 90^{\circ} - d$, $ZP = 90^{\circ} - p$ und der Stundenwinkel ZPS im Bogenmaße $t = 48^{\circ}$, also (§ 12, 1)

$$\cos(90^{\circ} - h) = \cos(90^{\circ} - d) \cos(90^{\circ} - p) + \sin(90^{\circ} - d) \sin(90^{\circ} - p) \cos t \quad \text{oder}$$

$$(1) \quad \sin h = \sin d \sin p + \cos d \cos p \cos t.$$

Für den Augenblick der Culmination ist $t = 0$, also $\cos t = 1$; daher giebt die Gl. (1) für diesen Fall

$$(2) \quad \sin H = \sin d \sin p + \cos d \cos p = \cos(p - d), \quad \text{also}$$

$$(3) \quad p - d = 90^\circ - H = 34^\circ 10'.$$

Die Subtraction der Gl. (1) von (2) giebt

$$\sin H - \sin h = \cos d \cos p (1 - \cos t) = \cos d \cos p \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2} t, \quad \text{also}$$

$$(4) \quad \cos d \cos p = \frac{\sin H - \sin h}{2 \sin^2 \frac{1}{2} t}$$

Durch Substitution dieses Werthes in (2) ergibt sich

$$(5) \quad \sin d \sin p = \sin H - \frac{\sin H - \sin h}{2 \sin^2 \frac{1}{2} t}.$$

Subtrahirt man (5) von (4), so folgt

$$\cos d \cos p - \sin d \sin p = \frac{\sin H - \sin h}{\sin^2 \frac{1}{2} t} - \sin H \quad \text{oder (§ 2, 2 und 11)}$$

$$(6) \quad \cos(p + d) = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(H + h) \sin \frac{1}{2}(H - h)}{\sin^2 \frac{1}{2} t} - \sin H.$$

Hat man hieraus $p + d$ berechnet, so findet man aus $p + d$ und $p - d$ in (3), indem man die Differenz zur Summe addirt und davon abzieht

$$p = 53^\circ 41' 50,72'' \quad \text{und} \quad d = 19^\circ 31' 50,72''.$$



Register.

(Die Zahlen bezeichnen die Paragraphen und deren Unterabtheilungen).

- Abenddämmerung** 75.
Abendweite 71.
Aequator 53.
Aequatorialcoordinaten 56, 3.
Aequatorhöhe 53, 3.
Aequinoctien 57, 1.
Arctischer und antarctischer Pol 53, 1.
Azimuth 55, 2; 62.
Breite, geographische 53, 2 und 4, eines
Gestirnes 58, 2.
Breitenkreis 58, 2.
Circumpolarsterne 54, 1.
Conjunction 58, 2.
Culmination, Culminationspunkt 54, 3.
Dämmerung 75; 76; 77.
Declination 56, 1; 69.
Declinationskreis 56, 1.
Ekliptik 57, 1.
Ekliptikcoordinaten 58, 2.
Frühlingspunkt 57, 1.
Geographische Breite und Länge 53, 2.
Gerade Aufsteigung 58, 1.
Hemisphäre 51, 3.
Herbstpunkt 57, 1.
Himmelsäquator 52, 2.
Höhe eines Sternes 55, 1.
Höhenkreis 55, 1.
Höhenparallaxe 51, 4.
Horizont 51, 3.
Horizontcoordinaten 55, 2.
Horizontalparallaxe 51, 4.
Jahr 60.
Kolor 57, 2.
Kompaß 52, 4.
Länge, geographische 53, 2, eines Gestirnes 58, 2.
Meridian 52, 3; 53, 1.
Mittag 54, 3.
Mittagshöhe 54, 3.
Mittagslinie 42, 3.
Mitternacht 54, 3.
Morgendämmerung 75.
Morgenweite 71.
Nachtbogen 54, 2.
Nachtgleichen 57, 1.
Nadir 51, 2.
Norden 52, 4.
Nordpol 53 und 57, 3.
Nullmeridian 53, 2.
Opposition 58, 2.
Osten 52, 4.
Parallaxe 51, 4.
Parallellkreis 52, 2; 53, 1.
Periodischer Monat 61.
Platonisches Jahr 60.
Polarkreis 53, 1; 57, 3.
Poldistanz 56, 1.
Polhöhe 53, 3 und 4.
Positionswinkel 84.
Präcession 60.
Projection 44.
Quadratur 58, 2.
Rectascension 58, 1.
Scheitelpunkt 51, 2.
Schiefe der Ekliptik 57, 1.
Siderisches Jahr 60, Monat 61.
Sommersolstitium 57, 2.
Sonntag, wahrer und mittlerer 59.
Sonnenmonat 61.
Sonnenzeit, wahre und mittlere 59.
Sternjahr 60.
Sterntag und Sternzeit 56, 3.
Stundenkreis 56, 1.
Stundenwinkel 56, 2 und 3.
Süden 52, 4.
Südpol 52, 1; 53, 1; 57, 3.
Synodischer Monat 61.
Tagebogen 54, 2.
Thierkreis 58, 3.
Tropisches Jahr 60.
Tropischer Monat 61.
Verticale 51, 2.
Verticalkreis 55, 1.
Weltaxe 52, 1.
Weltpole 52, 1.
Wendekreis 53, 1; 57, 3.
Westen 52, 4.
Windrose 52, 4.
Winter solstitium 57, 2.
Zeitgleichung 59, 4.
Zeichen der Ekliptik 53, 3.
Zenith 51, 2.
Zenithdistanz 55, 1.
Zodiacus 5, 3.